

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rodrigo Bittencourt Pigozzo

Sobre Equações Diferenciais Fuchsianas e Curvas Algébricas

Juiz de Fora

2019

Rodrigo Bittencourt Pigozzo

Sobre Equações Diferenciais Fuchsianas e Curvas Algébricas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria/Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

PIGOZZO, Rodrigo.

Sobre Equações Diferenciais Fuchsianas e Curvas Algébricas / Rodrigo
Bittencourt Pigozzo. – 2019.

76 f. : il.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

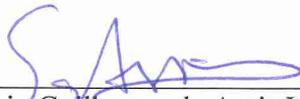
Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Ins-
tituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2019.

1. equações diferenciais ordinárias 2. equações fuchsianas 3. estruturas
algébricas 4. geometria 5. geometria hiperbólica 6. funções algébricas 7.
grupos fuchsianos 8. uniformização 9. superfícies de riemann

RODRIGO BITTENCOURT PIGOZZO

SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS E CURVAS ALGÉBRICAS

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



Prof. Dr. Leonardo Rabelo
UFJF



Prof.ª Dr.ª Gisele Teixeira Paula
UFES

Juiz de Fora, 28 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dar o primeiro e mais importante agradecimento a Deus, o autor e Senhor da minha vida, que me cumulaste de tantas graças nesse tempo de Mestrado Acadêmico, gostaria de agradecer de maneira especial também a CAPES pelo incentivo e auxílio financeiro ao longo deste tempo tão importante para os meus estudos e projetos matemáticos, gostaria de agradecer de maneira especial também ao meu orientador Sérgio Guilherme, que aceitou entrar comigo dentro deste assunto desafiador, agradecer também ao meu outro orientador que também aprofundou alguns conceitos comigo na graduação, Magno Branco, professor da UFJF, gostaria de agradecer aos meus pais Wanderson e Rita, pois nunca deixaram de me incentivar a estudar e me deram sempre condições para tal sonho acontecer! Gostaria de agradecer ao meu irmão Alexandre, já professor na UFSJ do departamento de computação, por todo o auxílio em tantas coisas, agradecer também de maneira especial à minha namorada, a Giovana Fernandes pelo descanso e incentivo que nunca me faltaram da parte dela, por sempre uma grande companheira, agradecer à todos da Comunidade Católica Shalom, da missão de Juiz de Fora, meus irmãos de comunidade, que são fiéis nas orações por mim, e por todo o conselho e amparo na vida interior, o que pra mim é o fundamental! Agradecer a cada daqueles que passaram esse tempo de mestrado comigo, estudando, fazendo provas, dividindo o ambiente das salas de estudo, toda a galera! Muito respeitosos! Mais uma etapa concluída em minha vida, graças a Deus!! Que venham outras! Bendito seja Deus para sempre!!

RESUMO

Este trabalho é uma breve discussão equações fuchsianas, como elas aparecem e também suas respectivas singularidades. Sobre funções pertencentes a $PSL_2(\mathbb{R})$, que são isometrias nos planos hiperbólicos, que são fruto de um corte mais sofisticado no conjunto de todas as transformações de Möbius, e a culminação da ligação entre funções automorfas e algébricas, nos dando resultados acerca de superfícies de riemann.

Palavras-chave: Equações fuchsianas, transformações de Möbius, automorfas, algébricas, superfícies de riemann.

ABSTRACT

This work is a brief discussion of fuchsian equations, how they appear and also their respective singularities. On functions belonging to $PSL_2(\mathbb{R})$, which are isometries in the hyperbolic planes, which are the result of a more sophisticated cut in the set of all Möbius transformations, and the culmination of the connection between automorphic functions and algebraic, giving us results about riemann surfaces.

Key-words: Fuchsian equations, Möbius transformations, automorphic, algebraic, riemann surfaces.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – A função $y = \sqrt{x}$ | 33 |
| Figura 2 – projeção estereográfica | 36 |
| Figura 3 – segmentos geodésicos passando por z | 40 |
| Figura 4 – H-retas | 41 |
| Figura 5 – Geodésicas em \mathcal{U} | 42 |
| Figura 6 – Geodésicas em \mathcal{D} | 42 |
| Figura 7 – triângulos hiperbólicos: (i) modelo semiplano superior e (ii) modelo disco de Poincaré | 43 |
| Figura 8 – polígono hiperbólico - pentágono curvilíneo | 66 |
| Figura 9 – polígono hiperbólico - octógono curvilíneo | 67 |
| Figura 10 – polígono hiperbólico de 5 lados | 68 |
| Figura 11 – octógono curvilíneo - ladrilhamento | 71 |
| Figura 12 – Ladrilhamentos no plano euclidiano | 71 |
| Figura 13 – polígono hiperbólico - hexágono curvilíneo | 74 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-------|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| UFJF | Universidade Federal de Juiz de Fora |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| EDO's | Equações Diferenciais Ordinárias |
| XIX | 19 |
| XX | 20 |

LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda, \theta, \xi$ Alfa, beta, gama, delta, epsilon, lâmbida, teta, quisi

| | |
|--------------|------------------------------|
| \cong | Aproximadamente |
| \bar{z} | Conjugado de z |
| \supset | Contém |
| \supseteq | Contém ou igual |
| \subset | Contido |
| \subseteq | Contido ou igual |
| ∂ | Derivada Parcial |
| \neq | Diferente |
| \equiv | Equivalente |
| \exists | Existe |
| e | Exponencial |
| $=$ | Igual |
| ∞ | Infinito |
| \int | Integral |
| \cap | Interseção |
| $>$ | Maior que |
| \geq | Maior ou igual que |
| $<$ | Menor que |
| \leq | Menor ou igual que |
| \forall | Para todo |
| \Im | Parte Imaginária |
| \Re | Parte Real |
| \in | Pertence |
| $\{\infty\}$ | Ponto idealizado no infinito |

| | |
|-------------------|----------------------|
| \times | Produto Cartesiano |
| \amalg | Produtório |
| \sqrt{z} | Raiz Quadrada de z |
| \Leftrightarrow | Se, e somente se |
| \sim | Se relaciona com |
| Σ | Somatório |
| \cup | União |
| \emptyset | Vazio |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 2 | EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS | 13 |
| 2.1 | Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem e singularidades | 13 |
| 2.2 | Singularidades no Infinito | 15 |
| 2.3 | Regularidade dos pontos singulares | 18 |
| 2.4 | Equações Diferenciais Fuchsianas | 22 |
| 2.5 | Equações Indiciais | 24 |
| 2.5.1 | A equação diferencial hipergeométrica de Gauss | 24 |
| 2.5.2 | A equação diferencial de Heun | 25 |
| 3 | DEFINIÇÕES, CONCEITOS E EXEMPLOS | 27 |
| 3.1 | Análise Complexa | 27 |
| 3.2 | Teorema de Laurent | 28 |
| 3.2.1 | A natureza das singularidades | 29 |
| 3.2.2 | O ponto no infinito | 30 |
| 3.2.3 | Funções com singularidades não-essenciais | 31 |
| 3.2.4 | Funções Multi-Valoradas | 32 |
| 3.3 | Superfícies | 33 |
| 3.3.1 | Superfícies de Riemann abstratas | 36 |
| 4 | GEOMETRIA E TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS | 38 |
| 4.1 | Dimensão 2 | 39 |
| 4.1.1 | Transformações de Möbius | 43 |
| 4.1.2 | Grupos Fuchsianos | 47 |
| 4.2 | Classificação das Transformações de Möbius | 47 |
| 5 | RELAÇÃO COM A CURVA ALGÉBRICA $s^2 = z^5 + 1$ | 51 |
| 5.1 | Motivação e Definição | 51 |
| 5.2 | A conjectura de Whittaker sobre a uniformização de superfícies hiperelípticas via equações diferenciais | 53 |
| 5.3 | Uniformização | 56 |
| 5.3.1 | Caso: $g = 2$ | 57 |
| 5.3.2 | Parâmetros acessórios c_1, c_2, c_3 | 60 |
| 5.4 | Superfície resultante, a partir das funções hiperleminiscatas e modelos hiperbólicos | 65 |

| | | |
|-------|---------------------------------------|-----------|
| 5.4.1 | O caso de gênero 1 e grau 4 | 72 |
| | REFERÊNCIAS | 75 |

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho é inteiramente baseado nos trabalhos de WHITTAKER em [19], [20] e [21], na intenção de entender o processo de uniformização e esboçar as contas de uma **conexão entre curva algébrica** de **gênero 2** e grau 5, a saber $s^2 = z^5 + 1$, e uma função automorfa (do tipo Möbius), utilizando também os conceitos de Equação Fuchsiana, e mostrar seus desdobramentos existentes dentro da *Geometria Hiperbólica*. E os *grupos fuchsianos* que surgem tem como geradores as transformações de Möbius (com uma certa propriedade) e queremos tentar argumentar que também é justamente o *Grupo de monodromia* de uma equação diferencial de segunda ordem.

Primeiramente, ancorados por [2] e [6], no capítulo 2, fazemos um estudo acerca das equações diferenciais de segunda ordem e suas respectivas singularidades, que mais tarde nos darão condições de classificá-las como **fuchsianas** e que serão de grande importância para o resultado de *uniformização* dessa *curva algébrica hiperelíptica* citada acima.

No capítulo 3, exploramos um pouco mais a parte da função analítica em si, que se encontra com pólos, seja de ordem 2 ou 1 (singularidades), conceito de funções de valor único e multi-valorada, e também alguma noção sobre superfície.

No capítulo 4, introduzimos os dois modelos existentes dentro da *Geometria hiperbólica plana*: Modelo do Disco de Poincaré e Modelo do Semi-Plano Superior, que serão justamente o espaço onde atuará as nossas transformações, transformações essas que terão a sua definição fundamental dada nesse capítulo: **transformações de Möbius**.

No último capítulo, o 5, toda a discussão e problemática da *conjectura de Whittaker* e se vemos, de fato, a **Uniformização** em si dessa *curva algébrica hiperelíptica* de **gênero 2** e **grau 5**, e seus respectivos desdobramentos dentro da *geometria hiperbólica*, desdobramentos esses auxiliados pela teoria que envolve as transformações de Möbius, que se comportam como *isometrias* dentro dos Modelos hiperbólicos.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUCHSIANAS

O estudo das *equações diferenciais Fuchsianas* despertou grande interesse na Matemática na segunda metade do século XIX e início do século XX, e muitos acreditam que estudo tenha ocasionado inclusive muito desenvolvimento na teoria das funções de uma variável complexa.

Equações fuchsianas podem ser classificadas de forma mais ou menos sistemática de acordo com o número de singularidades. Daremos atenção à equação de segunda ordem com duas, três e quatro singularidades, que correspondem à maioria das equações encontradas em aplicações.

Porém, antes de uma definição formal de *equações diferenciais Fuchsianas*, dada na seção 2.4, passemos a entender as seguintes definições e conceitos retratados nas seções 2.1, 2.2 e 2.3, motivados por [2], [16] e [6]:

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem e singularidades

Definição 2.1.1. *A forma padrão de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é:*

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + q(x) \cdot y(x) = 0, \quad (2.1)$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções analíticas no domínio $S \subset \mathbb{C}$, ou analíticas em $S \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, exceto em um número finito de pontos isolados, ou seja, funções **meromorfas** em S .

Observação 2.1.2. *A equação em (2.1) pode ser transformada em uma forma reduzida:*

$$\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + q_1(x) \cdot y_1(x) = 0, \quad (2.2)$$

com as seguintes mudanças na variável dependente:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) \exp \left\{ \frac{-1}{2} \int_b^x p(x') dz' \right\}, \\ q_1(x) &= q(x) - \frac{1}{2} \frac{dp(x)}{dz} - \frac{1}{4} (p(x))^2, \end{aligned}$$

onde $b \in S$.

No entanto, no que se seguirá, a **nossa atenção estará concentrada em EDO's lineares de segunda ordem do tipo**

$$P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \quad (2.3)$$

com P , Q e R polinômios em x . Ou seja:

Observação 2.1.3. Podemos perceber que tomamos toda a equação (2.3) e dividimos pelo polinômio de coeficientes reais P , resultando que p e q da forma padrão (2.1) são identificados como: $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$.

Essa observação será importante para as definições e resultados seguintes.

Definição 2.1.4 (ponto singular). Diz-se que $x = x_0$ é um **ponto singular** ou **singularidade** de (2.3), quando:

- a. $P(x_0) = 0$;
- b. Dados que Q e R são contínuos, então $Q(x_0) \neq 0$ ou $R(x_0) \neq 0$.

Diversas equações da Física-Matemática são EDO's *singulares* do tipo (2.3). Entre elas, destacamos

Exemplo 2.1.5. a. *A equação de Euler*

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad (2.4)$$

que tem singularidade em $x = 0$.

b. *A equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (2.5)$$

que tem singularidades em $x = \pm 1$.

c. *A equação Hipergeométrica de Gauss*

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (2.6)$$

onde γ, α e $\beta \in \mathbb{C}$, que tem singularidades em $x = 0, 1$.

d. *A equação de Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (2.7)$$

$\nu \neq 0$, que tem singularidade em $x = 0$.

e. *A equação de Tchebychev*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0, \quad (2.8)$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, que tem singularidades em $x = \pm 1$.

f. *A equação de Heun*

$$x(x-1)(x-a)y'' + [\gamma(x-1)(x-a) + \delta x(x-a) + \epsilon x(x-1)]y' + (\alpha\beta x - q)y = 0, \quad (2.9)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, q$ e a são constantes, que tem singularidades em $x = 0, 1, a$.

2.2 Singularidades no Infinito

EDO's de segunda ordem que apresentaram *singularidades* que oscilaram entre 0, 1 e uma constante diferente de zero. Mas, resulta que, frequentemente, $x = \infty$ também se apresenta como *singularidade* de EDO's do tipo (2.3). Já que vimos também na Definição 2.1 que esse domínio de funções analíticas pode sim ser \mathbb{C}_∞ .

Mais ainda, a definição de ponto singular dada na seção anterior só se aplica se o ponto x_0 é finito. Mas, em trabalhos mais avançados de equações diferenciais é necessário, muitas vezes, discutir o *ponto no infinito*. Isso é feito através da mudança de variável $\xi = \frac{1}{x}$, estudando-se a equação resultante em $\xi = 0$.

Então, para identificar se $x = \infty$ é singularidade ou não de (2.3), procede-se da seguinte forma (ver [2]):

Definição 2.2.1 (singularidade no infinito). 1. *Faz-se a mudança de variável $x = 1/\xi$ e reescreve-se (2.3) como*

$$\tilde{P}(\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + \tilde{Q}(\xi)\frac{dy}{d\xi} + \tilde{R}(\xi)y = 0. \quad (2.10)$$

2. *É $\xi = 0$ é ponto singular de (2.10) se, e somente se, $x = \infty$ é ponto singular de (2.3).*

Lema 2.2.2. *Se $x = \frac{1}{\xi}$, então temos que:*

a. $\frac{dy}{dx} = -\xi^2 \cdot \frac{dy}{d\xi};$

b. $\frac{d^2y}{dx^2} = \xi^3 \cdot \left(2\frac{dy}{d\xi} + \xi\frac{d^2y}{d\xi^2} \right);$

c. *Como $P(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \cdot \frac{dy}{dx} + R(x) \cdot y = 0$ em (2.3), então:*

$$P\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} - \left[\frac{2P\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{Q\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2} \right] \cdot \frac{dy}{d\xi} + R\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot y = 0.$$

Demonstração. Para (a): $\frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) \implies \frac{dy}{dx} = -\xi^2 \cdot \frac{dy}{d\xi}$.

Para o item (b):

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(-\xi^2 \cdot \frac{dy}{d\xi} \right) \\ &= -\xi^2 \cdot \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\xi} \right) \right] \\ &= -\xi^2 \cdot \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] \\ &= -\xi^2 \cdot \left[\frac{d}{d\xi} \cdot \left(-\xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right) \right] \\ &= -\xi^2 \cdot \left[-2\xi \cdot \frac{dy}{d\xi} + (-\xi^2) \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} \right] \\ &= \xi^3 \cdot \left[2 \frac{dy}{d\xi} + \xi \frac{d^2y}{d\xi^2} \right]. \end{aligned}$$

□

Com relação à equação (2.10), explicitamente, temos o seguinte

Proposição 2.2.3. *Se $m = M.M.C(\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R))$ então:*

- a. $\tilde{P}(\xi) = \xi^{4+m}P(1/\xi)$;
- b. $\tilde{Q}(\xi) = -\xi^{2+m}[2\xi P(1/\xi) - Q(1/\xi)]$;
- c. $\tilde{R}(\xi) = -\xi^m R(1/\xi)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.2.2 em que aplicamos a regra da cadeia do Cálculo I obtivemos

$$\frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \xi^3 \left[2 \frac{dy}{d\xi} + \xi \frac{d^2y}{d\xi^2} \right]. \quad (2.11)$$

A substituição de (2.11) em (2.10) fornece as expressões para $\tilde{P}(\xi)$, $\tilde{Q}(\xi)$ e $\tilde{R}(\xi)$, como nos itens acima. Segue a proposição. □

De volta a Euler, Legendre, Gauss, Bessel, Tchebychev e Heun, temos

Exemplo 2.2.4. a. *A equação de Euler (2.4) tem singularidade em $x = \infty$, pois,*

$$\tilde{P}(\xi) = \xi^2, \quad \tilde{Q}(\xi) = \alpha - 2 \quad \text{e} \quad \tilde{R}(\xi) = -\beta.$$

b. A **equação de Legendre** (2.5) tem singularidade em $x = \infty$, pois,

$$\tilde{P}(\xi) = \xi^2(\xi^2 - 1), \quad \tilde{Q}(\xi) = 1 - 2\xi^2(\xi + 1) \text{ e } \tilde{R}(\xi) = -\alpha(\alpha + 1).$$

c. A **equação Hipergeométrica de Gauss** (2.6) que tem singularidades em $x = \infty$, pois,

$$\tilde{P}(\xi) = \xi^2(\xi - 1), \quad \tilde{Q}(\xi) = (\gamma - 2)\xi^2 + (3 + \alpha + \beta)\xi \text{ e } \tilde{R}(\xi) = \alpha\beta.$$

d. A **equação de Bessel** (2.7) tem singularidade em $x = \infty$, pois,

$$\tilde{P}(\xi) = \xi^4, \quad \tilde{Q}(\xi) = -\xi^3 \text{ e } \tilde{R}(\xi) = 1 - \nu^2\xi^2.$$

e. A **equação de Tchebychev** (2.8) tem singularidade em $x = \infty$, pois,

$$\tilde{P}(\xi) = \xi^2(\xi^2 - 1) \text{ e } \tilde{Q}(\xi) = -\xi(2\xi^2 - 3).$$

f. A **equação de Heun** (2.9) tem singularidade em $x = \infty$, pois,

$$\tilde{P}(\xi) = a \cdot \xi^3 - \xi^2(a + 1) + \xi.$$

Continuando, se $x = x_0$ é um **ponto ordinário** de (2.3), isto é, $x = x_0$ **não** é um ponto singular de (2.3), então, vale o seguinte

Teorema 2.2.5. *Em torno de $x = x_0$, a solução-geral de (2.3) escreve-se como*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x) \quad (2.12)$$

onde:

- As constantes a_0 e a_1 são arbitrárias ;
- Tanto $y_1(x)$ como $y_2(x)$ são séries de potências que formalmente solucionam (2.3) e convergem, pelo menos, no intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$, onde $r > 0$ é a menor distância possível de x_0 a um ponto singular de (2.3) ;
- As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam uma base de soluções de (2.3), no sentido que o determinante wronskiano

$$\mathcal{W}(y_1; y_2)(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

nunca se anula em $]x_0 - r, x_0 + r[$.

A título de ilustração do Teorema 2.2.5, temos o seguinte

Exemplo 2.2.6. Para a equação (2.5) de Legendre, temos o seguinte:

- A solução $y_1(x)$ é

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \dots + \\ + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha \cdots (\alpha-2m+2)(\alpha+1) \cdots (\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

- A solução $y_2(x)$ é

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 + \dots + \\ + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1) \cdots (\alpha-2m+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

- O raio de convergência é $r = 1$.

2.3 Regularidade dos pontos singulares

Após o Teorema 2.2.5, torna-se natural o endereçamento da seguinte questão: **Como resolver a EDO (2.3), via série de potências, em torno de um ponto singular $x = x_0$?**

A experiência mostrou que esta questão, da forma tão aberta como ela foi posta no parágrafo acima, revelou-se muito dura. Nesta direção, uma estratégia adotada, que se revelou bem sucedida, foi delimitar um elenco *robusto* de singularidades $x = x_0$ da EDO (2.3) que permitissem o emprego de série de potências para a obtenção de (uma base de) soluções de (2.3) no seu entorno. Tais singularidades são as, assim chamadas, *regulares* cuja conceituação precisa é registrada na

Definição 2.3.1. Diz-se que o ponto singular $x = x_0$ ($\in \mathbb{R}$) da EDO (2.3) é **regular**, quando as duas condições abaixo são atendidas (motivado por [2]):

a. $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \in \mathbb{R}$;

b. $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, diz-se que o ponto singular $x = x_0$ ($\in \mathbb{R}$) da EDO (2.3) é **irregular**, quando ele **não** for regular.

Definição 2.3.2. Se x_0 é um ponto singular regular de $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$, então a **equação indicial** para esse ponto é:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

onde:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x), \\ q_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x). \end{aligned}$$

As raízes da equação indicial são chamadas expoentes (índices) da equação na singularidade x_0 .

Acima, aludimos a uma certa *robustez* da noção de *regularidade* de um ponto singular $x = x_0$ da EDO (2.3). Tal robustez é consubstanciada no seguinte

Exemplo 2.3.3. a. *A equação de Euler*

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

tem ponto singular regular em $x = 0$, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\alpha x}{x^2} \right) = \alpha \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \frac{\beta}{x^2} \right) = \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b. *A equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

tem pontos singulares regulares em $x = \pm 1$. De fato

1. $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{(-2x)}{1 - x^2} = 1 \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = 0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $x = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \cdot \frac{(-2x)}{1 - x^2} = 1 \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 \cdot \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c. *A equação Hipergeométrica de Gauss*

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

tem singularidades regulares em $x = 0, 1$. De fato

1. $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x - x^2} = \gamma \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{(-\alpha \cdot \beta)}{x - x^2} = 0 \in \mathbb{R} .$$

2. $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{(-2x)}{1 - x^2} = 1 \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = 0 \in \mathbb{R} .$$

d. *A equação de Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

tem singularidade regular em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{x}{x^2} \right) = 1 \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \right) = -\nu^2 \in \mathbb{R} .$$

e. *A equação de Tchebychev*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 \cdot y = 0,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, tem singularidades regulares em $x = \pm 1$. De fato,

1. $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \cdot \frac{(-x)}{(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(-x)}{(1 - x)(1 + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 \cdot \frac{(\lambda^2)}{(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\lambda^2(x + 1)(x + 1)}{(x + 1)(1 - x)} =$$

$$\frac{0}{-2} = 0 \in \mathbb{R} .$$

2. $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{(-x)}{(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1 - x)(-x)}{(1 - x)(1 + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2(x - 1)(x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{0 \cdot (-\lambda^2)}{2} = 0 \in \mathbb{R} .$$

f. *A equação de Heun (dividida pelo polinômio P)*

$$y'' + \left[\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x - 1} + \frac{\epsilon}{x - a} \right] y' + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x - 1)(x - a)} y = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, q$ e a são constantes, tem singularidades regulares em $x = 0, 1, a$.
Com efeito,

1. $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \gamma + \frac{x\delta}{x-1} + \frac{x\epsilon}{x-a} = \gamma \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{(x-1)(x-a)} \right) = 0 \in \mathbb{R} .$$

2. $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\gamma(x-1)}{x} + \delta + \frac{\epsilon(x-1)}{x-a} = \delta \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-a)} \right) = 0 \in \mathbb{R} .$$

3. $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x-a)}{x} + \frac{\delta(x-a)}{x-1} + \epsilon = \epsilon \in \mathbb{R} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2 \cdot \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2 \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)} \right) = 0 \in \mathbb{R} .$$

Naturalmente, convém estender tal noção de *regularidade*, quando o ponto singular de (2.3) é $x = \infty$. Nesta direção, temos a seguinte

Definição 2.3.4. Diz-se que $x = \infty$ é um ponto singular regular de (2.3), quando:

1. Antes de mais nada, $x = \infty$ é um ponto singular de (2.3) ;

2. São válidos:

$$a) \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \cdot \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \in \mathbb{R} ;$$

$$b) \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \cdot \frac{\tilde{R}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \in \mathbb{R} ,$$

onde \tilde{P} , \tilde{Q} e \tilde{R} são como em (2.10), isto é, $\tilde{P}(\xi) = P(1/\xi)$, $\tilde{Q}(\xi) = Q(1/\xi)$ e $\tilde{R}(\xi) = R(1/\xi)$.

Em complementaridade, temos a seguinte

Proposição 2.3.5. *Encontramos em BOYCE [2] que a regularidade de $x = \infty$ como ponto singular de (2.3) se dá através de:*

1. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi}{P(1/\xi)} \cdot \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right] \in \mathbb{R} ;$
2. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)} \in \mathbb{R} ,$

2.4 Equações Diferenciais Fuchsianas

Nos atentaremos às equações diferenciais lineares homogêneas de ordem 2.

Definição 2.4.1. *Um equação diferencial linear homogênea de ordem 2 é equação diferencial da forma:*

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0 ,$$

onde A, B, C são polinômios em x .

Definição 2.4.2. *Uma equação diferencial linear homogênea de ordem 2 é dita ser uma equação diferencial fuchsiana se possuir em todos os seus pontos singulares a regularidade (incluindo eventualmente, mas não necessariamente, o ponto ∞).*

Exemplo 2.4.3. *Mostremos, por meio da aplicação da Proposição 2.3.5, que o ponto $x = \infty$ é um ponto singular regular da Equação Hipergeométrica de Gauss (2.6).*

Demonstração. Podemos ver que:

1.

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi}{P(1/\xi)} \cdot \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right] = \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi}{\frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)} \cdot \left[\frac{\frac{2}{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{\left(\gamma - (\alpha + \beta + 1)\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2} \right] = \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^3}{\xi - 1} \cdot \left[\frac{\frac{2\xi - 2}{\xi^2}}{\xi} - \frac{\frac{\gamma\xi - (\alpha + \beta + 1)}{\xi}}{\xi^2} \right] = \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^3}{\xi - 1} \cdot \left[\frac{2(\xi - 1)}{\xi^3} - \frac{\gamma\xi - (\alpha + \beta + 1)}{\xi^3} \right] = \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\gamma\xi - (\alpha + \beta + 1)}{\xi - 1} \right) = 1 - \alpha - \beta \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)} \in \mathbb{R} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-ab}{\xi^2 \cdot \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{\xi-1}{\xi} \right) \right]} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-ab}{\xi^2 \cdot \left[\frac{\xi-1}{\xi^2} \right]} &= \\ \frac{-ab}{(-1)} &= ab \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Logo, os pontos singulares regulares da Equação Hipergeométrica de Gauss (2.6) são: $x \in \{0, 1, \infty\}$

A razão do interesse nessa equação é porque é a *única* equação linear homogênea de segunda ordem com apenas três pontos singulares regulares justamente em 0, 1 e ∞ . Portanto, a equação Hipergeométrica de Gauss é o nosso **primeiro exemplo de equação diferencial fuchsiana**.

Exemplo 2.4.4. Mostremos, por meio da aplicação da Proposição 2.3.5, que o ponto $x = \infty$ é um ponto singular regular da Equação de Heun (2.9).

Demonstração. Podemos ver que:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi}{P(1/\xi)} \cdot \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right] &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} 2 - \frac{Q(1/\xi)}{P(1/\xi) \cdot \xi} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\gamma \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \left(\frac{1}{\xi} - a \right) + \frac{b}{\xi} \left(\frac{1}{\xi} - a \right) + \frac{\epsilon}{\xi} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right)}{\frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \left(\frac{1}{\xi} - a \right) \cdot \xi} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \gamma + \frac{b}{1 - \xi} + \frac{\epsilon}{1 - a\xi} &= \gamma + b + \epsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)} \in \mathbb{R} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(\frac{\alpha\beta}{\xi} - q)}{\xi^2 \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \left[\left(\frac{1-\xi}{\xi} \right) \left(\frac{1-a\xi}{\xi} \right) \right]} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha\beta - q\xi}{\xi}}{\frac{(1-\xi)(1-a\xi)}{\xi}} &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\alpha\beta - q\xi}{(1-\xi)(1-a\xi)} &= \alpha\beta \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

□

Logo, os pontos singulares regulares da Equação de Heun (2.9) são: $x \in \{0, 1, a, \infty\}$

Então, sabendo que a equação de Heun é a única equação linear homogênea de segunda ordem com os quatro pontos singulares regulares exatamente em $0, 1, a$ e ∞ , temos que a equação de Heun é nosso **segundo exemplo de equação diferencial fuchsiana**.

2.5 Equações Indiciais

Definição 2.5.1. Dizemos que a equação:

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0 ,$$

é uma **equação de Fuchs** ou uma **equação do tipo fuchsiana** se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular.

Definição 2.5.2. Para o caso da equação de segunda ordem

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 ,$$

um ponto singular é dito regular se a singularidade em $p_1(x)$ for um polo simples e em $p_2(x)$ for no máximo um polo de ordem 2.

Passemos a escrever equações indiciais para dois dos nossos exemplos iniciais: a Equação Hipergeométrica de Gauss (2.6) e a Equação de Heun (2.9).

2.5.1 A equação diferencial hipergeométrica de Gauss

A equação hipergeométrica:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 ,$$

tem três pontos singulares regulares em $x = 0$, $x = 1$ e $x = \infty$. Pode-se então escrever esta equação diferencial como:

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(x-1)} - \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y = 0 .$$

A **equação indicial** correspondente é dada por:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 .$$

As raízes da **equação indicial** nos três pontos singulares são resumidos na Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 – Raízes da equação indicial nos três pontos singulares

| Ponto | p_0 | q_0 | Raízes |
|--------------|-------------------------------|---------------|------------------------------|
| $x = 0$ | γ | 0 | 0, $1 - \gamma$ |
| $x = 1$ | $1 + \alpha + \beta - \gamma$ | 0 | 0, $\gamma - \alpha - \beta$ |
| $x = \infty$ | $1 - \alpha - \beta$ | $\alpha\beta$ | α, β |

Investigamos a solução da equação diferencial hipergeométrica na vizinhança do ponto singular regular $x = 0$, onde as raízes da **equação indicial** são 0 e $1 - \gamma$. Portanto, esperamos que uma das soluções seja analítica em $x = 0$. Em geral, existem duas soluções linearmente independentes $u(x)$ e $v(x)$ da forma:

$$u(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n ,$$

$$v(x) = x^{1-\gamma} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) .$$

2.5.2 A equação diferencial de Heun

Os três pontos singulares regulares no plano complexo da equação de Heun estão localizados em $x = 0$, $x = 1$ e $x = a$, respectivamente. Restringimos ao caso onde $|a| > 1$ (nenhuma restrição se $|a| = 1$, desde que os papéis dos pontos singulares $x = 1$ e $x = a$ possam ser mudados). A equação diferencial que corresponde a essas condições é a equação diferencial de Heun:

$$y''(x) + \left[\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right] y'(x) + \frac{\alpha\beta(x-h)}{x(x-1)(x-a)} y(x) = 0 ,$$

com h sendo um parâmetro acessório. Existe ainda uma condição a ser satisfeita:

$$\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \epsilon .$$

As raízes da **equação indicial** $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ são resumidas na Tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Raízes da equação indicial nos quatro pontos singulares

| Ponto | Raízes |
|--------------|-------------------|
| $x = 0$ | $0, 1 - \gamma$ |
| $x = 1$ | $0, 1 - \delta$ |
| $x = a$ | $0, 1 - \epsilon$ |
| $x = \infty$ | α, β |

Segue abaixo o teorema que une o conceito de *equação indicial* com as *soluções da equação* e também uma transformação de Möbius, que não é demonstrado, mas muito importante:

Teorema 2.5.3. *A condição necessária e suficiente para que a razão de duas soluções independentes da equação $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$ mapeie a vizinhança de pontos singulares regulares no plano é que as raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0$ estejam sujeitas a uma das seguintes condições:*

a. $r' - r'' = \frac{1}{p}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $p > 1$;

b. $r' = r''$;

c. $r' - r'' = 1$.

Ou seja, quando x faz um circuito simples no ponto singular, o quociente das soluções é sujeito a: (a) uma transformação elíptica; (b) uma transformação parabólica; (c) uma transformação identidade.

Observação 2.5.4. *Então, a partir de condições primeiras em cima das raízes da equação indicial de uma equação diferencial (seja ela de Heun ou de Gauss), a razão de duas soluções dessa mesma equação é a variável uniformizante, mapeia a vizinhança de pontos singulares no plano e nos dá que as transformações associadas à essa variável, são classificáveis e formam o que chamaremos mais tarde de **grupo de monodromia** da equação diferencial.*

3 DEFINIÇÕES, CONCEITOS E EXEMPLOS

3.1 Análise Complexa

Motivado por [13].

Definição 3.1.1. *Seja E um conjunto não-vazio. Uma métrica em E é uma função $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo, para quaisquer $x, y, z \in E$, as seguintes condições:*

1. $d(x, y) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Nessas condições, $d(x, y)$ é dita distância de x a y , e o conjunto E munido de uma métrica d é chamado de espaço métrico, indicado por (E, d) .

Exemplo 3.1.2. (\mathbb{R}, d_1) e (\mathbb{R}^n, d_2) são exemplos de espaços métricos, com $d_1(x, y) = |x - y|$ e $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, sendo $\|\mathbf{x}\|$ a norma do vetor \mathbf{x} .

Definição 3.1.3. *Dado um espaço métrico (E, d) , uma aplicação $T : E \rightarrow E$ é dita uma isometria de E , se T preserva distância d , ou seja,*

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) , \quad \forall x, y \in E .$$

Observação 3.1.4. *Toda isometria T é uma aplicação injetora. Além disso, se T é sobrejetora, então T^{-1} também é uma isometria, e, para quaisquer duas isometrias T e S de E , a composta $T \circ S$ é ainda uma isometria.*

Definição 3.1.5. *Sejam X e Y espaços métricos. Um **homeomorfismo** de X sobre Y é uma bijeção contínua $f : X \rightarrow Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua. Neste caso, dizemos que X e Y são homeomorfos.*

Vamos nos preocupar com **regiões fundamentais** de grupos fuchsianos, a definir. Considere X um espaço métrico, e G um grupo discreto de homeomorfismos agindo descontinuamente em X .

Definição 3.1.6. *Uma região fechada $F \subset X$ é definida como sendo **região fundamental** para G se*

- $\cup_{T \in G} T(F) = X$,
- $\dot{F} \cap T(\dot{F}) = \emptyset, \forall T \in G \setminus \{Id\}$,
- ∂F tem medida nula .

O conjunto $\partial F = F - \dot{F}$ é chamado de fronteira de F . E a família $\{T(F) | T \in G\}$ é chamada tesselação de X .

3.2 Teorema de Laurent

Um importante teorema foi publicado em 1843 por Laurent. Refere-se a expansões de funções para as quais o Teorema de Taylor não pode ser aplicado.

Seja C e C' círculos concêntricos de centro a , do qual C' é o interior; e seja $f(z)$ uma função analítica em todos os pontos de C e C' e ao longo do anel entre C e C' . Seja $a + h$ qualquer ponto nesse *espaço em forma de anel*. Então, nós temos (Corolário 5.21 de [19]):

$$f(a + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a - h} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z - a - h} dz ,$$

onde as integrais são supostamente tomadas no sentido positivo ou anti-horário ao redor dos círculos.

Isso pode ser escrito como:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left\{ \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \dots + \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \right\} dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f(z) \left\{ \frac{1}{h} + \frac{z-a}{h^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{h^{n+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}(z-a-h)} \right\} dz .$$

Encontramos então (como na prova do Teorema de Taylor, [19, página 93]) que:

$$\int_C \frac{f(z) dz \cdot h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

e

$$\int_{C'} \frac{f(z) dz \cdot (z-a)^{n+1}}{(z-a-h)h^{n+1}}$$

tendem a 0, quando $n \rightarrow \infty$; e portanto, temos:

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + \frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \dots ,$$

onde: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$ e $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} (z-a)^{n-1} f(z) dz$. Esse resultado é a **expansão de Laurent**. Mudando a notação, podemos nos expressar da seguinte forma:

Definição 3.2.1. Se $f(z)$ é analítica nos círculos concêntricos C e C' de centro a , e também ao longo do anel entre eles, então qualquer ponto z do anel $f(z)$ pode ser expandido na forma

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z - a)} + \frac{b_2}{(z - a)^2} + \cdots ,$$

$$\text{onde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t - a)^{n+1}} \text{ e } b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} (t - a)^{n-1} f(t)dt .$$

Observação 3.2.2. Um importante caso do **Teorema de Laurent** surge quando há apenas uma singularidade dentro do círculo interno C' , ou seja, no centro a . Neste caso, o círculo C' pode ser tomado tão pequeno quanto se precise, e a expansão de Laurent é válida pra todo ponto no interior do círculo C , exceto o centro a .

3.2.1 A natureza das singularidades

Definição 3.2.3. Considere primeiro a função $f(z)$ a qual é analítica ao longo de uma região fechada $S \subset \mathbb{C}$, exceto em um único ponto $a \in S$. Suponha uma função $\varphi(z)$ tal que

i. $\varphi(z)$ é analítica ao longo de S ,

ii. quando $z \neq a$, $f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{(z - a)} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(z - a)^n}$.

Então, dizemos que f tem **pólo de ordem n em a** .

E os termos $\frac{B_1}{(z - a)} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(z - a)^n}$ são chamados de parte principal de $f(z)$ perto de a . Pela definição de uma singularidade (Definição 2.1.4) um pólo é uma singularidade. Se $n = 1$, a singularidade é chamada de pólo simples.

Observação 3.2.4. Qualquer singularidade de uma função de valor único que não seja um pólo é chamada de **singularidade essencial**.

Observação 3.2.5. Se a **singularidade essencial** é isolada (ou seja, se a região a qual a é ponto interior, pode ser encontrada sem singularidades que não sejam a), então a expansão de Laurent pode ser encontrada, em potências ascendentes e descendentes de $(z - a)$ válidas quando $\Delta > |z - a| > \delta$, onde Δ depende de outras singularidades da função, e δ é arbitrariamente pequeno. Daí a parte principal da função de perto de uma singularidade essencial isolada consiste em uma série infinita.

O pólo é, por definição, uma singularidade isolada, de modo que todas as singularidades não-isoladas (que são, na verdade, limite de uma sequência de pólos) são **singularidades essenciais**.

Corolário 3.2.6. Se $f(z)$ tem pólo de ordem n em a , e $\varphi(z) = (z - a)^n f(z)$ ($z \neq a$), $\varphi(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z)$, então $\varphi(z)$ é analítica em a .

3.2.2 O ponto no infinito

Observação 3.2.7. O comportamento de uma função $f(z)$ quando $|z| \rightarrow \infty$ pode ser tratado de forma semelhante ao seu comportamento como quando z tende a um limite finito.

Se escrevemos $z = \frac{1}{z'}$, de modo que os grandes valores assumidos por z são representados pelos valores pequenos de z' no z' -plano, existe então uma correspondência ponto-a-ponto entre z e z' desde que $z \neq 0$. Para fazer a correspondência completa às vezes é conveniente dizer que quando z' é a origem, z é o “ponto no infinito”.

Definição 3.2.8. Seja $f(z) = \varphi(z')$. Então, $\varphi(z')$ não é definido em $z' = 0$, mas o comportamento perto de $z' = 0$ é determinado pela expansão de Taylor (ou Laurent) na potência de z' ; e definimos: $\varphi(0) = \lim_{z' \rightarrow 0} \varphi(z')$ se o limite existir.

Por exemplo, a função $\varphi(z')$ pode ter um 0 de ordem m em $z' = 0$; neste caso a expansão de Taylor de $\varphi(z')$ é da forma

$$\varphi(z') = Az'^m + Bz'^{m+1} + Cz'^{m+2} + \dots,$$

e a expansão de $f(z)$ para valores de $|z|$ suficientemente grandes deve ser da forma

$$f(z) = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m+1}} + \frac{C}{z^{m+2}} + \dots.$$

Neste caso, $f(z)$ diz-se que tem um zero de ordem m no “infinito”.

Definição 3.2.9. A função $\varphi(z')$ pode ter um pólo de ordem m no ponto $z' = 0$; nesse caso

$$\varphi(z') = \frac{A}{z'^m} + \frac{B}{z'^{m+1}} + \frac{C}{z'^{m+2}} + \dots + \frac{L}{z'} + M + Nz' + Pz'^2 + \dots;$$

e então, para valores de $|z|$ suficientemente grandes, $f(z)$ pode ser expandida da forma

$$f(z) = Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \dots + Lz + M + \frac{N}{z} + \frac{P}{z^2} + \dots.$$

Nesse caso, $f(z)$ é dito que tem um pólo de ordem m no “infinito”. Similarmente, diz-se que $f(z)$ tem uma singularidade essencial no “infinito”, se $\varphi(z')$ tem uma singularidade essencial em $z' = 0$.

Exemplo 3.2.10. A função e^z tem singularidade essencial no “infinito” desde que a função

$$e^{\frac{1}{z'}} = 1 + \frac{1}{z'} + \frac{1}{2!z'^2} + \frac{1}{3!z'^3} + \dots$$

tem uma singularidade essencial em $z' = 0$.

Teorema 3.2.11 (Teorema de Liouville). *Seja $f(z)$ analítica para todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ e seja $|f(z)| < K, \forall z$, onde K é uma constante (de modo que $|f(z)|$ é limitado quando $|z| \rightarrow \infty$). Então, $f(z)$ é constante.*

Demonstração. Sejam z, z' dois pontos quaisquer e seja C um contorno tal que z e z' estão dentro. Pela Seção 5.21 de [19], temos,

$$f(z') - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left\{ \frac{1}{\xi - z'} - \frac{1}{\xi - z} \right\} f(\xi) d\xi ;$$

Tome C sendo o círculo do qual o centro é z e cujo raio é $\rho \geq 2|z' - z|$; em C escreva $\xi = z + \rho e^{i\theta}$ desde que $|\xi - z'| \geq \frac{1}{2}\rho$, quando ξ está no interior do disco limitado por C e segue de 4.64 em [19] que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{z' - z}{(\xi - z')(\xi - z)} f(\xi) d\xi \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z' - z| \cdot K}{\frac{1}{2}\rho} d\Theta \\ &= 2|z' - z|K\rho^{-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $\rho \rightarrow \infty$, mantendo z e z' fixos; então é claro que $f(z') - f(z) = 0$, ou seja, $f(z)$ é **constante**. □

3.2.3 Funções com singularidades não-essenciais

Teorema 3.2.12. *As únicas funções de valor único que não têm singularidades, exceto pólos, em qualquer ponto (incluindo o ∞) são funções **racionais**.*

Demonstração. Para que $f(z)$ seja tal função, deixe suas singularidades na parte finita do plano estar nos pontos c_1, c_2, \dots, c_k . A *principal parte* (ver Definição 3.2.3), da expansão no pólo c_r é

$$\frac{a_{r1}}{z - c_r} + \frac{a_{r2}}{(z - c_r)^2} + \dots + \frac{a_{rn_r}}{(z - c_r)^{n_r}}.$$

E ainda,

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

se não existe pólo no ∞ , então todos os coeficientes dessa expansão devem ser zero.

Agora a função

$$f(z) - \sum_{r=1}^k \left\{ \frac{a_{r1}}{z - c_r} + \frac{a_{r2}}{(z - c_r)^2} + \dots + \frac{a_{rn_r}}{(z - c_r)^{n_r}} \right\} - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_n z^n$$

claramente não tem singularidades nos pontos c_1, c_2, \dots, c_k ou no ∞ ; é, portanto, analítica em todos os lugares e limitada quando $|z| \rightarrow \infty$, e ainda, pelo *Teorema de Liouville*, é constante; Ou seja:

$$f(z) = C + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \sum_{r=1}^k \left\{ \frac{a_{r1}}{z - c_r} + \frac{a_{r2}}{(z - c_r)^2} + \dots + \frac{a_{rn_r}}{(z - c_r)^{n_r}} \right\},$$

onde C é constante; $f(z)$ é portanto uma **função racional**, e segue o teorema. \square

Observação 3.2.13. *Fica evidente então que pelo teorema de Liouville (combinado com o a Seção 3.61 de [19, Corolário (ii)]) que a função a qual é analítica em todos os lugares (incluindo ∞) é apenas constante. Já as funções que são **analíticas em todo ponto exceto no ∞** são consideradas bem importantes e são conhecidas como **funções integrais**. Do Teorema de Taylor, é aparente que não exista raio finito de convergência de uma série de Taylor a qual represente uma função integral. E de toda a discussão feita nos itens acima ainda colhemos que toda função integral tem singularidades essenciais no “infinito”.*

3.2.4 Funções Multi-Valoradas

Nos itens anteriores, dissertamos sobre as funções sob a consideração de se ter um **único valor** (ou *limite*) correspondendo a cada ponto z (que não sejam as singularidades).

Mas as funções podem ser definidas tendo mais de um único valor para cada valor de z ;

Exemplo 3.2.14. *Se $z = r(\cos(\Theta) + i \sin(\Theta))$ a função $z^{\frac{1}{2}}$ tem dois valores*

$$r^{\frac{1}{2}} \left(\cos \left(\frac{\Theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right), \quad r^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos \left(\frac{\Theta + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\Theta + 2\pi}{2} \right) \right\}.$$

Exemplo 3.2.15. *E a função $\arctan(x)$ (x real) tem um número ilimitado de valores. Temos: $\arctan x + n\pi$, onde $-\frac{1}{2}\pi < \arctan x < \frac{1}{2}\pi$, e n é qualquer inteiro.*

Qualquer uma das duas funções no qual $z^{\frac{1}{2}}$ é representado será analítica, exceto em $z = 0$.

Definição 3.2.16. *As duas funções são chamadas **ramos** de uma função multi-valorada $z^{\frac{1}{2}}$.*

Definição 3.2.17. *As **ramificações** são onde dois ou mais ramos coincidem num ponto a .*

Portanto, $z^{\frac{1}{2}}$ tem uma *ramificação* em 0.

3.3 Superfícies

Crédito das argumentações a TELEMANN [18].

Exemplo 3.3.1. Considere $f(x) = \sqrt{x}$. Para x real, isso é definido apenas para $x \geq 0$, onde selecionamos convencionalmente a raiz quadrada positiva.

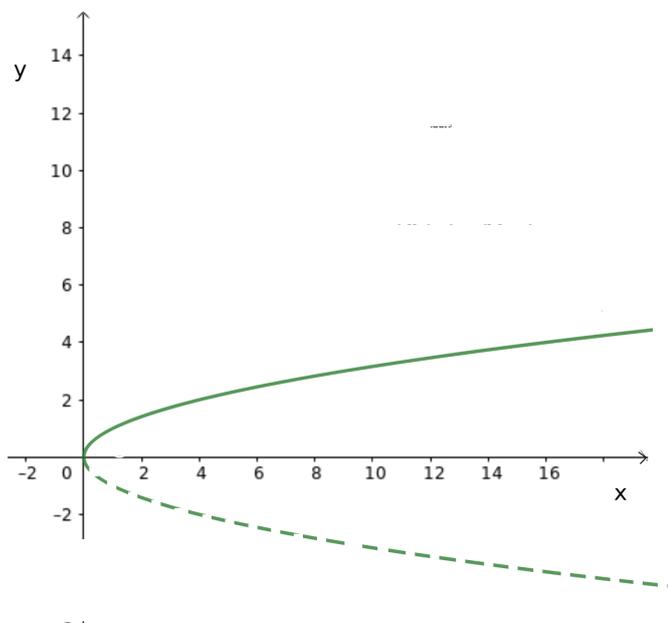


Figura 1 – A função $y = \sqrt{x}$

Ao pegarmos uma função contínua de $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, analítica em todo lugar exceto em 0, claramente existe um problema no 0, onde a função então não é *diferenciável*.

Nos complexos, pegamos $w = \sqrt{z}$ significando $w^2 = z$; mas, para obter uma função de valor único de z , devemos fazer uma escolha, e uma escolha contínua requer um corte no domínio.

Uma maneira padrão de se fazer isso é definir $\sqrt{z} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{C}$ para ser a raiz quadrada com parte real positiva. Existe único valor, para tal z longe do eixo real negativo. Essa função é *contínua* e, de fato, *analítico-complexa* (Definição 3.2.1), ou *holomorfa*, longe do eixo real negativo.

Uma escolha diferente para \sqrt{z} é a raiz quadrada com parte imaginária positiva. Isso é exclusivamente definido longe do eixo real positivo e determina uma *função analítico-complexa* em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Claramente, existe um problema em 0, mas o problema ao longo do eixo real é o nosso - não existe descontinuidade na função, apenas na escolha do valor. Poderíamos evitar esse problema, permitindo funções multi-valoradas; mas outro ponto de vista se mostrou mais promissor.

A ideia é substituir o plano complexo, como domínio da função multi-valorada, pelo gráfico da função. Nesta figura, a função torna-se projeção para o eixo - w , que é bem definido de valor único!

No caso de $w = \sqrt{z}$, o gráfico da função é um subconjunto fechado em \mathbb{C}^2 ,

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z\} .$$

Nesse caso, é fácil ver que a função $w = w(z)$,

$$S \rightarrow \mathbb{C}, (z, w) \mapsto w$$

define um homeomorfismo (Definição 3.1.5) no gráfico S com o w - plano. Isso é excepcional, isso não acontecerá com funções mais complicadas.

Observação 3.3.2. *O gráfico S é um exemplo muito simples de uma **superfície** (concreta, não-singular) **de Riemann**. Assim, a ideia da teoria de Riemann é substituir o domínio de uma função com múltiplos valores, por uma função definida por uma equação polinomial*

$$P(z, w) = w^n + p_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + p_1(z)w + p_0(z)$$

pele seu gráfico

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\} ,$$

e estudar a função w como uma função na superfície de Riemann S , ao invés de uma função multi-valorada de z .

Definição 3.3.3. *Uma superfície de Riemann (concreta) em \mathbb{C}^2 é um subconjunto localmente fechado que é localmente - próximo a cada um de seus pontos (z_0, w_0) - o gráfico (ver Observação 3.3.2) de uma função analítico-complexa de múltiplos valores.*

Isto está bem, desde que entendamos

- que tipo de objeto é uma *superfície de Riemann* ;
- como fazer análise complexa sobre elas .

A superfície de Riemann $S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | z = w^2\}$ é identificada com o plano complexo w por projeção. É claro que a *função holomorfa* em S deve ser: uma função analítica de w , considerada como uma função em S . Não teremos muita sorte em geral, no sentido de que superfícies de Riemann não serão identificáveis com suas projeções w ou z . No entanto, uma classe de maior importância para nós, a de superfícies não-singulares de Riemann, é definida pela seguinte propriedade:

Definição 3.3.4. *Uma superfície de Riemann S em \mathbb{C}^2 é **não-singular** se cada ponto (z_0, w_0) tem a propriedade que*

- *ou a projeção para o plano z ;*
- *ou a projeção para o plano w ;*
- *ou ambos ,*

pode ser usado para identificar uma vizinhança de (z_0, w_0) em S homeomorficamente como um disco no plano z em torno de z_0 , ou como um disco no plano w em torno de w_0 .

Podemos então usar esta identificação para definir o que significa para uma função em S ser *holomorfa* próximo de (z_0, w_0) .

Observação 3.3.5. *Permitimos que as superfícies concretas de Riemann fossem singulares. Na literatura, isso geralmente não é permitido (e nossas superfícies de Riemann são chamadas conjuntos analíticos). Estamos preocupados com superfícies não-singulares, então isso não causará problemas.*

Definição 3.3.6. *Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}^2$ é chamado de **concreta**, possivelmente singular, superfície de Riemann se, para cada ponto $s \in S$, há uma vizinhança U de s e uma função holomorfa F em U tal que $S \cap U$ é o conjunto-zero de F em U ; além disso, queremos que $\partial^n F / \partial w^n(s) \neq 0$, para algum n . Em particular, a continuidade de F implica que S é localmente fechado. A condição $\partial^n F / \partial w^n(s) \neq 0$ exclui retas verticais através de s , que não podem ser razoavelmente vistas como “gráficos”.*

Definição 3.3.7. *A superfície de Riemann é chamada de **não-singular** em $s \in S$ se uma função F puder ser encontrada como o vetor gradiente $(\partial F / \partial z, \partial F / \partial w) \neq 0$ em s .*

Teorema 3.3.8 (Estrutura local de uma superfície de Riemann não-singular). *i Suponha que $\partial F / \partial w(s) \neq 0$. Então, em alguma vizinhança de s , S é o gráfico de uma função holomorfa $w = w(z)$.*

ii Suponha que $\partial F / \partial z(s) \neq 0$. Então, em alguma vizinhança de s , S é o gráfico de uma função holomorfa $z = z(w)$.

iii Assuma ambos. Então, as duas funções holomorfas acima são inversas entre si.

Observação 3.3.9. Os domínios dessas funções serão pequenas vizinhanças dos componentes de s ; as funções podem se estender a uma região maior, ou novamente não.

3.3.1 Superfícies de Riemann abstratas

Proposição 3.3.10. Toda superfície de Riemann em \mathbb{C}^2 é não-compacta. (Prova em [18])

Isto é claro para uma superfície de Riemann definida como o conjunto-zero de uma equação algébrica $P(z, w(z)) = 0$; projeta-se de forma sobrejetiva para o plano complexo z . Como a imagem de um conjunto compacto sob um mapa contínuo é compacta, conclui-se que o conjunto de soluções não é compacto. Portanto, há um obstáculo à construção de superfícies compactas de Riemann, como o toro sem furos, como gráficos de funções com valores múltiplos dentro de \mathbb{C}^2 . Por outro lado, é fácil produzir superfícies topológicas compactas com estrutura analítica suficiente para ser digna do nome de Riemann. Aqui estão dois exemplos:

1. *A esfera de Riemann:* A descrição topológica de como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se torna uma esfera é melhor ilustrada pela *projeção estereográfica* (vide também OLSEN [14]), na qual pontos indo para ∞ no plano convergem para o pólo norte N na esfera. (O pólo sul S se projeta em 0).

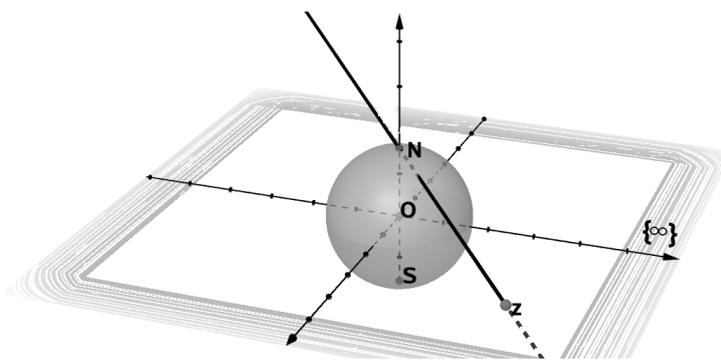


Figura 2 – projeção estereográfica

Denotamos: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, como desde o início consideramos. Podemos entender \mathbb{C}_∞ como uma **superfície de Riemann** considerando $z^{-1} = w$ como uma *coordenada local* próxima ao ∞ .

Definição 3.3.11. Dizemos que uma função f definida na vizinhança de ∞ em \mathbb{C}_∞ é **holomorfa** se a seguinte função for **holomorfa**, em uma vizinhança de $w = 0$:

$$w \mapsto \begin{cases} f(w^{-1}), & w \neq 0; \\ f(\infty), & w = 0. \end{cases}$$

2. Toro como superfície de Riemann:

Seja A o anel $1 < |z| < 1 + \epsilon/R$. Identifique a faixa de fronteira $1 < |z| < 1 + \epsilon/R$ com a faixa de limite $R < |z| < R + \epsilon$ via multiplicação por um número complexo fixo q , com $|q| = R$. Mais uma vez, essa identificação é biholomorfa. Seja T a superfície obtida identificando as duas tiras limite. É claro que T é um toro, e nós temos um mapa aberto, sobrejetivos AT . Se $U \subseteq T$ estiver aberto, chame uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa.

Todo ponto $t \in T$ tem uma vizinhança suficientemente pequena para que $\pi^{-1}(U)$ seja um ou dois conjuntos abertos disjuntos em A . No segundo caso, os dois conjuntos são identificados analiticamente pelo mapa $z \mapsto qz$. Portanto, para verificar a analiticidade perto de t , basta verificar isso perto de uma única das imagens inversas de t . Assim, mostramos:

Proposição 3.3.12. *Com estas definições, todo ponto $t \in T$ tem alguma vizinhança U_t , identificável via π como um disco em \mathbb{C} , de tal forma que as funções holomorfas vão para funções holomorfas, em ambas as direções*

Definição 3.3.13. *Uma superfície de Riemann compacta é chamada **hiperelíptica** se nela se define uma função meromorfa de grau 2. Equivalentemente, pode ser apresentado como uma cobertura dupla (ramificada) de \mathbb{C}_∞ .*

Proposição 3.3.14. *Qualquer superfície de Riemann hiperelíptica é **isomorfa** à compactificação da superfície de Riemann*

$$s^2 = f(z)$$

quando f é um polinômio sobre \mathbb{C} com raízes simples apenas.

Demonstração. Seja R a superfície de Riemann hiperelíptica, o mapa de grau 2, $\pi : R \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ percebe $\mathbb{C}(R)$ como uma extensão de corpo de grau 2 de $\mathbb{C}(z)$. Seja $u \in \mathbb{C}(R) \setminus \mathbb{C}(z)$; então u gera $\mathbb{C}(R)$ e satisfaz a equação de grau 2

$$u^2 + a(z)u + b(z) = 0 \quad a(z), b(z) \in \mathbb{C}(z).$$

Completar o quadrado, leva a $(u + a(z)/2)^2 + b(z) - a^2(z)/4 = 0$ ou $v^2 + c(z) = 0$. Multiplicando pelo quadrado do denominador de $c(z)$, obtemos $w^2 = f(z)$ com $f(z)$ um polinômio. Quaisquer fatores repetidos de $f(z)$ podem ser divididos e incorporados em w , levando a um $f(z)$ livre de quadrados. \square

Teorema 3.3.15. *Nem toda superfície de Riemann de **gênero** 3 é hiperelíptica. (Resultado em TELEMAN [18])*

4 GEOMETRIA E TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

A *Geometria hiperbólica* foi descoberta devido aos inúmeros insucessos em demonstrar o Axioma das paralelas ou V postulado de Euclides. Então János Bolyai e Lobachevsky observaram que alterando o axioma das paralelas não surgiam contradições com os outros axiomas e nem com as suas consequências. Assim, o enunciado do axioma das paralelas foi alterado;

Axioma 1. *Sejam L uma reta e P um ponto não pertencente a L . Por P passam infinitas retas paralelas a L .*

No formalismo moderno, leia-se *geodésica* no lugar de retas. A geometria que satisfaz o axioma acima foi denominada de *geometria hiperbólica*.

Portanto, os matemáticos Gauss, János Bolyai e Lobachevsky descobriram, uma Geometria Não-Euclidiana que, em 1871, o matemático alemão Felix Christian Klein a chamou de *Geometria Hiperbólica*. Por sua dedicação e ter sido o primeiro a publicar suas descobertas, a Geometria Hiperbólica também é conhecida como Geometria de Lobachevsky. O matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) provou a independência do V postulado de Euclides mostrando que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Deste modo, não poderia haver uma contradição na existência das mesmas.

Na geometria, o modelo de Klein, também conhecido no modelo projetivo, é um modelo de *geometria hiperbólica n -dimensional*, no qual os pontos da geometria estão em um disco ou esfera n -dimensionais, e as retas, são na verdade segmentos de retas contidas no disco, ou seja, elas terminam na fronteira do disco.

Agora, a conexão entre $PSL_2(\mathbb{R})$, o qual definiremos nesta seção, e *geometria hiperbólica* foi descoberta por Henri Poincaré(1854-1912) e publicado em 1882.

Destacamos Henri Poincaré, pois ele criou dois modelos, no plano Euclidiano, para Geometria Hiperbólica chamados, Semiplano de Poincaré e Modelo do Disco de Poincaré ou Disco de Poincaré (dissertados em [7] e [11]).

4.1 Dimensão 2

Consideremos a *Geometria Hiperbólica Plana*, apresentando os dois modelos: o *Semiplano Superior* \mathcal{U} e o *modelo do disco de Poincaré* \mathcal{D} .

Definição 4.1.1 (Semiplano superior). *Sejam as seguintes notações usuais: para partes real e imaginária de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\Re(z) = x$, $\Im(z) = y$. Então definimos nosso principal objeto, o **semiplano superior**, como sendo $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$.*

Definição 4.1.2 (Comprimento euclidiano). *Suponha $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ ($I = [0, 1]$), dado por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, seja caminho diferenciável suave (por partes). O **comprimento euclidiano** de γ é*

$$e(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Definição 4.1.3 (Comprimento hiperbólico). *Suponha $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ ($I = [0, 1]$), dado por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, seja caminho diferenciável suave (por partes). O **comprimento hiperbólico** de γ é*

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y} dt.$$

Então, motivados pela Definição 4.1.3, temos:

Definição 4.1.4 (Métrica Hiperbólica). *Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\Re(z) = x$, $\Im(z) = y$, definimos a **métrica Hiperbólica** como sendo*

$$ds = \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y}.$$

Assim, equipado com essa métrica, \mathcal{U} torna-se um *modelo para o plano hiperbólico* ou *plano Lobachevsky*.

Exemplo 4.1.5. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ dado por*

$$\gamma(t) = i[(b - a)t + a] \quad (0 \leq t \leq 1); b > a.$$

Temos que

1. *O comprimento euclidiano de γ é*

$$\begin{aligned} e(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{0^2 + (b - a)^2} dt = \\ &= \int_0^1 (b - a) dt = b - a. \end{aligned}$$

2. O comprimento hiperbólico de γ é

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{0^2 + (b-a)^2}}{(b-a)t + a} dt = \int_0^1 \frac{(b-a)dt}{(b-a)t + a} \\ &= \int_a^b \frac{ds}{s} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Motivados pelo Exemplo 4.1.5, podemos definir *distância hiperbólica* entre elementos do eixo imaginário (ia e ib) da seguinte maneira:

Observação 4.1.6 (distância Hiperbólica, mesma parte real). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ ($b > a$), $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ dado por*

$$\gamma(t) = i[(b-a)t + a] \quad (0 \leq t \leq 1) ;$$

e o comprimento hiperbólico $h(\gamma) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, temos que

$$\rho(ia, ib) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Veremos que o papel das **geodésicas** (isto é, as curvas com menor *distância* com respeito a essa métrica) é desempenhado por linhas retas e semicírculos ortogonais ao eixo real $\Re(z) = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) = 0\}$.

Quaisquer dois pontos em \mathcal{U} podem ser unidos por uma única **geodésica**, e a distância entre esses pontos é medido ao longo desta geodésica. No entanto, há mais de um segmento geodésico passando por um determinado ponto z (z que não está no segmento geodésico L) o qual não intersecta L (ver Figura 3).

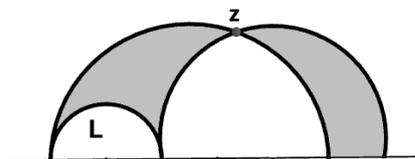


Figura 3 – segmentos geodésicos passando por z

De fato, todas as geodésicas passando por z que estejam fora da região sombreada não se intersectam com L . Isso significa que a geometria em \mathcal{U} é não-Euclidiana: o quinto postulado de Euclides, o axioma das paralelas, não é satisfeito aqui.

Agora, queremos mostrar que, entre dois pontos em \mathcal{U} existe um **único** caminho de comprimento hiperbólico *mais curto*. Tais caminhos são chamados *segmentos de reta hiperbólicos* ou *H-segmentos de reta*, vejamos:

Lema 4.1.7. *Seja $\tilde{\kappa} : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}^+$ um caminho diferenciável (suave por partes), e seja γ como na Definição 4.1.6, então o comprimento hiperbólico $h(\tilde{\kappa})$ cumpre*

$$h(\tilde{\kappa}) \geq h(\gamma) .$$

Demonstração. Suponha que o caminho $\tilde{\kappa}$ seja dado por

$$\tilde{\kappa}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t) ; (0 \leq t \leq 1).$$

Então:

$$h(\tilde{\kappa}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\tilde{y}}{dt}\right|}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}}{\tilde{y}(t)} dt = \ln(b/a) = h(\gamma) .$$

□

Definição 4.1.8. *Definimos **retas hiperbólicas** ou **H-retas** como sendo os semi-círculos cujos centros estão no eixo real ou as semiretas Euclidianas perpendiculares ao eixo real.*

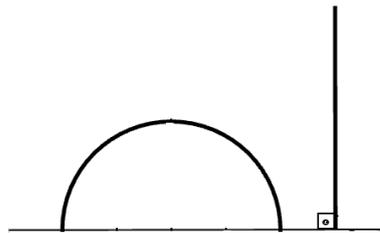


Figura 4 – H-retas

Vimos que a *distância hiperbólica* $\rho(ia, ib)$ vale $\ln(b/a)$, quando $a < b$, agora, dados $z, w \in \mathcal{U}$, com $\Re(z) \neq \Re(w)$, colocaremos o seguinte:

Definição 4.1.9 (distância Hiperbólica, parte real diferente). *Dados $z, w \in \mathcal{U}$, com $\Re(z) \neq \Re(w)$, a **distância hiperbólica** $\rho(z, w)$ é definida pela fórmula*

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma) ,$$

onde o ínfimo é tomado sob todo caminho γ ligando z e w em \mathcal{U} .

Fica fácil ver que ρ é não-negativo, simétrico, e satisfaz a desigualdade triangular

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) ,$$

isto é, é, de fato, uma função distância em \mathcal{U} .

Definição 4.1.10 (disco de Poincaré). *O disco $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ é chamado **disco de Poincaré**. O círculo $\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é chamado o **círculo no ∞** ou **fronteira de \mathcal{D}** .*

Definição 4.1.11. *As **geodésicas** no modelo do disco de Poincaré são os arcos dos círculos e diâmetros em \mathcal{D} que encontram $\partial\mathcal{D}$ ortogonalmente. Vejamos então as Figuras 5 e 6 a seguir, que trazem um pouco daquilo que vem sendo discutido:*

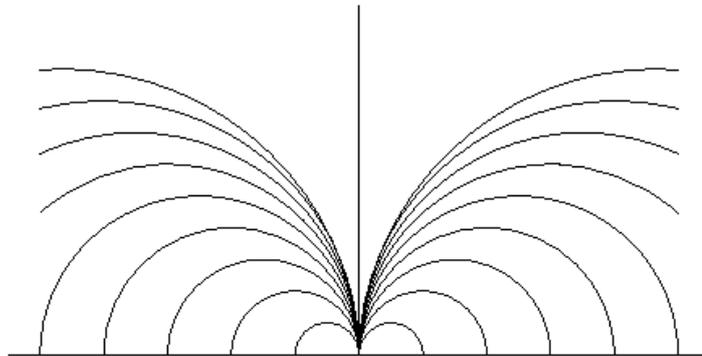


Figura 5 – Geodésicas em \mathcal{U}

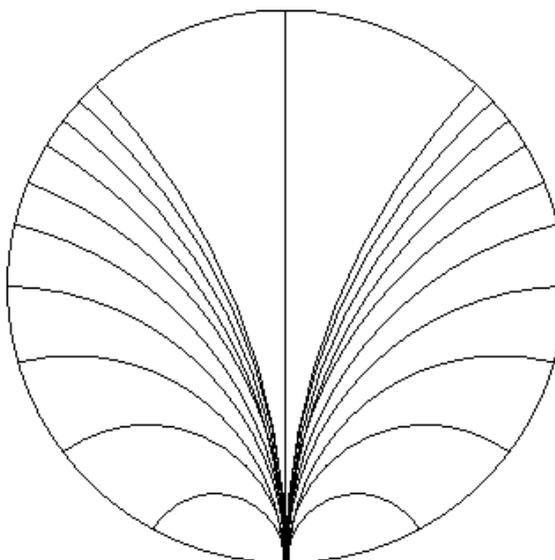


Figura 6 – Geodésicas em \mathcal{D}

A Figura 7 a seguir apresenta um polígono de três lados representado em cada um dos modelos definidos nesta seção, semiplano superior \mathcal{U} e do disco de Poincaré \mathcal{D} .

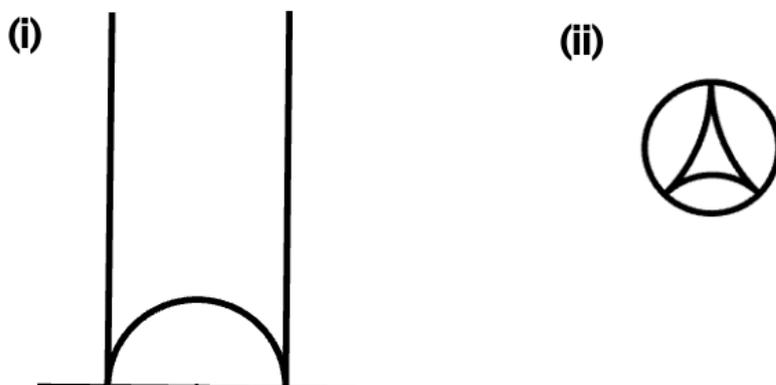


Figura 7 – triângulos hiperbólicos: (i) modelo semiplano superior e (ii) modelo disco de Poincaré

De maneira resumida então, **um círculo de Poincaré** é um círculo euclidiano ortogonal a todas as retas de Poincaré que irradiam de um ponto P . À medida que um ponto se aproxima da circunferência limite, sua distância ao centro tende para o infinito. Portanto, para um círculo de Poincaré, o comprimento euclidiano do raio com respeito ao centro euclidiano, medido em diferentes direções, será diferente.

4.1.1 Transformações de Möbius

Definição 4.1.12 (Grupo Unimodular). *Considere o grupo de todas as matrizes dos coeficientes reais $f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det(f) = ad - bc = 1$. Sabemos que $\text{tr}(f) = a + d$ é o traço da matriz f . Esse grupo é chamado **grupo unimodular** e é denotado por $SL_2(\mathbb{R})$.*

Proposição 4.1.13. *O conjunto das transformações de \mathbb{C} em si mesmo da forma*

$$\left\{ T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}, \quad (4.1)$$

é um grupo, tal que o produto de duas transformações corresponde ao produto de duas matrizes de coeficientes correspondentes às transformações. E, os coeficientes da transformação inversa, formam a matriz inversa.

Observação 4.1.14. *Cada transformação T da proposição anterior é representada, portanto, por um par de matrizes $\pm f \in SL_2(\mathbb{R})$.*

Definição 4.1.15 ($PSL_2(\mathbb{R})$). *O grupo de todas as transformações (4.1) é chamado $PSL_2(\mathbb{R})$ e é isomorfo a $SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\}$, onde I_2 é a matriz identidade 2×2 .*

Observação 4.1.16. *A Transformação Identidade em $PSL_2(\mathbb{R})$ será denotada por Id .*

Proposição 4.1.17. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$. Então a função racional*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

induz uma bijeção $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Seja

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Seja $S : w \mapsto \frac{dw - b}{-cw + a}$. Queremos mostrar que

$$S \circ T(z) = \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + a} = Id.$$

Temos:

$$S \circ T(z) = \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + a} = \frac{\frac{daz + db - bcz - db}{cz + d}}{\frac{-acz - bc + acz + ad}{cz + d}} =$$

$$\frac{z(ad - bc)}{ad - bc} = z.$$

□

Definição 4.1.18. *Por $PSL_2(\mathbb{C})$, também denotamos o conjunto das bijeções*

$$T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

induzidas por funções racionais como na Proposição 4.1.17.

Definição 4.1.19. *Uma transformação $T \in PSL_2(\mathbb{C})$, dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0),$$

pertence a $PSL_2(\mathbb{R})$, quando:

1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
2. $ad - bc = 1$.

Definição 4.1.20 (Transformação de Möbius). *Um elemento arbitrário de $PSL_2(\mathbb{R})$ será referido, genericamente, como uma **transformação de Möbius**.*

Lema 4.1.21. *Seja $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0).$$

não é perda de generalidade supor $ad - bc = 1$.

Demonstração. Dividindo o numerador e o denominador por $\sqrt{\Delta}$, obtemos

$$T(z) = \frac{(a/\sqrt{\Delta})z + (b/\sqrt{\Delta})}{(c/\sqrt{\Delta})z + (d/\sqrt{\Delta})} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \Delta = ad - bc > 0).$$

Como $(a/\sqrt{\Delta}) \cdot (d/\sqrt{\Delta}) - (b/\sqrt{\Delta}) \cdot (c/\sqrt{\Delta}) = \frac{ad - bc}{\Delta} = 1$, obtemos o desejado. \square

Tendo colocado a Observação 4.1.14 e sabendo ainda que $tr(-f) = -tr(f)$, para que fique bem definida a função traço em $PSL_2(\mathbb{C})$, temos:

Definição 4.1.22. *Seja $f \in PSL_2(\mathbb{R})$, $f = \pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.*

Definimos a função $tr^2 : PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$tr^2 \left(\pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + d)^2$$

Teorema 4.1.23. *$PSL_2(\mathbb{R})$ age em \mathcal{U} por homeomorfismos. Mais ainda, toda $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ deixa \mathcal{U} invariante.*

Demonstração. Primeiro, mostramos que qualquer transformação do tipo (4.1) deixa \mathcal{U} invariante. Seja $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, e $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Então

$$w = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2},$$

o que implica

$$\Im(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz + d|^2} = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}. \quad (4.2)$$

Portanto, $\Im(z) > 0$ implica $\Im(w) > 0$. O teorema segue pela continuidade de $T(z)$ e sua inversa (e da Proposição 4.1.17). \square

Proposição 4.1.24. *Seja $M\ddot{o}b(\mathcal{U})$ o conjunto de todas as transformações de Möbius. Então, $M\ddot{o}b(\mathcal{U})$ é um grupo sob a composição de funções.*

Definição 4.1.25. *Uma transformação de \mathcal{U} em si mesmo é chamada de **isometria** se preserva a distância hiperbólica em \mathcal{U} .*

Teorema 4.1.26. $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Isom(\mathcal{U})$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.23 e pela Proposição 4.1.17, todas as transformações em $PSL_2(\mathbb{R})$ levam \mathcal{U} em si mesmo sobrejetivamente. Mostraremos que, se $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ é um caminho diferenciável (suave por partes) em \mathcal{U} , então, para qualquer $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ nós temos $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$. Suponha que $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ é dado por $z(t) = x(t) + iy(t)$, e $w(t) = T(z(t)) = u(t) + iv(t)$. Assim:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{|cz + d|^2} = \frac{1}{|cz + d|^2}. \quad (4.3)$$

Por (4.2), $v(t) = \frac{y(t)}{|cz + d|^2}$, e $\frac{dw}{dz} = \frac{v}{y}$.

Portanto

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right| dt}{y(t)} = h(\gamma).$$

O comprimento hiperbólico é um invariante por T . □

Definição 4.1.27. Definimos a **distância hiperbólica** $\rho(z, w)$ (ou $d(z, w)$) entre os pontos $z, w \in \mathcal{U}$ como sendo o comprimento hiperbólico do H -segmento de reta que une os pontos z e w .

Definição 4.1.28. Considere f_1 e f_2 duas transformações de Möbius. Dizemos que f_1 e f_2 são **conjugadas** se existe outra transformação de Möbius f tal que:

$$f_1 = f^{-1} \circ f_2 \circ f.$$

Como vimos na seção anterior, dada uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, podemos sempre obter f em sua forma *normalizada* dividindo os coeficientes por $\sqrt{ad - bc}$.

E vimos também, na Definição 4.1.20 que uma transformação de Möbius f é representada por um par de matrizes $\pm f \in SL_2(\mathbb{R})$, por isso é bem definido o tr^2 na Definição 4.1.22. Logo:

Proposição 4.1.29. Considere f_1 e f_2 sendo duas transformações de Möbius conjugadas. Então, $tr^2(f_1) = tr^2(f_2)$.

De maneira resumida, queremos dizer que, quando a matriz A associada a cada transformação f pertence ao grupo $PSL_2(\mathbb{R})$, dizemos que essa transformação f pertence a $PSL_2(\mathbb{R})$.

4.1.2 Grupos Fuchsianos

Considerando novamente o grupo de isometrias de \mathcal{U} , temos que um subgrupo discreto de $Isom(\mathcal{U})$ é chamado **fuchsiano**, e denotado por Γ , quando ele é constituído por transformações que preservam a orientação.

A coleção de transformações de Möbius de \mathcal{U} , denotada por $Möb(\mathcal{U})$ forma um grupo. Podemos definir de maneira mais formal um *grupo fuchsiano*:

Definição 4.1.30. Um **grupo fuchsiano** Γ é um subgrupo discreto de $Möb(\mathcal{U})$, tal que todo $X \in \Gamma$ preserva orientação de \mathcal{U} .

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1.31. Qualquer subgrupo finito de $PSL_2(\mathbb{C})$ é um **grupo fuchsiano**.

Demonstração. Isso segue do fato de que qualquer subconjunto finito de qualquer espaço métrico é discreto. \square

Exemplo 4.1.32. O subgrupo das translações inteiras $\{\gamma_n(z) = z + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo fuchsiano.

Observação 4.1.33. O subgrupo de todas as translações $\{\gamma_b(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}$ não é um grupo fuchsiano, pois não é discreto.

Exemplo 4.1.34. O subgrupo $\Gamma = \{\gamma_n(z) = 2^n z \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo fuchsiano.

Exemplo 4.1.35. Se Γ é um grupo fuchsiano e $\Gamma' < \Gamma$ é um subgrupo, então Γ' é um grupo fuchsiano.

Existe uma grande variedade de grupos fuchsianos dentre os quais podemos citar os grupos cíclicos (hiperbólicos, elípticos e parabólicos) e o grupo modular.

4.2 Classificação das Transformações de Möbius

Para cada transformação pertencente a $PSL_2(\mathbb{R})$, podemos encontrar seus pontos fixos resolvendo-se a equação:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

Podemos agora classificar os três tipos de transformações de Möbius - hiperbólica, parabólica e elíptica - em termos da função *traço ao quadrado*, vista na Definição 4.1.22.

- **Transformações Parabólicas**

Definição 4.2.1. Uma transformação de Möbius f é dita **parabólica** quando $\text{tr}^2(f) = 4$. Neste caso, ela tem um único ponto fixo e esse ponto fixo está em $\partial\mathcal{U}$. Em geral, uma transformação de Möbius da forma $z \mapsto z + b$, chamada de translação, é uma transformação **parabólica**. Aqui, o único ponto fixo é o ∞ .

- **Transformações Hiperbólicas**

Definição 4.2.2. Uma transformação de Möbius f é dita **hiperbólica** quando $\text{tr}(f)$ é um número real e $\text{tr}^2(f) > 4$. Neste caso, ela tem exatamente dois pontos fixos em $\partial\mathcal{U}$. Por exemplo, considere $k > 0$ e suponha que $k \neq 1$. Então, a transformação de Möbius $f(z) = kz$ é **hiperbólica**. Aqui, os dois pontos fixos são 0 e ∞ . Em geral, uma transformação de Möbius da forma $z \mapsto kz$, onde $k \neq 1$, é chamada dilatação, e seus pontos fixos são classificados um como **atrator** e outro como **repulsor**.

- **Transformações Elípticas**

Definição 4.2.3. Uma transformação de Möbius f é dita **elíptica** quando $\text{tr}(f) < 2$, ou seja, $\text{tr}^2(f) \in \mathbb{R}$ e $\text{tr}^2(f) < 4$. Neste caso, a transformação terá um par de pontos fixos complexos conjugados em \mathbb{C} . Este tipo de transformação é conjugada a transformações $z \mapsto kz$ com $|k| = 1$ e equivale a rotação hiperbólica.

De maneira resumida,

Observação 4.2.4. • **isometria elíptica** $\longrightarrow \text{tr}^2(f) < 4$;

- **isometria parabólica** $\longrightarrow \text{tr}^2(f) = 4$ e $\text{tr}^2(f) \in \mathbb{R}$;

- **translação hiperbólica** $\longrightarrow \text{tr}^2(f) > 4$ e $\text{tr}^2(f) \in \mathbb{R}$.

Lema 4.2.5. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ três pontos, distintos dois-a-dois. Então, $T \in PSL_2(\mathbb{C})$ induzida por

$$z \mapsto \frac{(z - z_1) \cdot (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_2 - z_1)}$$

cumpra o seguinte: $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ e $T(z_3) = \infty$.

Demonstração. De fato, sintetizando em tópicos, temos que:

- $T \in PSL_2(\mathbb{C})$: T é induzida por

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a = z_2 - z_3$, $b = -z_1 \cdot (z_2 - z_3)$, $c = z_2 - z_1$ e $d = -z_3 \cdot (z_2 - z_1)$ que, claramente, cumprem

$$ad - bc = (z_2 - z_1) \cdot (z_2 - z_3) \cdot (z_1 - z_3) \neq 0,$$

pois, z_1, z_2, z_3 são distintos dois-a-dois.

- $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ e $T(z_3) = \infty$: Imediato.

□

Proposição 4.2.6. *Sabemos da Geometria que três pontos determinam unicamente um círculo. Denotemos então, C_1 e C_2 dois círculos e escolhamos z_1, z_2, z_3 em C_1 e w_1, w_2, w_3 em C_2 . Daí, podemos encontrar uma transformação de Möbius h tal que*

$$h(z_1) = w_1, h(z_2) = w_2, h(z_3) = w_3, \quad (4.4)$$

então h deve levar C_1 em C_2 .

Demonstração. O truque é primeiramente mapear C_1 no eixo real e depois mapear o eixo real em C_2 . Para mapear C_1 no eixo real é o mesmo que resolver a Equação 4.4, para $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ e $w_3 = \infty$.

Se os pontos z_i são diferentes de ∞ , definimos a seguinte transformação de Möbius f

$$f(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

na qual, $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ e $f(z_3) = \infty$. Se um dos três pontos z_i for ∞ (isso significa que C_1 é reta), temos:

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \quad (z_1 = \infty), \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad (z_2 = \infty), \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_3 = \infty),$$

que satisfaz $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ e $f(z_3) = \infty$. Agora, seja outra transformação de Möbius g tal que, $g(w_1) = 0$, $g(w_2) = 1$ e $g(w_3) = \infty$. Então, vemos que a função $h = g^{-1} \circ f$ satisfaz

$$\begin{aligned} h(z_1) &= g^{-1} \circ f(z_1) = g^{-1}(0) = w_1 \\ h(z_2) &= g^{-1} \circ f(z_2) = g^{-1}(1) = w_2 \\ h(z_3) &= g^{-1} \circ f(z_3) = g^{-1}(\infty) = w_3. \end{aligned}$$

□

Observação 4.2.7. *Note que a equação $h(z) = w$ pode ser escrita como*

$$g^{-1}(f(z)) = w \Leftrightarrow g(w) = f(z),$$

que significa que

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}.$$

Essas frações são chamadas **razões cruzadas**.

Corolário 4.2.8. *Dados outros três pontos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$, que também são distintos dois-a-dois, existe $T \in PSL_2(\mathbb{C})$ tal que*

$$T(z_j) = w_j \quad (j = 1, 2, 3) .$$

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 4.2.6 e do Lema 4.2.5 acima. \square

Observação 4.2.9. *$T \in PSL_2(\mathbb{C})$, como acima, é **única**.*

5 RELAÇÃO COM A CURVA ALGÉBRICA $s^2 = z^5 + 1$

5.1 Motivação e Definição

O fato de que uma *superfície compacta de Riemann* (Observação 3.3.2 e Definição 3.3.3) de **gênero** $g > 1$ possa ser obtida como:

1. **espaço-quociente** do disco unitário \mathcal{D} sob a **ação de um grupo fuchsiano** Γ ;
ou
2. uma **curva algébrica** ,

é um dos pilares da teoria das *superfícies de Riemann*. Infelizmente, essa correspondência pode ser explicitada apenas em alguns casos especiais. Vamos explorar o caso em que a superfície é vista como **curva algébrica** auxiliado por WHITTAKER, em [20], [21] e [22].

Superfícies de Riemann hiperelípticas (vide Proposição 3.3.14) de gênero g são simplesmente coberturas duplas da esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ *ramificada* $2g + 2$ pontos. (por meio da projeção estereográfica tem-se uma identificação *homeomorfa* entre o *plano complexo estendido* e a *esfera de Riemann*, essa projeção é detalhada em OLSEN [14] e mostrada na Subseção 3.4.1, e na Figura 2)

Definição 5.1.1. *As superfícies compactas de Riemann como **curvas algébricas**, são dadas por equações da forma $s^2 = f(z)$, onde $f(z)$ é um polinômio em z com $2g + 2$ diferentes raízes (ou $2g + 1$, caso ∞ seja ramificação, ver Definição 3.2.17), ou seja:*

- *Caso ∞ seja ramificação em $f(z)$, temos:*

$$s^2 = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_{2g+1}) ;$$

- *Caso contrário:*

$$s^2 = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_{2g+2}) .$$

Já, no caso de *superfícies de Riemann* vistas como **espaço-quociente**, existe uma abordagem clássica para o problema de encontrar o grupo fuchsiano Γ uniformizando uma dada curva hiperelíptica C de gênero g da equação $s^2 = f(z)$. A estratégia (que é baseada nas ideias de Poincaré que mais tarde foram redescobertas por WHITTAKER [21]) consiste em explorar um fato conhecido:

Observação 5.1.2. *Se K uniformiza C , então K é um subgrupo normal de índice 2 de um grupo fuchsiano Γ com assinatura $(0; 2, \dots, 2)$ ([6, seção 2.3]). A determinação de K é*

equivalente a de Γ . Mas Γ resulta ser o grupo de monodromia de uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$y'' + \frac{1}{2}S(z)y = 0, \quad (5.1)$$

onde $S(z)$ é uma certa função racional com pólos duplos nas raízes de f (conferir Teorema 3.2.12).

Teoricamente, essa equação é totalmente definida em termos da curva algébrica, mas a determinação completa dessa equação diferencial permaneceu um problema por anos. Na década de 1930, WHITTAKER [20], baseando-se no trabalho anterior de BURNSIDE [4] que, em última análise, remonta a Poincaré, propôs a seguinte expressão conjectural para a equação diferencial:

Proposição 5.1.3. *A expressão conjectural de Whittaker para a equação diferencial de segunda ordem é dada por:*

$$y'' + \frac{1}{2}W(z)y = 0, \quad (5.2)$$

com

$$W(z) := \frac{3}{8} \left(\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 - \frac{2g + 2}{2g + 1} \frac{f''(z)}{f(z)} \right). \quad (5.3)$$

A validade dessa conjectura teria levado à **solução** do problema de uniformização de curvas hiperelípticas. A história da **conjectura de Whittaker** vem do fato de notar-se desde o início que essa afirmação é análoga para as **superfícies de gênero 1 e 2**.

Em seu artigo de 1929 [20], WHITTAKER havia checado a conjectura para a curva de **gênero 2**, $s^2 = z^5 + 1$. Esse resultado foi ampliado um ano depois, por Mursi para a curva $s^2 = z^7 + 1$, de **gênero 3** ([6, capítulo 4]), e, em 1935, por Dahr, para todas as curvas da forma $s^2 = z^{2g+1} + 1$. Neste capítulo final, nos atentaremos somente à **curva algébrica** de **gênero 2**, $s^2 = z^5 + 1$, que chamamos de C .

Para o entendimento da abordagem de WHITTAKER a seguir é importante definirmos a **variável uniformizante** de uma *função algébrica*.

Definição 5.1.4. *Seja $w = f(z)$ uma função multi-valorada de z . Sejam $w = w(t)$ e $z = z(t)$ duas funções simples de t , tais que:*

$$w(t) = f(z(t)).$$

Dizemos que w e z são **uniformizações** de $w = f(z)$. A variável t é dita **variável uniformizante**.

Proposição 5.1.5. *Se s é uma função algébrica de z , definida pela relação algébrica $f(s, z) = 0$, então as funções $s = s(t)$ e $z = z(t)$ **uniformizam** a função algébrica.*

Definição 5.1.6. *Uma função algébrica geral é definida implicitamente pela equação:*

$$f(s, z) = P_0(z)s^m + P_1(z)s^{m-1} + \cdots + P_m(z) = 0,$$

onde P_0, P_1, \dots, P_m são polinômios e $f(s, z)$ é irredutível. Exceto para certos valores isolados de z , para cada valor de z , corresponde m distintos valores de s .

5.2 A conjectura de Whittaker sobre a uniformização de superfícies hipere-lípticas via equações diferenciais

Como qualquer conjunto de três pontos da *esfera de Riemann* \mathbb{C}_∞ pode ser sempre mapeado por meio de uma transformação de Möbius, para qualquer outro conjunto de três pontos, podemos normalizá-los como sendo $\{0, 1, \infty\}$, como é usual (Proposição 4.2.6 e Lema 4.2.5).

Definição 5.2.1. *O locus de Whittaker W^{2g-1} do espaço-módulo de superfícies de Riemann (curvas algébricas complexas) é o subconjunto de pontos representando curvas hipere-lípticas que satisfazem a **conjectura de Whittaker** (definida mais a frente) sobre as curvas hipere-lípticas e o grupo de monodromia de equações diferenciais fuchsianas.*

Definição 5.2.2. *Denotaremos por W^{2g-1} o complemento em \mathbb{C}_∞^{2g-1} do subconjunto diagonal normalizado $\Delta := \{w_j = 0, 1, \infty, \text{ para algum } j\} \cup \{w_j = w_i, i \neq j\}$. Ou seja: $\mathbb{C}_\infty^{2g-1} = W^{2g-1} \cup \Delta$.*

É importante mencionar a afirmação feita por R. A. RANKIN em [15], no sentido de que a **conjectura de Whittaker** (definida mais a frente) “**não foi provada** por equação algébrica contendo constantes arbitrárias irremovíveis”.

Definição 5.2.3. *Qualquer superfície hipere-líptica de Riemann surge de um conjunto $\{w_1, \dots, w_{2g+2}\}$ de $2g + 2$ pontos na esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, como uma **curva algébrica hipere-líptica**. Sua equação é dada por*

$$s^2 = \begin{cases} \prod_{i=1}^{2g+2} (z - w_i), & \{w_i, 1 \leq i \leq 2g + 2\} \subset \mathbb{C}, \\ \prod_{i=1}^{2g+1} (z - w_i), & w_{2g+2} = \infty. \end{cases}$$

Portanto, o resultado que vem a seguir é fundamental:

Proposição 5.2.4. *Qualquer curva hipere-líptica é **isomorfa** a uma curva algébrica hipere-líptica da forma*

$$s^2 = z(z - 1)(z - w_4) \cdots (z - w_{2g+2}), \quad (5.4)$$

onde $w = (w_4, \dots, w_{2g+2}) \in W^{2g-1}$ e $(0, 1) \in \Delta$.

Demonstração. De fato, pode-se mostrar que o espaço-módulo de curvas hiperelípticas do gênero g é obtido como um espaço-quociente de W^{2g-1} módulo a ação do grupo simétrico Σ_{2g+2} que age sobre ele de uma maneira natural por uma transformação de Möbius (ver [8] e [9]). \square

Definição 5.2.5. Dada uma função holomorfa φ , a **derivada Schwarziana** é dada por

$$S(\varphi)(z) = \frac{\varphi'''(z)}{\varphi'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right)^2 .$$

Proposição 5.2.6. Duas características importantes de S são seu comportamento em relação à composição e o fato de que ela caracteriza as transformações de Möbius. A saber:

i $S(\varphi) \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi$ é uma **transformação de Möbius**;

ii $S(\varphi \circ \phi)(z) = \phi'(z)^2 S(\varphi)(\phi(z)) + S(\phi)(z)$.

Proposição 5.2.7. Quaisquer duas ramificações $f, g \in X^{-1}$ são relacionadas por $f = \gamma \circ g$, para algum $\gamma \in \Gamma$ e, portanto, as duas propriedades de S produzem $S(f)(z) = S(g)(z)$.

Demonstração. Com efeito, sejam $f, g \in X^{-1}$ tal que $f = \gamma \circ g$, para algum $\gamma \in \Gamma$. Daí:

$$S(f)(z) = S(\gamma \circ g)(z) = g'(z)^2 S(\gamma)(g(z)) + S(g)(z)$$

como $\gamma \in \Gamma$ e Γ é grupo do mapa $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, temos que γ é transformação de Möbius, e pela Proposição 5.2.6, segue que $S(\gamma) \equiv 0$, logo:

$$S(f)(z) = S(g)(z)$$

\square

Teorema 5.2.8. Dado Γ , o grupo do do mapa $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, é obtido como o grupo de monodromia da equação diferencial fuchsiana de segunda ordem

$$y''(z) + \frac{1}{2}(S(X^{-1})(z))y(z) = 0 . \tag{5.5}$$

- Dados $y_1(z) = a_1z + b_1$ e $y_2(z) = a_2z + b_2$ soluções linearmente independentes da equação diferencial fuchsiana (5.5) acima (garantia do Teorema 2.2.5), podemos pegar $Y : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ Möbius, de maneira que seja escrito como o quociente $Y(z) = y_1(z)/y_2(z) = \frac{a_1z + b_1}{a_2z + b_2}$. Então, $S(Y)(z) = S(X^{-1})(z)$ (ver Observação importante 2.5.4).

Demonstração. Tomemos: $Y = T \circ X^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, onde T é uma transformação de Möbius $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Assim:

$$S(Y)(z) = S(T \circ X^{-1})(z) = (X^{-1})'^2(z)S(T)(X^{-1})(z) + S(X^{-1})(z) = S(X^{-1})(z)$$

pois S é **derivada Schwarziana** (Definição 5.2.5) e T , Möbius, e, portanto, pela Proposição 5.2.6, $S(T) \equiv 0$. \square

Proposição 5.2.9. *Seja $w \in W^{2g-1}$, e seja S_w a derivada Schwarziana $S(X^{-1})$, onde X é a função multi-valorada de \mathbb{C}_∞ até \mathbb{D} . Examinando o comportamento local nos pontos de ramificação de X , a saber $0, 1, \infty, w_4, \dots, w_{2g+2}$ pode ser mostrado que (ver [15, página 37])*

$$S_w(z) = \frac{3}{8} \left(\frac{h(z)}{f(z)} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \sum_{i=4}^{2g+2} \frac{1}{(z-w_i)^2} \right), \quad (5.6)$$

onde h é um certo polinômio da forma $h(z) = -2gz^{2g-1} + c_{2g-2}^w z^{2g-2} + \dots + c_1^w z + c_0^w$. Os $2g-1$ coeficientes $c_0^w, c_1^w, \dots, c_{2g-2}^w$ são classicamente conhecidos como os **parâmetros acessórios**.

Conjectura 5.2.10. *WHITTAKER em [20] conjecturou que $S_w(z) = W_w(z)$, onde*

$$W_w(z) := \frac{3}{8} \left(\left(\frac{f'_w(z)}{f_w(z)} \right)^2 - \frac{2g+2}{2g+1} \frac{f''_w(z)}{f_w(z)} \right). \quad (5.7)$$

Demonstração. WHITTAKER conjectura a partir das condições sob os **parâmetros acessórios** c_1, c_2, c_3 , a serem mostradas na Subseção 5.3.2. \square

Definição 5.2.11. *A superfície hiperelíptica de Riemann, denota-se C_w , é uma **superfície de Whittaker** se: $S_w = W_w$, ou seja, se C_w satisfaz a conjectura de Whittaker.*

Definição 5.2.12. *Adequadamente, $w \in W^{2g-1}$ é um ponto Whittaker se C_w é uma **superfície de Whittaker**. E nos referimos a W_w como função racional de Whittaker. Além disso, denotaremos por \mathscr{W} o subconjunto de pontos em W^{2g-1} correspondendo às curvas que satisfazem a conjectura de Whittaker.*

Observação 5.2.13. *Da Equação (5.7), encontramos uma expressão para W_w que será útil mais tarde, a saber*

$$W_w(z) = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \sum_{i=4}^{2g+2} \frac{1}{(z-w_i)^2} \frac{2}{2g+1} \left(\frac{1}{z(z-1)} + \sum_{i=4}^{2g+2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) \left(\frac{1}{z-w_i} \right) \right) \right] \\ + \sum_{i \neq j} \frac{1}{(z-w_i)(z-w_j)}$$

que, por sua vez, pode ser reescrito como

$$W_w(z) = \frac{3}{8} \left(\frac{q(z)}{f_w(z)} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \sum_{i=4}^{2g+2} \frac{1}{(z-w_i)^2} \right), \quad (5.8)$$

onde $q(z) = -2gz^{2g-1} + q_{2g-2}^w z^{2g-2} + \dots + q_1^w z + q_0^w$.

5.3 Uniformização

Definição 5.3.1. Um **fator automórfico** é um certo tipo de função analítica, definida sobre subgrupos de $SL_2(\mathbb{R})$, aparecendo na teoria de formas modulares.

Definição 5.3.2. Um **fator automórfico** (ou **função automorfa**) de peso k é uma função

$$\nu : \Gamma \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C},$$

satisfazendo as quatro propriedades dadas abaixo. Aqui, a notação \mathcal{U} e \mathbb{C} referem-se ao semiplano superior e ao plano complexo, respectivamente. A notação Γ é um subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$, tal como, por exemplo, um grupo fuchsiano. Um elemento $\gamma \in \Gamma$ é uma matriz 2×2

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, satisfazendo $ad - bc = 1$. Um fator automórfico deve satisfazer:

1. Para um determinado $\gamma \in \Gamma$, a função $\nu(\gamma, z)$ é uma função holomorfa de $z \in \mathcal{U}$;
2. Para todo $z \in \mathcal{U}$ e $\gamma \in \Gamma$, tem-se

$$|\nu(\gamma, z)| = |cz + d|^k$$

para um determinado $k \in \mathbb{R}$;

3. Para todo $z \in \mathcal{U}$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$, tem-se

$$\nu(\gamma\delta, z) = \nu(\gamma, \delta z)\nu(\delta, z).$$

Aqui, δz é a transformação de Möbius de z por δ .

4. Se $-I \in \Gamma$, então para todo $z \in \mathcal{U}$ e $\gamma \in \Gamma$, tem-se

$$\nu(-\gamma, z) = \nu(\gamma, z).$$

Aqui, I denota a matriz identidade.

Proposição 5.3.3. *Qualquer família de fatores automórficos (ou funções automorfas) é invariante com respeito ao grupo de transformações $PSL_2(\mathbb{R})$, cada um dos quais muda t em uma expressão da forma*

$$t \mapsto \frac{a_r t + b_r}{c_r t + d_r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) .$$

Esses, são os fatores automórficos de **grau 2**.

Demonstração. Segue diretamente da Definição de $PSL_2(\mathbb{R})$ e da Definição 5.3.2. \square

Observação 5.3.4. *Estamos interessados em fatores automórficos de grau 2 de uma superfície de Riemann compacta, apesar de existirem também os de uma variedade complexa.*

Definição 5.3.5. *Se s é uma função algébrica de z , definida por uma equação algébrica*

$$f(s, z) = 0 ,$$

(de modo que s é, em geral, uma função multi-valorada de z , conferir Seção 3.3.4), então, s e z podem ser expressas como funções de valor único de uma terceira variável t (a **variável uniformizante** como é chamada), e as funções de valor único assim introduzidas são **funções automorfas**.

Definição 5.3.6. *Dadas as hipóteses da Definição 5.3.5, recordando, temos que:*

- a. $f(s, z) = 0$ de **gênero 0**, as funções automorfas em questão são meramente funções algébricas racionais ou funções circulares ;
- b. $f(s, z) = 0$ de **gênero 1**, as funções automorfas são funções elípticas ;
- c. $f(s, z) = 0$ de **gênero maior que 1**, nós exigimos funções automorfas mais adequadas, com as quais este trabalho está relacionado.

Como já foi dito na Seção 5.1, vamos lidar apenas com o caso de **gênero 2**.

5.3.1 Caso: $g = 2$

A partir da Definição 5.1.1, temos que qualquer equação algébrica $f(s, z) = 0$ de **gênero 2** pode ser trazida por uma transformação birracional para a forma hiperelíptica, em que s^2 é um polinômio de grau 5 ou 6 na variável z . Por isso:

Definição 5.3.7. *Podemos tomar como a forma usual da nossa equação algébrica de gênero 2:*

$$s^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)(z - e_5) = f(z) . \quad (5.9)$$

Com a garantia da escrita da *forma usual* acima (ver em [21]), sabe-se ainda que s é uma função algébrica de z e que, portanto, s e z podem ser expressas como funções de valor único de uma terceira variável, tomemos então a **variável uniformizante** t como sendo ela.

Proposição 5.3.8. *Como o caso é gênero 2, por WHITTAKER em [21], sabe-se que essa variável uniformizante t para esta equação algébrica no caso $g = 2$ é o quociente de duas soluções de uma equação diferencial linear da forma (5.8), substituindo $g = 2$:*

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left\{ \sum_{r=1}^5 \frac{1}{(z - e_r)^2} - \frac{4z^3 + c_1z^2 + c_2z + c_3}{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)(z - e_5)} \right\} y = 0, \quad (5.10)$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes (parâmetros acessórios).

Observação 5.3.9. *Argumentando e provando algumas condições sob os parâmetros acessórios c_1, c_2, c_3 , que faremos a seguir, ganha-se que: As transformações $\{t, (a_r t + b_r)/(c_r t + d_r)\}$, as quais o quociente de duas soluções de (5.10) passam por z quando z percorre caminhos fechados que abrangem algumas das singularidades w_1, w_2, \dots, w_5 formam um grupo descontínuo de transformações, o grupo de monodromia da equação diferencial (ver Teorema 2.5.3 e Observação 2.5.4), deixando invariante um polígono (a região fundamental ou polígono de Dirichlet) (ver [6] e [11]).*

Os valores desses parâmetros c_1, c_2, c_3 **não** são conhecidos. O objetivo da seção seguinte é mostrar que elas satisfazem certas condições. Condições essas que serão mostradas na Subseção 5.3.2.

Observação 5.3.10. *WHITTAKER em [20] tenta resolver a dificuldade de achar os valores das constantes, tendo em conta o fato de que a determinação de c_1, c_2, c_3 deveria ser invariante, e, foi levado a inferir que: os c_i 's são polinômios nos e_j 's, e conjecturou que a equação (5.10) tem como sua forma verdadeira (Conjectura 5.2.10)*

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left[\left\{ \frac{f'(z)}{f(z)} \right\}^2 - \frac{2g + 2f''(z)}{2g + 1} \frac{f'(z)}{f(z)} \right] y = 0. \quad (5.11)$$

Como estamos no caso de $g = 2$, a forma correta da equação (5.11) é:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{6f''}{5f} \right) y = 0. \quad (5.12)$$

Observação 5.3.11. *NESSE ÚNICO CASO, para $g = 2$, as transformações, nas quais o quociente t de duas soluções passa por z , quando z descreve caminhos fechados no plano z , realmente formam um grupo descontínuo de transformações que deixam*

invariante um polígono no plano - t , de modo que, para este caso a teoria é verificada e obtemos uma nova classe definida de **funções automorfas de gênero 2**. Propõe-se chamar as **funções automorfas** que uniformizam essa equação (5.9) de **funções hiperleminiscatas**¹.

Proposição 5.3.12. Para encontrar essas **funções hiperleminiscatas**, considere a equação diferencial (5.12) pertencente à forma algébrica (5.9). Verifica-se:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{5z^4}{2(z^5 + 1)} \frac{du}{dz} + \frac{z^3}{2(z^5 + 1)} u = 0, \quad (5.13)$$

em termos de z como variável independente.

Proposição 5.3.13. Mudando a variável independente de z para s , 5.13 se torna

$$25(s^2 - 1) \frac{d^2u}{ds^2} + 40s \frac{du}{ds} + 2u = 0. \quad (5.14)$$

Essa é uma equação do tipo *hipergeométrica*.

E, de fato, se colocarmos $x = \frac{s+1}{2}$, ou $s = 2x - 1$, substituindo em (5.14) obtemos

$$25 \cdot 4x(x-1) \frac{d^2u}{ds^2} + 40 \cdot (2x-1) \frac{du}{ds} + 2u = 0. \quad (5.15)$$

Fazendo uma mudança de variável de s para x , temos:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dx} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{du}{dx}. \quad (5.16)$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \frac{dx}{ds} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \frac{du}{dx} \right] = \frac{1}{4} \frac{d^2u}{dx^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Substituindo (5.16) e (5.17) em (5.15), ficamos com:

$$25 \cdot 4x(x-1) \frac{1}{4} \frac{d^2u}{dx^2} + 40 \cdot (2x-1) \frac{1}{2} \frac{du}{dx} + 2u = 0,$$

ou seja,

$$25x(x-1) \frac{d^2u}{dx^2} + 20(2x-1) \frac{du}{dx} + 2u = 0. \quad (5.18)$$

¹ O nome é sugerido por serem as primeiras funções automorfas conhecidas (Fuchsianas) do **gênero 2**, assim como as **funções leminiscatas**, que uniformizam a forma algébrica $s^2 = 1 - z^4$ de **gênero 1**, foram as primeiras *funções elípticas* conhecidas (elas foram descobertas em 1797).

Esta é uma **equação diferencial** de uma função *hipergeométrica ordinária*

$$F\left(\frac{g-1}{2g+1}, \frac{g}{2g+1}; \frac{2g}{2g+1}; x\right).$$

Chamemos esses valores de $\alpha = \frac{g-1}{2g+1}$, $\beta = \frac{g}{2g+1}$ e $\gamma = \frac{2g}{2g+1}$.

Como nos detivemos ao caso $g = 2$, então: $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{2}{5}$ e $\gamma = \frac{4}{5}$.

5.3.2 Parâmetros acessórios c_1, c_2, c_3

- 1 Nós vimos que, dada uma **equação algébrica hiperelíptica**, caso seu **gênero** seja 2, podemos tomar como forma usual (Definição 5.3.7):

$$s^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)(z - e_5) = f(z). \quad (5.19)$$

Sejam, então, y_1 e y_2 duas soluções independentes da Equação (5.19). Então, quando z descreve qualquer caminho fechado no plano z , vimos, por meio da Proposição 5.3.8 (WHITTAKER [21]), que a **variável uniformizante** t é quociente de duas soluções de uma equação diferencial linear, que para o **gênero** $g = 2$, identificamos como:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left(\sum_{r=1}^5 \frac{1}{(z - e_r)^2} - \frac{4z^3 + c_1z^2 + c_2z + c_3}{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)(z - e_5)} \right) y = 0, \quad (5.20)$$

onde c_1, c_2, c_3 são **parâmetros acessórios** (constantes) (dependendo de e_1, e_2, \dots, e_5) a ser determinado pela condição de que o grupo de monodromia de (5.20) deve ser **fuchsiano**. Como já foi dito, os valores das constantes não são conhecidos. A proposta aqui é mostrar que esses **parâmetros acessórios** satisfazem certas condições.

Como inferimos na Observação 5.3.10, pela mesma argumentação, escrevemos então:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left[\left\{ \frac{f'(z)}{f(z)} \right\}^2 - \frac{2g+2}{2g+1} \frac{f''(z)}{f(z)} \right] y = 0. \quad (5.21)$$

Foi sugerido pela **conjectura** que essa equação (5.21) é a forma correta da equação (5.20) no caso $g = 2$, e sabemos que ela verifica o caso da *curva*

$$s^2 = z^5 + 1,$$

e MURSI ([6]) verificou (5.21) no caso da *curva*

$$s^2 = z^7 + 1.$$

2 Condições satisfeitas por c_1, c_2, c_3 .

Segue, do *Teorema de Existência de Poincaré* (em [1, página 242]), que existe **um** e somente **um**, conjunto de valores c_1, c_2, c_3 para os quais o grupo de (5.20) é **fuchsiano**. Suponha agora que em (5.19) trocamos z, e_1, e_2, \dots, e_5 por $\lambda z, \lambda e_1, \lambda e_2, \dots, \lambda e_5$, onde λ é uma constante. A *curva* se torna

$$s^2 = \lambda^6 (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_5), \quad (5.22)$$

e a equação diferencial associada é evidentemente (5.20). Segue que c_1, c_2, c_3 deve ser funções simétricas homogêneas dos e 's de grau 2, 3, 4, respectivamente. Pode-se chamar de nossa **condição I**.

De novo, se z, e_1, \dots, e_5 trocamos por $z + \lambda, e_1 + \lambda, \dots, e_5 + \lambda$, (5.19) permanece inalterada, e conseqüentemente (5.20) deve ser inalterada. Chamemos de **condição II**.

A próxima condição é obtida da seguinte maneira:

Considere a *curva*

$$w^2 = \left(s - \frac{1}{e_1}\right) \left(s - \frac{1}{e_2}\right) \cdots \left(s - \frac{1}{e_6}\right). \quad (5.23)$$

A equação associada é

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{3}{16} \left(\sum_{r=1}^6 \frac{1}{\left(s - \frac{1}{e_r}\right)^2} + \frac{-6s^4 + 4p_1' s^3 + c_1' s^2 + c_2' s + c_3'}{\left(s - \frac{1}{e_1}\right)\left(s - \frac{1}{e_2}\right) \cdots \left(s - \frac{1}{e_6}\right)} \right) y = 0, \quad (5.24)$$

onde p_1', c_1', c_2', c_3' são p_1, c_1, c_2, c_3 com $1/e_1, 1/e_2, \dots$, no lugar de e_1, e_2, \dots . Se escrevemos

$$s = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{u}{z^3},$$

(5.23) é transformada birracionalmente em

$$u^2 e_1 e_2 \cdots e_6 = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_6), \quad (5.25)$$

a qual é efetivamente o mesmo que (5.19).

Agora, se o grupo de (5.24) é **fuchsiano**, este ainda será o caso quando a equação foi transformada escrevendo $s = 1/z$. Vamos realizar essa transformação: (5.24) se torna

$$z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} + \frac{3}{16} \sum_{r=1}^6 \frac{e_r^2 z^2}{(z - e_r)^2} + \left(\frac{-6z^2 + 4p_1' z^3 + c_1' z^4 + c_2' z^5 + c_3' z^6}{(z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_6)} \right) e_1 e_2 \cdots e_6 y = 0 ,$$

ou, escrevendo, $y = v/z$ (já que é apenas o quociente de duas soluções que é importante, podemos multiplicar y por qualquer função conveniente de z), e $e_1 e_2 \cdots e_6 = p_6$,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{3}{16} \sum_{r=1}^6 \frac{e_r^2}{(z - e_r)^2 z^2} + \left(\frac{-6 + 4p_1' z + c_1' z^2 + c_2' z^3 + c_3' z^4}{z^2 (z - e_1) \cdots (z - e_6)} p_6 \right) v = 0 . \quad (5.26)$$

O coeficiente de $\frac{3}{16}v$ é

$$\sum_{r=1}^6 \frac{1}{(z - e_r)^2} - \frac{1}{z^2} \sum_{r=1}^6 \frac{z + e_r}{z - e_r} + \frac{-6 + 4p_1' z + c_1' z^2 + c_2' z^3 + c_3' z^4}{z^2 f(z)} p_6 ,$$

e fica fácil ver que

$$\sum_{r=1}^6 \frac{z + e_r}{z - e_r} = \frac{6z^6 + a_1 p_1 z^5 + a_2 p_2 z^4 + \dots - 6p_6}{f(z)} , \quad (5.27)$$

onde

$$p_1 = \sum e_r, \quad p_2 = \sum e_r e_s, \quad \dots ,$$

e a_1, a_2 são constantes numéricas. Para determinar o último, defina $e_1 = e_2 = \dots = e_6 = 1$.

Então, (5.27) torna-se

$$6(z + 1)(z - 1)^5 = 6z^6 + 6a_1 z^5 + \frac{30a_2}{1.2} z^4 + \dots ,$$

ou

$$(z + 1) \left(z^5 - 5z^4 + 10z^3 + \dots \right) = z^6 + a_1 z^5 + \frac{5}{2} a_2 z^4 + \dots .$$

Portanto, o coeficiente de $\frac{3}{16}v$ em (5.26) é

$$\sum_{r=1}^6 \frac{1}{(z - e_r)^2} + \frac{1}{f(z)} [-6z^4 + 4p_1z^3 + \{-6p_2 + c'_3p_6\}z^2 + \{0p_3 + c'_2p_6\}z + \dots].$$

e (5.26) é

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{3}{16} \left\{ \sum_{r=1}^6 \frac{1}{(z - e_r)^2} + \frac{-6z^4 + 4p_1z^3 + C_1z^2 + C_2z + C_3}{(z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_6)} \right\} v = 0, \quad (5.28)$$

onde

$$\begin{aligned} C_1 &= c'_3p_6 - 2p_2, \\ C_2 &= c'_4p_6 + 0p_3, \\ C_r &= c'_{4-r}p_6 + (-1)^r(4 - 2r)p_{r+1}, \\ C_3 &= c'_1p_6 + 2p_4. \end{aligned}$$

Foi visto que o grupo de (5.28) deve ser **fuchsiano**. Mas existe apenas um conjunto de valores de C_1, C_2, C_r, C_3 para o qual pode ser esse o caso, a saber os valores c_1, c_2, c_r, c_3 .

Assim, concluímos que os c' s devem satisfazer as **condições** de III

III –

$$\begin{aligned} c_1 &= c'_3p_6 - 2p_2, \\ c_2 &= c'_2p_6 + 0p_3, \\ c_r &= c'_{4-r}p_6 + (-1)^r(4 - 2r)p_{r+1}, \\ c_3 &= c'_1p_6 + 2p_4. \end{aligned}$$

3 Em seguida, será mostrado que **existe um único** conjunto de polinômios que satisfazem as **condições** I, II, III.

Numerando as equações de III:

$$c_1 = c'_3p_6 - 2p_2; , \quad (5.29)$$

$$c_2 = c'_2p_6; , \quad (5.30)$$

$$c_3 = c'_1p_6 + 2p_4. \quad (5.31)$$

O terceiro destes é equivalente ao primeiro, reduzindo-o a substituir e_1, \dots, e_6 por $1/e_1, \dots, 1/e_6$ e multiplicando por p_6 . Se c_1, c_2 são polinômios em e_1, e_2, \dots, e_6 eles devem estar na forma

$$\begin{aligned} c_1 &= k_1 p_1^2 + k_2 p_2, \\ c_2 &= k_3 p_1^3 + k_4 p_1 p_2 + k_5 p_3, \end{aligned}$$

onde k_1, k_2, \dots, k_5 são constantes numéricas. Sabemos, pela **condição I**, que c_1 e c_2 são funções simétricas homogêneas de grau 2, 3 respectivamente. Substituindo em (5.31) é evidente que c_3 somente pode ser polinômio se $k_1 = 0$, e então

$$c_3 = k_2 p_2' p_6 + 2p_4 = (k_2 + 2)p_4.$$

Do mesmo jeito, (5.29) nos dá $k_3 = k_4 = 0$, então

$$c_2 = k_5 p_3.$$

Os valores de k_2, k_5 são determinados pela **condição II**. Isso afirma que a expressão

$$-6z^4 + 4p_1 z^3 + k_2 p_2 z^2 + k_5 p_3 z + (k_2 + 2)p_4$$

permanece inalterada se z, e_1, \dots, e_6 é trocado por $z + \lambda, e_1 + \lambda, \dots, e_6 + \lambda$. Segue imediatamente que

$$k_2 = -\frac{12}{5}, \quad k_5 = \frac{6}{5},$$

de modo que a verdadeira equação (5.20) deve ser

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left[\left\{ \frac{f'(z)}{f(z)} \right\}^2 - \frac{6}{5} \frac{f''(z)}{f(z)} \right] y = 0,$$

onde

$$f(z) = (z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_6).$$

O estudo do caso $g = 2$ deixa claro que, no caso geral, **não** pode haver mais do que um conjunto de polinômios satisfazendo as **condições I, II, III**.

Agora I, II são certamente satisfeitas pela equação (5.21), e para esta equação

$$c_r = (-1)^r \frac{(4 - r + 1)(4 - r)}{5} p_{r+1},$$

a qual satisfaz III.

Assim, (5.21) é a única equação da forma (5.20) na qual os c 's são polinômios nos e 's, e para os quais as **condições I, II, III** são satisfeitas.

5.4 Superfície resultante, a partir das funções hiperleminiscatas e modelos hiperbólicos

Todas as Figuras desta Subseção foram cedidas pela Tese de ANDERSON [6] e por WHITTAKER [20].

Observação 5.4.1. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções independentes da Equação (5.18). Então, quando x descreve qualquer caminho fechado no plano x , englobando uma ou mais singularidades da equação, as soluções y_1 e y_2 tornam-se, respectivamente, $ay_1 + by_2$ e $cy_1 + dy_2$, onde a, b, c, d são constantes e o quociente $\frac{ay_1 + by_2}{cy_1 + dy_2}$ se torna $\frac{at + b}{ct + d}$, quando $t = \frac{y_1}{y_2}$.*

Considerando a representação conforme do plano z no plano x , podemos encontrar o contorno no plano x correspondente a qualquer contorno no plano z ; e assim encontramos as transformações as quais t , o quociente de duas soluções da Equação (5.13), sofre quando z é contornado qualquer contorno em seu plano.

Definição 5.4.2. *Seja z tomado ao longo de um contorno que vem do ∞ até a vizinhança da singularidade $z = e_r$, girando em torno dessa singularidade e voltando ao ∞ . E seja a transformação $S_r(t)$ que se submete quando z descreve este contorno. Então:*

$$e_1 = -1, \quad e_2 = e^{\pi i/5}, \quad e_3 = e^{-\pi i/5}, \quad e_4 = e^{3\pi i/5}, \quad e_5 = e^{-3\pi i/5},$$

e as transformações correspondentes da variável t são dadas pelas equações

$$S_1(t) = \frac{at - e^{\frac{\pi i}{10}}}{e^{\frac{-\pi i}{10}} t - a}, \quad S_2(t) = \frac{at - e^{\frac{5\pi i}{10}}}{e^{\frac{-5\pi i}{10}} t - a}, \quad S_3(t) = \frac{at - e^{\frac{9\pi i}{10}}}{e^{\frac{-9\pi i}{10}} t - a},$$

$$S_4(t) = \frac{at - e^{\frac{13\pi i}{10}}}{e^{\frac{-13\pi i}{10}} t - a}, \quad S_5(t) = \frac{at - e^{\frac{17\pi i}{10}}}{e^{\frac{-17\pi i}{10}} t - a},$$

onde:

$$a = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

É facilmente verificado que estas são 5 transformações auto-inversas, isto é, $S_1^2 = S_1, \dots, S_5^2 = S_5$, e cada uma delas transforma o círculo unitário $|t| = 1$ em si mesmo. Seus pontos duplos estão respectivamente nos pontos

$$t = \rho e^{\pi i/10}, t = \rho e^{5\pi i/10}, t = \rho e^{9\pi i/10}, t = \rho e^{13\pi i/10}, t = \rho e^{17\pi i/10},$$

onde $\rho = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$. Além disso, a transformação da composição $S_5S_4S_3S_2S_1$ é, ela própria, uma *transformação auto-inversa*.

A **região fundamental** (Definição 3.1.6) para o grupo formado por essas cinco transformações é um pentágono cujos lados são geodésicas. O interior do pentágono é a representação conforme, no plano t de todo o plano na variável z , o limite corresponde aos cortes no plano z tomado: $\infty \mapsto e_r$, onde $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e voltando para o ∞ .

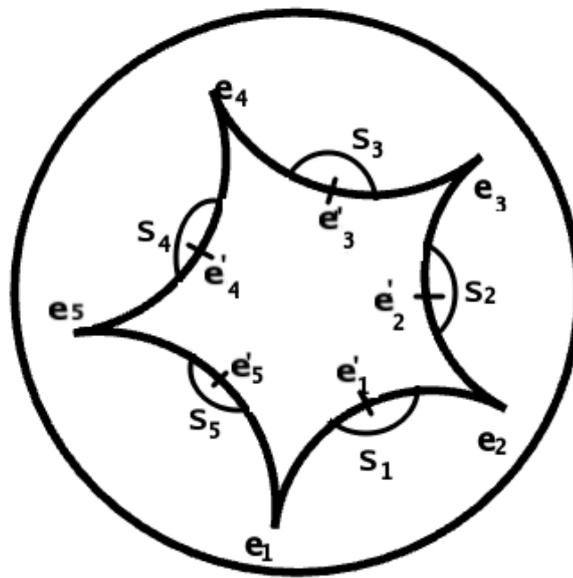


Figura 8 – polígono hiperbólico - pentágono curvilíneo

Através do ponto médio das arestas desse polígono e mantendo fixo um desses pontos médios, gera-se a **região fundamental**, as transformações de Möbius aplicadas à mesma e a determinação dos geradores do grupo fuchsiano. As transformações elípticas $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ geram um grupo fuchsiano e ao fixar um dos geradores no produto com os restantes, gera um subgrupo fuchsiano, cujos geradores são transformações hiperbólicas. Assim, a aplicação S_1S_j , $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, resultará na aresta diagonalmente oposta do polígono. Dessa forma, teremos as seguintes transformações: S_1S_2, S_1S_3, S_1S_4 e S_1S_5 . Essas quatro transformações realizam o emparelhamento das arestas e, portanto, são os **geradores do grupo fuchsiano associado**.

Acontece que, vizinho a este pentágono, há um pentágono, que é derivado dele, exceto por (digamos) a transformação S_1 . Os dois pentágonos juntos formam um *octógono curvilíneo*, que é a representação conforme no plano t de dois planos z conectados por uma linha ramificada que se estende de e_1 até ∞ , veja a Figura 9 a seguir:

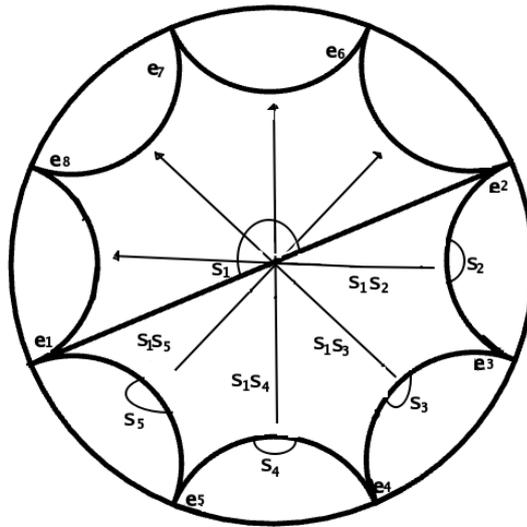


Figura 9 – polígono hiperbólico - octógono curvilíneo

Observe que as 5 singularidades geram um *polígono hiperbólico* de 8 lados (arcos de círculos ortogonais) por meio das transformações S_1S_2 , S_1S_3 , S_1S_4 e S_1S_5 . A seguir apresentamos os cálculos associados a cada uma dessas transformações.

O **octógono** é a *região fundamental* do grupo cujas quatro transformações fundamentais são: S_1S_2 , S_1S_3 , S_1S_4 e S_1S_5 . A divisão da região dentro do *círculo fundamental* em pentágonos curvilíneos, e o emparelhamento destes pentágonos em octógonos, será entendido a partir da Figura 10.

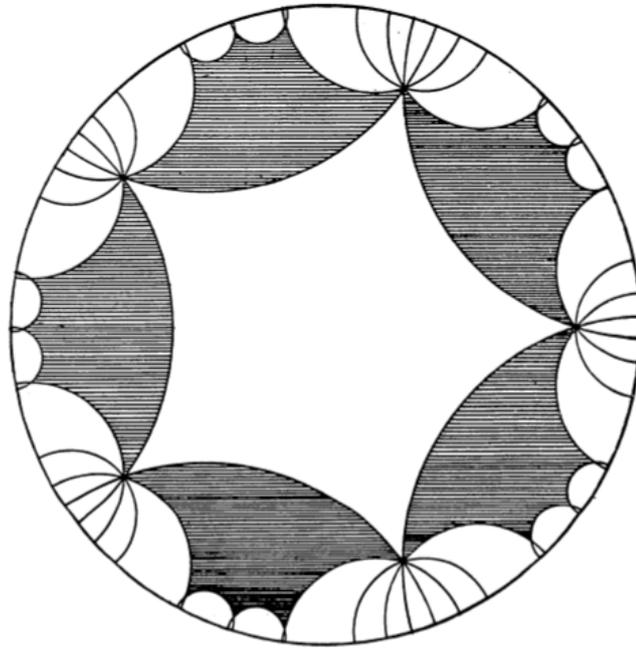


Figura 10 – polígono hiperbólico de 5 lados

A **uniformização** das funções algébricas pertencentes à forma $s^2 = z^5 + 1$ é, portanto, efetuada pelas *funções automorfas* do grupo de monodromia cujas quatro transformações fundamentais são S_1S_2 , S_1S_3 , S_1S_4 e S_1S_5 . Estas são as **funções hiperlemniscatas**.

A seguir, mencionaremos as operações, o que possibilitará entender a relação entre a **equação diferencial fuchsiana**, a **superfície de Riemann** associada às transformações aplicadas ao polígono fundamental dessa equação.

Consideremos então novamente a função algébrica $s^2 = z^5 + 1$. Essa função possui 5 raízes (singularidades), as quais podemos representar como vértices de um *polígono hiperbólico* de 5 lados, conforme ilustra a Figura 8 Os pontos médios de cada um dos lados desse polígono são dados pela relação:

$$e' = \rho' e^{(4n+1)\pi\alpha i/2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

onde:

$$\rho' = (2 \cos \pi\alpha - 1)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Desta forma, podemos encontrar os pontos médios dos lados do polígono, os quais são denotados por:

$$e'_1 = \rho e^{\frac{\pi i}{10}}, e'_2 = \rho e^{\frac{5\pi i}{10}}, e'_3 = \rho e^{\frac{9\pi i}{10}}, e'_4 = \rho e^{\frac{13\pi i}{10}}, e'_5 = \rho e^{\frac{17\pi i}{10}},$$

onde:

$$\rho = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}} = 0,485868271.$$

Desta forma, temos:

$$e'_1 = 0,4620882 + 0,1501416i, e'_2 = 2,975x10^{-17} + 0,485863i, e'_3 = -0,4620882 + 0,1501416i,$$

$$e'_4 = -0,2855862 - 0,3930757i, e'_5 = -0,2855862 - 0,3930757i.$$

Logo, vamos aos cálculos (ANDERSON [6]):

$$\begin{aligned} S_1 S_2 &= \frac{at - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - a} \cdot \frac{at - e^{5\pi i/10}}{e^{-5\pi i/10}t - a} \\ &= \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \cdot \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{5\pi i/10}}{e^{-5\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \\ &= \begin{pmatrix} 1,3089 + 0,9511i & 1,20979 - 0,8789i \\ 1,20979 + 0,8789i & 1,3089 - 0,9511i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 S_3 &= \frac{at - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - a} \cdot \frac{at - e^{9\pi i/10}}{e^{-9\pi i/10}t - a} \\ &= \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \cdot \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{9\pi i/10}}{e^{-9\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \\ &= \begin{pmatrix} 2,4271 + 0,5877i & 2,4196 \\ 2,4196 & 2,4271 - 0,5877i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 S_4 &= \frac{at - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - a} \cdot \frac{at - e^{13\pi i/10}}{e^{-13\pi i/10}t - a} \\ &= \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \cdot \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}t - e^{13\pi i/10}}{e^{-13\pi i/10}t - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{1/2}} \\ &= \begin{pmatrix} 2,4271 - 0,5879i & 1,9575 + 1,4222i \\ 1,9575 - 1,4222i & 2,4271 + 0,5879i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 S_5 &= \frac{at - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - a} \cdot \frac{at - e^{17\pi i/10}}{e^{-17\pi i/10}t - a} \\
 &= \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/2}t - e^{\pi i/10}}{e^{-\pi i/10}t - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/2}} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/2}t - e^{17\pi i/10}}{e^{-17\pi i/10}t - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/2}} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,3089 - 0,9511i & 0,4621 + 1,4222i \\ 0,4621 - 1,4222i & 1,3089 + 0,9511i \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned}
 tr^2(S_1 S_2) &\cong 6,8536 \rightarrow tr(S_1 S_2) \cong 2,617934 ; \\
 tr^2(S_1 S_3) &\cong 23,56 \rightarrow tr(S_1 S_3) \cong 4,854002 ; \\
 tr^2(S_1 S_4) &\cong 23,56 \rightarrow tr(S_1 S_4) \cong 4,854002 ; \\
 tr^2(S_1 S_5) &\cong 6,8536 \rightarrow tr(S_1 S_5) \cong 2,617934 .
 \end{aligned}$$

Desta forma, tendo calculado o *traço*, vemos que todas essas transformações são hiperbólicas (Observação 4.2.4), uma vez que o *traço* é maior que 2. Logo, o gênero é o maior possível. Associado ao *octágono curvilíneo*, o **maior gênero possível** é 2, caracterizando o *bitoro como superfície*.

Observação 5.4.3. *Podemos colocar também o octágono curvilíneo ladrilhado (tesselado) nessa mesma configuração do polígono hiperbólico de 5 lados como fizemos na Figura 10, e como sabemos e temos a noção de que ao aproximarmos da fronteira do Disco de Poincaré estamos indo para infinito, apesar de aos nossos olhos o ladrilhamento ir diminuindo conforme aproxima-se da fronteira, na verdade, o que de fato acontece, é que todo esse ladrilhamento tem exatamente o mesmo tamanho. Já a respeito da disposição de vértices e a maneira com que é representada a figura tem mais a ver com o Teorema 5.4.4 que surge de uma garantia em teoria de números sobre a **comparação entre** o número de polígonos encontrando em cada vértice e o número de lados.*

Portanto, após a Observação acima, a Figura 9 pode ser vista como:

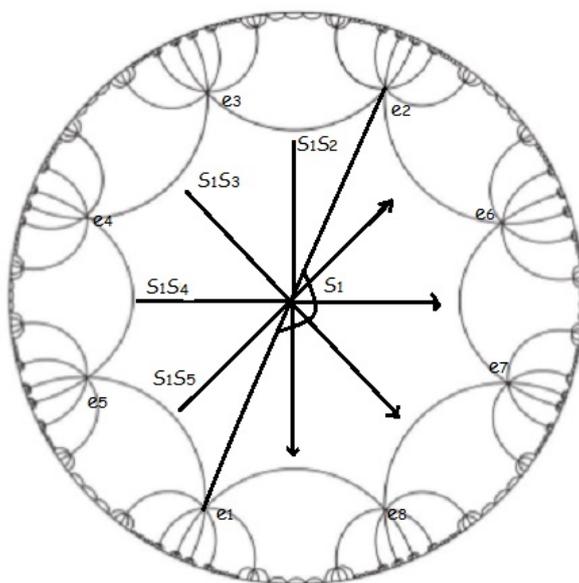


Figura 11 – octógono curvilíneo - ladrilhamento

Sabendo que, só podemos **ladrilhar** o plano euclidiano das seguintes maneiras:

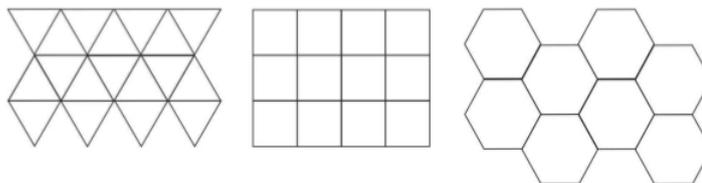


Figura 12 – Ladrilhamentos no plano euclidiano

E sabendo ainda, que, as Figuras 10 e 11 são a maneira de se **ladrilhar** o plano hiperbólico tendo como *regiões fundamentais* os polígonos de 5 e 8 lados respectivamente, vem a tona a pergunta se de fato é possível que k polígonos se encontrem em cada um dos vértices como desenhamos nestas Figuras. A resposta é positiva ao olharmos para o Teorema 5.4.4 abaixo (ver ANDERSON [6, página 52]):

Teorema 5.4.4. *Existe uma tesselação (ou ladrilhamento) do plano hiperbólico por polígonos regulares com k número de polígonos encontrando em cada vértice se, e somente se,*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2},$$

sendo n o número de lados.

Esse resultado se verifica para o *pentágono curvilíneo* e também para o *octágono curvilíneo*.

Da Figura 10, temos: $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$; Da Figura 11, podemos ver: $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

5.4.1 O caso de gênero 1 e grau 4

Para se determinar as *equações diferenciais fuchsianas* associadas a curvas algébricas de **gênero 1** e **grau 4**, determinam-se os pólos de tais equações diferenciais fuchsianas, que são as raízes de tais curvas algébricas.

Definição 5.4.5. *Recorda-se que um equação diferencial*

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0$$

*é dita **fuchsiana** se os pólos de $p(z)$ são de ordem no máximo 1 e os pólos de $q(z)$ são no máximo de ordem 2.*

Com a proposta de WHITTAKER e o sistema abaixo, apresentam-se condições explícitas para a obtenção de tal equação diferencial dado que se conhecem as singularidades e, conseqüentemente, a curva algébrica associada, a saber,

$$p(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{A_n}{z - z_n} + k_1$$

e

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - z_1)^2} + \frac{C_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z - z_n)^2} + \frac{C_n}{z - z_n} + k_1$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 + \cdots + A_n &= 2 \\ B_1 + \cdots + C_n &= 0 \\ C_1 + \cdots + B_n + z_1 C_1 + \cdots + z_n C_n &= 0 \\ 2z_1 B_1 + \cdots + 2z_n B_n + z_1^2 C_1 + \cdots + z_n^2 C_n &= 0. \end{aligned}$$

Faz-se uso do software Scilab (ou até mesmo do Matlab) na resolução desse sistema, a fim de determinar as expressões de $p(z)$ e $q(z)$.

Então passa a ser assim a obtenção das equações diferenciais fuchsianas associadas às curvas algébricas:

Exemplo 5.4.6. Dada a curva algébrica $y^2 = z^4 + 1$ de **gênero** 1 e **grau** 4 e seguindo o processo apresentado acima, para determinar a equação diferencial fuchsiana, obtém-se que

$$n_0(z)y''(z) + n_1(z)y'(z) + n_2(z)y(z) = 0$$

é a equação diferencial fuchsiana associada à curva dada, onde

$$n_0(z) = z^4 + 1 ,$$

$$n_1(z) = 2(z + 0,71 - 0,71i)(z + 0,71 + 0,71i)(z - 0,71 + 0,71i) + k_1(z^4 + 1) ,$$

e

$$n_2(z) = k_2(z^4 + 1) .$$

Considerando essa curva algébrica como polinômio, ou seja, seja $p_1(z) = z^4 + 1$ cuja as raízes são : $z_1 = 0,71 + 0,71i$, $z_2 = 0,71 - 0,71i$, $z_3 = -0,71 + 0,71i$ e $z_4 = -0,71 - 0,71i$, temos como geradores do **grupo fuchsiano** o seguinte

$$G_1 = \left\langle \frac{2,41z + 3,41}{0,59z + 1,24}, 34,29z, \frac{2,41z - 3,41}{-0,59z + 1,24} \right\rangle$$

chamando de: $S_1S_2 = \frac{2,41z + 3,41}{0,59z + 1,24}$, $S_1S_3 = 34,29z$ e de $S_1S_4 = \frac{2,41z - 3,41}{-0,59z + 1,24}$ temos que:

$$\begin{aligned} tr^2(S_1S_2) &\cong 13,3225 \rightarrow tr(S_1S_2) = 3,65 ; \\ tr^2(S_1S_3) &\cong 1245,3841 \rightarrow tr(S_1S_3) = 35,29 ; \\ tr^2(S_1S_4) &\cong 13,3225 \rightarrow tr(S_1S_4) = 3,65 ; \end{aligned}$$

Desta forma, tendo calculado o *traço*, vemos que todas essas transformações são hiperbólicas (Observação 4.2.4), uma vez que o *traço* é maior que 2. Logo, o gênero é o maior possível. Associado ao *hexágono curvilíneo* (polígono de 6 lados), o **maior gênero possível** é 1, caracterizando, portanto, o *toro como superfície*.

Como podemos ver nessa nossa última Figura:

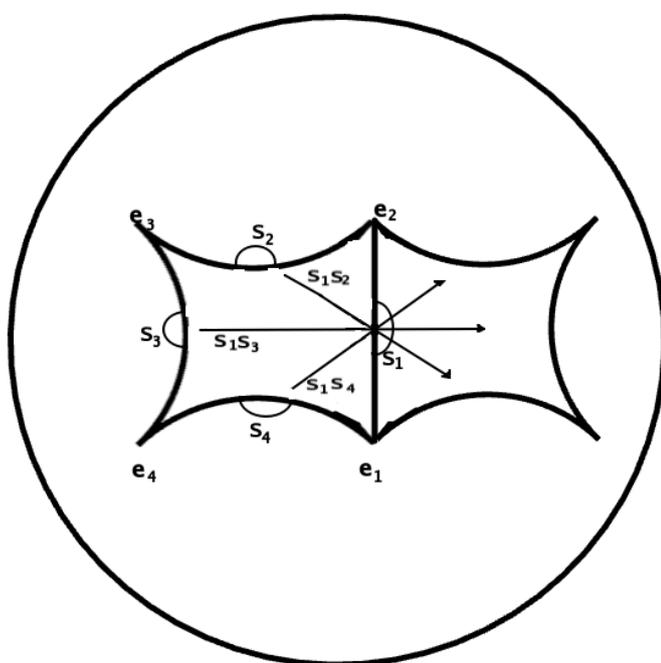


Figura 13 – polígono hiperbólico - hexágono curvilíneo

REFERÊNCIAS

- [1] BEARDON, Alan F., **The Geometry of Discrete Groups** - Springer-Verlag New York Inc., 1983.
- [2] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. - **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno-LTC**, 2005.
- [3] BREZHNEV, Y., **On The Uniformization of the Algebraic Curves**
- [4] BURNSIDE, W., **Note on the equation $y^2 = x(x^4 + 1)$** . Proc. Lond. Math. Soc. 24 (1893), 17-20.
- [5] CHURCHILL, Ruel V. e Brown, James Ward - **Complex variables and applications**, McGraw-Hill Book Co. New York, 1987.
- [6] DE OLIVEIRA, A. J. - **Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação** - Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2017.
- [7] DE SOUZA, Carlos B., **Consistência do Modelo de Disco de Poincaré** - Tese de Mestrado, UFR-PE, 2014.
- [8] GONZÁLEZ-DIEZ, G., **Loci of curves which are prime Galois coverings of \mathbb{P}^1** . Proc. London. Math. Soc. 62 (1991), 469-489.
- [9] GONZÁLEZ-DIEZ, G. e GIRONDO, E., **On a conjecture of Whittaker concerning uniformization of hyperelliptic curves**. Trans. Am. Math. Soc. 356 (2004), 691-702.
- [10] JONES, Gareth A., David SINGERMAN - **Complex Functions - an Algebraic and Geometric Viewpoint**, Cambridge University Press, 2012.
- [11] KATOK e SVETLANA, **Fuchsian Groups** - Chicago Lectures in Mathematics, 1992.
- [12] LESKOW, Lucila H., **Tesselações Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte** - Tese de Doutorado, FEEC/UNICAMP, 2011.
- [13] LIMA, Elon L., **Espaços Métricos** - IMPA, CNpq, 1983.
- [14] OLSEN, John , **The Geometry of Möbius Transformations**.
- [15] RANKIN, R. A., **The differential equations associated with the uniformization of certain algebraic curves**. Proc. R. Soc. Edinb. A65 (1958), 35-62.
- [16] STEWART ,J., **Cálculo**. Volume 3, 5.ed, Editora CEN-GAGE Learning, 2009.
- [17] TEIXEIRA, Gisele P., **Domínios Fundamentais para Grupos Fuchsianos** - TCC, UFJF-MG, 2013.
- [18] TELEMAN, Dr. C., **Riemann Surfaces** - Lent Term, 2003.

- [19] WHITTAKER , E. T., WATSON, G. N., **A Course of Modern Analysis** - Cambridge University Press, 1927.
- [20] WHITTAKER, E. T., **On Hyperlemniscate Functions, A Family of Automorphic Functions**, read 14-November, 1929.
- [21] WHITTAKER, E. T., **On the Connexion of Algebraic Functions with Automorphic Functions**, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, Vol. 192 (1899), pp. 1-32, read 12-May, 1898.
- [22] WHITTAKER. J. M., **The Uniformisation of algebraic curves**. J. London. Math. Soc. 5 (1930), 150-154.