

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Wesley de Jesus Lourenço

**Métodos de Elementos Finitos Mistos Híbridos Estabilizados para
Escoamentos Incompressíveis**

Juiz de Fora

2019

Wesley de Jesus Lourenço

**Métodos de Elementos Finitos Mistos Híbridos Estabilizados para
Escoamentos Incompressíveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração multidisciplinar, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Coorientador: Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lourenço, Wesley.

Métodos de Elementos Finitos Mistos Híbridos Estabilizados para Esco-
amentos Incompressíveis / Wesley de Jesus Lourenço. – 2019.

68 f. : il.

Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Coorientador: Grigori Chapiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, . Pro-
grama de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2019.

1. métodos de elementos finitos. 2. Stokes. 3. método de Galerkin
descontínuo. 4. métodos híbridos. 5. Navier-Stokes .I. Igreja, Iury, orient.
II. Chapiro, Grigori, coorient. III. Título.

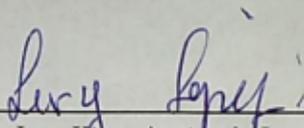
Wesley de Jesus Lourenço

Métodos de Elementos Finitos Mistos Híbridos Estabilizados para
Escoamentos Incompressíveis

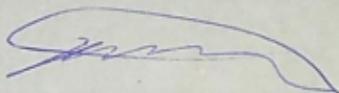
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração multidisciplinar, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em: 23/02/2019

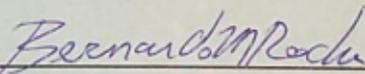
BANCA EXAMINADORA



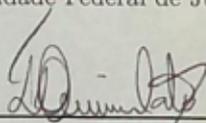
Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



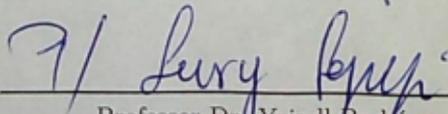
Professor Dr. Grigori Chapiro - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Professor Dr. Bernardo Martins Rocha
Universidade Federal de Juiz de Fora



Dr. Thiago de Oliveira Quinelato
Universidade Federal de Juiz de Fora



Professor Dr. Yoissell Rodríguez Núñez
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Direciono meus agradecimentos, primeiramente, ao meu amado Deus. Por sua graça e por sua misericórdia consegui chegar até aqui e sei que ainda não é o ponto final. Não poderia deixar de agradecer a toda minha família, em especial, minha mãe Benedita; mulher guerreira, honesta, linda e o maior e melhor ser humano que Deus criou. Apesar de nunca ter a vida a seu favor, apesar de todas as dificuldades, sempre fez o possível e o impossível para que eu tivesse um caminho diferente do dela. Obrigado minha rainha!

Em Juiz de Fora, durante o mestrado, conheci a pessoa que mais me apoiou e esteve ao meu lado em todos os momentos; a pessoa que fez tudo isso ter um propósito, um objetivo maior. Ela riu comigo, chorou comigo, sonhou os meus sonhos e comemorou minhas vitórias. Obrigado, Juliene Lisboa! Sem você eu jamais chegaria até o final. Você foi o suporte que eu nunca tive, em situações que eu jamais imaginei vivenciar. Te Amo!

Meus agradecimentos jamais deixariam de alcançar um grande amigo e professor, Eufélix Maurício. No primeiro ano do ensino médio, disse para um moleque sem qualquer expectativa que ele poderia conseguir bem mais do que apenas concluir o ensino médio. Ele me apresentou a universidade, acreditou em mim, me incentivou a entrar na graduação, torceu por mim, me incentivou a entrar no mestrado e hoje comemora minha conquista. Muito obrigado, Eufélix!

Estendo meus agradecimentos aos professores Iury Ângelo, Sérgio Bento, Isaac Pinheiro, Riedson Baptista, Paulo Wander e muitos outros que possibilitaram o meu primeiro mês em Juiz de Fora.

Agradeço ao meu orientador Iury Igreja e ao meu coorientador Grigori Chapiro, sem os quais este trabalho jamais se concretizaria. Agradeço pela paciência, pelas lições e ensinamentos que guardarei pelo resto da vida. A vocês e a todos os professores do PPGMC, fica o meu muito obrigado.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todos os meus amigos e colegas que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho. Dentre os quais destaco: Emmanuel Yarleque e Filipe de Paula; Muito obrigado! Deixo minhas despedidas à minha turma, mais especificamente, Johnathan Melo, Leandro Lima, Thadeu Vasconcelos, Rodrigo Fajardo e Marvelúcia Almeida. A caminhada foi longa, mas tivemos momentos bons e que jamais serão esquecidos. Desejo sucesso a todos vocês.

“Se não puder voar, corra. Se não puder correr, ande.
Se não puder andar, rasteje, mas continue
em frente de qualquer jeito.”
(Martin Luther King Jr.)

RESUMO

Neste trabalho, métodos de elementos finitos mistos híbridos estabilizados são propostos para a simulação numérica de escoamentos incompressíveis, baseados em modelos descritos pelas equações de Stokes, Oseen e Navier-Stokes. A partir de uma formulação desenvolvida e analisada para o escoamento de Stokes, propomos extensões para os problemas de Oseen e Navier-Stokes. Os métodos em questão se caracterizam pela introdução de multiplicadores de Lagrange, definidos como os traços da velocidade e pressão. Devido a escolha dos multiplicadores, esta estratégia permite a eliminação das variáveis velocidade e pressão, no nível dos elementos, condensando estas informações nos multiplicadores de Lagrange definidos nas arestas dos elementos, dando origem a um problema global que depende somente dos graus de liberdade dos multiplicadores. Quando os multiplicadores são determinados, os problemas locais são resolvidos no nível do elemento. Neste contexto, estudos numéricos são realizados para avaliar as taxas de convergência na norma L^2 obtidas em cada problema.

Palavras-chave: Métodos de elementos finitos. Stokes. Método de Galerkin descontínuo. Métodos híbridos. Navier-Stokes.

ABSTRACT

In this work, stabilized mixed hybrid finite element methods are proposed for the numerical simulation of incompressible flows, based on the models described by the Stokes, Oseen and Navier-Stokes equations. From a developed and analyzed formulation for the Stokes flow, we propose an extension for the Oseen and Navier-Stokes problems. The methods in question are characterized by the introduction of multipliers, defined as velocity and pressure traces, in order to weakly impose the continuity between the elements. Due to the choice of multipliers, this strategy allows the elimination of variables, velocity and pressure, at the element level, condensing this information into the Lagrange multipliers defined at the edges of the elements, giving rise to a global problem that depends only on the degrees of freedom of the multipliers. Once the multipliers have been determined, local problems can be solved at the element level. In this context, numerical studies are performed to evaluate the convergence rates in the L^2 -norm for each problem.

Key-words: Finite element methods. Stokes. Discontinuous Galerkin method. Hybrid methods. Navier-Stokes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Método Híbrido: Problemas locais e global (adaptado de [9]).	20
Figura 2 – Estudo numérico da influência do parâmetro de estabilização β_0 nas aproximações para o campo de velocidade em uma malha uniforme com 64 elementos quadrilaterais.	29
Figura 3 – Estudo numérico da influência do parâmetro de estabilização β_0 nas aproximações para o campo de velocidade em uma malha uniforme com 128 elementos triangulares.	30
Figura 4 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	31
Figura 5 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	31
Figura 6 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	32
Figura 7 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	32
Figura 8 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	33
Figura 9 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	33
Figura 10 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	34
Figura 11 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	34
Figura 12 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Stokes com malhas de elementos quadrilaterais.	35
Figura 13 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Stokes com malhas de elementos triangulares. .	36
Figura 14 – Convergência h do campo de velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos quadrilaterais.	43

Figura 15 – Convergência h do campo de pressão p_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos quadrilaterais.	43
Figura 16 – Convergência h do multiplicador associado à velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos quadrilaterais.	44
Figura 17 – Convergência h do multiplicador associado ao campo de pressão \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos quadrilaterais.	44
Figura 18 – Convergência h do campo de velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.	45
Figura 19 – Convergência h do campo de pressão p_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.	45
Figura 20 – Convergência h do multiplicador associado à velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.	46
Figura 21 – Convergência h do multiplicador associado à pressão \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.	46
Figura 22 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Oseen com elementos quadrilaterais.	47
Figura 23 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Oseen com elementos triangulares.	47
Figura 24 – Convergência dos métodos de Newton e Picard com tolerância $\varepsilon = 10^{-12}$ para a formulação híbrida linearizada: Logaritmo do erro da velocidade em função do número de iterações, considerando aproximações de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ e 5 utilizando elementos quadrilaterais.	56
Figura 25 – Convergência dos métodos de Newton e Picard com tolerância $\varepsilon = 10^{-12}$ para a formulação híbrida linearizada: Logaritmo do erro da velocidade em função do número de iterações, considerando aproximações de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ e 5 utilizando elementos triangulares.	56
Figura 26 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	57
Figura 27 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	57

Figura 28 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	58
Figura 29 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.	58
Figura 30 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	59
Figura 31 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	59
Figura 32 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	60
Figura 33 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.	60
Figura 34 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Navier-Stokes com elementos quadrilaterais. . .	61
Figura 35 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Navier-Stokes com elementos triangulares. . . .	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	16
2.1	Notações e Definições	16
2.2	Problema Modelo	17
2.3	Notações e Definições dos Métodos Híbridos	18
2.3.1	Espaços de Aproximação	19
2.3.2	Metodologia	20
3	PROBLEMA DE STOKES	21
3.1	Problema Modelo	21
3.2	Formulação Variacional	21
3.3	Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Stokes	22
3.4	Estudos de Convergência	28
3.4.1	Convergência h	30
3.4.2	Convergência p	35
3.5	Conclusão do Capítulo	36
4	PROBLEMA DE OSEEN	37
4.1	Problema Modelo	37
4.2	Formulação Mista Dual para o Problema de Oseen	37
4.3	Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Oseen	38
4.4	Estudos de Convergência	41
4.4.1	Convergência h	42
4.4.2	Convergência p	45
4.5	Conclusão do Capítulo	46
5	PROBLEMA DE NAVIER-STOKES	49
5.1	Problema Modelo	49
5.2	Linearização do Problema Modelo	49
5.2.1	Método de Picard	50
5.2.2	Método de Newton	50
5.3	Formulação Variacional para o Problema de Navier-Stokes	52
5.4	Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Navier-Stokes	52
5.5	Estudo de Convergência	55
5.5.1	Convergência dos Métodos de Linearização	55
5.5.2	Convergência h	55

5.5.3	Convergência p	59
5.6	Conclusão do Capítulo	61
6	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de métodos numéricos visando a obtenção de soluções aproximadas precisas para equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis tem sido de suma importância em diversas aplicações nas áreas de engenharia de petróleo, dinâmica de fluidos, hidrologia, hemodinâmica, por exemplo. Dentre as diversas aplicações, podemos destacar as que modelam escoamentos de águas subterrâneas, no qual o fluido escoar em duas regiões: uma região porosa e uma região de fluido livre. Comumente, o escoamento que ocorre na região de fluido livre é modelado pelas equações de Stokes, como pode ser visto no trabalho de Faulkner e seus colaboradores [36]. Em se tratando de aplicações na área de hemodinâmica, podemos considerar a simulação do fluxo de entrada em vasos sanguíneos através do problema de Oseen, como apresentado no trabalho de Lew e Fung [35]. Aplicações das equações de Navier-Stokes podem ser encontradas na otimização da aerodinâmica da asa de avião, como apresentado por Jameson e seus colaboradores [45]; e nas simulações de fumaça e explosões em designs gráficos desenvolvida por Selle e seus colaboradores [50].

Nas últimas décadas, muitas metodologias numéricas foram consideradas para tratar problemas com escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos, dentre as quais destacam-se os métodos de diferenças finitas, presentes, por exemplo, nos trabalhos de Takemitsu [53], com a simulação de escoamentos governados pelas equações de Navier-Stokes; e no trabalho de Morinishi e seus colaboradores [47], onde é apresentado um método de diferenças finitas com conservação de massa, momento e energia. Além dos métodos de diferenças finitas, como os supracitados, outras metodologias numéricas muito utilizadas para escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos são os métodos de volumes finitos, como exemplificado nos trabalhos de Chai e seus colaboradores [52], onde os autores modelam fluxo de radiação e transferência de calor; e no trabalho de Jenny e seus colaboradores [38], com a simulação de escoamento em meios porosos que surgem abaixo da superfície. Uma terceira classe de métodos numéricos para aproximação da solução de problemas com escoamentos incompressíveis são os métodos de elementos finitos que contemplam, por exemplo, os métodos de elementos finitos mistos, baseados na aproximação simultânea dos campos de velocidade e pressão [29, 31, 40]. Entretanto, este tipo de abordagem exige que os espaços de aproximação satisfaçam condições de compatibilidade, reduzindo a flexibilidade na construção dos espaços de elementos finitos, como por exemplo, as que empregam aproximações por bases lagrangianas de mesma ordem para velocidade e pressão [2, 5]. Aproximações estáveis bem sucedidas para este problema podem ser encontradas em Crouzeix e Raviart [30], que utiliza elementos conformes e não conformes para aproximar o problema estacionário de Stokes com interpolação descontínua para a pressão; ou em Taylor e Hood [32], que utiliza espaços de aproximações que empregam interpolações lagrangianas contínuas com uma ordem a mais para a velocidade em relação

a pressão. Além dos métodos estáveis, que visam compatibilizar o problema através da construção de espaços de aproximações, são propostos também métodos estabilizados, caracterizados pela introdução de termos (muitas vezes baseados em resíduos de mínimos quadrados das equações do modelo), que visam manter a consistência e a simetria desses problemas, adicionando estabilidade às formulações. Com isso é possível utilizar espaços de aproximações com elementos lagrangianos de mesma ordem para os campos de velocidade e pressão. Exemplos de formulações estabilizadas podem ser encontradas no trabalho de Karam Filho e Loula [16], utilizando resíduos de mínimos quadrados, e em [43], desenvolvida por Hughes e seus colaboradores, utilizando uma formulação de Petrov-Galerkin. Nesses trabalhos, são introduzidas formulações com interpolação contínua para os campos de velocidade e pressão, obtendo estabilidade inclusive nos casos com mesma ordem de aproximação. Um outro exemplo clássico de método estabilizado foi construído para o problema de Navier-Stokes, buscando compatibilizar os espaços e tratar os efeitos convectivos. O método em questão, denominado SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*), foi introduzido por Brooks e Hughes [33]. Esse método trata, principalmente, oscilações na aproximação da solução geradas pela turbulência no escoamento. Fisicamente isso ocorre quando os efeitos convectivos são predominantes em relação aos efeitos viscoso no escoamento.

Além dos métodos clássicos de elementos finitos, formulações de Galerkin Descontínuo (DG) têm sido desenvolvidas para tratar problemas de escoamentos incompressíveis. Para o problema de Stokes, Baker et al. [46] apresentaram um dos primeiros trabalhos envolvendo métodos DG; já em [17] um método DG local denominado LDG é proposto. Posteriormente, [54, 13, 23] introduziram formulações DG mistas simétricas com penalidade interior (SIPG), apresentando estabilizações apenas para o campo de velocidade. Em [13] Schötzau et al. propuseram uma formulação DG com termos de estabilização tanto para o campo de velocidade como para o campo de pressão, assim como em [24]. Para o problema de Oseen, destacam-se os trabalhos presentes em [20], que introduziu e analisou um método DG local para o problema de Oseen, denominado LDG. Mais tarde, [37] apresentou e analisou uma formulação DG para a solução do problema generalizado de Oseen; enquanto [8] propôs a análise de um método DG, demonstrando taxas ótimas de convergências a partir de escolhas adequadas de parâmetros presentes em sua formulação. Trabalhos que abordam o problema de Navier-Stokes, utilizando métodos DG, podem ser encontrados em [11], que apresenta um método LDG localmente conservativo; em [34], estudos numéricos são realizados para verificar a performance de um método DG. Formulações DG considerando aproximações de alta ordem para a solução do problema de Navier-Stokes podem ser encontradas em [51, 7, 4].

Formulações de Galerkin descontínuo apresentam muitas vantagens, dentre as quais se destacam: robustez, conservação local, flexibilidade na implementação de estratégias de h e p adaptatividade e estabilizações; além da possibilidade de uso de espaços de elementos

finitos que consistem em polinômios descontínuos por partes [9]. Por outro lado, essas formulações apresentam alto custo computacional por conta dos muitos graus de liberdade, além da complexidade de implementação, principalmente em casos de alta ordem. Em virtude disso, hibridizações para os métodos DG foram propostas com o intuito de derivar novos métodos de elementos finitos, com melhores características de estabilidade e reduzido custo computacional, porém, preservando a robustez e a flexibilidade dos métodos DG [49, 18, 48, 1, 9].

A primeira hibridização do método de elementos finitos foi proposta em 1965 por Fraeijns de Veubeke [10] que desenvolveu um método para tratar as equações da elasticidade linear utilizando uma manipulação algébrica matricial denominada *condensação estática*, que era vista unicamente como uma técnica computacional. Duas décadas depois, Arnold et al. [21] provaram que essa técnica era mais do que um truque computacional, visto que a nova variável que impõe a continuidade do fluxo de forma fraca em cada aresta, interpretada como o multiplicador de Lagrange, contém informações adicionais sobre a solução exata [29].

Recentemente, diversas formulações mistas híbridas foram propostas para escoamentos incompressíveis. Em se tratando do problema de Stokes, Cockburn e seus colaboradores introduziram hibridizações de Galerkin descontínuo em duas e três dimensões, respectivamente, em [26, 27]. Na mesma época, Carrero e Cockburn [12] introduziram e analisaram uma formulação LDG hibridizada, otimamente convergente. Mais tarde, [39] apresentou comparações de formulações hibridizadas de Galerkin descontínuo que adotam multiplicadores de Lagrange para sistemas de equações que envolvem as variáveis velocidade-pressão-gradiente da velocidade, velocidade-pressão-tensão e velocidade-pressão-vorticidade. Para o problema de Oseen, Aghili e Di Pietro [19] propuseram uma formulação para problemas em que a advecção é dominante, na qual a pressão é aproximada por polinômios descontínuos. Em [55] estudos numéricos para o problema de Oseen foram realizados. Nesses, taxas ótimas para os campos de velocidade, pressão e para o gradiente do campo de pressão são verificadas. Dentre as diversas referências com formulações hibridizadas para as equações de Navier-Stokes, considere a apresentada em [3], que propõe uma hibridização de Galerkin descontínuo, exibindo taxas ótimas de convergência para velocidade, pressão e gradiente da velocidade, em problemas com viscosidade dominante. Em [28], uma formulação hibridizada é proposta considerando malhas poliedrais.

Métodos de elementos finitos mistos híbridos estabilizados para o problema de Stokes destacam-se, por exemplo, no trabalho de Egger e Waluga [18], no qual introduziram e analisaram uma formulação, considerando multiplicadores associados ao campo de velocidade, com estabilização apenas para o campo de velocidade. Mais tarde, Igreja e Loula [15] também propuseram uma formulação híbrida estabilizada para o problema de Stokes, porém com estabilizações tanto para o campo de velocidade como para o campo

de pressão, incluindo além do multiplicador para a velocidade um multiplicador associado ao campo de pressão. Nesse trabalho demonstraram a unicidade da solução dos problemas locais e verificaram, através de estudos de convergência, taxa ótima para o campo de velocidade na norma L^2 com elementos triangulares e quadrilaterais, atribuindo mesma ordem para velocidade, pressão e multiplicadores; e uma ordem a mais para o campo de velocidade em relação ao campo de pressão. Uma formulação mista híbrida similar, adotando, também, multiplicadores associados aos campos de velocidade e pressão foi proposta e analisada por Rhebergen e Wells em [22]. Como resultado da análise, os autores demonstraram que sua formulação é localmente conservativa quando o parâmetro de estabilização associado ao campo de pressão é nulo. Além disso, demonstraram taxa ótima de convergência para os campos de velocidade e pressão na norma L^2 .

Neste contexto de métodos mistos híbridos estabilizados, o presente trabalho recorda e discute as formulações desenvolvidas em [18], [15] e [22] para o problema de Stokes. A partir disso, são realizadas comparações entre os métodos supracitados considerando suas respectivas limitações, o que permite delinear os seguintes objetivos:

- Objetivo geral:
 - Construir e implementar em linguagem de programação Fortran formulações para os problemas de Oseen e Navier-Stokes, a partir da extensão da formulação que trata o problema de Stokes em [22].
- Objetivos específicos:
 - Apresentar uma metodologia de resolução via técnica de *condensação estática* a ser utilizada na construção das três formulações
 - Linearizar o problema de Navier-Stokes com os métodos de Picard e Newton
 - Comparar os resultados de convergência dos métodos de Newton e Picard para a formulação de Navier-Stokes
 - Obter resultados das convergências p e h para os três métodos na norma $L^2(\Omega)$.

A estrutura do trabalho foi construída da seguinte maneira: no capítulo 2 a fundamentação teórica do trabalho é apresentada para o entendimento da construção das formulações. No capítulo 3 o problema de Stokes é introduzido e para este, estudos numéricos são desenvolvidos a fim de verificar a convergência h e a convergência p do método. No capítulo 4, uma extensão do método híbrido para o problema de Stokes é proposta para tratar o problema de Oseen, bem como estudos numéricos de convergência na norma L^2 . No capítulo 5, a formulação de Oseen é estendida e linearizada para tratar o problema de Navier-Stokes. Por fim, no capítulo 6 são feitas conclusões gerais acerca dos três métodos estudados, além de destacar sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo apresenta o problema modelo estudado neste trabalho, notações e definições que serão utilizadas ao longo do texto, bem como relações e propriedades matemáticas indispensáveis para a apresentação dos métodos de elementos finitos mistos híbridos nos capítulos subsequentes.

2.1 Notações e Definições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (esta dissertação limita-se ao caso bidimensional) um domínio limitado com contorno $\Gamma = \partial\Omega$. O espaço das funções quadrado integráveis em Ω define-se como

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \int_{\Omega} q^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

Neste contexto, o espaço de Hilbert de ordem “0” em Ω é dado por $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, cuja norma é dada por $\|q\|_0 = \|q\|$. De modo geral, dado um inteiro $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ define o espaço de Hilbert de ordem m sobre Ω , contendo funções $q \in L^2(\Omega)$ tais que sua m -ésima derivada pertence a $L^2(\Omega)$. Em símbolos,

$$H^m(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : D^\alpha q \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}, \text{ com}$$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

sendo α_1 e α_2 inteiros não negativos. Nesse espaço, a norma e a semi-norma são denotadas por $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ e $|\cdot|_{m,\Omega}$, respectivamente.

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é o espaço das funções em $H^1(\Omega)$ com traço nulo na fronteira, definido como

$$H_0^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ em } \Gamma\}. \quad (2.1)$$

Semelhantemente, o subespaço $L_0^2(\Omega)$ é o espaço das funções em $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω e expressa-se por

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.2)$$

Símbolos em negrito denotam vetores ou tensores. Definindo vetores \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, então $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ é o tensor com componentes $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = v_i w_j$ e $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ é o produto escalar entre dois tensores. Com essa notação,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{w} = \sum_{i,j=1}^2 v_i A_{ij} w_j = \mathbf{A} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}). \quad (2.3)$$

Além disso, para funções suaves $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, considere as seguintes definições:

$$\nabla f := [\partial_{x_i} f]_{i=1}^2, \quad \nabla \mathbf{g} := [\partial_{x_j} g_i]_{i,j=1}^2, \quad (2.4)$$

$$\text{e} \quad \text{div } \mathbf{g} := \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} g_i, \quad \text{div } \mathbf{H} := \left[\sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} h_{ij} \right]_{i=1}^2, \quad (2.5)$$

em que div e ∇ denotam, respectivamente, os operadores divergência e gradiente. De maneira semelhante, o operador laplaciano Δ define-se como segue:

$$\Delta f := \text{div } \nabla f = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i}^2 f \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{g} := \text{div } \nabla \mathbf{g} = \left[\sum_{j=1}^2 \partial_{x_j}^2 g_i \right]_{i=1}^2. \quad (2.6)$$

2.2 Problema Modelo

O escoamento incompressível de um fluido viscoso, sujeito a efeitos inerciais e forças de corpo, é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais [42]:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.7)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{u} define o campo de velocidade, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor das tensões (ou tensor de Cauchy) e \mathbf{f} denota uma força atuando sobre o fluido. Em (2.7) tem-se a equação da conservação do momento. A conservação da massa é garantida em (2.8). Para fluidos newtonianos, o tensor de Cauchy pode ser definido como [42]:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}, \quad (2.9)$$

sendo p a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade, $\nu := \Re^{-1}$ a viscosidade e \Re o número de Reynolds. Além disso, o tensor $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ é definido por

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\}. \quad (2.10)$$

Aplicando o operador divergência na equação (2.9), utilizando a identidade $\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u})$ e a equação da continuidade (2.8), chega-se em

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p.$$

Substituindo esse resultado na equação (2.7) obtêm-se as equações de Navier-Stokes, que podem ser escritas como

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) descreve a condição de contorno de Dirichlet, na qual o campo de velocidade é prescrito por uma função $\bar{\mathbf{u}} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ao longo desta dissertação três problemas são tratados: Problema de Stokes, Problema de Oseen e Problema de Navier-Stokes. Todos estes podem ser escritos a partir do conjunto de equações abaixo:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2.16)$$

Definindo $\mathbf{w} = 0$ surge o problema de Stokes, no qual os efeitos convectivos são negligenciados. Por outro lado, a escolha $\mathbf{w} = \mathbf{b}$ definirá o problema de Oseen, sendo \mathbf{b} uma velocidade conhecida, próxima da solução \mathbf{u} . Finalmente, escolhendo $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ surge o problema de Navier-Stokes.

Na próxima seção algumas definições importantes serão introduzidas e relacionadas às formulações de elementos finitos híbridos que visam aproximar cada um dos problemas propostos.

2.3 Notações e Definições dos Métodos Híbridos

Seja \mathcal{T}_h uma discretização regular do domínio Ω em elementos finitos K definida como

$$\mathcal{T}_h = \{K\} := \text{união de todos os elementos } K$$

da discretização \mathcal{T}_h . Para cada aresta e dos elementos K , é necessário definir os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{E}_h = \{e, \text{ tal que } e \text{ é uma aresta de cada elemento } K \in \mathcal{T}_h\}$$

define o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K da partição \mathcal{T}_h ,

$$\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h, \text{ tal que } e \text{ é uma aresta interior, isto é, } e \notin \Gamma\},$$

define o conjunto das arestas interiores e

$$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h, \text{ tal que } e \in \Gamma\},$$

define o conjunto das arestas da fronteira Γ . Uma vez que o domínio Ω é poligonal e \mathcal{T}_h é uma partição regular de Ω , então existe $c > 0$ tal que $h \leq ch_e$, em que h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial K$ e h (parâmetro da malha) é o diâmetro do elemento. Cada aresta e de cada elemento K está associada a um vetor normal unitário \mathbf{n}_K .

Para qualquer escalar $q_h \in \mathcal{E}_h$, a semi-norma dependente da malha é definida por

$$|q_h|_{+1/2, \mathcal{T}_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q_h|_{+1/2, \partial K}^2 \quad \text{e} \quad |q_h|_{-1/2, \mathcal{T}_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q_h|_{-1/2, \partial K}^2, \quad (2.17)$$

com

$$|q_h|_{+1/2,\partial K} := h_k^{+1/2}|q_h|_{0,\partial K} \quad \text{e} \quad |q_h|_{-1/2,\partial K} := h_k^{-1/2}|q_h|_{0,\partial K}. \quad (2.18)$$

Para funções escalares $q_h \in H^m(\mathcal{T}_h)$, considere as seguintes norma e semi-norma:

$$\|q_h\|_{m,h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q_h\|_{m,K}^2 \quad \text{e} \quad |q_h|_{m,h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q_h|_{m,K}^2. \quad (2.19)$$

As definições (2.17), (2.18) e (2.19) também são válidas para funções vetoriais $\mathbf{v}_h \in \mathcal{E}_h$.

Para estabelecer uma conexão entre os métodos DG e os métodos híbridos, algumas definições comumente utilizadas para formular e analisar métodos de Galerkin descontínuo serão recordadas. Dados os elementos K^+ e $K^- \in \mathcal{T}_h$ compartilhando a aresta $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$, os correspondentes vetores normais unitários são definidos por \mathbf{n}_{K^+} e \mathbf{n}_{K^-} em e . Para uma função escalar q , uma função vetorial \mathbf{v} ou uma função matricial \mathbf{A} , suaves em cada elemento K^\pm , $(\mathbf{A}^\pm, \mathbf{v}^\pm, q^\pm)$ simbolizam os traços de $(\mathbf{A}, \mathbf{v}, q)$ na aresta e do interior de K^\pm , respectivamente. A seguir, os operadores salto e média, nessa ordem, são definidos em $e \in \mathcal{E}_h^0$ como

$$[[q]] = q^+ \mathbf{n}_{K^+} + q^- \mathbf{n}_{K^-} \quad \text{e} \quad \{\{q\}\} = \frac{1}{2}(q^+ + q^-); \quad (2.20)$$

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}_{K^-} \quad \text{e} \quad \{\{\mathbf{v}\}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-); \quad (2.21)$$

$$[[\mathbf{A}]] = \mathbf{A}^+ \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{A}^- \mathbf{n}_{K^-} \quad \text{e} \quad \{\{\mathbf{A}\}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-). \quad (2.22)$$

Para as arestas $e \in \mathcal{E}_h^\partial$, os operadores salto e média são definidos como

$$\{\{q\}\} = q, \quad [[q]] = q\mathbf{n}; \quad \{\{\mathbf{v}\}\} = \mathbf{v}, \quad [[\mathbf{v}]] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}; \quad \{\{\mathbf{A}\}\} = \mathbf{A}, \quad [[\mathbf{A}]] = \mathbf{A}\mathbf{n}, \quad (2.23)$$

sendo \mathbf{n} o vetor unitário normal à $\partial\Omega$. Por fim, o salto triplo $[[[\cdot]]]$ do vetor \mathbf{v} sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h^0$ pode ser expresso por

$$[[[\mathbf{v}]]] = \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_{K^-} \quad (2.24)$$

ou como

$$[[[\mathbf{v}]]] = \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.25)$$

para as arestas $e \in \mathcal{E}_h^\partial$.

2.3.1 Espaços de Aproximação

Para a construção das formulações híbridas, é necessário introduzir *espaços de funções quebradas*. Esses espaços de dimensão finita são definidos sobre a discretização \mathcal{T}_h como segue.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h^k &= \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{S}_k(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Q_h^l &= \left\{ q \in L^2(\Omega); q|_K \in \mathbb{S}_l(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que $\mathbb{S}_k(K)$ pode ser denotado por $\mathbb{P}_k(K)$, isto é, o espaço das funções polinomiais com grau menor do que ou igual a k , associadas com elementos triangulares; analogamente, é possível denotar $\mathbb{S}_k(K)$ por $\mathbb{Q}_k(K)$, ou seja, o espaço das funções polinomiais com grau menor do que ou igual a k associadas com elementos quadrilaterais.

2.3.2 Metodologia

A metodologia utilizada para obter aproximações da solução de cada problema proposto ao longo deste trabalho consiste na aplicação da técnica de *condensação estática*. Para tanto, multiplicadores de Lagrange são introduzidos entre as arestas de cada elemento finito $K \in \mathcal{T}_h$. Esses multiplicadores têm como principal objetivo impor as condições de continuidade entre os elementos de maneira fraca, ou seja, forçar a continuidade entre as arestas de cada elemento diretamente nas formulações. Existem diferentes possibilidades para escolhas dos multiplicadores. Em [25] os multiplicadores são definidos como o fluxo normal; já em [18, 22, 15 e 14], são definidos como o traço da variável de interesse, isto é, o valor da variável de interesse (neste trabalho, velocidade e pressão) definido nas arestas de cada elemento. A partir da introdução dos multiplicadores de Lagrange, a técnica de *condensação estática* pode ser aplicada. Com isso, damos origem a dois tipos de problemas: problema global, definido na malha \mathcal{T}_h , e problemas locais, definidos em cada elemento. A Figura 1 ilustra essa estratégia de resolução: no lado direito, tem-se um problema global, definido na malha \mathcal{T}_h . A partir da resolução desse problema, os multiplicadores são determinados nas arestas de cada elemento. Desse modo, os problemas locais (Figura 1, lado esquerdo) são resolvidos no nível do elemento.

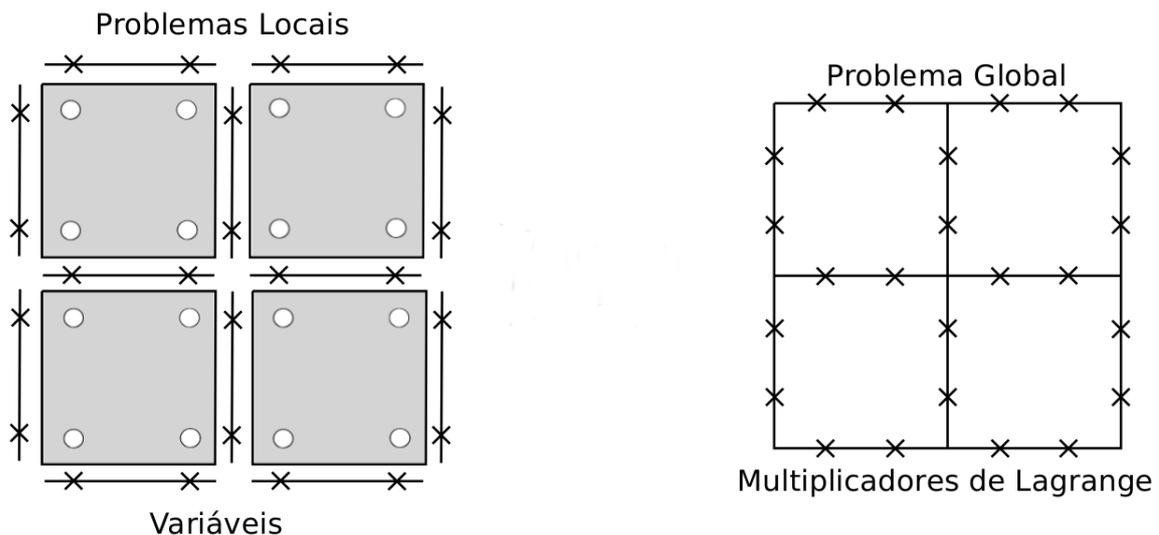


Figura 1 – Método Híbrido: Problemas locais e global (adaptado de [9]).

3 PROBLEMA DE STOKES

O Problema de Stokes é um caso particular do Problema de Navier-Stokes para baixos valores do número de Reynolds. Neste caso os efeitos convectivos são desprezíveis em relação aos efeitos viscosos e, por isso, podem ser negligenciados. O problema de Stokes é obtido adotando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ em (2.14).

3.1 Problema Modelo

As equações de Stokes descrevem o escoamento lento e laminar de um fluido newtoniano, incompressível e com efeitos gravitacionais e inerciais desprezíveis. O conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem esse escoamento pode ser definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com contorno $\Gamma = \partial\Omega$ como segue.

Problema de Stokes. *Dadas a viscosidade $\nu > 0$, e uma fonte $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, encontre o campo de velocidade $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a pressão $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que*

$$-\nu\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) satisfaz a condição de compatibilidade

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad (3.4)$$

que expressa o balanço do fluxo através de sua fronteira associado à incompressibilidade do fluido, sendo \mathbf{n} o vetor unitário exterior normal a Γ .

3.2 Formulação Variacional

A fim de apresentar uma formulação variacional para o **Problema de Stokes**, a equação (3.1) é multiplicada por uma função teste $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$, a equação (3.2) é multiplicada por uma função teste $q \in L_0^2(\Omega)$ e ambas as equações são integradas em Ω . Com isso, obtém-se

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.6)$$

Integrando, por partes, o primeiro e o segundo termos do lado esquerdo da equação (3.5), multiplicando a equação (3.6) por (-1) para garantir a simetria do sistema e impondo a condição (3.3), a formulação fraca mista dual clássica pode ser enunciada como:

Encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$, de modo que

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad (3.7)$$

$$- \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (3.8)$$

ou ainda, em formas bilineares,

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = f(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.9)$$

com

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

O problema (3.9) possui uma única solução $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$, garantida pelo Teorema de Brezzi [5] (veja mais detalhes em [31, 44, 40]).

A partir dos espaços de aproximações conformes $\mathcal{U}_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ e $\mathcal{P}_h \subset L_0^2(\Omega)$, é possível apresentar a seguinte aproximação de elementos finitos via método de Galerkin:

Encontrar o par $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{P}_h$, tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = f(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \end{cases} \quad (3.10)$$

Uma opção de espaço de elementos finitos conformes cujas condições de compatibilidade entre os mesmos sejam satisfeitas para a formulação (3.10) foi proposta por Taylor-Hood em [32] e é conhecida como elementos de Taylor-Hood, caracterizados por bases lagrangianas que interpolam a velocidade com uma ordem a mais em relação a pressão.

3.3 Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Stokes

Nesta seção, formulações mistas híbridas propostas por [15, 18, 22] para o Problema de Stokes são recordadas. Para tanto, é necessário definir o problema (3.1)-(3.3) em cada elemento K de uma malha de elementos finitos \mathcal{T}_h , resultando no seguinte problema forte local:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } K, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } K, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (3.13)$$

suplementado pelas condições de interface

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (3.14)$$

$$\llbracket p \mathbf{I} - \nu \nabla \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0. \quad (3.15)$$

Os operadores salto $[\![\cdot]\!]$ e $[\![\![\cdot]\!]\!]$ são devidamente definidos na Seção (2.3). Nas equações (3.14) e (3.15), esses operadores indicam que a velocidade e o fluxo de Stokes são contínuos entre as arestas interiores de quaisquer dois elementos que compartilham dessa mesma aresta.

Multiplicando a equação (3.11) por uma função teste \mathbf{v} , a equação (3.12) por uma função teste q e integrando sobre K , tem-se

$$-\nu \int_K \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_K \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (3.16)$$

$$\int_K q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.17)$$

Integrando, por partes, o primeiro e o segundo termos do lado esquerdo da equação (3.16) e multiplicando a equação (3.17) por (-1) , obtém-se o seguinte problema fraco local:

$$\begin{aligned} \nu \int_K \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_K p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\partial K} p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ - \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

É possível aproximar o problema (3.18) em espaços de dimensão finita \mathbf{V}_h^k e Q_h^l , definidos em (2.26). Desse modo, a partir das funções $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$ e $q_h \in Q_h^l$, surge a seguinte aproximação do problema (3.18) definido em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\partial K} p_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para impor a continuidade entre os elementos dada pelas equações (3.14) e (3.15), introduzimos um multiplicador de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h \in \hat{\mathcal{V}}_h^m$, definido como o traço da velocidade, isto é, $\hat{\mathbf{u}}_h = \mathbf{u}|_e$, entre as arestas dos elementos $e \in \mathcal{E}_h$. Esse multiplicador encontra-se no espaço

$$\hat{\mathcal{V}}_h^m = \left\{ \hat{\mathbf{v}}_h \in [L^2(\mathcal{E}_h)]^2 : \hat{\mathbf{v}}_h \in [p_m(e)]^2, \forall e \in \mathcal{E}_h, \hat{\mathbf{v}}_h|_e = \mathbf{0}, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \right\},$$

e permite apresentar a formulação mista híbrida a seguir, proposta e analisada por Egger e Waluga em [18].

Formulação E-W: *Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e o multiplicador de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h \in \hat{\mathcal{V}}_h^m$, tais que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e para todo $\hat{\mathbf{v}}_h \in \hat{\mathcal{V}}_h^m$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h], [p_h, q_h]) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} p_h (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} q_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h], [p_h, q_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds \right. \\ &\quad - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds \\ &\quad \left. - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

sendo

$$\beta_u = \frac{\nu \beta_0}{h}, \quad \text{com } \beta_0 > 0, \quad (3.22)$$

o parâmetro de estabilização para o campo de velocidade.

Para solução exata regular $\mathbf{u} \in H^{s+1}(\Omega)$ e $p \in H^s(\Omega)$, os autores demonstraram as seguintes taxas de convergência na norma da energia:

$$\|[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h]\|_{1,h} + \|p - \hat{p}_h\|_{0,1} \leq Ch^{\min\{k,s\}} (\|\mathbf{u}\|_{H^{s+1}} + \|p\|_{H^s}),$$

com as respectivas normas para os campos de velocidade e pressão

$$\|(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})\|_{1,h}^2 := \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + |\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}|_{+1/2, \partial \mathcal{T}_h}^2 \quad (3.23)$$

$$\|q\|_{0,h}^2 := \|q\|_{\mathcal{T}_h}^2. \quad (3.24)$$

Mais tarde, Igreja e Loula [15] provaram que os problemas locais associados a essa formulação não são resolvíveis, o que impede a aplicação da técnica de *condensação estática*. Nessa direção os autores propuseram uma formulação mista híbrida que inclui, além de um multiplicador de Lagrange associado a velocidade, um multiplicador relacionado ao campo de pressão. Esse último é definido como o traço da pressão, isto é, $\hat{p}_h = p|_e$ no espaço

$$\hat{\mathcal{Q}}_h^m = \{\hat{q}_h \in L^2(\mathcal{E}_h) : \hat{q}_h \in p_m(e), \forall e \in \mathcal{E}_h\}, \quad (3.25)$$

onde $p_m(e)$ denota o espaço das funções polinomiais com grau menor do que ou igual a m . Essa estratégia deu origem à seguinte formulação:

Formulação I-L: *Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e os multiplicadores de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{\mathcal{Q}}_h^m$, tais que para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e para todo $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{\mathcal{Q}}_h^m$,*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}([\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h], [p_h, q_h]) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) \, ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O multiplicador \hat{p}_h associado ao campo da pressão surge naturalmente na formulação a partir da integração por partes do termo que contém o gradiente da pressão na equação

(3.11). A partir desta escolha para o multiplicador, podemos inserir o seguinte termo de estabilização na formulação:

$$\beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) ds, \quad (3.27)$$

onde

$$\beta_p = \frac{h\beta_1}{\nu} \quad (3.28)$$

denota o parâmetro de estabilização associado ao campo de pressão. Desse modo, o termo (3.27) não apenas torna os problemas locais resolvíveis, como também inclui uma estabilidade adicional à aproximação do campo de pressão.

Uma abordagem similar à utilizada para a **Formulação I-L** foi apresentada e analisada por Rhebergen e Wells em [22]. A partir da introdução de multiplicadores de Lagrange para os campos de velocidade e pressão, os autores derivaram uma formulação mista híbrida, enunciada a seguir.

Formulação R-W: *Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^l$ e os multiplicador de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{\mathcal{Q}}_h^m$, tais que para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^l$ e para todo $[\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{\mathcal{Q}}_h^m$,*

$$\mathbf{B}_h^{st}([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) = \mathbf{F}_h^{st}([\mathbf{v}_h, q_h]), \quad (3.29)$$

em que

$$\mathbf{B}_h^{st}([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) = \mathcal{L}([\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h], [p_h, q_h]) \quad (3.30)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K ds + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{n}_K ds \quad (3.31)$$

$$+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) ds \quad (3.32)$$

e

$$\mathbf{F}_h^{st}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}. \quad (3.33)$$

A formulação (3.29) se diferencia da formulação (3.26) devido a inclusão dos termos cruzados entre \hat{p}_h e $\hat{\mathbf{v}}_h$ e \hat{q}_h e $\hat{\mathbf{u}}_h$. A inclusão destes termos torna o método proposto por Rhebergen e Wells em [22] consistente, diferentemente do método proposto por Igreja e Loula em [15].

Para a **Formulação R-W** os autores demonstraram resultados da consistência e da continuidade da formulação. Além disso, a estabilidade foi provada para os casos em que se atribui mesma ordem de aproximação para os campos de velocidade e pressão e uma ordem a mais para o campo de velocidade em relação a pressão. Os resultados

supracitados foram obtidos através das respectivas normas para os campos de velocidade e pressão:

$$\|(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})\|_{1,h}^2 := \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + |\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}|_{+1/2, \partial \mathcal{T}_h}^2, \quad (3.34)$$

$$\|q\|_{0,h}^2 := \|q\|_{\mathcal{T}_h}^2 + |q - \hat{q}|_{-1/2, \partial \mathcal{T}_h}^2. \quad (3.35)$$

É importante ressaltar que a norma utilizada para demonstrar existência, unicidade e estimativas de erro da formulação (3.32), se comparada a norma (3.23)-(3.24), inclui um termo relacionado a estabilização β_p em (3.35), isto se deve ao fato da inclusão do multiplicador associado a pressão.

Neste contexto, estimativas de erro na norma L^2 demonstradas em [22] garantem que escolhas de elementos do tipo $[\mathbb{S}_k]^2 - \mathbb{S}_k$ ou $[\mathbb{S}_k]^2 - \mathbb{S}_{k-1}$ acarretam nas seguintes taxas de convergência para os campos de velocidade e pressão:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1} \quad \text{e} \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch^k. \quad (3.36)$$

Os resultados numéricos para o problema de Stokes exibidos nas próximas seções são obtidos através da **Formulação R-W**. Em virtude disso, cabem alguns comentários a seu respeito. Os termos

$$\nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) ds \quad \text{e} \quad \int_{\partial K} q_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{n}_K ds,$$

por exemplo, foram inseridos na formulação por meio do multiplicador de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h$ para garantir a simetria da formulação; já os termos

$$\beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) ds \quad \text{e} \quad \beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) ds,$$

foram introduzidos através dos multiplicadores de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h com o objetivo de garantir estabilidade para o campo de velocidade e para o campo de pressão, respectivamente.

A seguir, a técnica de *condensação estática* será aplicada. Como discutido em seções anteriores, essa técnica se caracteriza pela resolução de dois tipos de problemas: problema local e problema global. A partir das formas bilineares $a_{SH}^{st}(\cdot, \cdot)$, $b_{SH}^{st}(\cdot, \cdot)$, e do funcional $f_{SH}^{st}(\cdot)$, o **problema local** pode ser definido como

$$a_{SH}^{st}([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) + b_{SH}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) = f_{SH}([\mathbf{v}_h, q_h]) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (3.37)$$

com

$$\begin{aligned} a_{SH}^{st}([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h ds \\ &\quad - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h ds + \beta_u \int_{\partial K} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h ds \\ &\quad - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h d\mathbf{x} \\ &\quad + \beta_p \int_{\partial K} p_h q_h ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{SH}^{st}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{u}}_h \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\
&+ \int_{\partial K} (\hat{p}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h q_h \, ds
\end{aligned} \tag{3.38}$$

e

$$f_{SH}^{st}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \tag{3.39}$$

Ademais, com as formas bilineares $c_{SH}^{st}(\cdot, \cdot)$ e $d_{SH}^{st}(\cdot, \cdot)$, pode-se definir o **problema global** pela equação

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{SH}^{st}([\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} d_{SH}^{st}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h]) = 0, \tag{3.40}$$

sendo

$$\begin{aligned}
c_{SH}^{st}([\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) &= \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{u}_h \, ds \\
&+ \int_{\partial K} (\hat{q}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{q}_h p_h \, ds
\end{aligned} \tag{3.41}$$

e

$$\begin{aligned}
d_{SH}^{st}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h]) &= \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds + \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h \hat{q}_h \, ds \\
&- \int_{\partial K} \hat{p}_h \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \int_{\partial K} \hat{q}_h \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{u}}_h \, ds.
\end{aligned}$$

A equação (3.37) juntamente com a equação (3.40) podem ser reescritas para formar o seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{A}_K \mathbf{U} + \mathbf{B}_K \mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.42}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{C}_K \mathbf{U} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{D}_K \mathbf{\Lambda} = 0, \tag{3.43}$$

com \mathbf{U} e $\mathbf{\Lambda}$ definidos por, respectivamente,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_h, p_h] \quad \text{e} \quad \mathbf{\Lambda} = [\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h]. \tag{3.44}$$

Para o caso no qual a formulação é simétrica, tem-se $c_{SH}^{st}(\cdot, \cdot) = b_{SH}^{st}(\cdot, \cdot)^T$ e, portanto, $\mathbf{C}_K = \mathbf{B}_K^T$. Multiplicando a equação (3.42) por \mathbf{A}_K^{-1} tem-se a seguinte expressão para \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_K^{-1} (\mathbf{F}_K - \mathbf{B}_K \mathbf{\Lambda}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.45}$$

Vale ressaltar que a matriz \mathbf{A} é invertível devido a escolha do multiplicador associado a pressão, além do associado a velocidade, que possibilita a inclusão de forma consistente do termo de estabilização (3.27) (para mais detalhes ver [15]).

Assim, substituindo (3.45) em (3.43), eliminam-se as variáveis de interesse \mathbf{U} em favor do multiplicador $\mathbf{\Lambda}$, redefinindo o problema global como

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{B}_K - \mathbf{D}_K) \mathbf{\Lambda} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{C}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{F}_K. \quad (3.46)$$

Resolver o problema global consiste em resolver o sistema linear (3.46), cuja solução fornece o vetor $\mathbf{\Lambda}$ nas arestas de cada elemento da discretização \mathcal{T}_h . A partir de um pós-processamento de $\mathbf{\Lambda}$ na equação (3.45), \mathbf{U} pode ser determinado para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$.

Nos próximos capítulos a metodologia de resolução via *condensação estática* será aplicada nos problemas de Oseen e Navier-Stokes.

3.4 Estudos de Convergência

Nesta seção serão exibidos resultados numéricos para avaliar a convergência da **Formulação R-W** (3.29) proposto para a solução do problema de Stokes. Esses estudos contemplam o emprego de elementos triangulares e quadrilaterais, em simulações denotadas por $\mathbf{P}_k \mathbb{P}_l - p_m$ e $\mathbf{Q}_k \mathbb{Q}_l - p_m$, respectivamente. As letras k , l e m denotam o grau das funções polinomiais para aproximação da velocidade, da pressão e dos multiplicadores de Lagrange, nessa ordem.

Todas as simulações foram realizadas em um domínio bidimensional

$$\Omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \quad (3.47)$$

com condição de contorno de Dirichlet, dada como o valor da solução exata no contorno, e Reynolds $\Re = 20$, considerando a solução exata de Kovasznay em [41], dada por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 - \exp(\lambda x) \cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} \exp(\lambda x) \sin(2\pi y) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$p = \frac{1}{2} \exp(2\lambda x) + c_0, \text{ com } c_0 \in \mathbb{R} \quad (3.49)$$

e

$$\lambda = \frac{\Re}{2} - \sqrt{\frac{\Re^2}{4} + 4\pi^2}.$$

A constante c_0 é obtida integrando a equação da pressão (3.49) em Ω e igualando a zero, isto é, impondo média nula na pressão.

Substituindo as equações (3.48)-(3.49) no problema modelo (3.1)-(3.3), tem-se

$$\mathbf{f} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (3.50)$$

Para verificar o desempenho do método híbrido em diferentes cenários, seis tipos de combinações de bases lagrangianas foram escolhidas. Essas combinações são aproximadas por funções bilineares e lineares, associadas a elementos quadrilaterais e triangulares, respectivamente. São elas: $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1 - p_1$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1 - p_1$, que utilizam funções bilineares e lineares para aproximações de velocidade, pressão e multiplicadores; $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 - p_2$, que utilizam funções biquadráticas e quadráticas para aproximação da velocidade e do multiplicadores, bem como polinômios bilineares e lineares para aproximação da pressão. E finalmente, $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2 - p_2$, que utilizam funções biquadráticas e quadráticas para aproximações da velocidade, pressão e multiplicadores.

Para os parâmetros de estabilização β_0 e β_1 , adotou-se $\beta_1 = \beta_0$. A escolha do parâmetro β_0 foi feita com base no estudo numérico que avalia a influência desse parâmetro no erro da velocidade, como mostrado na Figura 2 e na Figura 3. Essas figuras apresentam resultados obtidos nas simulações com malhas uniformes, discretizadas em 64 elementos quadrilaterais e triangulares, respectivamente. Para esse estudo, o método (3.29) foi simulado diversas vezes, sendo que em cada simulação, o parâmetro de estabilização sofreu variação em uma unidade. Feito isso, o erro associado à velocidade foi observado e atribuído a cada β_0 . Ao final escolheu-se o β_0 que apresentou o menor erro associado à velocidade.

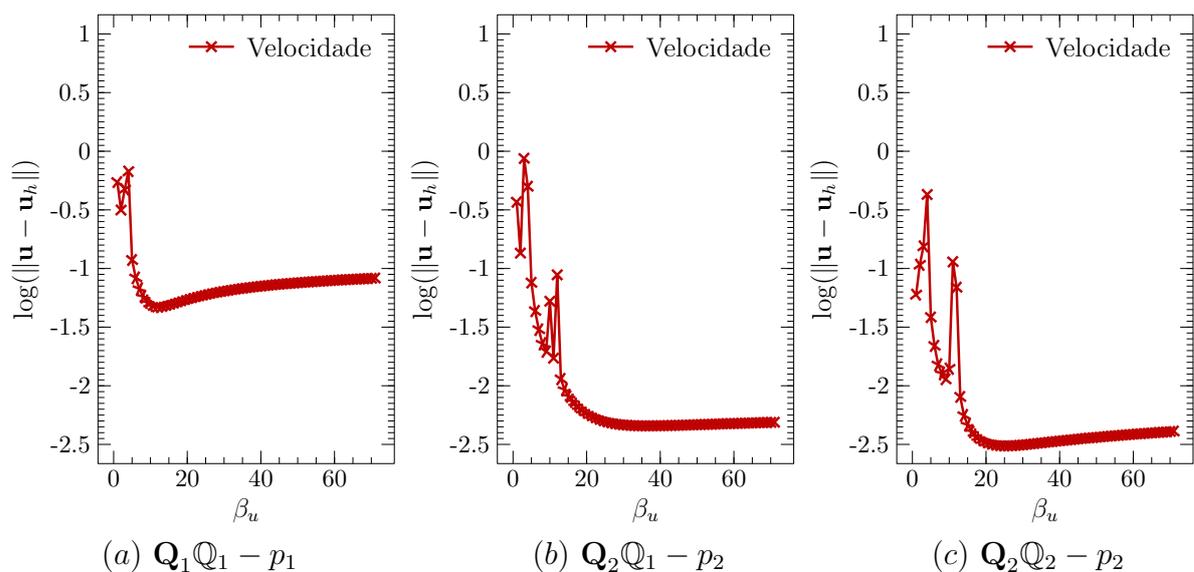


Figura 2 – Estudo numérico da influência do parâmetro de estabilização β_0 nas aproximações para o campo de velocidade em uma malha uniforme com 64 elementos quadrilaterais.

A partir dos resultados apresentados na Figura 2 e na Figura 3, escolheram-se os seguintes valores para os parâmetros de estabilização: $\beta_1 = \beta_0 = 12, 36$ e 25 , para as

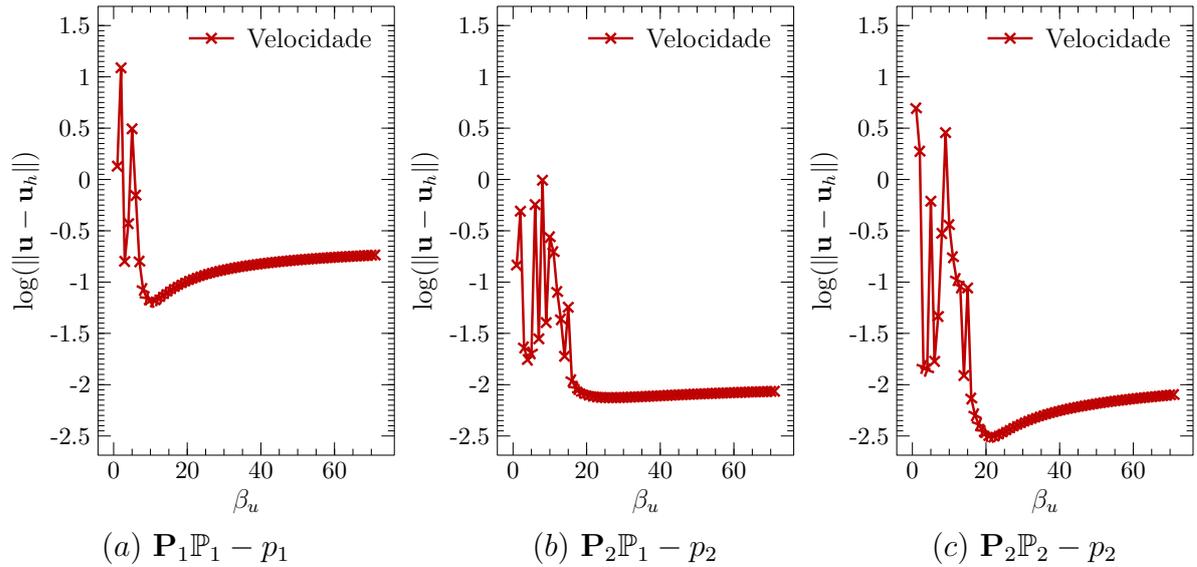


Figura 3 – Estudo numérico da influência do parâmetro de estabilização β_0 nas aproximações para o campo de velocidade em uma malha uniforme com 128 elementos triangulares.

simulações utilizando elementos $\mathbf{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$, $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_1 - p_2$ e $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$, respectivamente, realizadas em malhas de elementos quadrilaterais; já para as simulações empregando elementos $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$, $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ em malhas de elementos triangulares, os valores para os parâmetros de estabilização são: $\beta_1 = \beta_0 = 10, 22$ e 22 , nessa ordem.

3.4.1 Convergência h

Nesta subseção serão apresentados resultados numéricos para o estudo da convergência h do método híbrido (3.29), utilizando malhas com elementos quadrilaterais e triangulares. Em outras palavras, serão feitos estudos para avaliar a convergência h das variáveis de interesse \mathbf{u}_h , p_h , $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h . Para isso, simulações com malhas de 16, 64, 256, 1024 e 4096 elementos quadrilaterais do tipo $\mathbf{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$, $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_1 - p_2$ e $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$ são consideradas. Da mesma forma, malhas de 32, 128, 512, 2048 e 8192 elementos triangulares do tipo $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$, $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ são adotadas.

A Figura 4 exibe resultados da aproximação do campo de velocidade (em vermelho) para o problema de Stokes em comparação com a interpolante (em verde). Esses resultados foram obtidos a partir de simulações em malhas de elementos quadrilaterais e apresentam taxa ótima de convergência para a aproximação da velocidade nas três simulações propostas. Além disso, aproximações da velocidade se mostram mais precisas quando comparadas com a interpolante. Por outro lado, a Figura 5 apresenta resultados da aproximação do campo de pressão (em vermelho) em comparação com a interpolante (em verde). Os resultados atestam taxa de convergência esperada para o campo da pressão, exceto a taxa de convergência apresentada na simulação $\mathbf{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$, Figura 5 (a), que não deve ser esperada segundo a estimativa (3.36). A justificativa para esse resultado reside na

escolha apropriada para os parâmetros de estabilização, o que reforça ainda mais a sua importância na formulação.

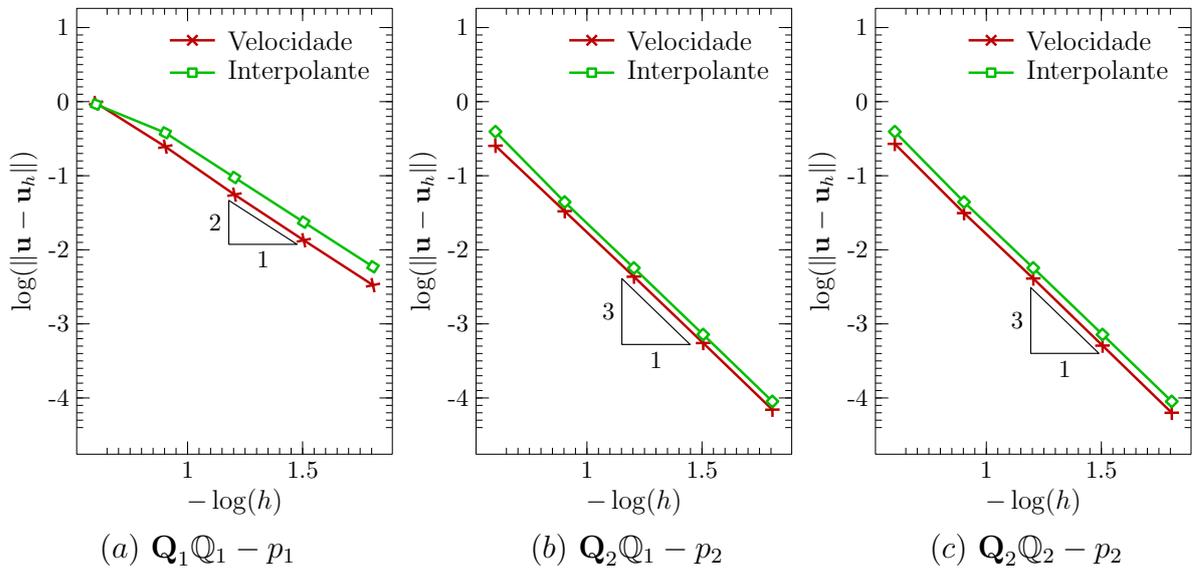


Figura 4 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

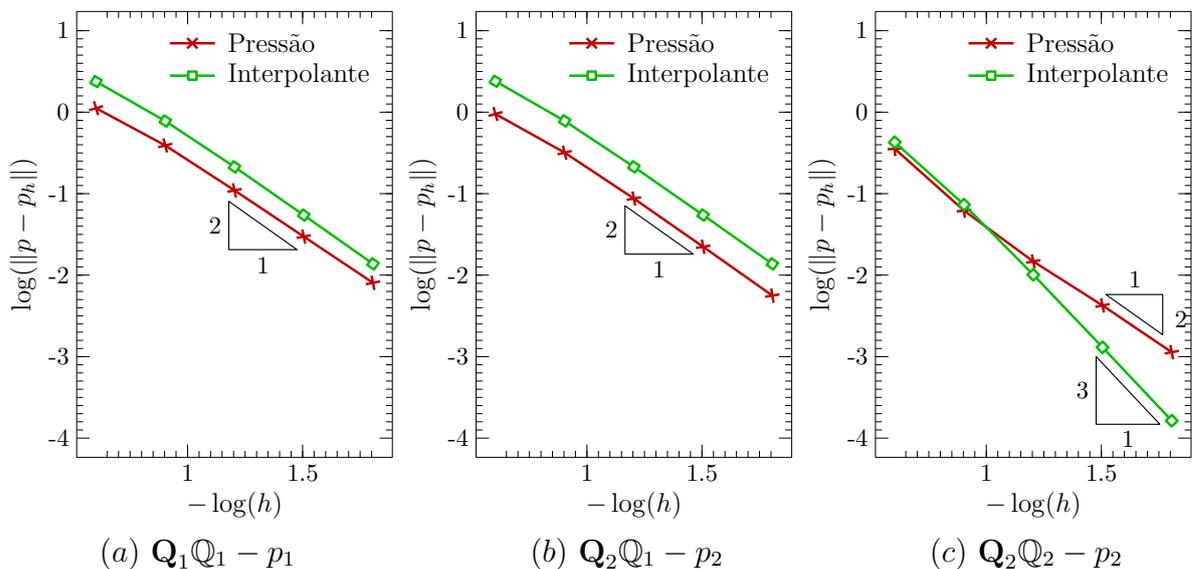


Figura 5 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

Como discutido em seções anteriores, os multiplicadores de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h são obtidos a partir da solução do problema global. Esta solução é diretamente utilizada para obtenção da solução dos problemas locais, que fornecem as aproximações para os campos de velocidade (\mathbf{u}_h) e pressão (p_h) em cada elemento K . Em virtude disso, é de fundamental importância verificar se o problema global fornece, de fato, uma solução precisa. Para tanto, a Figura 6 e a Figura 7 exibem resultados de convergência das aproximações para os multiplicadores $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h em comparação com suas respectivas interpolantes. Esses resultados

foram obtidos através de simulações em malhas uniformes de elementos quadrilaterais. Os resultados indicam taxa de convergência $O^{m+0,5}$ para os multiplicadores de Lagrange associados aos campos de velocidade e pressão nas três simulações, com exceção da simulação com elementos $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2 - p_2$, Figura 7 (c), que apresenta taxa com uma ordem a menos.

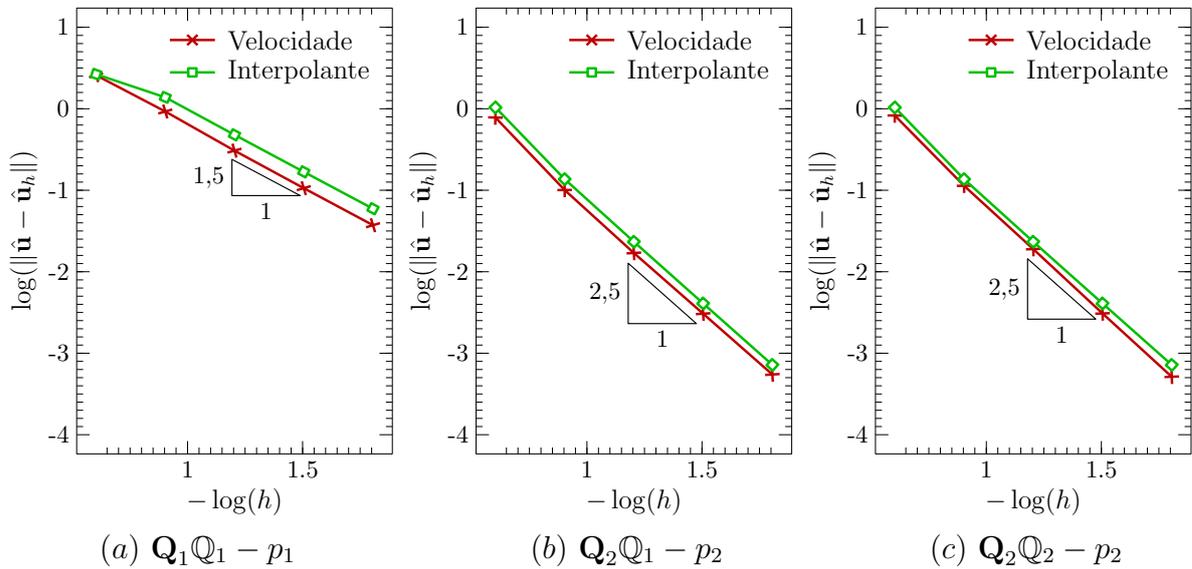


Figura 6 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

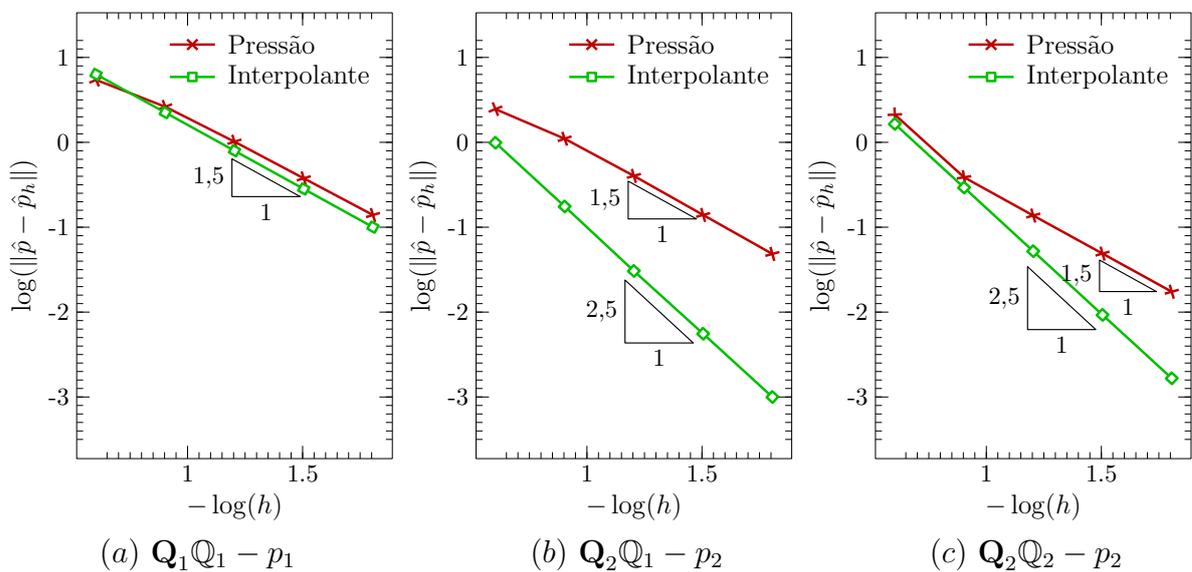


Figura 7 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

Os resultados das simulações em malhas uniformes de elementos triangulares são discutidos a partir daqui. Os estudos da convergência h para os campos de velocidade e pressão consideraram simulações empregando elementos $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1 - p_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2 - p_2$.

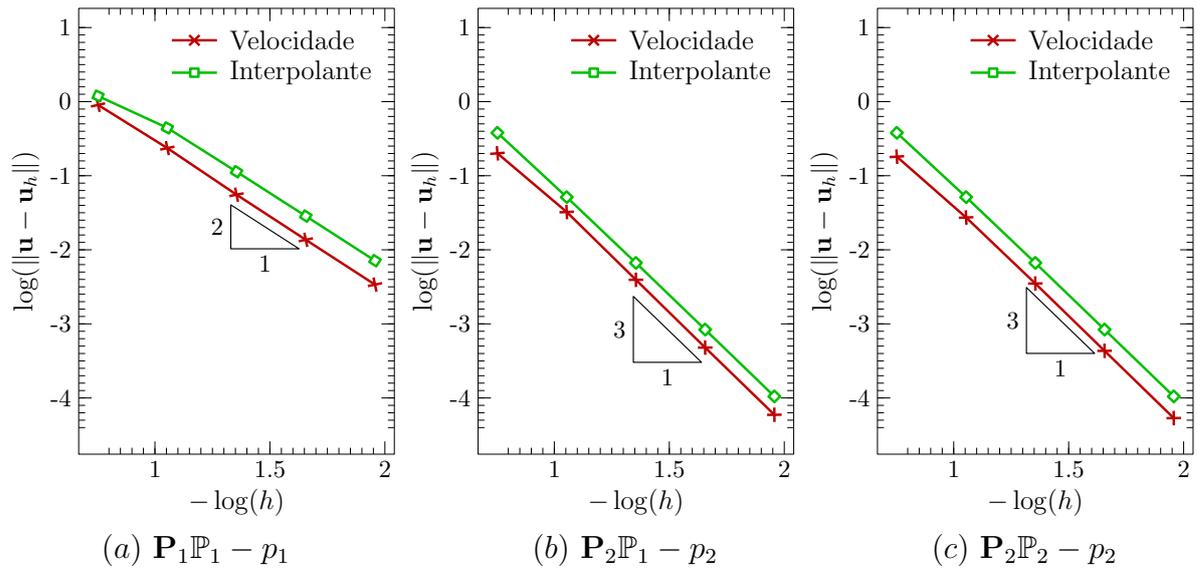


Figura 8 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

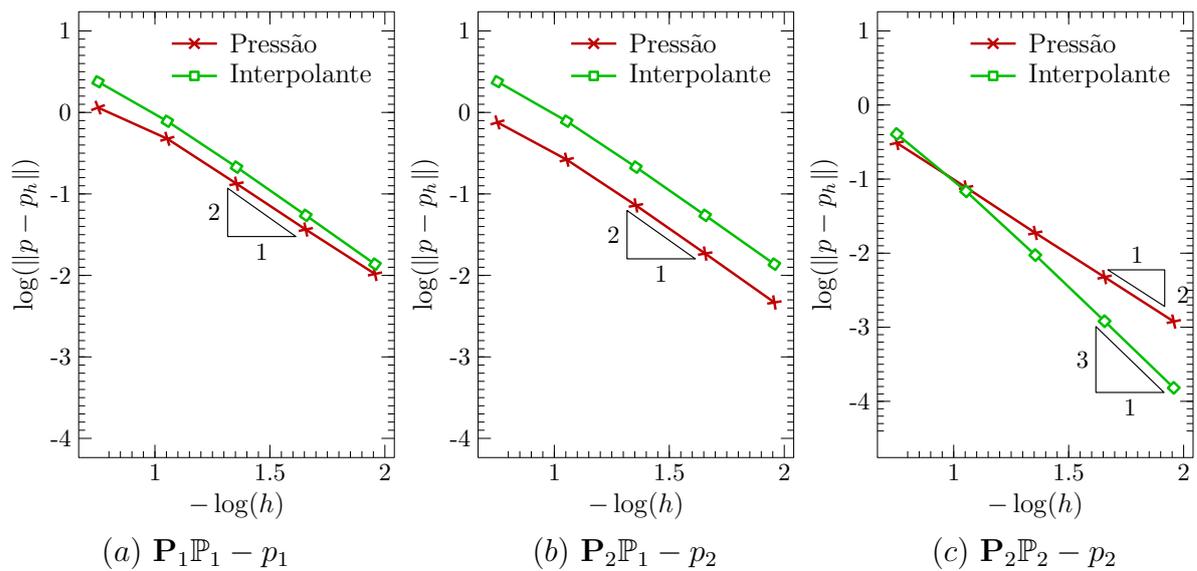


Figura 9 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

Na Figura 8 é possível observar resultados da convergência h para o campo da velocidade em comparação com a interpolante na norma L^2 . Perceba que para as três simulações propostas obtemos taxa ótima de convergência para a velocidade. Além disso, assim como observado nas simulações com malhas formadas por quadriláteros, as aproximações para o campo de velocidade se mostram mais precisas do que a interpolante em todos os casos estudados. Em contrapartida, a Figura 9 apresenta resultados da convergência h para o campo da pressão em comparação com a interpolante. Os resultados também apontam taxa de convergência esperada para o campo da pressão nas simulações $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ e taxa de convergência acima do estimado pela análise numérica

para o elemento $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$. Novamente, esse resultado vem de escolhas apropriadas dos parâmetros de estabilização.

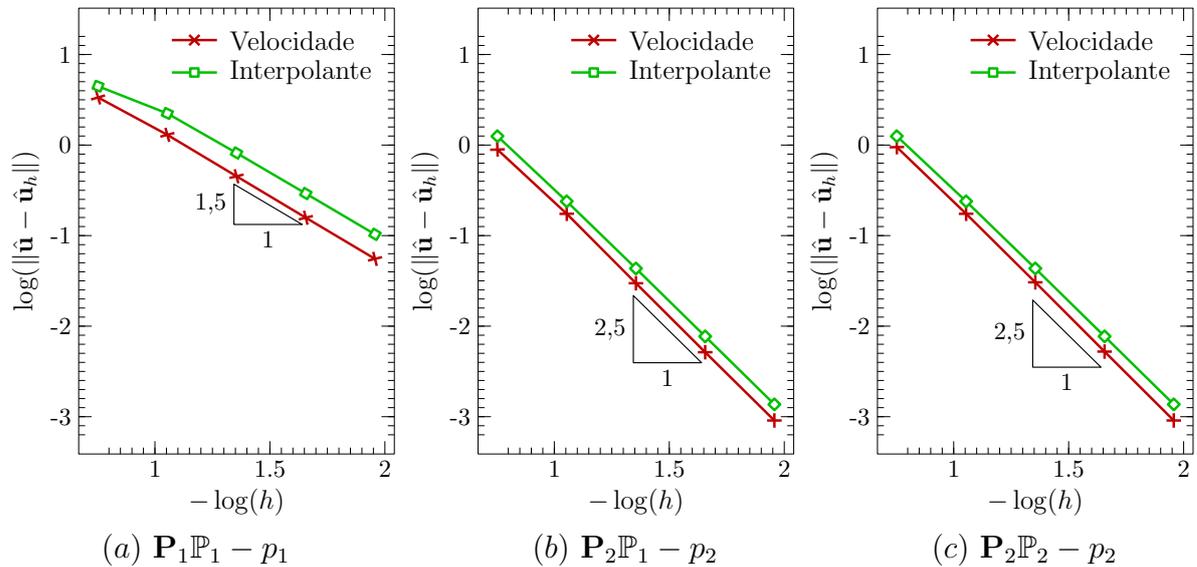


Figura 10 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

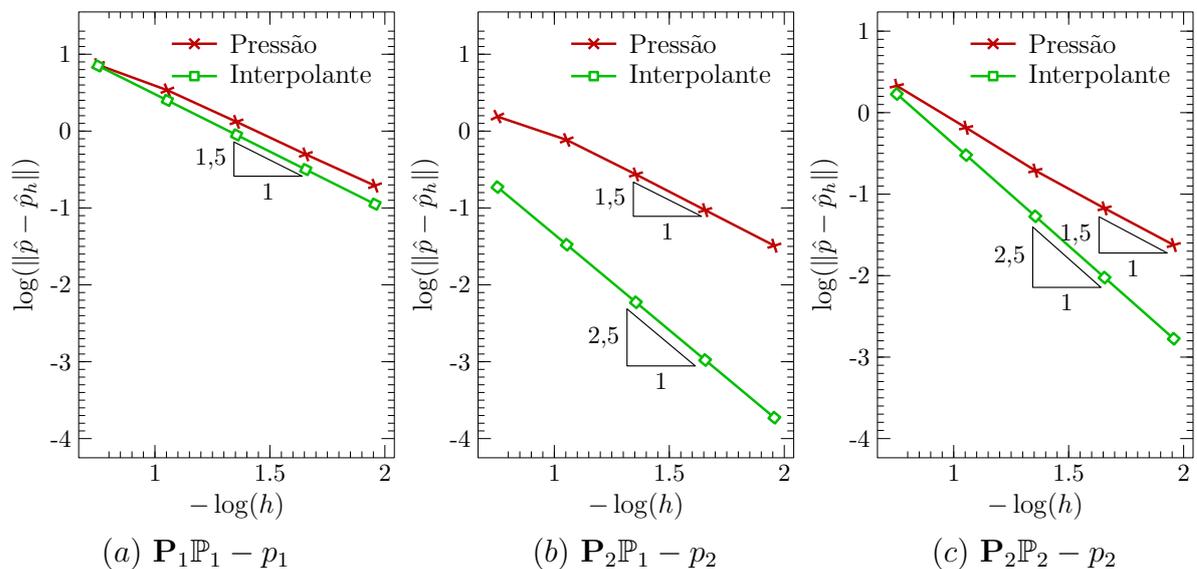


Figura 11 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

É possível visualizar a convergência h dos multiplicadores associados aos campos de velocidade ($\hat{\mathbf{u}}_h$) e pressão (\hat{p}_h) em comparação com suas respectivas interpolantes na Figura 10 e na Figura 11. Nestas figuras, tem-se taxa de convergência $O^{m+0,5}$ para $\hat{\mathbf{u}}_h$ nas três simulações propostas (Figura 10). Para o multiplicador associado ao campo de pressão, as mesmas taxas obtidas para $\hat{\mathbf{u}}_h$ são verificadas nas três simulações, exceto para o elemento $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$.

3.4.2 Convergência p

Estudos da convergência p para as aproximações da velocidade \mathbf{u}_h e da pressão p_h são apresentados nesta subseção. Esses estudos adotam malhas uniformes com 64 elementos quadrilaterais e 128 elementos triangulares. Aproximações polinomiais de mesma ordem para os campos de velocidade, pressão e para o multiplicador são denotadas pelas simulações do tipo $\mathbf{Q}_k\mathbb{Q}_l - p_m$ e $\mathbf{P}_k\mathbb{P}_l - p_m$, com $k = l = m = 1, 2, 3, 4, 5$. As Figuras 12 e 13 mostram a influência do grau do polinômio no erro das aproximações, em que $\#dof$ denota o número dos graus de liberdade do multiplicador. É possível visualizar uma queda bem acentuada do erro à medida em que o grau do polinômio aumenta.

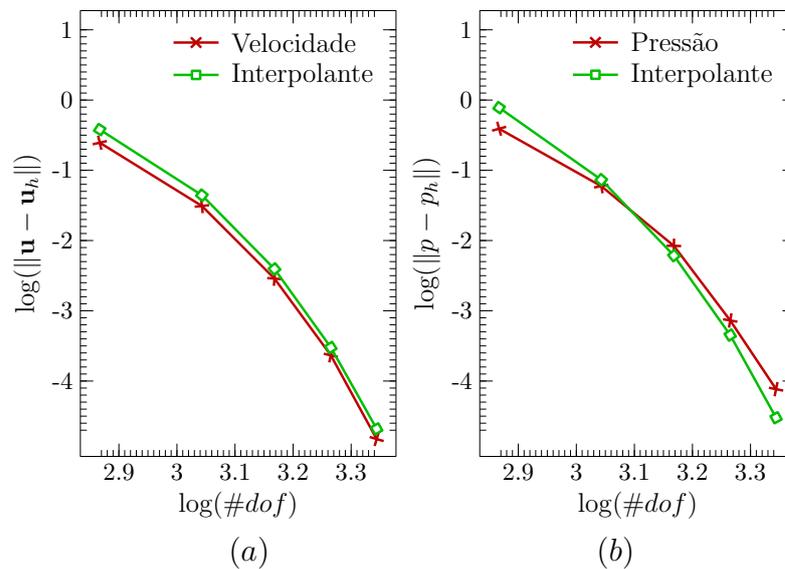


Figura 12 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Stokes com malhas de elementos quadrilaterais.

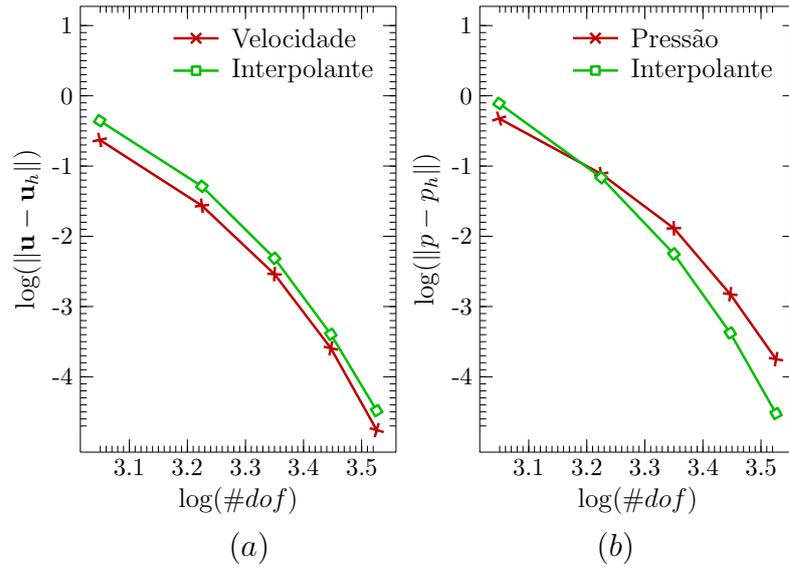


Figura 13 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Stokes com malhas de elementos triangulares.

3.5 Conclusão do Capítulo

Este capítulo se dedicou em tratar o problema de Stokes, composto por um conjunto de equações que descrevem o escoamento lento e laminar de um fluido newtoniano e incompressível. Para obter a solução desse problema, recordamos três formulações mistas híbridas estabilizadas, dentre as quais, a **Formulação R-W** foi eleita para ter seus resultados reproduzidos no presente trabalho. Neste contexto, um estudo da convergência h foi feito para validar as estimativas de erro (3.36). Esses estudos foram realizados por meio de simulações utilizando elementos $\mathbf{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$ e $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$; $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$; $\mathbf{Q}_2\mathbb{Q}_2 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$. Como resultado, taxa de convergência esperada para os campos de velocidade e pressão foram verificadas em todas as simulações propostas, indo do encontro dos resultados da análise numérica. Em algumas simulações, verificou-se taxa de convergência acima da estimada pela análise para o campo da pressão. Isso ocorreu em virtude da escolha apropriada dos parâmetros de estabilização e possivelmente da solução exata escolhida para os testes. Os parâmetros de estabilização em questão foram escolhidos através de repetidas simulações, nas quais o parâmetro β_0 sofreu variações de modo que o menor erro associado a este parâmetro fosse determinado. Além disso, a convergência p mostrou que, fixada uma malha, o erro decai significativamente à medida em que o grau do polinômio aumenta, seguindo a taxa de decaimento da interpolante.

4 PROBLEMA DE OSEEN

O presente capítulo tem por objetivo estender a formulação mista híbrida (3.29) utilizada para simular o problema de Stokes para o problema de Oseen. Uma vez que pretende-se construir uma formulação mista híbrida estabilizada para o problema de Navier-Stokes, é razoável introduzir o problema de Oseen, que surge da linearização do problema de Navier-Stokes.

4.1 Problema Modelo

O problema de Oseen é composto por um conjunto de equações lineares que regem o escoamento incompressível de um fluido newtoniano. Este problema é definido adotando $\mathbf{w} = \mathbf{b}$ em (2.14), em que \mathbf{b} é uma velocidade de convecção conhecida e próxima da velocidade \mathbf{u} . Desse modo, o problema de Oseen pode ser enunciado como segue.

Problema de Oseen. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Dadas a viscosidade ν do fluido, a fonte $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a velocidade de convecção \mathbf{b} , encontre a pressão hidrostática $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e a velocidade $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que*

$$-\nu\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma. \quad (4.3)$$

A relação entre o problema de Stokes e o problema de Oseen se dá através termo convectivo $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, cuja velocidade de convecção é conhecida em ambos os problemas; enquanto que no de Stokes a velocidade de convecção é $\mathbf{0}$, no de Oseen é \mathbf{b} .

4.2 Formulação Mista Dual para o Problema de Oseen

Seguindo a mesma abordagem do capítulo anterior, uma formulação fraca mista dual clássica para o **Problema de Oseen** pode ser enunciada por meio do seguinte problema:

Dada a viscosidade ν , a força de corpo prescrita \mathbf{f} e o campo de velocidade \mathbf{b} , encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in [H_g^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$, de modo que

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

ou ainda, em formas bilineares,

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{b}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

com

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

$$c(\mathbf{b}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (4.6)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \quad (4.7)$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Existência e unicidade da solução $(\mathbf{u}, p) \in [H_g^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ são garantidas em [31], com

$$[H_g^1(\Omega)]^2 := \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g} \right\}.$$

Veja mais detalhes em [29].

Definindo espaços de elementos finitos conforme $\mathcal{U}_h \subset [H_g^1(\Omega)]^2$ e $\mathcal{P}_h \subset L_0^2(\Omega)$, é possível obter aproximações via método de Galerkin com o seguinte problema:

Encontrar o par $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{P}_h$, tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{b}; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad (4.8)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \quad (4.9)$$

onde

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.10)$$

$$c(\mathbf{b}; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}, \quad (4.11)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.12)$$

$$f(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x},$$

desde que os espaços \mathcal{U}_h e \mathcal{P}_h sejam compatíveis.

4.3 Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Oseen

Esta seção tem por objetivo apresentar uma formulação híbrida estabilizada de elementos finitos para a solução do Problema de Oseen. Para a construção da formulação a mesma metodologia do capítulo anterior será utilizada. Definindo o problema (4.1)-(4.3) em cada elemento K de uma malha de elementos finitos \mathcal{T}_h , surge o seguinte problema forte local:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } K, \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } K, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } e \in \mathcal{E}_h^{\partial}, \quad (4.15)$$

suplementado pelas condições de interface

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (4.16)$$

$$\llbracket p\mathbf{I} - \nu\nabla\mathbf{u} \rrbracket = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0. \quad (4.17)$$

Os operadores salto $\llbracket \cdot \rrbracket$ e $\llbracket \cdot \rrbracket$ são definidos na Seção (2.3). Nas equações (4.16) e (4.17), esses operadores impõem a continuidade da velocidade de Oseen entre as arestas interiores.

Multiplicando a equação (4.13) por uma função teste \mathbf{v} , a equação (4.14) por uma função teste q e integrando sobre K , chega-se em

$$-\nu \int_K \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_K \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (4.18)$$

$$\int_K q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4.19)$$

Integrando, por partes, os primeiro e terceiro termos do lado esquerdo da equação (4.18) e multiplicando a equação (4.19) por (-1) , obtém-se

$$\begin{aligned} & \nu \int_K \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_K p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ & - \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O problema acima pode ser aproximado em espaços de dimensão finita através dos espaços definidos em (2.26). Desse modo, tem-se a seguinte formulação fraca definida localmente em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$:

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ tal que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^m$,

$$\begin{aligned} & \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ & + \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p_h(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k, \\ & - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h \in Q_h^l. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A fim de estabelecer uma relação entre cada um desses problemas locais, multiplicadores de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h \in \hat{\mathbf{V}}_h^m$ com $\hat{\mathbf{u}}_h = \mathbf{u}|_e$ e \hat{p}_h , com $\hat{p}_h = p|_e$ são introduzidos entre as aresta $e \in \mathcal{E}_h$, dando origem ao seguinte problema:

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e os multiplicadores de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$,

tais que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^m$ e $[\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds \right. \\
& - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) \, ds \\
& + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\
& \left. + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right] \\
& = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Portanto, o método de elementos finitos misto híbrido estabilizado para o problema de Oseen é enunciado como segue.

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e os multiplicadores de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$, tais que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e para todo $[\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$,

$$\mathbf{B}_h^{os}([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) = \mathbf{F}_h^{os}([\mathbf{v}_h, q_h]), \tag{4.23}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_h^{os}([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right. \\
& - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds - \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds \\
& + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds + \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\
& + \beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h) \, ds - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\
& \left. - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h q_h \, d\mathbf{x} \right] \tag{4.24}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{F}_h^{os}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \tag{4.25}$$

O método em questão é uma extensão do método proposto por Rhebergen e Wells em [22], porém com a adição do termo convectivo

$$\int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x},$$

que torna o problema não simétrico.

O problema acima pode ser reescrito através das formas bilineares $a_{SH}^{os}(\cdot, \cdot)$, $b_{SH}^{os}(\cdot, \cdot)$, $c_{SH}^{os}(\cdot, \cdot)$, $d_{SH}^{os}(\cdot, \cdot)$ e do funcional $f_{SH}^{os}(\cdot)$, definidos como

$$\begin{aligned} a_{SH}^{os}([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\ &- \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h \, ds + \beta_u \int_{\partial K} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\ &- \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \beta_p \int_{\partial K} p_h q_h \, ds, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} b_{SH}^{os}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{u}}_h \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\ &+ \int_{\partial K} (\hat{p}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h q_h \, ds, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} c_{SH}^{os}([\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) &= \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{u}_h \, ds \\ &+ \int_{\partial K} (\hat{q}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{q}_h p_h \, ds, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} d_{SH}^{os}([\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h], [\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h]) &= \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds + \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h \hat{q}_h \, ds \\ &- \int_{\partial K} \hat{p}_h \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \int_{\partial K} \hat{q}_h \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{u}}_h \, ds. \end{aligned}$$

e

$$f_{SH}^{os}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \quad (4.29)$$

Com essas definições, o problema (4.23) pode ser reescrito em forma matricial, de forma similar ao apresentado em (3.42)-(3.43), e os mesmos passos podem ser seguidos para a condensação estática.

As formas bilineares para os problemas de Stokes e Oseen se diferenciam pela presença do termo

$$\int_K (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}$$

na formas a_{SH}^{os} .

4.4 Estudos de Convergência

Com o objetivo de avaliar numericamente o método de elementos finitos híbrido estabilizado (4.23), alguns estudos são propostos ao longo desta seção. Vale ressaltar que os resultados aqui discutidos são de fundamental importância, uma vez que serão utilizados como elementos motivadores para tratar o problema de Navier-Stokes no próximo capítulo.

As simulações realizadas nesta seção utilizam os mesmos dados das simulações do problema de Stokes na seção (3.4).

O escoamento de Oseen foi simulado na mesma região bidimensional (3.47) na fronteira da qual adotou-se a condição de Dirichlet (4.3). A solução exata em questão é definida como em (3.48)-(3.49). Substituindo a solução exata no problema de Oseen (4.1)-(4.3), obtém-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{u}, \quad (4.30)$$

com \mathbf{u} definido em (3.48).

Os parâmetros de estabilização β_0 e β_1 adotados nas simulações foram os mesmos parâmetros adotados no capítulo anterior para a simulação do escoamento de Stokes.

4.4.1 Convergência h

Os resultados da convergência h do método híbrido (4.23) são apresentados nesta subseção. Todas as simulações foram realizadas em malhas de 16, 64, 256, 1024 e 4096 elementos finitos quadrilaterais e 32, 128, 512, 2048 e 8192 elementos finitos triangulares.

A Figura 14 e a Figura 15 apresentam resultados da convergência h das aproximações dos campos de velocidade e pressão (em vermelho), respectivamente, em comparação com a interpolante (em verde). A Figura 14 apresenta taxas de convergência para a aproximação do campo de velocidade para as três simulação propostas em malhas quadrilaterais. Vale ressaltar que essas taxas são similares às obtidas nos estudos do problema de Stokes, tratado no capítulo anterior. Na Figura 14 (a) é possível verificar que a aproximação para o campo de velocidade apresenta convergência superior à interpolante nas mesmas condições; já a Figura 14 (b) e a Figura 14 (c) são praticamente a sobreposição das suas respectivas interpolantes. Por outro lado, a Figura 15 apresenta a convergência h das aproximações do campo de pressão em comparação com sua interpolante. Assim como as taxas de convergência para o campo de velocidade, as taxas para o campo de pressão também se assemelham às obtidas para o problema de Stokes na Figura 15 (a), Figura 15 (b) e na Figura 15 (c). A Figura 16 e a Figura 17 exibem resultados da convergência h para as aproximações dos multiplicadores da velocidade e da pressão, respectivamente. Esses resultados na Figura 16 apresentam taxa de convergência $\mathcal{O}^{m+0,5}$ para $\hat{\mathbf{u}}_h$ nas três combinações propostas. Por outro lado, para o multiplicador \hat{p}_h a Figura 17 exhibe a mesma taxa de convergência obtida para $\hat{\mathbf{u}}_h$ nas três simulações, exceto para o elemento $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2 - p_2$.

Os estudos da convergência h em simulações realizadas em malhas de elementos finitos triangulares são apresentados a partir daqui. Para estes estudos, os seguintes elementos foram adotados: $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1 - p_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 - p_2$ e $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2 - p_2$. Resultados da convergência h para o campo de velocidade \mathbf{u}_h e para o campo de pressão p_h em comparação com a interpolante

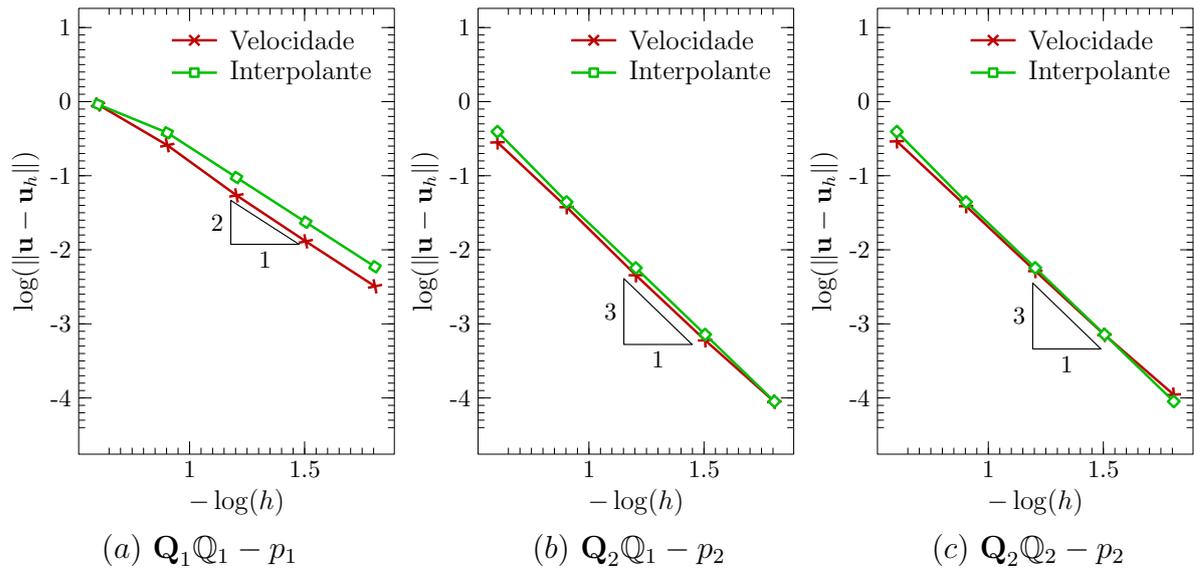


Figura 14 – Convergência h do campo de velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos quadrilaterais.

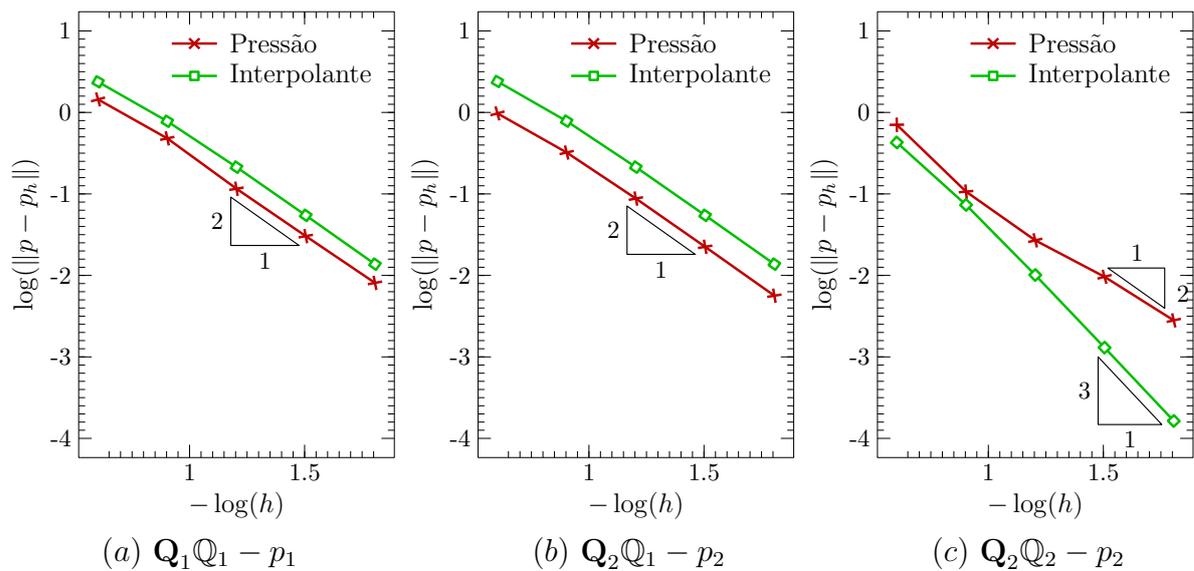


Figura 15 – Convergência h do campo de pressão p_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos quadrilaterais.

na norma $L^2(\Omega)$ podem ser visualizados na Figura 18 e na Figura 19, respectivamente. Taxas de convergência similares às obtidas nas simulações com malhas compostas por quadriláteros para o campo de velocidade é constatada nas três simulações propostas, como mostrado na Figura 18. Nessa, os resultados se mostraram mais satisfatórios nas simulações com mesma ordem, como mostram a Figura 18 (a) e a Figura 18 (c). Para o campo de pressão, a mesma similaridade nas taxas obtidas para os casos com elementos quadrilaterais é observada.

Por fim, os resultados da convergência h para os multiplicadores de Lagrange associados aos campos de velocidade ($\hat{\mathbf{u}}_h$) e pressão (\hat{p}_h) em comparação com a interpolante são

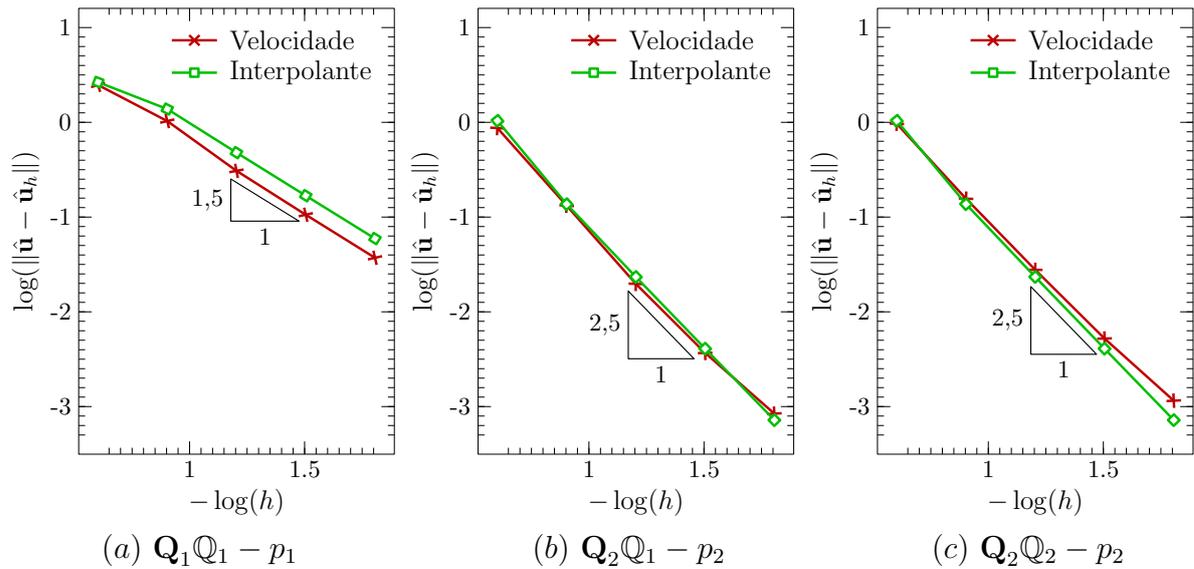


Figura 16 – Convergência h do multiplicador associado à velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos quadrilaterais.

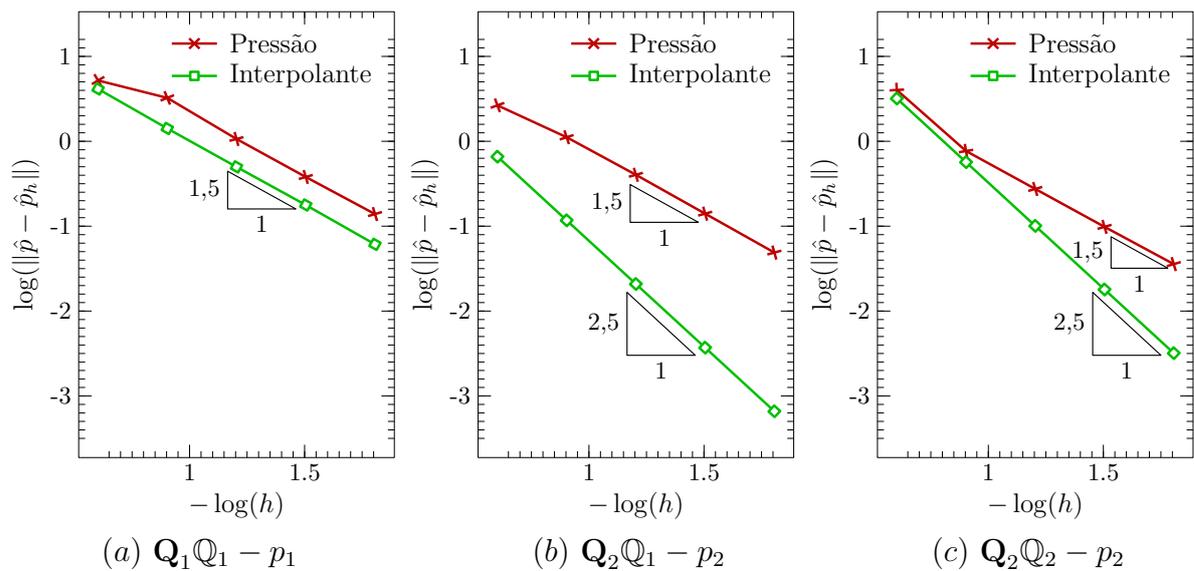


Figura 17 – Convergência h do multiplicador associado ao campo de pressão \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos quadrilaterais.

exibidos na Figura 20 e na Figura 21, respectivamente. Na Figura 20 os resultados de convergência se aproximam dos resultados obtidos para os casos com elementos quadrilaterais, com taxa de convergência $O^{m+0,5}$ ou $O^{m-0,5}$ para $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h nas três simulações.

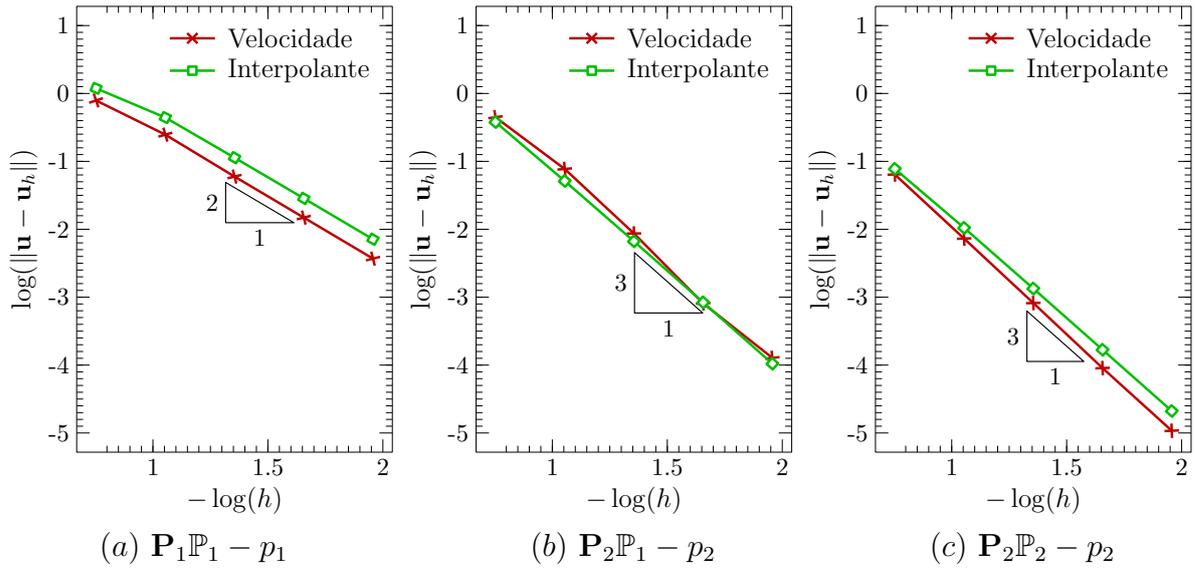


Figura 18 – Convergência h do campo de velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.

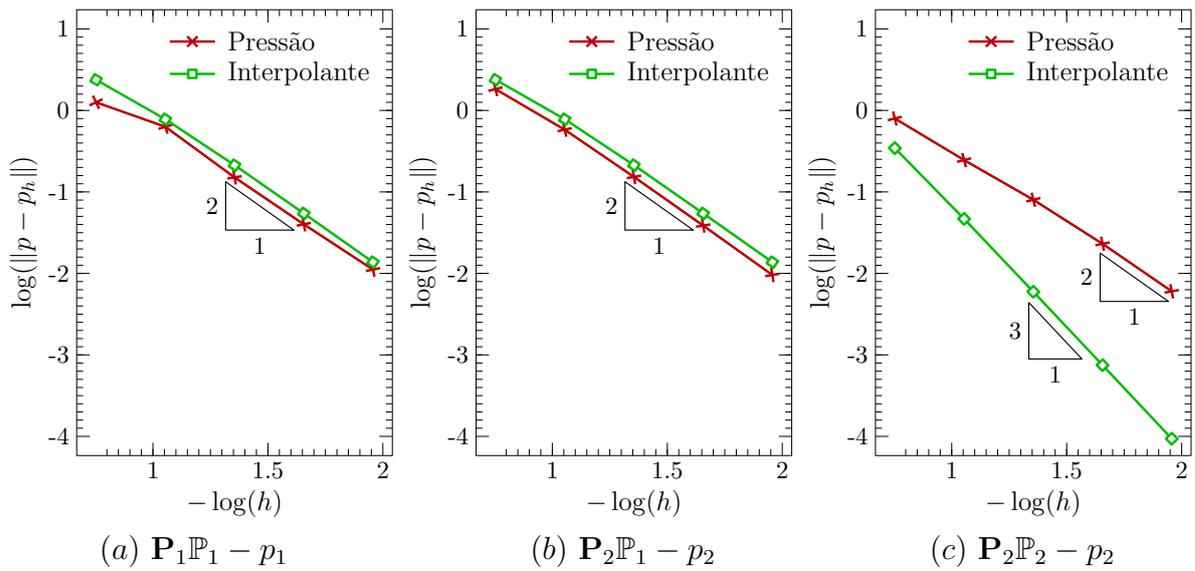


Figura 19 – Convergência h do campo de pressão p_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.

4.4.2 Convergência p

Nesta subseção, estudos da convergência p são apresentados para as aproximações da velocidade \mathbf{u}_h e da pressão p_h . Nesses estudos, foram adotadas malhas uniformes com 64 elementos quadrilaterais e 128 elementos triangulares. Aproximações polinomiais de mesma ordem para os campos de velocidade, pressão e para o multiplicador são denotadas pelas simulações $\mathbf{Q}_k\mathbb{Q}_l - p_m$ e $\mathbf{P}_k\mathbb{P}_l - p_m$, com $k = l = m = 1, 2, 3, 4, 5$. As Figuras (22) e (23) mostram a influência do grau do polinômio no erro das aproximações, em que $\#dof$ denota o número dos graus de liberdade do multiplicador.

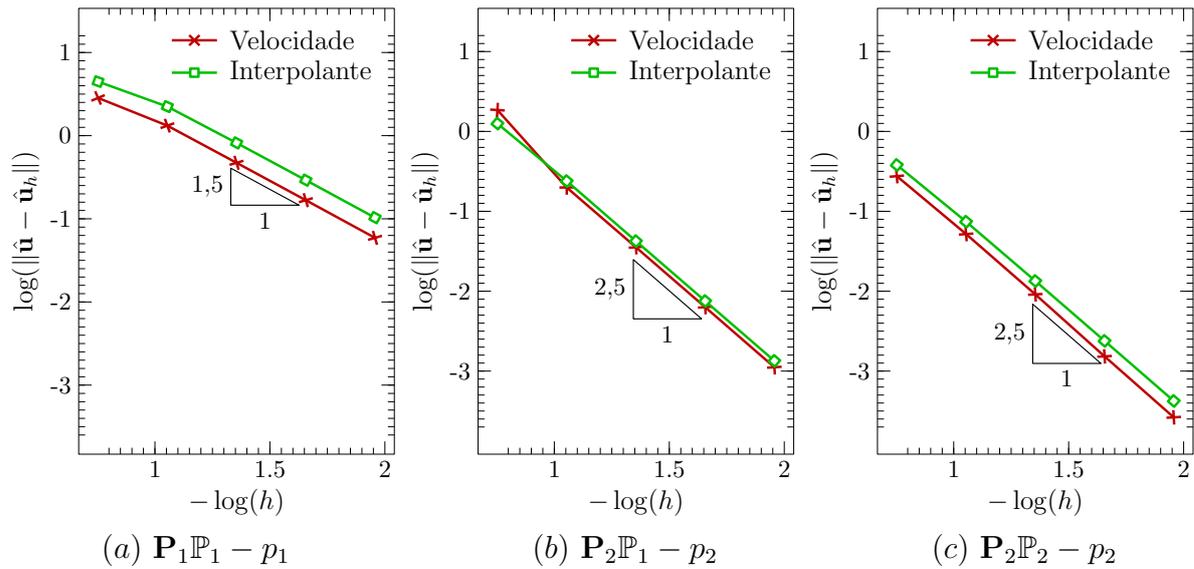


Figura 20 – Convergência h do multiplicador associado à velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.

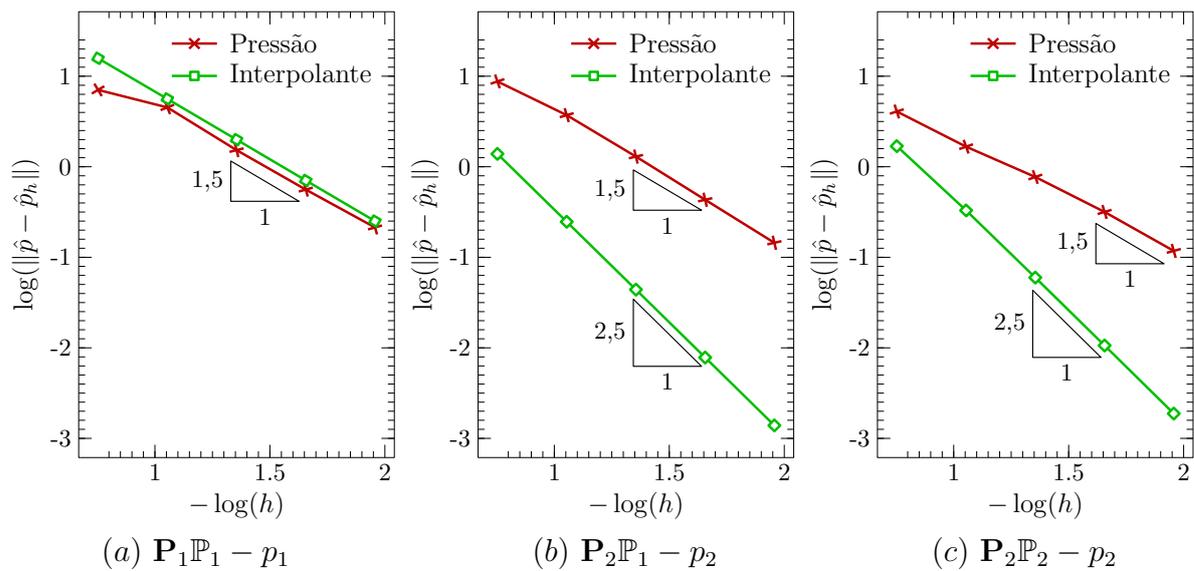


Figura 21 – Convergência h do multiplicador associado à pressão \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas de elementos finitos triangulares.

4.5 Conclusão do Capítulo

O problema de Oseen foi apresentado e modelado com um método de elementos finitos misto híbrido no presente capítulo. Esse problema pode ser visto como uma generalização do problema de Stokes, introduzido no capítulo anterior. De fato, a diferença entre os dois problemas reside em um termo convectivo presente no problema de Oseen, cuja velocidade de convecção é conhecida. No caso em que essa velocidade de convecção é nula, o problema de Stokes pode ser recuperado.

Considerando a semelhança entre os problemas de Stokes e Oseen, as mesmas simu-

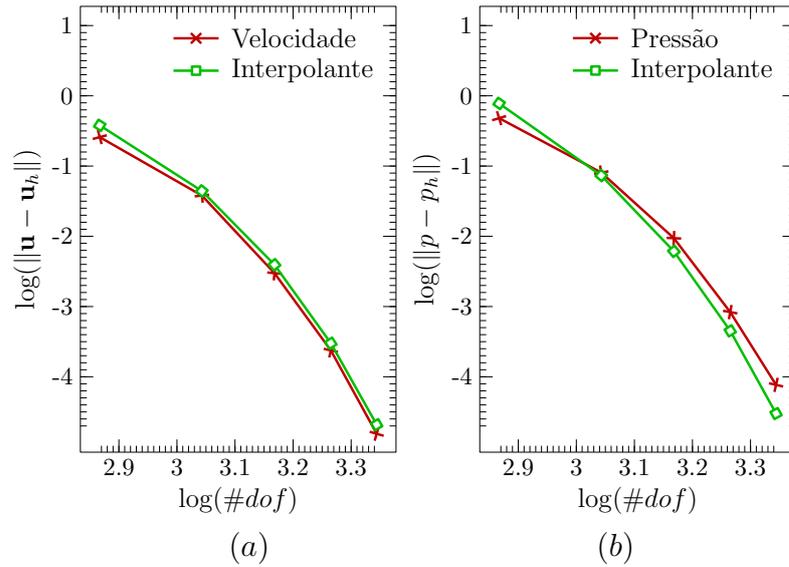


Figura 22 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Oseen com elementos quadrilaterais.

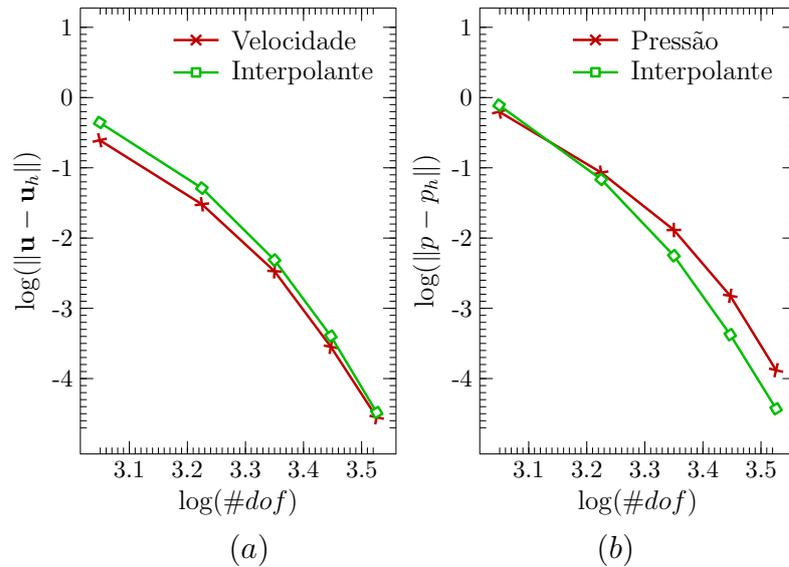


Figura 23 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Oseen com elementos triangulares.

lações para o estudo da convergência h das variáveis \mathbf{u}_h , p_h , $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h propostas no capítulo anterior foram propostas no presente capítulo. Através dessas simulações, foi possível obter resultados a respeito da convergência do método. Para tanto, foram consideradas malhas discretizada por 16, 64, 256, 1024 e 4096 elementos finitos quadrilaterais e 32, 128, 512, 2048 e 8192 elementos finitos triangulares. Como resultado, as aproximações para o campo de velocidade e para o campo de pressão apresentaram taxas similares às taxas obtidas nos estudos numéricos da formulação que tratou o problema de Stokes no capítulo anterior. As aproximações para os multiplicadores associados ao campo de velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ e ao campo de pressão p_h convergiram com taxa $O^{m+0,5}$ em todas as simulações, exceto

nas simulações do tipo $\mathbf{Q}_1\mathbb{Q}_1 - p_1$ ou $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$, que apresentaram taxas com uma ordem a menos para o campo da pressão. Além disso, a convergência p mostrou que, fixada uma malha, o erro decai significativamente, à medida em que o grau do polinômio aumenta, seguindo a taxa de decaimento da interpolante.

Por fim, é importante ressaltar que apesar de não haver análise numérica para o método proposto para o problema de Oseen neste trabalho, foram obtidos resultados similares aos obtidos para o problema de Stokes, principalmente no que diz respeito as taxas de convergência.

5 PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Este capítulo trata o problema de Navier-Stokes em regime estacionário e foi motivado tanto pelo problema de Stokes como pelo problema de Oseen, apresentados nos dois últimos capítulos. A principal diferença entre o problema tratado no presente capítulo dos problemas tratados nos capítulos anteriores está no termo convectivo. Considerando o problema de Stokes, por exemplo, a velocidade de convecção é nula. Isso faz com que o conjunto de equações que modelam seu escoamento não possua um termo convectivo; já o problema de Oseen possui um termo convectivo, porém a velocidade de convecção é conhecida e, por conseguinte, seu escoamento é regido por um conjunto de equações lineares. Finalmente, o problema de Navier-Stokes contém um termo convectivo cuja velocidade de convecção precisa ser determinada. Isso faz com que este problema seja não linear, por isso necessita a aplicação de uma técnica de linearização.

No decorrer do capítulo uma formulação mista híbrida será proposta como uma extensão da formulação (4.23) para simular o problema de Navier-Stokes.

5.1 Problema Modelo

O problema de Navier-Stokes é composto por um conjunto de equações que regem o escoamento incompressível de um fluido newtoniano. O problema em questão é obtido definindo $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ em (2.14) e enuncia-se como segue.

Problema de Navier-Stokes. *Dadas a viscosidade $\nu > 0$ e uma força de corpo $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, encontre o campo de velocidade $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a pressão $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que*

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } \Omega, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma. \quad (5.3)$$

Perceba que as equações acima generalizam os dois últimos problemas tratados até aqui. Em virtude do termo convectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, linearizações com o método de Newton e o método de Picard são utilizadas e, em seguida, a formulação mista híbrida estabilizada é construída com base no problema linearizado. A linearização em questão é detalhadamente apresentada na próxima seção.

5.2 Linearização do Problema Modelo

Um dos desafios em simular o escoamento modelado pelas equações de Navier-Stokes está presente no termo não linear $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Dentre as diversas técnicas de linearização, utilizamos o método de Picard e o método de Newton.

5.2.1 Método de Picard

O método de Picard é comumente utilizado para linearização do problema de Navier-Stokes tomando a seguinte aproximação:

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \approx \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}. \quad (5.4)$$

Assim, nas iterações deste método, primeiramente é resolvido o problema de Stokes com $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$. Logo após, é resolvido o problema de Oseen que pode ser definido como

$$-\nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (5.6)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Como critério de parada para esta técnica definimos a seguinte relação

$$\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_0 \leq \varepsilon, \quad (5.7)$$

onde ε define a tolerância deste critério.

5.2.2 Método de Newton

Geralmente, o método de Newton é utilizado para encontrar uma raiz de uma equação do tipo $H(x) = 0$, em que $x = [\mathbf{u}, p]$. Nesse caso, seguindo [6], o método de Newton pode ser definido como:

$$H'(x, \delta x) = -H(x), \quad (5.8)$$

ou ainda, dado uma aproximação x^0 dessa raiz,

$$H'(x^n, x^n - x^{n-1}) = -H(x^n),$$

com $n = 0, 1, \dots$. Vale ressaltar que no caso em que x é um escalar, então $H'(x)$ é uma derivada ordinária; já no caso em que \mathbf{x} é um vetor, então $H'(\mathbf{x})$ é a matriz jacobiana. A derivada de Gâteaux será útil no processo de linearização. Esta é dada por

$$H'(x, \delta x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(x + \epsilon \delta x) - H(x)}{\epsilon}. \quad (5.9)$$

Defina

$$H([\mathbf{u}, p]) = -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}.$$

Utilizando a derivada de Gâteaux, tem-se

$$\begin{aligned}
& H'([\mathbf{u}^n, p^n], [\delta\mathbf{u}, \delta p]) \tag{5.10} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[-\nu\Delta(\mathbf{u}^n + \epsilon\delta\mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n + \epsilon\delta\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{u}^n + \epsilon\delta\mathbf{u}) + \nabla(p^n + \epsilon\delta p) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{f} - (-\nu\Delta\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \nabla p^n - \mathbf{f}) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\epsilon\nu\Delta\delta\mathbf{u} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla(\mathbf{u}^n + \epsilon\delta\mathbf{u}) + \epsilon\delta\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}^n + \epsilon\delta\mathbf{u}^n) + \epsilon\nabla\delta p - \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\epsilon\nu\Delta\delta\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{u}^n \cdot \nabla\delta\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \epsilon^2\delta\mathbf{u} \cdot \nabla\delta\mathbf{u} + \epsilon\nabla\delta p}{\epsilon} \\
&= -\nu\Delta\delta\mathbf{u} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \nabla\delta p.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \quad \text{e} \quad \delta p = p^{n+1} - p^n,$$

o resultado anterior pode ser simplificado como

$$\begin{aligned}
H'([\mathbf{u}^n, p^n], [\delta\mathbf{u}, \delta p]) &= -\nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nu\Delta\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}^n - 2\mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n \\
&\quad + \nabla p^{n+1} - \nabla p^n.
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior em (5.8), obtém-se

$$-\nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{f}.$$

Logo, dado um valor inicial \mathbf{u}^0 , é possível construir uma sequência de aproximações do sistema linear

$$-\nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{f}, \tag{5.11}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \tag{5.12}$$

para obter uma aproximação da solução \mathbf{u} do sistema (5.1)-(5.3). Se \mathbf{u}^0 estiver suficientemente próximo da solução exata, então a sequência convergirá quadraticamente.

A metodologia descrita nesta seção segue os seguintes passos:

- Passo 1: defina um valor inicial $\mathbf{u}_h^n = \mathbf{0}$, com $n = 0$ para o problema (5.24).
- Passo 2: Encontre \mathbf{u}_h^{n+1} utilizando (5.24).
- Passo 3: Verifique se a tolerância $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_0 \leq \epsilon$ foi alcançada. Em caso positivo, vá para o Passo 5. Em caso negativo, siga para o Passo 4.
- Passo 4: Defina $\mathbf{u}_h^n = \mathbf{u}_h^{n+1}$, $n = n + 1$ e retorne ao passo 2.
- Passo 5: Finalize o algoritmo.

5.3 Formulação Variacional para o Problema de Navier-Stokes

A formulação variacional clássica mista dual para o problema forte (5.1)-(5.3) pode ser desenvolvida seguindo a mesma abordagem apresentada nos dois últimos capítulos. Esta pode ser expressa através do seguinte problema:

Dadas a viscosidade ν e a força de corpo \mathbf{f} , encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$, de modo que

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} & \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

ou ainda, em formas bilineares e trilineares,

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0, \end{cases} \quad (5.13)$$

com

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (5.14)$$

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (5.15)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \quad (5.16)$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

A partir do problema linearizado (5.11)-(5.12), juntamente com a condição de Dirichlet (5.3), uma formulação fraca pode se expressa como:

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.4 Método de Elementos Finitos Híbrido para o Problema de Navier-Stokes

Nesta seção o método de elementos finitos misto híbrido será introduzido para simular o escoamento incompressível modelado pelas equações de Navier-Stokes. A formulação desenvolvida nessa seção será feita para o problema linearizado, definido nas equações (5.11)-(5.12). A metodologia utilizada na construção da formulação é a mesma apresentada nos capítulos anteriores, através da técnica de *condensação estática*. Por conta

disso, é preciso definir o problema forte (5.11)-(5.12) em cada elemento K de uma malha de elementos finitos \mathcal{T}_h , o que resulta no seguinte problema forte:

$$-\nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{u}^n \cdot \nabla\mathbf{u}^n + \mathbf{f} \quad \text{em } K, \quad (5.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{em } K, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (5.20)$$

suplementado pelas condições de interfaces

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (5.21)$$

$$\llbracket p\mathbf{I} - \nu\nabla\mathbf{u} \rrbracket = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0. \quad (5.22)$$

Os operadores salto $\llbracket \cdot \rrbracket$ e $\llbracket \cdot \rrbracket$ são devidamente definidos na Seção (2.3) e impõem, nas equações (5.21) e (5.22), a continuidade entre cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$.

Seguindo a mesma estratégia dos últimos capítulos é possível definir o problema global como a seguir.

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e os multiplicadores de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$, tais que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e $[\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$,

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \, ds \right. \\ & - \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} q_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_K \, ds + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds \\ & + \beta_p \int_{\partial K} (p_h^{n+1} - \hat{p}_h^{n+1})(q_h - \hat{q}_h) \, ds + \int_{\partial K} \hat{p}_h^{n+1} (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\ & \left. - \int_K p_h^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.23)$$

com os parâmetros de estabilização β_u e β_p definidos em (3.22) e (3.28), respectivamente.

Assim, o método de elementos finitos misto híbrido estabilizado para o problema de Navier-Stokes enuncia-se como segue.

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e os multiplicadores de Lagrange $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$, tais que para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^l$ e $[\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^m \times \hat{Q}_h^m$,

$$\mathbf{B}_h^{ns}([\mathbf{u}_h^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1}], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) = \mathbf{F}_h^{ns}([\mathbf{v}_h, q_h]), \quad (5.24)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_h^{ns}([\mathbf{u}_h^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1}], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right. \\
&- \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} q_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \, ds + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds \\
&\quad + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_K \, ds - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds \\
&\quad + \beta_p \int_{\partial K} (p_h^{n+1} - \hat{p}_h^{n+1})(q_h - \hat{q}_h) \, ds + \int_{\partial K} \hat{p}_h^{n+1} (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\
&\quad \left. - \int_K p_h^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right] \quad (5.25)
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{F}_h^{ns}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (5.26)$$

O método (5.24) pode ser reescrito em forma matricial definindo formas bilineares $a_{SH}^{ns}(\cdot, \cdot)$, $b_{SH}^{ns}(\cdot, \cdot)$, $c_{SH}^{ns}(\cdot, \cdot)$, $d_{SH}^{ns}(\cdot, \cdot)$ e o funcional $f_{SH}^{ns}(\cdot)$ como

$$\begin{aligned}
a_{SH}^{ns}([\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_K \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\
&- \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \, ds + \beta_u \int_{\partial K} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\
&- \int_K p_h^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} \, d\mathbf{x} \\
&+ \beta_p \int_{\partial K} p_h^{n+1} q_h \, ds + \int_K (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{SH}^{ns}([\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1}], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, ds \\
&+ \int_{\partial K} (\hat{p}_h^{n+1} \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h^{n+1} q_h \, ds, \quad (5.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{SH}^{ns}([\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h], [\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}]) &= \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \, ds \\
&- \int_{\partial K} (\hat{q}_h \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \, ds - \beta_p \int_{\partial K} \hat{q}_h p_h^{n+1} \, ds \quad (5.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{SH}^{ns}([\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1}], [\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{q}_h]) &= \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds + \beta_p \int_{\partial K} \hat{p}_h^{n+1} \hat{q}_h \, ds \\
&- \int_{\partial K} \hat{p}_h^{n+1} \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \int_{\partial K} \hat{q}_h \mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \, ds
\end{aligned}$$

e

$$f_{SH}^{ns}([\mathbf{v}_h, q_h]) = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (5.30)$$

Com estas definições, o sistema matricial (3.43) pode ser montado e os mesmos passos para aplicação da condensação estática (3.42)-(3.46) podem ser seguidos.

5.5 Estudo de Convergência

Nesta seção, estudos numéricos são apresentados para avaliar o desempenho do método híbrido (5.24) proposto para simular o escoamento de Navier-Stokes. Inicialmente, a convergência do método de Newton e do método de Picard serão verificadas por meio de simulações que avaliam o erro do campo de velocidade em função do número de iterações na linearização do problema, tanto para elementos quadrilaterais como para elementos triangulares. Em seguida, a convergência h das aproximações do campo de velocidade \mathbf{u}_h , do campo de pressão p_h , do multiplicador associado ao campo de velocidade $\hat{\mathbf{u}}_h$ e do multiplicador associado ao campo pressão \hat{p}_h será avaliada. Para isso, os mesmos tipos de simulações apresentadas para simular o problema de Stokes e o problema de Oseen serão adotados.

Todas as simulações do escoamento de Navier-Stokes foram realizadas no domínio bidimensional (3.47). Em sua fronteira, a condição de contorno de Dirichlet (5.3) foi adotada. Para a solução analítica em questão, considerou-se a solução de Kovasznay [41], definida em (3.48)-(3.49). O termo fonte foi construído a partir da substituição da solução exata na equação (5.1), dando origem a

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

5.5.1 Convergência dos Métodos de Linearização

Nesta subseção a convergência dos métodos de Picard e Newton para a linearização do problema (5.24) são avaliadas. Para tanto, são realizadas simulações em uma malha com 64 elementos quadrilaterais e outra malha com 128 elementos triangulares empregando ordens $k = 1, 2, 3, 4, 5$, com tolerância $\varepsilon = 10^{-12}$.

Na Figura 24 é possível visualizar o resultado da convergência dos métodos de Newton e Picard considerando elementos quadrilaterais. Os resultados atestam a eficiência do método de Newton em relação ao Picard, uma vez que a convergência foi alcançada em apenas seis iterações. Utilizando malhas de elementos triangulares, resultados podem ser vistos na Figura 25. Neste caso, apesar do método de Picard necessitar de menos iterações se comparado a simulação em malhas de quadriláteros, o método de Newton apresenta uma performance superior atingindo a tolerância nas mesmas 6 iterações do caso anterior.

Por conta destes resultados, o método de linearização de Newton será utilizado em todas as simulações desta seção.

5.5.2 Convergência h

Nesta subseção, alguns resultados numéricos para o estudo da convergência h do método híbrido (5.24) serão exibidos. Na Figura 26 a convergência da aproximação do campo de velocidade (em vermelho) em comparação com a interpolante (em verde) pode

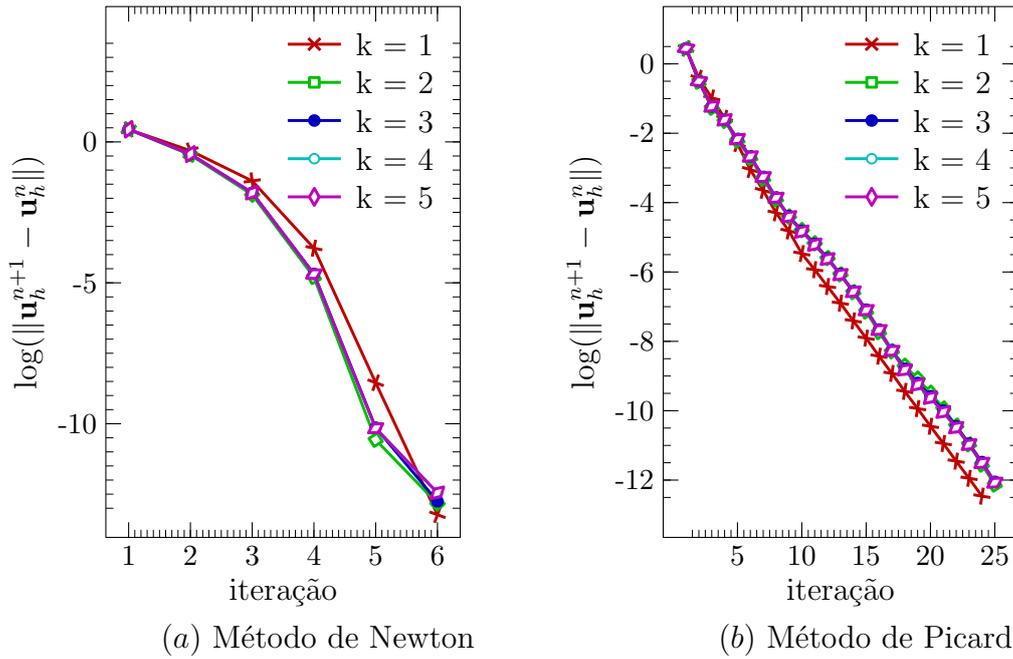


Figura 24 – Convergência dos métodos de Newton e Picard com tolerância $\varepsilon = 10^{-12}$ para a formulação híbrida linearizada: Logaritmo do erro da velocidade em função do número de iterações, considerando aproximações de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ e 5 utilizando elementos quadrilaterais.

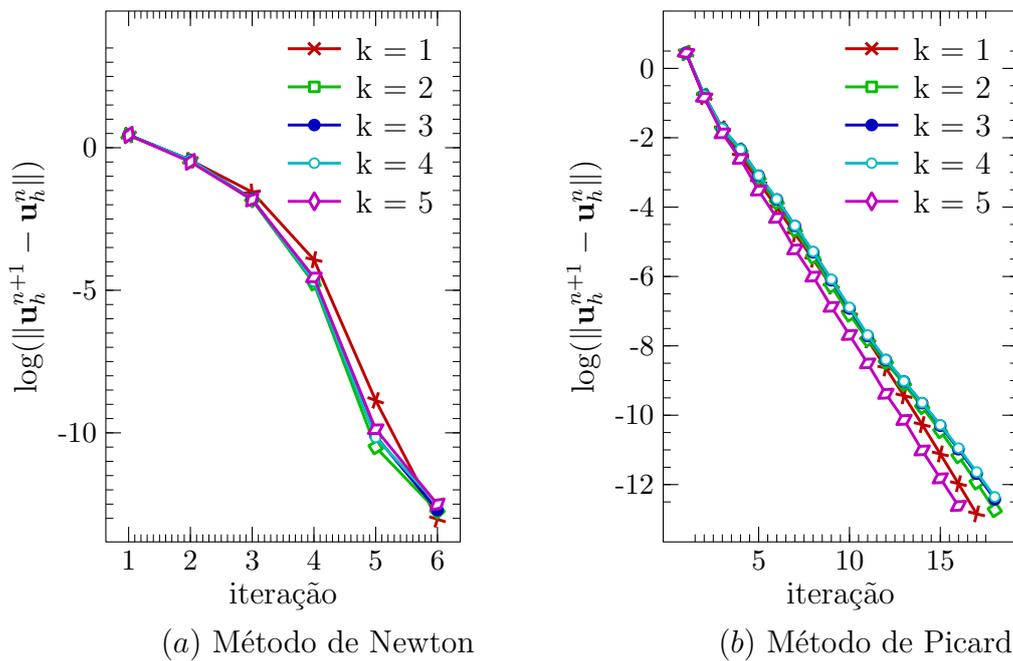


Figura 25 – Convergência dos métodos de Newton e Picard com tolerância $\varepsilon = 10^{-12}$ para a formulação híbrida linearizada: Logaritmo do erro da velocidade em função do número de iterações, considerando aproximações de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ e 5 utilizando elementos triangulares.

ser visualizada. Esses resultados apresentam taxa de convergência similares às obtidas nos dois capítulos anteriores para o campo de velocidade. Já a Figura 27 apresenta a convergência da aproximação do campo de pressão (em vermelho) em comparação com

a interpolante (em verde). Também é possível verificar taxa próximas das obtidas nos estudos do problema de Stokes e Oseen em todas as simulações.

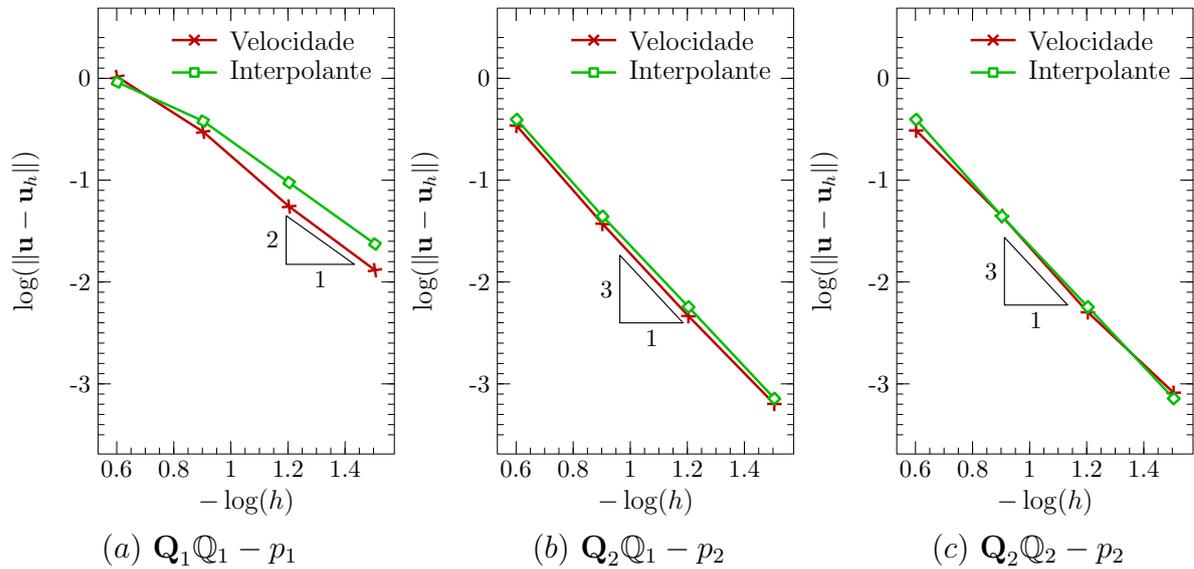


Figura 26 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

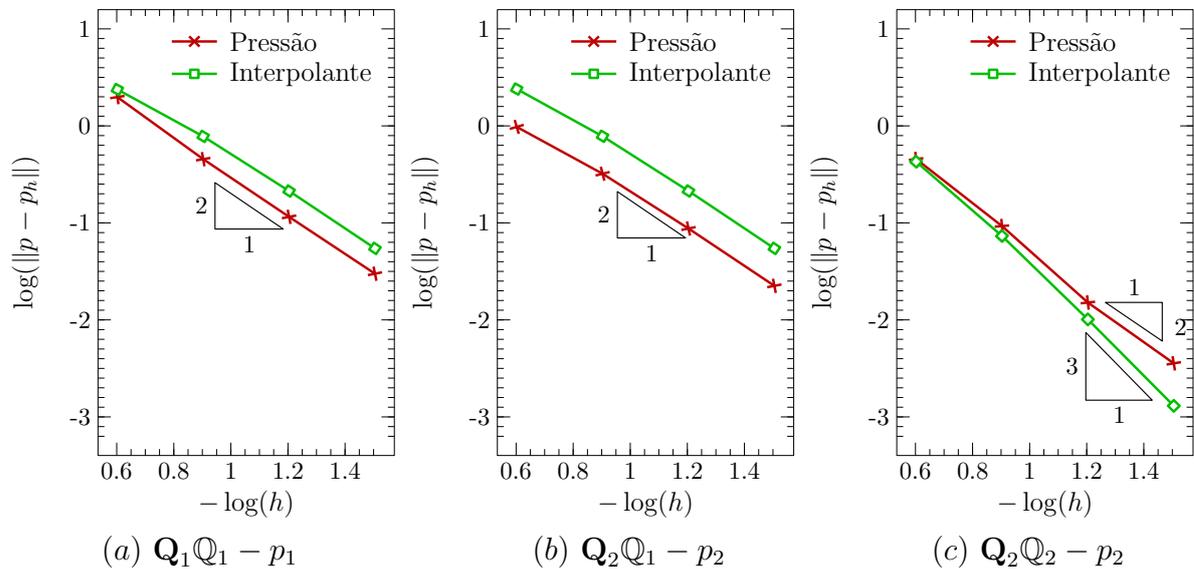


Figura 27 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

A Figura 28 e a Figura 29 apresentam resultados de convergência das aproximações para o multiplicadores $\hat{\mathbf{u}}_h$ e \hat{p}_h em comparação com suas respectivas interpolantes. Taxas de convergência com ordem $O^{m+0,5}$ podem ser observadas para ambos os multiplicadores em todas as simulações, com exceção na simulação do tipo $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2 - p_2$, Figura 29 (c), que apresenta taxa $O^{m-0,5}$.

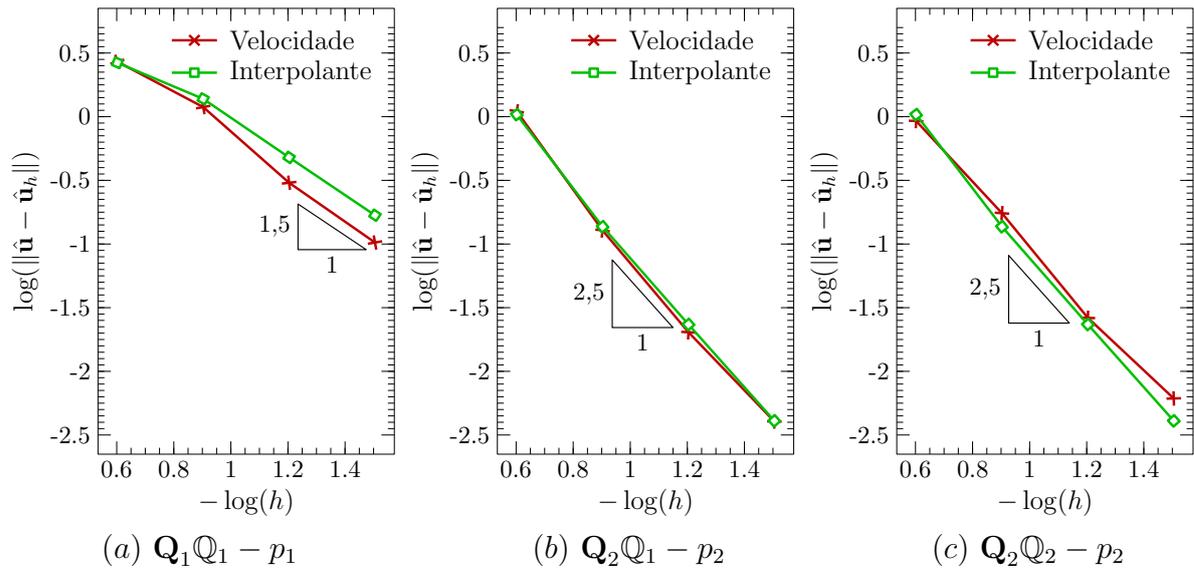


Figura 28 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

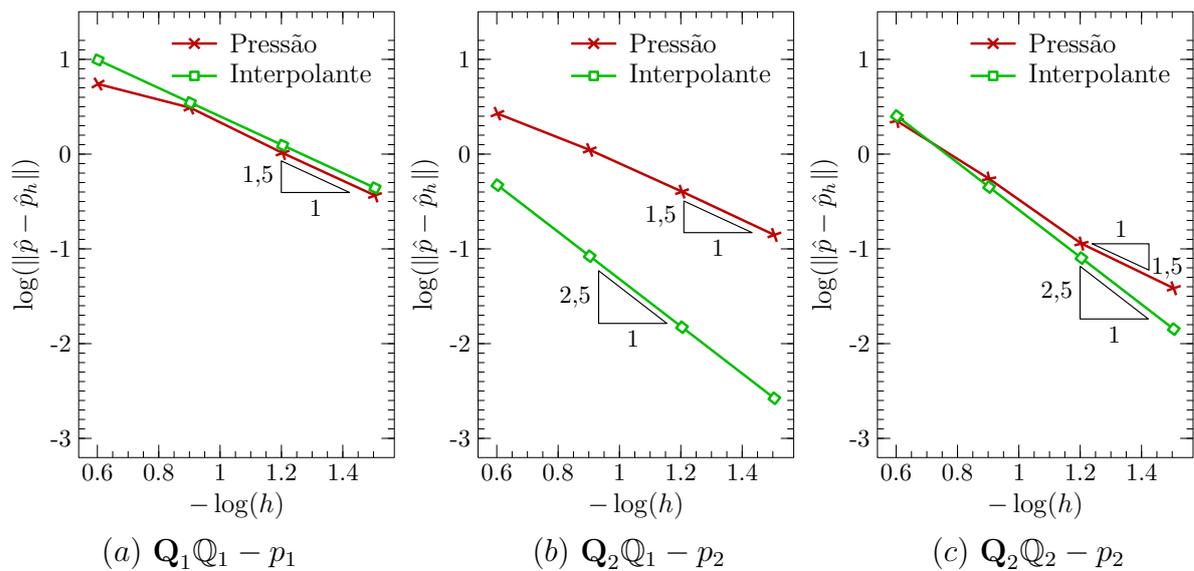


Figura 29 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos quadrilaterais.

Os resultados da convergência h para simulações em malhas de elementos triangulares são comentados a partir deste ponto.

A Figura 30 exibe resultados onde é possível verificar taxa de convergência similares às obtidas nas simulações com elementos quadrilaterais para o campo de velocidade nas três simulações propostas. Em contrapartida, a Figura 31 apresenta resultados da convergência h para o campo da pressão em comparação com sua interpolante. A mesma similaridade em relação aos resultados da convergência em simulações com elementos quadrilaterais é observada para o campo da pressão.

Por fim, a convergência h dos multiplicadores associados aos campos de velocidade

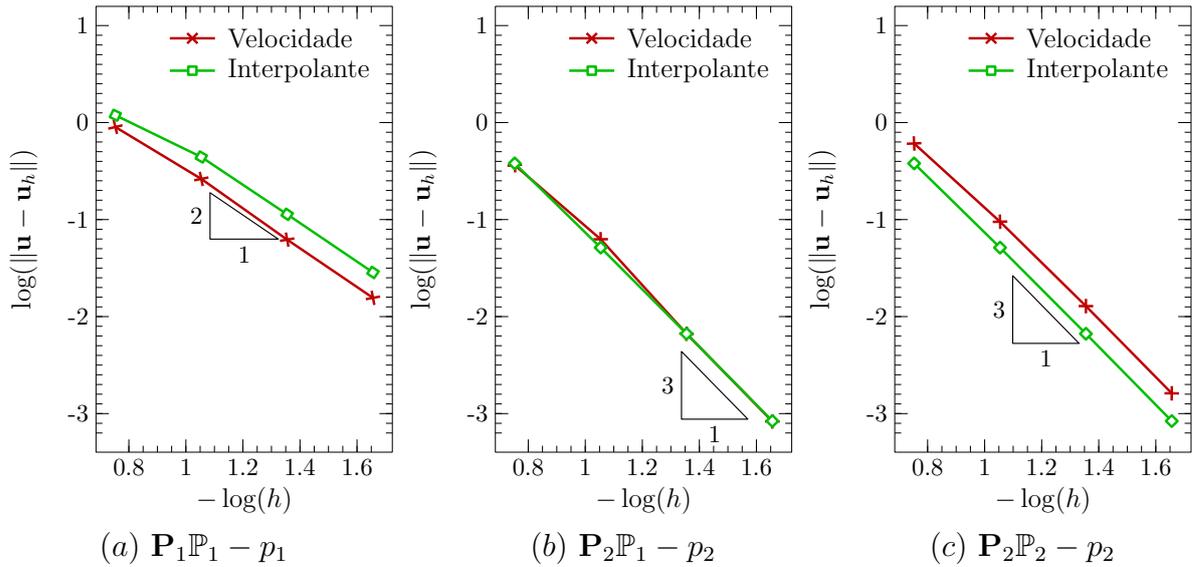


Figura 30 – Estudo da convergência h da velocidade \mathbf{u}_h em comparação com a interpolante da velocidade na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

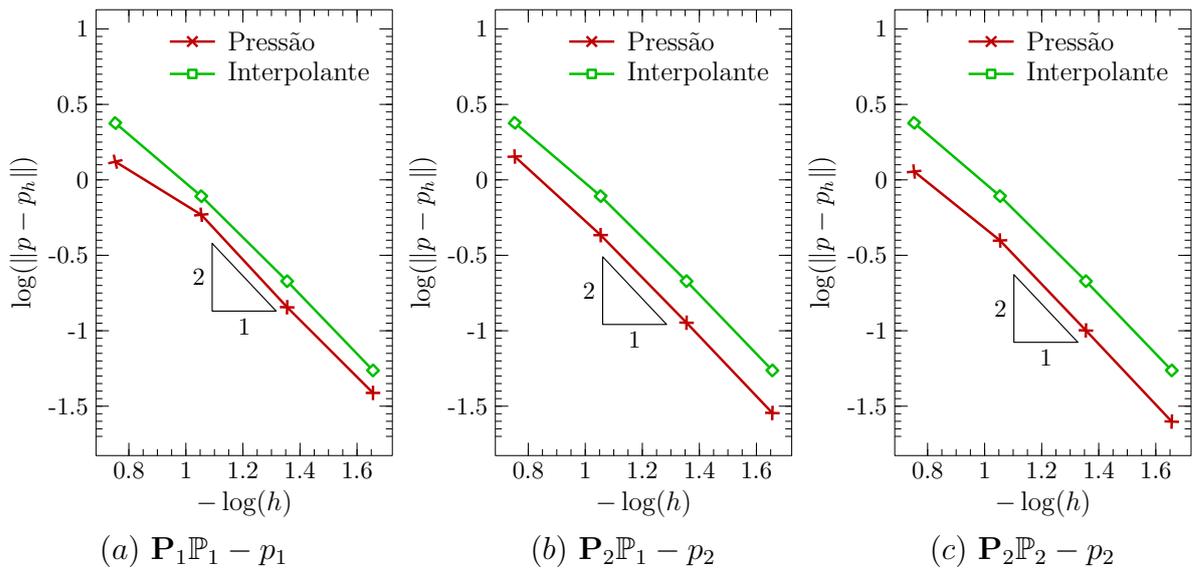


Figura 31 – Estudo da convergência h da pressão p_h em comparação com a interpolante da pressão na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

($\hat{\mathbf{u}}_h$) e pressão (\hat{p}_h), em comparação com suas respectivas interpolantes é apresentada na Figura 32 e na Figura 33. Os multiplicadores associados ao campo de velocidade convergiram com $O^{m+0,5}$ em todas as simulações; Já o multiplicador \hat{p}_h convergiu com taxa $O^{m-0,5}$ na Figura 33 (c).

5.5.3 Convergência p

Nesta subseção, estudos da convergência p das aproximações da velocidade \mathbf{u}_h e da pressão p_h são realizados. Nesses estudos, foram adotadas malhas uniformes com 64 elementos quadrilaterais e com 128 elementos triangulares. Aproximações polinomiais de

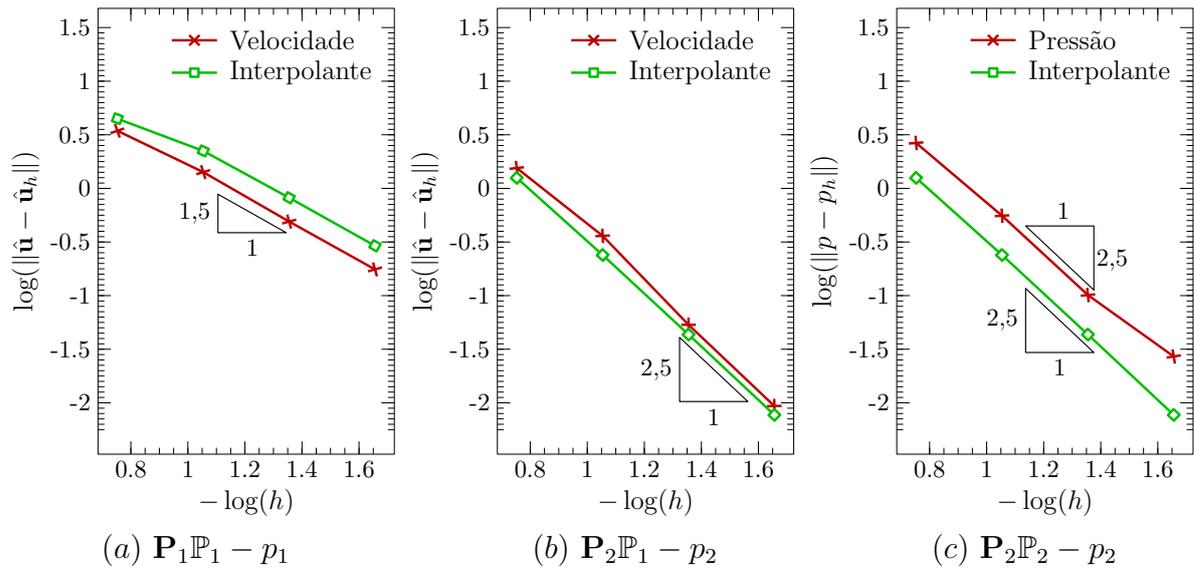


Figura 32 – Estudo da convergência h do multiplicador $\hat{\mathbf{u}}_h$ em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

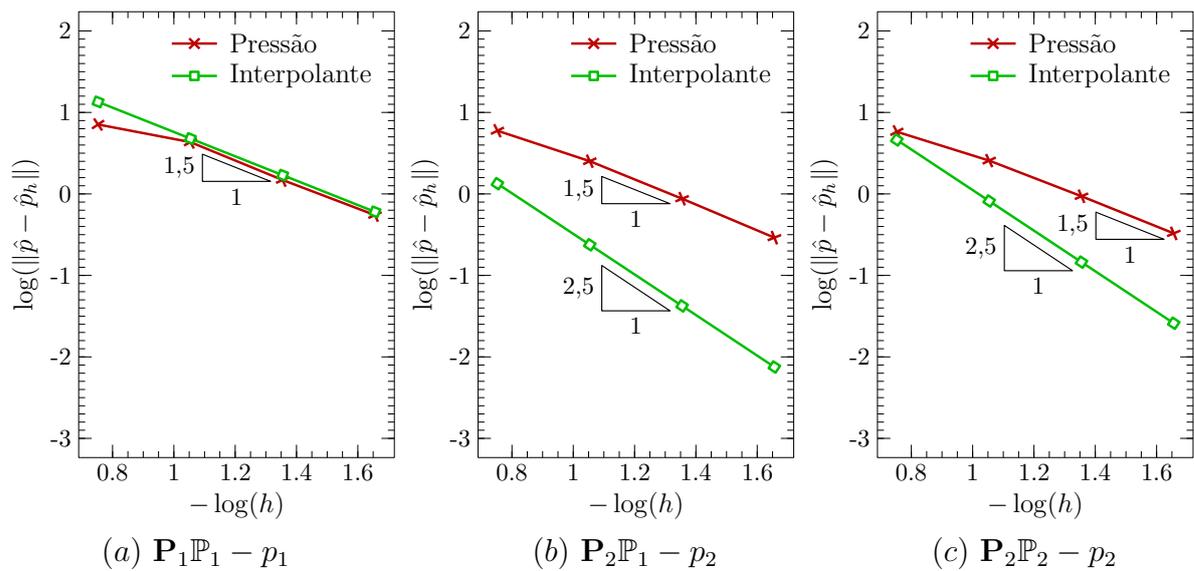


Figura 33 – Estudo da convergência h do multiplicador \hat{p}_h em comparação com a interpolante na norma $L^2(\Omega)$, realizado em malhas uniformes de elementos triangulares.

mesma ordem para os campos de velocidade, pressão e para o multiplicador são denotadas pelas simulações $\mathbf{Q}_k\mathbb{Q}_l - p_m$, com $k = l = m = 1, 2, 3, 4, 5$. Ademais, os parâmetros de estabilização para cada simulação são dados por $\beta_0 = 12, 24, 40, 62, 79$, para elementos quadrilaterais e $\beta_0 = 11, 22, 35, 51, 70$, para elementos triangulares. A Figura 34 e a Figura 35 mostram a influência do grau do polinômio no erro das aproximações, em que $\#dof$ denota o número dos graus de liberdade do multiplicador.

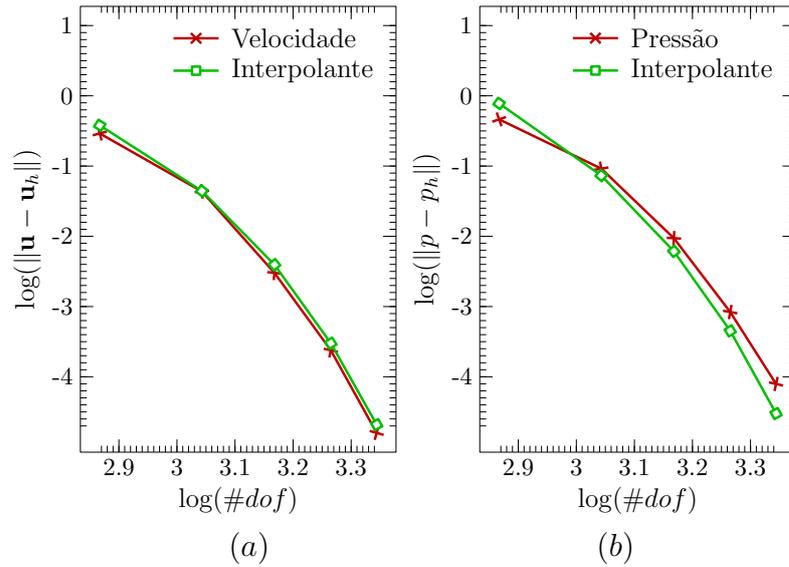


Figura 34 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Navier-Stokes com elementos quadrilaterais.

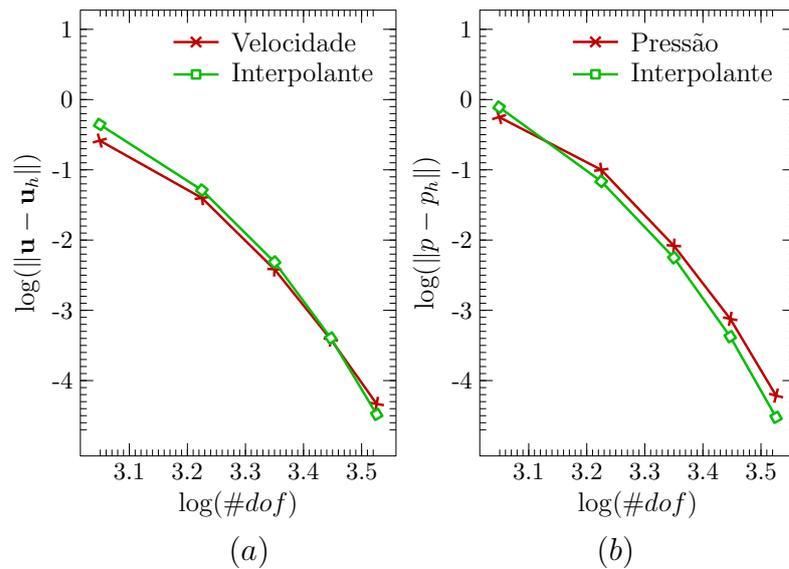


Figura 35 – Estudo da convergência p da aproximação da velocidade (a) e pressão (b) para o problema de Navier-Stokes com elementos triangulares.

5.6 Conclusão do Capítulo

O conjunto de equações que modelam o escoamento de Navier-Stokes pode ser visto como uma generalização das equações de Stokes e de Oseen, no qual o termo convectivo introduz uma dificuldade adicional ao problema: a não linearidade. Em virtude disso, o método de Newton foi utilizado para linearizar o problema devido a sua melhor performance se comparado ao método de Picard. Com o problema linearizado, uma formulação mista híbrida com estabilizações para os campos de velocidade e pressão foi introduzida e implementada, generalizando as duas formulações apresentadas nos capítulos anteriores. Resultados numéricos apontaram a convergência do método de Newton em apenas seis

iterações. Já o resultado da convergência h e p para aproximações do campo de velocidade \mathbf{u}_h e do campo de pressão p_h foram bastante similares às simulações anteriores para os problemas de Stokes e Oseen em todas as simulações propostas, assim como em Stokes e Oseen.

6 CONCLUSÕES

O conteúdo apresentado nesta dissertação foca exclusivamente nas formulações de elementos finitos mistas híbridas estabilizadas para problemas de escoamentos incompressíveis. Estas formulações são construídas a partir da introdução de multiplicadores de Lagrange, definidos nas arestas de cada elemento da discretização espacial. O principal objetivo desses multiplicadores é impor as condições de continuidade fracamente. Uma vez introduzidos na formulação, é possível utilizar a técnica de condensação estática, que elimina as variáveis de interesse em favor dos multiplicadores. Isso conduz a um problema global que envolve apenas os graus de liberdade dos multiplicadores de Lagrange. Resolvido o problema global, então os problemas locais são resolvidos por pós-processamento. Utilizando essa metodologia, os problemas de Stokes, Oseen e Navier-Stokes foram tratados.

No capítulo 3 uma formulação híbrida estabilizada com multiplicadores associados a velocidade e pressão foi recordada para tratar o problema de Stokes. Para essa formulação, estudos numéricos da convergência h e da convergência p foram realizados e atestaram taxa de convergência esperada para os campos de velocidade e pressão em todas as simulações propostas, indo ao encontro das estimativas apontadas pela análise numérica.

O capítulo 4 se dedicou em tratar o problema de Oseen. Esse problema é caracterizado por um conjunto de equações que contém a presença de um termo convectivo cuja velocidade de convecção é conhecida. Adotando as mesmas estratégias do capítulo anterior, uma formulação mista híbrida com estabilização para os campos de velocidade e pressão foi proposta para o problema de Oseen. Ao final do capítulo, estudos numéricos foram desenvolvidos para verificar as taxas de convergência do método na norma $L^2(\Omega)$. Apesar de não haver análise numérica para o problema de Oseen, as taxas de convergência obtidas foram similares às da formulação do capítulo anterior, que tratou o problema de Stokes. O problema de Oseen foi proposto no presente trabalho pois ele surge da linearização do problema de Navier-Stokes, tratado no capítulo seguinte.

Por fim, uma formulação mista híbrida estabilizada para simular o escoamento incompressível modelado pelas equações não lineares de Navier-Stokes foi proposta no capítulo 5. Em virtude da não linearidade do problema, o método de Newton foi utilizado e a formulação híbrida em questão foi construída tomando como base o problema linearizado. Para esta formulação, estudos numéricos foram realizados, iniciando com estudos de convergência dos métodos de Picard e Newton para a formulação proposta. Como resultado, constatou-se a superioridade do método de Newton, que convergiu em apenas seis iterações; enquanto que o método de Picard convergiu com mais de quinze iterações. Além disso, taxas da convergência h similares às obtidas para os problemas de Stokes e de Oseen para os campos de velocidade e pressão foram verificadas nos estudos de convergência do presente capítulo, para a formulação que tratou o problema de Navier-Stokes. O problema

de Navier-Stokes foi eleito para ocupar o capítulo 5 dessa dissertação por ser caracterizado como a generalização dos problemas tratados nos capítulos anteriores.

Como sugestões para trabalhos futuros, destacam-se alguns pontos que não puderam ser agregados ao trabalho. São eles:

- Desenvolver a análise numérica das formulações utilizadas para o problema de Oseen e o problema de Navier-Stokes. Com isso, será possível comparar os resultados obtidos nos estudos da convergência h para os campos de velocidade e pressão e constatar se as taxas obtidas foram ótimas.
- Incluir um termo de estabilização que permita simular a formulação proposta para o problema Navier-Stokes em regime turbulento e submeter a formulação estabilizada aos problemas clássicos, como o problema da cavidade e o problema do degrau.
- Por fim, sugere-se simular todas as formulações apresentadas no presente trabalho em regime transiente.

REFERÊNCIAS

- [1] C. O. Faria, A. F. D. Loula e A. J. B. dos Santos. Primal stabilized hybrid and DG finite element methods for the linear elasticity problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 68:486–507, 2014.
- [2] I. Babuška. Error bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16:322–333, 1971.
- [3] N.C. Nguyen, J. Peraire e Bernardo Cockburn. A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9–12):582 – 597, 2010.
- [4] Ngoc Cuong Nguyen, Jaume Peraire e Bernardo Cockburn. An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4):1147–1170, 2011.
- [5] Franco Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151, 1974.
- [6] Lukas Bystricky. Using deal. ii to solve problems in computational fluid dynamics. Master’s thesis, College of Arts and Sciences, 2016.
- [7] Khosro Shahbazi, Paul F Fischer e C. Ross Ethier. A high-order discontinuous Galerkin method for the unsteady incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 222(1):391–407, 2007.
- [8] Ramon Codina. Analysis of a stabilized finite element approximation of the Oseen equations using orthogonal subscales. *Applied Numerical Mathematics*, 58(3):264–283, 2008.
- [9] Iury Higor Aguiar da Igreja. *Métodos de elementos Finitos Híbridos Estabilizados para Escoamentos de Stokes, Darcy e Stokes-Darcy Acoplados*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, 2015.
- [10] B. M. Fraeijs de Veubeke. Displacement and equilibrium models the finite element method. In *Stress Analysis*, pages 145–197, Wiley, New York, NY, USA, 1965. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister.
- [11] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat e Dominik Schötzau. A locally conservative ldg method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 74(251):1067–1095, 2005.
- [12] Jesús Carrero, Bernardo Cockburn e Dominik Schötzau. Hybridized globally divergence-free LDG methods. part I: The Stokes problem. *Mathematics of computation*, 75(254):533–563, 2006.
- [13] D. Schötzau, C. Schwab e A. and Toselli. Mixed hp-DGFEM for incompressible flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40:2171–2194, 2003.
- [14] Iury Igreja e Abimael F. D. Loula. A stabilized hybrid mixed DGFEM naturally coupling Stokes-Darcy flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:739 – 768, 2018.

- [15] Iury Igreja e Abimael F.D. Loula. Stabilized velocity and pressure mixed hybrid DGFEM for the Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017.
- [16] Jose Karam Filho e Abimael F.D. Loula. On stable equal-order finite element formulations for incompressible flow problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 34(2):655–665, 1992.
- [17] Bernardo Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau e C. Schwab. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):319–343, 2002.
- [18] H. Egger e C. Waluga. hp analysis of a hybrid DG method for Stokes flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33:687–721, 2013.
- [19] Joubine Aghili e Daniele A. Di Pietro. An advection-robust Hybridono High-Order method for the Oseen problem. *Journal of Scientific Computing*, 77(3):1310–1338, 2018.
- [20] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat e Dominik Schötzau. The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. *Mathematics of Computation*, 73(246):569–593, 2004.
- [21] Douglas N. Arnold e F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates. *Math. Model. Numer. Anal.*, 19:7–32, 1985.
- [22] Sander Rhebergen e Garth N. Wells. Analysis of a hybridized/interface stabilized finite element method for the Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4):1982–2003, 2017.
- [23] B. Rivière e I. Yotov. Locally conservative coupling of Stokes and Darcy flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(5):1959–1977, 2005.
- [24] S. Badia e J. Baiges. Adaptive finite element simulation of incompressible flows by hybrid continuous-discontinuous Galerkin formulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(1):A491–A516, 2013.
- [25] P. A. Raviart e J. M. Thomas. Primal Hybrid Finite Element Methods for 2nd Order Elliptic Equations. *Math. Comp.*, 31(138):391 – 413, 1977.
- [26] Bernardo Cockburn e Jayadeep Gopalakrishnan. Incompressible finite elements via hybridization. part I: The Stokes system in two space dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4):1627–1650, 2005.
- [27] Bernardo Cockburn e Jayadeep Gopalakrishnan. Incompressible finite elements via hybridization. part II: The Stokes system in three space dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4):1651–1672, 2005.
- [28] Weifeng Qiu e Ke Shi. A superconvergent HDG method for the incompressible Navier–Stokes equations on general polyhedral meshes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 36(4):1943–1967, 2016.
- [29] F. Brezzi e M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.

- [30] M. Crouzeix e P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(3):33–75, 1973.
- [31] V. Girault e P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes Equations - theory and algorithms*. Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [32] C. Taylor e P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Intenat. J. Computat. & Fluids*, 1:73–100, 1973.
- [33] A. N. Brooks e T. J. R. Hughes. Streamline Upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [34] Ohannes Karakashian e Th. Katsaounis. Numerical simulation of incompressible fluid flow using locally solenoidal elements. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(9-10):1551–1570, 2006.
- [35] H.S. Lew e Y.C. Fung. Entry flow into blood vessels at arbitrary Reynolds number. *Journal of biomechanics*, 3(1):23–38, 1970.
- [36] Jonathan Faulkner, Bill X Hu, Stephen Kish e Fei Hua. Laboratory analog and numerical study of groundwater flow and solute transport in a karst aquifer with conduit and matrix domains. *Journal of contaminant hydrology*, 110(1-2):34–44, 2009.
- [37] Malte Braack, Erik Burman, Volker John e Gert Lube. Stabilized finite element methods for the generalized Oseen problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6):853–866, 2007.
- [38] Patrick Jenny, S.H. Lee e Hamdi A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 187(1):47–67, 2003.
- [39] Bernardo Cockburn, Ngoc Cuong Nguyen e Jaume Peraire. A comparison of HDG methods for Stokes flow. *J. Sci. Comput.*, 45:215–237, 2010.
- [40] Volker John. *Finite element methods for incompressible flow problems*. Springer, 2016.
- [41] LIG Kovasznay. Laminar flow behind a two-dimensional grid. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 44, pages 58–62. Cambridge University Press, 1948.
- [42] Pierre-Louis Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, volume 2. Oxford University Press on Demand, 1996.
- [43] Thomas JR Hughes, Leopoldo P. Franca e Marc Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.
- [44] Daniele Boffi, Franco Brezzi e Michel Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44. Springer, 2013.

- [45] Antony Jameson, L. Martinelli e N.A. Pierce. Optimum aerodynamic design using the Navier–Stokes equations. *Theoretical and computational fluid dynamics*, 10(1-4):213–237, 1998.
- [46] Garth A. Baker, Wadi N. Jureidini e Ohannes A. Karakashian. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(6):1466–1485, 1990.
- [47] Yohei Morinishi, Thomas S. Lund, Oleg V. Vasilyev e Parviz Moin. *Journal of computational physics*, 143(1):90–124, 1998.
- [48] N. C. B. Arruda, A. F. D Loula e R. C. Almeida. Locally Discontinuous but Globally Continuous Galerkin methods for elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 255:104–120, 2013.
- [49] Bernardo Cockburn, Bo Dong, Johnny Guzmán, Marco Restelli e Riccardo Sacco. A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(5):3827–3846, 2009.
- [50] Andrew Selle, Nick Rasmussen e Ronald Fedkiw. A vortex particle method for smoke, water and explosions. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 24, pages 910–914. ACM, 2005.
- [51] Francesco Bassi, Andrea Crivellini, Daniele A. Di Pietro e Stefano Rebay. An implicit high-order discontinuous Galerkin method for steady and unsteady incompressible flows. *Computers & Fluids*, 36(10):1529–1546, 2007.
- [52] John C. Chai, HaeOk S. Lee e Suhas V. Patankar. Finite volume method for radiation heat transfer. *Journal of thermophysics and heat transfer*, 8(3):419–425, 1994.
- [53] Nobumasa Takemitsu. Finite difference method to solve incompressible fluid flow. *Journal of Computational Physics*, 61(3):499–518, 1985.
- [54] A. Toselli. hp-Discontinuous Galerkin approximations for the Stokes problem. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12:1565–1598, 2002.
- [55] Jordi Vila Pérez. Hi-fi hybridisable discontinuous Galerkin method for incompressible flows. Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2017.