

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Erichardson Tarôcco de Oliveira

*Campos quânticos livres massivos localizados
tipo-string para spin arbitrário*

Juiz de Fora - MG
2018

Erichardson Tarôcco de Oliveira

*Campos quânticos livres massivos localizados
tipo-string para spin arbitrário*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do Título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jens Karl Heinz Mund

Juiz de Fora - MG

2018

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Erichardson Tarôcco de.

Campos quânticos livres massivos localizados tipo-string para spin arbitrário / Erichardson Tarôcco de Oliveira. -- 2018.

171 f. : il.

Orientador: Jens Karl Heinz Mund

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

1. Campos quânticos tipo-string. 2. Localidade. 3. Função de dois pontos. 4. Representações do recobrimento do grupo de Poincaré. I. Mund, Jens Karl Heinz, orient. II. Título.

*Dedico este trabalho à minha família
e aos meus amigos.*

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, que é o criador de todas as coisas.

A meus pais e minha noiva Crislaine de Souza Ferreira pelo apoio, pela compreensão e pelas orações.

Ao professor Dr. Jens Karl Heinz Mund (orientador), pela paciência, pela competência e confiança.

Aos professores da banca, Dr. Bruno Ferreira Rizzuti, Dr. Gil Oliveira Neto, Dr. José Abdalla Helayël Neto e Dr. Sebastião Alves Dias por aceitarem participar da minha banca.

À Coordenação da pós-graduação, ao secretário da pós-graduação Domingos e aos demais professores do departamento de física, em especial, ao professor Dr. Bruno Ferreira Rizzuti, por toda ajuda prestada no decorrer do meu curso.

Aos meus colegas de curso, que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na Universidade Federal de Juiz de Fora- UFJF.

Finalmente, agradeço ao Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), *Campus* Valença e à FAPEMIG pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Resumo

Um fato bem conhecido é que campos quânticos estudados pela Teoria Quântica de Campos satisfazem o princípio da localidade, isso significa que se x_1 e x_2 são separados tipo-espaço, então $\varphi(x_1)$ e $\varphi(x_2)$ (anti-) comutam. A eles, referem-se como campos que possuem localização do tipo ponto ou que são puntiformemente localizados. Nessa tese, será feita a construção de campos quânticos livres com spins arbitrários para os casos de spin inteiro (bósons) e semi-inteiro (férmions), com localização tipo-string¹. Em contraste aos campos usuais, que vivem em pontos do espaço-tempo, estes vivem em strings $S_{x,e} := x + \mathbb{R}_0^+ e$, que são semi-retas que começam em um certo ponto x do espaço de Minkowski e estendem-se até o infinito em uma certa direção e do tipo-espaço. Esses campos satisfazem o princípio de localidade tipo-string, no sentido de que se S_{x_1,e_1} e S_{x_2,e_2} são causalmente separados, então $\varphi(x_1, e_1)$ e $\varphi(x_2, e_2)$ (anti-) comutam. Tal localização é permitida pelos princípios da física quântica relativística, dado que os campos admitem a construção de observáveis locais. Um campo quântico livre, com localização tipo-ponto para partículas massivas com spin s atuando em um espaço de Hilbert, tem na melhor das hipóteses, dimensão de escala $(D_s) = s + 1$, que exclui seu uso na construção perturbativa de modelos interagentes renormalizáveis para spin $s \geq 1$. Até o momento, tais modelos foram construídos apenas no contexto da teoria de calibre, ao custo da introdução adicional de campos não-físicos (*ghosts*) e um espaço de estados não-físico (métrica indefinida). Os graus de liberdade não físicos são eliminados pela exigência de calibre ou invariância (BRST). Construimos, então campos quânticos livres para partículas de spin

¹Este conceito não tem a ver com a Teoria das Cordas.

mais altos. Para qualquer spin inteiro, os campos possuem o mesmo bom comportamento UV que o campo escalar ($s = 0$), a saber, possuem dimensão de escala 1; já os campos com spin semi-inteiro arbitrário, eles possuem o mesmo comportamento UV do campo de Dirac ($s = \frac{1}{2}$), a saber, possuem dimensão de escala $\frac{3}{2}$ e ao mesmo tempo agem em um espaço de Hilbert sem *ghosts*. Os campos aqui construídos estão localizados em strings semi-infinitas, que se estendem ao infinito do tipo-espaço, mas estão linearmente relacionados a seus campos correspondentes localizados tipo-ponto. Argumentamos que esse fato nos dá a chance de termos localidade suficiente para construção perturbativa de modelos interagentes do tipo teoria de calibre com uma matriz- S independente do string e campos observáveis interagentes localizados tipo-ponto. O princípio usual de invariância de calibre é aqui substituído pelo (mais profundo) princípio da localidade.

Palavras chaves: Campos quânticos tipo-string. Localidade. Função de dois pontos. Representações do recobrimento do grupo de Poincaré.

Abstract

It is well known that quantum fields studied in the quantum theory of fields satisfy the locality principle, this means that if x_1 and x_2 are space-like separated, then $\varphi(x_1)$ and $\varphi(x_2)$ (anti-) commute. They are referred to as fields that have point-like localization. In this thesis, we will construct free quantum fields with arbitrary spin for the cases of integer (bosons) and semi-integer (fermions) spin, with a "string-like" location². In contrast to the usual fields living in space-time points, they live in strings $S_{x,e} := x + \mathbb{R}_0^+ e$, that are rays that begins at a certain point x in Minkowski's space and extends to infinity in a certain space-like direction e . These fields satisfy the string-like locality principle, in the sense that if S_{x_1,e_1} and S_{x_2,e_2} are causally separated, then φ_{x_1,e_1} and φ_{x_2,e_2} (anti-) commute. Such location is allowed by the principles of relativistic quantum physics, since the fields admit the construction of local observables. A (point-localized) free quantum field for massive particles with spin s acting in a Hilbert space has, at best, scaling dimension $(D_s) = s + 1$, which excludes its use in the perturbative construction of renormalizable interacting models for higher spin ($s \geq 1$). Up to date, such models have been constructed only in the context of gauge theory, at the cost of introducing additional unphysical (ghost) fields and an unphysical (indefinite metric) state space. The unphysical degrees of freedom are divided out by requiring gauge (or BRST) invariance. We then construct free quantum fields for higher spin particles, where, for any integer spin, we have the same good UV behavior as the scalar field ($s = 0$), namely, have scaling dimension 1. For fields with arbitrary semi-integer spin, we have the same UV behavior of the Dirac field

²This concept has nothing to do with String Theory.

($s = \frac{1}{2}$), namely, a scaling dimension $\frac{3}{2}$, and at the same time, they act on a Hilbert space without ghosts. They are localized on semi-infinite strings extending to space-like infinity, but are linearly related to their point-local counterparts. We argue that this is sufficient locality for a perturbative construction of interacting models of gauge theory type, with a string-independent S-matrix and point-localized interacting observable fields. The usual principle of gauge invariance is here replaced by the (deeper) principle of locality.

Keywords: String-localized quantum fields. Locality. Two-point function. Representations of the covering of the Poincaré group.

Conteúdo

1	Introdução	13
2	Preliminares Matemáticas	23
2.1	Introdução	23
2.2	Recobrimento do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo de Lorentz	23
2.3	Representações de dimensão finita do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	25
2.4	Representações irredutíveis unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$	27
2.5	Espaço Fock	31
3	Campos Quânticos	34
3.1	Introdução	34
3.2	Campos Quânticos e Intertwiners Wigner	37
3.2.1	Dos campos quânticos aos intertwiners	41
3.2.2	Dos intertwiners para campos quânticos livres	50
3.2.3	Observação no caso localizado tipo-ponto	57
3.2.4	Recordando campo quântico livre escalar $s = 0$	58
3.3	Campos quânticos livres localizados tipo-ponto com spin s arbitrário	65

<i>Resumo</i>	11
3.3.1 Exemplos de intertwiners para certas representações	68
3.4 Integrais de linha	69
4 Bósons	75
4.1 Introdução	75
4.2 Spin um: Bósons vetoriais massivos	76
4.2.1 Definição como integrais de linha sobre campos com localização tipo-ponto	78
4.2.2 Construção via Intertwiners Wigner	80
4.3 Caso Geral $s \geq 2$	91
4.3.1 Espaço de uma partícula	92
4.3.2 Campos com localização tipo-ponto	97
4.3.3 Campos com localização tipo-string	99
4.4 Spin dois: Gráviton massivo	103
5 Férmions	108
5.1 Introdução	108
5.2 Campo de Dirac com localização tipo-ponto	111
5.3 Espaço de uma partícula - Férmions	114
5.4 Função de dois pontos para $s = n + \frac{1}{2}, n \geq 1$	121
5.5 Campo de Rarita-Schwinger $s = \frac{3}{2}$	129
5.5.1 Função de dois pontos para o Rarita-Schwinger tipo-ponto	133
5.5.2 Função de dois pontos para o Rarita-Schwinger tipo-string	136

5.5.3	Definição como integrais de linha sobre campos spinor-tensor com localização tipo-ponto	139
5.6	Caso geral, $s > \frac{3}{2}$	144
5.6.1	Campos spinor-tensor com localização tipo-ponto	144
5.6.2	Campos spinor-tensor com localização tipo-string	149
6	Conclusão e Perspectivas	153
A	Grupos de Lorentz e Poincaré	157
A.1	Grupo de Lorentz	157
A.2	Grupo de Poincaré	158
B	Representação	159
B.1	Lema de Schur	160
C	Teorema de Bisognano-Wichmann	161
D	Um Lema tipo Poincaré para campos spinor-tensor simétrico	163
E	Grau de escala	166
	Referências Bibliográficas	167

Capítulo 1

Introdução

Como é bem conhecido, as exigências combinadas de localidade (ou causalidade de Einstein), positividade de estados e positividade da energia levam a um mau comportamento dos campos quânticos a curta distância (singularidades UV). Esse comportamento é quantificado pela chamada dimensão de escala $(D_s)^3$ do campo quântico. A dimensão de escala fica pior com aumento de spin: em particular, um campo quântico livre com localização tipo-ponto para partículas com spin s , atuando em um espaço de Hilbert, tem na melhor das hipóteses, dimensão de escala $s + 1$. Entre a infinidade de campos quânticos locais livres para partículas massivas com spin s [1], esse melhor comportamento UV é obtido pelo chamado potencial tensor $\varphi^{\text{p}}_{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv A^{\text{p}}_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Este é um campo tensorial simétrico de ordem- n , que tem divergência e traço iguais a zero, caracterizado unicamente por estas propriedades [2]. A alta dimensão de escala $(s + 1)$ dos campos localizados tipo-ponto exclui seu uso na construção perturbativa de modelos interagentes renormalizáveis para $s \geq 1$.

Para o spin um e dois, existem campos no contexto da teoria de calibre com o mesmo bom comportamento UV que o campo de spin-zero escalar, ou seja, com dimensão de escala um [3]. No entanto, eles precisam da introdução de um espaço de estados

³Em inglês chamado de *scaling dimension*, entretanto nessa tese sempre denominamos por dimensão de escala.

não físico (um espaço de Krein com métrica indefinida), bem como de campos não físicos (*ghosts*). Na construção de modelos interagentes, os graus não físicos precisam ser eliminados no final, exigindo a invariância de observáveis de calibre (ou BRST⁴) e da matriz- S . Embora essa abordagem seja bem-sucedida - é a base do modelo padrão de partículas elementares - ela tem algumas características insatisfatórias. Em primeiro lugar, a introdução de graus de liberdade não físicos é contra o princípio da navalha de Occam (*Ockham's razor*). Rigorosamente, a construção de estados físicos ou campos carregados em modelos interagentes é bastante complicada. Em particular, o campo de Dirac interagente, minimamente acoplado ao bóson vetorial (no espaço de Krein), quando construído de uma maneira perturbativa direta, é não-físico no sentido de que sua função de dois pontos não tem uma interpretação robusta, pois não é definida positivamente. Com base nos estudos atuais, esse problema não foi superado no caso massivo.⁵ Finalmente, a abordagem da teoria do calibre não pode explicar certas características do modelo padrão, como a forma do potencial de Higgs ou a quiralidade das interações fracas, mas tem que colocá-las à mão.

Nesse trabalho construímos, para cada spin s , que pode ser inteiro ou semi-inteiro, campos quânticos livres $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$,⁶ com $n \in \mathbb{N}_0$, para partículas massivas com spin s , que têm o mesmo bom comportamento UV que a versão espacial de Krein (dimensão de escala um para os bósons), e $\frac{3}{2}$ para os férmions- $s \geq \frac{3}{2}$, e ainda atuam em um espaço de Hilbert

⁴Esse nome é em homenagem aos responsáveis pela teoria, são eles: Carlos Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora e Igor Tyutin.

⁵ Para bósons vetoriais sem massa (fótons), de fato, tem sido alegado ser impossível construir estados físicos carregados no espaço de Krein usando a métrica padrão [4] ou mesmo como limites de estados locais em qualquer topologia fraca [5]. No entanto, duas construções de estados físicos carregados foram propostas: (a) Morchio e Strocchi construíram esses campos em [6] em um ambiente espacial de Krein. A construção é, no entanto, bastante sutil devido à fraca topologia. (b) O. Steinmann construiu esses campos em [7], usando seu próprio esquema perturbativo, porém, não é amplamente conhecido.

⁶Para campos com spin inteiro excluímos o índice α , pois o mesmo corresponde ao índice do campo de Dirac, que deve aparecer somente quando trabalhamos com spin semi-inteiro. Vamos denotar os campos $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ por φ_r e quando não estiver claro se estamos tratando de campo com spin inteiro ou semi-inteiro, vamos especificar.

sem métrica indefinida e sem *ghost*. O preço que temos que pagar é que nossos campos não são localizados em pontos, mas são localizados, conforme explicado abaixo, em strings de Mandelstam que se estendem ao infinito tipo-espaço [8, 9] (ou infinito tipo-luz, veja nota de rodapé 10).

Temos então que tomar cuidado para que existam observáveis locais (pontuais) na classe de Borchers [10, Seção 4.6] dos nossos campos localizados tipo-string, e que tenhamos localidade suficiente para uma construção perturbativa de modelos interagentes. Para este fim, é gratificante que os nossos campos coincidam com os campos localizados tipo-ponto φ_r^p correspondentes por termos que são derivadas de campos tipo-string bem definidos (que são responsáveis pelo mau comportamento UV); portanto, para uma interação escolhida de forma adequada, as Lagrangianas, diferem do caso com localização tipo-ponto correspondente por uma divergência que deveria ser irrelevante para a física. (Esse fato foi provado no exemplo da Eletrodinâmica quântica (EDQ) massiva em ordens mais baixas [11].) Assim, nossos campos têm um bom comportamento UV e localidade suficiente, de modo que a construção perturbativa de modelos interagentes com poder preditivo parece viável. Além disso, obedecemos à navalha de Occam (*Ockham's razor*), na medida em que não temos estados ou graus de liberdade não físicos. Uma vantagem mais importante e concreta de nossa abordagem (sobre a abordagem de Krein) é que ela permite uma construção perturbativa direta de campos físicos carregados. Finalmente, nossa abordagem é capaz de derivar a quiralidade das interações fracas [12] e a forma do potencial de Higgs [13, 14]. Isso requer mais investigação se a classe de modelos renormalizáveis em nossa abordagem for diferente da abordagem do BRST e se os modelos renormalizáveis forem equivalentes⁷. Antes de apresentar nossos resultados com mais detalhes, precisamos explicar nossa noção de campos quânticos localizados tipo-string.

Esse conceito foi introduzido por Steinmann [15], inspirado em ideias de Mandelstam [16] e Dirac [17]. Refinado por Mund juntamente com Schroer e Yngvason nos artigos [8, 9], em que, basicamente,⁸ a ideia atual foi cunhada: um *campo quântico localizado tipo-*

⁷Para essa questão da renormalização de modelos localizados tipo-string veja [18].

⁸Em [8, 9] apenas campos com comportamento de transformação escalar foram considerados.

string é uma família de distribuições com valores operadores $\varphi_r(x, e)$, $r = 1, \dots, N$, onde x é um ponto no espaço de Minkowski e e está na variedade das direções tipo espaço⁹

$$H := \{e \in \mathbb{R}^4 : e \cdot e = -1\}. \quad (1.1)$$

A string tipo-espaço¹⁰ que emana de x na direção e , $S_{x,e} \doteq x + \mathbb{R}_0^+ e$, é a região de localização de $\varphi_r(x, e)$ no sentido de compatibilidade de observáveis quânticos: se as strings $S_{x,e}$ e $S_{x',e''}$ são separadas tipo-espaço para todo e'' em uma vizinhança aberta de e' , então

$$[\varphi_r(x, e), \varphi_{r'}(x', e')]_{\pm} = 0, \quad (1.2)$$

em que $[A, B]_{\pm} \doteq A \cdot B - \lambda B \cdot A$, com $\lambda = -1$ para férmions e $\lambda = 1$ para bósons.

É ainda necessário que os campos se transformem de maneira covariante sob uma representação unitária U do grupo de Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$ (que é o grupo de recobrimento universal do grupo próprio ortócrono de Poincaré \mathcal{P}_+^{\uparrow}) de acordo com alguma representação D .¹¹

$$U(a, A) \varphi_r(x, e) U(a, A)^{-1} = \varphi_{r'}(a + \Lambda(A)x, \Lambda(A)e) D(A)_{r'r}, \quad (1.3)$$

onde $a \in \mathbb{R}^4$ é uma translação, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e $\Lambda(A)$ é a transformação de Lorentz correspondente a A . Na Seção 2.2 recordamos o fato de que $SL(2, \mathbb{C})$ é o recobrimento de \mathcal{L}_+^{\uparrow} .¹²

Dizemos que o campo é um campo livre para um dado tipo de partícula se criar, a partir do vácuo apenas estados de uma partícula do tipo dado. Um tipo de partícula

⁹Estamos usando a métrica de Minkowski, constituindo a matriz diagonal $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

¹⁰A escolha de sequências com string localizados tipo-espaço é motivada pelo fato conhecido de que em todo modelo massivo os operadores de campo portadores de carga são localizáveis em cones tipo-espaço [19]. Parece, no entanto, que nossas construções possam também seguir por sequências parecidas com strings localizados tipo-luz, substituindo H pelo cone de luz.

¹¹No caso de spin inteiro (bósons) na equação (1.3) lê-se: $U(a, \Lambda) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_k}(x, e) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi_{\mu'_1 \dots \mu'_k}(a + \Lambda x, \Lambda e) \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k}$, com Λ uma transformação de Lorentz e para o caso spin semi-inteiro (férmions) na equação (1.3) lê-se: $U(a, A) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}(x, e) U(a, A)^{-1} = \varphi_{\mu'_1 \dots \mu'_k, \alpha'}(a + \Lambda(A)x, \Lambda(A)e) \Lambda(A)^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda(A)^{\mu'_k}_{\mu_k} S^c_{\alpha' \alpha}(A)$. Onde $S^c(A) := S(A^{-1})^t$, representação sob a qual o campo de Dirac se transforma, veja nota de rodapé 68.

¹²Usamos a convenção de soma de Einstein's em índices repetidos.

corresponde à uma representação irredutível unitária do grupo de Poincaré, caracterizada pelos valores de massa e spin.

O grau de escala¹³ e a dimensão de escala dos campos não serão esmiuçados nesse trabalho, porém, sempre vamos citá-los, pois temos que destacar que o grau de escala das funções de dois pontos envolvidos em um determinado modelo é decisivo para a renormalização do modelo. A dimensão de escala de um campo quântico localizado tipo-string, denotada por (D_s) , é um meio do grau de escala (sd), de sua função de dois pontos com relação a x -argumentos coincidentes após integrada com uma função de teste na variável e . Os detalhes do grau de escala e da dimensão de escala do campo, assim como, o critério para existência do limite para massa zero dos nossos campos podem ser vistos em [20, Seção 2.4].

Podemos resumir nossas descobertas da seguinte forma:

Teorema 1.0.1. *Para todo campo massivo (m, s) com $s \geq 1$, existe um campo quântico livre localizado tipo-string $\varphi_r(x, e)$ atuando no mesmo espaço de Hilbert que o campo localizado tipo-ponto correspondente $\varphi_r^p(x)$, com as seguintes propriedades:*

(i) *Campos com spin inteiro, independente do spin, têm dimensão de escala um, portanto, se comportam como um campo escalar-campo com spin $s = 0$ - e campos com spin semi-inteiro, independente do spin, têm dimensão de escala $\frac{3}{2}$, portanto, se comportam como o campo de Dirac puntiforme-campo com spin $\frac{1}{2}$ - depois de integrados com função de teste na variável e ;*

(ii) *Nossos campos localizados tipo-string, mais especificamente, diferem do campo localizado tipo-ponto correspondente φ_r^p por algumas derivadas de certos campos (spinor)-*

¹³ Em inglês, *scaling degree*, entretanto, sempre escrevemos grau de escala e denotamos por sd . A definição do grau de escala encontra-se no Apêndice E. A dimensão de escala do campo, denotada por (D_s) , é a grandeza que quantifica o comportamento UV do campo e é dada pela equação:

$$D_s = \frac{sd}{2} = \frac{d+2}{2}. \quad (1.4)$$

Aqui d significa o grau de homogeneidade da função de dois pontos sobre a concha.

tensoriais¹⁴ localizados tipo-string $\phi^{(n,0)}, \dots, \phi^{(n,n-1)}$, em que $\phi^{(n,k)}$ tem ordem k , em relação aos índices tensoriais, tal que vale

$$\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e) = \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p(x) + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \partial_{\mu_{i_1}} \dots \partial_{\mu_{i_{|I|}}} \phi_{\mu_{j_1} \dots \mu_{j_{|I^c|}}, \alpha}^{(n, |I^c|)}(x, e), \quad (1.5)$$

em que escrevemos $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$ e $I^c = \{j_1, \dots, j_{|I^c|}\} = \text{complemento de } I$.

Esses são campos livres para o mesmo tipo de partícula (m, s) atuando no mesmo espaço de Hilbert.

(iii) Todos os campos φ_r^p , φ_r , $\phi_r^{(n,k)}$ são localizados tipo-string em relação um ao outro. Além disso, os campos $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ e $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ têm um limite para massa zero.¹⁵

Destacamos que o índice α só aparece quando estamos trabalhando com spin semi-inteiro (férmions), portanto, para os campos com spin inteiro (bósons) devemos retirar o índice α da Eq. (1.5) e os $\phi^{(n,k)}$ são apenas campos tensoriais de ordem k localizados tipo-string.

Também devemos destacar que, para os campos com spin inteiro, o índice $n \in \mathbb{N}_0$ irá corresponder ao próprio spin dos campos, ou seja, $s = n$ onde denotamos por $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^p(x) \equiv A_{\mu_1 \dots \mu_n}^p(x)$ e $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x, e) \equiv A_{\mu_1 \dots \mu_n}(x, e)$ os campos localizados tipo-ponto e tipo-string, respectivamente. Para os campos com spin semi-inteiro temos $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \geq 1$ e os campos são denominados de *campos spinor-tensor*, denotados por $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p(x)$ e $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e)$ com localização tipo-ponto e tipo-string, respectivamente, como mostraremos no Capítulo 5.

Para spin um, nosso potencial localizado tipo-string $A_\mu(x, e)$ é fixado por esses requisitos.¹⁶ O mesmo vale para o campo com spin $\frac{3}{2}$, o qual denominamos de spinor-

¹⁴Tal denominação se dá pelo fato de termos índices tensoriais e o índice α , com $\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$ correspondente ao campo de Dirac, que consiste da representação $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ para os campos com spin semi-inteiro.

¹⁵Isto é, suas funções de dois pontos têm limites para massa zero. Vale ressaltar que os campos localizados tipo-ponto, não têm limite para massa zero, enquanto o tensor intensidade de campo $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_s \nu_s}$ e o spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}$ têm. Conforme mostraremos.

¹⁶Veja Prop. 4.2.3.

vetor e denotamos por $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$, esse na literatura é conhecido por campo de Rarita-Schwinger. Não há fantasmas (*ghosts*) e todos os campos são físicos no sentido de que atuam em um espaço de Hilbert e suas excitações elementares são as partículas de massa e do spin dados. Isso também vale para os campos $\phi_r^{(n,k)}$, que chamamos de *campos de escolta*.

Enfatizamos que se pode construir uma abundância de campos com bom comportamento UV ¹⁷, mas sem a relação (1.5) com campos localizados puntiformes eles seriam inúteis para uma construção perturbativa ao longo das linhas esboçadas na [20, Seção 5]. Acontece assim, pois uma vez que uma Lagrangiana de interação “apropriadamente localizada tipo-string”, não se difere de uma localizada tipo-ponto por uma divergência, levaria a campos interagentes completamente deslocalizados.

Lembramos que para cada spin $s = n$, com $n \in \mathbb{N}$ há um segundo campo quântico localizado tipo-ponto bem conhecido atuando no espaço de Hilbert com um bom comportamento UV : o chamado tensor intensidade de campo $F_{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n}$. Para o caso de spin semi-inteiro temos de forma análoga o que chamamos de *spinor-tensor intensidade de campo* $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n,\alpha}$. Este spinor-tensor intensidade de campo (semi-inteiro) ou apenas tensor intensidade de campo (spin inteiro) de ordem- $2n$ é simétrico¹⁸ sob troca de qualquer um dos pares $(\mu_i, \nu_i) \leftrightarrow (\mu_j, \nu_j)$ e antissimétrico sob troca de qualquer um dos índices $\mu_i \leftrightarrow \nu_i$ e ambos apresentam uma dimensão de escala $s + 1$. Está relacionado com o campo acima mencionado $\varphi_{\mu_1\dots\mu_n,\alpha}^p$ pela equação diferencial parcial (EDP)

$$\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n,\alpha} = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_{|I|}}} \partial_{\nu_{i_1}} \dots \partial_{\nu_{i_{|I|}}} \varphi_{\nu_{j_1} \dots \nu_{j_{|I|}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{|I|}}, \alpha}^p. \quad (1.6)$$

Para spin inteiro não temos o índice α e substituímos o $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n,\alpha}$ por $F_{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n}$ na Eq. (1.6) e por isso, que o campo quântico $A_{\mu_1\dots\mu_n}^p(x)$ é chamado de “potencial tensor”. Nosso campo localizado tipo-string $A_{\mu_1\dots\mu_n}(x, e)$ também é um potencial tensor no sentido que satisfaz Eq. (1.6) junto com $A_{\mu_1\dots\mu_n}^p$. Ele aparece como uma integral de linha¹⁹ sobre

¹⁷Como feito na prova da Proposição 4.2.3.

¹⁸A ordem e a simetria dos campos sempre estão relacionadas aos índices tensoriais.

¹⁹No sentido explicado na seção 3.4.

o tensor intensidade de campo, veja Eq. (4.48). De fato, classicamente as propriedades em ter o mesmo tensor intensidade de campo (1.6) e estar relacionados como em (1.5) são equivalentes, em analogia ao Lema de Poincaré, que afirma que uma forma fechada em \mathbb{R}^n é exata [21].

Colocamos uma prova do análogo ao Lema de Poincaré para campos spinor-tensor simétricos (em relação aos índices tensoriais) no Apêndice D, veja Prop. D.0.1.²⁰ Os campos *spinor-tensor localizado tipo-ponto* $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p(x)$ e *spinor-tensor localizado tipo-string* $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e)$ têm o mesmo spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}(x)$, ou seja, satisfazem a Eq. (1.6). Da mesma forma, o fato de terem o mesmo spinor-tensor intensidade de campo e estarem relacionados como na Eq. (1.5) são equivalentes ao Lema de Poincaré. O campo spinor-tensor localizado tipo-string $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e)$ aparece como uma integral de linha sobre o spinor-tensor intensidade de campo, veja Eq. (5.88).

Vamos recordar o significado físico dos potenciais para o spin um e dois. Para spin-um, o potencial A^p_μ é o campo de Proca, que poderia descrever fisicamente os bósons vetoriais da interação fraca. A Eq. (1.5) é uma reminiscência, que não deve ser confundida com uma transformação de calibre. Nos casos não-abelianos (bósons fracos ou glúons), a intensidade de campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^p_\nu - \partial_\nu A^p_\mu$ seria a aproximação linear para o tensor de intensidade de campo. Para o spin dois, o potencial $A^p_{\mu\nu} \equiv h^p_{\mu\nu}$ poderia descrever as flutuações quânticas do campo métrico em gravidade massiva. A relação (1.6) é, então, apenas a relação entre o tensor de Riemann linearizado $F_{\mu\nu\mu'\nu'} \equiv 2R_{\mu\nu\mu'\nu'}$ e a perturbação para uma métrica de fundo na aproximação linear:

$$R_{\mu\nu\mu'\nu'} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_{\mu'} h^p_{\nu\nu'} + \partial_\nu \partial_{\nu'} h^p_{\mu\mu'} - \partial_\nu \partial_{\mu'} h^p_{\mu\nu'} - \partial_\mu \partial_{\nu'} h^p_{\nu\mu'}). \quad (1.7)$$

A organização desse trabalho acontece da seguinte forma:

Na capítulo 2, são descritas algumas ferramentas matemáticas importantes para o desenvolvimento do trabalho como recobrimento do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo de Lorentz, representações de dimensão finita do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e espaço Fock.

²⁰A analogia para campos tensoriais simétricos foi mostrado em [20, Apêndice A].

No capítulo 3, relembra-se da teoria de representação para partículas massivas com spin e constrói-se os “Intertwiners de Wigner” localizados tipo-string, isto é, funções de onda de partículas simples com propriedades específicas de entrelaçamento²¹. Nós estendemos o argumento de [8, 9] de que esses objetos estão em uma correspondência um-para-um com campos quânticos livres localizados tipo-string para o tipo de partícula dado. Recordamos o caso do campo quântico livre escalar $s = 0$ e construímos os campos quânticos livres localizados tipo-ponto com spin s . Comentamos a construção de campos localizados tipo-string como integrais de linha sobre campos localizados tipo-ponto.

No capítulo 4, construímos o potencial vetor localizado tipo-string e seu campo de escolta para o spin um. Os intertwiners de Wigner do spin-um são a base para a construção dos campos de spin mais altos- caso geral para spin inteiro-, que construímos dentro do próprio capítulo. Como exemplo faz-se o caso do Gráviton massivo $s = 2$. Em cada caso, calculamos a função de dois pontos e escrevemos o potencial localizado tipo-string e os campos de escolta como integrais de linha sobre os campos tipo-pontos.

No capítulo 5, recordamos o campo de Dirac ($s = \frac{1}{2}$) com localização tipo-ponto. Os intertwiners de Wigner do spin-um, determinados no capítulo 4, juntamente com o intertwiner de Wigner do spin- $\frac{1}{2}$ tipo-ponto são a base para a construção dos campos de spin mais alto- caso geral semi-inteiro, denominados por *spinor-tensor localizado tipo-ponto e tipo-string*, $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \geq 1$, que construímos dentro do próprio capítulo. Calculamos o caso específico, o campo *spinor-vector*, conhecido como campo Rarita-Schwinger $s = \frac{3}{2}$. Em cada caso, calculamos a função de dois pontos e escrevemos o spinor-tensor localizado tipo-string e os campos de escolta como integrais de linha sobre os campos tipo-pontos.

Finalmente, no capítulo 6, serão discutidos os resultados construídos e apresentados os objetivos futuros com relação ao trabalho desenvolvido. Enfatizamos que grande parte dessa tese se baseia em nossos resultados para os campos com spin inteiro que foram publicados no artigo, *String-Localized Free Vector and Tensor Potentials for Massive*

²¹Operadores entrelaçamentos são mais frequentemente chamados de *intertwiner*, portanto nesse trabalho sempre iremos escrever intertwiner.

Particles with any Spin: I. Bosons [20], de minha autoria juntamente com o Prof. Dr. Jens Mund, na *Communications in Mathematical Physics*, e que estamos trabalhando na construção de um artigo com nossos resultados obtidos para os campos que carregam as partículas com spin semi-inteiro-férmions (spinor-tensor) com o título *String-Localized Free Tensor Spinor for Massive Particles with Any Spin: II. Fermions*.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticas

2.1 Introdução

Nesse capítulo, será apresentada uma breve revisão de conceitos matemáticos bem conhecidos, como recobrimento do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ ²² sobre o grupo de Lorentz²³, representação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e o espaço Fock para que, apoiados neles, consigamos desenvolver o trabalho proposto.

2.2 Recobrimento do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo de Lorentz

Há uma identificação natural entre o espaço-tempo \mathbb{R}^4 e o espaço das matrizes (2×2) complexa hermitianas, $Mat(\mathbb{C}, 2)^h$ dada por: $\mathbb{R}^4 \longleftrightarrow Mat(\mathbb{C}, 2)^h$

$$\mathbb{R}^4 \ni x \mapsto \underline{x} = x^0 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \in Mat(\mathbb{C}, 2)^h, \text{ com } \sigma^k \text{ as matrizes de}$$

Pauli, $\sigma_k = -\sigma^k$ e $\sigma^0 := 1$.

²²O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo formado pelas matrizes complexas 2×2 de determinante igual a 1.

²³Veja Apêndice A.

Podemos verificar que $\underline{x} = \underline{x}^*$

Nota-se que:

$$\det(\underline{x}) = (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - \{(x^1 - ix^2)(x^1 + ix^2)\} = (x^0)^2 - ((x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2) = x \cdot x = x^2$$

Usando esta identificação, pode-se definir uma ação de $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço-tempo de Minkowski $A \mapsto \Lambda(A) : SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{L}$, (observe que ainda sabemos que $\Lambda(A)$ pertence a \mathcal{L}^{24}) através do mapa: $SL(2, \mathbb{C}) \times Mat(\mathbb{C}, 2)^h \mapsto Mat(\mathbb{C}, 2)^h$ dado por:

$$\underline{x} \longrightarrow A\underline{x}A^* = \underline{x}' = \underline{\Lambda(A)x} \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} \mapsto A\underline{x}A^* \in Mat(\mathbb{C}, 2)^h & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\Phi} Mat(\mathbb{C}, 2)^h \\ \Lambda(A) \downarrow & & \downarrow A \cdot A^* \\ \mathbb{R}^4 & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & Mat(\mathbb{C}, 2)^h \end{array}$$

$$\Lambda(A)x := \text{único } x' \text{ com } \underline{x}' = A\underline{x}A^*, \text{ ou seja, } \Lambda(A)x = \Phi^{-1}(A\underline{x}A^*)$$

Observa-se que é utilizado o fato de que $A, A^* \in SL(2, \mathbb{C})$ e que $\det(A) = \det(A^*) = 1$, tem-se que $\det(A\underline{x}A^*) = \det(A)\det(\underline{x})\det(A^*) = x^2$. Isso implica em $(\Lambda(A)x)^2 = x^2$. Percebe-se que a métrica é preservada, portanto $\Lambda(A) \in \mathcal{L}$.

Com isso, vê-se que a ação de $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço-tempo de Lorentz preserva a métrica de Lorentz. Em outras palavras, $SL(2, \mathbb{C})$ atua isometricamente sobre o espaço-tempo. Assim tem-se um mapa bem definido $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(1, 3)$, de fato um homomorfismo de grupo.

O grupo de Lorentz é composto pela união de quatro componentes conexas [22], $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$. Como a aplicação de $SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{L}$ é contínua e como o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é conexo e contém a unidade, logo o recobrimento deve ser sobre a componente \mathcal{L}_+^\uparrow , denominado grupo de Lorentz próprio ortócrono, pois é a única das componentes conexas do grupo de \mathcal{L} que contém a unidade ($\det \Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 > 0$), portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \\ A &\mapsto \Lambda(A) \end{aligned}$$

²⁴Onde vamos usar o símbolo \mathcal{L} para grupo de Lorentz.

Observação: Na notação que usaremos $\Lambda = \Lambda(A)$.

Lema 2.2.1. *Com isso, pode-se representar as transformações de Lorentz próprias através de elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ em que os Boost são dados pelos elementos de sua pré-imagem no recobrimento por matrizes $\in SL(2, \mathbb{C})$ e as rotações são dadas pelos elementos de sua pré-imagem no recobrimento por matrizes do subgrupo $SU(2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$, como segue.*

$$A_i(t) \doteq e^{\frac{t}{2}\sigma_i} \mapsto \Lambda_i(t)$$

$$\tilde{R}_i(\alpha) \doteq e^{\frac{i\alpha}{2}\sigma_i} \mapsto R_i(\alpha)$$

Isso mostra que o mapa $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ é sobrejetor [23]. Tem-se também que o núcleo deste mapa é $\{\pm 1\}$, portanto, $\mathcal{L}_+^\uparrow = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ [22].

O mapa $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ define um recobrimento de \mathcal{L}_+^\uparrow . Como $SL(2, \mathbb{C})$ é simplesmente conexo [24], o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo de recobrimento universal do grupo \mathcal{L}_+^\uparrow .

Da equação 2.1 verifica-se facilmente que:

$$\widetilde{\Lambda(A)x} = A^{*-1}\tilde{x}A^{-1}, \quad (2.2)$$

$$\text{com } \tilde{x} = x^0 - \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}.$$

Para todo $A \in SL(2, \mathbb{C})$, usamos que A age no espaço de Minkowski como:

$$Ax := \Lambda(A)x.$$

2.3 Representações de dimensão finita do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Primeiro serão colocados os aspectos da representação de $SU(2)$ em que a representação $D^{(s)}$ age no produto tensorial simetrizado em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$ na seguinte maneira:²⁵

²⁵Para entender o termo de produto tensorial simetrizado ver Eq. (2.11).

Definição 2.3.1. *Seja $A \in SU(2)$, então:*

$$D^{(s)}(A)u_1 \otimes_s \cdots \otimes_s u_{2s} := Au_1 \otimes_s \cdots \otimes_s Au_{2s} \quad (\text{Dimensão: } 2s + 1).$$

Teorema 2.3.2. *A representação de $SU(2)$ satisfaz: $D^{(s_1)} \otimes D^{(s_2)} = D^{(|s_1-s_2|)} \oplus D^{(|s_1-s_2+1|)} \oplus \cdots \oplus D^{(|s_1+s_2|)}$*

Pode-se notar que $D^{(s)}$ é unitário.

Como $D^{(s)}(A)$ preserva a norma no espaço $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$, a norma será preservada em um subespaço menor. Mostra-se que $D^{(s)}(A)$ é unitária em um vetor da forma: $u_1 \otimes u_2 \cdots \otimes u_{2s}$ em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$.

Demonstração. $\|D^{(s)}(A)u_1 \otimes \cdots \otimes u_{2s}\| = \|Au_1 \otimes \cdots \otimes Au_{2s}\| = \|Au_1\| \cdots \|Au_{2s}\| = \|u_1\| \cdots \|u_{2s}\| = \|u_1 \otimes \cdots \otimes u_{2s}\|$. Para $A \in SU(2)$ □

Pode-se estender a representação $D^{(s)}$ de $SU(2)$ para $SL(2, \mathbb{C})$, observando que elas não são unitárias.

Representação (não unitária) de $SL(2, \mathbb{C})$: Considere as representações de $SL(2, \mathbb{C})$ em \mathbb{C}^2 .

(i) $A \mapsto A$

(ii) $A \mapsto \bar{A}$

(iii) $A \mapsto (A^t)^{-1}$

(iv) $A \mapsto (A^*)^{-1} = \overline{((A^t)^{-1})}$

Lema 2.3.3. *Dado $\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ este satisfaz: $(A^t)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^{-1}$ o que mostrará que (i) e (iii) são equivalentes, conseqüentemente será visto também que a (ii) e (iv) são equivalentes.*

Demonstração do Lema (2.3.3).

Demonstração. Dado, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $A \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \det(A)^{-1}, \text{ mas } \det(A) = 1 \text{ portanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ o}$$

que implica $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Por outro lado,

$$\varepsilon A \varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Comparando as matrizes obtidas acima, tem-se:

$$(A^t)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^{-1} \quad (2.3)$$

Com isso, mostra-se que (i) é equivalente a (iii), que denotamos por $(i) \cong (iii)$, se aplicar o conjugado em ambos os lados da equação (2.3), isso dará que $(A^*)^{-1} = \bar{\varepsilon} \bar{A} \bar{\varepsilon}^{-1}$ em que se mostra que $(ii) \cong (iv)$ uma vez que $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

□

Serão definidas 2 representações de $SL(2, \mathbb{C})$ em \mathbb{C}^2 da seguinte forma:

Definição 2.3.4.

$$D^{(\frac{1}{2}, 0)}(A) := A \text{ em } \mathbb{C}^2 \quad (2.4)$$

$$D^{(0, \frac{1}{2})}(A) := A^{*-1} \text{ em } \mathbb{C}^2 \quad (2.5)$$

2.4 Representações irredutíveis unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

Tendo-se $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ o grupo de recobrimento universal de \mathcal{P}_+^\uparrow , se tivermos duas transformações de Poincaré seguidas, de acordo com a regra de multiplicação, temos que:

$$(a, A)(a', A') = (a + \Lambda(A)a', AA')$$

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$A \mapsto \Lambda(A)$$

O objetivo aqui é construir a representação irreduzível unitária de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ com energia positiva, para isso faça-se o seguinte:

$$U(a) := U(a, \mathbf{1}) =: e^{ia \cdot P}$$

acima, $a \cdot P = a^\mu P_\mu$

$$U(A) := U(0, A)$$

Lema 2.4.1. *O operador quadrimomento irá se comportar como um vetor e quando elevado ao quadrado irá comutar com a representação irreduzível unitária de \mathcal{P}_+^\uparrow ou seja,*

$$U(A)PU(A^{-1}) = \Lambda^{-1}P \quad \text{onde } P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$$

$$[U(a, A), P^2] = 0$$

com $P^2 := P \cdot P = \sum_\mu P_\mu P^\mu$ em que P_μ , operador vetor de energia-momento, o gerador das translações na direção μ .

Seja $|p, \alpha\rangle$ "autovetor" (generalizado) simultâneo de (P_0, P_1, P_2, P_3)

$$P_\mu |p, \alpha\rangle = p_\mu |p, \alpha\rangle$$

e \mathcal{H}_p autoespaço simultâneo de P com autovalores $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\mathcal{H}_p = \text{span}\{|p, \alpha\rangle, \alpha = 1, 2, \dots\}$

Lema 2.4.2. (i) *Através do Lema 2.4.1 temos que $U(A) : \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathcal{H}_{\Lambda p}$*

(ii) *espectro de P é invariante sobre \mathcal{L}_+^\uparrow , isto é, $p \in \text{spec}P \implies \Lambda p \in \text{spec}P$.*

De acordo com o Lema 2.4.1, tem-se que $U(a, A)P^2 = P^2U(a, A)$, mas uma representação U de um grupo G em um espaço vetorial V é dita ser uma representação irreduzível para operadores se valer à seguinte propriedade: os únicos operadores $B : V \rightarrow V$ tais que $BU(g) = U(g)B$ para todo g pertencente a G são da forma $B = c1$.²⁶ Como $U(a, A)$ é uma representação irreduzível, conclui-se que $P^2 \in \mathbb{C}I$. Por querer energia positiva tem-se $P^2 = m^21$, $m \geq 0$, $P_0 \geq 0$, isso implica que, $\text{spec}P = H_m^+$ ou H_0^+ ou $\{0\}$. E daqui para frente será denominado de concha de massa o $H_m^+ := \{p : p^2 = m^2, p_0 \geq 0\}$.

Pegue o caso em que se tem uma partícula em repouso na concha de massa e com energia positiva, ou seja, estando em \bar{p} . Com isso tem-se:

$$\bar{p} \in \text{spec}P = H_m^+, \quad \bar{p} \doteq (m, 0, 0, 0)$$

e

$$\mathcal{H}_{\bar{p}} = \text{span}\{|\bar{p}, \alpha \rangle, \alpha = 1, \dots, N\}.$$

Para todo $p \in H_m^+$, fixa $B_p \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(B_p) : \bar{p} \rightarrow p$, ver Eq.s (2.6) e (2.7).²⁷ Com \mathcal{H}_p : uma base ortonormal, B.O.N., definida por $|p, \alpha \rangle := U(B_p)|\bar{p}, \alpha \rangle \in \mathcal{H}_p$, se aplicar a representação irreduzível $U(A)$ em $|p, \alpha \rangle$ e com alguns cálculos, consegue-se chegar à importante representação irreduzível unitária para partículas com massa $m > 0$ e spin s arbitrário.

Ψ vive em H_m^+ com valores em \mathbb{C}^{2s+1} , ou seja, $\Psi : H_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^{2s+1}$.

$$(U(A, a)\Psi)(p) = e^{ia \cdot p} D^{(s)}(R(A, p)) \Psi(\Lambda^{-1}p)$$

²⁶ Isso é o Lema de Schur, ver Apêndice B.1.

²⁷ Observe que no trabalho vamos utilizar em algumas equações que $B_p x := \Lambda(B_p)x$, em que x está no espaço de Minkowski. Defini-se:

$$B_p := \sqrt{\frac{p}{m}} = B_p^* \tag{2.6}$$

$$B_p^{-1} := \sqrt{\frac{\tilde{p}}{m}} = (B_p^*)^{-1} \tag{2.7}$$

$D^{(s)}$ é representação irreduzível de $SU(2)$. Aqui está se identificando,

$$B_p^{-1}AB_{\Lambda^{-1}p} = R(A, p), \quad (2.8)$$

$R(A, p)$, chamada de rotação de Wigner que deixa invariante o \bar{p} . Vale observar que $R(A, p)^{-1} = R(A^{-1}, \Lambda^{-1}p)$.

Está sendo usada a seguinte notação: $\Psi(p) = \sum_{k=1}^{2s+1} \Psi_k(p)e_{(k)} \longleftrightarrow \Psi_k(p) :=$ componente k do vetor $\Psi(p)$ em relação a um base $\{e_{(k)}\}$ em \mathbb{C}^{2s+1} .

Será utilizada a medida invariante de Lorentz na concha de massa H_m^+ :

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})},$$

Em $\omega(\mathbf{p})$ lê se:

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

E defini-se

$$\mathcal{H}^{(m,s)} = L^2(H_m^+, d\mu(p), \mathbb{C}^{2s+1})$$

$$\|\Psi\|^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \|\Psi(p)\|_s^2$$

Em que $\|\cdot\|_s$ representa a norma em \mathbb{C}^{2s+1} .

Com isso, tem-se:

$$\|U(A)\Psi\|^2 = \int d\mu(p) \|\Psi(\Lambda^{-1}p)\|_s^2 = \int d\mu(\Lambda p) \|\Psi(p)\|_s^2 = \int d\mu(p) \|\Psi(p)\|_s^2 = \|\Psi\|^2$$

Acima foi utilizado o fato que $D^{(s)}(R(A, p))$ é unitária.

Ficando com a representação irreduzível unitária (m, s) dada da seguinte forma:

$$(U(a, A)\Psi)(p) = e^{ip \cdot a} D^{(s)}(R(A, p))\Psi(\Lambda^{-1}p) \quad (2.9)$$

A representação acima é chamada de representação de Wigner.

2.5 Espaço Fock

Outro conceito importante para esse trabalho é do espaço de Fock, que em mecânica quântica, é um sistema algébrico (um espaço de Hilbert) usado para descrever um estado quântico com um número variável ou desconhecido de partículas. Tecnicamente, o espaço de Fock é o espaço de Hilbert preparado através da soma direta dos produtos tensoriais dos espaços de Hilbert para uma partícula. \mathcal{H}^1 é definido como o estado de uma partícula e $\mathcal{H}^{1^{\otimes n}} := \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^1$.

A fim de introduzir os subespaços relevantes para a descrição de bósons e férmions, definiu-se o operador projetor de simetrização ou antissimetrização sobre o espaço de Fock. Primeiro definiu-se:

$$U_n^\epsilon(\pi)\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n := \epsilon(\pi)\phi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\pi^{-1}(n)}, \quad (2.10)$$

em que $\pi \in S_n$ o grupo de permutações.

Para todo ϕ_1, \dots, ϕ_n pertencente ao espaço de Hilbert (\mathcal{H}^1). Agora pode-se definir o operador projetor de simetrização ou antissimetrização. Sua imagem são tensores totalmente (anti)- simétricos.

Definição 2.5.1. *Portanto, tem-se o operador de simetrização ou antissimetrização:*

$$E_n^\epsilon := \frac{1}{n!} \sum_{\pi} U_n^\epsilon(\pi) \quad (2.11)$$

O Espaço de Fock é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{H}^\epsilon := \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n^\epsilon \mathcal{H}_1^{\otimes n} = E^\epsilon \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_1^{\otimes n} \text{ para } n \geq 2 \quad (2.12)$$

$\mathcal{H}^{1^\epsilon} := \mathcal{H}^1$; $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$ (vácuo $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$); o espaço Fock para bósons temos $\epsilon = 1$ e para Férmions $\epsilon = -1$.

Descrevem-se duas álgebras associadas aos bósons e férmions, respectivamente. Ambas são definidas com o auxílio de partícula e operadores “aniquilação” e “criação” e são apresentadas como se segue. Para cada ϕ pertencente ao espaço de Hilbert, define-se os operadores $b(\psi)$ e $b^*(\psi)$, em \mathcal{H}^ϵ , ver Eq. (2.12), da seguinte forma:

Definição 2.5.2.

$$b(\psi)(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) := \sqrt{n}(\psi, \phi_1)\phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_n.$$

Tem-se a restrição de,

$$b(\psi)\Omega = 0$$

$$b^*(\psi)\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n := \sqrt{n+1}\psi \otimes \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n.$$

Com isso, fica definido os operadores aniquilação $a(\psi)$ e criação $a^*(\psi)$:

Definição 2.5.3. “Aniquilador/ Criador”

$$a(\psi) = E^\epsilon b(\psi) E^\epsilon$$

$$a^*(\psi) = E^\epsilon b^*(\psi) E^\epsilon$$

E^ϵ (anti-)simetrizador, ver Eq. (2.12).

Verifica-se, facilmente, que,

$$a(\psi) = E^\epsilon b(\psi) E^\epsilon = b(\psi) E^\epsilon$$

$$a^*(\psi) = E^\epsilon b^*(\psi) E^\epsilon = E^\epsilon b^*(\psi),$$

porque $b(\psi)$ deixa o subespaço de Hilbert simetrizado ou antissimetrizado invariante. Note que os mapas $\psi \mapsto a(\psi)$ são antilineares, mas os mapas $\psi \mapsto a^*(\psi)$ são lineares [25].

As relações de comutação que ligam os operadores aniquilação e criação acontecem da seguinte forma:

$$[a(\psi), a^*(\phi)]_\pm = (\psi, \phi)\mathbf{1}$$

e

$$[a(\psi), a(\phi)]_\pm = [a^*(\psi), a^*(\phi)]_\pm = 0$$

$[A, B]_\pm := AB - \epsilon BA$, com $\epsilon = -1$ para férmions e $\epsilon = +1$ para bósons.

Em $L^2(\mathbb{R}^\nu, d\mu)$, onde $d\mu$ é alguma medida em \mathbb{R}^ν , pode-se definir as distribuições $a^*(p)$ e $a(p)$ como:

$$a^*(\Psi) =: \int d\mu(p) \Psi(p) a^*(p) \quad (2.13)$$

$$a(\Psi) =: \int d\mu(p) \overline{\Psi(p)} a(p) \quad (2.14)$$

Em que $\overline{\Psi(p)}$ é o complexo conjugado de $\Psi(p)$. Os quais satisfazem as seguintes relações [25]:

Primeira relação- no caso bosônico, $\epsilon = +1$

$$[a_k(\vec{p}), a_l^*(\vec{q})]_\epsilon = 2\omega(\vec{p}) \delta_{kl} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^+ \mathcal{H}^1 \quad (2.15)$$

Segunda relação- no caso fermiônico, $\epsilon = -1$

$$\{a_k(\vec{p}), a_l^*(\vec{q})\} = 2\omega(\vec{p}) \delta_{kl} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^- \mathcal{H}^1 \quad (2.16)$$

Note que estamos usando as definições $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$

Onde: \mathcal{H}^1 estado de uma partícula, E^\pm operador que simetriza(+) e antissimetriza (-) respectivamente.

Capítulo 3

Campos Quânticos

3.1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é a aplicação conjunta da mecânica quântica e da relatividade especial aos campos que fornecem a estrutura teórica usada na física de partículas elementares. Em particular, a teoria quântica do campo eletromagnético e a de Dirac, conhecida como eletrodinâmica quântica (tradicionalmente abreviada como QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*), é a teoria com alguns modelos verificados experimentalmente com maior precisão na Física. Resumidamente, pode-se dizer que a TQC é uma teoria criada com o objetivo de descrever os campos de forma quantizada (na denominação mais antiga se chama segunda quantização que é uma das várias abordagens para a construção de um modelo quântico).

Por outro lado, a mecânica quântica lida essencialmente com a quantização da matéria e da energia. A TQC considera cada espécie de partículas que compõe a matéria como excitações de um campo fundamental. Os campos que transmitem forças entre partículas de matéria também têm excitações fundamentais que podem ser interpretadas como partículas.

A origem da TQC é marcada pelos estudos de Max Born e Pascual Jordan, (1925),

sobre o problema da computação da potência irradiada de um átomo em uma transição energética.

Em 1926, Born, Jordan e Werner Heisenberg formularam a teoria quântica do campo eletromagnético desprezando tanto a polarização como a presença de fontes, levando ao que se chama hoje de uma teoria do campo livre. Para tanto, usaram o procedimento da quantização canônica.

Duas razões principais motivaram o desenvolvimento da TQC:

- (i) A necessidade de uma teoria que lidasse com a variação do número de partículas; experimentalmente podemos criar partículas, por exemplo na colisão de um elétron com pósitron em que se tem a criação de fótons.
- (ii) A necessidade de conciliação entre as duas teorias: mecânica quântica e a relatividade.

Um campo, no esquema conceitual da teoria dos campos, é uma entidade com infinitos graus de liberdade, cujo estado de mais baixa energia é denominado vácuo (Ω), correspondente ao estado de ausência de partículas.

Com mais detalhes, o campo quântico φ vive em \mathbb{R}^4 com valores operadores em \mathcal{H} , ou seja, $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \{\text{operadores em } \mathcal{H}\}$. Portanto, para definirmos um campo quântico, devemos especificar um espaço de Hilbert \mathcal{H} , cujos vetores descrevem os estados dos sistemas e uma representação unitária do grupo de Poincaré.

Nesse caso, o espaço de Hilbert deve apresentar as seguintes especificações:

- (i) $U(a, A)$, representação unitária de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow : \text{spec}(P) = \{(p_0, \dots, p_3) : p_\mu \in \text{spec}P_\mu\} \subset \bar{V}_+ = \{p^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}$.

Como a energia deve ser positiva em qualquer referencial e devido à covariância de Lorentz, o espectro deve ser em \bar{V}_+ .

- (ii) O estado de vácuo denotado por $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}\Omega$, $\Omega =:$ vetor vácuo; que satisfaz a seguinte propriedade, $U(a, A)\Omega = \Omega$, para todo $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ implicando que $P_\mu\Omega = 0$.

$$[P_\mu = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(te_\mu)|_{t=0}]$$

$\mathcal{H}^0 =$ autoespaço de P com auto-valor 0.

Antes de continuar o trabalho recordamos o conceito de um campo quântico com localização tipo-string. A definição central que usamos e que foi cunhada em [9] é a seguinte:

Um campo quântico localizado tipo string é uma família de distribuições com valor operador $\varphi_r(x, e)$, $r = 1, \dots, N$, onde x é um ponto no espaço de Minkowski e e está na variedade de direções tipo espaço

$$H := \{e \in \mathbb{R}^4 : e \cdot e = -1\}. \quad (3.1)$$

A string, com origem em $x \in \mathbb{R}^4$ e direção do tipo espaço $e \in H$, é o subconjunto

$$S_{x,e} := x + \mathbb{R}_0^+ e \quad (3.2)$$

é a região de localização de $\varphi(x, e)$ no sentido de compatibilidade dos operadores: se as strings S_{x_1, e_1} e S_{x_2, e_2} são separadas tipo espaço, e o mesmo vale para algumas vizinhanças abertas delas, então²⁸

$$[\varphi_{r_1}(x_1, e_1), \varphi_{r_2}(x_2, e_2)]_{\pm} = 0. \quad (3.3)$$

Em que $[A, B]_{\pm} = A \cdot B - \lambda B \cdot A$, com $\lambda = -1$ para férmions e $\lambda = 1$ para bósons.

O campo se transforma de maneira covariante sob uma representação unitária U do grupo de Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$ de acordo com alguma representação matricial D^{29}

$$U(a, A) \varphi_r(x, e) U(a, A)^{-1} = \varphi_{r'}(a + \Lambda(A)x, \Lambda(A)e) D(A)_{r'r}. \quad (3.4)$$

Deve-se especificar que, em um campo livre, partículas podem ser criadas e destruídas através de dois operadores: o operador criação (a^*) e o operador aniquilação (a). Esses operadores agem sobre a função de onda, respectivamente, simbolizando a criação e a aniquilação de partículas dotadas de momento, possibilidade exigida pela relatividade

²⁸Esta condição é equivalente a: S_{x_1, e'_1} e S_{x_2, e_2} são separados tipo-espaço para todo e'_1 em alguma vizinhança de e_1 ; e também para : S_{x_1, e_1} e S_{x_2, e_2} são separados tipo-espaço e e_1 e e_2 são separados tipo espaço, como feito no Lema A1 em [9].

²⁹Para ver como essa equação deve ser entendida para os bósons e férmions, veja nota de rodapé 11.

e agem sobre os estados de um tipo específico de espaço de Hilbert, chamado espaço de Fock, criando e destruindo as partículas. Entretanto, há uma restrição $\mathbf{a}\Omega = 0$, o que quer dizer que no vácuo não há aniquilação, uma vez que não há partículas nesse ambiente.

3.2 Campos Quânticos e Intertwiners Wigner

Campos livres são fixados pelos estados de uma partícula que eles criam a partir do vácuo. Assim, a construção de campos livres é reduzida à construção de certos “intertwiners” relacionando o espaço de uma partícula com o espaço de chegada do campo.³⁰

Nesta seção, estabeleceremos uma correspondência entre campos livres e os intertwiners. Todas as declarações e fórmulas se mantêm para a localização tipo-string, bem como para o caso da localização tipo-ponto (simplesmente negligenciando o variável e .)

O espaço de estado de uma partícula com massa m e spin s , spin esse podendo ser inteiro ou semi-inteiro, no espaço de Minkowski quadridimensional possui uma representação irreduzível unitária com energia-positiva³¹ $U^{(m,s)} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ que é o grupo de recobrimento universal do grupo próprio ortócrono de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow . Para definir o cenário, vamos nos lembrar dessas representações. O spin caracteriza uma representação irreduzível unitária $D^{(s)}$ do subgrupo estabilizador em $\tilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow$, (o grupo de recobrimento do grupo \mathcal{L}_+^\uparrow), de um momento de referência \bar{p} na concha de massa para $m > 0$,

$$H_m^+ \doteq \{p \in \mathbb{R}^4 : p \cdot p = m^2, p^0 > 0\}.$$

Este subgrupo é o grupo de rotações, $SU(2)$, e a representação $D^{(s)}$ atua em um espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$ de dimensão $2s + 1$, o chamado pequeno espaço de Hilbert. A representação $U^{(m,s)}$ de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ é induzida por $D^{(s)}$ da seguinte forma.

³⁰Este ponto de vista é elaborado na monografia de Weinberg [1].

³¹Energia positiva significa que o espectro dos geradores de translações $U(a, \mathbf{1})$ é contido no cone de luz positivo.

O espaço de representação é $\mathcal{H}^{(m,s)} := L^2(H_m^+, d\mu; \mathfrak{h}^{(s)})$, em que $d\mu(p)$ é a medida invariante de Lorentz em H_m^+ e $U^{(m,s)}$ age de acordo com

$$(U^{(m,s)}(a, A)\psi)(p) = e^{ip \cdot a} D^{(s)}(R(A, p)) \psi(\Lambda^{-1}p). \quad (3.5)$$

Aqui $\Lambda = \Lambda(A)$ e $R(A, p) \in SU(2)$ e é chamado de rotação de Wigner, definida por

$$R(A, p) := B_p^{-1} A B_{\Lambda^{-1}p}, \quad (3.6)$$

onde $B_p \in SL(2, \mathbb{C})$, para $p \in H_m^+$, tal que age no espaço de Minkowski como: $B_p x := \Lambda(B_p)x$, logo $B_p : \bar{p} \mapsto p$.

Esta representação se estende ao recobrimento do grupo próprio de Poincaré por representantes adjuntando à transformação \tilde{j}_1 . Considere-se a cunha³² W_1 ,

$$W_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^1 > |x^0|\}, \quad (3.7)$$

junto com o subgrupo uniparamétrico $\Lambda_1(\cdot)$, os boosts de Lorentz que deixam W_1 invariante, e a reflexão $j_1 = (-1, -1, 1, 1) \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ ao longo da borda da cunha, satisfazendo, $j_1^2 = 1$.

Aqui utilizamos a representação da Eq. (3.5) e fazemos a extensão para a representação antiunitária $U(\tilde{j}_1)$, através da proposição 3.2.4 abaixo, a qual será utilizada posteriormente no Teorema Bisognano-Wichmann.³³

A construção de nossos campos é feita através dos intertwiners para spin inteiro (bósons) e do intertwiner do campo de Dirac $s = \frac{1}{2}$, portanto, fazemos em dois passos a extensão. Primeiro, no caso de férmions, mais precisamente com spin $s = \frac{1}{2}$, e depois para os bósons com spin $s = n$, com $n \in \mathbb{N}_0$. Colocamos aqui somente para o caso de spin $s = \frac{1}{2}$.

No capítulo 4, Lema 4.3.1, colocamos os detalhes para o caso do spin $s = n$ com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a forma como $D^{(n)}(\tilde{j}_1)$ age. E no capítulo 5, Lemas 5.1.1 e 5.3.6, os detalhes de como $D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$ age e a generalização para os férmions, $s = n + \frac{1}{2}$, a saber, $D^{(n+\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$ agindo. Para $s = \frac{1}{2}$, seja \tilde{j}_1 tal que as relações são satisfeitas, $\Lambda(\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1) = j_1 \Lambda(A) j_1 \equiv \Lambda(\sigma_1 A \sigma_1)$ e $\tilde{j}_1^2 = 1$.

³²Na literatura é denominado em inglês por *wedge*.

³³Veja Apêndice C.

Lema 3.2.1. *Temos que:*

$$\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1 = \sigma_1 A \sigma_1$$

Demonstração. Uma vez que $j_1 = -R_1(\pi)$, temos: $j_1 \Lambda(A) j_1 = R_1(\pi) \Lambda(A) R_1(\pi)^{-1} = \Lambda(i\sigma_1) \Lambda(A) \Lambda(-i\sigma_1) = \Lambda(\sigma_1 A \sigma_1)$. \square

Seja $D^{(s)}(\tilde{j}_1)$ um operador antiunitário no pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$ que respeita as relações acima, e:

$$(i) D^{(s)}(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1}$$

$$(ii) D^{(s)}(\tilde{j}_1) D^{(s)}(R) D^{(s)}(\tilde{j}_1) = D^{(s)}(\sigma_1 R \sigma_1) \quad \forall R \in SU(2)$$

Para simplificar as coisas, pode-se escolher a família B_p , $p \in H_m^+$, de modo que $\tilde{j}_1 B_p \tilde{j}_1 = B_{-j_1 p}$, o que implica

$$R(\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1, p) = \tilde{j}_1 R(A, -j_1 p) \tilde{j}_1 \quad (3.8)$$

Lema 3.2.2. *Vamos mostrar o fato de que podemos ter $B_{-j_1 p} = \tilde{j}_1 B_p \tilde{j}_1$. Destaca-se uma solução particular para o B_p .*

$$B_p = \sqrt{\frac{p}{m}} = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} p_0 + p_3 + m & \overline{p_1 + ip_2} \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 + m \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

e o fato de que $j_1(p_0, p_1, p_2, p_3) = (-p_0, -p_1, p_2, p_3)$.

Lema 3.2.3. *Têm-se as seguintes relações:*

$$(i) B_{-j_1 p} = \sigma_1 B_p \sigma_1$$

$$(ii) R(A, -j_1 p) = \sigma_1 R(\sigma_1 A \sigma_1, p) \sigma_1$$

Demonstra-se o Lema 3.2.3:

Demonstração. Utilizando a equação (3.9), e o $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\sigma_1 B_p \sigma_1 = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_0 - p_3 + m & p_1 + ip_2 \\ \overline{p_1 + ip_2} & p_0 + p_3 + m \end{pmatrix},$$

por outro lado tem-se, $-j_1 p = (p_0, p_1, -p_2, -p_3)$, portanto:

$$B_{-j_1 p} = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_0 - p_3 + m & p_1 + ip_2 \\ \overline{p_1 + ip_2} & p_0 + p_3 + m \end{pmatrix}$$

Logo mostra-se (i). Agora, é mostrado (ii).

$$R(A, -j_1 p) = B_{-j_1 p}^{-1} A B_{-\Lambda(A)^{-1} j_1 p} = \dots$$

Usando a primeira parte do Lema 3.2.3 e o fato que $j_1^2 = 1$, tem-se: $-\Lambda^{-1} j_1 p = -j_1 (j_1 \Lambda^{-1} j_1) p$, com isso, obtém-se:

$$\dots = \sigma_1 B_p^{-1} \sigma_1 A \sigma_1 B_{\sigma_1 A^{-1} \sigma_1 p} \sigma_1 = \sigma_1 R(\sigma_1 A \sigma_1, p) \sigma_1,$$

ficando demonstrado todo o Lema 3.2.3 e conseqüentemente a Eq. (3.8). □

Observe que as relações (i) e (ii), implicam que $\Lambda(B_{-j_1 p}) = \Lambda(\sigma_1 B_p \sigma_1) = j_1 \Lambda(B_p) j_1$ e $R(\Lambda, -j_1 p) = R_1(\pi) R(R_1(\pi) \Lambda R_1(\pi), p) R_1(\pi)$, respectivamente uma vez que $j_1 = -R_1(\pi)$. Essas relações são utilizadas para os bósons, veja Lema 4.3.1.

Temos a seguinte Proposição:

Proposição 3.2.4. *O representante da transformação \tilde{j}_1 é:*³⁴

$$(U^{(m,s)}(\tilde{j}_1) \psi)(p) \doteq D^{(s)}(\tilde{j}_1) \psi(-j_1 p), \quad (3.10)$$

é único módulo um fator e satisfaz:

$$(i) \quad U(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1}$$

$$(ii) \quad U(\tilde{j}_1) U(A) U(\tilde{j}_1)^{-1} = U(\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1)$$

³⁴Em que $\Lambda(\tilde{j}_1) p \doteq j_1 p = (-p_0, -p_1, p_2, p_3)$.

Demonstração. A parte (i) é facilmente verificada pelo fato de que $D^{(s)}(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1}$ e $j_1^2 = 1$. Portanto, mostra-se somente a (ii). Tem-se

$$\begin{aligned} (U(\tilde{j}_1)U(A)U(\tilde{j}_1)^{-1}\psi)(p) &= D^{(s)}(\tilde{j}_1)(U(A)U(\tilde{j}_1)^{-1}\psi)(-j_1p) = \\ &= D^{(s)}(\tilde{j}_1)(D^{(s)}(R(A, -j_1p))U(\tilde{j}_1)^{-1}\psi)(-\Lambda^{-1}j_1p) = \\ &= D^{(s)}(\tilde{j}_1)D^{(s)}(R(A, -j_1p))D^{(s)}(\tilde{j}_1)\psi(j_1\Lambda^{-1}j_1p) = D^{(s)}(\tilde{j}_1R(A, -j_1p)\tilde{j}_1)\psi(j_1\Lambda^{-1}j_1p) \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se:

$$U(\tilde{j}_1A\tilde{j}_1)\psi(p) = D^{(s)}(R(\tilde{j}_1A\tilde{j}_1, p))\psi(j_1\Lambda^{-1}j_1p).$$

Usando a Eq. (3.8) e o Lema 3.2.3, comprovamos a veracidade de (ii). Observe que estamos denotando $\Lambda(A)$ por Λ . □

Adotamos a seguinte convenção para os componentes de covetores. Dado um sistema de referência, isto é um *vierbein* $\{e_{(0)}, \dots, e_{(3)}\}$ de vetores ortonormais de Lorentz (vetores tangentes ao espaço de Minkowski), as componentes contravariantes ξ^μ de um vetor de Lorentz ξ são os coeficientes de expansão em $\xi = \xi^\mu e_{(\mu)}$. As componentes covariantes p_μ de um vetor espacial de momento p são definidos por $p_\mu \doteq p \cdot e_{(\mu)}$. Assim, identificamos o espaço dos vetores de Lorentz, bem como seu espaço dual (espaço do momento) com \mathbb{R}^4 através das componentes, *e.g.* $p \mapsto (p_0, \dots, p_3)$. O produto de Lorentz é lido como $p \cdot p = p_0^2 - \|\mathbf{p}\|^2$ com $\|\mathbf{p}\|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. A medida invariante de Lorentz na concha de massa é

$$d\mu(p) \equiv d\mu_m(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_m(\mathbf{p})}, \quad \omega_m(\mathbf{p}) \doteq (\|\mathbf{p}\|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Escolhemos o sistema de referência de modo que o momento de referência \bar{p} é identificado com $(m, \mathbf{0})$ em \mathbb{R}^4 .

3.2.1 Dos campos quânticos aos intertwiners

Suponha que nos seja dado um campo quântico livre localizado tipo-string. Por uma questão de generalidade, consideramos não apenas campos vetoriais, tensoriais,

spinor-vetor ou spinor-tensor, mas um campo $\varphi_r(x, e)$, $r = 1, \dots, N$ com N -componentes, que se transforma de maneira covariante sob alguma representação matricial D finita de $SL(2, \mathbb{C})$, isto é, a Eq. (1.3), a qual colocamos aqui novamente

$$U(a, A) \varphi_r(x, e) U(a, A)^{-1} = \sum_{r'=1}^N \varphi_{r'}(a + \Lambda(A)x, \Lambda(A)e) D(A)_{r'r}, \quad (3.12)$$

onde $a \in \mathbb{R}^4$ é uma translação, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e $\Lambda(A)$ é uma transformação de Lorentz própria através de elementos de $SL(2, \mathbb{C})$.

Presume-se que o campo atue em algum espaço de Hilbert que contém o espaço irreduzível $\mathcal{H}^{(m,s)}$ para partículas elementares de massa m e spin s e, também, contém o vetor de vácuo Ω , caracterizado pelo fato de ser invariante sob as transformações de Poincaré. Suponha ainda que o campo crie, a partir do vácuo, estados de uma partícula de massa m e spin s . Isso significa que o vetor $\varphi_r(x, e)\Omega$ está no espaço de uma partícula $\mathcal{H}^{(m,s)}$.

A propriedade de covariância (3.12) com $\Lambda(A) = 1$ implica que há uma família de distribuições $v_r(p, e)$, $r = 1, \dots, N$ com valores- $\mathfrak{h}^{(s)}$, tal que para $p \in H_m^+$

$$(\varphi_r(x, e)\Omega)(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_r(p, e) \in \mathfrak{h}^{(s)}. \quad (3.13)$$

Chamamos $v_r(p, e)$ *função intertwiner* do campo φ_r . (O fator $(2\pi)^{-\frac{3}{2}}$ foi introduzido para ter relações canônicas de comutação no caso do campo escalar³⁵, se a escolha for $v \equiv 1$.)

Demonstração. Aplicando as Eqs. (3.12) e (3.5) no vácuo (isso é suficiente e bem definido pela propriedade de Reeh-Schlieder) e usando o fato de que $U^{(m,s)}\Omega = \Omega$ vale,

$$(U(a, A)\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = e^{ip \cdot a} D^{(s)}(R(A, p))(\varphi_r(x, e)\Omega)(\Lambda(A)^{-1}p) \quad (3.14)$$

||

$$(U(a, A)\varphi_r(x, e)U(a, A)^{-1}\Omega)(p) = (\varphi_{r'}(a + \Lambda(A)x, \Lambda(A)e)D(A)_{r'r}\Omega)(p). \quad (3.15)$$

³⁵Fazemos uma recordação do campo escalar na seção 3.2.4.

Fazendo $\Lambda(A) = \mathbf{1}$ temos,

$$e^{ip \cdot a} D^{(s)}(R(A, p))(\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = (\varphi_{r'}(a + x, e)D_{r'r}(A)\Omega)(p).$$

Uma vez que $R(A, p) = \mathbf{1} = D(A)$, para $x = 0$, ficamos com $e^{ip \cdot a}(\varphi_r(0, e)\Omega)(p) = (\varphi_r(a, e)\Omega)(p)$.

Fazendo a mudança de variável a para x temos,

$$(\varphi_r(x, e)\Omega)(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_r(p, e)$$

com $(\varphi_r(0, e)\Omega)(p) =: (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v_r(p, e)$. □

Para os campos com spin inteiro, consideramos o caso quando a antipartícula coincide com a partícula: o adjunto de $\varphi_r(x, e)$ cria partículas do mesmo tipo a partir do vácuo, isto é, $\varphi_r(x, e)^*\Omega$ também está em $\mathcal{H}^{(m,s)}$. Consideramos o caso em que para os campos com spin semi-inteiro, a antipartícula não coincide com a partícula, o $\mathcal{H}^{(m,s)}$ é substituído por duas cópias $\mathcal{H}^{(m,s)} \oplus \mathcal{H}^{(m,s)}$ uma para a partícula e outra para antipartícula: o adjunto de $\varphi_{r'}(x, e)$ não cria as mesmas partículas a partir do vácuo, porém, cria partículas com mesma massa m e spin s , e portanto também temos $\varphi_{r'}(x, e)^*\Omega \in \mathcal{H}^{(m,s)}$. Assim, há também uma família de distribuições $v_r^c(p, e)$ com valores- $\mathfrak{h}^{(s)}$, o chamado intertwiner conjugado, tal que para $p \in H_m^+$

$$(\varphi_r(x, e)^*\Omega)(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_r^c(p, e) \in \mathfrak{h}^{(s)}. \quad (3.16)$$

A demonstração da Eq. (3.16) é análoga a demonstração feita para verificar a Eq. (3.13). Aplicamos o adjunto na Eq. (3.15), substituindo $\varphi_r(x, e)^*$ no lugar de $\varphi_r(x, e)$ na Eq. (3.14) e definindo $(\varphi_r(0, e)^*\Omega)(p) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v_r^c(p, e)$, isso nos produz a Eq. (3.16).

Enfatizamos que todas as fórmulas devem ser entendidas no sentido de distribuições, isto é, depois de integradas com funções de teste nas variáveis x e e : vamos colocar para referência futura o sentido rigoroso da Eq. (3.13). Dado um par de funções de teste

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ e $h \in \mathcal{D}(H)$, seja $\varphi_r(f, h)$ o campo integrado com as funções de teste³⁶

$$\varphi_r(f, h) = \int d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) \varphi_r(x, e), \quad (3.17)$$

onde $d\sigma(e)$ é a medida invariante de Lorentz sobre H ³⁷ e $v_r(p, h)$ é a função intertwiner integrada com uma função de teste em e ,

$$v_r(p, h) \doteq \int d\sigma(e) h(e) v_r(p, e). \quad (3.19)$$

Então, a Eq. (3.13) significa que o vetor de uma partícula $\varphi_r(f, h)\Omega$, visto como uma função com valores- $\mathfrak{h}^{(s)}$ na concha de massa, é dado por

$$(\varphi_r(f, h)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) v_r(p, h), \quad (3.20)$$

onde \hat{f} é a transformada de Fourier de f .³⁸

Demonstração.

$$(\varphi_r(f, h)\Omega)(p) = \int d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) (\varphi_r(x, e)\Omega)(p),$$

usando a Eq. (3.13) temos

$$(\varphi_r(f, h)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) e^{ip \cdot x} v_r(p, e).$$

³⁶É claro que, rigorosamente falando, esse objeto é primeiro definido e $\varphi(x, e)$ é informalmente definido pela Eq. (3.17). Estamos denotando por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ e $\mathcal{D}(H)$ o espaço de funções Schwarz e o espaço de funções C^∞ com suporte compacto, respectivamente.

³⁷A medida $d\sigma$ é dada da seguinte forma: depois de escolher um sistema de referência de Lorentz, um ponto $e \in H$ corresponde a um ponto $(e^0, \mathbf{e}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, e a parte espacial \mathbf{e} deve ser da forma $(1 + (e^0)^2)^{1/2} \mathbf{n}$, onde \mathbf{n} está na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Então

$$\int_H d\sigma(e) h(e) = \int_{\mathbb{R}} de^0 (1 + (e^0)^2) \int_{S^2} d\Omega(\mathbf{n}) h(e^0, \mathbf{n}), \quad (3.18)$$

onde $d\Omega$ é a medida invariante na esfera unitária S^2 .

³⁸Adotamos a seguinte convenção para a transformada de Fourier \hat{f} , cuja a transformada inversa é denotada por \check{f} :

$$\hat{f}(p) \doteq \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x), \quad \check{f}(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} f(p). \quad (3.21)$$

Usando as Eqs. (3.19) e (3.21), produz:

$$(\varphi_r(f, h)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) v_r(p, h).$$

□

A próxima proposição afirma as propriedades específicas da função intertwiner que estão implícitas na covariância e na localidade do campo. Para formulá-la, interpretamos a família $v_r(p, e)$ como um mapa linear de algum espaço vetorial N -dimensional \mathfrak{h} com base $\{e_{(1)}, \dots, e_{(N)}\}$, o “espaço de chegada” do campo, para $\mathfrak{h}^{(s)}$ via

$$v(p, e) e_{(r)} \doteq v_r(p, e) \in \mathfrak{h}^{(s)}, \quad (3.22)$$

e a matriz $D(A)_{r'r}$ como um endomorfismo linear de \mathfrak{h} de maneira usual. Além disso, denotamos por H^c a complexificação de H ,

$$H^c := \{e \in \mathbb{C}^4, e \cdot e = -1\}, \quad (3.23)$$

onde o ponto é a extensão bilinear da métrica de Minkowski para \mathbb{C}^4 , e por \mathcal{T}_+ o tubo consistindo de todos os pontos em H^c , cuja parte imaginária está no interior do cone de luz futuro $V_+ \subset \mathbb{R}^4$. Vamos considerar o subconjunto Θ de \mathcal{T}_+ da forma:

$$\Theta = H^c \cap (K_1 + i\mathbb{R}^+ K_2), \quad (3.24)$$

onde K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de \mathbb{R}^4 e K_2 está contido no cone de luz futuro.

Proposição 3.2.5. (i) *A função intertwiner v satisfaz a relação de intertwiner:*

$$D^{(s)}(R(A, p)) \circ v(\Lambda(A)^{-1}p, \Lambda(A)^{-1}e) = v(p, e) \circ D(A) \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (3.25)$$

Em que $\Lambda(A) \in \tilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow$ transformação de Lorentz através de elementos do $SL(2, \mathbb{C})$.

O intertwiner conjugado v^c satisfaz a mesma relação, mas com $D(A)$ substituído pelo complexo conjugado $\overline{D(A)}$.

(ii) Para quase todos os p , a distribuição $v_r(p, e)$ é o valor de contorno de uma função $\tilde{v}_r(p, e)$ ³⁹ em $H_m^+ \times \mathcal{T}_+$, que é, para quase todos os p , analítica em $e \in \mathcal{T}_+$ e satisfaz o seguinte limite: existe uma constante $n \in \mathbb{N}_0$ e uma função M em H_m^+ que é localmente- L^2 em relação à medida $d\mu$ e polinomialmente limitada, e para cada $\Theta \subset \mathcal{T}_+$ da forma indicada na Eq. (3.24), existe uma constante $c = c_\Theta$ tal que para todos os $e \in \Theta$ assegura

$$\|\tilde{v}_r(p, e)\| \leq c M(p) |Im e|^{-n}. \quad (3.27)$$

Aqui, $|\cdot|$ denota qualquer norma em \mathbb{R}^4 e a norma \tilde{v}_r refere-se ao pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$.

(iii) O intertwiner conjugado v^c é unicamente fixado por v via a relação

$$D^{(s)}(\tilde{j}_1) v^c(-j_1 p, e) e_{(r)} = v(p, j_1 e) D(\tilde{j}_1) e_{(r)}, \quad (3.28)$$

onde o lado direito é definido como a extensão analítica de $v(p, \Lambda_1(t)e) D(A_1(t))e_{(r)}$ em $t = i\pi$ (depois de integrado com uma função de teste em e .)⁴⁰

Demonstração. Para mostrar (i) aplicamos $a = 0$ nas Eqs. (3.14) e (3.15), o que implica

$$D^{(s)}(R(A, p))(\varphi_r(x, e)\Omega)(\Lambda(A)^{-1}p) = (\varphi_{r'}(\Lambda(A)x, \Lambda(A)e)D(A)_{r'r}\Omega)(p).$$

Usando as Eqs. (3.13) e (3.16), temos o lado esquerdo igual a

$$D^{(s)}(R(A, p))(2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Lambda(A)^{-1}p \cdot x} v_r(\Lambda(A)^{-1}p, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot \Lambda(A)x} v_{r'}(p, \Lambda(A)e) D(A)_{r'r}.$$

³⁹ Isso significa que para $h \in \mathcal{D}(H)$ e quase todos os p , $v_r(p, h)$ é obtido como uma integral (fraca)

$$v_r(p, h) = \int_H d\sigma(e) h(e) \tilde{v}_r(p, e), \quad (3.26)$$

onde se deixa os argumentos e de $\tilde{v}_r(p, e)$ aproximar H de H^c dentro do tubo após a integração, veja [26, Teorema A.2].

⁴⁰ Onde $D(\tilde{j}_1) \doteq D(A_1(t))|_{t=i\pi}$ é a extensão analítica para $t = i\pi$ e de acordo com a nota de rodapé 11, temos $D(\tilde{j}_1)_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha} \doteq \Lambda(\tilde{j}_1)_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \Lambda(\tilde{j}_1)_{\mu_n} \otimes S_\alpha^c(A_1(t))|_{t=i\pi}$, com

$$S^c(A_1(t)) \doteq \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}\sigma_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}\sigma_1} \end{pmatrix} e S^c(A_1(t))|_{t=i\pi} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que o fator $S_\alpha^c(A_1(t))|_{t=i\pi}$ só irá aparecer quando tratarmos os campos fermiônicos.

Através dessa última equação, usando o fato de que $e^{i\Lambda(A)^{-1}p \cdot x} = e^{ip \cdot \Lambda(A)x}$, verifica-se que a família de distribuições v_r deve satisfazer

$$D^{(s)}(R(A, p))v_r(\Lambda(A)^{-1}p, \Lambda(A)^{-1}e) = \sum_{r'=1}^N v_{r'}(p, e) D(A)_{r'r}.$$

Isso produz Eq. (3.25).

Um argumento semelhante vale para demonstrar que o intertwiner conjugado v^c satisfaz a mesma relação, mas com $D(A)$ substituído por $\overline{D(A)}$.

As partes (ii) e (iii) já foram demonstradas em [9, Teorema 3.3 (iii)] para a representação trivial $D(\Lambda) = \mathbf{1}$, usando a propriedade de Bisognano-Wichmann, que é válido para todos modelos massivos localizados tipo-string [27].

De acordo com a Proposição 3.2.4 temos que o representante da extensão analítica é dado pela Eq. (3.10). Este é o mesmo representador de [9]. A partir daqui, temos as mesmas suposições que [9], exceto que nosso D não é trivial. No entanto, D é uma representação de dimensão finita que se estende analiticamente, de modo que todos os argumentos relativos à analiticidade e limites são válidos. A única modificação é a relação entre v^c e v , que corresponde a Eq. (30) em [9]. Ao invés dessa relação, chegamos à Eq. (3.28). Portanto, vamos aqui mostrar a parte (iii). Através do Teorema de Bisognano-Wichmann, ver Apêndice C, temos:

$$t \mapsto (U(A_1(t))\varphi_r(x, e)\Omega)(p), \text{ é holomorfa para } \mathbb{R} + i(0, \pi) \quad (3.29)$$

$$U(\tilde{j}_1)(U(A_1(t))|_{t=i\pi}\varphi_r(x, e)\Omega) = c\varphi_r^*(x, e)\Omega \quad (3.30)$$

A Eq. (3.30) pode ser reescrita levando em consideração que $U(\tilde{j}_1)$ é antilinear como:

$$(U(A_1(t))|_{t=i\pi}\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = \bar{c}U(\tilde{j}_1)(\varphi_r^*(x, e)\Omega)(p) \quad (3.31)$$

Usando a covariância, Eq. (3.4), tem-se:

$$(U(A_1(t))\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = D_{r'r}(A_1(t))(\varphi_{r'}(\Lambda_1(t)x, \Lambda_1(t)e)\Omega)(p) \quad (3.32)$$

Utilizando a Eq. (3.13), na equação (3.32), tem:

$$(U(A_1(t))\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}D_{r'r}(A_1(t))e^{ip\Lambda_1(t)x}v_{r'}(p, \Lambda_1(t)e) \quad (3.33)$$

Pegando o lado direito da equação (3.31)⁴¹ e usando a Proposição 3.2.4, tem-se:

$$(U(\tilde{j}_1)\varphi_r^*(x, e)\Omega)(p) = D^{(s)}(\tilde{j}_1)(\varphi_r^*(x, e)\Omega)(-j_1p), \quad (3.34)$$

Utilizando a Eq. (3.16), na Eq. (3.34), chega-se a,

$$(U(\tilde{j}_1)\varphi_r^*(x, e)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}D^{(s)}(\tilde{j}_1)e^{-ij_1px}v_r^c(-j_1p, e) \quad (3.35)$$

De acordo com a equação (3.31), fazendo a extensão analítica para $t = i\pi$, deve-se ter as equações (3.33) e (3.35) iguais, portanto, será obtido:

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}D^{(s)}(\tilde{j}_1)e^{-ij_1px}v_r^c(-j_1p, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ip\Lambda_1(i\pi)x}D_{r'r}(A_1(t))v_{r'}(p, \Lambda_1(t)e)|_{t=i\pi}. \quad (3.36)$$

Com isso, obtemos o resultado:

$$D^{(s)}(\tilde{j}_1)v_r^c(-j_1p, e) = D_{r'r}(\tilde{j}_1)v_{r'}(p, j_1e), \quad (3.37)$$

o que produz a relação (3.28).

Usamos na Eq. (3.36) o fato de que $D^{(s)}(\tilde{j}_1)$ é antilinear e $\Lambda_1(t)|_{i\pi} = j_1$, veja Eq. (C.1).

□

Observação: Para referências futuras, para $s = n$ com $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja para os bósons, colocamos o fato de que a representação (3.5) se estende ao grupo próprio de Poincaré, por representantes adjuntando a transformação PT, $PT \doteq -\mathbf{1}$.⁴²

Há um operador de conjugação representando a transformação PT, isto é, uma involução antiunitária $D^{(n)}(-\mathbf{1})$ que comuta com todos os $D^{(n)}(R)$, $R \in SO(3)$. O operador PT é dado por⁴³

$$(U^{(m,n)}(-\mathbf{1})\psi)(p) \doteq D^{(n)}(-\mathbf{1})\psi(p), \quad (3.38)$$

onde $D^{(n)}(-\mathbf{1})$ é o operador antiunitário definido por:

$$D^{(n)}(-\mathbf{1}) \doteq D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(\tilde{j}_1)$$

⁴¹Definimos $U'(\tilde{j}_1) \doteq \bar{c} U(\tilde{j}_1)$, mas sem perder generalidade podemos fazer $c = 1$.

⁴²Veja [20, Seção 2].

⁴³Onde $j_1 = -R_1(\pi)$, $-\mathbf{1} = R_1(\pi) \circ j_1$ e $U(-\mathbf{1}) = U(R_1(\pi)) \circ U(\tilde{j}_1)$.

e a relação entre v e v^c é

$$D^{(n)}(-\mathbf{1}) v^c(p, e) e_{(r)} = v(p, -e) D(-\mathbf{1}) e_{(r)}. \quad (3.39)$$

Aqui, $D(-\mathbf{1})$ surge da componente unitária via continuação analítica de uma representação uniparamétrica. Note que $D(-\mathbf{1})$ é linear, enquanto $D^{(n)}(-\mathbf{1})$ é antilinear.

Vamos mostrar a Eq. (3.39).

Demonstração. A transformação PT $\doteq -\mathbf{1}$ é a composição de uma rotação- π sobre o eixo-1, com j_1 , onde $j_1 = -R_1(\pi)$. Escolhendo a família B_p , com $p \in H_m^+$, de modo que

$$R_1(\pi) \circ B_p = B_{R_1(\pi)p} \circ R_1(\pi), \quad (3.40)$$

a rotação de Wigner satisfaz $R(R_1(\pi), -j_1 p) = R_1(\pi)$ para todo p e usando Eq. (3.10), produzimos a Eq. (3.38). Aplicando as propriedades de intertwiner de v e v^c para a rotação $R_1(\pi)$ claramente temos que a Eq. (3.28) e a Eq. (3.39) estão fixadas uma em relação a outra.

□

Definição 3.2.6 (Intertwiners). *Uma família de distribuições v_r , $r = 1, \dots, N$, com as propriedades intertwiner (i) e analicidade (ii) da Proposição 3.2.5 é chamado de Intertwiner de Wigner de D para $D^{(s)}$. Dado um Intertwiner de Wigner v , seu conjugado v^c é definido pelo Teorema Bisognano-Wichmann[27]⁴⁴, ou seja, pela Eq. (3.28). O intertwiner v é chamado autoconjugado se $v = v^c$.*

Note que para o momento de referência $p = \bar{p}$, o intertwiner $v(\bar{p}, e) \doteq \hat{v}(e)$ satisfaz a “pequena relação de intertwiner”

$$D^{(s)}(R) \circ \hat{v}(R^{-1}e) = \hat{v}(e) \circ D(R), \quad R \in SU(2), \quad (3.41)$$

uma vez que $R \in SU(2)$ a rotação de Wigner $R(R, \bar{p})$ coincide com R .

⁴⁴Colocamos o Teorema no Apêndice C.

Demonstração. Para mostrar a “pequena relação de intertwiner” para \bar{p} , primeiro usamos o fato de que $\Lambda^{-1}p = \bar{p}$ na Eq. (3.25), depois identificamos nessa equação que $p = \bar{p}$, $A = R$ e que $\Lambda(R)x := Rx$ e por último utilizamos que $R(R, \bar{p}) = R$. Isso irá produzir a Eq. (3.41). \square

Por outro lado, a função intertwiner pode ser recuperada de $\hat{v}(e)$ pela identidade

$$v(p, e) = \hat{v}(B_p^{-1}e) \circ D(B_p^{-1}), \quad (3.42)$$

que também segue da relação de intertwiner (3.25) uma vez que $R(B_p, p) = \mathbf{1}$ ⁴⁵.

Demonstração. Para mostrar a Eq. (3.42), primeiro pegamos a Eq. (3.25) e identificamos $A = B_p$ e que $\Lambda(B_p)x := B_px$. Depois usamos que $B_p^{-1}p = \bar{p}$ e que $R(B_p, p) = \mathbf{1}$ isso já conclui a demonstração. \square

Assim, a construção de funções de intertwiners resume-se a encontrar as soluções para a relação (3.41).

3.2.2 Dos intertwiners para campos quânticos livres

Por outro lado, pode-se construir um campo livre por meio dos intertwiners de Wigner, como é feito na monografia de Weinberg [1] para campos com localização tipo-ponto. O primeiro passo é construir um intertwiner de Wigner a partir, de uma dada representação D , do grupo Lorentz ou de $SL(2, \mathbb{C})$ para $D^{(s)}$. Isso pode ser feito da seguinte maneira:

Primeiro encontre uma solução $\hat{v}(e)$ para a “pequena relação de intertwiner” Eq. (3.41), que tenha as propriedades analíticas necessárias, a saber, que é o valor de contorno de uma função analítica no tubo \mathcal{T}_+ . Então defina $v(p, e)$ como na Eq. (3.42).

⁴⁵De acordo com Proposição 3.2.5, temos que o \hat{v}^c irá satisfazer a mesma “pequena relação de intertwiner” trocando o $D(R)$ por $\overline{D(R)}$ e para recuperar o $v^c(p, e)$ basta trocar $D(B_p^{-1})$ por $\overline{D(B_p^{-1})}$. Portanto, temos, $D^{(s)}(R) \circ \hat{v}^c(R^{-1}e) = \hat{v}^c(e) \circ \overline{D(R)}$ e $v^c(p, e) = \hat{v}^c(B_p^{-1}e) \circ \overline{D(B_p^{-1})}$.

Este é um intertwiner de Wigner no sentido da Definição 3.2.6. A partir daqui, defina o intertwiner conjugado $v^c(p, e)$ pelo Teorema de Bisognano-Wichmann Eq. (3.28).

Em um segundo passo, constrói-se um campo livre do intertwiner de Wigner e de seu conjugado. Denotamos por \mathcal{H} , U e Ω o espaço Fock sobre $\mathcal{H}^{(m,s)}$ (para spin inteiro, o espaço de Fock Bosônico e para spin semi-inteiro, o espaço de Fock Fermiônico), a segunda quantização da representação de uma partícula $U^{(m,s)}$ e o espaço de Fock-vácuo invariante sobre $U^{(m,s)}$, respectivamente. Denotamos também $a^*(\psi)$ e $a(\psi)$, com $\psi \in \mathcal{H}^{(m,s)}$, os operadores criação e aniquilação. Dado um par de funções de teste $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ e $h \in \mathcal{D}(H)$, deixe ψ_r ser o vetor de uma partícula definido pelo lado direito da Eq. (3.20), e analogamente deixe ψ_r^c ser definido por

$$\psi_r^c(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) v_r^c(p, \bar{h}).$$

(Claro que, ψ_r depende linearmente das funções de teste (f, h) , enquanto ψ_r^c depende antilinearmente delas.)

Se exigirmos que $\varphi^*(x, e) = \varphi(x, e)$, isso implica $\varphi^*(f, h) = \varphi(\bar{f}, \bar{h})$, portanto, a demonstração da relação acima de $\psi_r^c(p)$ é feita de forma análoga à prova da Eq. (3.20), em que seria só substituir o $(\varphi(f, h)\Omega)(p)$ por $(\varphi(\bar{f}, \bar{h})\Omega)(p)$.

Então defina

$$\varphi_r(f, h) \doteq a^*(\psi_r) + a(\psi_r^c).$$

Por uma versão do teorema de Jost-Schroer [10, 15, 28], este é o campo livre único (módulo uma equivalência unitária) com a função intertwiner dada v . Vamos reescrevê-lo na notação informal usual, assim simbolicamente

$$a^*(\psi) =: \int d\mu(p) \sum_{k=1}^{2s+1} \psi^k(p) a^*(p, k), \quad a(\psi) =: \int d\mu(p) \sum_{k=1}^{2s+1} \overline{\psi^k(p)} a(p, k).$$

Aqui, o subscrito k indica as componentes em relação à uma base $\{e_{(k)}\}$ em $\mathfrak{h}^{(s)}$, ou seja, $\psi(p) = \sum_k \psi^k(p) e_{(k)}$, e a integral é feita através da concha de massa H_m^+ . Então

$$\varphi_r(x, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \sum_{k=1}^{2s+1} \left\{ e^{ip \cdot x} v_r^k(p, e) a^*(p, k) + e^{-ip \cdot x} \overline{v_r^k(p, e)} a(p, k) \right\}. \quad (3.43)$$

Chamamos isso de *campo livre para* o intertwiner de Wigner v^{46} . É claro que é hermitiano se e somente se o intertwiner for autoconjugado, $v^c = v$.

Podemos entender o campo dessa forma, Eq (3.43). A saber, a Eq. (3.13) pode ser escrita como

$$(\varphi_r(x, e)\Omega)^k(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_r^k(p, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} v_r^l(q, e) (a^*(q, l)\Omega)^k(p), \quad (3.44)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$.

Para escrever dessa forma usamos a Eq. (2.15) se o campo for bosônico e a Eq. (2.16) se for fermiônico, a saber, $(a^*(q, l)\Omega)^k(p) = 2\omega_m(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{kl}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$.

Como queremos $\varphi_r(x, e)^*\Omega \neq 0$, pois de acordo com o Teorema de Reeh-Schlieder [10, Teorema 4.3], $\varphi_r(x, e)^*\Omega = 0$ implica que $\varphi_r(x, e)^* = 0$ será definido $\varphi_r(x, e)$ da seguinte forma:

$$\varphi_r(x, e) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} v_r^l(q, e) a^*(q, l) + A_r, \quad (3.45)$$

com $A_r\Omega = 0$, porém $A_r^*\Omega \neq 0$. Segundo o Teorema de Bisognano-Wichmann, para o caso de campos quânticos com localização tipo-string [27], tem-se $\varphi_r(x, e)^*\Omega \in \mathcal{H}^1$. Portanto, aplicando o adjunto na equação (3.45), pode-se encontrar A .

Tem-se: $(\varphi_r(x, e)^*\Omega)^k(p) = (A_r^*\Omega)^k(p)$. Logo devemos, então, escrever a Eq. (3.16) como:

$$(\varphi_r(x, e)^*\Omega)^k(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_r^{c,k}(p, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} v_r^{c,l}(q, e) (a^*(q, l)\Omega)^k(p), \quad (3.46)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$. De acordo com a equação (3.46), tem-se que:

$$A_r = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{-iqx} \overline{v_r^{c,l}(q, e)} a(q, l),$$

Substituindo A_r na Eq. (3.45), obtemos a Eq. (3.43).

A função de dois pontos para dois campos como $\varphi_{1,r}$ e $\varphi_{2,r}$ com os respectivos

⁴⁶Para os férmions, deve-se substituir na Eq. (3.43), a^* e a por b^* e d , respectivamente. Em que b^* cria partícula e d^* cria a anti-partícula.

intertwiners de Wigner v_1 e v_2 sai como⁴⁷

$$(\Omega, \varphi_{1,r}(x, e) \varphi_{2,r'}(x', e') \Omega) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} M_{r,r'}^{\varphi_1 \varphi_2}(p, e, e') \quad (3.47)$$

$$M_{r,r'}^{\varphi_1 \varphi_2}(p, e, e') = (v_{1r}^c(p, e), v_{2r'}(p, e'))_{\mathfrak{h}^{(s)}}, \quad (3.48)$$

em que (\cdot, \cdot) e $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{h}^{(s)}}$ indicam os produtos escalares no espaço Fock \mathcal{H} bosônico e no pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$, respectivamente. A distribuição $M_{r,r'}^{\varphi_1 \varphi_2}(p, e, e')$ é a transformada de Fourier da função de dois pontos, após separar o fator delta da concha de massa, a qual denominamos de *parte da função de dois pontos sobre a concha*. Note que a positividade da função de dois pontos é satisfeita por construção.

Demonstração. Substituindo a Eq. (3.43) na Eq. (3.47), temos

$$\begin{aligned} (\Omega, \varphi_{1,r}(x, e) \varphi_{2,r'}(x', e') \Omega) &= \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) (\Omega, e^{-ip \cdot x} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e) a(p, k)} e^{iq \cdot x'} v_{2r'}^l(q, e) a^*(q, l) \Omega)_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot x'} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e) v_{2r'}^l(q, e)} (\Omega, a(p, k) a^*(q, l) \Omega)_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \dots \end{aligned}$$

Das Eqs. (3.11) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{2\omega_m(\mathbf{q})} e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot x'} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e) v_{2r'}^l(q, e)} (2\omega_m(\mathbf{p}) \delta_{k,l} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}))_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} (v_{1r}^c(p, e), v_{2r'}(p, e'))_{\mathfrak{h}^{(s)}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.7. *Seja $v(p, e)$ um intertwiner de Wigner de $D^{(s)}$ para D no sentido da Definição 3.2.6, com seu respectivo $v^c(p, e)$, definido pela Eq. (3.28). Então o campo*

⁴⁷Essa definição será utilizada apenas para o caso de spin inteiro, $s = n$ com $n \in \mathbb{N}_0$, pois campos com spin semi-inteiro, $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \geq 1$, não são observáveis no sentido de que uma rotação de 2π gera um sinal. Além disso, há o fato de que o adjunto do campo semi-inteiro cria antipartícula que não coincide com a partícula, portanto, se a definição fosse a mesma, a função de dois pontos seria igual a zero. Para campos com spin semi-inteiro definimos a função de dois pontos no Capítulo 5, de acordo com a Eq. (5.16) abaixo.

definido na Eq. (3.43) é uma distribuição com valor operador.⁴⁸ É localizado tipo-string e covariante no sentido das Eqs. (1.2) e (3.12). Além disso, satisfaz as propriedades Reeh-Schlieder e Bisognano-Wichmann (veja abaixo). Ademais, a simetria CPT ⁴⁹ assegura:

$$U(\tilde{j}_1) \varphi_r(x, e) U(\tilde{j}_1)^{-1} = \sum_{r'=1}^N \varphi_{r'}(j_1 x, j_1 e)^* \overline{D(\tilde{j}_1)_{r'r}}. \quad (3.49)$$

Os campos construídos via Eq. (3.43) por diferentes intertwiner de Wigner de $D^{(s)}$ para o mesmo D são relativamente localizados tipo-string entre si.

Pela propriedade *Reeh-Schlieder* queremos dizer que os polinômios dos campos já geram um conjunto denso a partir do vácuo quando integrado com função de teste dentro de conjuntos arbitrários, fixos e abertos $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ e $U \subset H$. A propriedade *Bisognano-Wichmann* significa que o grupo modular e a conjugação modular da álgebra associada à uma cunha W coincidem com os representantes dos boosts $\Lambda_W(t)$ e a reflexão j_W associada para W , respectivamente, veja por exemplo [29].

Demonstração. Para mostrar a propriedade de distribuição (fraca), é suficiente mostrar pelo teorema de Wick que $\varphi_r(x, e)\Omega$ é uma distribuição com valores no espaço de uma partícula. Para esse fim, note que a Eq. (A.6) do Lema A.3 em [8] implica que $v_r(p, h)$, tal como definido na Eq. (3.26), é limitado em norma por

$$\|v_r(p, h)\|_{\mathfrak{b}^{(s)}} \leq M(p) N(h),$$

onde M é uma função positiva na concha de massa que é localmente L^2 em relação a medida $d\mu(p)$ e polinomialmente limitada,⁵⁰ e $N(h)$ é uma soma de seminormas da topologia de $\mathcal{D}(H)$. Escrevendo o vetor $\varphi_r(f, h)\Omega$ que depois de integrado com função de teste como em Eq. (3.20), isso produz o limite

$$\|\varphi_r(f, h)\Omega\|^2 \leq N(h)^2 N'(f)^2 (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) (1 + |p|^n)^{-2} M(p)^2 \leq c N(h)^2 N''(f)^2,$$

⁴⁸ Com isso queremos dizer que $(x, e) \mapsto (\phi, \varphi(x, e)\Psi)$ com $\Psi, \phi \in \mathcal{D} = \{\varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)\Omega\}$ [10].

⁴⁹ O teorema CPT é o princípio segundo o qual os sistemas físicos são invariantes para transformações que envolvem, concomitantemente, as operações de inversão da carga C , inversão de paridade P e inversão do tempo T .

⁵⁰ Existe um n suficientemente grande, tal que $(1 + |p|^n)^{-1} M(p) \leq c$.

onde $N'(\cdot)$ e $N''(\cdot)$ são somas (ponderadas) de seminormas na topologia de Schwartz, e $|p|$ é alguma norma euclidiana de p . (Escolhemos N' de modo que $|\hat{f}(p)| \leq (1 + |p|^n)^{-1} N'(\hat{f})$ e usamos que existe $N''(f)$ dominando $N'(\hat{f})$, pela continuidade da transformada de Fourier.) Isso conclui a prova de que o campo é uma distribuição (fraca), no sentido da nota de rodapé 48.

O campo é definido justamente para que as Eqs. (3.13) e (3.16) sejam mantidas. Assim, o vetor de uma partícula $U(A)\varphi_r(x, e)\Omega$ é, por construção, dado pela seguinte função com valores- $\mathfrak{h}^{(s)}$ na concha de massa:

$$(U(A)\varphi_r(x, e)\Omega)(p) = e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} D^{(s)}(R(A, p)) v_r(\Lambda(A)^{-1}p, e).$$

Pela propriedade de intertwiner (3.25) de $v(p, e)$ o lado direito coincide com

$$e^{ip \cdot \Lambda x} \sum_{r'=1}^N v_{r'}(p, \Lambda(A)e) D(A)_{r'r} \equiv \sum_{r'=1}^N (\varphi_{r'}(\Lambda(A)x, \Lambda(A)e)\Omega)(p) D(A)_{r'r}.$$

Como Ω é invariante sob U , mostramos que a identidade (3.12) dos operadores é válida se aplicada ao vetor de vácuo. Pelo teorema de Reeh-Schlieder, isso implica que os operadores coincidem, portanto, Eq. (3.12). Um argumento semelhante mostra a simetria CPT, Eq. (3.49).

Como a prova de localidade em strings (1.2) em [9] se baseia no conceito de localização modular que não é abordado nessa pesquisa, uma prova direta da relativa localidade de strings, pode ser entendida a partir de uma ligeira adaptação da prova em [8]. Seja $v'(p, e)$ um segundo intertwiner de Wigner de $D^{(s)}$ para D e deixe $\varphi'_r(x, e)$ ser o campo correspondente.

Suponha que (x, e) e (x', e') satisfaçam a condição para Eq. (1.2). Então há uma vizinhança U e U' de e e e' , respectivamente, de forma que os cones tipo-espaço $C \doteq x + \mathbb{R}_0^+ U$ e $C' \doteq x' + \mathbb{R}_0^+ U'$ são separados tipo-espaço. Isto implica [30] que existe uma região da cunha (*wedge*) W da forma $W = a + \Lambda W_1$ para alguma transformação de Poincaré (a, Λ) , tal que $C \subset W$ e $C' \subset W'$, onde W' denota o complemento causal de W . Por invariância de translação da função de dois pontos, podemos supor que a cunha

contém a origem, ou seja, $a = 0$. Então x está na cunha W e U está contido em seu fecho [9, Lema A1], uma vez que U é aberto, está no interior de W . Assim, x e e estão em W e, da mesma forma, x' e e' estão no interior de W' .

Seja j_W e $\Lambda_W(t)$ uma reflexão e um boost, respectivamente, correspondendo a W , isto é, $j_W \doteq \Lambda j_1 \Lambda^{-1}$ e $\Lambda_W(t) \doteq \Lambda \Lambda_1(t) \Lambda^{-1}$. Denote por g_t a transformação do grupo próprio não ortócrono de Poincaré $\Lambda_W(-t)j_W$ e $D(\tilde{g}_t) := D(AA_1(-t)A^{-1}) \circ D(A \tilde{j}_1 A^{-1})$, com $A \in SL(2, \mathbb{C})$, tal que $\Lambda(A) = \Lambda$, $A_1(t) \doteq e^{\frac{t\sigma_1}{2}}$ e $D(A \tilde{j}_1 A) \doteq D(AA_1(t)A) |_{t=i\pi}$. Então se verifica a relação

$$\begin{aligned} & (\Omega, \varphi_r(x, e)^* \varphi_{r'}(g_t^{-1}x', g_t^{-1}e')\Omega) \\ &= \sum_{s, s'} (\Omega, \varphi'_{s'}(x', e')\varphi_s(g_t x, g_t e)^* \Omega) \overline{D(\tilde{g}_t)_{sr}} D(\tilde{g}_t)_{s'r'}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usamos sucessivamente a invariância de Ω em $U \equiv U(\tilde{g}_t) := U(AA_1(-t)\tilde{j}_1 A^{-1})$, antiunitariedade de U , a saber, $(\Omega, \psi) = (U^{-1}\Omega, \psi) = (U\psi, \Omega)$, em seguida a simetria CPT, Eq. (3.49), e a covariância, Eq. (3.12). Finalmente, juntamos os operadores de campo para o lado direito do produto escalar.

A função com valores-matrizes $D(\tilde{g}_t)$ (e, portanto, $\overline{D(\tilde{g}_t)}$) é função inteira⁵¹ no boost com parâmetro t . Note que j_W e $\Lambda_W(t)$ comutam, portanto, $g_t^{-1} = g_{-t}$ e para t na faixa $\mathbb{R} + i(0, \pi)$ as partes imaginárias de $g_t x$, $g_t e$, $g_{-t}x'$ e $g_{-t}e'$ todas estão no cone de luz futuro V_+ (ver por exemplo Eq. (A.7) em [9]). Agora a função de dois pontos é uma função analítica da segunda variável- x no tubo $\mathbb{R}^4 + iV_+$ devido ao suporte de sua transformada de Fourier e, também, da segunda variável- e no tubo \mathcal{T}_+ devido à analiticidade da função de intertwiner. Portanto, a equação (3.50) se estende, pelo princípio de reflexão de Schwarz, a partir do limite em $\text{Im } t = 0$ sobre a faixa inteira até o limite superior e os valores de contorno em $t = i\pi$ coincidem para ambos os lados. Mas $\Lambda_W(\pm i\pi) = j_W$, ou seja, $g_{\pm i\pi} = 1$. Uma vez que $D(\tilde{g}_t)|_{t=i\pi} := D(AA_1(-t)A^{-1})|_{t=i\pi} \circ D(A \tilde{j}_1 A) = \Lambda \Lambda_1(-t) \Lambda^{-1}|_{t=i\pi} \Lambda j_1 \Lambda^{-1} \otimes \dots \otimes \Lambda \Lambda_1(-t) \Lambda^{-1}|_{t=i\pi} \Lambda j_1 \Lambda^{-1} \otimes S^c(AA_1(-t)A^{-1})|_{t=i\pi} S^c(AA_1(t)A^{-1})|_{t=i\pi}$,⁵² temos que

⁵¹Uma função inteira (*entire analytic*), também chamada de função integral, é uma função de valor complexo que é holomórfica em todo o plano complexo

⁵²Onde $S^c(AA_1(t)A^{-1})|_{t=i\pi} = S^c(A)S^c(A_1(t))|_{t=i\pi}S^c(A^{-1})$ e $S^c(A_1(t))$ definido na nota de rodapé 40.

$D(\tilde{g}_{i\pi}) = g_{i\pi} \otimes \cdots \otimes g_{i\pi} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. E $\overline{D(\tilde{g}_t)}|_{t=i\pi} = \Lambda\Lambda_1(-t)\Lambda^{-1}|_{t=i\pi}\Lambda j_1\Lambda^{-1} \otimes \cdots \otimes \Lambda\Lambda_1(-t)\Lambda^{-1}|_{t=i\pi}\Lambda j_1\Lambda^{-1} \otimes \overline{S^c(AA_1(-t)A^{-1})}|_{t=i\pi} \overline{S^c(AA_1(t)A^{-1})}|_{t=i\pi}$.

Uma vez que $\overline{S^c(A_1(-t))}|_{t=i\pi} = S^c(A_1(-t))|_{t=i\pi} = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$ e $\overline{S^c(A_1(t))}|_{t=i\pi} = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$, temos que $\overline{D(\tilde{g}_t)}|_{t=i\pi} = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes -\mathbf{1}$. Portanto, $\overline{D(\tilde{g}_t)}|_{t=i\pi}$ é igual a $\mathbf{1}$

para os bósons e $-\mathbf{1}$ para os férmions, então a Eq. (3.50) em $t = i\pi$ é apenas a localidade das funções de dois pontos. Isto implica a localização dos campos pelos argumentos usuais de Jost-Schroer. As propriedades de Reeh-Schlieder e Bisognano-Wichmann são mostradas como [9, Teorema 3.3]. □

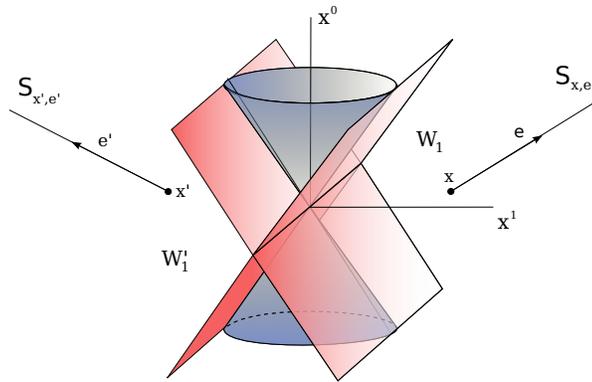


Figura 3.1: cunha

A figura 3.1 nos permite visualizar a cunha (wedge) W_1 e o seu complemento causal W_1' , com seus respectivos strings.

3.2.3 Observação no caso localizado tipo-ponto

O conceito de intertwiner permite uma prova fácil de que um campo livre localizado tipo-ponto para um determinado tipo de partícula (m, s) e transformando sob uma representação *irredutível* D é *único* módulo equivalência unitária: no caso de localização

tipo-ponto, o intertwiner não depende de e . Portanto, o mapa $\hat{v} \equiv v(\bar{p})$ de \mathfrak{h} para $\mathfrak{h}^{(s)}$ também é independente de e , e a Eq. (3.41) significa apenas que é um intertwiner no sentido usual.

Este intertwiner existe se e somente se $D|SU(2)$ contém $D^{(s)}$ como uma subrepresentação. Este é o caso se D contém alguma representação irreduzível $D^{(j,k)}$ com $|j - k| \leq s \leq j + k$. Cada uma dessas representações $D^{(j,k)}|SU(2)$ contém a representação do spin- s do grupo de rotação exatamente uma vez e, portanto, o correspondente intertwiner $\hat{v}^{(j,k)}$ é único módulo um fator. Conseqüentemente, se a representação D for irreduzível, o campo será exclusivo (módulo equivalência unitária).

Essa exclusividade não é válida para campos localizados tipo-string. Em particular, $v(p, e)$ pode ser multiplicado com $F(p \cdot e)$, onde F é o valor de contorno de qualquer função analítica (numérica) no semi-plano complexo superior.

3.2.4 Recordando campo quântico livre escalar $s = 0$

Antes de começar a mostrar os resultados para os campos com spin geral s diferente de zero obtidos, fazemos aqui uma recordação para o caso do campo quântico escalar $s = 0$ com localização tipo-ponto. Escolhemos fazer o caso do campo com localização tipo-ponto devido ao fato de que o campo escalar localizado tipo-string não pode ser escrito como seu correspondente tipo-ponto mais termos que são derivadas de algum campo localizado tipo-string, Eq. (1.5). O espaço de representação nesse caso é $\mathcal{H}^{(m,0)} := L^2(H_m^+, d\mu)$, em que $d\mu(p)$ é a medida invariante de Lorentz em H_m^+ e $U^{(m,0)}$ age de acordo com

$$(U^{(m,s)}(a, A)\psi)(p) = e^{ip \cdot a} \psi(\Lambda^{-1}p). \quad (3.51)$$

O campo livre escalar é caracterizado por:

- (i) Satisfazer a equação de Klein-Gordon $(\square + m^2)\varphi(x) = 0$, ou alternativamente por,
- (ii) $\varphi(x)\Omega \in \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^{(m,0)} \cong$ Representação unitária irreduzível de $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondente a massa $m > 0$ e spin $s = 0$, estado de uma partícula.

O campo quântico $\varphi(x)$, no caso escalar, deve satisfazer às seguintes exigências:

Covariância:

$$U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1} = \varphi(a + \Lambda x) \quad (3.52)$$

Causalidade:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad (3.53)$$

se $(x - y)^2 < 0$ (intervalo entre dois eventos no \mathbb{R}^4 , denominado de tipo espaço).

Tem-se então:

$$(U(a, A)\varphi(x)\Omega)(p) = e^{ip \cdot a}(\varphi(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p). \quad (3.54)$$

||

$$(U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1}\Omega)(p) = (\varphi(a + \Lambda x)\Omega)(p). \quad (3.55)$$

Fazendo $x = 0$ e $\Lambda = 1$ nas duas equações (3.54) e (3.55), pode-se concluir que $(\varphi(x)\Omega)(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ip \cdot x}v(p)$ com $v(p) = (2\pi)^{\frac{3}{2}}(\varphi(0)\Omega)(p)$.⁵³

Facilmente se percebe através das equações (3.54) e (3.55), quando se faz $a = 0$ que $(\varphi(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p) = (\varphi(\Lambda x)\Omega)(p)$ obtém-se $e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x}v(\Lambda^{-1}p) = e^{ip \cdot \Lambda x}v(p)$. Com isso, chega-se à equação.

$$v(\Lambda^{-1}p) = v(p), \quad p \in \mathcal{H}_m^+. \quad (3.56)$$

Como \mathcal{L}_+^\dagger age transitivamente em \mathcal{H}_m^+ fica-se a conclusão de que $v(p)$ é uma constante e que, por convenção, faze-se a constante igual⁵⁴ a 1, obtendo com tudo isso a seguinte equação:

$$(\varphi(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ip \cdot x} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q)e^{iq \cdot x}(a^*(q)\Omega)(p) \quad (3.57)$$

Com $p \in \mathcal{H}_m^+$.

Como queremos que $\varphi^*(x)\Omega \neq 0$, pois de acordo com o Teorema de Reeh-Schlieder [10, Teorema 4.3], $\varphi^*(x)\Omega = 0$ implica $\varphi^*(x) = 0$, com isso, defini-se $\varphi(x)$ da seguinte

⁵³Podemos também a partir das equações (3.54) e (3.55) verificar que $e^{-ip \cdot x}(\varphi(x)\Omega)(p)$ é independente de x , por esta razão fizemos tal definição para $v(p)$.

⁵⁴O fator $(2\pi)^{-\frac{3}{2}}$ na definição do $v(p)$ foi introduzido para que a relação canônica de comutação seja satisfeita uma vez que escolhemos a constante igual a 1, a saber, $[\varphi(0, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(0, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

forma:

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} a^*(q) + A, \quad (3.58)$$

e deve-se ter $A\Omega = 0$. Porém $A^*\Omega \neq 0$ e devido ao Teorema de Bisognano-Wichmann [31, 32] tem-se $\varphi^*(x)\Omega \in \mathcal{H}^1$. Portanto, aplicando o adjunto na equação (3.58), pode-se encontrar o A . Assim, tem-se $\varphi^*(x)\Omega = A^*\Omega$, deve-se então encontrar o $\varphi^*(x)\Omega$.

Utilizando o espaço de representação (3.51) e a covariância (3.52) para o $\varphi^*(x)$, temos:

$$(U(a, A)\varphi^*(x)\Omega)(p) = e^{ip \cdot a} (\varphi^*(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p). \quad (3.59)$$

||

$$(U(a, A)\varphi^*(x)U(a, A)^{-1}\Omega)(p) = (\varphi^*(a + \Lambda x)\Omega)(p). \quad (3.60)$$

Fazendo $x = 0$ e $\Lambda = \mathbb{1}$ nas equações (3.59) e (3.60) pode-se concluir que $(\varphi^*(x)\Omega)(p) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v^c(p)$ com $v^c(p) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\varphi^*(0)\Omega)(p)$.

Facilmente se percebe através das equações (3.59) e (3.60) quando se faz $a = 0$ que $(\varphi^*(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p) = (\varphi^*(x)\Omega)(p)$ obtém-se $e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} v^c(\Lambda^{-1}p) = e^{ip \cdot \Lambda x} v^c(p)$. Com isso, chega-se à equação:

$$v^c(\Lambda^{-1}p) = v^c(p), \quad p \in \mathcal{H}_m^+. \quad (3.61)$$

Como \mathcal{L}_+^\dagger age transitivamente em \mathcal{H}_m^+ , chega-se à conclusão de que $v^c(p)$ é uma constante que, pela mesma justificativa anterior, será igual à constante no caso de $v(p)$, obtendo com tudo isso a seguinte equação:

$$(\varphi^*(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} (a^*(q)\Omega)(p) \quad (3.62)$$

Com $p \in \mathcal{H}_m^+$. De acordo com a equação (3.62), tem-se que:

$$A = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{-iqx} a(q)$$

Com isso, chega-se:

$$(\varphi(x)\Omega)(p) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} (a^*(q)\Omega)(p) + e^{-iqx} (a(q)\Omega)(p)$$

E obtém-se o campo quântico livre escalar:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \{e^{ipx} a^*(p) + e^{-ipx} a(p)\} \quad (3.63)$$

A equação acima é uma forma simbólica, pois o significado é:

$$\varphi(f) = a^*(Ef) + a(E\bar{f}),$$

$Ef := \varphi(f)\Omega = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \widehat{f}|_{\mathcal{H}_m^+} \equiv a^*(Ef)\Omega$ uma aplicação linear, $E\bar{f} := \varphi^*(f)\Omega = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \widehat{\bar{f}}|_{\mathcal{H}_m^+} \equiv a(E\bar{f})\Omega$ uma aplicação antilinear e $\varphi(f) = \int d^4x f(x)\varphi(x)$.

Tem-se:

$$\widehat{f}(p) := \int d^4x f(x)e^{ip \cdot x}.$$

Usando as equações (2.13) e (2.14), tem-se:

$$\varphi(f) = a^*(Ef) + a(E\bar{f}) = \int d\mu(p) \{a^*(p)Ef(p) + a(p)\overline{E\bar{f}}(p)\} \quad (3.64)$$

$$\varphi(f) = \int d^4x f(x)(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} a^*(p) + e^{-ip \cdot x} a(p)\} \quad (3.65)$$

Note que conseguimos criar o campo escalar livre, simplesmente através de exigências feitas no começo. Vale mencionar que a solução é única pelo teorema de Jost-Schroer [10, Teorema 4.15], em que se tem somente uma constante livre e que, por convenção, toma-se tal constante igual a 1.

Com o campo será verificada a covariância e condição de causalidade, mas antes disso, será visto o comportamento dos operadores criação e aniquilação sobre transformações, definidos pelas equações (2.13) e (2.14).

$$U(a, A)a^*(\Phi)U(a, A)^{-1} = \int d\mu(p)\Phi(p)U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} \quad (3.66)$$

mas, temos de [25]

$$U(a, A)a^*(\Phi)U(a, A)^{-1} = a^*(U(a, A)\Phi) = \quad (3.67)$$

$$= \int d\mu(p)(U(a, \Lambda)\Phi)(p)a^*(p) = \int d\mu(p)e^{ip \cdot a}\Phi(\Lambda^{-1}p)a^*(p) \quad (3.68)$$

Fazendo $\Lambda^{-1}p = q$ e umas pequenas modificações pode-se comparar as equações (3.66) e (3.68) e obter-se:

$$U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} = e^{i\Lambda p \cdot a}a^*(\Lambda p) \quad (3.69)$$

De forma análoga pode-se fazer para o operador aniquilação:

$$U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} = \int d\mu(p)\bar{\Phi}(p)U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1} \quad (3.70)$$

mas

$$U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} = a(U(a, A)\Phi) = \quad (3.71)$$

$$= \int d\mu(p)\overline{(U(a, A)\Phi)(p)}a(p) = \int d\mu(p)e^{-ip \cdot a}\overline{\Phi(\Lambda^{-1}p)}a(p) \quad (3.72)$$

Fazendo $\Lambda^{-1}p = q$ e umas pequenas modificações pode-se comparar as equações (3.70) e (3.72) e obter-se:

$$U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1} = e^{-i\Lambda p \cdot a}a(\Lambda p) \quad (3.73)$$

Agora, há condições para mostrar a covariância (3.52) e causalidade (3.53).

Demonstração. Covariância

$$U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1} = U(a, A)(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot x}a^*(p) + e^{-ip \cdot x}a(p)\}U(a, A)^{-1} = \quad (3.74)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot x}U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} + e^{-ip \cdot x}U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1}\} = \dots \quad (3.75)$$

Através das equações (3.69) e (3.73) e de simples substituições de varáveis será obtido a relação de covariância.

$$\dots = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot (\Lambda x + a)}a^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)}a(p)\} = \varphi(\Lambda x + a). \quad (3.76)$$

□

A partir da “função” de dois pontos conseguiremos verificar a causalidade do campo livre escalar. A “função”(distribuição) de dois pontos para o campo escalar é definida através da seguinte equação.

$$w_2(x, y) := (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) \quad (3.77)$$

Pela covariância (3.52) é fácil ver que:

$$w_2(x, y) = w_2(\Lambda x + a, \Lambda y + a) \quad (3.78)$$

Demonstração. Pode-se escrever, usando a equação (3.52) que:

$$\begin{aligned} w_2(\Lambda x + a, \Lambda y + a) &= (\Omega, U(A)\varphi(x)U(A)^{-1}U(A)\varphi(y)U(A)^{-1}\Omega) = \\ &= (\Omega, U(A)\varphi(x)\varphi(y)U(A)^{-1}\Omega) = \dots \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que $U(a, A)\Omega = \Omega$, para todo $(a, A) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ tem-se

$$= \dots (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) = w_2(x, y)$$

□

Escreve-se a função de dois pontos da seguinte forma $w_2(x, y) = w_2(x - y, 0) := w(x - y)$. Com isso, vê-se que em particular a “função” de dois pontos só depende de $x - y$, por isso será escrito $w_2(x, y) = w(x - y)$.

Escrevendo de forma explícita a “função” de dois pontos, tem-se:

$$(\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) (\Omega, e^{-ip \cdot x} a(p) \cdot e^{iq \cdot y} a^*(q)\Omega) = \quad (3.79)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) d\mu(q) e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} (\Omega, a(p)a^*(q)\Omega) = \quad (3.80)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \frac{d^3 \vec{q}}{2\omega(\vec{q})} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} (\Omega, [a(p), a^*(q)] - a^*(q)a(p)\Omega) = \quad (3.81)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \frac{d^3 \vec{q}}{2\omega(\vec{q})} e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} (2\omega_m(\vec{p})\delta(\vec{p} - \vec{q})) = \dots \quad (3.82)$$

Utilizou-se a medida já definida anteriormente, a equação (2.15) e com isso chegou-se à função de dois pontos.

$$\dots w_2(x, y) = w(x - y) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x - y)} \quad (3.83)$$

Pode-se, agora, calcular o comutador $[\varphi(x), \varphi(y)]$ para verificar a condição de causalidade dada pela Eq. (3.53).

Causalidade:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p)d\mu(q) [e^{ip \cdot x} a^*(p) + e^{-ip \cdot x} a(p), e^{iq \cdot y} a^*(q) + e^{-iq \cdot y} a(q)] = (3.84)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p)d\mu(q) \{e^{ip \cdot x - iq \cdot y} [a^*(p), a(q)] + e^{-ip \cdot x + iq \cdot y} [a(p), a^*(q)]\} \quad (3.85)$$

Mais uma vez, pode-se utilizar a equação (2.15) e obter

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}\}. \quad (3.86)$$

Note que obteve-se o seguinte resultado

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = w(x-y) - w(y-x). \quad (3.87)$$

Portanto, para ter a condição de causalidade satisfeita, deve-se ter $(x-y)^2 < 0$.

$$i\Delta(x-y) := w(x-y) - w(y-x) = 0 \quad \text{que implica} \quad w(x-y) = w(y-x) \quad (3.88)$$

Pode-se encontrar a condição de causalidade de uma forma mais simples, levando em conta que todos os comutadores relevantes são múltiplos da $\mathbf{1}$ (ver equação (3.84)). Tem-se que $[\varphi(x), \varphi(y)] = c\mathbf{1}$ e c é dado pelo valor esperado do comutador. Será calculado o valor esperado no estado do vácuo e terá então:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (\Omega, [\varphi(x), \varphi(y)]\Omega)\mathbf{1} = i\Delta(x-y)\mathbf{1}$$

Mostra-se a equação (3.88).

Demonstração.

$$i\Delta(x-y) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}\} = -(2\pi)^{-3} (2i) \int d\mu(p) \text{sen}[p \cdot (x-y)] = \quad (3.89)$$

$$= (2\pi)^{-3} (2i) \int d\mu(p) \text{sen}[-p \cdot (x-y)] = \quad (3.90)$$

Sendo $p = (\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ e $x = (x^0, \mathbf{x})$ e $y = (y^0, \mathbf{y})$. Primeiro, será calculado para x^0 e y^0 iguais a 0, com isso, fica-se com:

$$i\Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = w(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) - w(0, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = -(2\pi)^{-3} (2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] = \quad (3.91)$$

$$= (2\pi)^{-3}(2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (3.92)$$

se faz uma mudança de variável de $+\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ tem-se

$$(2\pi)^{-3}(2i) \int \frac{d^3(-\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad (3.93)$$

e usa-se que $d^3(-\mathbf{p})$ é igual a $d^3(\mathbf{p})$. Logo, obtém-se

$$(2\pi)^{-3}(2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad (3.94)$$

Comparando esta última equação com a equação (3.91) implica que $w(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) - w(0, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$. Se $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$.

Observa-se que, para $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, tem-se $i\Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\Delta(\Lambda(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}))$ o que, pela covariância, fica facilmente determinado ver equação (3.78), implicando a invariância sobre transformação de Lorentz.

Para completar a demonstração, tem-se que para $(x - y)^2 < 0$ existe $\Lambda, \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ tal que, $x - y = \Lambda(0, \mathbf{z})$, logo $i\Delta(x - y) = i\Delta(\Lambda(0, \mathbf{z})) = 0$. Com isso, finaliza-se a demonstração da causalidade do campo escalar para $(x - y)^2 < 0$. \square

3.3 Campos quânticos livres localizados tipo-ponto com spin s arbitrário

Fazemos aqui uma breve revisão sobre campos quânticos localizados tipo-ponto com spin s para mostrar que os intertwiners são únicos módulo constante como dito anteriormente. A maneira como é feito o desenvolvimento é similar ao que foi feito na seção 3.2.1. A diferença é que nesse caso os campos e os intertwiners são independentes da variável e .

Portanto, os campos $\varphi_r(x)$ irão satisfazer a mesma relação de covariância Eq. (3.12) negligenciando a variável e e a representação de Wigner no espaço de uma partícula \mathcal{H}^1 é:

$$(U(a, A)\varphi)(p) = e^{ip \cdot a} D^{(s)}(R(A, p))\varphi(\Lambda(A)^{-1}p).$$

Será exigido que $\varphi_r(x)\Omega \in \mathcal{H}^1 \cong \mathcal{H}^{(m,s)}$, representação unitária irredutível de $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondente à massa $m > 0$ e spin s arbitrário.

E em consequência, temos o campo quântico livre com spin s arbitrário localizado tipo-ponto:

$$\varphi_r(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \{e^{ipx} v_r^k(p) a^*(p, k) + e^{-ipx} \overline{v_r^{c,k}(p)} a(p, k)\}. \quad (3.95)$$

Por uma versão do teorema de Jost-Schroer [10, 15, 28], este é o campo livre único (módulo equivalência unitária) com a função intertwiner dada v .

A equação (3.95) é uma forma simbólica, pois o significado rigoroso é: $\varphi(\vec{f}) \doteq \sum_r \int d^4x f_r(x) \varphi_r(x)$.

$$\varphi(\vec{f}) := a^*(E\vec{f}) + a(\widetilde{E}\vec{f})$$

Aqui tem-se E uma aplicação linear da seguinte forma:

$$E : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(E\vec{f})^k(p) \doteq (\varphi(\vec{f})\Omega)^k(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v_r^k(p) \widehat{f}_r(p) \equiv a^*(E\vec{f})^k \Omega, \quad (3.96)$$

e \widetilde{E} uma aplicação antilinear da seguinte forma:

$$\widetilde{E} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(\widetilde{E}\vec{f})^k(p) \doteq (\varphi(\vec{f})^* \Omega)^k(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v_r^{c,k}(p) \widehat{f}_r(p) \equiv a(\widetilde{E}\vec{f})^k \Omega \quad (3.97)$$

Há a seguinte definição:

$$\widehat{f}_r(p) := \int d^4x f_r(x) e^{ipx}$$

Agora fazendo o uso das equações (2.13) e (2.14), obtém-se

$$\varphi(\vec{f}) = \sum_{k=1}^{2s+1} \int d\mu(p) \{a^*(p, k) (E\vec{f})^k(p) + a(p, k) (\widetilde{E}\vec{f})^k(p)\} \quad (3.98)$$

Utilizando a definição de $E\vec{f}$ e $\tilde{E}\vec{f}$, chega-se à seguinte equação:

$$\varphi(\vec{f}) := \sum_r (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4x f_r(x) \sum_{k=1}^{2s+1} \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} v_r^k(p) a^*(p, k) + e^{-ip \cdot x} \overline{v_r^{c,k}(p)} a(p, k)\} \quad (3.99)$$

Os $v(p)$ e $v^c(p)$ devem ser determinados, já adiantando que serão operadores que irão fazer o intertwiners entre representações e estão fixados pela covariância. De acordo com a Eq. (3.25), temos que o $v(p)$ satisfaz,

$$D^{(s)}(R(A, p))v(\Lambda^{-1}p) = v(p)D(A)$$

com $\Lambda = \Lambda(A)$. Como feito para o caso tipo-string, veja Eq. (3.41), temos que o momento de referência $p = \bar{p}$ satisfaz,

$$D^{(s)}(R)v_0 = v_0D(R) \quad R \in SU(2)$$

Com $v_0 := v(\bar{p})$. Podemos recuperar o $v(p)$, de acordo com a Eq. (3.42), através do v_0 pela identidade

$$v(p) = v_0 \circ D(B_p^{-1})$$

De acordo com a Proposição 3.2.5 o $v^c(p)$ satisfaz:

$$D^{(s)}(R(A, p))v^c(\Lambda^{-1}p) = v^c(p)\overline{D(A)},$$

e o v_0^c a pequena relação de intertwiner:

$$D^{(s)}(R)v_0^c = v_0^c\overline{D(R)} \quad R \in SU(2)$$

Com $v_0^c := v^c(\bar{p})$. Podemos recuperar o $v^c(p)$ através do v_0^c pela identidade

$$v^c(p) = v_0^c \circ \overline{D(B_p^{-1})}$$

Podemos utilizar a Eq. (3.28) para o caso tipo-ponto (negligenciando a variável e) e determinar o $v^c(p)$ em função do $v(p)$.

3.3.1 Exemplos de intertwiners para certas representações

Acha-se agora o v_0 para os casos em que $D = D^{(s,0)}$ e $D = D^{(0,s)}$, com $v(p) \in \text{Mat}(2s+1)$.

Sabe-se que o v_0 satisfaz: $D^{(s)}(R)v_0 = v_0D(R)$, primeiro fazemos o caso em que $D = D^{(s,0)}$, mas deve-se observar que $D^{(s,0)}(R) = D^{(s)}(R)$, portanto, fica com a seguinte equação:

$$D^{(s)}(R)v_0 = v_0D^{(s)}(R) \Rightarrow v_0 = c\mathbf{1}, \text{ pois } D^{(s)} \text{ é irredutível,} \quad (3.100)$$

pelo Lema de Schur, veja Apêndice B.1.

Agora, para o caso em que $D = D^{(0,s)}$, observa-se o fato de que $D^{(s,0)}(R^{*-1}) = D^{(s)}(R^{*-1})$, tem-se então:

$$D^{(s)}(R)v_0 = v_0D^{(0,s)}(R) = v_0D^{(s,0)}(R^{*-1}) = D^{(s)}(R^{*-1})u_0 \quad (3.101)$$

Mas como $R \in SU(2)$, R é unitário, portanto, $R^{*-1} = R$. Obtém-se novamente pelo Lema de Schur:

$$v_0 = c\mathbf{1}, \text{ pois } D^{(s)} \text{ é irredutível,} \quad (3.102)$$

escolhendo $c = 1$, tem-se a solução:

$$v(p) = D(B_p^{-1})$$

Vê que se $D|_{SU(2)}$ é irredutível, tem-se v_0^c e v_0 fixados módulo constante o que implica que $v^c(p)$ e $v(p)$ estão fixados módulos constante, portanto, tem-se duas constantes em aberto.

Da mesma forma, é possível encontrar a solução para o v_0^c via a pequena relação de intertwiner, basta levar em conta o fato de que para nossas representações vale $\overline{D(\bar{R})} = D(\bar{R})$ e que $\varepsilon\bar{R} = R\varepsilon$, ver equação (2.3), o que nos produz $v_0^c = c \cdot \varepsilon$ e $v^c(p) = c \cdot \varepsilon \overline{D(B_p^{-1})}$.

A solução para o campo de Dirac localizado tipo-ponto é feita na seção 5.2, pois seu intertwiner e sua função de dois pontos sobre a concha serão a base para a construção dos campos com spin semi-inteiro geral.

3.4 Integrais de linha

Todos os campos localizados tipo-string que estamos tratando nessa tese podem ser vistos como integrais de linha sobre os campos com localização tipo-ponto. Essas integrais devem ser entendidas no seguinte sentido: deixe $n \in \mathbb{N}$ e deixe $\varphi^p(x)$ ser algum campo livre com localização tipo-ponto.⁵⁵ Então para um $e \in H$ e $\nu \in \mathbb{N}$ a integral

$$\varphi_{(\nu)}(x, e) \doteq \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n \varphi^p(x + (s_1 + \cdots + s_n)e)$$

existe como uma distribuição em x , uma vez que integrando com uma função de teste $f(x)$ é o mesmo que integrar $\varphi^p(x)$ com a função de teste

$$x \mapsto \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n f(x - (s_1 + \cdots + s_n)e).$$

No entanto, no limite $\nu \rightarrow \infty$, esta não é mais uma função Schwartz.⁵⁶ Então, temos que integrar também em e , ou seja, temos que entender $\varphi_{(\nu)}(x, e)$ como uma distribuição em x e e , isto é, como um campo localizado tipo-string. A questão é se os dois limites no espaço de uma partícula

$$\psi \doteq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{(\nu)}(f, h)\Omega, \quad \psi^c \doteq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{(\nu)}(f, h)^*\Omega \quad (3.103)$$

existem. (A localidade em string (1.2) e a covariância (3.12) são então prontamente verificadas.) Verifica-se que a função intertwiner do campo com localização tipo-string $\varphi_{(\nu)}(x, e)$ e de seu conjugado são dados por

$$v_\nu(p, e) = t_\nu^n(p, e) v^p(p), \quad v_\nu^c(p, e) = t_\nu^n(p, e) v^{pc}(p), \quad (3.104)$$

onde v^p e v^{pc} são as funções de intertwiner, e seu conjugado, do campo com localização tipo-ponto $\varphi^p(x)$, e onde $t_\nu^n(p, \cdot)$ é para $p \in H_m^+$, a seguinte distribuição em H :

$$t_\nu^n(p, e) \doteq \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e}. \quad (3.105)$$

⁵⁵Pode ser um campo tensorial ou spinor-tensor, mas omitimos os índices tensoriais e spinor-tensor.

⁵⁶O espaço de funções Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, é o espaço constituído pelas funções reais $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ que decrescem no infinito, juntamente com todas as derivadas parciais, mais rapidamente do que qualquer potência de $1/|x|$.

Demonstração. Mostramos a Eq. (3.104) para o $v_\nu(p, e)$, a prova da relação para o intertwiner $v_\nu^c(p, e)$ é feita de forma análoga.

$$(\varphi_{(\nu)}(x, e)\Omega)(p) \doteq \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n (\varphi^p(x + (s_1 + \cdots + s_n)e)\Omega)(p),$$

utilizando a Eq. (3.13) temos,

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip \cdot x} v_\nu(p, e) \doteq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n e^{ip \cdot x} e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p),$$

o que produz

$$v_\nu(p, e) \doteq \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p).$$

□

Para mostrar que os limites da Eq. (3.103) existem na norma- L^2 no espaço de uma partícula, precisamos de um limite uniforme em p que fornecemos no próximo lema.

Lema 3.4.1. *Para $h \in \mathcal{D}(H)$ e $p \in H_m^+$, o limite $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu^n(p, h)$ existe e é dado por*

$$t^n(p, h) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_H d\sigma(e) h(e) \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} \quad (3.106)$$

Além disso, para cada $h \in \mathcal{D}(H)$ existe uma constante N tal que para todos os $p \in H_m^+$ os seguintes limites são válidos, uniformemente em ν :

$$|t_\nu^n(p, h)| \leq \frac{N}{(p_0)^n}. \quad (3.107)$$

(Claro que, o mesmo limite vale para o limite $t^n(p, h)$.)

Demonstração. Note que a integração da distribuição $t_\nu^n(p, h)$ pode ser escrita como

$$t_\nu^n(p, h) = \int_0^\nu ds_1 \cdots \int_0^\nu ds_n \tilde{h}((s_1 + \cdots + s_n)p), \quad (3.108)$$

onde

$$\tilde{h}(p) \doteq \int_H d\sigma(e) h(e) e^{ip \cdot e} \quad (3.109)$$

é a transformada de Fourier da distribuição $h(e)\delta(e \cdot e + 1)$. Esta é uma distribuição em \mathbb{R}^4 com suporte compacto, então sua transformada de Fourier é uma função suave, e diminui rapidamente fora do conjunto de frente de onda⁵⁷ da distribuição $\delta(e \cdot e + 1)$, veja [33]. Este último é apenas o conjunto de covetores (e, k) tal que k é ortogonal ao espaço tangente de H em e [33, Exemplo 8.2.5], que é e^\perp [34]. Isto é, o conjunto de frente de onda de $\delta(e \cdot e + 1)$ é o conjunto de covetores (e, k) com $e \cdot e = -1$ e $k \in \mathbb{R}e$. Em particular, o conjunto da frente de onda não contém covetores tipo-tempo, portanto o $\tilde{h}(p)$ cai rapidamente dentro do cone de luz futuro. (Este fato também pode ser mostrado diretamente, veja [20, Lema 8].) Assim, vemos a partir da Eq. (3.108) que o limite de $t_\nu^n(p, h)$ para $\nu \rightarrow \infty$ existe para $p \in H_m^+$. Escrevemos

$$t_\nu^n(p, h) = \frac{1}{(p_0)^n} \int_0^{\nu p_0} ds_1 \cdots \int_0^{\nu p_0} ds_n \tilde{h}((s_1 + \cdots + s_n)p/p_0),$$

e observando que a norma euclidiana do covetor $p/p_0 = (1, \frac{\mathbf{p}}{p_0})$ é maior que um, encontramos o limite uniforme para $t_\nu^n(p, h)$ em Eq. (3.107). Finalmente, a identidade das distribuições

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^\nu ds e^{isp \cdot e} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p \cdot e + i\varepsilon}$$

em H (para $p \in H_m^+$ fixo) produz a Eq. (3.106). Essa identidade decorre do fato bem conhecido de que $\int_0^\infty ds e^{is\omega}$ é justamente a transformada de Fourier da distribuição Heaviside, a saber, $\frac{i}{\omega + i\varepsilon}$, levando em conta que o *pull-back* sob o mapa $e \mapsto p \cdot e$ é bem definido [33, Teorema 8.2.4] já que este mapa é uma função coordenada em H . Isso completa a prova. \square

Estes fatos implicam que os dois limites (3.103) existem no espaço de uma partícula $L^2(H_m^+, \mathfrak{h}^{(s)})$, a saber,

$$\psi(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) t^n(p, h) v^p(p), \quad \psi^c(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) t^n(p, \bar{h}) v^{pc}(p).$$

Demonstração. Da Eq. (3.103), temos que

⁵⁷Do inglês: *Wave front set*.

$$\begin{aligned}\psi(p) &\doteq \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\varphi_{(\nu)}(f, h)\Omega)(p) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_H d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) (\varphi_{\nu}(x, e)\Omega)(p) = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_H d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) \int_0^{\nu} ds_1 \cdots \int_0^{\nu} ds_n (\varphi^p(x + (s_1 + \cdots + s_n)e)\Omega)(p),\end{aligned}$$

usando a Eq. (3.13) temos

$$\begin{aligned}&= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_H d\sigma(e) h(e) \int d^4x f(x) e^{ip \cdot x} \int_0^{\nu} ds_1 \cdots \int_0^{\nu} ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p) = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) \int_H d\sigma(e) h(e) \int_0^{\nu} ds_1 \cdots \int_0^{\nu} ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p) =\end{aligned}$$

O que produz:

$$\psi(p) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) t_{\nu}^n(p, h) v^p(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \hat{f}(p) t^n(p, h) v^p(p)$$

□

(A relação para $\psi^c(p)$ é verificada de forma análoga.)

Isto implica, por sua vez, que $\varphi_{(\nu)}(f, h)$ converge fracamente para $a^*(\psi) + a(\psi^c)$ no sentido de elementos de matriz entre vetores com finito número de partículas. Então o limite $\varphi(f, h) \doteq a^*(\psi) + a(\psi^c)$ define um campo livre, que é uma distribuição com valor-operador (no sentido da nota de rodapé 48) em x e e , e que denotamos por

$$\varphi(x, e) \doteq \int_0^{\infty} ds_1 \cdots \int_0^{\infty} ds_n \varphi^p(x + (s_1 + \cdots + s_n)e). \quad (3.110)$$

Sua função intertwiner associada é, após integrada com uma função de teste $h(e)$, dada por $v(p, h) = t^n(p, h) v^p(p)$, que é ⁵⁸

$$v(p, e) = \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} v^p(p). \quad (3.111)$$

Demonstração. Da Equação (3.110) temos que

$$v(p, e) = \int_0^{\infty} ds_1 \cdots \int_0^{\infty} ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p).$$

⁵⁸Sempre entendemos $p \cdot e + i\varepsilon$ no sentido de distribuições como na Eq. (3.106).

Uma vez que $v(p, h) = \int_H d\sigma(e) h(e)v(p, e)$, temos:

$$v(p, h) = \int_H d\sigma(e) h(e)v(p, e) = \int_H d\sigma(e) h(e) \int_0^\infty ds_1 \cdots \int_0^\infty ds_n e^{i(s_1 + \cdots + s_n)p \cdot e} v^p(p),$$

que por sua vez é $v(p, h) = t^n(p, h) v^p(p)$.

Utilizando o Lema 3.4.1, mais especificamente a Eq. (3.106) no lado direito da última equação produzimos claramente a Eq. (3.111). \square

Agora para $e = e' + ie''$ no tubo \mathcal{T}_+ , a parte imaginária e'' está no cone de luz futuro [26], portanto, $p \cdot e''$ é estritamente positivo. Assim, o intertwiner é o valor de contorno de uma função analítica no tubo. Além disso, a desigualdade de Cauchy inversa $|p \cdot e''| \geq m(e'' \cdot e'')^{1/2}$ vale, portanto, esta função é de crescimento moderado perto do limite real. Portanto, $v(p, e)$ é uma função intertwiner no sentido da Definição (3.2.6). Pela Eq. (3.104), é autoconjugado se v^p for. Mostramos que:

Proposição 3.4.2. *A integral, Eq. (3.110) existe como uma distribuição fraca⁵⁹ em $(x, e) \in \mathbb{R}^4 \times H$. É o campo quântico livre localizado tipo-string covariante, cuja função de intertwiner é dada pela Eq. (3.111). É hermitiano se $\varphi^p(x)$ o for.*

Para referência posterior, exibimos a função de dois pontos dessas integrais de linha⁶⁰. Sejam φ_1^p e φ_2^p serem campos livres com localização tipo-ponto para o mesmo tipo de partícula, deixe $M^p(p)$ ser a parte da função de dois pontos sobre a concha, que é um polinômio [1]. Deixe, para $i = 1$ e 2 , $\varphi_i(x, e)$ ser o campo localizado tipo-string construído a partir de φ_i^p por uma integral como em Eq. (3.110). Lembrando Eq. (3.111), a parte da função de dois pontos correspondente à concha $w^s(x - x', e, e') \doteq (\Omega, \varphi_1(x, e)\varphi_2(x', e')\Omega)$ é então dada por

$$M^s(p, e, e') = \frac{i^{n_2 - n_1} M^p(p)}{(p \cdot e - i\varepsilon)^{n_1} (p \cdot e' + i\varepsilon)^{n_2}}. \quad (3.112)$$

⁵⁹No sentido da nota de rodapé 48.

⁶⁰Como dito anteriormente, veja nota de rodapé 47, a função de dois pontos para semi-inteiro será definida “diferentemente”, entretanto, a Eq. (3.112), é também válida para os casos com spin semi-inteiro como mostraremos no capítulo 5.

Demonstração. De acordo com a Eq. (3.48), temos

$$M^s(p, e, e') = (v_{1r}^c(p, e), v_{2r'}(p, e)),$$

substituindo a Eq. (3.111), ficamos com

$$M^s(p, e, e') = \left(\frac{i^{n_1}}{(p \cdot e + i\varepsilon)^{n_1}} v_1^{pc}(p), \frac{i^{n_2}}{(p \cdot e + i\varepsilon)^{n_2}} v_2^p(p) \right) =$$

$$\frac{i^{-n_1}}{(p \cdot e - i\varepsilon)^{n_1}} \cdot \frac{i^{n_2}}{(p \cdot e' + i\varepsilon)^{n_2}} \left(v_1^{pc}(p), v_2^p(p) \right),$$

que produz a Eq. (3.112). □

Finalmente, notamos que a integral, Eq. (3.110), pode ser escrita como

$$\int_0^\infty ds \frac{s^{(n-1)}}{(n-1)!} \varphi^p(x + se)$$

e é desde modo a forma geral encontrada em [9, Teorema 4.4].

Capítulo 4

Bósons

4.1 Introdução

Nesse capítulo, fazemos somente a construção de campos com spin inteiro, $s = n \in \mathbb{N}_0$. Portanto, o desenvolvimento pode ser feito através dos elementos do grupo $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ (que é o grupo de recobrimento universal do grupo próprio ortócrono de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow) como fizemos até o momento para uma formulação geral, ou seja, para o caso de spin inteiro e semi-inteiro, ou simplesmente com o elementos do grupo \mathcal{P}_+^\uparrow . Escolhemos trabalhar com elementos do grupo e não com os elementos do recobrimento. Todas as afirmações e equações demonstradas anteriormente são válidas, trocando o grupo das rotações $SU(2)$ pelo grupo das rotações $SO(3)$ e as transformações de Lorentz próprias através dos elementos do grupo $SL(2, \mathbb{C})$, a saber, $A \in \tilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow$, pelas transformações de Lorentz, a saber, $\Lambda = \Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Isto é válido pelo fato do recobrimento duplo de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo de Lorentz, uma vez que A e $-A$ pertencentes a $SL(2, \mathbb{C})$ definem a mesma transformação de Lorentz. Para os bósons, $U^{(m,s)}(\Lambda) := U^{(m,s)}(A)$, onde $\Lambda(A) = \Lambda$ e $U^{(m,s)}(-\Lambda) = U^{(m,s)}(-\mathbf{1})U^{(m,s)}(A) = U^{(m,s)}(R_1(2\pi))U^{(m,s)}(A) = U^{(m,s)}(\mathbf{1})U^{(m,s)}(A) = U^{(m,s)}(\Lambda)$. Portanto, $\Lambda(A) = \Lambda(-A) = \Lambda$. Aqui $R_1(2\pi) = \mathbf{1} \in SU(2)$.

Para tal construção, será seguida a seguinte estratégia: primeiro versamos sobre os campos com spin-um, pois os intertwiners de Wigner para o campo de Proca (spin $s = 1$ com localização tipo-ponto) e do campo com localização tipo-string que carrega partícula com spin 1, *potencial vetor com localização tipo-string*, são a base para a construção dos intertwiners para os campos com spin $s \geq 2$, os quais denominamos o localizado tipo-ponto ($A_{\mu_1 \dots \mu_n}^p$) por *potencial tensor* e o nosso campo localizado tipo-string ($A_{\mu_1 \dots \mu_n}$) por *potencial tensor com localização tipo-string*. Depois serão construídos os campos com spin maior ou igual a dois (campos hermitianos, covariantes e que são tensores simétricos de ordem n), em que mostramos que nossos campos tipo-string $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ diferem do localizado tipo-ponto correspondente, $A_{\mu_1 \dots \mu_n}^p$, por termos que são derivadas de campos tipo-string bem definidos que são responsáveis pelo mau comportamento UV (apresentam um comportamento melhor para altas energias em comparação ao seu correspondente campo localizado tipo-ponto).

Desse modo, temos localidade suficiente para uma construção perturbativa de modelos interagentes, além disso escrevemos os campos localizados tipo-string, assim como os campos de escolta, como integrais de linha sobre campos localizados tipo-pontos. Por fim, apresentamos um caso particular para “exemplificar” os resultados obtidos, a saber, para o campo que carrega partícula com spin-dois, denominado de Gráviton massivo e denotado por $h_{\mu\nu}$. Para cada caso calculamos a função de dois pontos.

4.2 Spin um: Bósons vetoriais massivos

O campo vetorial para partículas massivas livres com spin $s = 1$ que atua sobre o espaço (Hilbert) Fock no espaço de uma partícula correspondente é o campo de Proca $A_{\mu}^p(x)$, em homenagem ao seu inventor [35]. A função de dois pontos, veja Eq. (4.12) abaixo, tem um termo quadrático no momento que é responsável pelo mau comportamento energético do campo A_{μ}^p : tem dimensão de escala 2. O campo de Proca tem divergência

zero e satisfaz a equação de Proca:

$$\partial^\mu A^p_\mu(x) = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^{p\nu}(x) = 0, \quad (4.1)$$

onde F é o tensor intensidade de campo, $F = dA^p$, com componentes

$$F_{\mu\nu}(x) \doteq \partial_\mu A^p_\nu(x) - \partial_\nu A^p_\mu(x). \quad (4.2)$$

O fato de que o campo de Proca tem divergência zero será mostrado abaixo, veja Eq. (4.13). Devido ao fato de que o campo de Proca, como qualquer campo livre com massa m , satisfaz a equação de Klein-Gordon $(\square + m^2)A^p_\mu(x) = 0$, e tem divergência zero, $\partial^\mu A^p_\mu(x) = 0$, implicam que satisfaz a equação de Proca. Daqui por diante temos a seguinte notação: $\square \doteq g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

Vamos mostrar que o campo de Proca satisfaz a equação de Proca.

Demonstração. $F^{\mu\nu}(x) \doteq g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu'\nu'}(x)$, logo substituindo Eq. (4.2) ficamos com

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^{p\nu}(x) - \partial^\nu A^{p\mu}(x) \right) = \square A^{p\nu}(x) - \partial^\nu \partial_\mu A^{p\mu}(x).$$

Uma vez que o campo de Proca tem divergência zero o segundo termo é zero, e portanto,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -m^2 A^{p\nu}(x),$$

o que produz $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^{p\nu}(x) = 0$. □

O tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ tem a mesma dimensão de escala que o campo de Proca; na verdade, sua função de dois pontos sobre a concha, veja Eq. (4.16) abaixo, é um polinômio homogêneo de grau 2.

Construímos uma versão localizada em string $A_\mu(x, e)$ do campo vetorial com spin-um atuando no mesmo espaço de Hilbert, o qual possui uma dimensão de escala igual a um, depois de integrado com uma função de teste em e e que tem o mesmo tensor intensidade de campo do campo de Proca, isto é, satisfaz a identidade⁶¹

$$\partial_\mu A_\nu(x, e) - \partial_\nu A_\mu(x, e) = F_{\mu\nu}(x). \quad (4.3)$$

⁶¹As derivadas parciais ∂_μ sempre se referem à variável x .

Por isso, chamamos de *potencial vetor com localização tipo-string*. De fato, as duas versões do potencial diferem pela derivada de um campo quântico “escalar” $\phi(x, e)$, o qual denominamos de *campo de escolta*:

$$A_\mu(x, e) = A^P_\mu(x) + \partial_\mu\phi(x, e). \quad (4.4)$$

O campo localizado tipo-string ϕ transforma como um campo escalar, mas corresponde a partícula de spin-um. Na próxima subseção, construímos $A_\mu(x, e)$ e $\phi(x, e)$ como integrais de linha sobre o tensor intensidade de campo e sobre o campo de Proca, respectivamente. Na subseção 4.2.2 calculamos explicitamente os intertwiners de Wigner correspondente, e provamos as relações (4.3) e (4.4). Ao longo da construção, verificamos também os fatos acima bem conhecidos sobre o campo de Proca.

4.2.1 Definição como integrais de linha sobre campos com localização tipo-ponto

Uma solução formal para Eq. (4.3), de acordo com o Lema de Poincaré, é obtida pela integral de linha

$$A_\mu(x, e) \doteq \int_0^\infty ds F_{\mu\nu}(x + se)e^\nu, \quad (4.5)$$

onde $e \in H$. De fato, inserindo Eq. (4.2) dentro de $F_{\mu\nu}$ e usando a identidade formal

$$\int_0^\infty ds e^\nu \partial_\nu A^P_\mu(x + se) = -A^P_\mu(x), \quad (4.6)$$

é prontamente verificado que os dois potenciais A e A^P diferem formalmente por uma derivada de um campo “escalar” como antecipado pela Eq. (4.4), onde o campo $\phi(x, e)$ é definido por

$$\phi(x, e) \doteq \int_0^\infty ds A^P_\nu(x + se)e^\nu. \quad (4.7)$$

Assim, A_μ deve realmente satisfazer Eq. (4.3). Note que as integrais (4.5) e (4.7) existem pela Proposição 3.4.2, e que a identidade (4.6) é rigorosa porque A^P_μ vai para zero para grandes argumentos do tipo-espaco no sentido de elementos de matriz entre estados locais.

Demonstração. Inserindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.5), temos

$$\begin{aligned} A_\mu(x, e) &= \int_0^\infty ds \partial_\mu A_\nu^P(x + s.e) e^\nu - \int_0^\infty ds \partial_\nu A_\mu^P(x + s.e) e^\nu = \\ &= \partial_\mu \int_0^\infty ds A_\nu^P(x + s.e) e^\nu - \int_0^\infty ds e^\nu \partial_\nu A_\mu^P(x + s.e) \end{aligned}$$

Observe que no segundo termo temos uma derivada direcional, portanto

$$\begin{aligned} A_\mu(x, e) &= \partial_\mu \phi(x, e) - \int_0^\infty ds \frac{d}{ds} A_\mu^P(x + s.e) = \\ &= \partial_\mu \phi(x, e) - A_\mu^P(x + s.e) \Big|_0^\infty = \partial_\mu \phi(x, e) - A_\mu^P(x + s.e)|_{s=\infty} + A_\mu^P(x) = \partial_\mu \phi(x, e) + A_\mu^P(x). \end{aligned}$$

□

Com isso mostramos a Eq. (4.4). Para ver que A_μ deve realmente satisfazer Eq. (4.3), substituimos a Eq. (4.4) em Eq. (4.3) e temos:

$$\partial_\mu [A_\nu^P(x) + \partial_\nu \phi(x, e)] - \partial_\nu [A_\mu^P(x) + \partial_\mu \phi(x, e)] = F_{\mu\nu}(x).$$

Uma vez que o campo de Proca tem divergência zero e o campo de escolta ϕ satisfaz a equação de Klein-Gordon (como qualquer campo livre com massa m) existe a relação:

$$\partial^\mu A_\mu(x, e) + m^2 \phi(x, e) = 0. \quad (4.8)$$

Demonstração. Substituindo a Eq. (4.4) em $\partial^\mu A_\mu(x, e)$, temos

$$\partial^\mu A_\mu(x, e) = \partial^\mu A_\mu^P(x) + \partial^\mu \partial_\mu \phi(x, e) = -m^2 \phi(x, e)$$

(Onde usamos que o campo de Proca tem divergência zero.)

□

Uma propriedade adicional interessante do nosso potencial vetor é que ele é ortogonal à direção da string,

$$A_\mu(x, e) e^\mu = 0, \quad (4.9)$$

que decorre da antissimetria do $F_{\mu\nu}$. Essa condição também pode ser mostrada diretamente através do intertwiner do campo $A_\mu(x, e)$ o qual construímos na próxima subseção, veja Eq. (4.19). Isso é uma reminiscência da condição do calibre axial, no entanto, a diferença é que ele é automaticamente satisfeito pela construção e que o campo deve ser considerado uma distribuição em e .

4.2.2 Construção via Intertwiners Wigner

Calcularemos explicitamente os intertwiners para todos os campos mencionados acima, verificando as relações reivindicadas entre eles, a saber, Eqs. (4.3), (4.4), (4.8) e (4.9). Para começar, será usado a seguinte realização $D^{(1)}$ para a representação do spin-um sobre o grupo estabilizador do nosso momento de referência \bar{p} , o grupo de rotação completa, denotado por $O(3)$. Em um referencial de repouso com a componente $e_{(0)}$ igual a $\frac{\bar{p}}{m}$, cada $R \in O(3)$ corresponde a uma matriz 4×4 da forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^t & \underline{R} \end{pmatrix},$$

onde \underline{R} é uma matriz ortogonal 3×3 . Consideramos a representação $D^{(1)}$ realizada sobre o espaço $\mathfrak{h}^{(1)} \doteq \mathbb{C}^3$ pela representação definidora das rotações.

$$D^{(1)}(R) \doteq \underline{R}.$$

Seja $u \in \mathbb{C}^3$ e o operador antiunitário $D^{(1)}(\tilde{j}_1)$ agindo como:

$$D^{(1)}(\tilde{j}_1)u \doteq D^{(1)}(R_1(\pi))\bar{u} = \underline{R_1(\pi)}\bar{u},$$

em que \bar{u} significa conjugação complexa de componentes.

De acordo com a observação abaixo da Proposição 3.2.5, temos o operador antiunitário $D^{(n)}(-\mathbf{1}) \doteq D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(\tilde{j}_1)$, portanto:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(-\mathbf{1})u &= D^{(1)}(R_1(\pi)) \circ D^{(1)}(\tilde{j}_1) u = D^{(1)}(R_1(\pi))D^{(1)}(R_1(\pi)) \bar{u} = \\ &= \underline{R_1(\pi)} \underline{R_1(\pi)}\bar{u} = \bar{u}. \end{aligned}$$

(Usamos o fato de que $\underline{R_1}(\pi)^2 = \mathbf{1}$, uma vez que $\underline{R_1}(\pi) \in SO(3)$.)

Logo a transformação PT é representada pelo operador conjugação complexa em \mathbb{C}^3 ,

$$D^{(1)}(-\mathbf{1})(z_1, z_2, z_3) \doteq (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3). \quad (4.10)$$

Por irreduzibilidade, esta escolha é única módulo um fator. Então a transformação PT, veja Eq. (3.38), é representada no espaço de uma partícula $L^2(H_m^+; \mathbb{C}^3)$ por

$$(U^{(m,1)}(-\mathbf{1})\psi)(p) = \overline{\psi(p)}. \quad (4.11)$$

O espaço de chegada para campos vetoriais é $\mathfrak{h} \doteq \mathbb{C}^4$ com base canônica, representado por $\{e_{(0)}, \dots, e_{(3)}\}$ e $D(\Lambda)$ atuando como a representação definidora de $O(1, 3)$, $D(\Lambda)z \doteq \Lambda z$.

Primeiro discutimos o campo da Proca. Como é um campo vetorial com localização tipo-ponto, o intertwiner de Wigner correspondente é independente de e . Pelo que foi dito anteriormente, veja Eqs. (3.41), (3.42) e a observação na subseção (3.2.3), o intertwiner é dado por $v^p(p) \doteq \hat{v}^p \circ B_p^{-1}$, onde \hat{v}^p é um mapa linear de \mathbb{C}^4 para \mathbb{C}^3 satisfazendo $\underline{R} \circ \hat{v}^p = \hat{v}^p \circ R$ para todo $R \in SO(3)$. Como queremos que o campo de Proca tenha divergência zero, o intertwiner deve satisfazer $\bar{p}^\mu \hat{v}_\mu^p = 0$, isto é, $\hat{v}^p \bar{p} = 0$. A restrição de \hat{v}^p para \bar{p}^\perp é então um intertwiner entre duas representações irreduzíveis de $SO(3)$ e, portanto, único (módulo uma constante). É dado por $\hat{v}^p z \doteq i \underline{z}$, onde escrevemos $\underline{z} \doteq (z^1, z^2, z^3)$ se $z = (z^0, \dots, z^3)$. O fator i foi escolhido de modo a tornar o intertwiner autoconjugado. Assim, agora temos um intertwiner de Wigner

$$v_\mu^p(p) \doteq v^p(p)e_{(\mu)} \equiv \hat{v}^p B_p^{-1} e_{(\mu)}.$$

Definimos $A_\mu^p(x)$ para ser o campo livre para este intertwiner como na Eq. (3.43) e verificamos os seguintes fatos bem conhecidos:

Lema 4.2.1. *O campo de Proca $A_\mu^p(x)$ é hermitiano, local, covariante. E tem divergência zero, $\partial^\mu A_\mu^p = 0$. É único, módulo equivalência unitária, campo quântico livre para*

partícula massiva com spin-um com estas propriedades. Sua função de dois pontos sobre a concha é dada por

$$M_{\mu,\nu}^{A^p A^p}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \quad (4.12)$$

Aqui, $g_{\mu\nu} \doteq e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski, constituindo a matriz diagonal $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ se $\{e_{(\mu)}\}$ é um sistema de Lorentz.

Demonstração. Covariância e localidade seguem das propriedades do intertwiner de Wigner. Para a prova de que A^p_μ é hermitiano, precisamos mostrar que a função intertwiner $v^p(p)$ é autoconjugada. Uma vez que $D(-1) = -1$ é linear, $D^{(1)}(-1)$ é antilinear e as transformações de Lorentz comutam com a conjugação complexa, $\Lambda \bar{z} = \overline{\Lambda z}$, temos da Eq. (3.39)

$$v^{pc}(p)z = D^{(1)}(-1)v^p(p)D(-1)\bar{z} = -\overline{v^p(p)\bar{z}} = i\overline{B_p^{-1}\bar{z}} = i\overline{B_p^{-1}z} = v^p(p)z,$$

o que prova a alegação⁶². Para verificar a divergência do campo de Proca, dado pela Eq. (3.43), observe que aplicando ∂^μ no campo, temos o termo $iv_\mu^p(p)p^\mu$. O fato de que o campo de Proca tem divergência zero segue de

$$v_\mu^p(p)p^\mu = v^p(p)p = \hat{v}^p B_p^{-1}p = \hat{v}^p \bar{p} = 0. \quad (4.13)$$

(Usamos o fato de que \hat{v}^p está restrito para \bar{p}^\perp .)

Para calcular a função de dois pontos, observe que para $x = (x^0, \underline{x})$ e $w = (w^0, \underline{w})$ em \mathbb{R}^4 vale

$$(\hat{v}^p x, \hat{v}^p w)_{\mathbb{C}^3} = (\underline{x}, \underline{w})_{\mathbb{C}^3} = x^0 w^0 - x \cdot w,$$

onde $x \cdot w$ é o produto de Minkowski. Usando $(B_p^{-1}x)^0 = \bar{p} \cdot B_p^{-1}x/m = p \cdot x/m$, temos

$$(v^p(p)x, v^p(p)w)_{\mathbb{C}^3} = \frac{(p \cdot x)(p \cdot w)}{m^2} - x \cdot w. \quad (4.14)$$

De acordo com a Eq. (3.48) temos que a parte da função de dois pontos sobre a concha para o campo de Proca é dada por

$$(v^p(p)e_{(\mu)}, v^p(p)e_{(\nu)})_{\mathbb{C}^3}.$$

⁶²Lembrando que estamos utilizando que B_p age no espaço de Minkowski como $B_p x := \Lambda(B_p)x$.

Utilizando a Eq. (4.14), temos

$$\left(v^p(p)e_{(\mu)}, v^p(p)e_{(e_\nu)} \right)_{\mathbb{C}^3} = \frac{(p \cdot e_{(\mu)})(p \cdot e_{(\nu)})}{m^2} - e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)},$$

que claramente produz a Eq. (4.12).

A unicidade do campo decorre da observação na subseção 3.2.3, uma vez que a representação vetorial do grupo de Lorentz é irredutível. \square

A função intertwiner v^F do tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ que é lida a partir da Eq. (4.2): é dada por

$$v_{\mu\nu}^F(p) = i(p_\mu v_\nu^p(p) - p_\nu v_\mu^p(p)). \quad (4.15)$$

A parte da função de dois pontos sobre a concha de $(\Omega, F_{\mu\nu}(x)F_{\mu'\nu'}(x')\Omega)$ sai como

$$M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{FF}(p) = -p_\mu p_{\mu'} g_{\nu\nu'} + p_\nu p_{\mu'} g_{\mu\nu'} - p_\nu p_{\nu'} g_{\mu\mu'} + p_\mu p_{\nu'} g_{\nu\mu'}. \quad (4.16)$$

(Os termos $\sim p^4$ cancelam).

Demonstração. Da Eq. (3.48) temos,

$$M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{FF}(p) = \left(i(p_\mu v_\nu^{pc}(p) - p_\nu v_\mu^{pc}(p)), i(p_{\mu'} v_{\nu'}^p(p) - p_{\nu'} v_{\mu'}^p(p)) \right).$$

Uma vez que $v^{pc} = v^p$ ficamos com:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{FF}(p) &= \\ &= p_\mu p_{\mu'} (v_\nu^p(p), v_{\nu'}^p(p)) - p_\mu p_{\nu'} (v_\nu^p(p), v_{\mu'}^p(p)) - p_\nu p_{\mu'} (v_\mu^p(p), v_{\nu'}^p(p)) + p_\nu p_{\nu'} (v_\mu^p(p), v_{\mu'}^p(p)). \end{aligned}$$

Note que cada produto é justamente a função de dois pontos sobre a concha do campo de Proca, dado pela Eq. (4.12). Portanto,

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{FF}(p) &= \\ &= p_\mu p_{\mu'} \left(-g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu p_{\nu'}}{m^2} \right) - p_\mu p_{\nu'} \left(-g_{\nu\mu'} + \frac{p_\nu p_{\mu'}}{m^2} \right) - p_\nu p_{\mu'} \left(-g_{\mu\nu'} + \frac{p_\mu p_{\nu'}}{m^2} \right) + p_\nu p_{\nu'} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Fazendo as multiplicações temos que os termos que vão com $\sim p^4$ se cancelam, isso produz a Eq. (4.16). \square

Discutimos agora o potencial vetor com localização tipo-string A_μ e o campo de escolta ϕ . O campo de escolta $\phi(x, e)$ é definido pela integral Eq. (4.7) e a Prop. 3.4.2 afirma que seu intertwiner de Wigner é dado por

$$v'(p, e) \doteq \frac{i(v^p(p)e)}{p \cdot e + i\varepsilon}. \quad (4.17)$$

Similarmente, o potencial vetor A_μ é definido pela a integral Eq. (4.5) e pela Prop. 3.4.2 seu intertwiner de Wigner é dado por

$$v_\mu(p, e) \doteq i \frac{v_{\mu\nu}^F(p)e^\nu}{p \cdot e + i\varepsilon}. \quad (4.18)$$

Substituindo $v_{\mu\nu}^F(p)$ como em Eq. (4.15), isto produz

$$v_\mu(p, e) = v_\mu^p(p) - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} v^p(p)e. \quad (4.19)$$

Reescrevemos como

$$v_\mu(p, e) = v_\mu^p(p) + ip_\mu v'(p, e) \quad (4.20)$$

isto produz a relação (4.4), a saber, $A_\mu = A_\mu^p + \partial_\mu \phi$. Assim, podemos mostrar que nosso potencial vetor $A_\mu(x, e)$ é ortogonal à direção da string diretamente pelo seu intertwiner correspondente, Eq. (4.19). A demonstração segue a abaixo.

Demonstração. Temos que:

$$v_\mu(x, e)e^\mu = v_\mu^p(p)e^\mu - \frac{p_\mu e^\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} v^p(p)e = v^p(p)e - \frac{p \cdot e}{p \cdot e + i\varepsilon} v^p(p)e = 0,$$

isto produz a relação (4.9), a saber, $A_\mu(x, e)e^\mu = 0$. □

Usando as Eqs. (3.48) e (4.14), as funções de dois pontos sobre a concha de A_μ e

ϕ , bem como os termos mistos, saem como

$$M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu (e \cdot e')}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu e_\nu}{p \cdot e - i\varepsilon} + \frac{p_\nu e'_\mu}{p \cdot e' + i\varepsilon} \quad (4.21)$$

$$M^{\phi\phi}(p, e, e') = \frac{1}{m^2} - \frac{e \cdot e'}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \quad (4.22)$$

$$M_{\mu,\mu'}^{AAp}(p, e) = -g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu e_{\mu'}}{p \cdot e - i\varepsilon} \quad (4.23)$$

$$M_\mu^{A\phi}(p, e, e') = -i \left(\frac{e'_\mu}{p \cdot e' + i\varepsilon} - \frac{p_\mu e \cdot e'}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \right) \quad (4.24)$$

$$M_\mu^{A^p\phi}(p, e') = i \left(\frac{p_\mu}{m^2} - \frac{e'_\mu}{p \cdot e' + i\varepsilon} \right) \quad (4.25)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') &= (v_\mu^c(p, e), v_\nu(p, e')) = \\ &= (v_\mu^p(p) - \frac{p_\mu}{(p \cdot e + i\varepsilon)} v^p(p)e, v_\nu^p(p) - \frac{p_\nu}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} v^p(p)e') = (v_\mu^p(p), v_\nu^p(p)) - \\ &- \frac{p_\mu}{(p \cdot e - i\varepsilon)} (v^p(p)e, v_\nu^p(p)) - \frac{p_\nu}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} (v_\mu^p(p), v^p(p)e') + \frac{p_\mu p_\nu (v^p(p)e, v^p(p)e')}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \end{aligned}$$

Utilizando a Eq. (4.14), temos

$$\begin{aligned} M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') &= -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - \frac{p_\mu}{(p \cdot e - i\varepsilon)} \left\{ \frac{(p \cdot e)(p \cdot e_{(\nu)})}{m^2} - e \cdot e_{(\nu)} \right\} - \\ &- \frac{p_\nu}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left\{ \frac{(p \cdot e')(p \cdot e_{(\mu)})}{m^2} - e' \cdot e_{(\mu)} \right\} + \\ &+ \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left\{ \frac{(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2} - e \cdot e' \right\} = \\ &= -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - \frac{p_\mu}{(p \cdot e - i\varepsilon)} \left\{ \frac{p_\nu (p \cdot e)}{m^2} - e_\nu \right\} - \frac{p_\nu}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left\{ \frac{p_\mu (p \cdot e')}{m^2} - e'_\mu \right\} + \\ &+ \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left\{ \frac{(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2} - e \cdot e' \right\}. \end{aligned}$$

Ao fazermos simples manipulações, temos a Eq. (4.21).

$$M^{\phi\phi}(p, e, e') = (v_\mu^c(p, e), v'_\nu(p, e')) = \left(\frac{i(v^p(p)e)}{p \cdot e + i\varepsilon}, \frac{i(v^p(p)e')}{p \cdot e' + i\varepsilon} \right) = \frac{(v^p(p)e, v^p(p)e')}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)}$$

Utilizando a Eq. (4.14) temos

$$\begin{aligned} M^{\phi\phi}(p, e, e') &= \\ &= \frac{1}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left\{ \frac{(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2} - e \cdot e' \right\} = \frac{1}{m^2} - \frac{e \cdot e'}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \end{aligned}$$

Isso conclui a prova da Eq. (4.22).

$$\begin{aligned} M_{\mu, \mu'}^{AAP}(p, e) &= (v_{\mu}^c(p, e), v_{\mu'}(p)) = \\ &= \left(v_{\mu}^p(p) - \frac{p_{\mu}}{(p \cdot e + i\varepsilon)} v^p(p) e, v_{\mu'}^p(p) \right) = (v_{\mu}^p(p), v_{\mu'}^p(p)) - \frac{p_{\mu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)} (v^p(p) e, v_{\mu'}^p(p)) \end{aligned}$$

Utilizando a Eq. (4.14), temos

$$\begin{aligned} M_{\mu, \mu'}^{AAP}(p, e) &= -g_{\mu\mu'} + \frac{p_{\mu} p_{\mu'}}{m^2} - \frac{p_{\mu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)} \{ (p \cdot e)(p \cdot e_{(\mu')}) - e \cdot e_{(\mu')} \} = \\ &= -g_{\mu\mu'} + \frac{p_{\mu} p_{\mu'}}{m^2} - \frac{p_{\mu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)} \{ (p \cdot e) p_{\mu'} - e_{\mu'} \}. \end{aligned}$$

Ao fazermos simples manipulações, temos a Eq. (4.23).

$$\begin{aligned} M_{\mu}^{A\phi}(p, e, e') &= (v_{\mu}^c(p, e), v'(p, e')) = \left(v_{\mu}^p(p) - \frac{p_{\mu}}{(p \cdot e + i\varepsilon)} v^p(p) e, \frac{i(v^p(p) e')}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} \right) = \\ &= \frac{i}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} (v_{\mu}^p(p), v^p(p) e') - \frac{i p_{\mu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} (v^p(p) e, v^p(p) e') \end{aligned}$$

Utilizando a Eq. (4.14), temos

$$\begin{aligned} M_{\mu}^{A\phi}(p, e, e') &= \\ &= \frac{i}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left(-e' \cdot e_{(\mu)} + \frac{p_{\mu}(p \cdot e')}{m^2} \right) - \frac{i p_{\mu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \left(-e \cdot e' + \frac{(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2} \right) = \\ &= \frac{-i e'_{\mu}}{(p \cdot e' + i\varepsilon)} + \frac{i p_{\mu}(p \cdot e')}{m^2(p \cdot e' + i\varepsilon)} + \frac{i p_{\mu}(e \cdot e')}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} - \frac{i p_{\mu}(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} \end{aligned}$$

Ao fazermos simples manipulações, temos a Eq. (4.24).

$$M_{\mu}^{AP\phi}(p, e') = (v_{\mu}^p(p)^c, v'_{\nu}(p, e')) = \left(v_{\mu}^p(p), \frac{i(v^p(p) e')}{p \cdot e' + i\varepsilon} \right) = \frac{i}{p \cdot e' + i\varepsilon} (v_{\mu}^p(p), v^p(p) e')$$

Utilizando a Eq. (4.14), temos

$$M_{\mu}^{AP\phi}(p, e') = \frac{i}{p \cdot e' + i\varepsilon} \left\{ -e' \cdot e_{(\mu)} + \frac{p_{\mu}(p \cdot e')}{m^2} \right\} = i \left(\frac{p_{\mu}}{m^2} - \frac{e'_{\mu}}{p \cdot e' + i\varepsilon} \right)$$

Isso conclui a prova da Eq. (4.25). □

Observe que podemos calcular as Eqs. (4.21) e (4.22), através da Eq. (3.112), a saber:

$$M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') = \frac{M_{\mu\mu',\nu\nu'}^{FF}(p)e^{\mu'}e^{\nu'}}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)},$$

com $M_{\mu\mu',\nu\nu'}^{FF}(p)$ a função de dois pontos do tensor intensidade de campo $F_{\mu\mu'}$, dado pela Eq. (4.16) e

$$M^{\phi\phi}(p, e, e') = \frac{M_{\mu,\nu}^{APAP}(p)e^{\mu}e^{\nu}}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)},$$

com $M_{\mu,\nu}^{APAP}(p)$ a função de dois pontos do campo de Proca, dado pela Eq. (4.12).

Resumindo, temos

Proposição 4.2.2. *Os campos A_μ e ϕ são hermitianos e localizados tipo-string (1.2). Eles satisfazem a relação de covariância (1.3) (Veja nota de rodapé 11) com $k = 1$ e 0 , respectivamente. Suas funções de dois pontos são dadas pelas Eq.s (4.21) e (4.22). Eles se relacionam com o campo da Proca como na Eq. (4.4). Todos três campos são localizados tipo-string em relação uns aos outros. Por último, A_μ satisfaz o “calibre axial” condição (4.9) e a relação (4.8).*

Pela equação (1.4) ou [20, Proposição 7], temos que o campo A_μ tem uma dimensão de escala melhor do que seu correspondente do tipo-ponto A^p_μ , a saber, 1. Observe que a função de dois pontos difere da função da versão de Krein [20, Seção 3.3] pelos três últimos termos na Eq. (4.21). Esses termos restauram a positividade da função de dois pontos. Também é interessante notar que a Eq. (4.22) mostra que ϕ é da forma encontrada em [9, Proposição 4.3] com $F(e, p) = i(mp \cdot e)^{-1}$, como feito pela Eq. (72) em [9].

Demonstração. (Relativo) a localização tipo-string, covariância e hermiticidade são conseqüências das Props. 3.2.7 e 3.4.2. A relação (4.3) segue, é claro, a partir da identidade (4.4), mas também pode ser verificada no nível do intertwiner a partir das identidades

$$p_\mu v_\nu(p, e) - p_\nu v_\mu(p, e) = p_\mu v_\nu^p(p) - p_\nu v_\mu^p(p) = -iv_{\mu\nu}^F(p). \quad (4.26)$$

Para mostrar a Eq. (4.26), substituímos a Eq. (4.20) no lado esquerdo da identidade,

$$p_\mu v_\nu(p, e) - p_\nu v_\mu(p, e) = p_\mu(v_\nu^p(p) + ip_\nu v'(p, e)) - p_\nu(v_\mu^p(p) + ip_\mu v'(p, e)).$$

Dessa última relação observamos que os fatores que envolvem o intertwiner $v'(p, e)$ se cancelam, portanto, sobrevive apenas $p_\mu v_\nu^p(p) - p_\nu v_\mu^p(p)$ que de acordo com a Eq. (4.15) é igual a $-i v_{\mu\nu}^F(p)$.

As relações (4.8) e (4.9) já foram mostradas. \square

Proposição 4.2.3. *(Unicidade) A_μ é caracterizado unicamente pelas seguintes propriedades: localização tipo-string, covariância, relação (4.3) e o fato de que sua função de dois pontos ter grau de escala dois após ser integrada com uma função de teste na variável e .*

Observe que, no caso sem massa, o potencial vetor localizado tipo-string já está fixo nas três primeiras propriedades, sem a condição do comportamento UV [9].

Demonstração. Seja $A_\mu(x, e)$ um campo livre satisfazendo as propriedades relatadas e deixe $v(p, e)$ ser seu intertwiner. Queremos mostrar que ele coincide com a expressão (4.19). Começamos com a relação $dA = dA^p$ que implica

$$(p_\mu v_\nu(p, e) - p_\nu v_\mu(p, e)) - (p_\mu v_\nu^p(p) - p_\nu v_\mu^p(p)) = 0$$

que escrevemos como,

$$p \wedge (v^k(p, e) - v^{pk}(p)) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Aqui consideramos $v^k(p, e) \doteq v_\mu^k(p, e)e^{(\mu)}$ como um vetor em \mathbb{C}^4 . Especificando-se em $p = \bar{p} \equiv (m, \mathbf{0})$ e observando que $\bar{p} \wedge w = 0$ implica $w = c\bar{p}$, a identidade acima implica que para cada $z \in \mathbb{C}^4$ temos

$$\hat{v}^k(e)_\mu e^{(\mu)} z = \hat{v}_\mu^{p,k} e^{(\mu)} z + \bar{p}_\mu \cdot z \chi(e) e^{(\mu)}$$

portanto, vale

$$\hat{v}(e)z = \hat{v}^p z + \bar{p} \cdot z \chi(e), \quad (4.27)$$

onde $\hat{v}(e) \doteq v(\bar{p}, e)$ e $\hat{v}^p \doteq v^p(\bar{p})$ e χ é uma função em H com valores em \mathbb{C}^3 . A “pequena relação de intertwiner” (3.41) para $\hat{v}(e)$ e para \hat{v}^p implica que esta função deve ser

invariante sob rotações,

$$\underline{R} \chi(R^{-1}e) = \chi(e) \quad (4.28)$$

para todo $R \in SO(3)$ e $e \in H$.

Demonstração. Aplicando a Eq. (3.41) para $\hat{v}(e)$ e \hat{v}^p , temos

$$D^{(1)}(R)(\hat{v}(R^{-1}e) - \hat{v}^p)z = (\hat{v}(e) - \hat{v}^p)D(R)z$$

Da Eq. (4.27) temos que $(\hat{v}(R^{-1}e) - \hat{v}^p) = \bar{p}\chi(R^{-1}e)$ e $(\hat{v}(e) - \hat{v}^p) = \bar{p}\chi(e)$, o que nos leva a seguinte relação

$$D^{(1)}(R)\bar{p}\chi(R^{-1}e)z = \bar{p}\chi(e)D(R)z$$

Usando o fato de que $D^{(1)}(R) = \underline{R}$ e $D(R) = R$ temos,

$$\underline{R} \bar{p}\chi(R^{-1}e)z = \bar{p}R\chi(e)z.$$

Uma vez que $\bar{p}R = \bar{p}$ a última relação produz a Eq. (4.28). \square

Relembrando a relação (3.42) entre $\hat{v}(e)$ e $v(p, e)$, a Eq. (4.27) implica

$$v(p, e)z = v^p(p)z + p \cdot z \chi(B_p^{-1}e). \quad (4.29)$$

Demonstração. Da relação (3.42) para $\hat{v}(e)$ e $v(p, e)$, temos

$$(v(p, e) - v^p(p))z = (v(B_p^{-1}e) - \hat{v}^p) \circ B_p^{-1}z.$$

Utilizando a Eq. (4.27) encontramos,

$$(v(p, e) - v^p(p))z = (\bar{p} \cdot z \chi(B_p^{-1}e)) \circ B_p^{-1}.$$

Uma vez que $\bar{p}B_p^{-1} = B_p\bar{p} = p$, a última equação produz a Eq. (4.29). \square

Por outro lado, se $\chi(e)$ satisfaz a propriedade de invariância (4.28), então $v(p, e)$, conforme definido acima, satisfaz a relação de intertwiner. Resumindo, mostramos que $dA = dA^p$, com A_μ localizado tipo-string é equivalente à relação (4.29), com χ satisfazendo (4.28). A localidade de A_μ é equivalente à analiticidade de χ no tubo \mathcal{T}_+ . Assim,

$\chi(p, e) \doteq \chi(B_p^{-1}e)$ é um intertwiner de Wigner da representação trivial (escalar) para $D^{(1)}$. Tal intertwiner é único módulo a multiplicação com uma distribuição F que é o valor de contorno de uma função meromorfa no semi-plano complexo superior [9, Teorema 3.3]. Note que um desses intertwiners, que também é autoconjugado, é dado por $v^p(p)e$. Assim, o intertwiner para A_μ deve ser da forma

$$v_\mu(p, e) = v_\mu^p(p) + ip_\mu F(p \cdot e) v^p(p)e.$$

(Extraímos um fator i para conveniência posterior). A parte da função de dois pontos sobre a concha para este campo aparece como

$$\begin{aligned} & -g_{\mu\nu} + ip_\mu e_\nu \overline{F(p \cdot e)} - ip_\nu e'_\mu F(p \cdot e') + \\ & \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \left\{ 1 - i \overline{F(p \cdot e)} p \cdot e + i F(p \cdot e') p \cdot e' + \overline{F(p \cdot e)} F(p \cdot e') ((p \cdot e)(p \cdot e') - m^2 e \cdot e') \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com a definição da função de dois pontos sobre a concha, Eq. (3.48), temos $M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') = (v_\mu^e(p, e), v_\nu(p, e'))$. Substituindo $v_\mu(p, e) = v_\mu^p(p) + ip_\mu F(p \cdot e) v^p(p)e$, ficamos com

$$\begin{aligned} M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') &= (v_\mu^p(p), v_\nu^p(p)) - ip_\mu \overline{F(p \cdot e)} (v^p(p)e, v_\nu^p(p)) + \\ &+ ip_\nu F(p \cdot e') (v_\mu^p(p), v^p(p)e') + p_\mu p_\nu \overline{F(p \cdot e)} F(p \cdot e') (v^p(p)e, v^p(p)e'). \end{aligned}$$

Cada produto que aparece é calculado utilizando a Eq. (4.14), produzindo:

$$\begin{aligned} M_{\mu,\nu}^{AA}(p, e, e') &= \\ & -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} + ip_\mu \overline{F(p \cdot e)} \left(e_\nu - \frac{(p \cdot e)p_\nu}{m^2} \right) + ip_\nu F(p \cdot e') \left(-e'_\mu + \frac{p_\mu(p \cdot e')}{m^2} \right) \\ &+ p_\mu p_\nu \overline{F(p \cdot e)} F(p \cdot e') \left(-e \cdot e' + \frac{(p \cdot e)(p \cdot e')}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos reescrever a última equação obtida e claramente a veracidade da afirmação sobre a função de dois pontos sobre a concha do campo A_μ é confirmada. \square

Agora entra a condição de que o grau de escala da função de dois pontos seja dois: isso implica que a parte sobre a concha deve ser limitada para grandes p , em particular,

que a expressão entre chaves deve cair pelo menos como $|p|^{-2}$ para grandes p . Agora, se F não for justamente da forma $F(p \cdot e) = c(p \cdot e + i0)^{-1}$, então todos os cinco termos da expressão entre chaves são linearmente independentes e o primeiro termo (constante 1, que não cai) não pode ser cancelado pelos outros. Portanto, F deve estar no formato $F(p \cdot e) = c(p \cdot e + i0)^{-1}$, onde c é um coeficiente complexo. Em seguida, a expressão entre chaves indica

$$1 - i\bar{c} + ic + |c|^2 - \frac{|c|^2 m^2 e \cdot e'}{(p \cdot e - i0)(p \cdot e' + i0)},$$

e a condição de que isso deve cair pelo menos como $|p|^{-2}$ implica que $1 - i\bar{c} + ic + |c|^2 = 0$. Uma restrição adicional vem do requisito de autoconjugado. Note que as funções de intertwiners $v^p(p)$ e $ip_\mu v^p(p)e$ são autoconjugadas. Isto implica que o intertwiner $v(p, e)$ é autoconjugado se e somente se $c = ir$, com $r \in \mathbb{R}$. A equação quadrática é, então, lida $1 - 2r + r^2 = 0$, ou $r = 1$. Agora $v(p, e)$ é fixo, isto é, dado apenas pela Eq. (4.19). \square

4.3 Caso Geral $s \geq 2$

Consideramos agora o caso do spin inteiro arbitrário $s \geq 2$. Entre a infinidade de campos livres com localização tipo-ponto para o spin s [1] atuando em um espaço de Hilbert, existem dois campos tensoriais com ótimo comportamento UV, a saber, com dimensão de escala $s + 1$: um deles é um tensor totalmente simétrico $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$ de ordem n , que tem divergência e traço iguais a zero e se transforma sob o grupo de Lorentz de acordo com a representação irredutível $D^{(s/2, s/2)}$ [36, 37]. Ele é caracterizado unicamente por essas propriedades módulo equivalência unitária. Aplicando um operador diferencial linear de ordem n a este campo, como já dito na introdução geral do trabalho, capítulo 1, veja Eq. (1.6), obtém-se o outro, que é o tensor intensidade de campo $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ de ordem $2n$,

$$F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_{|I|}}} \partial_{\nu_{i_1}} \dots \partial_{\nu_{i_{|I|}}} A^p_{\nu_{j_1} \dots \nu_{j_{|I|}} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_{|I|}}}, \quad (4.30)$$

onde escrevemos $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$ e $I^c = \{j_1, \dots, j_{|I^c|}\}$ o complemento de I .

Ele tem, surpreendentemente, a mesma dimensão de escala $s + 1$. De fato, sua função de dois pontos sobre a concha é um polinômio homogêneo de grau $2s$. Estes fatos são convenientemente entendidos em nossa estrutura e recuperados abaixo.

Primeiro, temos a representação dessas partículas e a construção dos intertwiners para o potencial com localização tipo-ponto e do tensor intensidade de campo. Em seguida, construímos nosso potencial localizado tipo-string de características mencionadas na introdução geral do trabalho, capítulo 1, que está relacionado ao tensor intensidade de campo pela relação Eq. (4.30). Ele difere do potencial localizado tipo-ponto por termos que são derivadas de campos tipo-string bem definidos, conforme indicado na Eq. (1.5), e tem dimensão de escala um, como afirmado no Teorema 1.0.1.

4.3.1 Espaço de uma partícula

Tomamos a representação $D^{(n)}$ como realizada no espaço de tensores sobre \mathbb{C}^3 simétricos e com traço zero dentro do n-produto tensorial $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$. Em $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$ consideramos o produto escalar induzido por \mathbb{C}^3 ,

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_n, v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \doteq (u_1, v_1) \dots (u_n, v_n), \quad (4.31)$$

usando um e o mesmo símbolo. Seja g_3 o tensor métrico do produto escalar canônico em \mathbb{C}^3 e o \hat{g}_3 ser seu levantamento para o tensor contravariante de ordem dois, caracterizado pelo fato de

$$(\hat{g}_3, u \otimes v) = (\bar{u}, v) \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{C}^3, \quad (4.32)$$

e é obviamente invariante sob a representação do produto tensorial $R \otimes R$ de $O(3)$. Um tensor simétrico $t \in (\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$ tem traço zero se

$$(g_3)_{ij} t^{ij_1 \dots j_n} = 0 \quad (4.33)$$

para todo i_3, \dots, i_n . O projetor ortogonal⁶³ $E^{(n)}$ de $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$ para o subespaço de tensores sobre \mathbb{C}^3 simétrico com traço zero é dado por [38, Eq. (1.13)]

$$E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k c_k (\overline{u_{\pi(1)}}, u_{\pi(2)}) \cdots (\overline{u_{\pi(2k-1)}}, u_{\pi(2k)}) \times \\ \times E_+^{(n)} u_{\pi(2k+1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)} \otimes \hat{g}_3^{\otimes k}. \quad (4.34)$$

Aqui, $E_+^{(n)}$ é a projeção para os tensores simétricos, $[n/2]$ denota a parte inteira de $n/2$ e os c_k são determinados números positivos específicos calculados em [38], em particular $c_0 = 1$ e $c_1 = \frac{1}{3}$. O espaço dos tensores simétricos com traço zero tem dimensão $2s + 1$ e é irreduzível sob a representação do produto do grupo de rotação [40]. Tomamos isso como nosso pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$, lembrando que $s = n$:

$$\mathfrak{h}^{(n)} \doteq E^{(n)} (\mathbb{C}^3)^{\otimes n}. \quad (4.35)$$

A representação $D^{(n)}$ de $O(3)$ é justamente a restrição da representação do produto tensorial,

$$D^{(n)}(R) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \doteq E^{(n)} D^{(1)}(R) u_1 \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R) u_n. \quad (4.36)$$

Colocamos aqui como a representação antiunitária $U(\tilde{j}_1)$, Prop. 3.2.4, Eq. (3.10), age com $s = n$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Para tanto, colocamos como o operador antiunitário $D^{(n)}(\tilde{j}_1)$ age. Para o caso dos bósons temos, $j_1 \Lambda j_1 = R_1(\pi) \Lambda R_1(\pi)$ e $D^{(n)}(\tilde{j}_1)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, agindo como:

$$D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \doteq D^{(n)}(R_1(\pi)) E^{(n)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_n = E^{(n)} \underline{R_1(\pi)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{R_1(\pi)} \bar{u}_n.$$

Lema 4.3.1. *Este satisfaz:*

$$(i) \quad D^{(n)}(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1} \\ (ii) \quad D^{(n)}(\tilde{j}_1) D^{(n)}(R) D^{(s)}(\tilde{j}_1) = D^{(n)}(R_1(\pi) R R_1(\pi))$$

Segue a demonstração do Lema 4.3.1.

⁶³A ortogonalidade (hermiticidade) deste projetor não é reivindicada em [38], mas pode ser facilmente verificada. Veja também [39, Eq. (C.1)], em que o mesmo projetor é usado e considerado hermitiano.

Demonstração. Primeiro mostramos a equação que define como $D^{(n)}(\tilde{j}_1)$ age. Utilizando Eq. (4.36), temos:

$$D^{(n)}(R_1(\pi)) E^{(n)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_n = E^{(n)} D^{(1)}(R_1(\pi)) \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R_1(\pi)) \bar{u}_n.$$

Portanto,

$$D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = E^{(n)} \underline{R_1(\pi)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{R_1(\pi)} \bar{u}_n.$$

(Onde usamos a representação definidora das rotações.)

Agora a parte (i) do Lema 4.3.1,

$$D^{(n)}(\tilde{j}_1)^2 E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = E^{(n)} \underline{R_1(\pi)} \overline{R_1(\pi)} u_1 \otimes \cdots \otimes \underline{R_1(\pi)} \overline{R_1(\pi)} u_n$$

Aqui $R_1(\pi) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, grupo de Lorentz próprio ortócrono, que implementa um rotação pura sobre o eixo-1 de um angulo- π nas coordenadas espaciais de \mathbb{R}^4 , que é um elemento do subgrupo estabilizador do momento de referência \bar{p} dentro do grupo \mathcal{L}^\uparrow , este que denotamos por $O(3)$, e $\underline{R_1(\pi)}$ uma matriz ortogonal especial 3×3 , a saber, $\underline{R_1(\pi)} \in SO(3)$. Uma vez que $R_1(\pi) \in \mathbb{R}$ ficamos com:

$$D^{(n)}(\tilde{j}_1)^2 E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = E^{(n)} \underline{R_1(\pi)} \underline{R_1(\pi)} u_1 \otimes \cdots \otimes \underline{R_1(\pi)} \underline{R_1(\pi)} u_n = E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

Por último a parte (ii) do Lema 4.3.1,

$$\begin{aligned} & D^{(n)}(\tilde{j}_1) D^{(n)}(R) D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = \\ & = D^{(n)}(R_1(\pi)) D^{(n)}(\bar{R}) D^{(n)}(\overline{R_1(\pi)}) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n. \end{aligned}$$

Como $R \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} & D^{(n)}(\tilde{j}_1) D^{(n)}(R) D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = \\ & = D^{(n)}(R_1(\pi)) D^{(n)}(R) D^{(n)}(R_1(\pi)) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, \end{aligned}$$

que por sua vez é igual a

$$D^{(n)}(R_1(\pi) R R_1(\pi)) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

Onde $\tilde{j}_1 R \tilde{j}_1 \doteq j_1 R j_1 = R_1(\pi) R R_1(\pi)$. □

Portanto, para os bósons, temos que $U(\tilde{j}_1)$ definida pela Eq. (3.10), irá satisfazer

$$(i) \quad U(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1}$$

$$(ii) \quad U(\tilde{j}_1)U(\Lambda)U(\tilde{j}_1)^{-1} = U(\tilde{j}_1\Lambda\tilde{j}_1)$$

Demonstração. A parte (i) é facilmente verificada de acordo com a parte (i) do Lema 4.3.1, para mostrar a parte (ii), os argumentos são semelhantes ao caso dos férmions, com $s = \frac{1}{2}$, veja Proposição 3.2.4, basta trocar o $\tilde{j}_1\tilde{A}\tilde{j}_1$ por $j_1\Lambda j_1 = R_1(\pi)\Lambda R_1(\pi)$ e $R(\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1, p) = \tilde{j}_1 R(A, -j_1 p) \tilde{j}_1$ por $R(\Lambda, -j_1 p) = R_1(\pi)R(R_1(\pi)\Lambda R_1(\pi), p)R_1(\pi)$ uma vez que $j_1 = -R_1(\pi)$, veja Lema 3.2.3. \square

Sendo $D^{(n)}(-1) \doteq D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(\tilde{j}_1)$, temos:

$$D^{(n)}(-1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

De acordo com o Lema 4.3.1,

$$D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(\tilde{j}_1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = D^{(n)}(R_1(\pi)) \circ D^{(n)}(R_1(\pi)) E^{(n)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_n.$$

Utilizando a Eq. (4.36) e o fato de que $\underline{R_1(\pi)}^2 = \mathbf{1}$, temos que o representante antiunitário da transformação PT -1 é dado por:

$$D^{(n)}(-1) E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \doteq E^{(n)} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_n, \quad (4.37)$$

onde \bar{u}_k significa conjugação complexa de componentes, veja Eq. (4.10). Note que $E^{(n)}$ é um intertwiner da representação $D^{(1)} \otimes \cdots \otimes D^{(1)}$ do grupo gerado pelas rotações e a transformação PT para $D^{(n)}$, isto é, Eq. (4.36) vale para $R \in O(3)$ e $R = -1$. Isso nos permite construir intertwiners de Wigner com spin- s , com $s = n$ e $n \in \mathbb{N}_0$ qualquer a partir do intertwiner de Wigner para spin-um.

Lema 4.3.2. *Seja v um intertwiner de Wigner de uma representação D' do grupo de Lorentz para $D^{(1)}$, e deixe $E^{(n)}$ ser um intertwiner da representação do n -produto tensorial $D^{(1)} \otimes \cdots \otimes D^{(1)}$ do grupo de rotação para $D^{(n)}$. Então*

$$v^{(s)}(p, e) \doteq E^{(n)} \circ v(p, e) \otimes \cdots \otimes v(p, e)$$

é um intertwiner de Wigner da representação do n -produto tensorial $D' \otimes \cdots \otimes D'$ do grupo de Lorentz para $D^{(n)}$. Se $E^{(n)}$ é um intertwiner também sob os respectivos representantes da transformação $PT - \mathbf{1}$, então $v^{(s)}$ é autoconjugado se v for.

Em vez de tomar n vezes o mesmo intertwiner v , obviamente pode-se pegar diferentes intertwiners.

Demonstração. Vamos demonstrar o Lema 4.3.2, para isso temos $R \doteq R(\Lambda, p)$, então:

$$v^{(s)}(p, e) \circ D'(\Lambda) \otimes \cdots \otimes D'(\Lambda) = E^{(n)} \circ v(p, e)D'(\Lambda) \otimes \cdots \otimes v(p, e)D'(\Lambda),$$

uma vez que $v(p, e) \circ D'(\Lambda) = D^{(1)}(R) \circ v(p, e)$ temos:

$$E^{(n)} \circ v(p, e)D'(\Lambda) \otimes \cdots \otimes v(p, e)D'(\Lambda) = E^{(n)} \circ D^{(1)}(R)v(p, e) \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R)v(p, e),$$

por outro lado $E^{(n)} \circ D^{(1)}(R) \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R) = D^{(n)}(R) \circ E^{(n)}$, logo

$$v^{(s)}(p, e) \circ D'(\Lambda) \otimes \cdots \otimes D'(\Lambda) = D^{(n)}(R)E^{(n)} \circ v(p, e) \otimes \cdots \otimes v(p, e) = D^{(n)}(R) \circ v^{(s)}(p, e).$$

Assim finalizamos a demonstração. \square

Exibimos o produto escalar em $\mathfrak{h}^{(s)}$ para referência posterior. Inserindo o projetor Eq. (4.34), temos

$$\begin{aligned} & \left(E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \right) = \\ & = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\lambda, \sigma \in S_n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k c_k \left(u_{\lambda(1)}, \overline{u_{\lambda(2)}} \right) \cdots \left(u_{\lambda(2k-1)}, \overline{u_{\lambda(2k)}} \right) \times \\ & \times \left(\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)} \right) \cdots \left(\overline{v_{\sigma(2k-1)}}, v_{\sigma(2k)} \right) \left(u_{\lambda(2k+1)}, v_{\sigma(2k+1)} \right) \cdots \left(u_{\lambda(n)}, v_{\sigma(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

A demonstração da Eq. (4.38) está na Seção 5.4 com a diferença que lá temos um fator (χ, χ') , em que $\chi \in \mathbb{C}^2$ que não temos aqui, entretanto a demonstração é completamente análoga.

4.3.2 Campos com localização tipo-ponto

O espaço de chegada \mathfrak{h} para o potencial tensor é o espaço de tensores simétricos com traço zero em $(\mathbb{C}^4)^{\otimes n}$ e $D(\Lambda)$ é a restrição correspondente de $\Lambda^{\otimes n}$, que é equivalente a $D^{(n/2, n/2)}$ [37]. Para o tensor intensidade de campo, \mathfrak{h} é um subespaço invariante de $(\mathbb{C}^4)^{\otimes 2n}$ e $D(\Lambda)$ é a restrição correspondente de $\Lambda^{\otimes 2n}$. Sejam $v_\mu^p(p)$ e $v_{\mu\nu}^F(p)$ os intertwiners para o potencial tensor e o tensor intensidade de campo de spin-um, respectivamente, e defina

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n}^{s,p}(p) \doteq E^{(n)} v_{\mu_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}^p(p) \quad (4.39)$$

$$v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}^{s,F}(p) \doteq E^{(n)} v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p). \quad (4.40)$$

De acordo com Lema 4.3.2 estes são intertwiners de Wigner autoconjugados. Deixe $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$ e $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ serem os campos tensoriais livres, hermitianos, locais e covariantes correspondentes. O tensor intensidade de campo $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ de ordem- $2n$ obviamente tem as propriedades de simetria (permutação), ou seja, simétrico sob troca de qualquer um dos pares $(\mu_i, \nu_i) \leftrightarrow (\mu_j, \nu_j)$ e antissimétrico sob troca de qualquer um dos índices $\mu_i \leftrightarrow \nu_i$.

Lema 4.3.3. *Os campos $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$ e $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ são relacionados como na Eq. (4.30). O potencial tensor $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$ tem traço e divergência iguais a zero,*

$$g^{\mu\nu} A^p_{\mu\nu\mu_3 \dots \mu_n} = 0, \quad \partial^\mu A^p_{\mu\mu_2 \dots \mu_n}(x) = 0. \quad (4.41)$$

Ele é o único, módulo equivalência unitária, campo quântico livre para partículas massivas com spin- n , $n \in \mathbb{N}_0$, que é um tensor simétrico com traço zero de ordem- n .

Os dois campos têm dimensão de escala $s + 1$ ⁶⁴. De fato, a função de dois pontos de $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ e $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$ sobre a concha é um polinômio homogêneo ⁶⁵ e não homogêneo respectivamente de grau $2n$.

⁶⁴Para o bósons $s = n$.

⁶⁵Polinômio homogêneo é um polinômio onde os monômios com coeficientes não-nulos têm o mesmo grau, caso contrário, será dito não homogêneo.

Mostra-se o Lema (4.3.3).

Demonstração. O fato de que o potencial A^p tem divergência zero segue como no caso do spin-1 a partir das propriedades da função intetwiner do spin-1, veja Eq. (4.13). Para provar que o A^p tem traço zero, observe que $v_\mu^p(\bar{p}) = v^p e_{(\mu)} = i e_{(\mu)}$ se $\mu = 1, 2, 3$ e $= 0$ se $\mu = 0$. Consequentemente

$$g^{\mu\nu} v_\mu^p(\bar{p}) \otimes v_\nu^p(\bar{p}) = -g^{ij} e_{(i)} \otimes e_{(j)} = \hat{g}_3, \quad (4.42)$$

uma vez que $g^{ij} = -g_3^{ij}$. Portanto o tensor $g^{\mu\nu} v_\mu^p(\bar{p}) \otimes v_\nu^p(\bar{p}) \otimes v_{\mu_3}^p(\bar{p}) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n}^p(\bar{p})$ é ortogonal em $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$ para todo tensor com traço zero no sentido de (4.33), isto é, sua projeção $E^{(n)}$ no espaço de tensores com traço zero é zero. Isto implica traço zero (4.41) de $A^p_{\mu_1 \dots \mu_n}$.

A unicidade decorre da observação na subseção 3.2.3, uma vez que a representação do grupo de Lorentz em tensores simétricos com traço zero e de ordem- n é irredutível, a saber, equivalente à representação $D^{(n/2, n/2)}$ [37]. Para provar a relação (4.30), insira a fórmula explícita (4.15) de v^F na definição (4.40). Isso produz

$$v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_s \nu_n}^{s,F}(p) = i^n E^{(n)} (p_{\mu_1} v_{\nu_1}^p(p) - p_{\nu_1} v_{\mu_1}^p(p)) \otimes \cdots \otimes (p_{\mu_n} v_{\nu_n}^p(p) - p_{\nu_n} v_{\mu_n}^p(p)) \quad (4.43)$$

que pode ser escrito como

$$i^n \sum_I (-1)^{|I|} p_{\mu_{j_1}} \cdots p_{\mu_{j_l}} p_{\nu_{i_1}} \cdots p_{\nu_{i_k}} E^{(n)} v_{\nu_{j_1}}^p(p) \otimes \cdots \otimes v_{\nu_{j_l}}^p(p) \otimes v_{\mu_{i_1}}^p(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_{i_k}}^p(p),$$

onde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ percorre sobre todos subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ e $I^c = \{j_1, \dots, j_l\}$ é o complemento de I . Uma vez que a projeção do produto tensorial dos intertwiners- v_μ^p é justamente o intertwiner para $A^p_{\mu_{j_1} \dots \nu_{i_k}}$, isso prova Eq. (4.30).

A parte da função de dois pontos sobre a concha do tensor intensidade de campo, pela fórmula geral (3.48), é dada por

$$(v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_s \nu_n}^{s,F}(p), v_{\mu'_1 \nu'_1 \dots \mu'_n \nu'_n}^{s,F}(p)) \equiv (v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p), E^{(n)} v_{\mu'_1 \nu'_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu'_n \nu'_n}^F(p)).$$

Substituindo o projetor $E^{(n)}$ da Eq. (4.34) escrevemos o produto escalar em $\mathfrak{h}^{(s)}$ como na Eq. (4.38) e temos que ela é dada por uma soma, em que cada termo é um produto de n fatores da forma $(v_{\mu_i \nu_i}^F(p), v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p))$ ou $(\overline{v_{\mu'_i \nu'_i}^F(p)}, v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p))$ ou o complexo conjugado deste último. A conjugação complexa dos intertwiners representa apenas um sinal global e, assim, cada fator, a menos de um sinal, é justamente a função de dois pontos do tensor intensidade de campo de spin-um sobre a concha, que já sabemos ser um polinômio quadrático homogêneo, veja Eq. (4.16). Assim, a função de dois pontos do tensor intensidade de campo com spin- s sobre a concha é um polinômio homogêneo de grau $2s$, como afirmado. De maneira similar mostramos a parte da função de dois pontos sobre a concha do potencial tensor $A^{\mathbb{P}}_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Pela fórmula geral (3.48) é

$$(v_{\mu_1 \dots \mu_n}^s(p), v_{\mu'_1 \dots \mu'_n}^s(p)) \equiv (v_{\mu_1}(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}(p), E^{(n)} v_{\mu'_1}(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu'_n}^F(p)).$$

Já descobrimos que o produto é dado por uma soma, em que cada termo é um produto de n fatores da forma $(v_{\mu_i}(p), v_{\mu'_j}(p))$ ou $(\overline{v_{\mu'_i}(p)}, v_{\mu'_j}(p))$ ou o complexo conjugado deste último. A conjugação complexa dos intertwiners representa apenas um sinal global e, assim, cada fator, a menos de um sinal, é justamente a função de dois pontos do campo de Proca, que já sabemos ser um polinômio quadrático não homogêneo, veja Eq. (4.12). Assim, a função de dois pontos do potencial tensor $A^{\mathbb{P}}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ com spin- s sobre a concha é um polinômio não homogêneo de grau $2s$, como afirmado. A Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] implica que o grau de escala das funções de dois pontos é $2s + 2$, isto é, a dimensão de escala dos campos é $s + 1$. \square

4.3.3 Campos com localização tipo-string

Nosso potencial tensor com localização tipo-string $A_{\mu_1 \dots \mu_n}(x, e)$ é definido como o campo livre correspondente ao intertwiner de Wigner

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n}^s(p, e) \doteq E^{(n)} v_{\mu_1}(p, e) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}(p, e). \quad (4.44)$$

De acordo com o Lema 4.3.2, este é um intertwiner de Wigner (autoconjugado)

da representação n-tensorial do grupo de Lorentz para $D^{(n)}$. Portanto, $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ é um tensor campo quântico localizado tipo-string, covariante e hermitiano. Inserindo a fórmula explícita (4.20) em (4.44), temos que o intertwiner de Wigner pode ser escrito como

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n}^s(p, e) = v_{\mu_1 \dots \mu_n}^{s,p}(p) + \sum_{j=1}^n i p_{\mu_j} v_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_j \dots \mu_n}^{(n, n-1)}(p, e) + i^2 \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j}} p_{\mu_i} p_{\mu_j} v_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \hat{\mu}_j \dots \mu_n}^{(n, n-2)}(p, e) + \dots + i^n p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} v^{(n, 0)}(p, e), \quad (4.45)$$

onde o chapéu significa omitir índice correspondente, com

$$v_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n, k)}(p, e) \doteq \frac{i^{n-k}}{(p \cdot e + i\varepsilon)^{n-k}} E^{(n)} \underbrace{v^p(p) e \otimes \dots \otimes v^p(p)}_{n-k \text{ vezes}} e \otimes v_{\mu_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_k}^p(p).$$

Pelo Lema 4.3.2 e Proposição 3.4.2, isto é um intertwiner de Wigner (autoconjugado). Denotamos por $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n, k)}$ o correspondente tensor campo quântico localizado tipo-string, covariante e hermitiano. Novamente pela Proposição 3.4.2, esses “campos de escolta” podem ser escritos como integrais de linha

$$\phi_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n, k)}(x, e) = \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_{n-k} A_{\mu_1 \dots \mu_n}^p(x + (t_1 + \dots + t_{n-k})e) e^{\mu_{k+1}} \dots e^{\mu_n}.$$

O potencial tensor com localização tipo-string $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ e os campos de escolta $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n, k)}$ satisfazem as propriedades relatadas no Teorema 1.0.1:

Proposição 4.3.4. *O potencial tensor localizado tipo-string $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ está relacionado à sua versão com localização tipo-ponto e aos campos de escolta $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n, k)}$ como na Eq. (1.5). Sua função de dois pontos tem grau de escala dois depois de integrada com uma função de teste na variável e e tem um limite para massa zero. É um potencial para o tensor intensidade de campo $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ no sentido de Eq. (4.30). Finalmente, satisfaz a condição “calibre axial”*

$$A_{\mu \mu_2 \dots \mu_n}(x, e) e^\mu = 0. \quad (4.46)$$

No entanto, $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ não tem divergência e nem traço iguais a zero. Fórmulas explícitas para as funções de dois pontos no caso de spin dois são fornecidas nas Eqs. (4.53), (4.54) e (4.55) abaixo.

Demonstração. A relação (1.5) pode ser lida a partir da Eq. (4.45). Além disso, note que na Eq. (4.43) pode-se substituir cada $v_\mu^p(p)$ por $v_\mu(p, e)$ devido à relação de spin-um (4.26). Isso prova a relação (4.30) com A^p substituído por A . Para provar as afirmações sobre a função de dois pontos, consideramos sua parte sobre a concha, ou seja,

$$\left(v_{\mu_1 \dots \mu_n}^s(p, e), v_{\mu'_1 \dots \mu'_n}^s(p, e') \right).$$

Como na prova de Lema 4.3.3, descobrimos que é dada por uma soma, cada termo do qual é um produto de n fatores da forma $\left(v_{\mu_i}(p, e), v_{\mu'_j}(p, e') \right)$ ou $\left(\overline{v_{\mu'_i}(p, e')}, v_{\mu'_j}(p, e') \right)$ ou $\left(v_{\mu_i}(p, e), \overline{v_{\mu_j}(p, e)} \right)$. Os fatores $(v_\mu(p, e), v_{\mu'}(p, e'))$ são justamente as funções de dois pontos sobre a concha $M_{\mu\mu'}^{AA}(p, e, e')$ dado na Eq. (4.21) e os outros fatores são determinados usando Eq. (4.14) e $\overline{v_\mu^p(p)} = -v_\mu^p(p)$, como

$$\left(\overline{v_\mu(p, e)}, v_\nu(p, e) \right) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu \cdot e_\nu + p_\nu \cdot e_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} \quad (4.47)$$

e seu complexo conjugado.

Demonstração. Substituindo Eq.(4.19) em $\left(\overline{v_\mu(p, e)}, v_\nu(p, e) \right)$ temos,

$$\begin{aligned} & \left(\overline{v_\mu(p, e)}, v_\nu(p, e) \right) = \\ & = \left(\overline{v_\mu^p(p)} - \frac{p_\mu}{p \cdot e - i\varepsilon} \overline{v^p(p)e}, v_\nu^p(p) - \frac{p_\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} v^p(p)e \right) = \left(\overline{v_\mu^p(p)}, v_\nu^p(p) \right) - \\ & - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} \left(\overline{v^p(p)e}, v_\nu^p(p) \right) - \frac{p_\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} \left(\overline{v_\mu^p(p)}, v^p(p)e \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} \left(\overline{v^p(p)e}, v^p(p)e \right). \end{aligned}$$

Usando $\overline{v_\mu^p(p)} = -v_\mu^p(p)$ temos

$$\begin{aligned} \left(\overline{v_\mu(p, e)}, v_\nu(p, e) \right) & = - \left(v_\mu^p(p), v_\nu^p(p) \right) + \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} \left(v^p(p)e, v_\nu^p(p) \right) + \\ & + \frac{p_\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} \left(v_\mu^p(p), v^p(p)e \right) - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} \left(v^p(p)e, v^p(p)e \right). \end{aligned}$$

Agora usando a Eq. (4.14) para cada produto, produzimos a Eq. (4.47). \square

Note que todos os fatores são homogêneos em p de grau zero. Assim, cada produto de n fatores também é homogêneo em p de grau zero. Mais precisamente, é uma soma de

termos da forma (3.112), com o grau do polinômio $M^P(p)$ igual a $n_1 + n_2$ (o número de fatores $p \cdot e \pm i\varepsilon$ ou $p \cdot e' \pm i\varepsilon$ no denominador). De acordo com a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] temos que o grau de escala é dois, o que implica dimensão de escala do campo igual 1, e pela [20, Proposição 9] que o limite para massa zero existe. A condição de “calibre axial”, Eq. (4.46), segue da antissimetria do $F_{\mu\mu_2 \dots \mu_n}$. Mas também pode ser verificada no nível do intertwiner do campo $A_{\mu\mu_2 \dots \mu_n}(x, e)$, como feito para o caso de spin-um, veja a demonstração no final do Lema 4.2.1. \square

Finalmente escrevemos nosso potencial tensor com localização tipo-string como uma integral de linha sobre o campo tensor intensidade de campo em analogia ao caso de spin-um, veja Eq. (4.5).

Lema 4.3.5. *Vale*

$$A_{\mu_1 \dots \mu_n}(x, e) = \int_0^\infty dt_1 \cdots \int_0^\infty dt_n F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}(x + \sum_{i=1}^n t_i e) e^{\nu_1} \cdots e^{\nu_n}. \quad (4.48)$$

Demonstração. Inserindo a relação (4.18) na definição (4.44) do intertwiner de Wigner de $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$, produz

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n}^s(p, e) = \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}^{s,F}(p) e^{\nu_1} \cdots e^{\nu_n}.$$

Usando a Eq. (3.111), isso implica a afirmação. \square

Note que o Lema ou, equivalentemente, a última relação na sua demonstração, implica que a função de dois pontos AA sobre a concha pode ser escrita como

$$M_{\mu_1 \dots \mu_n, \mu'_1 \dots \mu'_n}^{AA}(p, e, e') = \frac{M_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \mu'_1 \nu'_1 \dots \mu'_n \nu'_n}^{FF}(p)}{(p \cdot e - i\varepsilon)^n (p \cdot e' + i\varepsilon)^n} e^{\nu_1} \cdots e^{\nu_n} (e')^{\nu'_1} \cdots (e')^{\nu'_n}, \quad (4.49)$$

onde M^{FF} é a parte da função de dois pontos de FF sobre a concha. Como este é um polinômio homogêneo de grau $2s$, veja Lema (4.3.3), a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] confirmam nossa declaração de que a função de dois pontos de AA tem grau de escala dois, e [20, Proposição 9] confirma que o limite para massa zero existe.

4.4 Spin dois: Gráviton massivo

Colocamos aqui fórmulas explícitas para o campo com localização tipo-ponto e localização tipo-string com massa m e spin-dois.

As partículas de spin-dois podem ser interpretadas como Grávitons massivos, e o potencial tensor $h_{\mu\nu}^p (\equiv A_{\mu\nu}^p)$ poderia, no caso massivo, modelar as flutuações quânticas do campo métrico. O tensor intensidade de campo seria (duas vezes) o tensor de Riemann linearizado $R_{\mu\nu\mu'\nu'}$, veja Eq. (1.7). É interessante notar que o tensor Ricci $R_{\mu\mu'} \doteq g^{\nu\nu'} R_{\mu\nu\mu'\nu'}$ coincide neste contexto linearizado de campos quânticos livres com um múltiplo do potencial:

$$R_{\mu\mu'} = -\frac{1}{2} m^2 h_{\mu\mu'}^p, \quad (4.50)$$

devido às condições de "calibre harmônico", Eq. (4.41) e a equação de Klein-Gordon para $h_{\mu\nu}^p$.

Demonstração. Temos :

$$F_{\mu\nu\mu'\nu'} = 2.R_{\mu\nu\mu'\nu'}$$

Utilizando a Eq. (4.30) para $n = 2$, temos

$$R_{\mu\nu\mu'\nu'} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_{\mu'} h_{\nu\nu'}^p + \partial_\nu \partial_{\nu'} h_{\mu\mu'}^p - \partial_\nu \partial_{\mu'} h_{\mu\nu'}^p - \partial_\mu \partial_{\nu'} h_{\nu\mu'}^p).$$

Então o tensor Ricci é:

$$R_{\mu\mu'} \doteq g^{\nu\nu'} R_{\mu\nu\mu'\nu'} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_{\mu'} g^{\nu\nu'} h_{\nu\nu'}^p + \square h_{\mu\mu'}^p - g^{\nu\nu'} \partial_\nu \partial_{\mu'} h_{\mu\nu'}^p - g^{\nu\nu'} \partial_\mu \partial_{\nu'} h_{\nu\mu'}^p).$$

Utilizando o fato de que $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, que as derivadas comutam e a Eq. (4.41), temos que o único termo que sobrevive é $\square h_{\mu\mu'}^p$, portanto

$$R_{\mu\mu'} = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\mu'}^p).$$

Uma vez que o campo $h_{\mu\mu'}^p$, assim como qualquer campo livre massivo, satisfaz a equação de Klein-Gordon ($\square h_{\mu\mu'}^p = -m^2 h_{\mu\mu'}^p$), produz a Eq. (4.50). \square

Colocamos a forma explícita do intertwiner para o campo do Gráviton massivo e, por consequência, mostramos que o campo localizado tipo-string difere do localizado tipo-ponto por 3 termos que são derivadas de campos tipo-string. Pela definição a Eq.(4.44) e a forma explícita da Eq.(4.19), temos:

$$\begin{aligned} v_{\mu\nu}^2(p, e) &= E^{(2)} \left(v(p)_\mu - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} v(p)e \right) \otimes \left(v(p)_\nu - \frac{p_\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} v(p)e \right) \\ &= E^{(2)} \left(v(p)_\mu \otimes v(p)_\nu \right) - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(2)} \left(v(p)_\nu \otimes v(p)e \right) - \frac{p_\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(2)} \left(v(p)_\mu \otimes v(p)e \right) \\ &\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} E^{(2)} \left(v(p)e \otimes v(p)e \right). \end{aligned}$$

Isto pode ser escrito, veja Eq. (4.45), como

$$v_{\mu\nu}^2(p, e) = v_{\mu\nu}^{2,p}(p) + ip_\mu v_\nu^{(2,1)}(p, e) + ip_\nu v_\mu^{(2,1)}(p, e) - p_\mu p_\nu v^{(2,0)}(p, e). \quad (4.51)$$

Com $v_{\mu\nu}^{2,p}(p) \doteq E^{(2)} \left(v(p)_\mu \otimes v(p)_\nu \right)$, $v_\nu^{(2,1)}(p, e) \doteq \frac{i}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(2)} \left(v(p)_\nu \otimes v(p)e \right)$ e

$$v^{(2,0)}(p, e) \doteq \frac{-1}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} E^{(2)} \left(v(p)e \otimes v(p)e \right).$$

A Eq. (4.51) corresponde ao intertwiner do campo $h_{\mu\nu}$, portanto, o mesmo é da forma:

$$h_{\mu\nu}(x, e) = h_{\mu\nu}^p(x) + \partial_\mu \phi_\nu^{(2,1)}(x, e) + \partial_\nu \phi_\mu^{(2,1)}(x, e) + \partial_\mu \partial_\nu \phi^{(2,0)}(x, e). \quad (4.52)$$

Que comprova que o campo tipo-string difere do seu correspondente tipo-ponto por termos que são derivadas de campos tipo-string como dito no Teorema 1.0.1, Eq. (1.5).

O $h_{\mu\nu}^p(x)$ é o potencial (Gráviton massivo) localizado tipo-ponto e é fixado pelo intertwiner $v_{\mu\nu}^{2,p}(p)$, $\phi_\nu^{(2,1)}(x, e)$ se comporta como um campo com spin-um, mas representa um campo com spin-2 e é fixado por $v_\nu^{(2,1)}(p, e)$ e $\phi^{(2,0)}(x, e)$ que se comporta como um campo escalar, mas também representa um campo com spin-2 e é fixado por $v^{(2,0)}(p, e)$. Note que o campo $\phi^{(2,1)}$ tem divergência zero,

$$\partial \cdot \phi^{(2,1)} = 0,$$

devido ao fato de que $p^\mu v(p)_\mu = 0$, veja Eq. (4.13).

Como qualquer campo livre com massa m , o campo $\phi^{(2,0)}(x, e)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi^{(2,0)}(x, e) = 0.$$

Portanto, o traço de $h(x, e) \doteq h_\mu^\mu(x, e)$ satisfaz:

$$h(x, e) = -m^2\phi^{(2,0)}(x, e).$$

Aqui usamos o fato de que o traço de $h_{\mu\nu}^P$ é zero, que por sua vez vem do Lema 4.3.3.

Temos as seguintes notações: $h_\mu^\mu = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ e $\partial \cdot \phi^{(2,1)} = g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_\mu^{(2,1)}$.

Damos uma lista das funções de dois pontos para os potenciais tensores com localização tipo-ponto e localização tipo-string, $h_{\mu\nu}^P$ e $h_{\mu\nu}$, bem como para os campos de escolta, $\phi_\mu^{(2,1)}$ e $\phi^{(2,0)}$, sobre a concha. Todas são calculadas como nas provas do Lema 4.3.3 e Proposição 4.3.4, usando o fato de que para $s = n = 2$ a projeção (4.34) nos tensores simétricos com traço zero em $(\mathbb{C}^3)^{\otimes 2}$ é dado por

$$E^{(2)} u \otimes v = E_+^{(2)} u \otimes v - \frac{1}{3}(\bar{u}, v) \hat{g}_3.$$

Para o potencial com localização tipo-ponto, a função de dois pontos sobre a concha é dada por

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{h^P h^P}(p) &= \frac{2}{3} \frac{p_\mu p_\nu p_{\mu'} p_{\nu'}}{m^4} + \frac{1}{2} (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} + g_{\nu\mu'} g_{\mu\nu'}) - \frac{1}{3} g_{\mu'\nu'} g_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2} g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu p_{\nu'}}{m^2} g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\nu'}}{m^2} g_{\nu\mu'} + \frac{p_\nu p_{\mu'}}{m^2} g_{\mu\nu'} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} g_{\mu'\nu'} + \frac{p_{\mu'} p_{\nu'}}{m^2} g_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Isto coincide com a Eq. (21) em [41], se levarmos em conta as diferentes convenções substituindo o $\delta_{\mu\nu}$ por $-g_{\mu\nu}$. A parte da função de dois pontos de hh com localização

tipo-string sobre a concha é dada por

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{hh}(p, e, e') &= \frac{p_\mu p_\nu p_{\mu'} p_{\nu'}}{(p \cdot e)^2 (p \cdot e')^2} \left((e \cdot e')^2 - \frac{1}{3} \right) \\
&- \frac{p_\mu p_\nu p_{\mu'}}{(p \cdot e)^2 (p \cdot e')} \left(e \cdot e' e_{\nu'} + \frac{1}{3} e_{\nu'}' \right) - (\mu' \leftrightarrow \nu') \\
&- \frac{p_\mu p_{\mu'} p_{\nu'}}{(p \cdot e) (p \cdot e')^2} \left(e \cdot e' e_\nu + \frac{1}{3} e_\nu \right) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&+ \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e)^2} \left(e_{\mu'} e_{\nu'} + \frac{1}{3} g_{\mu'\nu'} \right) + \frac{p_{\mu'} p_{\nu'}}{(p \cdot e')^2} \left(e_\mu e_\nu + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \right) \\
&+ \frac{p_\mu p_{\mu'}}{(p \cdot e) (p \cdot e')} \left(\frac{1}{2} (e_{\nu'} e_\nu' + e \cdot e' g_{\nu\nu}') - \frac{1}{3} e_\nu e_{\nu'}' \right) + (\mu' \leftrightarrow \nu') \\
&+ \frac{p_\nu p_{\mu'}}{(p \cdot e) (p \cdot e')} \left(\frac{1}{2} (e_{\nu'} e_\mu' + e \cdot e' g_{\mu\nu}') - \frac{1}{3} e_\mu e_{\nu'}' \right) + (\mu' \leftrightarrow \nu') \\
&+ \frac{p_\mu}{p \cdot e} \left(\frac{1}{3} g_{\mu'\nu'} e_\nu - \frac{1}{2} (g_{\nu\mu'} e_{\nu'} + g_{\nu\nu'} e_{\mu}') \right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&+ \frac{p_{\mu'}}{p \cdot e'} \left(\frac{1}{3} g_{\mu\nu} e_{\nu'}' - \frac{1}{2} (g_{\nu'\mu} e_\nu' + g_{\nu'\nu} e_{\mu}') \right) + (\mu' \leftrightarrow \nu') \\
&+ \frac{1}{2} (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} + g_{\nu\mu'} g_{\mu\nu}') - \frac{1}{3} g_{\mu'\nu'} g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Estamos suprimindo os $i\varepsilon$ e $i\varepsilon'$. Cada termo $p \cdot e$ tem que ser lido como $p \cdot e - i\varepsilon$ e cada termo $p \cdot e'$ tem que ser lido como $p \cdot e' + i\varepsilon$.

As partes das funções de dois pontos para os campos $\phi_\mu^{(2,1)}$ e $\phi^{(2,0)}$ sobre a concha, saem da seguinte maneira:

$$M_{\mu,\mu'}^{\phi^{(2,1)}}(p, e, e') = \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2} \left(\frac{2}{3m^2} - \frac{e \cdot e'}{2(p \cdot e)(p \cdot e')} \right) \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{p_\mu}{m^2} \left(\frac{e_{\mu'}'}{3p \cdot e'} - \frac{e_{\mu'}}{2p \cdot e} \right) + \frac{p_{\mu'}}{m^2} \left(\frac{e_\mu}{3p \cdot e} - \frac{e_\mu'}{2p \cdot e'} \right) \\
&+ \frac{1}{2} g_{\mu\mu'} \left(\frac{e \cdot e'}{(p \cdot e)(p \cdot e')} - \frac{1}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{e_{\mu'} e_\mu'}{(p \cdot e)(p \cdot e')} - \frac{1}{3} \frac{e_\mu e_{\mu'}'}{(p \cdot e)(p \cdot e')} \\
M^{\phi^{(2,0)}}(p, e, e') &= \frac{2}{3m^4} - \frac{1}{3m^2} \left(\frac{1}{(p \cdot e)^2} + \frac{1}{(p \cdot e')^2} \right) - \frac{2(e \cdot e')}{m^2(p \cdot e)(p \cdot e')} \\
&+ \frac{1}{(p \cdot e)^2 (p \cdot e')^2} \left((e \cdot e')^2 - \frac{1}{3} \right).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Novamente estamos suprimindo os $i\varepsilon$ e $i\varepsilon'$. Cada termo $p \cdot e$ tem que ser lido como $p \cdot e - i\varepsilon$ e cada termo $p \cdot e'$ tem que ser lido como $p \cdot e' + i\varepsilon$.

De acordo com a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7], temos:

Proposição 4.4.1. *A função de dois pontos de $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}^p$, $\phi_\mu^{(2,1)}$ e $\phi^{(2,0)}$ tem grau de escala 2, 6, 4 e 2, respectivamente.*

Isso significa que, a dimensão de escala dos campos $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}^p$, $\phi_\mu^{(2,1)}$ e $\phi^{(2,0)}$ são 1, 3, 2 e 1, respectivamente. Comprovando, assim, nossa afirmação inicial de que campos tipo-string têm um melhor comportamento UV .

De acordo com a [20, Proposição 9], temos que nossos campos $h_{\mu\nu}$ possuem limite para massa zero, enquanto os campos, $h_{\mu\nu}^p$, $\phi_\mu^{(2,1)}$ e $\phi^{(2,0)}$ não têm.

Capítulo 5

Férmions

5.1 Introdução

Consideramos nesse capítulo os campos que carregam partículas com spin arbitrário semi-inteiro, $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \in \mathbb{N}_0$. Ressaltamos que para campos com spin semi-inteiro uma rotação de 2π gera um sinal, portanto, temos que trabalhar com a representação irredutível unitária com energia positiva $U^{(m,s)}(a, A)$ do recobrimento do grupo \mathcal{P}_+^\uparrow .

A construção dos campos quânticos fermiônicos que satisfazem a relação de covariância Eq. (1.3), mais precisamente, veja a nota de rodapé 11, é feita de maneira similar à construção dos campos com spin-inteiro, veja Sec. 4.3. Nesse trabalho, os intertwiners para os campos são determinados a partir dos intertwiners dos bósons vetoriais massivos, os quais já determinamos no capítulo 4 juntamente com o intertwiner do campo de Dirac $s = \frac{1}{2}$. Portanto, nossos campos têm índices tensoriais correspondentes aos campos com spin inteiro e um índice espinorial α , ($\alpha = \{1, \dots, 4\}$), correspondente ao campo de Dirac que consiste da representação $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, assim, denominamos $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p$ de *campo spinor-tensor localizado tipo-ponto* e $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ de *campo spinor-tensor localizado tipo-string*. Para o spinor-tensor localizado tipo-string, utilizamos o intertwiner do bóson

vetorial $s = 1$ com localização tipo-string, dado pela equação (4.19), e para o spinor-tensor com localização tipo-ponto, o intertwiner do bóson vetorial localizado tipo-ponto, a saber, $v_\mu^p(p)$.

Em ambos os casos vamos utilizar o campo de Dirac localizado tipo-ponto e seu intertwiner correspondente é denotado por $v^D(p)$. Dado a importância do intertwiner de Dirac e de sua função de dois pontos para construção geral, fazemos na seção 5.2 uma breve revisão sobre o campo de Dirac tipo-ponto.⁶⁶ Para construir o caso geral determinamos o projetor, denotado por $E^{(n+\frac{1}{2})}$, sobre o subespaço $\mathfrak{h}^{(n+\frac{1}{2})} \subset (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$, que contém partículas com spin semi-inteiro, $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \geq 1$, o qual é um intertwiner entre a representação do $(n+1)$ -produto tensorial⁶⁷ $\underbrace{D^{(1)} \otimes \dots \otimes D^{(1)}}_{n\text{-vezes}} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ para $D^{(n+\frac{1}{2})}$, com $n \geq 1$.

Colocamos na seção 5.5 fórmulas explícitas para um caso específico, a saber, o campo com spin $s = \frac{3}{2}$, este denominamos de *campo spinor-vetor*, pois tem um índice espinorial α e um índice vetorial μ correspondente ao spin-um e denotamos por $\Psi_{\mu,\alpha}$ e por $\Psi_{\mu,\alpha}^p$ o localizado tipo-string e tipo-ponto, respectivamente. O campo $\Psi_{\mu,\alpha}^p$ é mais convenientemente descrito por Rarita-Schwinger [42], o que justifica o fato de ser conhecido na literatura como Campo de Rarita-Schwinger.

Nossos campos spinor-tensor são simétricos de ordem n com relação aos índices tensoriais, não são hermitianos e os localizados tipo-string diferem dos campos localizados tipo-ponto correspondente por termos que são derivadas de campos localizados tipo-string bem definidos que são responsáveis pelo mau comportamento UV (apresentam um melhor comportamento para grandes energias comparado com o seu correspondente campo

⁶⁶A motivação para utilizar o campo de Dirac localizado tipo-ponto se deve ao fato de que não podemos escrever o campo de Dirac localizado tipo-string como sendo o campo localizado tipo-ponto correspondente mais termos que são derivadas de campos tipo-string como descrito no Teorema 1.0.1, ou seja, o campo não satisfaz a Eq. (1.5).

⁶⁷Durante o desenvolvimento vamos denotar por $(n+1)$ -produto tensorial, o produto de n -vezes $D^{(1)}$ produto tensorial e uma vez $D^{(\frac{1}{2})}$. O mesmo vale para $(n+1)$ -produto tensorial, o produto de n -vezes \mathbb{C}^3 e uma vez produto tensorial \mathbb{C}^2 .

localizado tipo-ponto); conforme afirmamos na Eq. (1.5), logo temos localidade suficiente para uma construção perturbativa de modelos interagentes. Por fim, escrevemos nossos campos spinor-tensor localizados tipo-string como uma integral de linha sobre campos spinor-tensor localizados tipo-ponto.

Antes de continuar com nossos resultados, colocamos como o operador antiunitário $D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$ da representação $U(\tilde{j}_1)$ definida pela Eq. (3.10) age. Para $s = \frac{1}{2}$, temos $\tilde{j}_1 A \tilde{j}_1 := \sigma_1 A \sigma_1$ e $D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$ agindo como:

$$D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)\chi \doteq D^{(\frac{1}{2})}(i\sigma_3)\bar{\chi} = i\sigma_3\bar{\chi}, \quad \chi \in \mathbb{C}^2.$$

Lema 5.1.1. *Este satisfaz:*

$$(i) \quad D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)^2 = \mathbf{1}$$

e

$$(ii) \quad D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)D^{(\frac{1}{2})}(R)D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)\chi = D^{(\frac{1}{2})}(\sigma_1 R \sigma_1)\chi \quad \forall \quad R \in SU(2).$$

Demonstração. A parte (i),

$$D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)^2\chi = D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)i\sigma_3\bar{\chi} = i\sigma_3\overline{i\sigma_3}\chi = \frac{i\sigma_3\sigma_3}{i}\chi = \chi.$$

A parte (ii),

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)D^{(\frac{1}{2})}(R)D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)\chi &= D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)D^{(\frac{1}{2})}(R)D^{(\frac{1}{2})}(i\sigma_3)\bar{\chi} = \\ &= D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)D^{(\frac{1}{2})}(R i\sigma_3)\bar{\chi} = D^{(\frac{1}{2})}\left(\frac{i\sigma_3\bar{R}\sigma_3}{i}\right)\chi = D^{(\frac{1}{2})}(\sigma_3\bar{R}\sigma_3)\chi \end{aligned}$$

Portanto, temos que verificar que $\sigma_3\bar{R}\sigma_3 = \sigma_1 R \sigma_1$.

$$\sigma_3\bar{R}\sigma_3\sigma_1 R^{-1}\sigma_1 = \sigma_3\sigma_3\sigma_1 R^{-1*}R^{-1}\sigma_1 = \sigma_1\sigma_1 = \mathbf{1}$$

Aqui usamos que $\sigma_k \doteq$ matrizes de Pauli, $\sigma_3\sigma_1 = \varepsilon$ e que da Eq. (2.3) temos $\bar{R}\varepsilon = \varepsilon R^{-1*} = \varepsilon R$, uma vez que $R \in SU(2)$. Logo, nossa definição satisfaz a condição para que seja uma representação. \square

5.2 Campo de Dirac com localização tipo-ponto

Nessa seção recordamos o caso do campo de Dirac com localização tipo-ponto, o qual é dado pela Eq. (3.43) com seu respectivo intertwiner e é denotado por $\Psi_\alpha(p)$. Assim foi necessário devido ao fato de que todos os intertwiner para spin semi-inteiro, para $s > \frac{1}{2}$, serão calculados a partir do $v^D(p)$, juntamente com o intertwiner do spin 1. Da mesma forma como foi feito para o caso de spin inteiro, em que todos intertwiners para spin $s > 1$ foram fixados pelo o intertwiner do caso $s = 1$.

O campo de Dirac, $s = \frac{1}{2}$, se transforma de forma covariante como a Eq. (3.12) com $r = \alpha$, onde $D(A) := S^c(A)^{68}$, a saber:

$$U(a, A) \Psi_\alpha(x) U(a, A)^{-1} = \Psi_{\alpha'}(\Lambda(A)x + a) S^c(A)_{\alpha'\alpha},$$

com $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e $\Lambda(A)$ transformação de Lorentz própria através de elementos de $SL(2, \mathbb{C})$. De acordo com a Prop. 3.2.5 e a Eq. (3.41) temos o intertwiner de Wigner de Dirac para o momento de referência \bar{p} , $v^D := v^D(\bar{p})$ fixado pela representação $S^c(A)$ satisfazendo a “pequena relação de intertwiner”,

$$D^{(\frac{1}{2})}(R) \circ v^D = v^D \circ S^c(R), \quad R \in SU(2).$$

Uma solução dessa relação é dada por ⁶⁹

$$v^D = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Usamos a definição do ε dada no Lema 2.3.3, o fato de que $S^c(R) = S(\bar{R})$ e a Eq. (2.3) o que nos produz $R\varepsilon = \varepsilon\bar{R}$.

⁶⁸Onde $S^c(A) := S(A^{-1})^t$ é a representação sobre a qual o campo de Dirac se transforma de forma covariante, $S(A) \doteq D^{(\frac{1}{2}, 0)}(A) \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}(A)$.

$$S(A) \doteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

⁶⁹A constante \sqrt{m} foi escolhida para que a relação canônica de anticomutação seja satisfeita, a saber, $\{\Psi_\alpha(0, \mathbf{x}), \Psi_\beta(0, \mathbf{y})\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Utilizando a Eq. (3.42), temos

$$v^D(p) = v^D \circ S^c(B_p^{-1}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\varepsilon B_p^t & \varepsilon \overline{B_p^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Podemos utilizar a Eq. (2.3) e reescrever o $v^D(p)$ como:

$$v^D(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -B_p^{-1}\varepsilon & B_p^*\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

O intertwiner conjugado de v^D , denotado por v^{Dc} , é fixado pela Eq. (3.28) e é dado por:

$$v^{Dc}(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} B_p^* & B_p^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Vamos demonstrar a Eq. (5.2).

Demonstração. Da Eq. (3.28), temos:

$$v^{Dc}(p) = D^{(s)}(\tilde{j}_1)v(-j_1p)S^c(\tilde{j}_1).$$

Utilizando o Lema (5.1.1) e $S^c(\tilde{j}_1)$ dado na nota de rodapé 40, temos:

$$v^{Dc}(p) = \sqrt{m} i\sigma_3 \begin{pmatrix} -\overline{B_{-j_1p}^{-1}}\varepsilon & \overline{B_{-j_1p}^*}\varepsilon \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Usando o Lema 3.2.3, a saber, $B_{-j_1p} = \sigma_1 B_p \sigma_1$, e o fato de que $\sigma_3 \sigma_1 = \varepsilon$, ficamos com

$$v^{Dc}(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \varepsilon \overline{B_p^{-1}} \sigma_1 \varepsilon \sigma_1 & \varepsilon \overline{B_p^*} \sigma_1 \varepsilon \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando Eq. (2.3), podemos reescrever da seguinte forma:

$$v^{Dc}(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} B_p^* \varepsilon \sigma_1 \varepsilon \sigma_1 & B_p^{-1} \varepsilon \sigma_1 \varepsilon \sigma_1 \end{pmatrix},$$

o que produz a Eq. (5.2). □

Para determinar a função de dois pontos sobre a concha para o campo de Dirac, função definida pela Eq. (5.5) abaixo, precisamos determinar o $\check{v}^{Dc}(p) \doteq v^{Dc}(p)\gamma_0$, com $\gamma_0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

Temos que

$$\check{v}^{Dc}(p) \doteq v^{Dc}(p)\gamma_0 = \sqrt{m}(B_p^* \ B_p^{-1})\gamma_0 = \sqrt{m}(B_p^* \ B_p^{-1})\gamma_0 = \sqrt{m}(B_p^* \ B_p^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

O que nos produz,

$$\check{v}^{Dc}(p) = \sqrt{m}(B_p^{-1} \ B_p^*). \quad (5.4)$$

Com as soluções dos intertwiners acima, determinamos a função de dois pontos sobre a concha para o campo de Dirac localizado tipo-ponto, denotado por, $\Psi_\alpha(x)$. A função de dois pontos para o campo de Dirac com seus respectivos intertwiners de Wigner $v_\alpha^D(p)$ e $v_\beta^D(p)$ e sua respectiva função de dois pontos sobre a concha sai como:⁷⁰

$$\begin{aligned} \left(\Omega, \Psi_\alpha(x) \overline{\Psi_\beta(x')\Omega} \right) &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} M^{\Psi_\alpha \overline{\Psi_\beta}}(p) \\ M^{\Psi_\alpha \overline{\Psi_\beta}}(p) &= (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_\beta^{Dc}(p))_{\mathfrak{h}(\frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

em que (\cdot, \cdot) e $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{h}(\frac{1}{2})}$ indicam os produtos escalares no espaço Fock \mathcal{H} fermiônico e no pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}(\frac{1}{2})$, respectivamente. Aqui, $\overline{\Psi_\beta} := (\Psi^* \gamma_0)_\beta$ e $v_\alpha^{Dc}(p) \doteq v^{Dc}(p)e_\alpha$.

Lema 5.2.1.

$$M^{\Psi_\alpha \overline{\Psi_\beta}}(p) := (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_\beta^{Dc}(p)) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

Demonstração. Seja $v \in \mathbb{C}^4$ tal que:

$$v \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v^a \\ v^b \end{pmatrix} \text{ com } v^a, v^b \in \mathbb{C}^2.$$

⁷⁰Na seção 5.4, mostramos a expressão da função de dois pontos para o caso geral, spin $s = n + \frac{1}{2}$, com $n \geq 1$.

e

$$(v, w) = (v^a, w^a)_{\mathbb{C}^2} + (v^b, w^b)_{\mathbb{C}^2}.$$

Portanto,

$$e_\alpha \doteq \begin{pmatrix} e_\alpha^a \\ e_\alpha^b \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

e

$$(e_\alpha, e_\beta) \doteq \left[\begin{pmatrix} e_\alpha^a \\ e_\alpha^b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_\beta^a \\ e_\beta^b \end{pmatrix} \right] = (e_\alpha^a, e_\beta^a)_{\mathbb{C}^2} + (e_\alpha^b, e_\beta^b)_{\mathbb{C}^2} \quad (5.7)$$

Aplicando as Eq.s (5.2) e (5.4) temos,

$$M^{\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta}(p) = (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_\beta^{Dc}(p)) = m.((B_p^* \ B_p^{-1})e_\alpha, (B_p^{-1} \ B_p^*)e_\beta).$$

Utilizando as relações dadas pelas Eq.s (5.6) e (5.7), as Eq.s (2.6) e (2.7) as quais nos proporcionam, $B_p^2 = \frac{p}{m}$ e $(B_p^{-1})^2 = \frac{\tilde{p}}{m}$, e $\not{p} \doteq \begin{pmatrix} 0 & \underline{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix}$ temos:

$$M^{\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta}(p) = m. \{ (e_\alpha, e_\beta) + (e_\alpha, \frac{\not{p}}{m} e_\beta) \} = (e_\alpha, (\not{p} + m)e_\beta) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}.$$

□

De acordo com a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7], temos que a função de dois pontos tem grau de escala 3 e consequentemente a dimensão de escala D_s do campo de Dirac é $\frac{3}{2}$.

5.3 Espaço de uma partícula - Férmions

Vamos começar a construção dos campos com spin semi-inteiro com $s = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 1$. Primeiro, lembramos a representação dessas partículas e construímos os intertwiners para os campos. Tomamos a representação $D^{(s)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, onde $s = n + \frac{1}{2}$ e $n \geq 1$, como realizada no subespaço irredutível de $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$, denotado por $\mathfrak{h}^{(n+\frac{1}{2})}$. O espaço $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ contém vários subespaços irredutíveis de

$SU(2)$, mas mostramos no desenvolvimento do capítulo, que ele contém um subspaço com spin $n + \frac{1}{2}$ sem degenerescência. Em $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ consideramos o produto escalar induzido por \mathbb{C}^3 e \mathbb{C}^2 ,

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi') \doteq (u_1, v_1) \cdots (u_n, v_n)(\chi, \chi') \quad (5.8)$$

usando um e o mesmo símbolo, em que $u_i \in \mathbb{C}^3$ e $\chi \in \mathbb{C}^2$.

Proposição 5.3.1. *O projetor ortogonal para o subspaço $\mathfrak{h}^{(n+\frac{1}{2})} \subset (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ é dado por:*

$$E^{(n+\frac{1}{2})} \doteq \left(\mathbf{1} - \frac{1}{\hat{c}_n} E^{(n)} \Theta_n^* \Theta_n \right) \circ E^{(n)} \quad (5.9)$$

A constante \hat{c}_n deve ser inserida para que $\frac{1}{\hat{c}_n} \Theta_n^* \Theta_n$ seja um projetor.⁷¹

Em que o $E^{(n)}$ é o projetor definido pela Eq. (4.34). Aqui estamos usando a seguinte notação,

$$E^{(n)}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq E^{(n)}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \otimes \chi.$$

Θ_n o mapa de $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2$ definido por:

$$\Theta_n(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes \underline{u}_n \chi,$$

em que $\underline{u} \doteq \sum_{k=1}^3 u_k \sigma_k$. E Θ_n^* o seu adjunto dado por:

$$\Theta_n^*(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes \chi) = \sum_{k=1}^3 u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes e_{(k)} \otimes \sigma_k \chi,$$

em que σ^k são as matrizes de Pauli e $e_{(k)}$ elemento k da base canônica em \mathbb{C}^3 .

Demonstração. Determinamos que o projetor $E^{(n+\frac{1}{2})}$ tem imagem no subspaço $\mathfrak{h}^{(n+\frac{1}{2})} \subset (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$.

Como é bem conhecido, o produto tensorial de representações de $SU(2)$ tem decomposição através de uma soma direta de representações irredutíveis. Portanto, fazemos

⁷¹Em que $\hat{c}_0 = 1$ e $\hat{c}_1 = 3$. Ainda não determinamos para $n \geq 2$.

isso para a representação $\underbrace{D^{(1)} \otimes \dots \otimes D^{(1)}}_{n\text{-vezes}} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$, agindo em $\underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_{n\text{-vezes}} \otimes \mathbb{C}^2$.

Seja $\mathfrak{h}' := \underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_{n\text{-vezes}} \otimes \mathbb{C}^2$ e $E^{(n)}(u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq E^{(n)}(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \otimes \chi$.

Aplicando o operador $E^{(n)}$ dado pela Eq. (4.34) em \mathfrak{h}' , temos:

$$E^{(n)} : \underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_{n\text{-vezes}} \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2,$$

onde $\mathfrak{h}^n = E^{(n)}(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$ é o espaço irredutível que contém partículas com spin n . Podemos escrever $\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$.

Seja Θ_n o mapa de $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2$ definido por:

$$\Theta_n(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n \otimes \chi) = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{n-1} \otimes \underline{u_n} \chi \quad (5.10)$$

Novamente estamos denotando os $u_i \in \mathbb{C}^3$ e $\chi \in \mathbb{C}^2$.

Recordamos que o mapa adjunto $\Theta_n^* : (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ é definido por:

$$(\psi, \Theta_n^* \xi) = (\Theta_n \psi, \xi), \quad \psi \in (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2 \quad e \quad \xi \in (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2. \quad (5.11)$$

Denotamos por $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ a base canônica em \mathbb{C}^3 , onde as componentes são dadas por $u_k \doteq (e_{(k)}, u)$.

Lema 5.3.2. (i) O adjunto Θ_n^* é dado por

$$\Theta_n^*(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{n-1} \otimes \chi) = \sum_{k=1}^3 u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{n-1} \otimes e_{(k)} \otimes \sigma_k \chi. \quad (5.12)$$

(ii) O mapa $w_n \doteq (\hat{c}_n)^{-\frac{1}{2}} \Theta_n E^{(n)} = (\hat{c}_n)^{-\frac{1}{2}} w'_n$ é uma isometria parcial, isto é,

$$w_n w_n^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}} \quad w_n^* w_n = E_{Im \Theta_n^*}^{(n-\frac{1}{2})} := \text{Projedor sobre a imagem de } \Theta_n^*.$$

Demonstração. Começamos pela parte (i), adjunto:

Sendo $\psi = u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes \chi \in (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ e $\xi = u'_1 \otimes \dots \otimes u'_{n-1} \otimes \lambda \in (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2$.

Logo temos:

$$(\Theta_n \psi, \xi) = (u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-1} \otimes \underline{u_n} \chi, \xi) = \sum_{k=1}^3 \overline{(u_n)_k} (u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-1} \otimes \chi, u'_1 \otimes \dots \otimes u'_{n-1} \otimes \sigma_k \lambda).$$

Usamos que $\underline{u} = \sum_{k=1}^3 u_k \sigma_k$ e que as matrizes de Pauli σ_k são hermitianas. De acordo com o produto definido pela Eq. (5.8) temos,

$$\sum_{k=1}^3 \overline{(u_n)_k} (u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes \chi, u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{n-1} \otimes \sigma_k \lambda) = \sum_{k=1}^3 \overline{(u_n)_k} (u_1, u'_1) \cdots (u_{n-1}, u'_{n-1}) (\chi, \sigma_k \lambda)$$

Por outro lado, se definirmos Θ_n^* por (5.12), temos

$$\begin{aligned} (\psi, \Theta_n^* \xi) &= (\psi, \Theta_n^* u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{n-1} \otimes \lambda) = \\ &= \sum_{k=1}^3 (\psi, u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{n-1} \otimes e_{(k)} \otimes \sigma_k \lambda) = \sum_{k=1}^3 (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{n-1} \otimes e_{(k)} \otimes \sigma_k \lambda) = \\ &= \sum_{k=1}^3 (u_1, u'_1) \cdots (u_{n-1}, u'_{n-1}) (u_n, e_{(k)}) (\chi, \sigma_k \lambda). \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado a veracidade da Eq. (5.12), uma vez que os dois lados coincidem pois $(u_n, e_{(k)}) = \overline{(u_n)_k}$.

Seja V' o operador que faz o intertwiner entre os espaços \mathfrak{h}' e $\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2$, a saber,

$$V' : \mathfrak{h}' \longrightarrow \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}},$$

definido por

$$V' \doteq E^{(n)} \Theta_n^* \Theta_n E^{(n)} = w_n^* w'_n. \quad (5.13)$$

Portanto, a imagem de V' é invariante e deve ser uma das opções:

$$ImV' = \{0\}, \quad ImV' = \{\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2\}, \quad ImV' = \{\hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}\} \quad \text{ou} \quad ImV' = \{\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}\}.$$

Lema 5.3.3. *Por construção $w'_n = \Theta_n E^{(n)} : \mathfrak{h}' \longrightarrow \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \subset (\mathbb{C}^3)^{\otimes n-1} \otimes \mathbb{C}^2$ e $V := w_n^* w'_n$ é o projetor sobre o subespaço $\hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$ da decomposição $\hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$.*

Logo temos $w'_n w_n^ : \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}$ e $[w'_n w_n^*, D'(R)] = 0$, onde $D'(R)$ a representação que age em \mathfrak{h}' por isso implica que $w'_n w_n^* = \hat{c}_n \mathbb{1}$ em $\mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}$.*

Analisamos a imagem de Θ_n para determinar qual dos casos acima é a ImV' .

Pegue $\mathfrak{h}'' := \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$ e $\check{\mathfrak{h}} := \overbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \cdots \otimes \mathbb{C}^3}^{n-1} \otimes \mathbb{C}^2$, onde tanto \mathfrak{h}'' quanto

$\check{\mathfrak{h}}$ possuem decomposição por somas de subespaços irredutíveis.

$$\Theta_n : \mathfrak{h}'' \longrightarrow \check{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{h}^{n-1} \otimes \mathbb{C}^2$$

Aqui $\tilde{\mathfrak{h}}$ é a soma de subespaços irredutíveis com s no intervalo $\{0, \dots, n-2\}$, portanto, $\check{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}}^{\{s \leq n-\frac{3}{2}\}} \oplus \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}$.

Destacamos que dentro do conjunto de subespaços $\hat{\mathfrak{h}}$ pertencente ao intervalo $\{s \leq n - \frac{3}{2}\}$ há subespaços irredutíveis com grau de degenerescência diferente de 1 e que para o subespaço $\mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}$ não existe degenerescência.

Em resumo temos:

Por equivalência entre os subespaços irredutíveis dentro da soma direta de subespaços irredutíveis,

$$\Theta_n | \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{e} \quad \Theta_n | \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \quad \text{um isomorfismo, assim } \text{Im } \Theta_n = \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \text{ e}$$

$$\text{consequentemente } \Theta_n^* | \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \longrightarrow \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}' & \xrightarrow{\Theta_n E^{(n)}} & \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \in \check{\mathfrak{h}} \\ E^{(n)} \downarrow & \nearrow \Theta_n & \\ \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 & & \end{array}$$

$$\text{Onde: } \mathfrak{h}' = \underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_n \otimes \mathbb{C}^2, \quad \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}} \oplus \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \text{ e } \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \subset \underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_{n-1} \otimes \mathbb{C}^2.$$

Mostramos que $w'_n w_n^* : \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}} \Rightarrow w'_n w_n^* = \hat{c}_n \mathbf{1}$ em $\mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}$ e que a $\text{Im } V' = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$. Consequentemente, $w_n \doteq (\hat{c}_n)^{-\frac{1}{2}} w'_n$ é uma isometria parcial, isto é,

$$w_n w_n^* = \mathbf{1}_{\mathfrak{h}^{n-\frac{1}{2}}} \quad w_n^* w_n = E_{\text{Im } \Theta_n^*}^{(n-\frac{1}{2})} := \text{projedor sobre } \text{Im } \Theta_n^* = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$$

□

Com isso temos $V \doteq w_n^* w_n : (\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \subset \mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2$.

Lema 5.3.4. (i) $V^2 = V$ (ii) $V^* = V$ (iii) $\text{Im } V = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$

Demonstração. A parte (i),

$$V^2 = w_n^* \underbrace{w_n w_n^*}_1 w_n = w_n^* w_n = V.$$

A parte (ii),

$$V^* = (w_n^* w_n)^* = w_n^* w_n = V.$$

A parte (iii) já foi mostrada na prova do Lema 5.3.3. \square

O Lema 5.3.4 implica que $V \equiv E^{(n-\frac{1}{2})}$ é o projetor ortogonal sobre $\hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}}$ na decomposição $\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \hat{\mathfrak{h}}^{n-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$. Como $\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \text{Im}E^{(n)}$, isso implica que o projetor ortogonal sobre subespaço invariante $\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}} \subset \underbrace{\mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3}_{n\text{-vezes}} \otimes \mathbb{C}^2$ é dado pela Eq. (5.9). \square

O espaço $\mathfrak{h}^{(n+\frac{1}{2})}$ tem dimensão $2s+1$ e é irredutível sob a representação do produto do grupo de rotação. Tomamos isso como nosso pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$:

$$\mathfrak{h}^{(s)} \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} ((\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C}^2)), \quad s = n + \frac{1}{2}, \quad n \geq 1. \quad (5.14)$$

A representação $D^{(s)}$ de $SU(2)$ é justamente a restrição da representação do produto tensorial,

$$D^{(s)}(R) E^{(n+\frac{1}{2})} u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes \chi \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} D^{(1)}(R) u_1 \otimes \dots \otimes D^{(1)}(R) u_n \otimes D^{\frac{1}{2}}(A) \chi. \quad (5.15)$$

Onde $\chi \in \mathbb{C}^2$ e $A \in SU(2)$.

Note que $E^{(n+\frac{1}{2})}$ é um intertwiner da representação $D^{(1)} \otimes \dots \otimes D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$ do grupo das rotações (grupo $SL(2, \mathbb{C})$) para a representação $D^{(s)}$ onde $s = n + \frac{1}{2}$, com $n \geq 1$. Isso nos permite construir intertwiners de Wigner com $\text{spin-}s = n + \frac{1}{2}$, com $n \geq 1$ qualquer a partir do intertwiner de Wigner para $\text{spin-}1$ e do intertwiner de Wigner para $\text{spin-}\frac{1}{2}$, campo de Dirac localizado tipo-ponto.

Lema 5.3.5. *Seja v um intertwiner de Wigner de uma representação D' do grupo de Lorentz para $D^{(1)}$, $v^D(p)$ um intertwiner de Wigner de Dirac de uma representação S^c do recobrimento do grupo \mathcal{L}_+^\uparrow para $D^{(\frac{1}{2})}$ e deixe $E^{(n+\frac{1}{2})}$ ser um intertwiner da representação do $(n+1)$ -produto tensorial $D^{(1)} \otimes \dots \otimes D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$ do grupo de rotações para $D^{(s)}$, com $s = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 1$. Então*

$$v^{(s)}(p, e) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v(p, e) \otimes \dots \otimes v(p, e) \otimes v^D(p)$$

é um intertwiner de Wigner da representação do $(n+1)$ -produto tensorial $D' \otimes \cdots \otimes D' \otimes S^c$ do grupo de $SL(2, \mathbb{C})$ para $D^{(s)}$.

O intertwiner v corresponde ao intertwiner de Wigner do spin-um e como explicado no capítulo 4 ele é autoconjugado, entretanto, como mostrado acima, o intertwiner de Wigner de Dirac, $v^D(p)$, não é autoconjugado, portanto, o intertwiner de Wigner $v^{(s)}(p, e)$ também não o é e, conseqüentemente, nossos campos spinor-tensor que carregam partículas com spin semi-inteiro não são hermitianos.

Tal qual no caso de spin- s inteiro, em vez de tomar n -vezes o mesmo intertwiner v , pode-se pegar diferentes intertwiners.

Vamos demonstrar o Lema 5.3.5.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} & v^{(s)}(p, e) \circ D'(A) \otimes \cdots \otimes D'(A) \otimes S^c(A) = \\ & = E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v(p, e)D'(A) \otimes \cdots \otimes v(p, e)D'(A) \otimes v^D(p)S^c(A). \end{aligned}$$

Como $v(p, e) \circ D'(A) = D^{(1)}(R(A, p)) \circ v(p, e)$ e $v^D(p) \circ S^c(A) = D^{(\frac{1}{2})}(A) \circ v^D(p)$, ficamos com

$$\begin{aligned} & E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v(p, e)D'(A) \otimes \cdots \otimes v(p, e)D'(A) \otimes v^D(p)S^c(A) = \\ & = E^{(n+\frac{1}{2})} \circ D^{(1)}(R(A, p))v(p, e) \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R(A, p))v(p, e) \otimes D^{(\frac{1}{2})}(A)v^D(p). \end{aligned}$$

Uma vez que $E^{(n+\frac{1}{2})} \circ D^{(1)}(R(A, p)) \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R(A, p)) \otimes D^{(\frac{1}{2})}(A) = D^{(s)}(R(A, p)) \circ E^{(n+\frac{1}{2})}$, produzimos:

$$\begin{aligned} & v^{(s)}(p, e) \circ D'(A) \otimes \cdots \otimes D'(A) \otimes S^c(A) = \\ & = D^{(s)}(R(A, p)) \circ E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v(p, e) \otimes \cdots \otimes v(p, e) \otimes v^D(p) = D^{(s)}(R(A, p)) \circ v^{(s)}(p, e). \end{aligned}$$

□

Colocamos aqui como o operador antilinear $D^{(n+\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$ definido na representação antiunitária $U(\tilde{j}_1)$, Eq. (3.10), age. De acordo com nossas definições para $D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)$, Lema 5.1.1, e $D^{(n)}(\tilde{j}_1)$, Lema 4.3.1, temos no caso geral com $s = n + \frac{1}{2}$.

Lema 5.3.6.

$$D^{(n+\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)E^{(n+\frac{1}{2})}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq (E^{(n)} \underline{\Lambda(R_1(\pi))} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{\Lambda(R_1(\pi))} \bar{u}_n) \otimes i\sigma_3 \bar{\chi}.$$

Em que, $u_i \in \mathbb{C}^3$, $\chi \in \mathbb{C}^2$ e \bar{u}_i a conjugação complexa de componentes.

Demonstração.

$$\begin{aligned} & D^{(n+\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)E^{(n+\frac{1}{2})}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq \\ & \doteq D^{(n)}(\tilde{j}_1)(E^{(n)}u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \otimes D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)\chi = (D^{(n)}(R_1(\pi))E^{(n)}\bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_n) \otimes D^{(\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)\chi = \\ & = (E^{(n)} D^{(1)}(R_1(\pi))\bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R_1(\pi))\bar{u}_n) \otimes i\sigma_3 \bar{\chi}. \end{aligned}$$

Utilizamos os Lemas 4.3.1 e 5.1.1, juntamente com a Eq. (4.36).

Uma vez que nesse capítulo estamos utilizando os elementos do recobrimento, $R \in SU(2)$, temos

$$D^{(1)}(R_1(\pi))u_1 \doteq \underline{\Lambda(R_1(\pi))}u_1.$$

Então,

$$D^{(n+\frac{1}{2})}(\tilde{j}_1)E^{(n)}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi) \doteq (E^{(n)} \underline{\Lambda(R_1(\pi))} \bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{\Lambda(R_1(\pi))} \bar{u}_n) \otimes i\sigma_3 \bar{\chi}.$$

□

5.4 Função de dois pontos para $s = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 1$

Para os campos com spin inteiro, a função de dois pontos foi definida de acordo com a Eq. (3.47) e a parte da função de dois pontos sobre a concha definida pela Eq. (3.48).

Para os campos com spin semi-inteiro, os campos spinor-tensor, definimos a função de dois pontos para dois campos como $\varphi_{1,r}$ e $\varphi_{2,r'}$ com os respectivos intertwiners de Wigner v_1 e v_2 como⁷²

⁷²Os motivos para tal definição já foram ditos na nota de rodapé 47.

$$\left(\Omega, \varphi_{1,r}(x, e) \overline{\varphi_{2,r'}(x', e') \Omega} \right) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} M_{r,r'}^{\varphi_1 \overline{\varphi_2}}(p, e, e') \quad (5.16)$$

$$M_{r,r'}^{\varphi_1 \overline{\varphi_2}}(p, e, e') = (v_{1r}^c(p, e), \check{v}_{2r'}^c(p, e'))_{\mathfrak{h}^{(s)}}, \quad (5.17)$$

em que (\cdot, \cdot) e $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{h}^{(s)}}$ indicam os produtos escalares no espaço Fock \mathcal{H} fermiônico e no pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$, respectivamente e $\overline{\varphi_r} := (\varphi^* \gamma_0)_r$. Observando que a matriz γ_0 irá contrair somente com o intertwiner de Dirac, a distribuição $M_{r,r'}^{\varphi_1 \overline{\varphi_2}}(p, e, e')$ é a transformada de Fourier da função de dois pontos após separar o fator delta da concha de massa, a qual denominamos de *parte da função de dois pontos sobre a concha*. Note que a positividade da função de dois pontos é satisfeita por construção. Durante o desenvolvimento, temos as seguintes definições:⁷³

O intertwiner conjugado de $v_r(p, e)$, denotado por $v_r^c(p, e)$, é dado por:

$$v_r^c(p, e) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu_1}(p, e) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n}(p, e) \otimes v_\alpha^{Dc}(p)$$

e o intertwiner $\check{v}_r^c(p, e) \doteq (v^c(p, e) \circ \gamma_0)_r$ dado por:

$$\check{v}_r^c(p, e) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu_1}(p, e) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n}(p, e) \otimes \check{v}_\alpha^{Dc}(p), \text{ com } \check{v}_\alpha^{Dc}(p) \doteq v^{Dc}(p)_{\alpha'} (\gamma_0)_{\alpha' \alpha}.$$

É importante lembrar que $v(p, e)$ corresponde ao intertwiner de Wigner para spin 1 tipo-string e $v^D(p)$ corresponde ao intertwiner de Wigner do campo de Dirac.

Vamos demonstrar a Eq. (5.17).

Demonstração. Substituindo a Eq. (3.43) na Eq. (5.16), temos

$$\begin{aligned} & \left(\Omega, \varphi_{1,r}(x, e) \overline{\varphi_{2,r'}(x', e') \Omega} \right) = \\ & = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) \left(\Omega, e^{-ip \cdot x} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e)} a(p, k) e^{iq \cdot x'} (v_{2r'}^{c,l}(q, e') \gamma_0)_{r'} a^*(q, l) \right)_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \\ & = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot x'} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e)} (v_{2r'}^{c,l}(q, e) \gamma_0)_{r'} \left(\Omega, a(p, k) a^*(q, l) \Omega \right)_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \cdots \end{aligned}$$

⁷³Para os campos localizados tipo-ponto substituímos os $v(p, e)$ por $v^p(p)$.

Das Eqs. (3.11) e (2.16), temos

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega_m(\mathbf{q})} e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot x'} \overline{v_{1r}^{c,k}(p, e)} (v_{2l}^{c,l}(q, e) \gamma_0)_{r'} (2\omega_m(\mathbf{p}) \delta_{k,l} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}))_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} (v_{1r}^c(p, e), \check{v}_{2r'}^c(p, e'))_{\mathfrak{h}^{(s)}} \end{aligned}$$

□

Destacamos que nossos intertwiners para os campos spinor-tensor também são dados pela Eq. (3.111) e que a parte da função de dois pontos para nossos campos spinor-tensor correspondente a função de dois pontos $(\Omega, \varphi_1(x, e) \overline{\varphi_2(x', e')}\Omega)$ também é dada pela Eq. (3.112) com a diferença que agora o $M^p(p) = (v_1^c(p), \check{v}_2^c(p))_{\mathfrak{h}^{(s)}}$. A demonstração é completamente análoga à que foi feita na proposição 3.4.2, no caso do campo com spin inteiro em que temos a função de dois pontos definida por $(\Omega, \varphi_1(x, e) \varphi_2(x', e')\Omega)$ e o $M^p(p) = (v_1^c(p), v_2(p))_{\mathfrak{h}^{(s)}}$.

Todas as equações para o caso de campo com localização tipo-string são válidas para o caso de localização tipo-ponto - que independe da variável e -, portanto, a variável pode ser negligenciada em todas as equações.

Mostramos agora que o produto escalar para nosso pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$, Eq. (5.14), é dado pela soma de produtos escalares, o que implica que a função de dois pontos para nossos spinor-tensor é da forma de soma de produtos de funções de dois pontos de A_μ e Ψ .

Proposição 5.4.1. *O produto escalar no pequeno espaço de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$ dado pela*

Eq. (5.14) é:

$$\begin{aligned}
& (E^{(n+\frac{1}{2})} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n+\frac{1}{2})} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi')_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \\
& = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\lambda, \sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (u_{\lambda(1)}, \overline{u_{\lambda(2)}}) \cdots (u_{\lambda(2k'-1)}, \overline{u_{\lambda(2k')}}) \times \\
& \times (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) (u_{\lambda(2k'+1)}, v_{\sigma(2k'+1)}) \cdots (u_{\lambda(n)}, v_{\sigma(n)}) (\chi, \chi') - \\
& \frac{1}{\hat{c}_n (n!)^4} \sum_{\sigma, \lambda', \pi, \lambda \in S_n} \sum_{k, k'=0}^{[n/2]} \sum_{i_1 \cdots i_{2k}, i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i_1 i_2} \cdots g_3^{i_{2k-1} i_{2k}} g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} (-1)^{k+k'} c_k \cdot c_{k'} \times \\
& \times (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) (u_{\pi(1)}, \overline{u_{\pi(2)}}) \cdots (u_{\pi(2k-1)}, \overline{u_{\pi(2k)}}) \times \\
& \times (\omega_{\lambda(1)}, \omega'_{\lambda'(1)}) \cdots (\omega_{\lambda(n-1)}, \omega'_{\lambda'(n-1)}) (\omega_{\lambda(n)} \chi, \omega'_{\lambda'(n)} \chi'). \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Em que

$$\omega_\nu = \begin{cases} e_{i_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k, \\ u_{\pi(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k+1. \end{cases}$$

$$\omega'_\nu = \begin{cases} e_{i'_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k', \\ v_{\sigma(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k'+1. \end{cases}$$

Aqui, $[n/2]$ denota a parte inteira de $n/2$ e os c_k são determinados números positivos específicos calculados em [38], em particular $c_0 = 1$ e $c_1 = \frac{1}{3}$. A constante \hat{c}_n , vem do projetor dado pela Eq. (5.9) e ainda não foi determinada. No Lema 5.5.1 abaixo, mostramos que $\hat{c}_1 = 3$.

Demonstração. Deixe $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi$ e $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi'$ pertencerem ao espaço $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$, portanto temos

$$\begin{aligned}
& \left(E^{(n+\frac{1}{2})} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n+\frac{1}{2})} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi' \right) = \\
& = (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n+\frac{1}{2})} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi'). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Onde utilizamos que $E^{(n+\frac{1}{2})} = (E^{(n+\frac{1}{2})})^* = (E^{(n+\frac{1}{2})})^2$, uma vez que é um projetor ortogonal.

Inserindo a Eq. (5.9) na Eq. (5.19) ficamos com,

$$\left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi' \right) - \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \frac{1}{\hat{c}_n} E^{(n)} \Theta_n^* \Theta_n \circ E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi' \right). \quad (5.20)$$

Calculamos o primeiro termo da Eq. (5.20), inserindo no termo o projetor dado pela Eq. (4.34) produz:

$$\begin{aligned} & \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi' \right) = \\ & \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \frac{1}{(n!)} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \right. \\ & \quad \left. \times E_+^{(n)} v_{\sigma(2k'+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \hat{g}_3^{\otimes k'} \otimes \chi' \right). \quad (5.21) \end{aligned}$$

Usando o fato de que \hat{g}_3 é o levantamento para um tensor contravariante de ordem 2, a saber,

$$\hat{g}_3 = \sum_{i'_1 i'_2=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} e_{(i'_1)} \otimes e_{(i'_2)},$$

com respeito a uma base $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ em \mathbb{C}^3 e a mudança de variável:

$$\omega'_\nu = \begin{cases} e_{i'_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k', \\ v_{\sigma(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k' + 1. \end{cases}$$

Então a Eq. (5.21) fica,

$$\begin{aligned} & \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \frac{1}{(n!)} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} \frac{1}{(n!)} \sum_{\lambda' \in S_n} \omega'_{\lambda'(1)} \otimes \cdots \otimes \omega'_{\lambda'(n)} \otimes \chi' \right). \quad (5.22) \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro termo da Eq. (5.20), utilizando o produto escalar definido pela

Eq. (5.8) é dado por:

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi') = \\ & \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \\ & \times \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} \sum_{\lambda \in S_n} (u_{\lambda(1)}, w'_1) \cdots (u_{\lambda(n)}, w'_n) (\chi, \chi'). \end{aligned} \quad (5.23)$$

A última linha da Eq. (5.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 \sum_{\lambda \in S_n} (\overline{u_{\lambda(1)}})_{i'_1} g_3^{i'_1 i'_2} (\overline{u_{\lambda(2)}})_{i'_2} \cdots (\overline{u_{\lambda(2k'-1)}})_{i'_{2k'-1}} g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} (\overline{u_{\lambda(2k')}})_{i'_{2k'}} \times \\ & \times (u_{\lambda(2k'+1)}, v_{\sigma(2k'+1)}) \cdots (u_{\lambda(n)}, v_{\sigma(n)}) (\chi, \chi'). \end{aligned}$$

Finalizamos assim o cálculo da Eq. (5.21) e por consequência mostramos a primeira parte da Eq. (5.18). Como dito anteriormente, esse cálculo é a demonstração para a Eq. (4.38).

Agora, calculamos o segundo termo da Eq. (5.20).

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \frac{1}{\hat{c}_n} E^{(n)} \Theta_n^* \Theta_n \circ E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi') = \\ & = \frac{1}{\hat{c}_n} (\Theta_n E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \Theta_n E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi'). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para isso, vamos calcular primeiro o termo $\Theta_n(E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes \chi'$, depois o resultado será introduzido na Eq. (5.24).

Substituindo o projetor, Eq. (4.34), temos

$$\begin{aligned} & \Theta_n E^{(n)} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes \chi' = \Theta_n \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \right. \\ & \quad \left. \times E_+^{(n)} v_{\sigma(2k'+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \hat{g}_3^{\otimes k'} \otimes \chi' \right) = \\ & = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \\ & \quad \times \underbrace{\Theta_n (E_+^{(n)} v_{\sigma(2k'+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \hat{g}_3^{\otimes k'} \otimes \chi')}_{\Delta} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Novamente vamos utilizar o fato de que \hat{g}_3 é o levantamento para um tensor contravariante de ordem 2, a saber, $\hat{g}_3 = \sum_{i'_1 i'_2=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} e_{(i'_1)} \otimes e_{(i'_2)}$ com respeito a uma base $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ em \mathbb{C}^3 . Então a parte representada por Δ na Eq. (5.25) fica:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Theta_n E_+^{(n)} (v_{\sigma(2k'+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \left(\sum_{i'_1 i'_2=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} e_{(i'_1)} \otimes e_{(i'_2)} \right)^{\otimes k'} \otimes \chi') = \\ &= \Theta_n E_+^{(n)} \left(\sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} e_{i'_1} \otimes \cdots \otimes e_{i'_{2k'}} \otimes v_{\sigma(2k'+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \chi' \right) \end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável,

$$\omega'_\nu = \begin{cases} e_{i'_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k', \\ v_{\sigma(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k' + 1. \end{cases}$$

Temos:

$$\Delta = \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} \frac{1}{(n!)} \sum_{\lambda' \in S_n} \Theta_n (\omega'_{\lambda'(1)} \otimes \cdots \otimes \omega'_{\lambda'(n)} \otimes \chi').$$

Usando Eq. (5.10), chega-se a

$$\Delta = \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} \frac{1}{(n!)} \sum_{\lambda' \in S_n} \omega'_{\lambda'(1)} \otimes \cdots \otimes \omega'_{\lambda'(n-1)} \otimes \omega'_{\lambda'(n)} \chi'. \quad (5.26)$$

Substituindo a Eq. (5.26) em Eq. (5.25), ficamos com

$$\begin{aligned} &\Theta_n E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi' = \\ &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma, \lambda' \in S_n} \sum_{k'=0}^{[n/2]} \sum_{i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} (-1)^{k'} c_{k'} (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times \\ &\qquad \qquad \qquad \omega'_{\lambda'(1)} \otimes \cdots \otimes \omega'_{\lambda'(n-1)} \otimes \omega'_{\lambda'(n)} \chi' \quad (5.27) \end{aligned}$$

Logo a Eq. (5.24) fica:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\hat{c}_n} (\Theta_n E^{(n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \chi, \Theta_n E^{(n)} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \chi') = \\ &\frac{1}{\hat{c}_n} \frac{1}{(n!)^4} \sum_{\sigma, \lambda', \pi, \lambda \in S_n} \sum_{k, k'=0}^{[n/2]} \sum_{i_1 \cdots i_{2k}, i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i_1 i_2} \cdots g_3^{i_{2k-1} i_{2k}} g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} (-1)^{k+k'} c_k \cdot c_{k'} \times \\ &\quad (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) (u_{\pi(1)}, \overline{u_{\pi(2)}}) \cdots (u_{\pi(2k-1)}, \overline{u_{\pi(2k)}}) \times \\ &\quad (\omega_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\lambda(n-1)} \otimes \omega_{\lambda(n)} \chi, \omega'_{\lambda'(1)} \otimes \cdots \otimes \omega'_{\lambda'(n-1)} \otimes \omega'_{\lambda'(n)} \chi') = \cdots \quad (5.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdots &= \frac{1}{\hat{c}_n(n!)^4} \sum_{\sigma, \lambda', \pi, \lambda \in S_n} \sum_{k, k'=0}^{[n/2]} (-1)^{k+k'} c_{k, k'} \times \\
&\quad (\overline{v_{\sigma(1)}}, v_{\sigma(2)}) \cdots (\overline{v_{\sigma(2k'-1)}}, v_{\sigma(2k')}) \times (u_{\pi(1)}, \overline{u_{\pi(2)}}) \cdots (u_{\pi(2k-1)}, \overline{u_{\pi(2k)}}) \times \\
&\quad \sum_{i_1 \cdots i_{2k}, i'_1 \cdots i'_{2k'}=1}^3 g_3^{i_1 i_2} \cdots g_3^{i_{2k-1} i_{2k}} g_3^{i'_1 i'_2} \cdots g_3^{i'_{2k'-1} i'_{2k'}} (\omega_{\lambda(1)}, \omega'_{\lambda'(1)}) \cdots (\omega_{\lambda(n-1)}, \omega'_{\lambda'(n-1)}) (\omega_{\lambda(n)} \chi, \omega'_{\lambda'(n)} \chi').
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Em que

$$\omega_\nu = \begin{cases} e_{i_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k, \\ u_{\pi(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k+1. \end{cases}$$

$$\omega'_\nu = \begin{cases} e_{i'_\nu}, & \text{se } \nu \leq 2k', \\ v_{\sigma(\nu)}, & \text{se } \nu \geq 2k'+1. \end{cases}$$

Utilizamos o produto escalar definido de acordo com a Eq. (5.8).

Portanto, inserindo a Eq. (5.23) e a Eq. (5.29) na Eq. (5.20) temos o produto escalar definido no pequeno espaço de Hilbert, Eq. (5.14). \square

A última linha da Eq. (5.29), fornece: 1 fator da forma $\{g_3^{ii} g_3^{i'i'}\}$, $(n-1)$ -fatores da forma $\{g_3^{ii'}, v^i, \bar{u}^{i'} \text{ e } (u, v)\}$ e 1 fator da forma $\{(\sigma_i \chi, \sigma_{i'} \chi'), (\sigma_i \chi, \underline{v} \chi'), (\underline{u} \chi, \sigma_{i'} \chi'), (\underline{u} \chi, \underline{v} \chi')\}$. Como não podem sobrar índices i e i' , as únicas combinações possíveis entre esses fatores:

$$\{g_3^{ii} g_3^{i'i'}\} \times \{g_3^{ii'}, v^i, \bar{u}^{i'}, (u, v)\} \times \{(\sigma_i \chi, \sigma_{i'} \chi'), (\sigma_i \chi, \underline{v} \chi'), (\underline{u} \chi, \sigma_{i'} \chi'), (\underline{u} \chi, \underline{v} \chi')\},$$

são da forma:

$$\{(\chi, \chi'), (\underline{u} \chi, \underline{v} \chi'), (\bar{v} \chi, \bar{u} \chi'), (\bar{v} \chi, \underline{v} \chi'), (\underline{u} \chi, \bar{u} \chi')\}.$$

Com a Eq. (5.18) podemos calcular a função de dois pontos sobre a concha definida pela Eq. (5.17) em que os u e v correspondem aos intertwiners do spin-um (Bósons), χ e χ' ao intertwiners do campo de Dirac localizado tipo-ponto.

5.5 Campo de Rarita-Schwinger $s = \frac{3}{2}$

Colocamos fórmulas explícitas para o caso de $n = 1$, ou seja, para o spin $s = \frac{3}{2}$. O campo apresenta um índice spinorial e um índice vetorial, daí a escolha do seu nome por campo spinor-vetor. Começamos com os campos com localização tipo-string, denotado por $\Psi_{\mu,\alpha}$ e que da mesma forma que seu correspondente campo localizado tipo-ponto, $\Psi_{\mu,\alpha}^p$, será denominado de campo de Rarita-Schwinger [42]⁷⁴.

Determinamos o intertwiner correspondente para o campo spinor-vetor localizado tipo-string o qual irá nos mostrar que o campo spinor-vetor tipo-string difere do seu correspondente localizado tipo-ponto por uma derivada de um campo tipo-string. De acordo com o Lema 5.3.5, nosso intertwiner de Wigner, $v_{\mu,\alpha}^{(\frac{3}{2})}(p, e)$, para o campo spinor-vetor localizado tipo-string pode ser da seguinte forma:

$$v_{\mu,\alpha}^{(\frac{3}{2})}(p, e) = E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_{\mu}(p, e) \otimes v_{\alpha}^D(p)), \quad (5.30)$$

com $v_{\mu}(p, e)$ o intertwiner para o campo de spin-um, dado pela Eq. (4.19), $v_{\alpha}^D(p)$ o intertwiner para o campo de Dirac puntiforme, dado pela Eq. (5.1) e $E^{(\frac{3}{2})}$ o projetor para o subespaço com spin $s = \frac{3}{2}$.

Para esse caso, o projetor $E^{(n=1)}$ dado pela Eq. (4.34) é a unidade-1 e a constante \hat{c}_n do projetor $E^{(n+\frac{1}{2})}$ é $\hat{c}_1 = 3$.⁷⁵ Portanto, o projetor definido pela Eq. (5.9) é dado por:

$$E^{(\frac{3}{2})} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3} \Theta_1^* \Theta_1 \right). \quad (5.31)$$

Com

$$\Theta_1(u_1 \otimes \chi) = \underline{u}_1 \chi \quad e \quad \Theta_1^* = \sum_{k=1}^3 e_k \otimes \sigma_k \chi,$$

para todo $u_1 \in \mathbb{C}^3$ e $\chi \in \mathbb{C}^2$.

⁷⁴Denominamos tanto o campo spinor-vetor com localização tipo-string quanto tipo-ponto por campo Rarita-Schwinger e especificamos quando não estiver claro o tipo de localização que o campo tem.

⁷⁵A demonstração que $\hat{c}_1 = 3$ será dada no Lema 5.5.1 abaixo quando mostramos que o termo $3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1$ é uma isometria parcial.

Substituindo o projetor dado pela Eq. (5.31) e o intertwiner para spin-um tipo-string, Eq. (4.19), na Eq. (5.30) temos que $v_{\mu,\alpha}^{(\frac{3}{2})}(p, e)$ é da forma⁷⁶:

$$v_{\mu,\alpha}^{(\frac{3}{2})}(p, e) = v_{\mu,\alpha}^p(p) + ip_{\mu}v'_{\alpha}(p, e), \quad (5.32)$$

com

$$v_{\mu,\alpha}^p(p) = v_{\mu}^p(p) \otimes v_{\alpha}^D(p) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 e_k \otimes \sigma_k \underbrace{v_{\mu}^p(p)} v_{\alpha}^D(p)$$

e

$$v'_{\alpha}(p, e) = \frac{i}{p \cdot e - i\varepsilon} (v^p(p)e \otimes v_{\alpha}^D(p)) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 e_k \otimes \sigma_k \underbrace{v^p(p)} e v_{\alpha}^D(p).$$

Onde o $v_{\mu,\alpha}^p(p)$ corresponde ao intertwiner do campo spinor-vetor localizado tipo-ponto (campo de Rarita-Schwinger), denotado por $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$, e o $v'_{\alpha}(p, e)$ ao intertwiner de um campo localizado tipo-string, denotado por $\phi_{\alpha}(x, e)$, que se transforma como o campo de Dirac, mas representa um campo com spin- $\frac{3}{2}$.

Portanto, a Eq. (5.32) nos mostra que o campo Rarita-Schwinger com localização tipo-string $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ difere do campo Rarita-Schwinger com localização tipo-ponto $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$ por uma derivada de um campo de escolha tipo-string, comprovando a afirmação feita pela Eq. (1.5),

$$\Psi_{\mu,\alpha}(x, e) = \Psi_{\mu,\alpha}^p(x) + \partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x, e). \quad (5.33)$$

Como dito no início dessa seção, para o campo de Rarita-Schwinger temos o caso particular, $n = 1$, logo $\mathfrak{h}^n \otimes \mathbb{C}^2 = \mathfrak{h}^1 \otimes \mathbb{C}^2$, porém esse caso precisa de um melhor detalhamento, então, temos que $E^{(\frac{3}{2})}$ deve satisfazer a relação de intertwiner,

$$D^{(\frac{3}{2})} \circ E^{(\frac{3}{2})} = E^{(\frac{3}{2})} \circ (D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})}).$$

Como é bem conhecido, o produto tensorial das representações $D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$ decompõe-se na soma direta de representações irredutíveis,

$$D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(\frac{1}{2})} \oplus D^{(\frac{3}{2})}. \quad (5.34)$$

⁷⁶Na seção 5.6.2, determinamos a expressão geral para os intertwiners dos campos spinor-tensor localizado tipo-string, Eq. (5.84), sendo que, através dela, podemos verificar o intertwiner do campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-string, fazendo $n = 1$.

Desejamos identificar as sub-representações correspondentes no espaço de representação de $D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})}$, ou seja, dentro de $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$. Já sabemos que o mapa Θ_1 de $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ em \mathbb{C}^2 que faz o intertwiner entre as respectivas representações, é

$$\Theta_1 \mathbf{z} \otimes \chi \doteq \mathbf{z}\chi.$$

Aqui, $\chi \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, e

$$\mathbf{z}\chi \doteq \sum_{i=1}^3 z_i \sigma_i.$$

Calculamos o adjunto do mapa $(\Theta_1)^* : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$, definido por

$$(\psi, (\Theta_1)^* \chi) \doteq (\Theta_1 \psi, \chi), \quad \forall \psi \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2, \chi \in \mathbb{C}^2 \quad (5.35)$$

e mostramos que o mapa normalizado $w_1 \doteq 3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1$ é uma isometria parcial, isto é,

$$w_1 w_1^* = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^2}, \quad w_1^* w_1 = E_{\text{Im} \Theta_1^*}^{(\frac{1}{2})}, \quad (5.36)$$

onde $E_{\text{Im} \Theta_1^*}^{(\frac{1}{2})}$ é um projetor ortogonal sobre a imagem de Θ_1^* em $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$. Definimos por $\{e_{(+)}, e_{(-)}\}$ a base canônica em \mathbb{C}^2 , e por $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ a base canônica em \mathbb{C}^3 . Note que para $\chi, \chi' \in \mathbb{C}^2$ temos $(\chi, \chi') = \sum_{\varepsilon} \bar{\chi}_{\varepsilon} \chi'_{\varepsilon}$, onde as componentes são dadas por $\chi_{\varepsilon} \doteq (e_{(\varepsilon)}, \chi)$.

Lema 5.5.1. (i) O adjunto $(\Theta_1)^*$ é dado por

$$(\Theta_1)^* \chi = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{k=1}^3 (\sigma_k \chi)_{\varepsilon} e_{(k)} \otimes e_{(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^3 e_{(k)} \otimes \sigma_k \chi \quad (5.37)$$

(ii) O mapa $3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1$ é uma isometria parcial.

Demonstração. (Adjunto): considere $\mathbf{z} \otimes \varphi \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$. Então

$$(\Theta_1 \mathbf{z} \otimes \varphi, \chi) = (\mathbf{z}\varphi, \chi) = (\varphi, (\mathbf{z})^* \chi) = \sum_{k=1}^3 \bar{z}_k (\varphi, \sigma_k \chi) = \sum_{k=1}^3 \bar{z}_k \sum_{\varepsilon} \bar{\varphi}_{\varepsilon} (\sigma_k \chi)_{\varepsilon}$$

Usamos o fato de que as matrizes de Pauli são hermitianas.

Por outro lado,

$$\left(\mathbf{z} \otimes \varphi, \sum_{\varepsilon, k} (\sigma_k \chi)_\varepsilon e_{(k)} \otimes e_{(\varepsilon)} \right) = \sum_{\varepsilon, k} \bar{z}_k (\sigma_k \chi)_\varepsilon \overline{\varphi_\varepsilon}.$$

Logo os dois lados coincidem, portanto, fica provado a Eq. (5.37).

(Isometria parcial): pegue $\chi \in \mathbb{C}^2$. Então

$$\Theta_1(\Theta_1)^* \chi = \sum_k (\sigma_k \chi)_\varepsilon \sigma_k e_{(\varepsilon)} = \sum_k \sigma_k (\sigma_k \chi)_\varepsilon e_{(\varepsilon)} = \sum_k \sigma_k \sigma_k \chi = 3\chi.$$

Usamos o fato de que $\underline{e_{(k)}} = \sigma_k$.

Isso prova o lado esquerdo da Eq. (5.36). O lado direito é uma consequência do lado esquerdo. \square

Por construção, a imagem de Θ_1^* é um subespaço bidimensional de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ que é invariante sob $D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(1)}$ e $w_1^* w_1$ é o projetor sobre ele. Esta é, necessariamente, a parte $D^{(\frac{1}{2})}$ da decomposição (5.34). Consequentemente, temos:

Lema 5.5.2. *O projetor sobre o subespaço invariante 4-dimensional de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ que carrega a representação $D^{(\frac{3}{2})}$ é dado por*

$$E^{(\frac{3}{2})} \doteq \mathbf{1} - w_1^* w_1$$

para $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^3$ e $\chi, \chi' \in \mathbb{C}^2$ vale

$$\left(E^{(\frac{3}{2})} \mathbf{z} \otimes \chi, E^{(\frac{3}{2})} \mathbf{z}' \otimes \chi' \right) = (\mathbf{z}, \mathbf{z}') (\chi, \chi') - \frac{1}{3} (\underline{\mathbf{z}}\chi, \underline{\mathbf{z}'}\chi'). \quad (5.38)$$

Com essa fórmula, Eq. (5.38), podemos calcular a função de dois pontos do campo de Rarita-Schwinger, $\text{spin } \frac{3}{2}$, tanto no caso de localização tipo-ponto como do tipo-string. Usando a definição dada pela Eq. (5.17) e substituindo os intertwiners correspondentes.

Demonstração. Como $E^{(\frac{3}{2})} \doteq \mathbf{1} - w_1^* w_1$ é um projetor, temos

$$\left(E^{(\frac{3}{2})} \mathbf{z} \otimes \chi, E^{(\frac{3}{2})} \mathbf{z}' \otimes \chi' \right) = \left(\mathbf{z} \otimes \chi, E^{(\frac{3}{2})} \mathbf{z}' \otimes \chi' \right) = \left(\mathbf{z} \otimes \chi, (\mathbf{1} - w_1^* w_1) \mathbf{z}' \otimes \chi' \right) = \quad (5.39)$$

$$= (\mathbf{z} \otimes \chi, \mathbf{z}' \otimes \chi') - (\mathbf{z} \otimes \chi, (w_1^* w_1) \mathbf{z}' \otimes \chi') = (\mathbf{z}, \mathbf{z}')(\chi, \chi') - (\mathbf{z} \otimes \chi, (w_1^* w_1) \mathbf{z}' \otimes \chi')$$

Falta somente mostrar que

$$(\mathbf{z} \otimes \chi, (w_1^* w_1) \mathbf{z}' \otimes \chi') = \frac{1}{3} (\mathbf{z}\chi, \mathbf{z}'\chi').$$

Como $w_1 \doteq 3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1$, temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{z} \otimes \chi, (w_1^* w_1) \mathbf{z}' \otimes \chi') &= (w_1 \mathbf{z} \otimes \chi, w_1 \mathbf{z}' \otimes \chi') = \left(3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1 \mathbf{z} \otimes \chi, 3^{-\frac{1}{2}} \Theta_1 \mathbf{z}' \otimes \chi' \right) = \\ &= \frac{1}{3} (\Theta_1 \mathbf{z} \otimes \chi, \Theta_1 \mathbf{z}' \otimes \chi') = \dots \end{aligned}$$

Sendo, $\Theta_1 \mathbf{z} \otimes \chi \doteq \mathbf{z}\chi$.

$$= \dots \frac{1}{3} (\mathbf{z}\chi, \mathbf{z}'\chi').$$

com isso mostramos a Eq. (5.38) □

Durante o desenvolvimento determinamos a constante $\hat{c}_1 = 3$. Podemos usar a Eq. (5.18) com $n = 1$ para determinar a expressão que nos permita calcular a função de dois pontos para o campo de Rarita-Schwinger, entretanto, durante o desenvolvimento devemos calcular a constante \hat{c}_1 , constante essa que agora sabemos ser, $\hat{c}_1 = 3$.

5.5.1 Função de dois pontos para o Rarita-Schwinger tipo-ponto

Calculamos a função de dois pontos para o caso do campo spinor-vetor localizado tipo-ponto, campo Rarita-Schwinger. Para tal, utilizamos a intertwiner de Wigner correspondente ao spin 1, a saber, $v_\mu^p(p)$ e o intertwiner de Dirac $v_\alpha^D(p)$. De acordo com a Eq. (5.16) e Eq. (5.17), temos respectivamente:

$$\langle \Psi_{\mu,\alpha}(x) \overline{\Psi}_{\mu',\alpha'}(x') \rangle = \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip(x-x')} M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) \quad (5.40)$$

e

$$M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) = (v_{\mu,\alpha}^c(p), \check{v}_{\mu',\alpha'}^c(p)). \quad (5.41)$$

De acordo com a seção 5.4, ficamos com

$$M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) = (E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_\mu^p(p) \otimes v_\alpha^{Dc}(p)), E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_{\mu'}^p(p) \otimes \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))) = \quad (5.42)$$

$$(v_\mu^p(p), v_{\mu'}^p(p)) (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - \frac{1}{3} \underbrace{(v_\mu^p(p)v_\alpha^{Dc}(p), v_{\mu'}^p(p)\check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))}_{\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p)}. \quad (5.43)$$

Utilizamos a Eq. (5.38).

Observe que o primeiro fator do primeiro termo da Eq. (5.43) corresponde justamente à função de dois pontos do campo de Proca, Eq. (4.12),

$$(v_\mu^p(p), v_{\mu'}^p(p)) = -g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}. \quad (5.44)$$

O segundo fator do primeiro termo refere-se justamente à função de dois pontos do campo de Dirac localizado tipo-ponto que também já temos calculado, Eq. (5.5),

$$(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) = \left(\not{p} + m \right)_{\alpha\alpha'}. \quad (5.45)$$

Portanto, falta apenas calcular o termo

$$\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) \doteq \underbrace{(v_\mu^p(p)v_\alpha^{Dc}(p))}_{\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p)} \underbrace{(v_{\mu'}^p(p)\check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))}_{\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p)}. \quad (5.46)$$

Para calcular esse termo, colocamos algumas definições e ferramentas.

Lembrando que o intertwiner do campo de Dirac, veja Eqs. (5.2) e (5.4) é:

$$v_\alpha^{Dc}(p) \doteq \sqrt{m}(B_p^* \quad B_p^{-1})e_\alpha$$

$$\check{v}_\alpha^{Dc}(p) \doteq \sqrt{m}(B_p^{-1} \quad B_p^*)e_\alpha$$

Com e_α definido de acordo com a Eq. (5.6). Vale lembrar que o intertwiner para spin-um para o momento de referencia \bar{p} é definido por $\hat{v}^p z \doteq i \underline{z}$, onde escrevemos $\underline{z} \doteq (z^1, z^2, z^3)$ se $z = (z^0, \dots, z^3)$, portanto, $\hat{v}^p \underline{z} = i(\underline{z} - z^0) = -i(\tilde{z} - z^0)$, o que nos produzem as seguintes relações abaixo:

Lema 5.5.3.

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_\mu^p(p) &= i(B_p^{-1}e_{(\mu)} - \frac{p_\mu}{m}) = -i(\widetilde{B_p^{-1}e_{(\mu)}} - \frac{p_\mu}{m}) \\ \widetilde{v^p(p)e} &= i(\widetilde{B_p^{-1}e} - \frac{p \cdot e}{m}) = -i(\widetilde{B_p^{-1}e} - \frac{p \cdot e}{m})\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_\mu^p(p) \cdot v_\alpha^{Dc}(p) &= i\sqrt{m}(B_p^{-1}e_{(\mu)} - \frac{p_\mu}{m}B_p^*)e_\alpha^a - i\sqrt{m}(B_p^*\widetilde{e_{(\mu)}} - \frac{p_\mu}{m}B_p^{-1})e_\alpha^b \\ \widetilde{v_{\mu'}^p(p)} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p) &= -i\sqrt{m}(B_p^*\widetilde{e_{(\mu')}} - \frac{p_{\mu'}}{m}B_p^{-1})e_{\alpha'}^a + i\sqrt{m}(B_p^{-1}e_{(\mu')} - \frac{p_{\mu'}}{m}B_p^*)e_{\alpha'}^b \\ \widetilde{v^p(p)e} \cdot v_\alpha^{Dc}(p) &= i\sqrt{m}(B_p^{-1}e - \frac{p \cdot e}{m}B_p^*)e_\alpha^a - i\sqrt{m}(B_p^*\widetilde{e} - \frac{p \cdot e}{m}B_p^{-1})e_\alpha^b \\ \widetilde{v^p(p)e'} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p) &= -i\sqrt{m}(B_p^*\widetilde{e'} - \frac{p \cdot e'}{m}B_p^{-1})e_{\alpha'}^a + i\sqrt{m}(B_p^{-1}e' - \frac{p \cdot e'}{m}B_p^*)e_{\alpha'}^b\end{aligned}$$

Para se chegar as relações do Lema 5.5.3, utilizamos que $v_\mu^p(p) = \hat{v}^p B_p^{-1}e_{(\mu)}$, $(B_p^{-1}e_{(\mu)})^0 = \frac{\bar{p}B_p^{-1}e_{(\mu)}}{m} = \frac{p_\mu}{m}$, $(B_p^{-1}e)^0 = \frac{\bar{p}B_p^{-1}e}{m} = \frac{p \cdot e}{m}$, o fato de que B_p age no espaço de Minkowski como, $B_p \bar{p} := \Lambda(B_p)\bar{p} = p$ e por último as Eq.s (2.1) e (2.2).

Lema 5.5.4. *Temos também as seguintes relações:*

$$\not{a} \doteq a_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \underline{a} \\ \underline{\tilde{a}} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^\mu \doteq \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 \doteq \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tilde{a} \doteq a_0 - a^k \sigma^k = a_\mu \sigma^\mu = a^\mu \sigma_\mu \text{ e } \underline{a} \doteq a_0 + a^k \sigma^k = a^\mu \sigma^\mu = a_\mu \sigma_\mu$$

Em que $\sigma_0 = \sigma^0 \doteq \mathbf{1}$, $\sigma^k \doteq$ matrizes de Pauli, $\sigma^k = -\sigma_k$ e $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$.

$$\not{a} \not{b} = \begin{pmatrix} \underline{a}\underline{b} & 0 \\ 0 & \underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}} \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\not{a} \not{b} \not{c} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{a}\underline{b}\underline{c} \\ \underline{\tilde{a}}\underline{\tilde{b}}\underline{\tilde{c}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

E $\not{a} \not{b} = -\not{b} \not{a} + a \cdot b$. Por último o fato de que $\gamma^\mu = \not{e}^{(\mu)}$ e $\gamma_\mu = \not{e}_{(\mu)}$.

As demonstrações dos Lemas (5.5.3) e (5.5.4) são simples e diretas.

Utilizando os Lemas (5.5.3) e (5.5.4), temos:

Lema 5.5.5.

$$\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) = \left[\left(-\gamma_\mu \gamma_{\mu'} + \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu}{m} - \frac{p_\mu \gamma_{\mu'}}{m} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2} \right) (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'} \right] \quad (5.49)$$

Substituindo as equações (5.44), (5.45) e (5.49) na equação (5.43), produzimos:

$$M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p) = \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}\right) (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'} - \frac{1}{3} \left[\left(-\gamma_\mu \gamma_{\mu'} + \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu}{m} - \frac{p_\mu \gamma_{\mu'}}{m} + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}\right) (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'} \right] \quad (5.50)$$

5.5.2 Função de dois pontos para o Rarita-Schwinger tipo-string

Calculamos a função de dois pontos para o campo de Rarita-Schwinger localização tipo-string, dada pela Eq. (5.16) e sua respectiva função de dois pontos sobre a concha, Eq. (5.17). Temos,

$$\langle \Psi_{\mu\alpha}(x, e) \overline{\Psi}_{\mu'\alpha'}(x', e') \rangle = \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip(x-x')} M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') \quad (5.51)$$

e

$$M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') = (v_{\mu,\alpha}^c(p, e), \check{v}_{\mu',\alpha'}^c(p, e')). \quad (5.52)$$

De acordo com a seção 5.4,

$$M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') = (E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_\mu(p, e) \otimes v_\alpha^{Dc}(p), E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_{\mu'}(p, e') \otimes \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))) = \quad (5.53)$$

$$(v_\mu(p, e), v_{\mu'}(p, e')) (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - \frac{1}{3} \underbrace{(v_\mu(p, e) v_\alpha^{Dc}(p), v_{\mu'}(p, e') \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))}_{\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e')} \quad (5.54)$$

Utilizamos a Eq. (5.38).

O primeiro fator do primeiro termo é justamente à função de dois pontos do potencial vetor localizado tipo-string, $A_\mu(p, e)$, que é dada pela Eq. (4.21),

$$(v_\mu(p, e), v_{\mu'}(p, e')) = -g_{\mu\mu'} - \frac{p_\mu p_{\mu'} e \cdot e'}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu e_{\mu'}}{(p \cdot e - i\varepsilon)} + \frac{p_{\mu'} e'_\mu}{(p \cdot e' + i\varepsilon)}. \quad (5.55)$$

O segundo fator do primeiro termo refere-se justamente à função de dois pontos do campo de Dirac localizado tipo-ponto que também já temos calculado, Eq. (5.5),

$$(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) = (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'}. \quad (5.56)$$

Portanto, falta apenas calcular o fator $\widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e')$. Substituindo o intertwiner do A_μ , Eq. (4.19), temos:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') &= \\ &= (\underline{v_\mu^p(p)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - \frac{p_{\mu'}}{(p.e' + i\varepsilon)} (\underline{v_\mu^p(p)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v^p(p)} e' \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - \\ &- \frac{p_\mu}{(p.e - i\varepsilon)} (\underline{v^p(p)} e v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) + \frac{p_\mu p_{\mu'}}{(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} (\underline{v^p(p)} e v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v^p(p)} e' \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)). \end{aligned}$$

Utilizando os Lemas 5.5.3 e 5.5.4, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') &= m. \left[\frac{p_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{(p.e - i\varepsilon)} + \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e}'}{(p.e' + i\varepsilon)} - \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e}'}{(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} - \gamma_\mu \gamma_{\mu'} + \frac{\gamma_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{m} \right. \\ &- \left. \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e} \not{e}'}{m(p.e' + i\varepsilon)} - \frac{p_\mu \not{e} \not{e} \gamma_{\mu'}}{m(p.e - i\varepsilon)} + \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e} \not{e}'}{m(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Substituindo as equações (5.55), (5.56) e (5.57) na equação (5.54), temos:

$$\begin{aligned} M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') &= m. \left[\left(-g_{\mu\mu'} - \frac{p_\mu p_{\mu'} e.e'}{(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu e_{\mu'}}{(p.e - i\varepsilon)} + \frac{p_{\mu'} e'_\mu}{(p.e' + i\varepsilon)} \right) \left(\not{e} + \mathbf{1} \right) \right. \\ &- \frac{p_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{3(p.e - i\varepsilon)} - \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e}'}{3(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e}'}{3(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{\gamma_\mu \gamma_{\mu'}}{3} + \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e} \not{e}'}{3m(p.e' + i\varepsilon)} \\ &+ \left. \frac{p_\mu \not{e} \not{e} \gamma_{\mu'}}{3m(p.e - i\varepsilon)} - \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e} \not{e}'}{3m(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} - \frac{\gamma_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{3m} \right]_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Agora, substituindo a (5.58) na equação (5.51), produzimos a função de dois pontos para o campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-string.

Utilizando os fatos $\not{a} \not{b} = -\not{b} \not{a} + a \cdot b$ e $\gamma_\mu = \not{e}_{(\mu)}$, pode-se verificar que a função de dois pontos sobre a concha para o caso de Rarita-Schwinger localizado tipo-string é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_{\mu\alpha,\mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e') &= \left[\left(-g_{\mu\mu'} - \frac{p_\mu p_{\mu'} e.e'}{(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu e_{\mu'}}{(p.e - i\varepsilon)} + \frac{p_{\mu'} e'_\mu}{(p.e' + i\varepsilon)} - \frac{p_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{3(p.e - i\varepsilon)} \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e}'}{3(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e}'}{3(p.e - i\varepsilon)(p.e' + i\varepsilon)} + \frac{\gamma_\mu \gamma_{\mu'}}{3} \right) \left(\not{e} + m \right) \right]_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

De acordo com a Eq. (1.4) e as [20, Proposições 7 e 9], temos:

Proposição 5.5.6. *As funções de dois pontos de $M^{\frac{3}{2}}(p)$, Eq. (5.50) e $M^{\frac{3}{2}}(p, e, e')$, Eq. (5.59), têm grau de escala 5 e 3, respectivamente, isso implica que a dimensão de*

escala dos campos $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$ e $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ são $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$, respectivamente. O campo $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$ não tem limite para massa zero enquanto o $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ tem.

Vimos que o campo quântico spinor-vetor localizado tipo-ponto para partículas massivas livres com spin $s = \frac{3}{2}$ que atua sobre o espaço (Hilbert) Fock no espaço de uma partícula correspondente ao campo Rarita-Schwinger é o $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$, cujo intertwiner correspondente é $v_{\mu,\alpha}^p(p) = E^{(\frac{3}{2})} \circ v_{\mu}^p(p) \otimes v_{\alpha}^D(p)$. A função de dois pontos, veja Eq. (5.50), tem um termo de grau 3 no momento que é responsável pelo mau comportamento energético do campo $\Psi_{\mu,\alpha}^p$: ele tem dimensão de escala $\frac{5}{2}$.

O campo Rarita-Schwinger localizado tipo-ponto tem divergência zero e satisfaz a equação:

$$\partial^{\mu}\Psi_{\mu,\alpha}^p(x) = 0, \quad \partial_{\mu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu}(x) + m^2\Psi_{\alpha}^{p\nu}(x) = 0, \quad (5.60)$$

onde \mathcal{F} é o que denominamos de spinor-tensor intensidade de campo, $\mathcal{F} = d\Psi^p$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}(x) \doteq \partial_{\mu}\Psi_{\nu,\alpha}^p(x) - \partial_{\nu}\Psi_{\mu,\alpha}^p(x). \quad (5.61)$$

Demonstração. O fato de que o campo tem divergência zero, $\partial^{\mu}\Psi_{\mu,\alpha}^p(x) = 0$, segue da Eq. (4.13). Portanto temos,

$$ip^{\mu}v_{\mu,\alpha}^p(p) = ip^{\mu}E^{(\frac{3}{2})} \circ v_{\mu}^p(p) \otimes v_{\alpha}^D(p) = E^{(\frac{3}{2})} \circ ip^{\mu}v_{\mu}^p(p) \otimes v_{\alpha}^D(p),$$

mas a Eq. (4.13) implica que $p^{\mu}v_{\mu}^p(p) = 0$, o que produz

$$ip^{\mu}v_{\mu,\alpha}(x) = E^{(\frac{3}{2})} \circ (0 \otimes v_{\alpha}^D(p)) = 0. \quad (5.62)$$

Sendo $\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu}(x) \doteq g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\mathcal{F}_{\mu'\nu',\alpha}(x)$, ficamos com $\partial_{\mu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}(\partial_{\mu'}\Psi_{\nu',\alpha}^p(x) - \partial_{\nu'}\Psi_{\mu',\alpha}^p(x))$. Usando o fato de que o $\partial^{\mu'}\Psi_{\mu',\alpha}^p(x) = 0$ e que como qualquer campo livre com massa m $\Psi_{\alpha}^{p\nu}(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon, $\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Psi_{\alpha}^{p\nu}(x) = -m^2\Psi_{\alpha}^{p\nu}(x)$, produzimos: $\partial_{\mu}\mathcal{F}_{\alpha}{}^{\mu\nu}(x) + m^2\Psi_{\alpha}^{p\nu}(x) = 0$. \square

O spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}$ tem a mesma dimensão de escala que o campo de Rarita-Schwinger, $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$; na verdade, sua função de dois pontos sobre a conha

é um polinômio não homogêneo em p de grau 3, veja Eq. (5.71), portanto, a dimensão de escala do spinor-tensor intensidade de campo é $\frac{5}{2}$.

A versão localizada em string $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ do campo spinor-vetor com spin- $\frac{3}{2}$ atuando no mesmo espaço de Hilbert, que tem uma dimensão de escala igual a $\frac{3}{2}$, depois de integrado com função de teste em e , tem o mesmo spinor-tensor intensidade de campo do campo $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$, isto é, satisfaz a identidade⁷⁷

$$\partial_\mu \Psi_{\nu,\alpha}(x, e) - \partial_\nu \Psi_{\mu,\alpha}(x, e) = \mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}(x). \quad (5.63)$$

De fato, as duas versões dos campos spinor-vetor diferem por uma derivada de um campo quântico de “Dirac” $\phi_\alpha(x, e)$, o qual denominamos de “*campo de escolta*”:⁷⁸

$$\Psi_{\mu,\alpha}(x, e) = \Psi_{\mu,\alpha}^p(x) + \partial_\mu \phi_\alpha(x, e). \quad (5.64)$$

Inserindo a Eq. (5.64) na Eq. (5.63) comprovamos a afirmação de que o $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ tem o mesmo spinor-tensor intensidade de campo do spinor-vetor $\Psi_{\mu,\alpha}^p(x)$. O campo localizado tipo-string, ϕ_α , se transforma como um campo de Dirac, mas corresponde a um campo que carrega partícula com spin- $\frac{3}{2}$.

Na próxima subseção, construiremos $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ e $\phi_\alpha(x, e)$ como integrais de linha sobre o spinor-tensor intensidade de campo e sobre o campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-ponto, respectivamente.

5.5.3 Definição como integrais de linha sobre campos spinor-tensor com localização tipo-ponto

Uma solução formal para Eq. (5.63), de acordo com o Lema de Poincaré, é obtida pela integral de linha

$$\Psi_{\mu,\alpha}(x, e) \doteq \int_0^\infty ds \mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}(x + se) e^\nu, \quad (5.65)$$

⁷⁷As derivadas parciais ∂_μ sempre se referem à variável x .

⁷⁸Fato já demonstrado na Seção 5.5.

onde $e \in H$. De fato, inserindo (5.61) dentro de $\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}$ e usando a identidade formal

$$\int_0^\infty ds e^\nu \partial_\nu \Psi_{\mu,\alpha}(x + se) = -\Psi_{\mu,\alpha}(x), \quad (5.66)$$

é prontamente verificado que os dois campos spinor-vetor Ψ e Ψ^p diferem formalmente por uma derivada de um campo tipo-string como antecipado pela Eq. (5.64), em que o campo $\phi_\alpha(x, e)$ é definido por

$$\phi_\alpha(x, e) \doteq \int_0^\infty ds \Psi_{\nu,\alpha}^p(x + se) e^\nu. \quad (5.67)$$

Assim, $\Psi_{\mu,\alpha}$ deve realmente satisfazer a Eq. (5.63). Note que as integrais (5.65) e (5.67) existem pela Prop. 3.4.2 e que a identidade (5.66) é rigorosa porque $\Psi_{\mu,\alpha}^p$ vai para zero para grandes argumentos do tipo-espaco no sentido de elementos de matriz entre estados locais.

Mostra-se a Eq. (5.64).

Demonstração. Inserindo a Eq. (5.61) na Eq. (5.65), temos

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu,\alpha}(x, e) &= \int_0^\infty ds \partial_\mu \Psi_{\nu,\alpha}^p(x + s.e) e^\nu - \int_0^\infty ds \partial_\nu \Psi_{\mu,\alpha}^p(x + s.e) e^\nu = \\ &= \partial_\mu \int_0^\infty ds \Psi_{\nu,\alpha}^p(x + s.e) e^\nu - \int_0^\infty ds e^\nu \partial_\nu \Psi_{\mu,\alpha}^p(x + s.e) \end{aligned}$$

Observe que na segunda integral temos uma derivada direcional, portanto

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu,\alpha}(x, e) &= \partial_\mu \phi_\alpha(x, e) - \int_0^\infty ds \frac{d}{ds} \Psi_{\mu,\alpha}^p(x + s.e) = \partial_\mu \phi_\alpha(x, e) - \Psi_{\mu,\alpha}^p(x + s.e) \Big|_0^\infty = \\ &= \partial_\mu \phi_\alpha(x, e) - \Psi_{\mu,\alpha}^p(x + s.e)|_{s=\infty} + \Psi_{\mu,\alpha}^p(x) = \partial_\mu \phi_\alpha(x, e) + \Psi_{\mu,\alpha}^p(x). \end{aligned}$$

□

Uma vez que o campo de Rarita-Schwinger $\Psi_{\mu,\alpha}^p$ tem divergência zero e o campo de escolta ϕ_α satisfaz a equação de Klein-Gordon (como qualquer campo livre com massa m), existe a relação:

$$\partial^\mu \Psi_{\mu,\alpha}(x, e) + m^2 \phi_\alpha(x, e) = 0. \quad (5.68)$$

Basta aplicar ∂^μ na Eq. (5.64) e temos a relação Eq. (5.68).

Uma propriedade adicional interessante do nosso campo spinor-vetor é que ele é ortogonal à direção da string,

$$\Psi_{\mu,\alpha}(x, e) e^\mu = 0, \quad (5.69)$$

que decorre da antissimetria do spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}$. Essa condição também pode ser mostrada diretamente através do intertwiner do campo $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$. Isso é uma reminiscência da condição do gauge axial com a diferença, no entanto, de que aqui ele é automaticamente satisfeito pela construção e que o campo deve ser considerado uma distribuição em e .

Lema 5.5.7. *A função intertwiner de $v^{\mathcal{F}}$ do spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}$ é dada por*

$$v_{\mu\nu,\alpha}^{\mathcal{F}}(p) = i(p_\mu v_{\nu,\alpha}^p(p) - p_\nu v_{\mu,\alpha}^p(p)) \equiv E^{(\frac{3}{2})}(v_{\mu\nu}^F(p) \otimes v_\alpha^D(p)). \quad (5.70)$$

E seguindo nossas definições, temos:

$$v_{\mu\nu,\alpha}^{\mathcal{F}c}(p) \doteq i(p_\mu v_{\nu,\alpha}^{pc}(p) - p_\nu v_{\mu,\alpha}^{pc}(p)) \equiv E^{(\frac{3}{2})}(v_{\mu\nu}^F(p) \otimes v_\alpha^{Dc}(p))$$

e

$$\check{v}_{\mu\nu,\alpha}^{\mathcal{F}c}(p) \doteq i(p_\mu \check{v}_{\nu,\alpha}^{pc}(p) - p_\nu \check{v}_{\mu,\alpha}^{pc}(p)) \equiv E^{(\frac{3}{2})}(v_{\mu\nu}^F(p) \otimes \check{v}_\alpha^{Dc}(p)).$$

A parte da função de dois pontos sobre a concha $\left(\Omega, \mathcal{F}_{\mu\nu,\alpha}(x) \overline{\mathcal{F}_{\mu'\nu',\alpha'}(x')}\Omega\right)$ definida pela Eq. (5.17) sai como

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\alpha;\mu'\nu',\alpha'}^{\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}}(p) &= \left(p_\mu v_{\nu,\alpha}^{pc}(p) - p_\nu v_{\mu,\alpha}^{pc}(p), p_{\mu'} \check{v}_{\nu',\alpha'}^{pc}(p) - p_{\nu'} \check{v}_{\mu',\alpha'}^{pc}(p)\right) = \\ &= \left[p_\mu p_{\mu'} \left(-g_{\nu\nu'} + \frac{\gamma_\nu \gamma_{\nu'}}{3}\right) - p_\mu p_{\nu'} \left(-g_{\nu\mu'} + \frac{\gamma_\nu \gamma_{\mu'}}{3}\right) + p_\nu p_{\nu'} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{\gamma_\mu \gamma_{\mu'}}{3}\right) - p_\nu p_{\mu'} \left(-g_{\mu\nu'} + \frac{\gamma_\mu \gamma_{\nu'}}{3}\right)\right] \\ &\quad \times (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'} \quad (5.71) \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando a Eq. (5.70), temos que

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\alpha;\mu'\nu',\alpha'}^{\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}}(p) &= p_\mu p_{\mu'} (v_{\nu,\alpha}^{pc}(p), \check{v}_{\nu',\alpha'}^{pc}(p)) - p_\mu p_{\nu'} (v_{\nu,\alpha}^{pc}(p), \check{v}_{\mu',\alpha'}^{pc}(p)) - \\ &\quad - p_\nu p_{\mu'} (v_{\mu,\alpha}^{pc}(p), \check{v}_{\nu',\alpha'}^{pc}(p)) + p_\nu p_{\nu'} (v_{\mu,\alpha}^{pc}(p), \check{v}_{\mu',\alpha'}^{pc}(p)). \end{aligned}$$

Cada produto é justamente a função dois pontos sobre a concha do campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-ponto, cuja solução é dada pela Eq. (5.50). Substituindo-a em cada termo, temos que os fatores que vão com $\sim p^4$ e $\sim p^5$ se cancelam, produzindo assim a Eq.(5.71).

□

Lema 5.5.8. *O campo de escolta ϕ_α é definido pela integral, Eq. (5.67), e a Prop. 3.4.2 afirma que seu intertwiner de Wigner é dado por*

$$v'_\alpha(p, e) \doteq \frac{iv_{\nu,\alpha}^p(p)e^\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} \equiv \frac{iE^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_\alpha^D(p))}{p \cdot e + i\varepsilon}. \quad (5.72)$$

Similarmente, o campo spinor-vetor $\Psi_{\mu,\alpha}$ é definido pela integral, Eq. (5.65), e pela Prop. 3.4.2 seu intertwiner de Wigner é dado por

$$v_{\mu,\alpha}(p, e) \doteq i \frac{v_{\mu\nu,\alpha}^F(p)e^\nu}{p \cdot e + i\varepsilon} \equiv i \frac{E^{(\frac{3}{2})} \circ (v_{\mu\nu}^F(p) \otimes v_\alpha^D(p))e^\nu}{p \cdot e + i\varepsilon}. \quad (5.73)$$

Substituindo $v_{\mu\nu}^F(p)$ como na Eq. (4.15), produzimos

$$v_{\mu,\alpha}(p, e) = E^{(\frac{3}{2})}(v_\mu^p(p) \otimes v_\alpha^D(p)) - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_\alpha^D(p)). \quad (5.74)$$

Reescrevemos como

$$v_{\mu,\alpha}(p, e) = v_{\mu,\alpha}^p(p) + ip_\mu v'_\alpha(p, e). \quad (5.75)$$

Observe que, através da definição do campo como uma integral de linha e da Prop. 3.4.2, mostramos mais uma vez o que foi colocado no início da Seção 5.5, precisamente a Eq.(5.32). Note também que a relação Eq. (5.64) pode ser lida a partir da Eq. (5.75).

Podemos mostrar que nosso spinor-vetor $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)$ é ortogonal à direção da string, Eq. (5.69), diretamente pelo seu intertwiner correspondente, Eq. (5.74).

Demonstração. Temos que:

$$v_{\mu,\alpha}(p, e)e^\mu = E^{(\frac{3}{2})}(v_\mu^p(p) \otimes v_\alpha^D(p))e^\mu - \frac{p_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_\alpha^D(p))e^\mu =$$

$$\begin{aligned}
&= E^{(\frac{3}{2})}(v_{\mu}^p(p)e^{\mu} \otimes v_{\alpha}^D(p)) - \frac{p_{\mu}e^{\mu}}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_{\alpha}^D(p)) = \\
&= E^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_{\alpha}^D(p)) - \frac{p \cdot e}{p \cdot e + i\varepsilon} E^{(\frac{3}{2})}(v^p(p)e \otimes v_{\alpha}^D(p)) = 0
\end{aligned}$$

isto produz, $\Psi_{\mu,\alpha}(x, e)e^{\mu} = 0$. □

Resumidamente, temos

Proposição 5.5.9. *Os campos $\Psi_{\mu,\alpha}$ e ϕ_{α} são localizados tipo-string (1.2) e (não são hermitianos). Eles satisfazem a relação de covariância (1.3) (veja nota de rodapé 11, com $k = 1$ e 0), respectivamente. Eles se relacionam com o campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-ponto como na Eq. (5.64). Todos três campos são localizados tipo-string em relação uns aos outros. Por último, $\Psi_{\mu,\alpha}$ satisfaz a condição de “calibre axial” Eq. (5.69) e a relação Eq. (5.68).*

Demonstração. A localidade em string, covariância e não hermeticidade são consequências das Prop.s 3.2.7 e 3.4.2 e também do Lema 5.3.5. A relação (5.63) segue, é claro, a partir da identidade (5.64), mas também pode ser verificada no nível do intertwiner a partir das identidades

$$p_{\mu}v_{\nu,\alpha}(p, e) - p_{\nu}v_{\mu,\alpha}(p, e) = p_{\mu}v_{\nu,\alpha}^p(p) - p_{\nu}v_{\mu,\alpha}^p(p) = -iv_{\mu\nu,\alpha}^{\mathcal{F}}(p). \quad (5.76)$$

Substituindo a Eq. (5.75) no lado esquerdo da identidade, Eq. (5.76), temos

$$\begin{aligned}
p_{\mu}v_{\nu,\alpha}(p, e) - p_{\nu}v_{\mu,\alpha}(p, e) &= p_{\mu}(v_{\nu,\alpha}^p + ip_{\nu}v'_{\alpha}(p, e)) - p_{\nu}(v_{\mu,\alpha}^p + ip_{\mu}v'_{\alpha}(p, e)) = \\
&= p_{\mu}v_{\nu,\alpha}^p(p) - p_{\nu}v_{\mu,\alpha}^p(p).
\end{aligned}$$

De acordo com a Eq. (5.70) a última igualdade é o $-iv_{\mu\nu,\alpha}^{\mathcal{F}}(p)$.

A condição de “calibre axial”, Eq. (5.69), e a relação Eq. (5.68), já foram demonstradas. □

5.6 Caso geral, $s > \frac{3}{2}$

5.6.1 Campos spinor-tensor com localização tipo-ponto

Consideramos agora o caso de spin semi-inteiro arbitrário, $s > \frac{3}{2}$. O espaço de chegada \mathfrak{h} para os campos spinor-tensor $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p$ com localização tipo-ponto é o espaço $\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$ em $(\mathbb{C}^4)^{\otimes n+1}$ e $D(A)$ é a restrição correspondente de $\Lambda(A)^{\otimes n} \otimes S^c(A)$. Com Λ sendo uma transformação de Lorentz, $A \in SU(2)$ e $\Lambda \equiv \Lambda(A)$. Sejam $v_\mu^p(p)$ e $v_\alpha^D(p)$ os intertwiners de Wigner para o campo potencial vetor spin-um e para o campo de Dirac, respectivamente, e defina

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^{(s)}(p) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}^p(p) \otimes v_\alpha^D(p). \quad (5.77)$$

De acordo com o Lema 5.3.5 este é um intertwiner de Wigner que não é autoconjugado. Deixe $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p$ ser o campo spinor-tensor livre, não hermitiano, local e covariante correspondente. O campo tem dimensão de escala $s + 1 (\equiv n + \frac{3}{2})$, com $n \geq 1$.

Demonstramos as propriedades do campo spinor-tensor citadas acima.

Demonstração. A covariância e localidade segue da propriedade dos intertwiners. Para verificar a dimensão de escala do campo (D_s), devemos analisar a função de dois pontos do campo. A parte da função de dois pontos sobre a concha do spinor-tensor é, pela fórmula geral, Eq. (5.17), dada por

$$\begin{aligned} & (v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^{(s)c}(p), \check{v}_{\mu'_1 \dots \mu'_n, \alpha'}^{(s)c}(p)) \equiv \\ & (v_{\mu_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}^p(p) \otimes v_\alpha^{Dc}(p), E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu'_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu'_n}^p(p) \otimes \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)). \end{aligned}$$

Substituindo o projetor $E^{(n+\frac{1}{2})}$ dado pela Eq. (5.9), escrevemos o produto escalar em $\mathfrak{h}^{(s)}$ como na Eq. (5.18), temos que o mesmo é dado como uma soma, e cada termo é um produto de n fatores da forma $(v_{\mu_i}^p(p), v_{\mu'_j}^p(p))(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(v_{\mu_n}^p(p)v_\alpha^{Dc}(p), v_{\mu'_n}^p(p)\check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\overline{v_{\mu'_i}^p(p)}, v_{\mu'_j}^p(p))(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\overline{v_{\mu'_i}^p(p)}, v_{\mu'_j}^p(p))(\underbrace{v_{\mu_n}^p(p)}_{\mu_n}, \underbrace{v_\alpha^{Dc}(p)}_{\alpha}, \underbrace{v_{\mu'_n}^p(p)}_{\mu'_n}, \underbrace{\check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)}_{\alpha'})$ ou

$(\underline{v_{\mu_i}^p(p)}, \overline{v_{\mu_j}^p(p)}) (\underline{v_{\mu_n}^p(p)} v_{\alpha}^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'_n}^p(p)} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$. Os fatores $(\underline{v_{\mu_i}^p(p)}, \underline{v_{\mu'_j}^p(p)})$ são justamente a função de dois pontos do campo de Proca. A conjugação complexa dos intertwiners $v_{\mu}^p(p)$ representa apenas um sinal global e, assim, cada fator, a menos de um sinal, é justamente à função de dois pontos do campo de Proca sobre a concha, que já sabemos ser um polinômio quadrático não homogêneo de grau 2, veja Eq. (4.12).

O fator $(v_{\alpha}^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ corresponde justamente à função de dois pontos sobre a concha do campo de Dirac que sabemos, também, ser um polinômio não homogêneo de grau 1, veja Eq. (5.5). Então, cada termo da forma do produto desses fatores são polinômios de grau $2 + 1 = 3$. O fator $(\underline{v_{\mu}^p(p)} v_{\alpha}^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ é justamente uma das partes da função de dois pontos do campo de Rarita-Schwinger, veja Eq. (5.49), que é dada por:

$$(\underline{v_{\mu}^p(p)} v_{\alpha}^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) = \left(-\gamma_{\mu} \gamma_{\mu'} + \frac{p_{\mu'} \gamma_{\mu}}{m} - \frac{p_{\mu} \gamma_{\mu'}}{m} + \frac{p_{\mu} p_{\mu'}}{m^2} \right) \left(\not{p} + m \right)_{\alpha\alpha'} \quad (5.78)$$

De acordo como a Eq. (5.78), temos que é um polinômio não homogêneo de grau $2 + 1 = 3$. Portanto, vê-se que a função de dois pontos dos campos spinor-tensor $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p$ sobre a concha é um polinômio não homogêneo de grau $(2n + 1)$, como $s = n + \frac{1}{2}$, temos o grau do polinômio dado por $2s$. A Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] afirmam que o grau de escala das funções de dois pontos é $2s + 2$, isto implica que a dimensão de escala dos campos D_s é $s + 1$ ou $n + \frac{3}{2}$, com $n \geq 1$. Logo, para os campos spinor-tensor localizado tipo-ponto, temos com o aumento do spin uma piora no comportamento UV. \square

Lembrando que temos, de acordo com a Eq. (1.6), para cada campo spinor-tensor um segundo campo com o mesmo comportamento UV que denominamos de spinor-tensor intensidade de campo, denotado por $\mathcal{F}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}$. O espaço de chegada \mathfrak{h} para o spinor-tensor intensidade de campo, $\mathcal{F}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}$, é um subespaço invariante de $(\mathbb{C}^4)^{\otimes 2n+1}$ e $D(A)$ é a restrição correspondente de $\Lambda(A)^{\otimes 2n} \otimes S^c(A)$. Com Λ uma transformação de Lorentz, $A \in SU(2)$ e $\Lambda \equiv \Lambda(A)$. Sejam $v_{\mu\nu}^F(p)$ e $v_{\alpha}^D(p)$ os intertwiners de Wigner para o tensor intensidade de campo de spin-1 e do campo de Dirac, respectivamente, e defina

$$v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}}(p) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p) \otimes v_{\alpha}^D(p). \quad (5.79)$$

Utilizando o Lema 5.5.7, temos:

$$v_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}^{s,\mathcal{F}^c}(p) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} v_{\mu_1\nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n\nu_n}^F(p) \otimes v_\alpha^{D^c}(p)$$

e

$$\check{v}_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}^{s,\mathcal{F}^c}(p) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} v_{\mu_1\nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n\nu_n}^F(p) \otimes \check{v}_\alpha^{D^c}(p).$$

De acordo como Lema 5.3.5, este é um intertwiner de Wigner não-autoconjugado. Deixe $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}$ ser o campo spinor-tensor intensidade de campo livre, não hermitiano, local e covariante correspondente. O spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}$ de ordem $2n$ tem as propriedades de simetria (permutação), ou seja, simétrico, sob troca de qualquer um dos pares $(\mu_i, \nu_i) \leftrightarrow (\mu_j, \nu_j)$ e antissimétrico sob troca de qualquer um dos índices $\mu_i \leftrightarrow \nu_i$. Lembrando que a ordem e a simetria dos campos sempre vão estar relacionadas aos índices tensoriais.

Lema 5.6.1. *Os campos $\varphi_{\mu_1\cdots\mu_n,\alpha}^p$ e $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}$ são relacionados como na Eq. (1.6). O campo spinor-tensor $\varphi_{\mu_1\cdots\mu_n,\alpha}^p$ tem divergência e traço iguais a zero,*

$$g^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\mu_3\cdots\mu_n,\alpha}^p = 0, \quad \partial^\mu \varphi_{\mu\mu_2\cdots\mu_n,\alpha}^p(x) = 0. \quad (5.80)$$

Ele é o único, módulo equivalência unitária, campo quântico livre para partículas massivas com spin- $s = n + \frac{1}{2}$ com $n \geq 1$ que é um spinor-tensor simétrico de ordem- n com relação ao índice tensorial e com traço zero .

Ambos os campos têm dimensão de escala $s + 1$. De fato, a função de dois pontos de $\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n,\alpha}$ sobre a concha é um polinômio (não homogêneo) de grau $2n + 1 = 2s$.

Demonstração. O fato de que o campo spinor-tensor φ^p tem divergência zero segue como no caso do spin- $\frac{3}{2}$, a partir das propriedades da função intertwiner do spin-1, veja Eq. (5.62). Para provar que o φ^p tem traço zero, faremos como no caso de spin inteiro. Um tensor $t \in \mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$ tem traço zero se

$$(g_3)_{ij} t^{ij i_3 \cdots i_n, \alpha} = 0$$

para todo $i_3 \cdots i_n, \alpha$. Recordando que $v_\mu^p(\bar{p}) = v^p e_{(\mu)} = i e_{(\mu)}$ se $\mu = 1, 2, 3$ e $= 0$ se $\mu = 0$. Consequentemente

$$g^{\mu\nu} v_\mu^p(\bar{p}) \otimes v_\nu^p(\bar{p}) = -g^{ij} e_{(i)} \otimes e_{(j)} = \hat{g}_3, \quad (5.81)$$

uma vez que $g^{ij} = -g_3^{ij}$. Portanto o tensor $g^{\mu\nu} v_\mu^p(\bar{p}) \otimes v_\nu^p(\bar{p}) \otimes v_{\mu_3}^p(\bar{p}) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n}^p(\bar{p}) \otimes v_\alpha^D(\bar{p})$ é ortogonal em $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}^2$ para todo tensor com traço zero em $\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$ no sentido de $(g_3)_{ij} t^{ij i_3 \cdots i_n, \alpha} = 0$; para todo $i_3 \cdots i_n, \alpha$, isto é, sua projeção $E^{(n+\frac{1}{2})}$ no espaço de tensores em $\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$, com traço zero é zero. Isto implica traço zero de $\varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n, \alpha}^p$, Eq. (5.80) .

A unicidade decorre do fato de que a representação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ em $\mathfrak{h}^{n+\frac{1}{2}}$ ser irredutível.

Para provar a relação (1.6), insira a fórmula explícita (4.15) de v^F na definição (5.79). Isso produz

$$v_{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}}(p) = i^n E^{(n+\frac{1}{2})} (p_{\mu_1} v_{\nu_1}^p(p) - p_{\nu_1} v_{\mu_1}^p(p)) \otimes \cdots \otimes (p_{\mu_n} v_{\nu_n}^p(p) - p_{\nu_n} v_{\mu_n}^p(p)) \otimes v_\alpha^D(p) \quad (5.82)$$

que pode ser escrito como

$$i^n \sum_I (-1)^{|I|} p_{\mu_{j_1}} \cdots p_{\mu_{j_l}} p_{\nu_{i_1}} \cdots p_{\nu_{i_k}} E^{(n+\frac{1}{2})} v_{\nu_{j_1}}^p(p) \otimes \cdots \otimes v_{\nu_{j_l}}^p(p) \otimes v_{\mu_{i_1}}^p(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_{i_k}}^p(p) \otimes v_\alpha^D(p),$$

onde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ percorre sobre todos os subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ e $I^c = \{j_1, \dots, j_l\}$ é o complemento de I . Uma vez que a projeção do produto tensorial dos intertwiners $v_{\mu, \alpha}^p$ é justamente o intertwiner para $\varphi_{\mu_{j_1} \cdots \nu_{i_k}, \alpha}^p$, veja Eq. (5.77), isso prova Eq. (1.6) .

A parte da função de dois pontos sobre a concha do spinor-tensor intensidade de campo, $M^{\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}}$, pela fórmula geral (5.17), é dada por

$$\begin{aligned} & (v_{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}c}(p), \check{v}_{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}c}(p)) \equiv \\ & \equiv (v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p) \otimes v_\alpha^{Dc}(p), E^{(n+\frac{1}{2})} v_{\mu'_1 \nu'_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu'_n \nu'_n}^F(p) \otimes \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)). \end{aligned}$$

Substituindo o projetor $E^{(n+\frac{1}{2})}$ da Eq. (5.9), escrevemos o produto escalar em $\mathfrak{h}^{(s)}$, como na Eq. (5.18), em que cada termo é um produto de n fatores da forma $(v_{\mu_i \nu_i}^F(p), v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p)) \times (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\underbrace{v_{\mu_n \nu_n}^F(p)}_{\text{}} v_\alpha^{Dc}(p), \underbrace{v_{\mu'_n \nu'_n}^F(p)}_{\text{}} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$,

$$\left(\overline{v_{\mu'_i \nu'_i}^F(p)}, v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p)\right) \times (v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)), \left(\overline{v_{\mu'_i \nu'_i}^F(p)}, v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p)\right) \times (v_{\underline{\mu_n \nu_n}}^F(p) v_\alpha^{Dc}(p), v_{\underline{\mu'_n \nu'_n}}^F(p) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$$

ou $\left(v_{\mu_i \nu_i}^F(p), \overline{v_{\mu_j \nu_j}^F(p)}\right) \times (v_{\underline{\mu_n \nu_n}}^F(p) v_\alpha^{Dc}(p), v_{\underline{\mu'_n \nu'_n}}^F(p) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$.

Os fatores $(v_{\mu_i \nu_i}^F(p), v_{\mu'_j \nu'_j}^F(p))$ correspondem justamente à função de dois pontos sobre a concha do tensor intensidade de campo de spin-um que já sabemos ser um polinômio homogêneo quadrático, veja Eq. (4.16). A conjugação complexa dos intertwiners representa apenas um sinal global e, assim, cada fator, a menos de um sinal, é justamente à função de dois pontos do tensor intensidade de campo para spin-um. O fator $(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ corresponde justamente à função de dois pontos sobre a concha do campo de Dirac, que é um polinômio de grau 1, veja Eq. (5.5). O fator $(v_{\underline{\mu_n \nu_n}}^F(p) v_\alpha^{Dc}(p), v_{\underline{\mu'_n \nu'_n}}^F(p) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ é dado pelo próximo lema:

Lema 5.6.2. *O fator é um polinômio de grau 3, dado por:*

$$\left(\underline{v_{\mu\nu}^F(p) v_\alpha^{Dc}(p)}, \underline{v_{\mu'\nu'}^F(p) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)}\right) = \left(-p_\mu p_{\mu'} \gamma_\nu \gamma_{\nu'} + p_\mu p_{\nu'} \gamma_\nu \gamma_{\mu'} + p_\nu p_{\mu'} \gamma_\mu \gamma_{\nu'} - p_\nu p_{\nu'} \gamma_\mu \gamma_{\mu'}\right) \left(\not{p} + m\right)_{\alpha\alpha'}.$$

Demonstração. Substituindo a Eq. (4.15) em $(\underline{v_{\mu\nu}^F(p) v_\alpha^{Dc}(p)}, \underline{v_{\mu'\nu'}^F(p) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)})$, temos:

$$\begin{aligned} & \left((p_\mu \underline{v_\nu^p(p)} - p_\nu \underline{v_\mu^p(p)}) v_\alpha^{Dc}(p), (p_{\mu'} \underline{v_{\nu'}^p(p)} - p_{\nu'} \underline{v_{\mu'}^p(p)}) \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p) \right) = \\ & p_\mu p_{\mu'} (\underline{v_\nu^p(p)} \cdot v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\nu'}^p(p)} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - p_\mu p_{\nu'} (\underline{v_\nu^p(p)} \cdot v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) - \\ & - p_\nu p_{\mu'} (\underline{v_\mu^p(p)} \cdot v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\nu'}^p(p)} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)) + p_\nu p_{\nu'} (\underline{v_\mu^p(p)} \cdot v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}^p(p)} \cdot \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)). \end{aligned}$$

Cada produto escalar é justamente uma das partes da função de dois pontos sobre a concha do campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-ponto, a saber, Eq. (5.78). Substituindo-a para cada produto, temos que os fatores que vão com $\sim p^4$ e $\sim p^5$ se cancelam, produzindo a equação do Lema (5.6.2). \square

Assim, vê-se que a função de dois pontos do spinor-tensor intensidade de campo com spin- $s = n + \frac{1}{2}$ sobre a concha é um polinômio não homogêneo de grau $2n + 1 = 2s$, como afirmado. A função de dois pontos do campo spinor-tensor, $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p$ sobre a concha

é um polinômio não homogêneo de grau $2n + 1 = 2s$, como já mostrado anteriormente. A Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] implica que o grau de escala das funções de dois pontos é $2s + 2$, isto é, a dimensão de escala dos campos é $s + 1$. \square

5.6.2 Campos spinor-tensor com localização tipo-string

Nosso campo spinor-tensor localizado tipo-string $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e)$ é definido como o campo livre correspondente ao intertwiner de Wigner

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^{(s)}(p, e) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu_1}(p, e) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}(p, e) \otimes v_{\alpha}^D(p). \quad (5.83)$$

De acordo com o Lema 5.3.5 este é um intertwiner de Wigner (que não é autoconjugado) da representação $(n + 1)$ -vezes tensorial $D'(A) \otimes \dots \otimes D'(A) \otimes S^c(A)$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ para $D^{(s)}(R(A, p))$. Assim, $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ é um campo quântico spinor-tensor localizado tipo-string, covariante, porém, não é hermitiano.

Inserindo a Eq. (4.20) na equação (5.83), temos que o intertwiner de Wigner pode ser escrito como

$$\begin{aligned} v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^s(p, e) &= v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^{s, p}(p) + \sum_{j=1}^n i p_{\mu_j} v_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_j \dots \mu_n, \alpha}^{(n, n-1)}(p, e) + \\ &+ i^2 \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j}} p_{\mu_i} p_{\mu_j} v_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \hat{\mu}_j \dots \mu_n, \alpha}^{(n, n-2)}(p, e) + \dots + i^n p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} v_{\alpha}^{(n, 0)}(p, e), \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde o chapéu significa omitir índice correspondente, com

$$v_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(n, k)}(p, e) \doteq \frac{i^{n-k}}{(p \cdot e + i\varepsilon)^{n-k}} E^{(n+\frac{1}{2})} \underbrace{v^p(p)e \otimes \dots \otimes v^p(p)e}_{n-k \text{ times}} \otimes v_{\mu_1}^p(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_k}^p(p) \otimes v_{\alpha}^D(p).$$

Caracterizado pelo Lema 5.3.5 e Proposição (3.4.2), isto é, um intertwiner de Wigner (não autoconjugado). Denotamos por $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(n, k)}$ o correspondente campo quântico spinor-tensor localizado tipo-string, covariante e não hermitiano. Novamente pela Proposição 3.4.2, esses “campos de escolta” podem ser escritos como integrais de linha

$$\phi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(n, k)}(x, e) = \int_0^{\infty} dt_1 \dots \int_0^{\infty} dt_{n-k} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^p(x + (t_1 + \dots + t_{n-k})e) e^{\mu_{k+1}} \dots e^{\mu_n}.$$

O campo spinor-tensor com localização tipo-string $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ e os campos de escolha $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(n, k)}$ satisfazem as propriedades relatadas no Teorema 1.0.1:

Proposição 5.6.3. *O campo spinor-tensor localizado tipo-string $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ está relacionado à sua versão com localização tipo-ponto e aos campos de escolha $\phi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(n, k)}(x, e)$, como na Eq. (1.5). Sua função de dois pontos tem grau de escala três, depois de integrada com uma função de teste na variável e , e têm limite para massa zero. É o campo spinor-tensor para o spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ no sentido da Eq. (1.6). Finalmente, satisfaz a condição de “calibre axial”*

$$\varphi_{\mu\mu_2 \dots \mu_n, \alpha}(x, e)e^\mu = 0. \quad (5.85)$$

No entanto, $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$ não tem divergência e nem traço iguais a zero.

Demonstração. A relação (1.5) pode ser lida a partir da Eq. (5.84). Para mostrar que é um campo spinor-tensor para o spinor-tensor intensidade de campo, usamos o fato de que na Eq. (5.82), pode-se substituir cada intertwiner $v_\mu^p(p)$ por $v_\mu(p, e)$ devido à relação Eq. (4.26). Isso prova a relação Eq. (1.6), com φ^p substituído por φ . Para provar as afirmações sobre a função de dois pontos, consideramos sua parte sobre a concha, ou seja,

$$\begin{aligned} & (v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^{(s)c}(p, e), \check{v}_{\mu'_1 \dots \mu'_n, \alpha'}^{(s)}(p, e)) \equiv \\ & (v_{\mu_1}(p, e) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n}(p, e) \otimes v_\alpha^{Dc}(p), E^{(n+\frac{1}{2})} \circ v_{\mu'_1}(p, e') \otimes \dots \otimes v_{\mu'_n}(p, e') \otimes \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)). \end{aligned}$$

De acordo com a Eq. (5.18), descobrimos que o produto escalar em $\mathfrak{h}^{(s)}$ é dado por uma soma em que cada termo é um produto de n fatores da forma $(v_{\mu_i}(p, e), v_{\mu'_j}(p, e'))(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\underline{v_{\mu_n}(p, e)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'_n}(p, e')} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\overline{v_{\mu'_i}(p, e')}, v_{\mu'_j}(p, e'))(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$, $(\overline{v_{\mu'_i}(p, e')}, v_{\mu'_j}(p, e'))(\underline{v_{\mu_n}(p, e)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'_n}(p, e')} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ ou $(v_{\mu_i}(p, e), \overline{v_{\mu'_j}(p, e')})(\underline{v_{\mu_n}(p, e)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'_n}(p, e')} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$.

Os fatores $(v_\mu(p, e), v_{\mu'}(p, e'))$ são justamente às funções de dois pontos sobre a concha $M_{\mu\mu'}^{AA}(p, e, e')$ dado na Eq. (4.21) e que é um polinômio de grau zero e os fatores com o complexo conjugado dos intertwiner $v(p, \cdot)$, são determinados, usando Eq. (4.14) e

$\overline{v_\mu^p(p)} = -v_\mu^p(p)$, como

$$\left(\overline{v_\mu(p, e)}, v_\nu(p, e)\right) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu \cdot e_\nu + p_\nu \cdot e_\mu}{p \cdot e + i\varepsilon} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot e + i\varepsilon)^2} \quad (5.86)$$

e seu complexo conjugado.⁷⁹

O fator $(v_\alpha^{Dc}(p), \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ corresponde justamente à função de dois pontos do campo de Dirac que sabemos ser um polinômio não homogêneo de grau 1, veja Eq. (5.5). O fator do tipo $(\underline{v_\mu(p, e)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}(p, e')} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p))$ é justamente o termo $\widehat{M}_{\mu\alpha, \mu'\alpha'}^{\frac{3}{2}}(p, e, e')$ da função de dois pontos para o campo de Rarita-Schwinger localizado tipo-string, o qual podemos reescrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{v_\mu(p, e)} v_\alpha^{Dc}(p), \underline{v_{\mu'}(p, e')} \check{v}_{\alpha'}^{Dc}(p)\right) = \\ & = \left(\frac{p_\mu \not{e} \gamma_{\mu'}}{p \cdot e - i\varepsilon} + \frac{p_{\mu'} \gamma_\mu \not{e}'}{p \cdot e' + i\varepsilon} - \frac{p_\mu p_{\mu'} \not{e} \not{e}'}{(p \cdot e - i\varepsilon)(p \cdot e' + i\varepsilon)} - \gamma_\mu \gamma_{\mu'}\right) (\not{p} + m)_{\alpha\alpha'} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Da Eq. (5.87), temos que é um polinômio não homogêneo de mesmo grau que os fatores anteriores. Portanto, todos os fatores que aparecem, são polinômios não homogêneos de grau $0+1 = 1$. Assim, cada produto de n fatores também é um polinômio não homogêneo em p de grau $(0n + 1) = 1$.

De acordo com a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] temos que o grau de escala é três, o que implica a dimensão de escala dos campos spinor-tensor localizado tipo-string ser $\frac{3}{2}$. Ou seja, independente do spin, o campo spinor-tensor localizado tipo-string tem a mesma dimensão de escala que o campo de Dirac localizado tipo-ponto, a saber $\frac{3}{2}$. Pela [20, Proposição 9] temos que existe o limite para massa zero. A condição de “calibre axial”, segue da antissimetria do \mathcal{F} . Mas também pode ser verificada a nível do intertwiner do campo spinor-tensor $\varphi_{\mu\mu_2\dots\mu_n}(x, e)$ como feito para o caso de spin- $\frac{3}{2}$, veja a demonstração no final da Lema 5.5.8. \square

Finalmente escrevemos nosso campo spinor-tensor localizado tipo-string como uma integral de linha sobre o spinor-tensor intensidade de campo \mathcal{F} , em analogia ao caso Rarita-Schwinger, veja Eq. (5.65).

⁷⁹Já foi apresentada anteriormente, veja Eq. (4.47), com sua respectiva demonstração.

Lema 5.6.4. *Vale*

$$\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x, e) = \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n \mathcal{F}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}(x + \sum_{i=1}^n t_i e) e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n}. \quad (5.88)$$

Demonstração. Inserindo a relação (4.18) na definição do intertwiner de Wigner (5.83) para $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}$, produz

$$\begin{aligned} v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^s(p, e) &= \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} E^{(n+\frac{1}{2})}(v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p) e^{\nu_n} \otimes v_\alpha^D(p)) = \\ &= \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} E^{(n+\frac{1}{2})}(v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p) \otimes v_\alpha^D(p)) e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n}. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}}(p) \doteq E^{(n+\frac{1}{2})}(v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \dots \otimes v_{\mu_n \nu_n}^F(p) \otimes v_\alpha^D(p))$$

é o intertwiner para o spinor-tensor intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}(x)$, veja Eq. (5.79), temos:

$$v_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}^s(p, e) = \frac{i^n}{(p \cdot e + i\varepsilon)^n} v_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}^{s, \mathcal{F}}(p) e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n}$$

Usando a Eq. (3.111), implica a reivindicação. \square

Note que o Lema ou, equivalentemente, a última relação na sua demonstração, implica que a função de dois pontos $\varphi\varphi$ sobre a concha pode ser escrita como

$$M_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha; \mu'_1 \dots \mu'_n, \alpha'}^{\varphi\bar{\varphi}}(p, e, e') = \frac{M_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha; \mu'_1 \nu'_1 \dots \mu'_n \nu'_n, \alpha'}^{\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}}(p)}{(p \cdot e - i\varepsilon)^n (p \cdot e' + i\varepsilon)^n} e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n} (e')^{\nu'_1} \dots (e')^{\nu'_n}, \quad (5.89)$$

onde $M^{\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}}$ é a função de dois pontos sobre a concha de $\mathcal{F}\mathcal{F}$. Uma vez que é um polinômio não homogêneo de grau $(2n + 1)$, veja o Lema (5.6.1), a Eq. (1.4) e [20, Proposição 7] confirmam que nossa função de dois pontos de $\varphi\varphi$ tem grau de escala 3, conseqüentemente o campo tem dimensão de escala $\frac{3}{2}$ e a [20, Proposição 9] confirma que existe o limite para massa zero.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Nessa tese apresentou-se a construção dos campos quânticos livres massivos localizados tipo-string para um spin qualquer. Tal construção é parecida com a teoria de gauge ou BRST, com a vantagem que nossos campos obedecem à navalha de Occam (*Ockham's razor*), o que significa que atuam em um espaço de Hilbert e a função de dois pontos é positiva, ao contrário do modelo de gauge ou BRST em que temos os campos agindo em um espaço com métrica indefinida (Krein) e têm graus não físicos (*ghosts*).

Nossos campos também trocam a invariância BRST pela independência do string.⁸⁰ Seguindo os critérios para existência, ou não, do limite para massa zero dos campos quânticos,⁸¹ concluímos que os campos localizados tipo-string têm o limite para massa zero, enquanto os localizados tipo-ponto não. Uma vez que nossos campos podem ser escritos com uma integral de “linha” do campo puntiforme correspondente, isso garante que existam observáveis locais (pontuais) na classe de Borchers de nossos campos localizados tipo-string. Além disso, mostramos que nossos campos para $s \geq 1$ diferem dos campos correspondentes localizados tipo-ponto φ_r^p por termos que são derivadas de campos localizados tipo-string bem definidos, a saber, atuam no mesmo espaço de Hilbert e descrevem

⁸⁰No artigo [20, Secão 3.3] é feita explanação apenas para o caso da potencial vetor A_μ , porém os argumentos são válidos para nossos campos em geral. Para mais detalhes sobre esse fato, veja [13].

⁸¹Critérios esses dados na [20, Prop. 9].

as mesmas partículas (que são responsáveis pelo mau comportamento UV); isso garante que temos localidade suficiente para uma construção perturbativa de modelos interagentes; portanto, para uma interação escolhida de forma adequada, as Lagrangianas tipo-string, diferem das Lagrangianas tipo-ponto correspondente por uma divergência que, de acordo com o fato bem conhecido, deveria ser irrelevante para a física.

Concluimos que nossos campos localizados tipo-string apresentam um comportamento melhor UV do que os campos localizados tipo-ponto, o que é medido pela dimensão de escala do campo, a saber: para os campos tipo-ponto (bósons ou férmions) a dimensão de escala dos campos é $s + 1$, enquanto que para os campos localizados tipo-string bosônicos, a dimensão de escala independente do spin é sempre 1, como a de um campo escalar ($s = 0$) e para os campos com localização tipo-string fermiônicos, a dimensão de escala também independe do spin e é sempre $\frac{3}{2}$ como a de um campo de Dirac ($s = \frac{1}{2}$). Assim, nossos campos têm um bom comportamento UV e localidade suficiente, de modo que a construção perturbativa de modelos interagentes com poder preditivo parece viável.

Como exemplo, pegamos a QED massiva para mostrar que a Lagrangiana tipo-string difere da tipo-ponto por uma divergência. Sabemos que na QED massiva, os tipos de partículas são o “fóton massivo”, o elétron e o pósitron, e o acoplamento é descrito pela Lagrangiana de interação

$$L^P(x) \doteq j^\mu(x)A_\mu^P(x), \quad (6.1)$$

onde $j^\mu \doteq : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi :$ é o operador de corrente e ψ é o campo Dirac livre. Uma vez que a dimensão de escala de j_μ é três (veja Seção 5.2) e a de A^P é dois (veja o Lema 4.2.1) implica que a L^P tem dimensão de escala cinco. Assim, o modelo não é renormalizável como explicado abaixo. Nossa saída, análoga à abordagem BRST [3], é substituir L^P por sua versão localizada em string

$$L^S(x, e) \doteq j^\mu(x)A_\mu(x, e), \quad (6.2)$$

que tem uma melhor dimensão de escala, a saber, quatro, veja a observação após a Prop. 4.2.2. Pela Eq. (4.4) e conservação da corrente, $\partial_\mu j^\mu = 0$, temos que a Lagrangiana

de interação difere pela divergência do campo vetorial localizado em string $V_\mu(x, e) \doteq j^\mu(x)\phi(x, e)$, onde ϕ é o campo de escolta (4.7):

$$L^P(x) = L^S(x, e) - \partial_\mu V^\mu(x, e). \quad (6.3)$$

Confirmando nossa conjectura e nos deixando preparados para começar a fazer os modelos interagentes.

Portanto, uma vez que nossos campos localizados tipo-string apresentam melhores dimensões de escala, desejamos a partir desses campos construir modelos interagentes ao longo das linhas de Epstein e Glaser [43]. Tal solução perturbativa no esquema de Epstein-Glaser usa o método da matriz-S de Bogoliubov que atribui à uma função de teste $g(x)$ e o dado Lagrangiano de interação L a série formal de operadores

$$S(gL) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n g(x_1) \cdots g(x_n) T_n L(x_1) \cdots L(x_n), \quad (6.4)$$

onde $T_n \dots$ denota o produto ordenado pelo tempo.

Se a dimensão de escala de L for maior que quatro, isso deixará um número infinito de parâmetros livres na série (6.4) e o modelo não será renormalizável. A versão interagente φ_{gL} para um dado campo livre φ é construída através da fórmula de Bogoliubov:

$$\varphi_{gL}(f) := \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} S(gL)^{-1} S(gL + \lambda f\varphi) \Big|_{\lambda=0}. \quad (6.5)$$

Ao revisar a prova de localidade em [43] temos que o campo interagente φ_{gL} é localizado em strings se o campo livre φ é localizado em string e a Lagrangiana de interação L é localizada em pontos. No entanto, se L for localizado em string, então φ_{gL} é genericamente completamente deslocalizado, não importa se φ é localizado em ponto ou string. Afirmamos que, com base na relação (1.5), podemos no entanto, construir modelos a partir de uma Lagrangiana de interação com localização em strings com as seguintes propriedades desejáveis:

A matriz-S é independente das strings e a versão interagente de um observável localizado em ponto ainda é localizada em pontos. Mais detalhes sobre a construção de

modelos interagentes para nossos campos são dados em [20, Seção 5].

O trabalho se encaminha para a publicação de um artigo análogo àquele de Bósons [20] em que apresentaremos os resultados para os campos Fermiônicos, denominados como campos spinor-tensor. Além disso, outro caminho necessário a ser percorrido é a pesquisa com modelos interagentes ao longo das linhas de Epstein e Glaser com nossos campos.

Apêndice A

Grupos de Lorentz e Poincaré

A.1 Grupo de Lorentz

Considera-se o espaço-tempo quadridimensional dotado com a métrica de Minkowski proveniente do produto interno.

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i \quad (\text{A.1})$$

Nota-se que a métrica está em relação a um sistema de coordenadas, a saber "coordenadas de Lorentz ou inerciais". Contudo, a métrica não depende dos sistemas de coordenadas.

Seja Λ , que aqui será denominado como *transformações de Lorentz*, que representa uma transformação entre sistemas de referências inerciais que preserve a estrutura causal e não envolve dilatações. O grupo de todas as transformações de Lorentz do espaço de Minkowski é denominado de Grupo de Lorentz. Pode-se também dizer que o grupo de Lorentz⁸² é o grupo de isometrias linear desta métrica, Eq. (A.1).

Depois da escolha de uma origem e de um sistema de coordenadas $x \mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3)$, o grupo \mathcal{L} pode ser identificado pelo grupo $O(1, 3)$, $\mathcal{L} = O(1, 3)$, que

⁸²Onde vamos usar o símbolo \mathcal{L} para grupo de Lorentz.

é o grupo de todas as matrizes $\Lambda \in 4 \times 4$, $Mat(\mathbb{R}, 4)$, e que satisfazem: $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta^{-1}$, $\det(\Lambda) = \pm 1$. Para η lê-se: $\eta := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ denominado métrica de Minkowski.

Será introduzido o \mathcal{L}_+^\uparrow , subgrupo de \mathcal{L} , que recebe o nome de *grupo de Lorentz próprio ortócrono* ou *grupo de Lorentz restrito*. É um subgrupo de Lorentz de mapas lineares de \mathbb{R}^4 que preservam a forma bilinear (A.1) e também deixa o cone positivo invariante.

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \det(\Lambda) = +1 \text{ e sinal de } \Lambda_0^0 > 0\}.$$

A.2 Grupo de Poincaré

O conjunto de transformações no espaço de Minkowski, constituído de todas as translações e transformações do subgrupo *próprio ortócrono de Lorentz* e seu produto, formam um grupo \mathcal{P}_+^\uparrow , chamado de *grupo de Poincaré próprio ortócrono*, ou grupo não homogêneo de Lorentz que representa o grupo mais geral de transformações do espaço-tempo, que mantêm os intervalos invariantes e, hoje, na Física, considera-se que o \mathcal{P}_+^\uparrow representa uma simetria da natureza (na ausência de campos gravitacionais). Sua ação no espaço-tempo é interpretada como uma transformação de Lorentz, seguida de uma translação cujos elementos são constituídos por pares de translação e uma transformação homogênea, denotado por $g := (b, \Lambda)$, que induz transformação de um quadrivetor:

$$g : x \mapsto x' = b + \Lambda x.$$

Acima, b é um vetor quadridimensional e $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Uma transformação (b', Λ') , seguida por outra (b, Λ) , é equivalente à uma única transformação dada pela regra de multiplicação de grupo.

$$(b, \Lambda)(b', \Lambda') = (b + \Lambda b', \Lambda \Lambda')$$

Em particular,

$$(b, \Lambda) = (b, \mathbf{1}) \cdot (0, \Lambda)$$

Apêndice B

Representação

No campo matemático da teoria da representação, representações de grupos descrevem grupos abstratos em termos de transformações lineares de espaços vetoriais; em particular, eles podem ser usados para representar elementos de grupo como matrizes assim como a operação do grupo pode ser representada por multiplicação de matrizes.

Definição B.0.1. *Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear inversível $D(g) : V \rightarrow V$ de modo que devem ter as seguintes propriedades satisfeitas:*

1. $D(gh) = D(g)D(h)$, para todos $g, h \in G$.
2. $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$, para todo $g \in G$.
3. $D(e) = I$ e : elemento unitário de G e I : operador identidade em V .

Representação irredutível e unitária: antes de definir as representações irredutíveis e as representações unitárias, devemos, antes, definir o subespaço invariante. Seja $U(G)$ uma representação de G sobre o espaço vetorial V e V_1 um subespaço de V com a propriedade de que: $U(g)x \in V_1$ para todo $x \in V_1$ e $g \in G$, ou seja, $U(G)V_1 \subset V_1$. V_1 é dito ser um *subespaço invariante* de V em relação a $U(G)$.

Representações irredutíveis: uma representação $U(G)$ sobre V é irredutível se não houver nenhum subespaço invariante não trivial em V com relação ao $U(G)$. Caso con-

trário, a representação é redutível. Nesse último caso, se o complemento ortogonal do subespaço invariante é também invariante com respeito a $U(G)$, a representação é dita ser totalmente redutível.

Como as transformações de simetria são naturalmente associadas com operadores unitários (que preservam a probabilidade), as representações unitárias desempenham um papel central no estudo de simetria de grupos. *Representação Unitária:* se o espaço de representação de grupo é um espaço com produto interno e os operadores $U(g)$ são unitários para todos os g pertencentes a G , então, a representação de $U(G)$ é dita ser uma representação unitária.

B.1 Lema de Schur

Lema B.1.1. *Se U_1 e U_2 são duas representações irredutíveis de um grupo G em espaços vetoriais V_1 e V_2 , respectivamente, e $A : V_1 \rightarrow V_2$ um entrelaçamento de U_1 e U_2 , ou seja, $AU_1(g) = U_2(g)A$ para todo $g \in G$, então ou A é inversível ou $A = 0$. Caso A seja inversível e V_1 e V_2 sejam espaços vetoriais complexos de dimensão finita, então, A é único, a menos de uma multiplicação por um escalar.*

Apêndice C

Teorema de Bisognano-Wichmann

Para compreender o Teorema de Bisognano-Wichmann é necessário entender a representação $U(\tilde{j}_1)$, para isso veja a Prop. 3.2.4, Lema 4.3.1 e os Lemas 5.1.1 e 5.3.6 com suas respectivas demonstrações.

Denotamos o Boost de Lorentz na direção x^1 por $\Lambda_1(t)$, agindo como $\cosh t \mathbb{1} + \sinh t \sigma_1$ nas coordenadas x^0 e x^1 ,

$$\Lambda_1(t) := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$t \rightarrow \Lambda_1(t)$ é holomorfa e tem-se:

$$\Lambda_1(t)|_{\pm i\pi} = j_1 \tag{C.1}$$

O Teorema de Bisognano-Wichmann, para o caso de campos com localização puntiforme [31, 32], não será colocado. Somente será colocado o Teorema Bisognano-Wichmann para o caso de campos quânticos com localização tipo-string [27], que é o interesse no presente trabalho.

Seja $W_1 := \{x \in \mathbb{R}^4, |x^0| < x^1\}$, cuja a forma geométrica será de uma cunha (figura C.1), assim como seu complemento causal W'_1 . Vale mencionar que a transformação j_1

faz a reflexão na "borda" de W_1 e que $\Lambda(A_1(t)) = \Lambda_1(t)$ deixa W_1 invariante. Tem-se que $A_1(t) := e^{\frac{t}{2}\sigma_1} \in SL(2, \mathbb{C})$. Seja $U(A_1(t)) =: e^{itK_1}$ o que implica $U(A_1(t+is)) = e^{itK_1}e^{-sK_1}$. Como não é limitado, observa-se que o domínio de $U(A_1(t+is))$ não é todo o espaço de Hilbert.

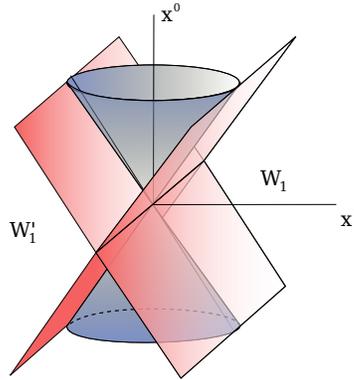


Figura C.1: cunha

Tem-se o seguinte teorema [27]:

Teorema C.0.1. Bisognano-Wichmann para localização de campo quântico tipo string.

Seja, $\text{supp} f \subset W_1, \text{supp} h \subset W_1 \cap H, (h = h(e))$ isso implica que $\varphi(f, h)$ é localizado em W_1 .

- (i) $\varphi(f, h)\Omega \in \text{dom } U(A_1(z)),$ para todo $z \in \mathbb{R} + i[0, \pi]$
- (ii) $U(A_1(z))\varphi(f, h)\Omega$ é holomorfa em $z \in \mathbb{R} + i(0, \pi),$ e
- (iii) $U(\tilde{j}_1)U(A_1(z))|_{z=i\pi}\varphi(f, h)\Omega = c\varphi(f, h)^*\Omega$

Apêndice D

Um Lema tipo Poincaré para campos spinor-tensor simétrico

O clássico Lema de Poincaré afirma que, em uma região topologicamente trivial, toda forma fechada é exata [21]. Em [20, Apêndice A] colocamos o análogo para os campos tensoriais simétricos (bósons). Portanto, estamos interessados em uma afirmação semelhante para campos spinor-tensores simétricos (simetria em relação aos índices tensoriais). Considere o operador diferencial P de ordem n que associa a um campo spinor-tensor simétrico $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x)$ de ordem n no espaço plano (de Minkowski) um tensor $(P\varphi)_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha}$ de ordem $2n$ (a ordem do tensor está vinculada aos índices tensoriais e não ao índice α de Dirac) com a propriedade de simetria (permutação) do spinor-tensor intensidade de campo,

$$(P\varphi)_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n, \alpha} \doteq \sum_I (-1)^{|I|} \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_l}} \partial_{\nu_{i_1}} \dots \partial_{\nu_{i_k}} \varphi_{\nu_{j_1} \dots \nu_{j_l} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}, \alpha}, \quad (\text{D.1})$$

onde a soma percorre todo o subconjunto $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$ e temos escrito $\{j_1, \dots, j_l\}$ para o complemento de I . Para $n = 1$, é justamente a derivada exterior, $(P\varphi)_{\mu\nu, \alpha} = \partial_\mu \varphi_{\nu, \alpha} - \partial_\nu \varphi_{\mu, \alpha}$ (Rarita-Schwinger). Temos:

Proposição D.0.1. *Deixe φ ser um campo spinor-tensor simétrico de ordem n que cai rapidamente. Então $P\varphi = 0$ se, e somente se, existe um campo spinor-tensor $\phi^{(k)}$ de*

ordem k , $0 \leq k \leq n - 1$, tal que φ é da forma

$$\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_{|I^c|}}} \phi_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_{|I|}, \alpha}^{(|I|)}(x). \quad (\text{D.2})$$

Aqui a soma é sobre todos os subconjuntos apropriados de $\{1, \dots, n\}$. O campo spinor-tensor $\phi^{(k)}$ pode ser tomado como⁸³

$$\phi_{\mu_1 \dots \mu_k, \alpha}^{(k)}(x) = - \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_{n-k} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n, \alpha}(x + (t_1 + \dots + t_{n-k})e) e^{\mu_{k+1}} \dots e^{\mu_n}. \quad (\text{D.3})$$

Demonstração. Se φ é da forma (D.2) com algum conjunto de campos spinor-tensor $\phi^{(k)}$, então um verifica prontamente que $P\varphi$ é zero. Por outro lado, suponha que $P\varphi$ é zero. Defina o campo $\phi^{(k)}$ pela Eq. (D.3), com algum vetor fixo e , e então substitua no lado direito da Eq. (D.2). Então o lado direito da Eq. (D.2) é lido por

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty dt_1 \dots dt_l \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_l}} \varphi_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \nu_{j_1} \dots \nu_{j_l}, \alpha}(x + (t_1 + \dots + t_l)e) e^{\nu_{j_1}} \dots e^{\nu_{j_l}},$$

onde $l \doteq n - k$. Agora usamos a identidade

$$f(x) = (-1)^k \int_0^\infty ds_1 \dots \int_0^\infty ds_k \partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_k} f(x + (s_1 + \dots + s_k)e) e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_k}$$

e obtemos

$$- \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\infty dt_1 \dots dt_n \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_l}} \partial_{\nu_{i_1}} \dots \partial_{\nu_{i_k}} \varphi_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \nu_{j_1} \dots \nu_{j_l}, \alpha}(x + \sum_{i=1}^n t_i e) \times e^{\nu_{i_1}} \dots e^{\nu_{i_k}} e^{\nu_{j_1}} \dots e^{\nu_{j_l}}.$$

Uma vez que $\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_l\} \equiv I \cup I^c = \{1, \dots, n\}$, o produto dos e 's é justamente $e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n}$, independe de k , e temos

$$- \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \partial_{\mu_{j_1}} \dots \partial_{\mu_{j_l}} \partial_{\nu_{i_1}} \dots \partial_{\nu_{i_k}} \varphi_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \nu_{j_1} \dots \nu_{j_l}, \alpha}(x + \sum_{i=1}^n t_i e) \right\} \times e^{\nu_1} \dots e^{\nu_n}.$$

⁸³De acordo com a convenção de soma utilizada nesse trabalho, entende-se a soma sobre μ_{k+1}, \dots, μ_n .

Agora por hipótese ($P\varphi = 0$) a expressão entre chaves é

$$-(-1)^n \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n, \alpha}(x + (t_1 + \cdots + t_n)e).$$

Assim, o lado direito da Eq. (D.2) é

$$(-1)^n \int_0^\infty dt_1 \cdots \int_0^\infty dt_n \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n, \alpha}(x + (t_1 + \cdots + t_n)e) e^{\nu_1} \cdots e^{\nu_n},$$

que é claro apenas $\varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n, \alpha}(x)$, como reivindicado. Isso conclui a prova. \square

No caso de campos tensoriais simétricos a demonstração é completamente análoga à desenvolvida nesse apêndice, (caso $s = n$ com $n \in \mathbb{N}_0$), veja [20, Apêndice A].

Nesse caso não temos o índice α que vem do campo de Dirac nas equações acima e $P\varphi \equiv PA$. Para $s = 1$, é justamente a derivada exterior, $(PA)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, e para $s = 2$ é a relação linearizada (1.7) entre o tensor de Riemann e a uma perturbação à métrica,

$$(PA)_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \partial_\alpha A_{\nu\beta} - \partial_\nu \partial_\alpha A_{\mu\beta} - \partial_\mu \partial_\beta A_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial_\beta A_{\mu\alpha}.$$

Apêndice E

Grau de escala

Seja u uma distribuição em \mathbb{R}^4 . A distribuição rescalada u_λ , $0 < \lambda \leq 1$, é definida (na notação informal usual) por

$$u_\lambda(\xi) \doteq u(\lambda\xi).$$

Mais formalmente, isso significa

$$\langle u_\lambda, f \rangle \doteq \langle u, f^\lambda \rangle \quad \text{com} \quad f^\lambda(\xi) \doteq \lambda^{-4} f(\lambda^{-1}\xi). \quad (\text{E.1})$$

O *scaling degree* (grau de escala) de u (em relação a origem) é o ínfimo de todos os $\omega \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\lambda^\omega \langle u_\lambda, f \rangle \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4). \quad (\text{E.2})$$

(Se não existe um tal ω , então dizemos que o grau de escala é infinito.)

Agora consideramos nossas funções de dois pontos com localização tipo-string, que são distribuições $u(\xi, e, e')$ em $\mathbb{R}^4 \times H \times H$. A distribuição u_λ que resulta do reescalamiento de u através de \mathbb{R}^4 é definida por

$$u_\lambda(\xi, e, e') \doteq u(\lambda\xi, e, e').$$

Por grau de escala de u , depois de ter integrado com funções de teste na variável e , nós entendemos o ínfimo de todos os $\omega \in \mathbb{R}$ para os quais

$$\lambda^\omega \langle u_\lambda, f \otimes h \otimes h' \rangle \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), h, h' \in \mathcal{D}(H). \quad (\text{E.3})$$

Na literatura [44, 45], isso seria denominado grau de escala de u com respeito a subvariedade $\{0\} \times H \times H$. O grau de escala com respeito às várias outras subvariedades relevantes para a definição do produto temporalmente ordenados são analisados em [46].

Proposição E.0.1 (Grau de escala). *Seja $w(\xi, e, e')$ função de dois pontos cuja parte sobre a concha de massa é da forma (3.112), com M^p sendo um polinômio de grau d . Então o grau de escala de w após integrado com uma função de teste na variável e é o máximo de 0 e $d + 2 - (n_1 + n_2)$.*

Claro que, no caso de $n_1 = n_2 = 0$ isso é justamente o fato bem conhecido, a saber, as funções de dois pontos com localização tipo-ponto com parte M^p sobre a concha de massa têm grau de escala $d + 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] Weinberg, S.: *The quantum theory of fields I*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [2] S. Weinberg, *Feynman rules for any spin*, Phys. Rev. **133** (1964), B1318–B1320.
- [3] Scharf, G.: *Quantum gauge theories*, Wiley, New York, (2001).
- [4] D. Zwanziger, *Physical states in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **D 14** (1976), 2570.
- [5] Steinmann, O.: *Perturbative Quantum Electrodynamics and axiomatic field theory*, Springer, Berlin (2000).
- [6] G. Morchio and F. Strocchi, *Charge density and electric charge in quantum electrodynamics*, J. Math. Phys. **44** (2003), 5569–5587.
- [7] Steinmann, O.: *Perturbative QED in terms of gauge invariant fields*, Ann. Phys. **157** (1984), 232–254.
- [8] J. Mund, B. Schroer, and J. Yngvason, *String-localized quantum fields from Wigner representations*, Phys. Lett. B **596** (2004), 156–162.
- [9] Mund, J., Schroer, B., Yngvason, J.: *String-localized quantum fields and modular localization*, Commun. Math. Phys. **268** (2006), 621–672.
- [10] R. F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1964.

- [11] J. Mund, *String-localized massive vector bosons without ghosts and indefinite metric: The example of massive QED*, in preparation.
- [12] J. M. Gracia-Bondía, J. Mund, and Várilly J. C., *The chirality theorem*, *Ann. Henri Poinc.* **19** (2018), 843-874.
- [13] Schroer, B.: *Beyond gauge theory: Positivity and causal localization in the presence of vector mesons*, *Eur. Phys. J. C.* **76** (2016), 378 .
- [14] J. Mund and B. Schroer, *How the Higgs potential got its shape*, Work in progress, 2017.
- [15] O. Steinmann, *A Jost-Schroer theorem for string fields*, *Commun. Math. Phys.* **87** (1982), 259–264.
- [16] S. Mandelstam, *Quantum electrodynamics without potentials*, *Ann. Phys.* **19** (1962), 1–24.
- [17] P. A. M. Dirac, *Gauge-invariant formulation of quantum electrodynamics*, *Can. J. Phys.* **33** (1955), 650.
- [18] L. T. Cardoso, J. Mund and J. C. Várilly, *String Chopping and Time-ordered Products of Linear String-localized Quantum Fields*, *Math. Phys Anal Geom.* **21:3** (2018).
- [19] D. Buchholz and K. Fredenhagen, *Locality and the structure of particle states*, *Commun. Math. Phys.* **84** (1982), 1–54.
- [20] J. Mund and E.T. Oliveira, *String-Localized Free Vector and Tensor Potentials for Massive Particles with Any Spin: I. Bosons*, *Commun. Math. Phys.* **355** (2017), 1243-1282.
- [21] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*; Springer-Verlag New York Inc., 1982.
- [22] J.C.A. Barata, *Curso de Física-Matemática (Apostilas versão 23 de agosto de 2018)*

- [23] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*; Second edition, Cambridge University Press, 1985, 1996.
- [24] W.K. Tung , *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985
- [25] O. Bratteli, D.W. Robinson , *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2* , 2º edição , 1996
- [26] J. Bros and U. Moschella, *Two-point functions and quantum fields in de Sitter universe*, Rev. Math. Phys. **8** (1996), 324.
- [27] J. Mund, *The Bisognano-Wichmann Theorem for Massive Theories*, Ann. Henri Poinc. **2** (2001), 907- 926
- [28] Mund, J.: *An algebraic Jost-Schroer theorem for massive theories*, Commun. Math. Phys. **315** (2012), 445–464.
- [29] R. Haag, *Local quantum physics*, second ed., Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [30] L. J. Thomas and E. H. Wichmann, *On the causal structure of Minkowski spacetime*, J. Math. Phys., **38** (1997), 5044-5086.
- [31] J.J. Bisognano and E.H. Wichmann, *On the duality condition for a Hermitean scalar field*, J. Math.Phys. **16** (1975), 985.
- [32] J.J. Bisognano and E.H. Wichmann, *On the duality condition for quantum fields*, J. Math.Phys. **17** (1976), 303.
- [33] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer, Berlin, 1983.
- [34] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1983.

- [35] A. Proca, *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs*, J. de Phys. et le Radium **7** (1936), 347–353.
- [36] M. Fierz, *Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin*, Helv. Phys. Acta **12** (1939), 3–37.
- [37] I.M. Gel'fand, R.A. Minlos, and Z.Ya. Shapiro, *Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications*, Pergamon Press, London, 1963.
- [38] G. Grensing, *Symmetric and traceless tensors on Minkowski space*, Rep. Math. Phys. **14** (1978), 19–26.
- [39] S. Guttenberg and G. Savvidy, *Schwinger-Fronsdal theory of abelian tensor gauge fields*, SIGMA **4** (2008), 061
- [40] Hamermesh, M.: *Group Theory and Its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley, Reading (1962).
- [41] H. van Dam and M. Veltman, *Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields*, Nucl. Phys. **B 22** (1970), 397–411
- [42] W. Rarita and J. Schwinger, Phys. Rev. **60** (1941), 61.
- [43] H. Epstein and V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Annales Poincaré Phys. Theor. **A 19** (1973), 211–295.
- [44] R. Brunetti and K. Fredenhagen, *Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds*, Commun. Math. Phys. **208** (2000), 623–661.
- [45] R. M. Schulz, *Microlocal analysis of tempered distributions*, Phd thesis, Georg-August University School of Science (GAUSS), Göttingen, 2014.
- [46] J. Mund and J. A. dos Santos, *Singularity structure of the two-point functions of string-localized free quantum fields*, in preparation.