

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Marcelo Lúcio de Freitas**

**Um modelo computacional para simulação do comportamento  
mecânico de lajes fissuradas**

Juiz de Fora

2019

**Marcelo Lúcio de Freitas**

**Um modelo computacional para simulação do comportamento  
mecânico de lajes fissuradas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Mecânica das Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Flavio de Souza Barbosa

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Freitas, Marcelo L.

Um modelo computacional para simulação do comportamento mecânico  
de lajes fissuradas / Marcelo Lúcio de Freitas. – 2019.  
76 f.

Orientador: Prof. Flávio de Souza Barbosa - UFJF  
Dissertação Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade  
de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Modelo de danos em concreto. 3.  
Comportamento Mecânico de Lajes Fissuradas. 4. MEF. I. Barbosa, Flavio  
S., orient. IV. Título.

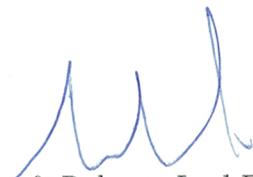
# UM MODELO COMPUTACIONAL PARA SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE LAJES FISSURADAS

Marcelo Lúcio de Freitas

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 11 de julho de 2019, para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Universidade Federal de Juiz de Fora, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Orientador: Prof. Flávio de Souza Barbosa - UFJF



Membro: Prof. Roberto Leal Pimentel - UFPB



Membro: Prof. George Oliveira Arisworth Junior - UFJF



Membro: Prof. Afonso Celso de Castro Lemonge - UFJF

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Fernando e Gracinha, ao meu ir-  
mão Marcos, ao meu sobrinho En-  
rico, e aos meus tios acolhedores  
Elizete e Pedro*

*"A educação é a arma mais poderosa  
que você pode usar para mudar o  
mundo."*

(Nelson Mandela)

## RESUMO

O conhecimento do comportamento mecânico de uma edificação é fundamental para a segurança dos seus usuários, além de contribuir para projetos estruturais eficientes onde fatores técnicos e econômicos podem ser otimizados. No caso de estruturas de concreto armado, modelos computacionais vêm sendo desenvolvidos há anos, sempre visando simular seus desempenhos quando submetidos aos mais diversos tipos de carregamentos. Tendo em vista a heterogeneidade do concreto armado, modelos que simulam seu comportamento não-linear, especialmente após a ocorrência de fissuração, são mais escassos. Sabendo-se que a fissuração excessiva pode ocorrer nas estruturas em função de sobrecargas imprevistas em projeto e alterações estruturais mal executadas, estudos acerca desse tema são bastante relevantes pois podem oferecer ao engenheiro uma boa ferramenta para o desenvolvimento de reforços estruturais. É nesse contexto que se insere essa dissertação de mestrado. No presente trabalho é proposto um modelo capaz de simular o comportamento estático e dinâmico de lajes de concreto armado fissuradas. Uma estratégia computacional baseada no modelo de danos de Mazars, que inclui parâmetros associados à perda de rigidez provocada pela fissuração, é implementada via Método dos Elementos Finitos. Validações numéricas e teóricas do modelo proposto são realizadas evidenciando suas boas performances para as aplicações mostradas. Apresenta-se também uma comparação entre os resultados dinâmicos alcançados com o modelo proposto e aqueles obtidos em um ensaio experimental, extraído da literatura, onde diversos níveis de fissuração foram avaliados. Ao final sugere-se relações entre os graus de deterioração da estrutura e a evolução de suas frequências naturais, que podem ser usadas no futuro em técnicas de detecção de dano.

Palavras-chaves: Modelo de Mazars. Modelo de danos em concreto armado. Lajes de concreto fissuradas. MEF.

## ABSTRACT

The knowledge on the mechanical behaviour of a building is fundamental for users safety. Moreover, it contributes to the efficiency of structural projects which technical and economic factors could be optimized. In reinforced concrete structures, in particular, computational models have been used for years, always aimed to simulate its performance when different types of loading are applied. Considering the concrete heterogeneity, models that simulate concrete non-linear behaviour are limited, especially after cracking propagation. The excessive cracking could occur on structures due to unexpected overloaded project cases or on structural modifications poorly executed. Studies involving this topic are relevant because they could offer engineers a useful tool to design structural reinforcements. This work proposes a model that can simulate the static and dynamic behaviour of damaged reinforced concrete slabs. A computational strategy based on Mazars' damage model, which includes parameters associated with loss of stiffness occasioned by cracking, is implemented using the Finite Element Method. Numerical and theoretical validations of the proposed model are done evidencing its excellent performance on suggested applications. This study also presents a comparison between the dynamic results obtained by the proposed model and results from an experimental test. Finally, it suggests a relationship between the damage condition of a structure and its natural frequency of vibration decreasing that could be used in future for damage detection techniques.

Keywords: Mazars model. Damaged reinforced concrete slabs. Cracked concrete slabs. FEM.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Malha de elementos finitos . . . . .	20
Figura 2 – Modelo de placa Reissner-Mindlin . . . . .	26
Figura 3 – Elemento retangular de placa . . . . .	29
Figura 4 – Mapeamento Isoparamétrico . . . . .	32
Figura 5 – Modos de abertura de fissuras . . . . .	36
Figura 6 – Tensão-deformação - ensaio de tração uniaxial . . . . .	36
Figura 7 – Tensão-deformação - ensaio de compressão uniaxial . . . . .	36
Figura 8 – Elemento de volume . . . . .	38
Figura 9 – comportamento do concreto danificado . . . . .	40
Figura 10 – Exemplo típico de uma laje modelada nesse trabalho . . . . .	44
Figura 11 – Variação linear das deformações para um segmento de laje deformado . . . . .	45
Figura 12 – Variação bi-linear admitida para a deformação equivalente $\tilde{\epsilon}^e$ ao longo da altura para um elemento de um elemento de placa . . . . .	45
Figura 13 – Variável <i>Dano</i> ao longo da altura da placa . . . . .	46
Figura 14 – Exemplo de distribuição de <i>Dano</i> ao longo da altura de um elemento . . . . .	47
Figura 15 – Fluxograma da estratégia incremental . . . . .	51
Figura 16 – Fluxograma da estratégia iterativa . . . . .	52
Figura 17 – Placa retangular com laterais engastadas . . . . .	53
Figura 18 – Mesh convergence . . . . .	54
Figura 19 – Malha com 729 elementos retangulares de placa . . . . .	54
Figura 20 – Placa retangular com laterais engastadas . . . . .	55
Figura 21 – Modos de vibração da placa retangular . . . . .	56
Figura 22 – Laje apoiada nos cantos com carga pontual aplicada no centro . . . . .	57
Figura 23 – Teste de convergência para o número de elementos . . . . .	57
Figura 24 – Malha utilizada para a laje quadrada . . . . .	58
Figura 25 – Teste de convergência para o número de camadas por elemento . . . . .	59
Figura 26 – Influência do tamanho de passo $\Delta F$ . . . . .	59
Figura 27 – Comparação resultado incremental com outros autores . . . . .	60
Figura 28 – Curva Carga-Deslocamento - Estratégia Iterativa . . . . .	61
Figura 29 – Curva Carga-Deslocamento - Comparação com outros modelos . . . . .	61
Figura 30 – Evolução de danos na laje obtidos pelo modelo . . . . .	62
Figura 31 – Evolução de danos obtidos experimentalmente . . . . .	63
Figura 32 – Evolução de danos em uma seção da placa . . . . .	63
Figura 33 – Laje ensaiada em laboratório . . . . .	64
Figura 34 – Esquema de transmissão de carga . . . . .	64
Figura 35 – Malha computacional com 495 elementos . . . . .	65
Figura 36 – Convergência da malha computacional . . . . .	66

Figura 37 – Deslocamento no centro de uma viga bi apoiada . . . . .	67
Figura 38 – Deslocamento máximo na laje . . . . .	67
Figura 39 – Redução da primeira frequência em função do carregamento . . . . .	68
Figura 40 – Evolução dos danos na laje obtida pelo modelo . . . . .	69
Figura 41 – Evolução dos danos na laje obtida experimentalmente . . . . .	69
Figura 42 – Primeiro modo de vibração da laje . . . . .	70
Figura 43 – Influência do parâmetro $At$ . . . . .	74
Figura 44 – Influência do parâmetro $Ac$ . . . . .	75
Figura 45 – Influência do parâmetro $Bt$ . . . . .	75
Figura 46 – Influência do parâmetro $Bc$ . . . . .	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

$S$	Área
$S_D$	Área danificada
$S_E$	Área efetiva
$c$	Coefficiente de amortecimento viscoso
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$k$	Constante elástica da mola
$\gamma$	Deformação cisalhante
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
$\varepsilon_{d0}$	Deformação inicial de propagação de trinca
$\varepsilon$	Deformação normal
$w$	Deslocamento na direção do eixo $Y$
$a$	Deslocamento nodal
$w$	Deslocamento na direção do eixo $Z$
$h$	Espessura
$\xi$	Eixo de direção do sistema local paralelo ao eixo $X$
$\eta$	Eixo de direção do sistema local paralelo ao eixo $X$
$\Pi$	Energia potencial total
$\delta$	Flecha
$F$	Força
$p$	Forças internas
$\mathbf{q}$	Forças nodais
$b$	Largura
$\mu$	Massa específica por unidade de área
$D_c$	Matriz de elasticidade ao cisalhamento
$D_f$	Matriz de elasticidade à flexão

<b>M</b>	Matriz de massa
<b>K</b>	Matriz de rigidez
<b>N</b>	Matriz formada pelas funções de forma
<b>I</b>	Matriz identidade
<b>J</b>	Matriz Jacobiana de transformação
<i>E</i>	Módulo de elasticidade
<i>E<sub>a</sub></i>	Módulo de elasticidade do aço
<i>E<sub>c</sub></i>	Módulo de elasticidade do concreto
<i>E<sub>h</sub></i>	Módulo de elasticidade homogeneizado
<i>G</i>	Módulo de elasticidade transversal
<i>I</i>	Momento de inércia
$\mu(t)$	Posição em função do tempo
<i>f<sub>ck</sub></i>	Resistência à compressão do concreto
<i>f<sub>t</sub></i>	Resistência à tração do concreto
$\theta_x$	Rotação da normal em relação à superfície média no eixo <i>X – Z</i>
$\theta_y$	Rotação da normal em relação à superfície média no eixo <i>Y – Z</i>
$\tilde{\sigma}$	Tensão equivalente
$\sigma$	Tensão normal
<i>Dano</i>	Variável Dano
<b>d</b>	Vetor de deslocamentos
<b>F</b>	Vetor de forças

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVO . . . . .	14
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	14
<b>2</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . .</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>19</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
3.2	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO . . . . .	21
3.3	DEFORMAÇÕES . . . . .	22
3.4	TENSÕES . . . . .	23
3.5	FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES . . . . .	23
3.6	TEORIA DE PLACA REISSNER-MINDLIN . . . . .	25
<b>3.6.1</b>	<b>Elemento Retangular de Placa . . . . .</b>	<b>28</b>
3.7	ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO . . . . .	32
3.8	FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO . . . . .	34
<b>4</b>	<b>MODELO DE DANO PARA O CONCRETO . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1	COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO . . . . .	35
4.2	MECÂNICA DO DANO APLICADA AO CONCRETO . . . . .	37
<b>4.2.1</b>	<b>Variável Dano . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Tensão Efetiva e Deformação Equivalente . . . . .</b>	<b>38</b>
4.3	MODELO DE MAZARS . . . . .	39
<b>4.3.1</b>	<b>Parâmetros do modelo de Mazars . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>MODELO PROPOSTO PARA MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARAMDO FISSURADAS . . . . .</b>	<b>43</b>
5.1	HIPÓTESES E CONSIDERAÇÕES BÁSICAS DO MODELO . . . . .	43
5.2	DEFINIÇÃO DO MODELO . . . . .	44
5.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . .	48
<b>5.3.1</b>	<b>Estratégia Incremental . . . . .</b>	<b>48</b>

5.3.2	Estratégia Iterativa . . . . .	49
6	<b>APLICAÇÕES . . . . .</b>	<b>53</b>
6.1	EXEMPLO 1 . . . . .	53
6.2	EXEMPLO 2 . . . . .	56
6.2.1	Estratégia Incremental . . . . .	58
6.2.2	Estratégia Iterativa . . . . .	60
6.3	EXEMPLO 3 . . . . .	63
6.3.1	Modelo Computacional . . . . .	65
7	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>ANEXO A – ESTUDO PARAMÉTRICO . . . . .</b>	<b>74</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A fissuração excessiva é uma patologia que pode acometer estruturas de concreto armado. O abalo psicológico, o alerta para um possível estado de perigo e o comprometimento no desempenho da obra são os três aspectos fundamentais causados por essa patologia que pode ser proveniente de algumas causas, como por exemplo, falhas na elaboração do projeto estrutural ou na execução da obra (THOMAZ; LANDI, 1986).

A detecção das fissuras geralmente é feita por inspeção visual, seguido da recuperação do elemento danificado. Entretanto nem sempre esta metodologia é eficiente, pois há uma forte dependência da experiência do observador para identificar a origem do dano e uma limitada capacidade para avaliação da extensão do mesmo, além do fato de que, em algumas situações, as fissuras podem não ser visíveis ou acessíveis.

O conhecimento mais aprofundado em relação ao grau de fissuração de um elemento estrutural tem a vantagem de fornecer um diagnóstico mais preciso, o que pode levar a ações mais eficientes para a recuperação da estrutura. Neste contexto os modelos computacionais podem contribuir de forma efetiva para auxiliar o engenheiro na avaliação de estruturas submetidas à fissuração. A verificação do comportamento mecânico de uma estrutura de concreto armado fissurada bem como a avaliação da eficiência de reforços ou reparos nos elementos danificados podem ser realizados via modelagem computacional.

Dentre os modelos computacionais usados para simular o comportamento mecânico de elementos estruturais constituídos de concreto fissurados destaca-se o Modelo de Mazars. Neste modelo, uma variável associada ao nível de danificação é relacionada ao módulo de elasticidade do material de tal forma que, a medida que ocorre fissuração, o valor do módulo é reduzido.

Entretanto, o modelo clássico de Mazars é aplicado a estruturas submetidas à tração ou à compressão uniaxial. Em casos onde os elementos estruturais estão fletidos, a utilização desse modelo requer algumas adaptações que nem sempre são triviais. Mais ainda, situações que envolvam estruturas constituídas de dois materiais requerem estratégias complementares para a implementação do modelo de Mazars. É o caso, por exemplo, de lajes de concreto armado.

Nesse contexto se insere o presente trabalho. Propõe-se um modelo computacional, baseado no modelo de Mazars, capaz de simular o comportamento mecânico de lajes de concreto armado fissuradas. Apresenta-se uma estratégia para a introdução do modelo de Mazars na modelagem de estruturas fletidas baseada em uma técnica de homogeneização para se determinar o Módulo de Elasticidade danificado do concreto armado.

O modelo computacional proposto é implementado via Método de Elementos Finitos em um programa que incorpora elementos para modelagem de placas finas de

Reissner-Mindlin.

Validações numéricas e experimentais do modelo proposto evidenciam sua capacidade de simular tanto o comportamento estático quanto o dinâmico de lajes de concreto armado fissuradas.

Outra área de pesquisa que permeia o presente trabalho é monitoramento do estado de danificação de estruturas, do inglês, SHM (*Structural Health Monitoring*). Entende-se que, de posse de um modelo que seja capaz de simular de forma precisa o comportamento mecânico de uma laje fissurada, é possível avaliar seu nível de danificação estrutural, partindo-se de respostas dinâmicas monitoradas. Através de frequências naturais, dentre outros parâmetros estruturais extraídos de medições, pode-se estabelecer um problema inverso no qual o nível de fissuração é a incógnita a ser determinada a partir da minimização de uma função de erro definida entre os parâmetros extraídos da monitoração e seus respectivos valores calculados via modelagem computacional.

## 1.1 OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é apresentar um modelo computacional que simule o comportamento estático e dinâmico de lajes de concreto armado com a finalidade de avaliar a perda de rigidez causadas por fissuração.

Como objetivo secundário, este trabalho busca avaliar a correlação entre a diminuição das frequências em função da perda de rigidez causada por fissuras, podendo contribuir para o desenvolvimento de uma ferramenta de monitoramento da saúde de estruturas, também conhecida por SHM, do inglês *Structural Health Monitoring*.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 6 capítulos. No primeiro capítulo é apresentado a introdução ao tema, bem como os objetivos do estudo desenvolvido para a modelagem de fissuras em lajes de concreto armado.

O segundo capítulo compreende a contextualização do tema no cenário acadêmico e a relevância deste assunto em aplicações reais. Uma revisão na literatura que aborda as teorias utilizadas para a implementação computacional de modelos numéricos propostos para análise do comportamento mecânico de estruturas foi realizada.

No terceiro capítulo, apresenta-se a formulação do Método dos Elementos Finitos utilizando a teoria de placas de Reissner-Mindlin que foi empregada no modelo proposto. Outras particularidades do método, como os métodos de integração e o elemento finito utilizado, também estão descritas neste capítulo.

Na sequência, o comportamento mecânico do concreto bem como o modelo desenvolvido por Mazars são descritos.

No quinto capítulo, o modelo proposto para modelagem de lajes de concreto armado fissuradas é desenvolvido, assim como as estratégias para a implementação computacional utilizadas para a geração dos resultados.

O sexto capítulo aborda os exemplos utilizados para a validação do modelo proposto. Finalmente o sétimo capítulo é dedicado às conclusões finais avaliando o potencial e as limitações do modelo proposto, assim como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CONTEXTUALIZAÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dano pode ser definido como mudanças nas propriedades materiais ou geométricas de sistemas aeroespaciais, mecânicos ou da construção civil, incluindo mudanças na condição de contorno e na conectividade do sistema, que podem afetar a performance atual ou futura desses sistemas. O processo de implementação de estratégias de identificação de danos é essencial para o monitoramento e o conhecimento do estado de integridade real de estruturas.

As primeiras ideias sobre danificação de meios contínuos foram introduzidas pelo trabalho de Kachanov (1958), inicialmente para o estudo da ruptura associada à deformação lenta em metais. A partir de então esta teoria foi desenvolvida e deu origem a teoria de Mecânica de Dano Contínuo, que consiste numa ferramenta prática para considerar os vários processos de danificação sofridos por materiais e estruturas numa escala macroscópica.

A terminologia Mecânica de Dano Contínuo foi introduzida por Hult (1979) para designar modelos da Mecânica do Contínuo destinados ao estudo da resposta de materiais em regime de ruptura considerando o processo de danificação. Posteriormente, Lemaitre e Chaboche (1985) utilizaram os princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis para embasar as teorias da Mecânica do Dano Contínuo.

Desde então alguns modelos de danos foram desenvolvidos, podendo-se destacar alguns estudos como os de Murakami (1981) e Kachanov (1984) que modelaram o dano em materiais sujeitos à fluência; Lemaitre e Chaboche (1985) e Marigo (1985) que estudaram a interação entre dano e fadiga; e também Simo e Ju (1987) e Tai (1990) cujos trabalhos abordaram a danificação em materiais dúcteis.

O estudo de dano aplicado ao concreto é de grande importância, visto que o mesmo destaca-se como uma das matérias primas mais utilizadas mundialmente na indústria da construção civil, podendo ser encontrado em casas de alvenaria, rodovias, pontes, na indústria nuclear entre outras aplicações. Sua extensiva utilização pode ser explicada pela facilidade de ser moldado em formas e tamanhos variados e pela capacidade de alcançar a resistência similar a das rochas naturais quando curado.

Devido à ampla utilização do concreto, muitos pesquisadores vêm contribuindo para desenvolver, dentre outras coisas, modelos computacionais capazes de descrever seu comportamento mecânico frente à ocorrência de danos. É o caso de Mazars (1986) que apresentou um modelo simples e eficiente para descrever o fenômeno de microfissuração no concreto utilizando o acoplamento de duas variáveis considerando os efeitos de tração e compressão. O método, que também foi construído de acordo com as leis da termodinâmica, foi capaz de descrever o surgimento e propagação de trincas a partir da combinação da mecânica de dano linear elástica e da mecânica da fratura. Desde então o método proposto por Mazars vem sendo amplamente aplicado nas pesquisas onde o concreto é o objeto de

estudo, o que é o caso do presente trabalho.

Com a evolução dos métodos computacionais na resolução dos problemas de engenharia e o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF), os modelos de dano desenvolvidos para o concreto ganharam forte impulso. Uma das primeiras aplicações do Método dos Elementos Finitos como ferramenta para estudo de trincas em estruturas de concreto armado foi aquele realizado por Rashid (1968) que analisou o comportamento de vasos de pressão. A estratégia adotada para a representação de fissuras foi a alteração em propriedades constitutivas, no caso o módulo de elasticidade de elementos com trincas, semelhante à estratégia mais tarde apresentada por Mazars (1986).

Alvares (1999) realizou uma formulação para analisar numericamente uma estrutura de barras propondo um modelo numérico utilizando elementos finitos alterando a matriz de rigidez em alguns elementos simulando danos localizados, em seguida comparou os resultados obtidos numericamente com dados experimentais de vigas e pórticos em concreto armado.

Seguindo esta mesma linha, Guello (2002) aplicou o modelo de dano de Mazars para representar o comportamento de estruturas em concreto armado por meio do MEF. O modelo de Guello (2002) apresentou dificuldades para reproduzir ensaios experimentais a partir de um certo nível de fissuração do concreto. Pituba (2003) abordou a formulação de modelos constitutivos a partir da teoria da Mecânica do Dano Contínuo com a finalidade de construir uma ferramenta que melhor descreva o comportamento não linear do concreto devido ao processo de fissuração antes e durante a exposição a carregamentos. Pituba (2003) desenvolveu um modelo e o empregou em exemplos numéricos utilizando o MEF. Amaral (2014) e Assis (2019) também utilizaram o modelo de Mazars, implementado via MEF, simulando a degradação do concreto em altas temperaturas.

Muitas estruturas na construção civil e na indústria aeroespacial podem ser representadas por meio de placas, por isso existe um grande interesse em avaliar danos neste tipo de estrutura. Eraky *et al.* (2016), por exemplo, realizaram um estudo com o objetivo de avaliar um método numérico para identificação de danos em placas. Neste estudo três placas com geometrias diferentes foram testadas com distintos níveis de danificação, simulados a partir da redução do módulo de elasticidade num elemento qualquer da placa. O método de força residual nodal foi empregado e os autores concluíram que este método é o mais simples para identificação de danos e se mostrou eficiente na localização e quantificação de danos menos severos em estruturas de placa simples, podendo ser empregado em aplicações práticas. Entretanto, testes com estruturas reais não foram apresentados pelos autores.

Buscando uma simplificação para o uso do modelo de placas para estruturas de concreto armado Roberts (2015) apresentou um método simplificado baseado na abordagem da rigidez efetiva para a análise não linear de lajes e vigas de concreto armado para definir os limites de serviço e máximo de uma estrutura. Por meio do Método dos Elementos

Finitos aplicado a elementos de placa e propriedades constitutivas simplificadas, um algoritmo para a análise não linear foi desenvolvido resultando em estimativas aproximadas de deslocamentos durante o carregamento e também da carga máxima de projeto. O modelo foi validado com estudos experimentais e uma boa aproximação à solução não linear apresentada foi obtida.

Fu *et al.* (2016) avaliaram o acoplamento de duas técnicas baseadas em dinâmica para identificar danos locais em placas isotrópicas, a energia de deformação modal e a sensibilidade dinâmica para reduzir os ruídos que geram falsos positivos na identificação de danos. Foram implementados modelos de placas de Reissner-Mindlin e casos de dano foram simulados nos modelos de Elementos Finitos por meio da redução do módulo de elasticidades em alguns elementos. A técnica apresentou bons resultados para identificação tanto em danos únicos ou múltiplos em placas por meio de medidas de aceleração.

Observando que ainda existe carência em pesquisas para o desenvolvimento de ferramentas para avaliação de danos em estruturas de placas, Pimentel *et al.* (2017) realizaram testes dinâmicos em lajes de concreto armado. Ensaios experimentais onde uma laje sujeita a um carregamento estático crescente para induzir trincas foram executados. Três estágios de dano foram avaliados dinamicamente com o objetivo de estudar o nível das alterações nas frequências naturais de vibração ao longo do decaimento dos valores de acelerações após a aplicação de forças de impacto. Os resultados experimentais de Pimentel *et al.* (2017) são usados para a validar o modelo computacional proposto.

Neste contexto insere-se a presente dissertação. Trata-se de um estudo que culminou na proposta de um modelo computacional baseado nas proposições de Mazars que é capaz de simular o comportamento estático e dinâmico de lajes fissuradas. O modelo proposto visa contribuir tanto para a concepção de projetos estruturais como em análises focadas SHM, podendo fornecer base de dados para algoritmos validações de algoritmos de detecção de danos.

Cabe destacar que, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil UFJF, esse é o primeiro trabalho que aborda o tema ora descrito. É também importante ressaltar a parceria com a UFPB no que se refere aos testes experimentais usados para validação do modelo proposto. Tais ensaios experimentais contou com alunos da UFPB e da UFJF em missão acadêmica na universidade paraibana com recursos do projeto PROCAD/CAPES: Rede de Cooperação Acadêmica em Durabilidade de Estruturas – Experimentação e Modelagem Rede de Cooperação Acadêmica em Durabilidade de Estruturas – Experimentação e Modelagem.

O capítulo que segue apresenta a formulação do Método dos Elementos Finitos aplicada nesse trabalho, evidenciando as matrizes de elemento de placa adotadas bem como os demais aspectos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

### 3 ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo será apresentado alguns conceitos do Método dos Elementos Finitos utilizado neste trabalho.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Uma maneira natural utilizada por cientistas para compreender o comportamento dos sistemas complexos consiste na suas subdivisões desses sistemas em componentes individuais ou elementos. Em alguns casos um modelo adequado é obtido utilizando um número finito de componentes bem definidos. Estes problemas são conhecidos como *discretos*. Em outros casos a subdivisão é continuamente indefinida e o problema pode ser definido apenas utilizando formulações matemáticas infinitesimais, o que leva a equações diferenciais ou abordagens equivalentes que implicam num número infinitos de elementos. Estes sistemas são denominados *contínuos*.

Para superar as dificuldades de soluções de problemas contínuos, vários métodos de discretização foram propostos tanto por matemáticos quanto por engenheiros. Todos eles envolvem aproximações que, de forma otimista, alcançam no limite da solução contínua real conforme o número de variáveis discretas aumenta.

O Método dos Elementos Finitos é um desses métodos numéricos discretos que surgiu para a solução de problemas de engenharia e física. Pode ser utilizado em diversas áreas de conhecimento, como análise estrutural, análise dinâmica, transferência de calor, fluidos, transporte de massa entre outras. A solução desses problemas geralmente envolvem equações diferenciais parciais que não têm solução conhecidas.

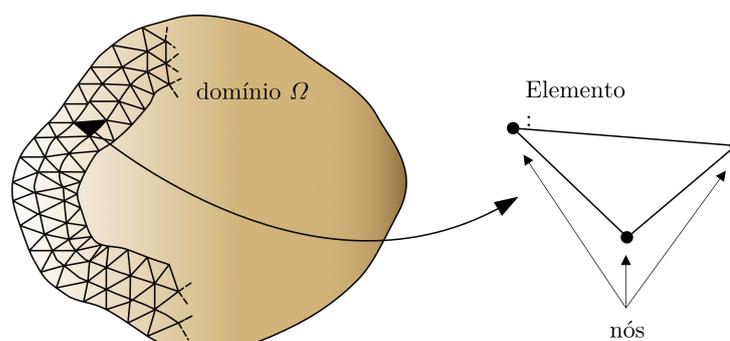
Criado originalmente para solucionar complexos problemas de elasticidade e análise estrutural nas Engenharias Civil e Aeronáutica por volta da década de 1950 (SZILARD, 2004), tornou-se uma poderosa ferramenta computacional a partir das décadas seguintes com a intensificação do uso dos computadores.

Em vários problemas de engenharia, mais especificamente na mecânica dos sólidos, a solução de distribuição de tensões e deformações em meio contínuo é necessária. Como por exemplo em problemas que envolvem a distribuição de tensões ou deformações num plano bidimensional, sólidos simétricos, flexão de placas e cascas e até mesmo sólidos tridimensionais. Em todos esses casos, o número de conexões entre elementos que formam o domínio do problema é finito. E para a discretização e aproximação de sistemas similares algumas estratégias são utilizadas:

- O domínio contínuo  $\Omega$  é dividido em linhas ou superfícies imaginárias em um número de elementos finitos, como ilustra a figura 1;

- Considera-se que os elementos são conectados por meio de número de pontos nodais situados em suas fronteiras e ocasionalmente no seu interior;
- Um grupo de funções é escolhido para definir o estado de deslocamento de cada elemento finito e em termos dos seus deslocamentos nodais;
- As funções de interpolação definem o estado e deformações de cada elemento em função dos deslocamentos nodais. Essas deformações, em conjunto com deformações iniciais e as propriedades constitutivas do material, irão definir o estado de tensões ao longo do elemento e, conseqüentemente, também nos seus contornos;
- Um sistema de forças concentradas nos nós e o equilíbrio das tensões de contorno determinam qualquer carga distribuída, resultando numa relação de rigidez;

Figura 1 – Malha de elementos finitos



Fonte: O Autor (2019)

Nem sempre é fácil encontrar funções de interpolação que satisfaçam as condições de continuidade dos deslocamentos entre os elementos adjacentes, violando a condição de compatibilidade. Também, concentrando forças equivalentes nos nós, as condições de equilíbrio são satisfeitas apenas num senso geral, podendo ocorrer violações nas equações de equilíbrio dentro de algum elemento ou em seus contornos.

A escolha do tipo do elemento e das funções de interpolação para casos específicos permite muitas possibilidades que dependem da habilidade do engenheiro e, claramente, a qualidade da aproximação geral do problema depende fortemente da escolha dessas variáveis.

Um caminho para esta escolha consiste na minimização da energia potencial do sistema em termos de um campo de deslocamentos prescritos. Se este campo de deslocamento é definido de uma maneira adequada então a convergência ao resultado correto deve ocorrer também. Este processo também é conhecido como o método conhecido como Rayleigh-Ritz.

### 3.2 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Um elemento finito,  $e$ , é definido pelos nós  $i$ ,  $j$ ,  $m$ , etc. Considerando que um deslocamento  $u$  em um ponto qualquer dentro do elemento pode ser aproximado por um vetor coluna  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \dots] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e, \quad (3.1)$$

em que cada uma das componentes de  $\mathbf{N}$  são funções prescritas de posição e  $\mathbf{a}^e$  representa uma lista de deslocamentos nodais de um elemento particular.

No caso de tensões planas, os deslocamentos horizontal e vertical de um ponto qualquer de um elemento pode ser descrito como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

e os deslocamentos correspondentes para um nó  $i$ :

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

As funções  $\mathbf{N}_i$ ,  $\mathbf{N}_j$ ,  $\mathbf{N}_m$  devem ser escolhidas de forma a fornecer os deslocamentos nodais apropriados quando as coordenadas dos nós correspondentes são inseridos na equação 3.1. Em geral:

$$\mathbf{N}_i(x_i, y_i) = \mathbf{I}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, enquanto

$$\mathbf{N}_i(x_j, y_j) = \mathbf{N}_i(x_m, y_m) = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

é simplesmente satisfeito para funções lineares de  $x$  e  $y$ .

Se as duas componentes de deslocamentos são especificadas de forma análoga, pode-se escrever as funções como:

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}, \quad (3.6)$$

### 3.3 DEFORMAÇÕES

Com os deslocamentos conhecidos em todos os pontos do elemento, as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  podem ser determinadas. Esta relação pode ser escrita na forma matricial  $\boldsymbol{\varepsilon}$  como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad (3.7)$$

sendo  $\mathbf{S}$  um operador linear. Utilizando 3.1, a equação 3.7 acima pode ser aproximada como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}, \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{N}. \quad (3.9)$$

Para o estado plano de tensões, as deformações relevantes de interesse são aquelas que ocorrem no plano e são definidas em termos dos deslocamentos. E o operador  $\mathbf{S}$  pode ser definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

Com as funções de interpolação  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_m$  determinadas previamente, a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser facilmente obtida. Se as funções de forma escolhidas forem linear, as tensões serão constantes ao longo do elemento.

### 3.4 TENSÕES

Assumindo um comportamento elástico linear do material, as tensões nos elementos podem ser obtidas a partir da relação constitutiva do material dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{D}$  é matriz de elasticidade contendo as propriedades do material.

Considerando o caso particular de estado plano de tensão, ou seja  $\sigma_z = 0$ , as três componentes de tensões correspondentes ao estado de deformações definido previamente pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

e a matriz  $\mathbf{D}$  pode ser obtida a partir da relação tensão-deformação isotrópica:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

### 3.5 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

As forças nodais estaticamente equivalentes às tensões no contorno e às forças distribuídas no elemento pode ser representada como:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde cada um dos vetores de força  $\mathbf{q}_i^e$  deve conter o mesmo número de componentes que o deslocamento nodal  $\mathbf{a}_i$  correspondente, e devem ser ordenados nas direções correspondentes.

As forças distribuídas  $\mathbf{b}$  são definidas como forças que agem numa unidade de volume do material no interior de um elemento, com as direções conforme os deslocamentos  $\mathbf{u}$  num dado ponto.

No caso particular de estado plano de tensões, as forças nodais são definidas por:

$$\mathbf{q}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}^e, \quad (3.15)$$

com as componentes  $U$  e  $V$  correspondendo aos deslocamentos  $u$  e  $v$ , e as forças distribuídas são:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde  $b_x$  e  $b_y$  são as componentes na direção  $x$  e  $y$  respectivamente.

O procedimento mais simples para realizar uma equivalência entre as forças nodais estáticas, as tensões de contorno e as forças distribuídas consiste em impor um deslocamento nodal arbitrário, ou virtual, e igualá-lo aos trabalhos internos e externos realizados pelas forças e tensões durante o deslocamento.

Tomando um deslocamento virtual nos nós como  $\delta\mathbf{a}^e$ , os deslocamentos e deformações virtuais num elemento podem ser obtidos a partir de 3.1 e 3.7 respectivamente:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{a}^e \quad \text{e} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{a}^e. \quad (3.17)$$

O trabalho realizado pelas forças nodais é igual a soma dos produtos das componentes individuais da força e os deslocamentos correspondentes, na forma matricial representado por:

$$\delta\mathbf{a}^{eT}\mathbf{q}^e. \quad (3.18)$$

De forma similar, o trabalho interno por unidade de volume realizado pelas tensões e pela força distribuída é:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}, \quad (3.19)$$

ou

$$\delta \mathbf{a}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{b}). \quad (3.20)$$

Igualando o trabalho externo com o trabalho interno nodal obtido pela integração ao longo do volume de um elemento  $V^e$ , tem-se:

$$\delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{q}^e = \delta \mathbf{a}^{eT} \left( \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d(\text{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol}) \right). \quad (3.21)$$

Conforme esta relação é válida para qualquer valor de deslocamento virtual, os multiplicadores devem ser iguais, então:

$$\mathbf{q}^e = \left( \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d(\text{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol}) \right). \quad (3.22)$$

Esta formulação é válida para qualquer relação tensão-deformação. Com a lei linear da equação 3.11 pode-se escrever 3.22 como:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e, \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d(\text{vol}), \quad (3.24)$$

e

$$\mathbf{f}^e = - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol}). \quad (3.25)$$

### 3.6 TEORIA DE PLACA REISSNER-MINDLIN

O elemento baseado na teoria de Reissner-Mindlin para placas é o mais utilizado nos *softwares* comerciais de Elementos Finitos, (como o ABAQUS<sup>®</sup>, ANSYS<sup>®</sup>, etc). (WU; WANG, 2013) A teoria é uma modificação da teoria clássica para placas de Kirchoff, e assume que as partículas da placa originalmente numa linha reta normal a superfície média da placa permanecem uma linha reta durante a deformação, mas não necessariamente normal a superfície média da placa deformada, como na teoria clássica. (BATHE, 2016)

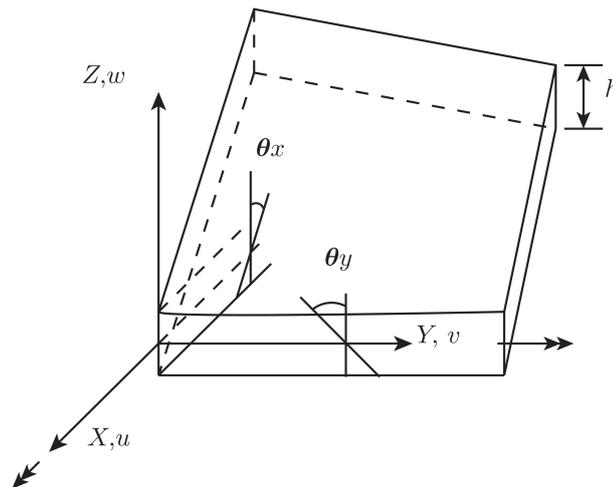
A principal vantagem na aplicação da teoria de Reissner-Mindlin é a facilidade de se encontrar funções de forma que satisfaçam as condições de continuidade requeridas pelas flechas e rotações dos elementos.

Com as hipóteses adotadas, as componentes de deslocamento em um ponto de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, na teoria de flexão considerando pequenos deslocamentos:

- $w$  = deslocamento na direção do eixo  $Z$ ;
- $\theta_x$  = rotação da normal em relação a superfície média no eixo  $X - Z$ ;
- $\theta_y$  = rotação da normal em relação a superfície média no eixo  $Y - Z$ ;

Considerando a placa da Figura 2 as deformações por flexão  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  variam linearmente ao longo da espessura placa e são dadas pelas curvaturas usando:

Figura 2 – Modelo de placa Reissner-Mindlin



Fonte: O Autor (2019)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -h \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

enquanto as deformações por cisalhamento são consideradas constantes ao longo da espessura da placa:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Com isso, o estado de tensão na placa corresponde ao estado plano de tensão, ou seja  $\sigma_z = 0$ , para um material isotrópico corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -h \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix}.$$

Para determinar as equações de equilíbrio da placa, a expressão utilizando o princípio do trabalho virtual é:

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\epsilon}_y & \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz dA + k \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{xz} & \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz dA = \int_A \bar{w} p dA, \quad (3.29)$$

sendo  $p$  igual ao carregamento transversal por unidade de área  $A$ .

A notação das varáveis com a barra sob escrita ( $\bar{w}$ ) corresponde a quantidades virtuais e  $k$  é a constante que leva em consideração a não uniformidade das tensões de cisalhamento. Substituindo de 3.26 a 3.28 em 3.29, obtém-se:

$$\int_A \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{D}_f \mathbf{\kappa} + \int_A \bar{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\gamma} = \int_A \bar{w} p dA, \quad (3.30)$$

onde os momentos internos de flexão e as forças de cisalhamento são  $\mathbf{D}_f \mathbf{\kappa}$  e  $\mathbf{D}_c \boldsymbol{\gamma}$ , respectivamente:

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

e,

$$\mathbf{D}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_c = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Considerando o indicador variacional correspondente a 3.29 dado por:

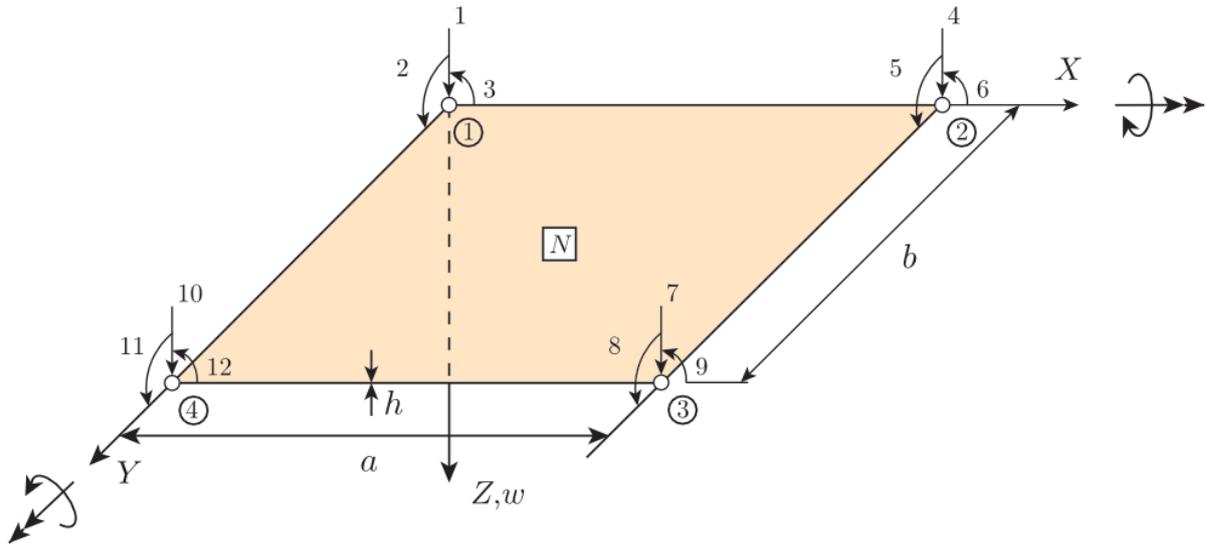
$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz dA \\ & + \frac{k}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} dz dA - \int_A \bar{w} p dA. \end{aligned} \quad (3.33)$$

o princípio do trabalho virtual corresponde em impor a variação de energia  $\delta\Pi = 0$  com os respectivos deslocamentos transversais  $w$  e rotações das seções  $\beta_x$  e  $\beta_y$ . Na teoria,  $w, \beta_x$  e  $\beta_y$  são variáveis independentes, porém na discretização com elementos finitos utilizando o método dos deslocamentos é necessário impor a continuidade entre elementos apenas em  $w, \beta_x$  e  $\beta_y$  e não com as suas derivadas.

### 3.6.1 Elemento Retangular de Placa

No presente trabalho foi empregado o elemento de placa retangular com quatro nós, onde cada nó possui três graus de liberdade, sendo um de deslocamento e dois de rotação, baseado na teoria apresentada por Reissner-Mindlin e resumida na seção anterior, como mostra a Figura 3. O autor Bathe (2016) atribui a esse elemento de placa o nome de MITC4.

Figura 3 – Elemento retangular de placa



Fonte: O Autor (2019)

Aplicando o equacionamento do elemento de placa num sistema discretizado, os deslocamentos nodais  $\mathbf{a}$  para cada elemento  $e$  podem ser escritos na seguinte forma:

$$\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{N}^T \mathbf{a}_e, \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a matriz com as funções de interpolação e  $\mathbf{a}_e$  o vetor de deslocamentos nodais para cada elemento. O vetor de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  de cada elemento é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e, \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a derivação da matriz de forma  $\mathbf{N}$  para cada elemento.

A matriz de rigidez para o elemento de placa é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \int_A \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B} dA + \int_A \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B} dA, \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{D}_f$  é a matriz constitutiva para flexão definida da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$\mathbf{D}_c$  é a matriz constitutiva para cisalhamento:

$$\mathbf{D}_c = \frac{Gh f_c}{(1 - \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

e  $f_c$  é o fator de cisalhamento, normalmente adota-se o valor de  $f_c = 5/6$  e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal dado por:  $G = E/2(1 + \nu)$ .

A matriz de rigidez global do sistema é definida pelo somatório da matriz de todos os  $m$  elementos:

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^m \mathbf{K}_e^n, \quad (3.39)$$

e a matriz de massa de cada elemento pode ser calculada como:

$$\mathbf{M}_e = \mu \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA, \quad (3.40)$$

com  $\mu$  representando a massa específica por unidade de área do material.

Do mesmo modo, a matriz de massa global do sistema pode ser obtida por:

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^m \mathbf{M}_e^n. \quad (3.41)$$

A matriz de massa para o elemento de placa simétrica com quatro nós também pode ser obtida na forma explícita segundo Szilard (2004) ( $a$  e  $b$  são dimensões de cada elemento):

$$\mathbf{M}_e^n = (\mu a^2 b^2)^{(n)} \begin{array}{c}
 \frac{169}{1225} \frac{a}{b} \\
 \frac{858}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{13}{3675} \frac{b}{a} \\
 \frac{-858}{44100} \frac{1}{b} \quad \frac{-121}{44100} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \\
 \frac{117}{2450} \frac{a}{b} \quad \frac{297}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{-2028}{176400} \frac{1}{b} \quad \frac{169}{1225} \frac{a}{b} \\
 \frac{297}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{9}{7350} \frac{b}{a} \quad \frac{-143}{88200} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \quad \frac{13}{3675} \frac{b}{a} \\
 \frac{2028}{176400} \frac{1}{b} \quad \frac{143}{88200} \quad \frac{-13}{4900} \frac{a}{b} \quad \frac{121}{44100} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \\
 \frac{81}{4900} \frac{a}{b} \quad \frac{117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{b} \quad \frac{297}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{169}{1225} \frac{a}{b} \\
 \frac{-117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{-9}{9800} \frac{b}{a} \quad \frac{169}{176400} \quad \frac{-13}{4800} \frac{b}{a} \quad \frac{-858}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \\
 \frac{117}{29400} \frac{1}{b} \quad \frac{169}{176400} \quad \frac{-9}{9800} \frac{a}{b} \quad \frac{143}{88200} \quad \frac{9}{7350} \frac{a}{b} \quad \frac{-121}{44100} \quad \frac{13}{3675} \frac{b}{a} \\
 \frac{117}{2450} \frac{a}{b} \quad \frac{2028}{176400} \frac{1}{a} \quad \frac{-297}{44100} \frac{1}{b} \quad \frac{81}{4900} \frac{a}{b} \quad \frac{117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{117}{2450} \frac{a}{b} \quad \frac{169}{1225} \frac{a}{b} \\
 \frac{2450}{176400} \frac{1}{b} \quad \frac{-2028}{176400} \frac{1}{a} \quad \frac{143}{88200} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{-169}{176400} \quad \frac{-297}{44100} \frac{1}{a} \quad \frac{9}{7350} \frac{a}{b} \quad \frac{-143}{88200} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \\
 \frac{-297}{44100} \frac{1}{b} \quad \frac{-143}{88200} \quad \frac{9}{7350} \frac{a}{b} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{b} \quad \frac{-169}{176400} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{-169}{9800} \frac{a}{b} \quad \frac{-2028}{176400} \frac{1}{b} \quad \frac{143}{88200} \quad \frac{-13}{4900} \frac{a}{b} \quad \frac{121}{44100} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b} \\
 \frac{-297}{44100} \frac{1}{b} \quad \frac{-143}{88200} \quad \frac{9}{7350} \frac{a}{b} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{b} \quad \frac{-169}{176400} \quad \frac{-117}{29400} \frac{1}{a} \quad \frac{-169}{9800} \frac{a}{b} \quad \frac{-2028}{176400} \frac{1}{b} \quad \frac{143}{88200} \quad \frac{-13}{4900} \frac{a}{b} \quad \frac{121}{44100} \quad \frac{13}{3675} \frac{a}{b}
 \end{array}$$

Sim.

(3.42)

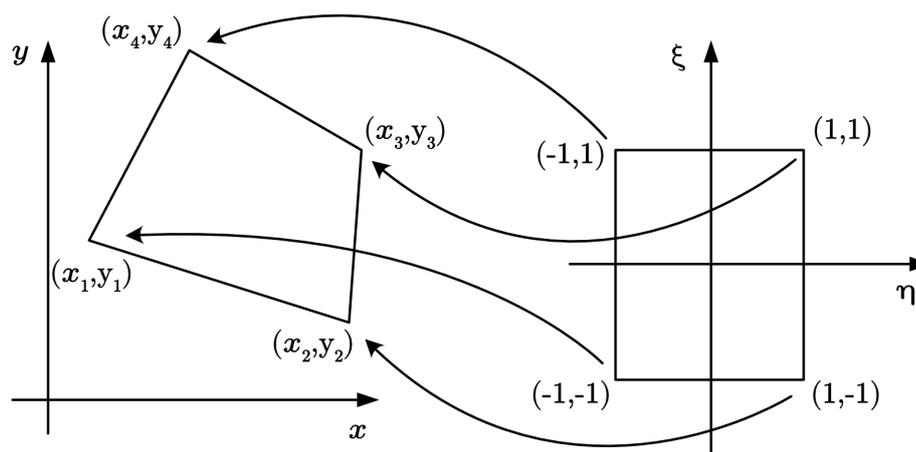
### 3.7 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO

O mapeamento isoparamétrico consiste em mapear os elementos em um domínio regular de coordenadas naturais, sendo o mapeamento dado por funções polinomiais de mesmo grau àsquelas utilizadas na aproximação da solução.

As funções de forma isoparamétricas são úteis para simplificar aproximação de campos de deslocamentos em elementos com geometrias mais complexas, como aqueles que possuem curvaturas, e também para reduzir significativamente o processo de integração numérica.

Este processo de mudança de domínios para um elemento quadrilátero definido no plano  $x - y$  consiste em mapear as coordenadas naturais  $x$  e  $y$  de um elemento a um outro elemento quadrado num referencial  $\xi$  e  $\eta$  local que tem as coordenadas no vértice, como mostra a figura 4.

Figura 4 – Mapeamento Isoparamétrico



Fonte: O Autor (2019)

Para fazer o mapeamento deve-se determinar funções  $F$  e  $G$  tais que:

$$\begin{aligned} x &= F(\xi, \eta) \\ y &= G(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Assumindo uma expansão bilinear, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= (\xi, \eta) = a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta \\ y &= (\xi, \eta) = a_2 + b_2\xi + c_2\eta + d_2\xi\eta. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ao substituir na equação 3.44 os valores de  $x = x_i$ , com  $i = 1...4$  e os valores

correspondentes de  $\xi$  e  $\eta$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\x_2 &= a_1 + b_1 - c_1 - d_1 \\x_3 &= a_1 - b_1 + c_1 - d_1 \\x_4 &= a_1 - b_1 - c_1 - d_1\end{aligned}\tag{3.45}$$

escrevendo na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix},\tag{3.46}$$

invertendo 3.46:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},\tag{3.47}$$

da mesma forma, na direção  $y$ :

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}.\tag{3.48}$$

Determinados os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  com  $i = 1...2$ , as funções  $F(\xi, \eta)$  e  $G(\xi, \eta)$  são estabelecidas a partir de 3.43.

Para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de placa é necessário calcular as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais  $x$  e  $y$  através da matriz de deformação  $\mathbf{B}$ . Para transformá-las nas coordenais locais  $\xi$ ,  $\eta$  deve-se aplicar a regra da cadeia, que na forma matricial utiliza-se a matriz Jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}\tag{3.49}$$

Finalmente, para transformar as coordenadas no domínio real para o domínio natural, basta realizar a seguinte operação:

$$dxdy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (3.50)$$

Assim, a matriz  $\mathbf{K}$  de rigidez do elemento de placa no domínio de coordenadas naturais pode ser obtida por:

$$\mathbf{K} = \int_A (\mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c) = \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} (\mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c) d\xi d\eta \det \mathbf{J}, \quad (3.51)$$

o vetor de forças  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \mathbf{N}^T p d\xi d\eta \det \mathbf{J}, \quad (3.52)$$

e a matriz de massa  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \mu \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi d\eta \det \mathbf{J}, \quad (3.53)$$

sendo  $\mu$  massa por unidade de área da placa.

### 3.8 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO

As frequências naturais e os modos de vibração de um sistema discretizado via MEF pode ser obtido pela Equação 3.54:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad (3.54)$$

que representa um problema de autovalor, onde  $\omega^2$  são os autovalores, que representam o quadrado das frequências naturais do sistema e  $\boldsymbol{\phi}$  são os autovetores associados aos modos de vibração.

## 4 MODELO DE DANO PARA O CONCRETO

Neste capítulo será abordado o modelo de dano para o concreto baseado na teoria do dano contínuo que servirá de base para o desenvolvimento do modelo proposto para a análise de lajes fissuradas.

### 4.1 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO

O concreto hidráulico é um dos principais materiais utilizados na construção civil devido à facilidade de se construir elementos com as mais diversas e complexas geometrias, na maioria dos casos a um menor custo em comparação a outros materiais de construção, e ainda pela facilidade de encontrar seus elementos constituintes em todas as regiões do mundo. Em geral, é composto pela mistura de agregados finos (areia) e agregados graúdos (pedra) unidos por uma pasta de cimento e água.

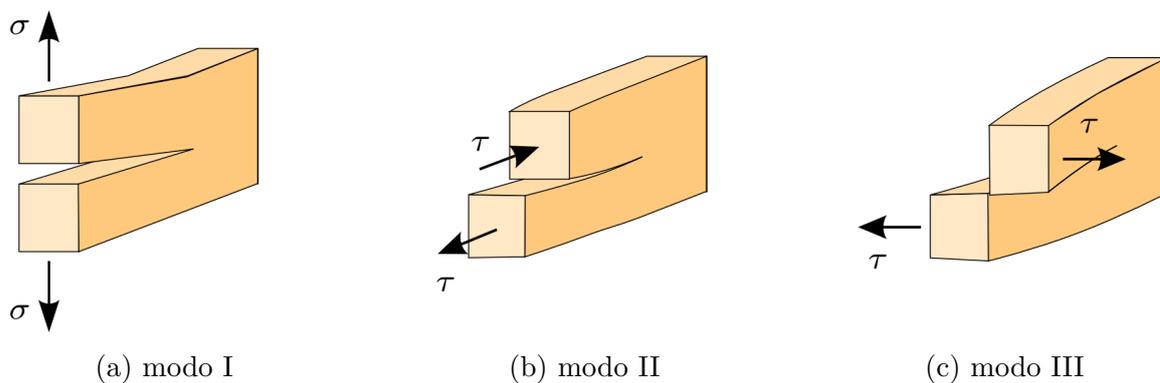
O comportamento mecânico do concreto é bastante complexo devido à influência da sua microestrutura heterogênea. Esse comportamento pode ser considerado não linear mesmo em solicitações com baixos níveis de tensão, por influência de microfissuras, que ocorrem durante seu processo de cura e se propagam durante o processo de carregamento (PITUBA, 1984). As microfissuras se desenvolvem principalmente na interface pasta-agregado, chamada de zona de transição, e sua distribuição na argamassa é bastante descontínua e com orientações arbitrárias (ALVARES, 1999).

O surgimento e propagação das microfissuras podem ser explicados através de três tipos básicos de modos de abertura de fissura: no modo I a abertura da fissura ocorre devido a um esforço perpendicular à superfície do defeito (figura 5a); no modo II há um escorregamento das superfícies da fissura devido a um esforço de cisalhamento aplicado no plano dessas superfícies e paralelo ao defeito (figura 5b); no modo III há um escorregamento das superfícies da fissura devido a um esforço cisalhante atuante no plano dessas superfícies e em direção perpendicular ao defeito (figura 5c).

A formação das microfissuras ocorre de maneira distinta para solicitações de tração e compressão. No caso de tração uniaxial, o comportamento linear do concreto pode ser observado até aproximadamente 80% da carga máxima. Ao atingir a tensão máxima, a curva tensão-deformação apresenta uma queda acentuada. Após o limite elástico, as microfissuras propagam-se na direção perpendicular à solicitação, conforme o modo I de abertura. Estas fissuras se propagam rapidamente, conforme ilustra a figura 6.

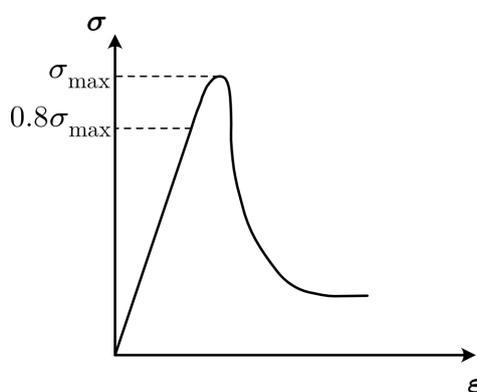
No caso de compressão uniaxial, as fissuras se desenvolvem na mesma direção da solicitação seguindo um modo misto de abertura entre os modos I e II, a partir de aproximadamente 70% da carga máxima, de forma um pouco mais suave, com ilustra a figura 7.

Figura 5 – Modos de abertura de fissuras



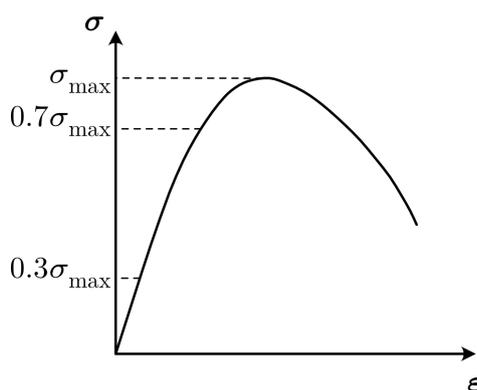
Fonte: O Autor (2019)

Figura 6 – Tensão-deformação - ensaio de tração uniaxial



Fonte: Adaptado de (ÁLVARES, 1993)

Figura 7 – Tensão-deformação - ensaio de compressão uniaxial



Fonte: Adaptado de (ÁLVARES, 1993)

O aparecimento de deformações permanentes é um outro fenômeno decorrente da evolução de microfissuras no concreto, causadas pela heterogeneidade do material e pelo atrito entre as faces das fissuras, que impedem o fechamento total das mesmas ao ser descarregado.

Outros fatores como a textura e tamanho de agregados, relação água-cimento,

índice de vazios também podem influenciar diretamente o comportamento mecânico do concreto. Por isso a definição de um modelo constitutivo é bastante complexa, podendo ser formulado a partir da teoria da plasticidade, da elasticidade, e nos estudos mais recentes, da mecânica do dano e da fratura.

A Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura servem de base para os modelos de fissuração. Nestes modelos os critérios de resistência e o comportamento do concreto após o surgimento de trincas são estudados. Dentre as diversas abordagens, destacam-se a modelagem discreta da trinca, que considera o surgimento de uma descontinuidade geométrica após uma tensão limite ser alcançada, e os modelos de fissuração distribuída, que se baseiam na deterioração das propriedades físicas do material em função da eclosão de fissuras. O Modelo de Mazars pode ser incluído nessa última abordagem. Nos próximos tópicos, aspectos relacionados aos modelos de fissuração distribuídas são abordados.

## 4.2 MECÂNICA DO DANO APLICADA AO CONCRETO

A mecânica do dano contínuo é uma ferramenta que analisa os efeitos da deterioração do material em sólidos quando submetidos a ação de natureza mecânica ou térmica, estudando o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material.

A teoria do dano fornece o conceito de dano para retratar a evolução da deterioração do material desde seu arranjo inicial íntegro até o momento em que podem ser verificadas micro e macrofissuras, ou seja, quando há uma ruptura do elemento de volume representativo em torno de um ponto.

A mecânica do dano é capaz de formular modelos realísticos para o estudo concreto, pois a fissuração é o fenômeno dominante no seu comportamento não-linear. A evolução de um campo de defeitos continuamente distribuído, como microfissuras ou poros, determina a resistência da estrutura.

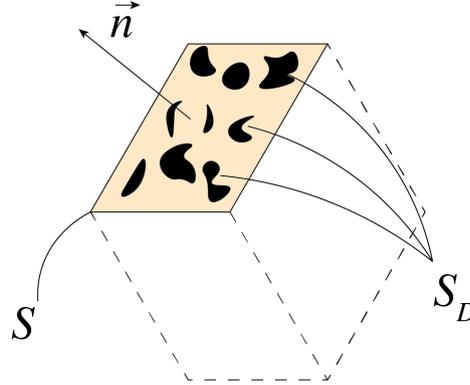
Como o dano não é uma grandeza que pode ser diretamente mensurada, na modelagem matemática ele é quantificado através da redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como o módulo de elasticidade por exemplo. Nos modelos classificados como isotrópicos, a variável dano é representada por uma ou duas variáveis escalares (tração e compressão).

### 4.2.1 Variável Dano

Os modelos classificados como constitutivos escalares supõem que a degradação não altera a isotropia do material e a variável *Dano* é definida por um escalar e a partir da área denominada efetiva de um determinado elemento do material. Tomando um elemento de volume com dimensões grandes o suficiente para considerar a distribuição de micro defeitos contínua e pequeno o suficiente para ser considerado como um ponto material

contínuo, tem-se a figura 8. Nessa figura  $S$  representa a área total de uma das faces do elemento, definida pela normal  $\vec{n}$ .

Figura 8 – Elemento de volume



Fonte: O Autor (2019)

Definindo-se  $S_D$  como sendo uma perda de área proveniente do dano, obtida pela diferença entre a área inicial e a área que efetivamente resiste aos esforços  $S_E$ :

$$S_D = S - S_E, \quad (4.1)$$

a medida local  $Dano_n$  então é definida por (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985):

$$Dano_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S_D}{S}. \quad (4.2)$$

A variável  $Dano_n$  varia entre 0 e 1, onde  $Dano_n = 0$  representa um material totalmente íntegro, e  $Dano_n = 1$  indica um estado de danificação completo.

No modelo isotrópico, onde a variável  $Dano$  não varia conforme a direção  $\vec{n}$ , apenas uma variável escalar representa o estado de danificação em um ponto material:

$$Dano = Dano_n, \quad \forall \vec{n}. \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 Tensão Efetiva e Deformação Equivalente

No caso unidimensional, a tensão efetiva,  $\sigma_E$ , é obtida pela razão da força,  $F$ , aplicada pela área da seção que efetivamente resiste ao carregamento  $S_E$ :

$$\sigma_E = \frac{F}{S_E}. \quad (4.4)$$

A área efetiva também pode ser escrita em função da variável *Dano* pela seguinte relação:

$$S_E = S - S_D = S(1 - Dano). \quad (4.5)$$

Substituindo 4.5 em 4.4 obtém-se a tensão efetiva em função da variável *Dano*:

$$\sigma_E = \frac{\sigma}{(1 - Dano)}, \quad (4.6)$$

onde  $\sigma_E \geq \sigma$  e:

$\sigma_E = \sigma$  para material íntegro;

$\sigma_E \rightarrow \infty$  para material totalmente danificado ( $Dano = 1$ ).

No caso tridimensional de dano isotrópico, o operador  $(1 - Dano)$  é aplicado a todas as componentes do tensor de tensões. Com a finalidade de se obter um modelo coerente com a hipótese de meio contínuo, o comportamento de deformação do material danificado é representado pela lei constitutiva do material íntegro em que a tensão usual é substituída por uma tensão efetiva,  $\sigma_E$ . Assim, a deformação equivalente  $\varepsilon_E$  é dada por:

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sigma}{(1 - Dano)E}. \quad (4.7)$$

sendo  $E$ , o Módulo de Elasticidade do material.

A relação constitutiva do material a partir da lei de Hooke considerando a variável *Dano* definida anteriormente pode ser descrita como:

$$\sigma = (1 - Dano)E\varepsilon. \quad (4.8)$$

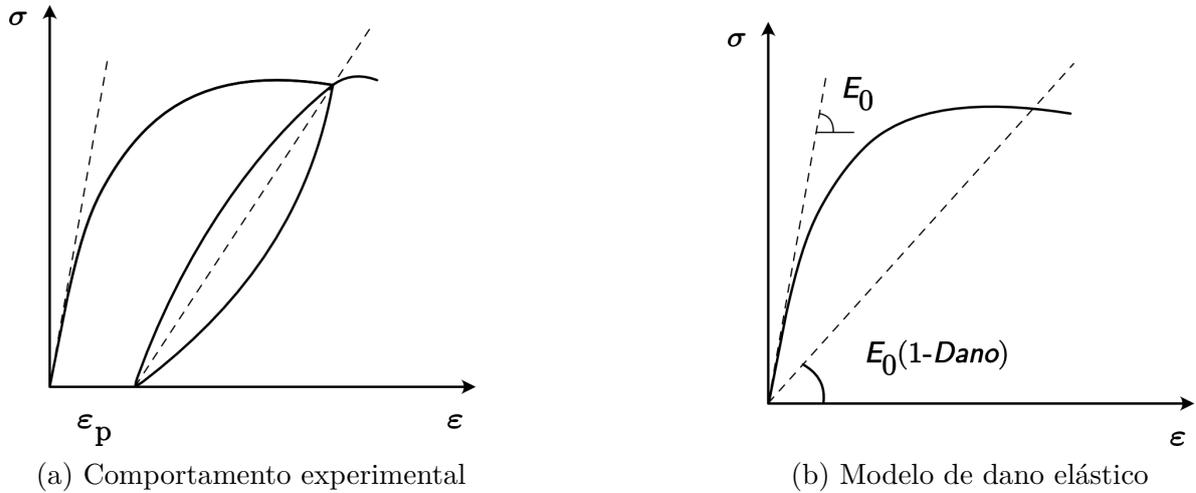
Finalmente, a partir desta relação pode-se definir como um Módulo de Elasticidade Efetivo  $E_E$  para um meio contínuo considerando o estado de dano como:

$$E_E = (1 - Dano)E. \quad (4.9)$$

### 4.3 MODELO DE MAZARS

O modelo desenvolvido por Mazars (MAZARS, 1986) não considera deformações permanentes (figura 9a), sendo assim essencialmente elástico (figura 9b). Porém representa de forma satisfatória o comportamento do concreto fissurado, principalmente quando sujeito a carregamentos monótonos. Para o modelo de Mazars, o efeito da fissuração é introduzido na equação constitutiva do material através da redução do Módulo de

Figura 9 – comportamento do concreto danificado



Fonte: O Autor (2019)

Elasticidade em função de uma variável *Dano* que está associada ao dano mecânico, conforme sugere a figura 9.

Partindo-se da equação 4.9 o Modelo de Mazars define a variável *Dano*, partindo-se das hipóteses fundamentais consideradas:

- As deformações plásticas são desprezadas, considerando-se somente o regime elástico;
- Localmente os danos ocorrem devido à extensão (alongamento);
- A variável *Dano* é representada por um escalar que varia no intervalo entre [0,1] e sua evolução é considerada quando um valor de referência é atingido;
- Admite-se que o dano é isotrópico, porém é considerado distinto o comportamento do concreto quando submetido a esforços de tração ou compressão;

As deformações associadas aos alongamentos desenvolvidos em cada direção principal *i* são dadas por:

$$\epsilon_i^+ = \frac{1}{2}(\epsilon_i + |\epsilon_i|) \quad (4.10)$$

Assim, somente as deformações que geram alongamento são contabilizadas, e a deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$  pode ser definida em função das deformações principais ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$ ):

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2}. \quad (4.11)$$

No modelo de Mazars, considera-se que o dano começa a ocorrer numa estrutura quando um valor de deformação  $\tilde{\varepsilon}$  atinge um valor inicial  $\varepsilon_{d0}$ . Este valor é estabelecido para o concreto em teste de tração uniaxial correspondente ao valor máximo de tensão alcançado, e pode ser aproximado por:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_t}{E}, \quad (4.12)$$

onde  $f_t$  é a resistência à tração e  $E$  é o Módulo de Young do concreto.

Embora o modelo considera o concreto um material isotrópico, a diferença entre seu comportamento mecânico sujeito a um estado de carregamento de tração ou de compressão é contemplada. Com isso as leis de evolução de trincas para cada caso é descrita de maneira separada. As variáveis  $Dano_c$  e  $Dano_t$  relativas à compressão e à tração, respectivamente, são obtidas por:

$$Dano_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (4.13)$$

$$Dano_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (4.14)$$

$A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$ ,  $B_c$  são parâmetros do modelo para tração e compressão, respectivamente. A variável  $Dano$ , então, é uma combinação linear das parcelas de tração e compressão:

$$Dano = \alpha_t^\beta Dano_t + \alpha_c^\beta Dano_c; \quad \text{onde} \quad \alpha_t^\beta + \alpha_c^\beta = 1. \quad (4.15)$$

Os valores de  $\alpha_t^\beta$  e  $\alpha_c^\beta$  pertencem ao intervalo fechado  $[0, 1]$ , e representam a contribuição de tração e compressão para o estado local de alongamento, e devem satisfazer as seguintes condições:

- Tração pura:  $\alpha_t = 1, \alpha_c = 0, \rightarrow Dano = Dano_t$
- Compressão pura:  $\alpha_c = 1, \alpha_t = 0, \rightarrow Dano = Dano_c$
- Caso geral:  $\alpha_t + \alpha_c = 1$

#### 4.3.1 Parâmetros do modelo de Mazars

Os parâmetros  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $\varepsilon_{d0}$  permitem o ajuste do modelo para uma representação mais adequada do comportamento do concreto. Mazars(MAZARS, 1984) propôs

os seguintes intervalos de validade:

$$\begin{aligned}1,0 \times 10^{-5} &\leq \varepsilon_{d0} \leq 1,0 \times 10^{-4} \\0,7 &\leq A_t \leq 1,0 \\1,0 \times 10^4 &\leq B_t \leq 1,0 \times 10^5 \\0,7 &\leq A_c \leq 1,0 \\1,0 \times 10^3 &\leq B_c \leq 2,0 \times 10^3\end{aligned}\tag{4.16}$$

## 5 MODELO PROPOSTO PARA MODELAGEM DE LAJES DE CONCRETO ARAMDO FISSURADAS

Neste capítulo será apresentado o modelo proposto para o estudo de lajes de concreto armado fissuradas bem como sua implementação computacional.

### 5.1 HIPÓTESES E CONSIDERAÇÕES BÁSICAS DO MODELO

Para o modelo computacional proposto nessa dissertação tem-se as hipóteses ou considerações que seguem. Algumas dessas considerações são claramente correlacionadas. Entretanto, optou-se por explicitar cada uma dessas premissas para enfatizar as condições para aplicação do modelo proposto.

**1. A relação entre os momentos fletores atuantes e as respectivas armaduras longitudinais da laje são suficientemente próximas.**

Essa premissa básica permite assumir um comportamento semelhante na flexão nas duas direções ortogonais da laje. Em situações práticas essa premissa é normalmente satisfeita tendo em vista que o cálculo de lajes de concreto armado define a armadura como sendo proporcional ao carregamento, fazendo com que a relação supracitada não tenha variações significativas.

**2. O material constitutivo da laje (concreto armado) é considerado homogêneo e isotrópico.**

Obviamente essa hipótese não corresponde ao comportamento do concreto armado, uma vez que o aço e o concreto possuem características significativamente diferentes. Entretanto essa estratégia, quando se considera propriedades homogeneizadas do concreto armado, pode produzir resultados satisfatórios, especialmente no cálculo de deslocamentos verticais da laje. Nesse caso faz-se necessário o cálculo de um Módulo de Elasticidade Homogeneizado do concreto armado, que considera tanto propriedades do aço quanto do concreto.

**3. A posição da superfície neutra à flexão permanece inalterada com o aparecimento de fissuras**

Considera-se como superfície neutra do modelo de laje proposto como sendo o plano médio paralelo às faces superior e inferior da laje. Em problemas envolvendo flexão de elementos estruturais de concreto armado, a posição da superfície neutra se altera a medida que há, por exemplo, degradação do concreto por fissuração. Porém, em casos de lajes, onde a altura é significativamente menor em comparação com aquelas normalmente encontradas em casos de vigas, essa variação absoluta é pequena, especialmente para carregamentos de menores magnitudes.

Assim sendo, considerar que a posição da superfície neutra passa pela altura média da laje é uma aproximação que pode levar a resultados razoáveis no que se refere ao comportamento global da estrutura.

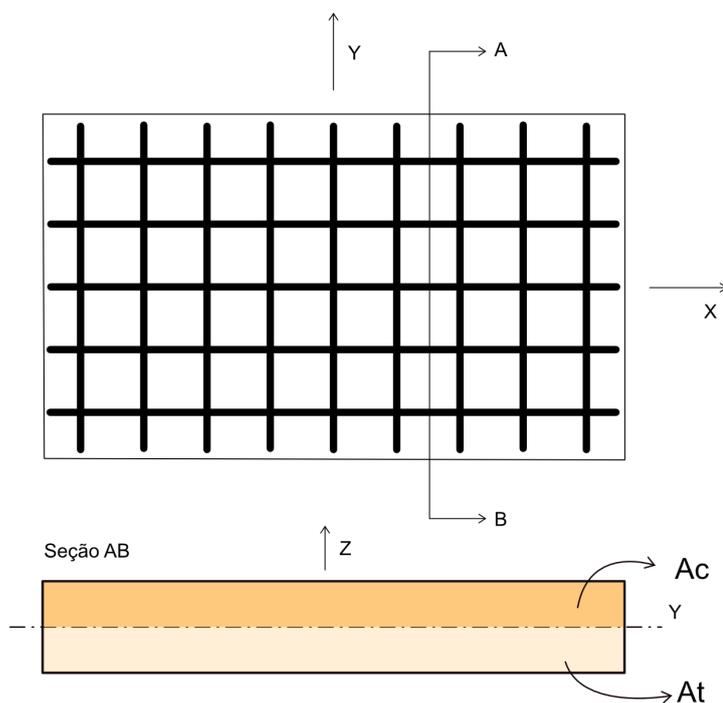
#### 4. As seções transversais paralelas a cada lado das lajes permanecem planas após às deformações

Essa hipótese clássica é aqui citada para melhorar a compreensão do texto, justificando o comportamento linear das deformações ao longo da espessura da laje.

## 5.2 DEFINIÇÃO DO MODELO

Seja então uma laje armada nas duas direções, sujeita a momentos fletores, esquematizada na figura 10. As condições de bordo podem ser apoios (restrição do deslocamento vertical) ou engastes (restrição do deslocamento vertical e rotação).

Figura 10 – Exemplo típico de uma laje modelada nesse trabalho



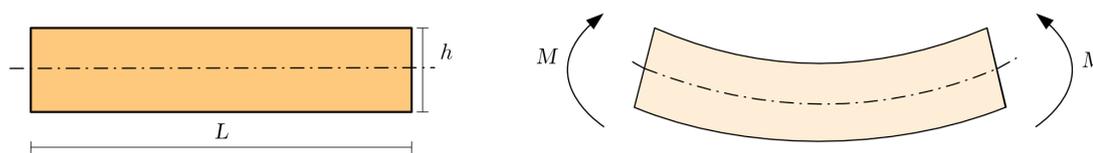
Fonte: O Autor (2019)

Na figura 10 também é mostrada uma seção transversal evidenciando duas áreas a saber:

- $A_t$  área de concreto armado homogeneizado sujeita à tração;
- $A_c$  área de concreto armado homogeneizado sujeita à compressão.

O modelo de placas descrito no capítulo 3 reduz o problema tridimensional em um problema bidimensional, considerando que a deformação ao longo da espessura de uma placa varia de forma linear, sendo nula no centro da placa, tal como considerado para as lajes de concreto armado do modelo proposto (ver figura 11).

Figura 11 – Variação linear das deformações para um segmento de laje deformado

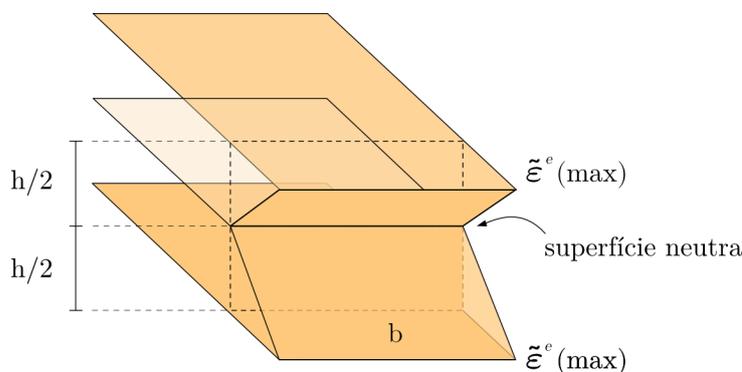


Fonte: O Autor (2019)

Definido o estado de deformação para um dado elemento de placa, é possível definir as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  e, conseqüentemente, a deformação equivalente ( $\tilde{\varepsilon}$ ) do modelo de Mazars (equação 4.11).

Admitindo para as deformações equivalentes uma variação bi-linear ao longo da altura da laje, tem-se a figura 12 onde, tomando-se uma largura unitária de um dado elemento finito, mostra-se a variação admitida para  $\tilde{\varepsilon}$ . O valor de  $\tilde{\varepsilon}^{(max)}$  mostrado na figura 12 é definido como sendo a deformação equivalente máxima para um dado elemento de placa. Sistemáticamente, para lajes fletidas, os pontos situados nos bordos da laje estarão submetidos a  $\tilde{\varepsilon}^{(max)}$ . O modelo proposto considera o mesmo valor de  $\tilde{\varepsilon}^{(max)}$  para os bordos superior e inferior da laje. Além disso, com a variação admitida para as deformações equivalentes, o modelo proposto acaba por negligenciar as deformações tangencias no cálculo de  $\tilde{\varepsilon}$  ao longo da altura da laje.

Figura 12 – Variação bi-linear admitida para a deformação equivalente  $\tilde{\varepsilon}^e$  ao longo da altura para um elemento de um elemento de placa



Fonte: O Autor (2019)

Propõe-se um Módulo de Elasticidade homogeneizado do concreto armado para cada elemento de placa ( $E_h^e$ ) de uma dada discretização. Esse módulo homogeneizado do

elemento é função das deformações equivalentes  $\tilde{\varepsilon}^e$  e é definido como:

$$E_h^e = E^e \frac{(1 - D_c^e) + (1 - D_t^e)}{2} \quad (5.1)$$

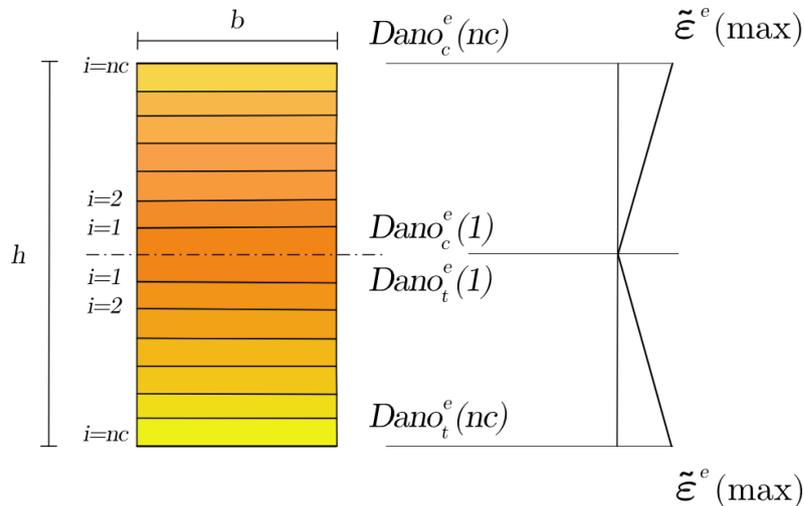
onde o superíndice  $e$  refere-se ao elemento  $e$ ;  $E^e$  é o Módulo de Elasticidade do concreto armado na compressão e na tração (considerados idênticos no modelo proposto). As variáveis  $D_c^e$  e  $D_t^e$  são definidas pelas equações 5.2 e 5.3, respectivamente:

$$D_c^e = \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^{nc} Dano_c^e(i) \quad e \quad (5.2)$$

$$D_t^e = \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^{nc} Dano_t^e(i), \quad (5.3)$$

onde  $Dano_c^e(i)$  e  $Dano_t^e(i)$  ( $i = 1 \dots nc$ , sendo  $2nc$  o número de camadas consideradas ao longo da altura da placa) são calculados em função das respectivas deformações equivalentes, considerada a variação bi-linear mostrada nas figuras 12 e 13 e usando as equações 4.13 e 4.14. Obviamente só haverá  $Dano_c^e(i) \neq 0$  ou  $Dano_t^e(i) \neq 0$  casos as suas respectivas deformações ( $\tilde{\varepsilon}^e$ ) forem maiores que  $\varepsilon_{d0}$  (ver equação 4.12).

Figura 13 – Variável  $Dano$  ao longo da altura da placa



Fonte: O Autor (2019)

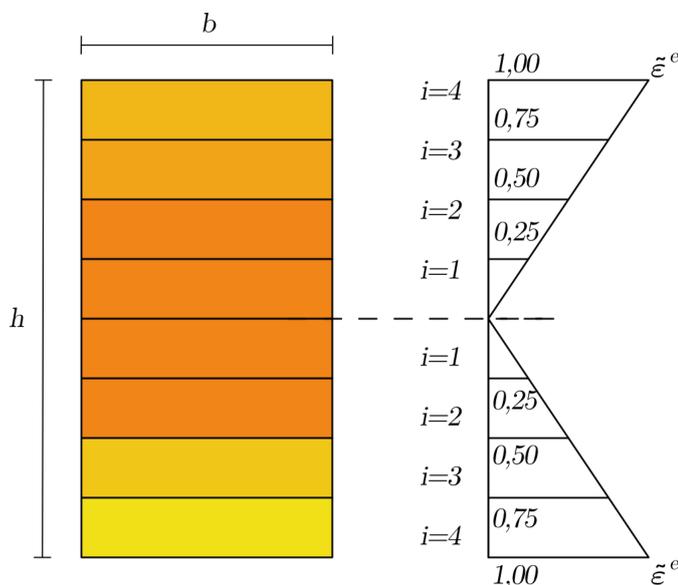
Visando explicitar e exemplificar a aplicação do Módulo de Elasticidade homogeneizado proposto, seja um elemento finito de placa hipotético para o qual se considere:

- Módulo de Elasticidade do concreto armado:  $E^e$
- Deformação equivalente máxima:  $\tilde{\varepsilon}^e(\max) = 1,0$
- Deformação correspondente à tensão máxima em tração uniaxial de concreto :  $\varepsilon_{d0} = 0,5$

- Número de camadas consideradas ao longo da altura da laje:  $nc = 4$  ( $2nc = 8$ ).

Para esse caso tem-se a distribuição de deformações equivalentes conforme figura 14.

Figura 14 – Exemplo de distribuição de *Dano* ao longo da altura de um elemento



Fonte: O Autor (2019)

Observa-se que somente as camadas 3 e 4 (tração e compressão) possuem deformações superiores a  $\epsilon_{d0}$ . Dessa forma, as equações 4.13 e 4.14 somente serão aplicadas para a determinação dos valores de:

- $Dano_t^e(3)$  e  $Dano_t^e(4) \Rightarrow$  equação 4.13
- $Dano_c^e(3)$  e  $Dano_c^e(4) \Rightarrow$  equação 4.14

Os demais valores de  $Dano_t^e(i)$  e  $Dano_c^e(i)$  ( $i = 1 \dots 2$ ) são, nesse caso, considerados nulos.

Aplicando-se as equações 5.2 e 5.3 para o presente exemplo, tem-se:

$$D_c^e = \frac{1}{4}(0 + 0 + Dano_c^e(3) + Dano_c^e(4)) \quad (5.4)$$

e

$$D_t^e = \frac{1}{4}(0 + 0 + Dano_t^e(3) + Dano_t^e(4)), \quad (5.5)$$

que podem ser interpretados como sendo o dano médio no elemento na região comprimida e tracionada da placa, respectivamente.

Finalmente, a aplicação da equação 5.1 fornece o Módulo de Elasticidade homogeneizado proposto ( $E_h^e$ ) onde  $E^e$  é reduzido ponderando-se os danos de tração e compressão calculados anteriormente ( $D_t^e$  e  $D_c^e$ ).

### 5.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Seja uma laje de concreto armado discretizada por elementos finitos de placa, submetida a um carregamento genérico  $F$  e com a modelagem de danos proposta nesse trabalho. Inicialmente define-se para cada elemento  $e$  da discretização o valor do Módulo de Elasticidade homogeneizado do concreto armado, que nesse ponto do texto passa a ser denominado de  $E_h$ . Assim, para o estado inicial da placa, tem-se:

$$E_h^e = E_h. \quad (5.6)$$

A medida em que o carregamento  $F$  é aplicado, as deformações equivalentes  $\tilde{\varepsilon}^e$  para cada elemento aumentam até que, com a ocorrência de danos, o valor de cada  $E_h^e$  passa a sofrer reduções. A introdução das reduções dos valores  $E_h^e$  no modelo computacional foi feita através de duas estratégias, que são detalhadas nas seções que seguem.

#### 5.3.1 Estratégia Incremental

Nessa estratégia o carregamento  $F$  é dividido em  $N$  incrementos de carga  $\Delta F$

$$\Delta F = \frac{F}{N}.$$

Para o primeiro passo de carga  $\Delta F(1)$ , admite-se um comportamento linear da estrutura, sem ocorrência de danos, considerando todos os elementos com:

$$E_h^e(0) = E_h, \quad (5.7)$$

sendo  $E_h^e(0)$  o Módulo de Elasticidade homogeneizado inicial do concreto armado para cada elemento.

Aplicando  $\Delta F(1)$ , com o modelo computacional definido com valores  $E_h^e(0)$ , obtém-se as respectivas deformações equivalentes  $\tilde{\varepsilon}^e(1)$  para o primeiro passo incremental.

Na sequência verifica-se quais são os elementos que possuem deformações equivalentes máximas maiores que  $\varepsilon_{d0}$ , o que caracteriza a ocorrência de danos. Para os elementos onde não se detecta a presença de danos tem-se:

$$E_h^e(1) = E_h^e(0), \quad (5.8)$$

sendo  $E_h^e(1)$  o Módulo de Elasticidade homogeneizado de cada elemento  $e$  para o incremento de carga (1).

Já para os elementos onde danos estão presentes, há uma atualização dos valores de  $E_h^e(1)$  através da aplicação da equação 5.1.

O próximo passo é a aplicação do incremento (2) de carga:  $\Delta F(2) = 2\Delta F$ . Nesse caso, calcula-se a resposta mecânica da estrutura considerando os valores de  $E_h^e(1)$  calculados no incremento (1) e, de forma análoga ao que foi descrito anteriormente, faz-se a atualização das  $\tilde{\varepsilon}^e(2)$  e  $E_h^e(2)$ . Esse procedimento é repetido até a aplicação do último incremento de carga  $\Delta F(N)$ . O pseudo-código que segue ilustra a Estratégia Incremental implementada:

```

Define-se  $E_h^e(0) = E_h$ 
Para  $i = 1$  até  $N$  faça
    Aplica-se  $\Delta F(i)$ 
    Calcula-se  $\tilde{\varepsilon}^e(i)$ 
    Atualiza-se  $E_h^e(i)$ 
Fim do Para
    
```

A figura 15 mostra o fluxograma da estratégia incremental implementada.

### 5.3.2 Estratégia Iterativa

Nessa estratégia o carregamento  $F$  é aplicado de uma só vez na estrutura, iniciando em seguida um procedimento iterativo. Define-se nesse ponto do texto  $F(i)$  como sendo a carga total  $F$  aplicada na iteração ( $i$ ), para facilitar a notação na sequência da seção.

Semelhante ao adotado na estratégia anterior, considera-se para o primeiro passo de iteração o valor de:

$$E_h^e(0) = E_h. \quad (5.9)$$

Aplicando  $F(1)$ , com o modelo computacional definido com valores  $E_h^e(0)$ , obtém-se as respectivas deformações equivalentes  $\tilde{\varepsilon}^e(1)$  para o primeiro passo iterativo.

A verificação se houve ou não dano em cada elemento é feita de forma idêntica ao procedimento adotado na Estratégia Incremental, ou seja, para os elementos onde não se detecta dano, tem-se:

$$E_h^e(1) = E_h^e(0), \quad (5.10)$$

e para os elementos onde danos estão presentes, há uma atualização dos valores de  $E_h^e(1)$  através da aplicação da equação 5.1.

O próximo passo iterativo consiste na aplicação da carga  $F(2)$  com os elementos do modelo dotados de  $E_h^e(1)$ , o que resulta em valores de  $\tilde{\varepsilon}^e(2)$ . Aqui, os valores de  $\tilde{\varepsilon}^e(2)$  obtidos são usados para a nova atualização dos Módulos de Elasticidades homogeneizados dos elementos, deixando claro um procedimento iterativo que é resumido no pseudo-código que segue:

Define-se  $E_h^e(0) = E_h$

Enquanto critério de parada não for atingido, faça

Aplica-se  $F(i)$

Calcula-se  $\tilde{\varepsilon}^e(i)$

Atualiza-se  $E_h^e(i)$

Fim do Enquanto

O critério de parada pode ser definido através de uma medida relativa associada a alguma grandeza obtida do modelo. Por exemplo, tomando-se a flecha máxima  $\delta_{max}$  da laje como grandeza auxiliar para se definir o critério de parada, pode-se escrever uma grandeza associada ao erro no cálculo de deslocamentos como sendo:

$$erro = \left| \frac{\delta_{max}(i) - \delta_{max}(i-1)}{\delta_{max}(i-1)} \right|, \quad (5.11)$$

sendo  $\delta_{max}(i)$  a flecha máxima calculada para a iteração  $(i)$ .

Caso o erro relativo seja menor que uma tolerância desejada o critério de parada é atingido e diz-se que a convergência foi alcançada e o processo iterativo é interrompido.

A figura 16 mostra o fluxograma da estratégia iterativa implementada.

Figura 15 – Fluxograma da estratégia incremental

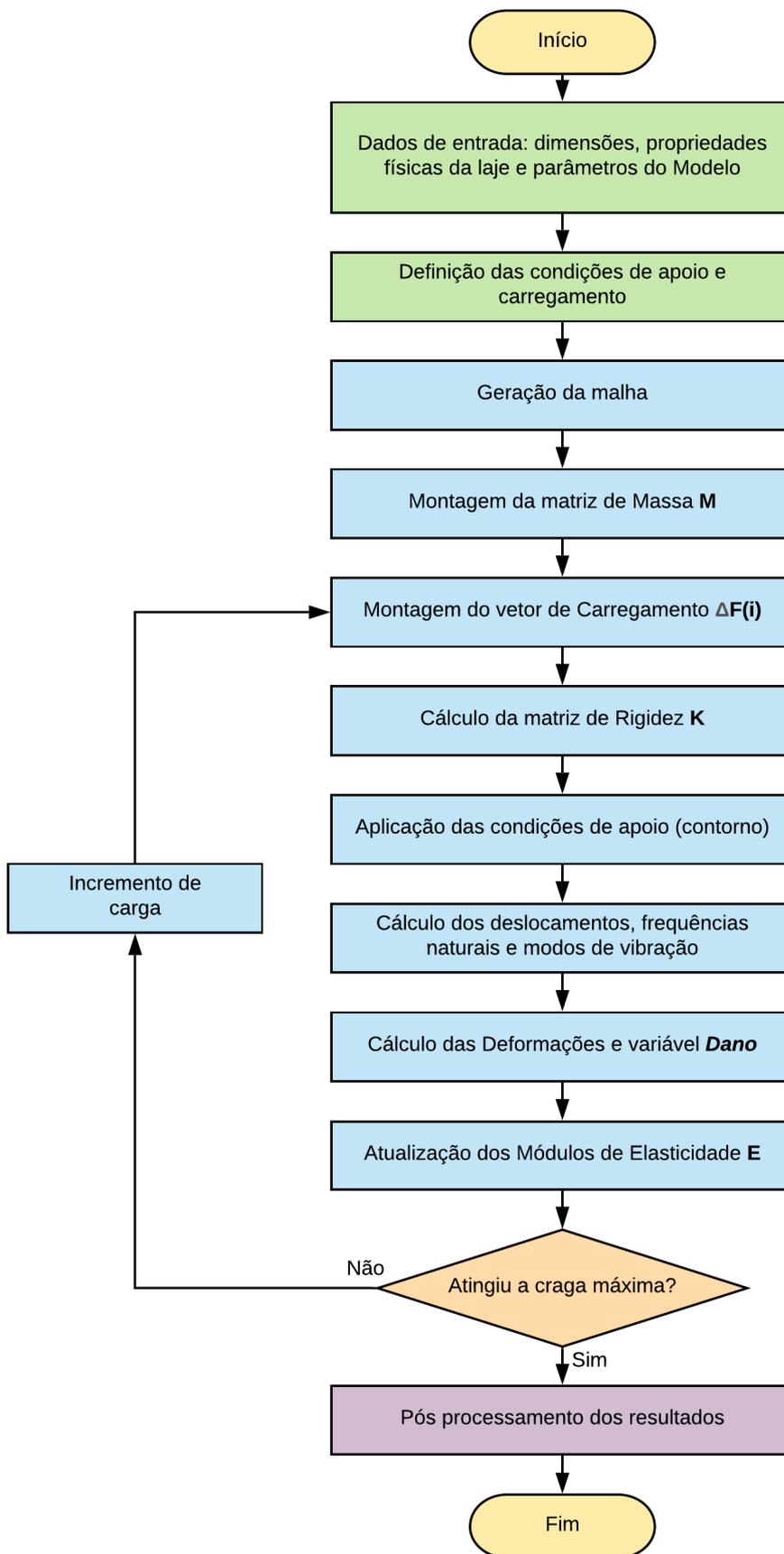
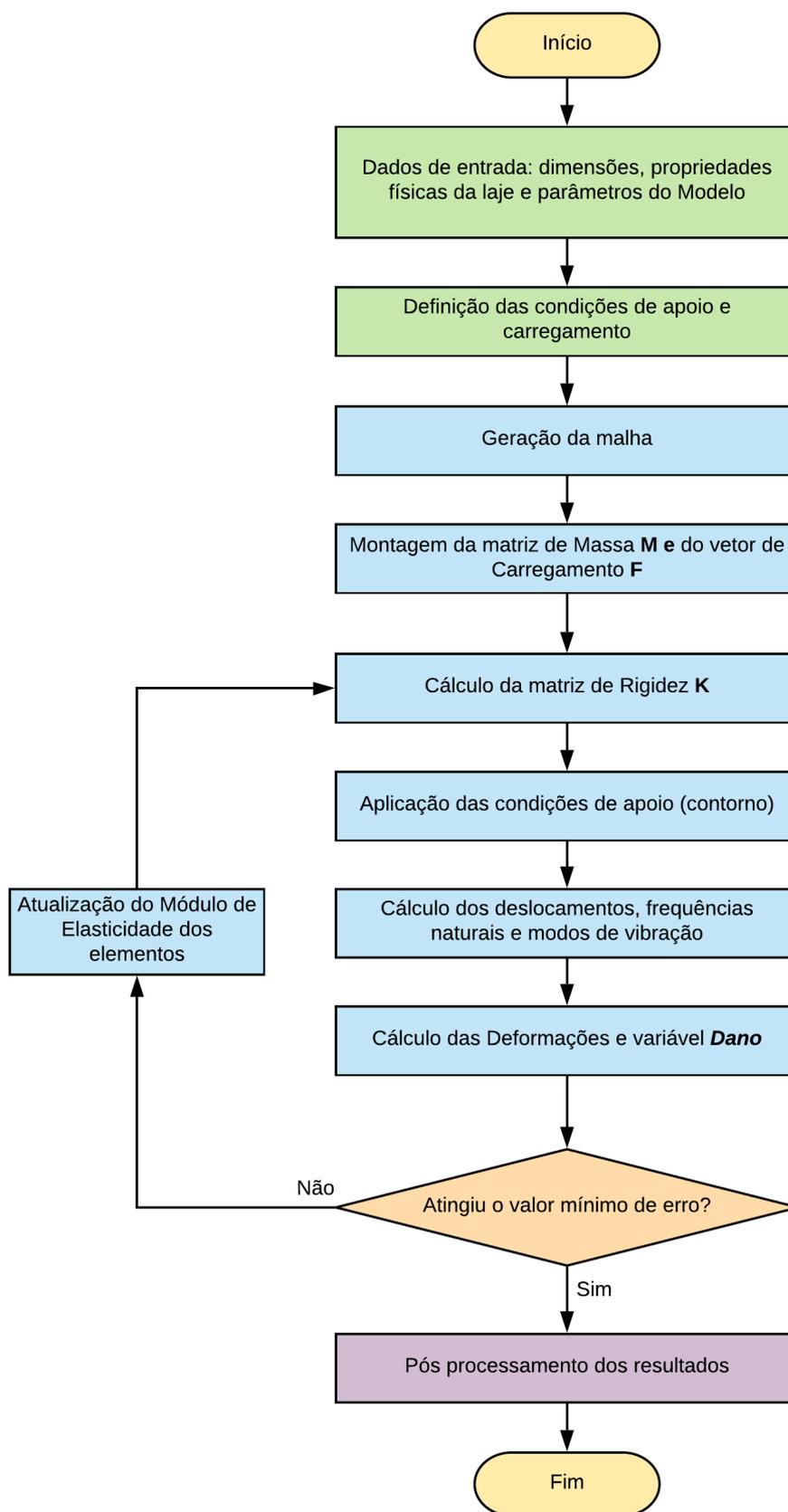


Figura 16 – Fluxograma da estratégia iterativa



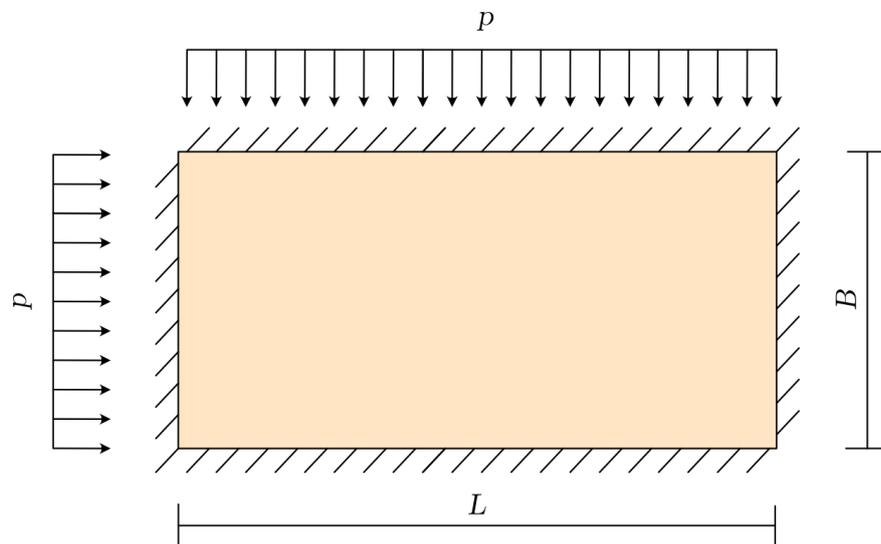
## 6 APLICAÇÕES

Neste capítulo será apresentado algumas aplicações do modelo proposto para o estudo de lajes fissuradas de concreto armado. Inicialmente o modelo de placas será validado para lajes sem a presença de danos, fazendo-se uma comparação entre resultados estáticos e dinâmicos. Em seguida o modelo de danos será aplicado e comparado com resultados obtidos na literatura. Por fim, os resultados obtidos pelo modelo são comparados com os respectivos valores experimentais numa simulação do comportamento dinâmico de uma laje ensaiada na UFPB.

### 6.1 EXEMPLO 1

Para validar a parte linear do modelo, ainda sem a implementação do modelo proposto para dano, foi utilizado um exemplo simples para o cálculo do deslocamento máximo em uma placa de aço. Com geometria retangular e dimensões  $0,8m$  por  $0,4m$ , espessura de  $0,0032m$ , de massa específica  $7850kg/m^3$ , módulo de elasticidade  $210GPa$  e coeficiente de Poisson  $0,3$ , a placa foi considerada engastada nos quatro lados e sujeita a um carregamento uniforme  $p$ , conforme mostra a figura 17.

Figura 17 – Placa retangular com laterais engastadas



Fonte: O Autor (2019)

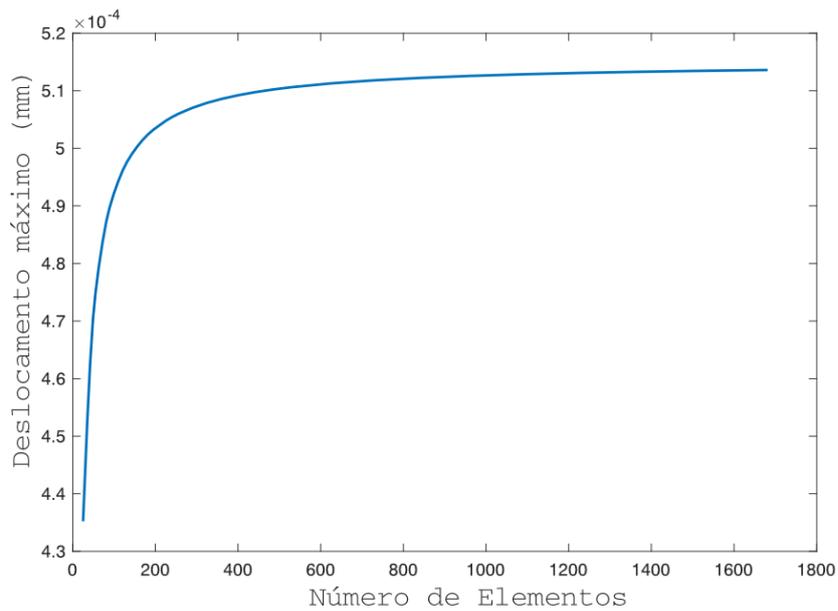
O valor do deslocamento máximo, que ocorre no centro da placa, pode ser obtido analiticamente segundo a seguinte expressão (YOUNG *et al.*, 2002):

$$y_m = \frac{0,0284pB^4}{Et^3[1,056(B/L)^5 + 1]} \quad (6.1)$$

onde  $p$  representa a carga distribuída;  $L$ ,  $B$  as dimensões;  $t$  a espessura da placa e  $E$  o Módulo de Elasticidade.

No modelo computacional, o número de elementos da malha influencia diretamente na convergência dos resultados, porém quanto maior o número de elementos maior o custo computacional. A influência do número total de elementos na malha no valor do deslocamento máximo obtido pelo MEF foi avaliada e como pode ser observado na figura 18, a partir de um refinamento com aproximadamente 700 elementos, os valores obtidos para o deslocamento máximo praticamente não se alteram.

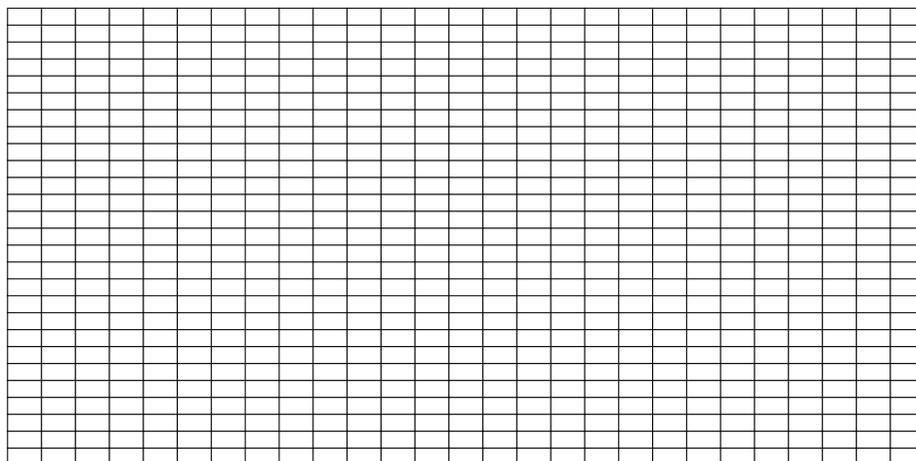
Figura 18 – Mesh convergence



Fonte: O Autor (2019)

Dessa forma, para a solução deste problema foi utilizado uma malha com 729 elementos retangulares de placa segundo demonstra a figura 19.

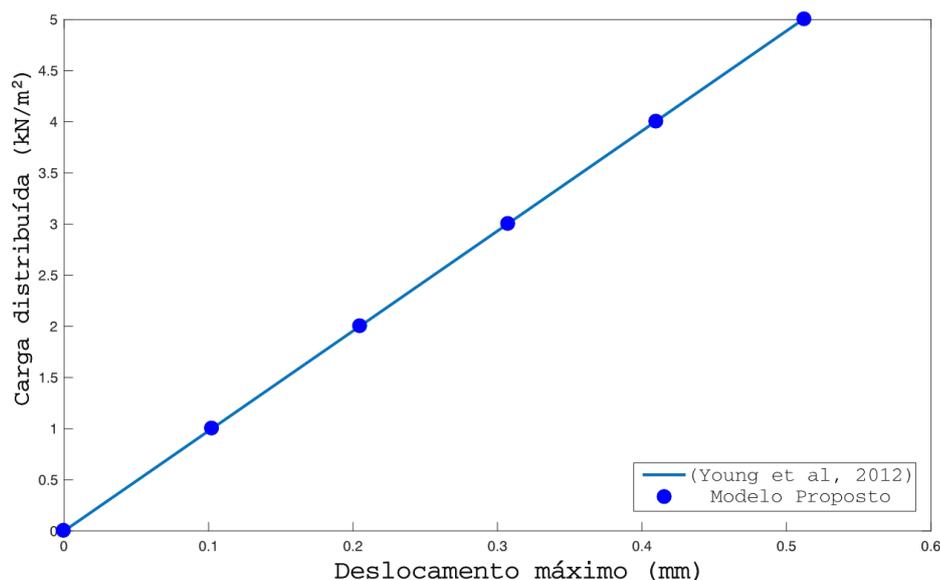
Figura 19 – Malha com 729 elementos retangulares de placa



Fonte: O Autor (2019)

O deslocamento máximo, que ocorre no centro da placa devido ao carregamento distribuído nela aplicado, foi calculado pelo modelo e pela equação 6.1 e o gráfico da figura 20 compara ambos os resultados para diversos níveis de carga, mostrando que o modelo utilizado foi capaz, praticamente, de encontrar os mesmos valores obtidos analiticamente, comprovando sua efetividade para a solução estática linear para o problema proposto.

Figura 20 – Placa retangular com laterais engastadas



Fonte: O Autor (2019)

Também para esta placa, os valores de frequências e modos de vibrações foram obtidos. Os valores adquiridos pelo modelo foram comparados com resultados descritos por Leissa (1969), que apresentou valores numéricos de frequências naturais em placas retangulares com variadas condições de apoio e diferentes dimensões obtidos analiticamente. Os resultados obtidos com o modelo implementado também foram comparados com resultados calculados computacionalmente via MEF publicados por Silva (2014), que desenvolveu um elemento de placa fina para análise de vibrações livres.

Na tabela 1 são apresentados as frequências naturais, em  $Hz$ , calculadas pelo presente trabalho, os resultados obtidos por Silva (2014) e os erros percentuais em relação aos valores de referência publicados por Leissa (1969).

Nota-se que os resultados alcançados pelo presente estudo foram mais próximos aos valores analíticos apresentados por Leissa (1969) se comparados aos resultados alcançados por Silva (2014).

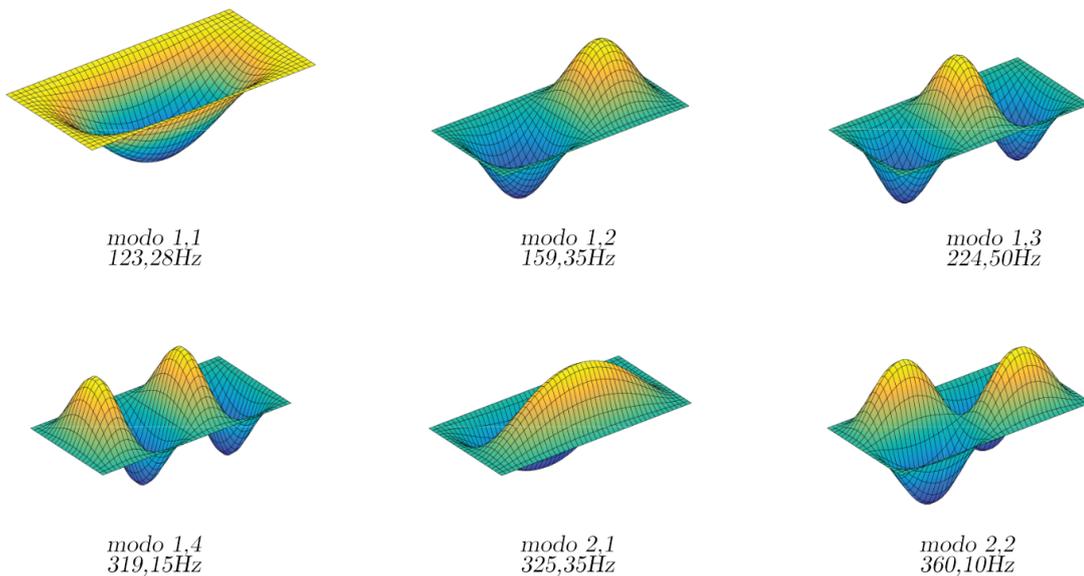
Os modos de vibração calculados para a placa, representados pela figura 21, correspondem à sequência descrita por Leissa (1969). Sendo assim, pode-se atestar a validade do modelo em problemas lineares estáticos ou dinâmicos.

Tabela 1 – Frequências naturais em  $Hz$  placa retangular engastada nas bordas

$f_i$	Referência	Presente Trabalho	Erro (%)	(SILVA, 2014)	Erro (%)
$i = 1$	123,91	123,28	0,51	122,45	1,18
$i = 2$	160,45	159,35	0,69	158,56	1,18
$i = 3$	225,33	224,50	0,37	223,05	1,01
$i = 4$	319,29	319,15	0,05	315,52	1,18
$i = 5$	323,12	325,35	0,69	318,77	1,35
$i = 6$	358,31	360,10	0,50	358,31	1,17

Fonte: O Autor (2019)

Figura 21 – Modos de vibração da placa retangular



Fonte: O Autor (2019)

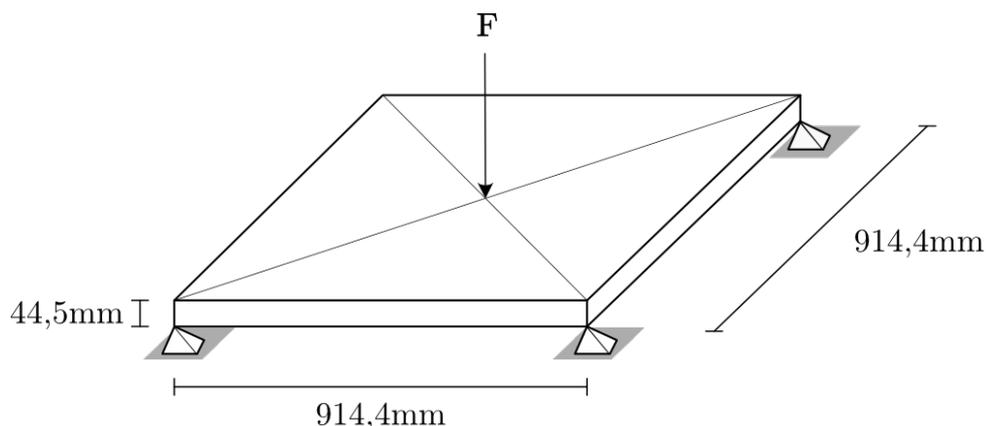
## 6.2 EXEMPLO 2

O segundo exemplo contempla a formulação não linear estática, onde o modelo de dano proposto para laje de concreto armado foi aplicado e comparado com valores extraídos da literatura ((MCNIECE, 1967)). Para esta validação foi obtida a relação carga-deslocamento no centro de uma laje, apoiada somente nos cantos e sujeita a uma carga concentrada no centro, representada pela figura 22.

A laje possui dimensões  $914,4 \times 914,4 \times 44,55mm$ , com concreto de Módulo de Elasticidade de  $E_c = 28,61GPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ , e área de aço por comprimento de concreto de  $A_a = 3,78cm^2/m$  com Módulo  $E_a = 201,30GPa$ .

Para esta validação foram utilizados os mesmos valores para os parâmetros do modelo de Mazars empregados por Lima *et al.* (2014):  $At = 0,8$ ,  $Bt = 10.000$ ,  $Ac = 1,0$  e  $Bc = 1.650$ .

Figura 22 – Laje apoiada nos cantos com carga pontual aplicada no centro

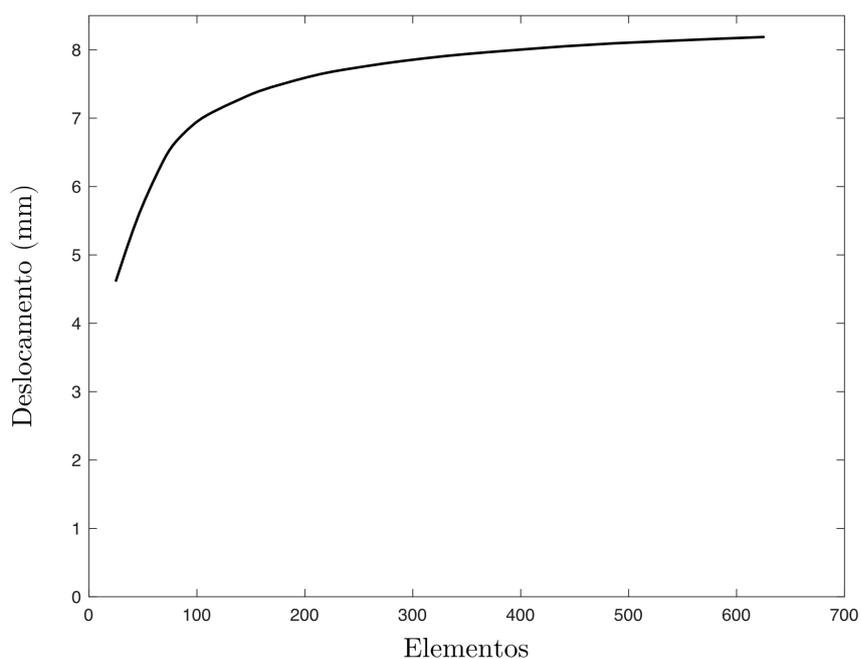


Fonte: O Autor (2019)

Algumas variáveis podem influenciar no resultado do modelo, como por exemplo o número de elementos finitos empregados e o número de camadas para cada elemento.

Assim sendo, um teste de convergência foi feito para se determinar o número elementos da discretização via MEF. Para isso, o deslocamento no centro da laje para a carga aplicada de  $14\text{kN}$  foi calculado para diferentes números de elementos, enquanto outros parâmetros da modelagem computacional foram mantidos constantes. O valor de deslocamento vertical fornecido pelo modelo praticamente se estabiliza a partir de 500 elementos, como pode-se notar no gráfico da figura 23.

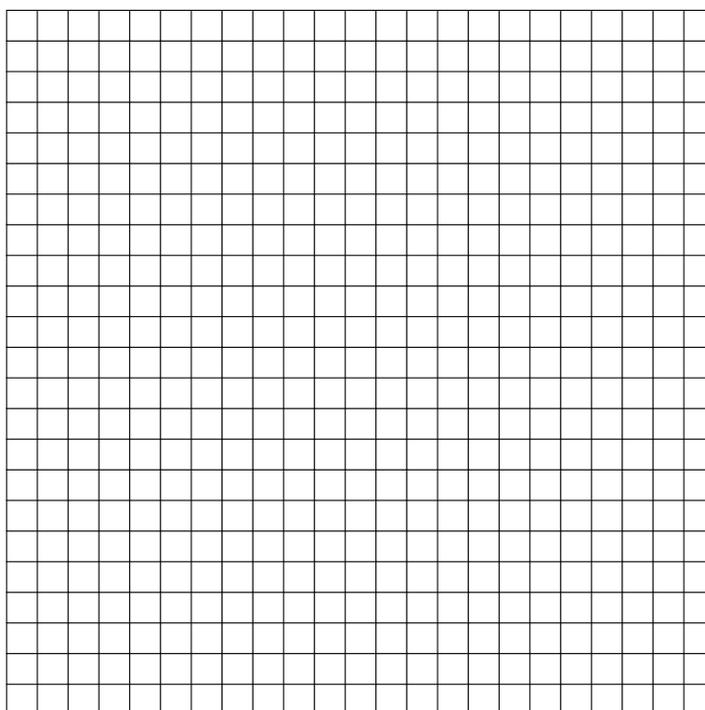
Figura 23 – Teste de convergência para o número de elementos



Fonte: O Autor (2019)

Diante disto, foi escolhida uma malha com 529 elementos retangulares de placa para os cálculos seguintes (figura 24).

Figura 24 – Malha utilizada para a laje quadrada



Fonte: O Autor (2019)

Utilizando uma metodologia análoga, o número apropriado de camadas por elemento também foi avaliado e, como ilustra a figura 25, a partir de 60 camadas por elemento, o deslocamento máximo para um dado valor de carregamento se estabilizou. Foi definido então, o número de 60 camadas por elemento, para as simulações deste problema.

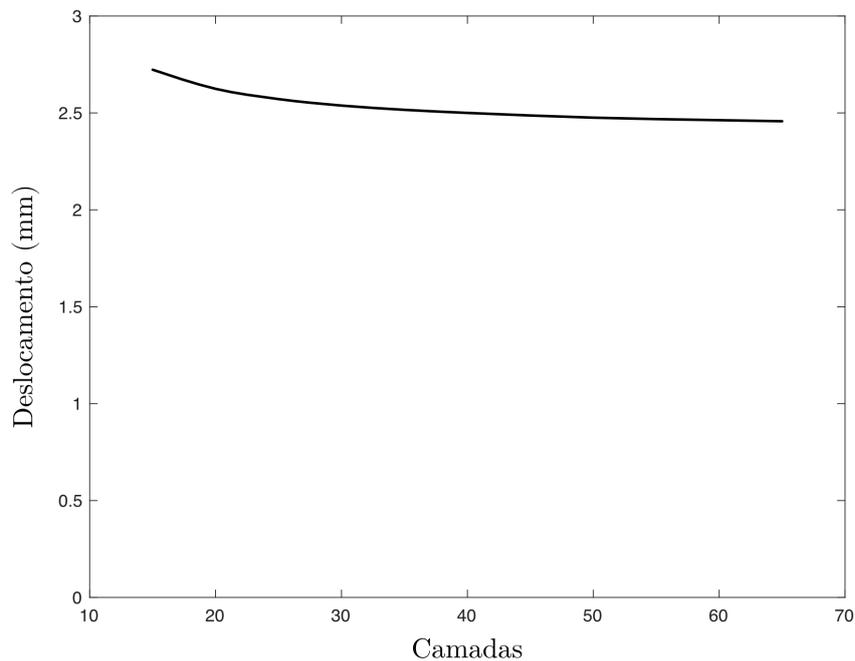
Com a definição dos parâmetros a serem adotados no modelo, as duas estratégias descritas no capítulo 5 foram empregadas para a solução do problema e, a seguir, são apresentados os resultados obtidos por cada uma delas.

### 6.2.1 Estratégia Incremental

Inicialmente foi utilizada a estratégia incremental descrita na seção 5.3.1. Com esta estratégia percebeu-se que o tamanho de passo de carga  $\Delta F$  influencia diretamente na relação carga-deslocamento, sendo necessário definir um valor  $\Delta F$  ideal. Para isto foi realizado um teste onde diferentes tamanhos de passos de carga  $\Delta F$  foram empregados para gerar a mesma curva carga-deslocamento no centro da laje, conforme mostra a figura 26).

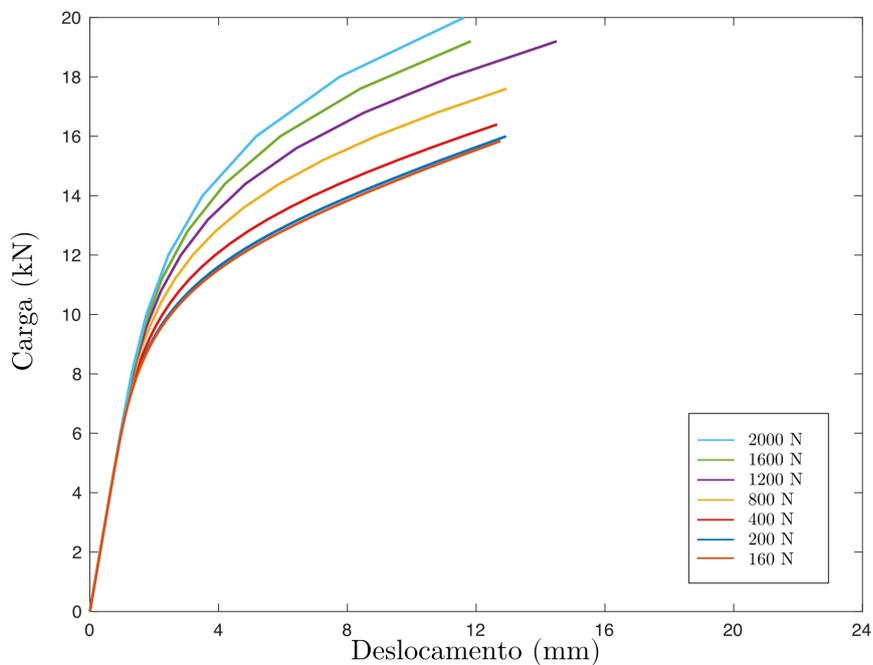
O valor do passo de carga  $\Delta F$  adotado foi de  $200N$ , pois a partir deste valor a

Figura 25 – Teste de convergência para o número de camadas por elemento



Fonte: O Autor (2019)

Figura 26 – Influência do tamanho de passo  $\Delta F$



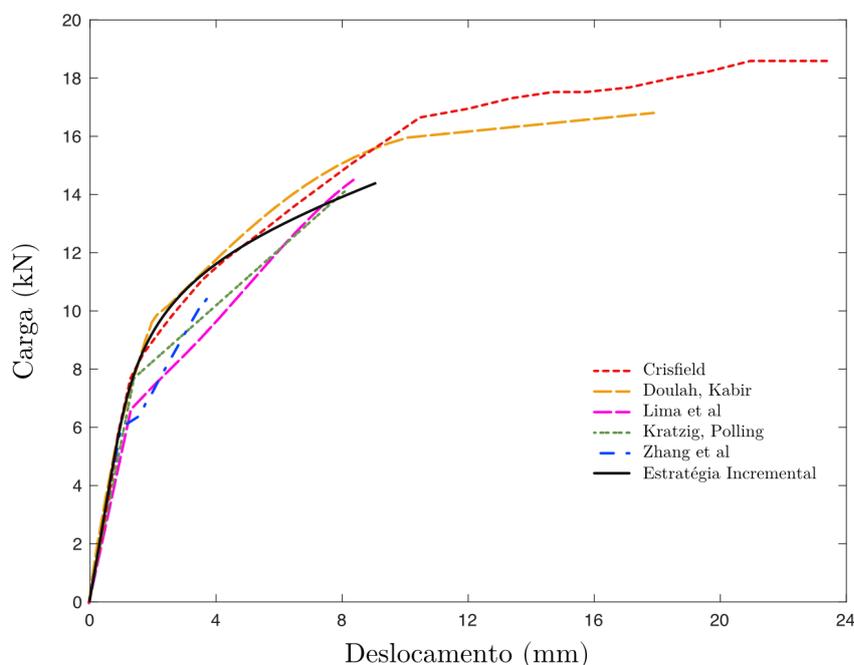
Fonte: O Autor (2019)

diferença entre as curvas obtidas foi muito pequena, mesmo com o óbvio aumento do custo computacional..

Comparando-se então os resultados obtidos com a metodologia incremental com

aqueles extraídos da literatura, chega-se à figura 27. Nessa figura pode-se observar claramente a boa concordância entre a curva de resposta para o modelo proposto e as demais fornecidas por outros autores.

Figura 27 – Comparação resultado incremental com outros autores



Fonte: O Autor (2019)

### 6.2.2 Estratégia Iterativa

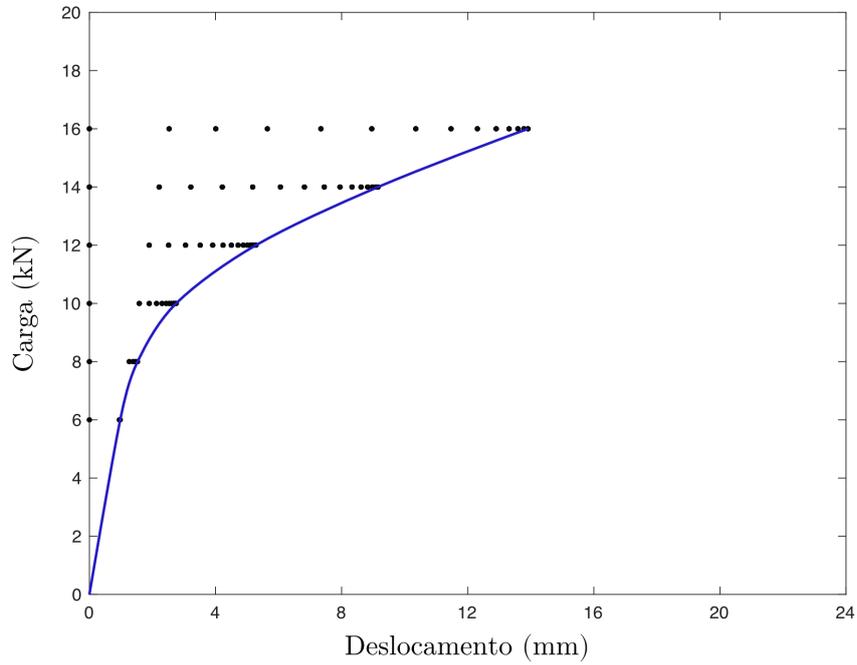
Para reduzir a interferência na escolha do tamanho do passo de carga  $\Delta F$ , o mesmo problema foi resolvido utilizando uma diferente estratégia denominada iterativa, descrita na seção 5.3.2. Nesta estratégia, um mesmo valor de carga  $F$  foi aplicado até que o erro relativo entre os valores máximos de flechas  $\delta_i(max)$  e  $\delta_{i-1}(max)$  (equação 5.11) entre duas iterações seguidas fosse menor que 1%.

Este processo foi repetido para diferentes valores de carga  $F$ , e uma curva ligando os pontos correspondentes ao valor final de deslocamento máximo  $\delta_i(max)$  para cada carga  $F$  foi gerada, como ilustra a figura 28.

Os resultados obtidos pelo modelo iterativo proposto foram comparados com outros valores numéricos extraídos da literatura e também com o ensaio experimental realizado por McNiece (1967), conforme mostra figura 29. Para facilitar a comparação entre as estratégias iterativa e incremental, os resultados dessa última foram também incluídos na figura 29

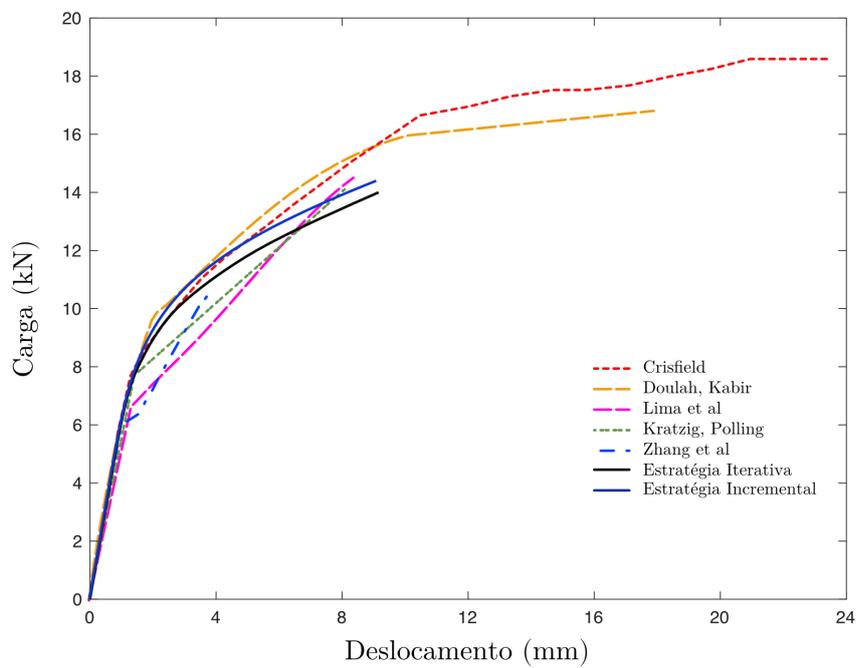
Nota-se que os resultados obtidos pelo presente trabalho, em ambas as estratégias

Figura 28 – Curva Carga-Deslocamento - Estratégia Iterativa



Fonte: O Autor (2019)

Figura 29 – Curva Carga-Deslocamento - Comparação com outros modelos

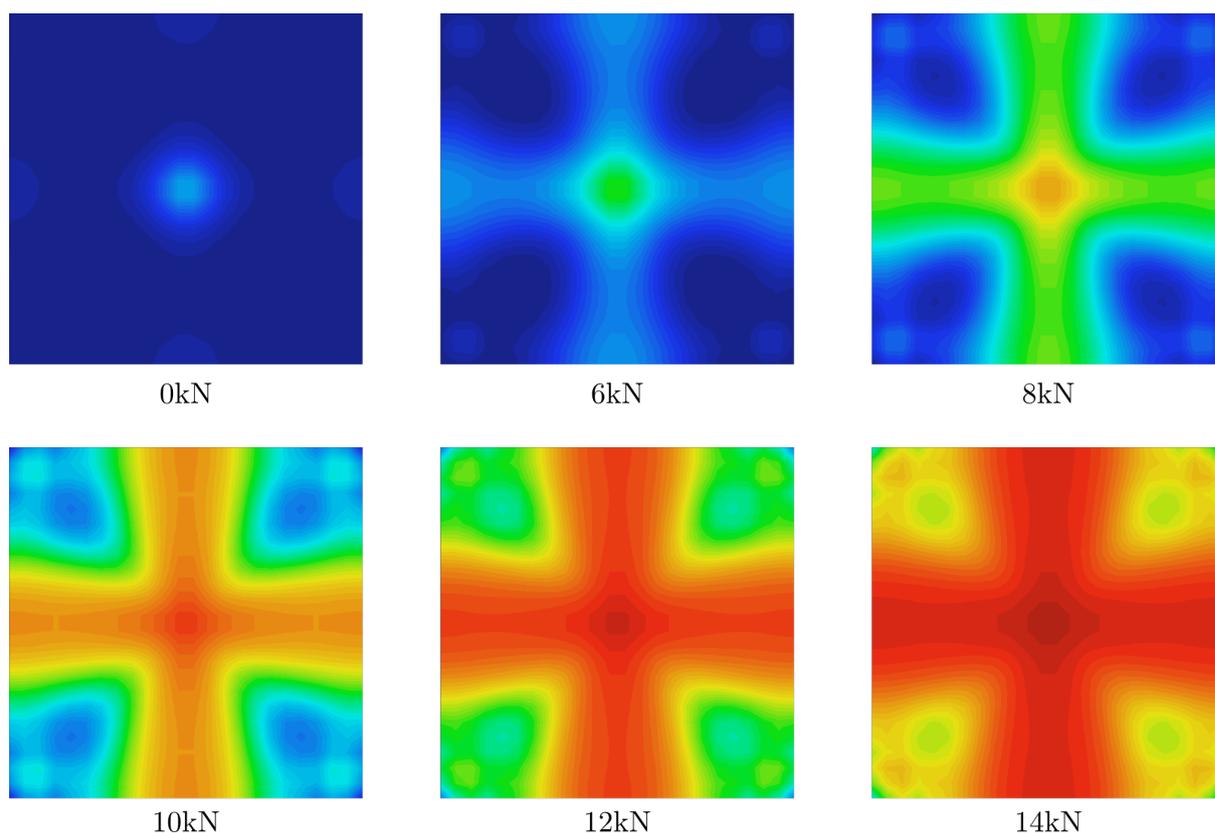


Fonte: O Autor (2019)

desenvolvidas, foram semelhantes aos demais, mostrando a relação não linear entre carga e deslocamento da laje de concreto a partir da formação de trincas.

O modelo desenvolvido também é capaz de estudar como ocorre a evolução do estado de danificação da laje em função de um carregamento crescente, conforme mostra a figura 30. Nessa figura a escala de cores vai do azul escuro, que aponta para regiões íntegras da estrutura, até o vermelho escuro, que está associado a maiores níveis de fissuração. Este mesmo padrão da evolução de trincas foi encontrado por McNiece (1967) (ver figura 31), que testou experimentalmente esta mesma laje.

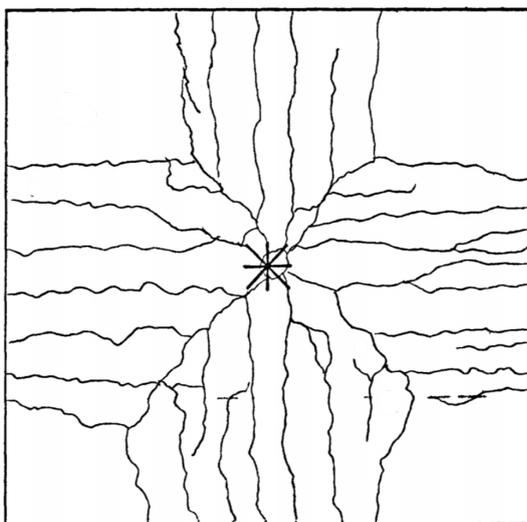
Figura 30 – Evolução de danos na laje obtidos pelo modelo



Fonte: O Autor (2019)

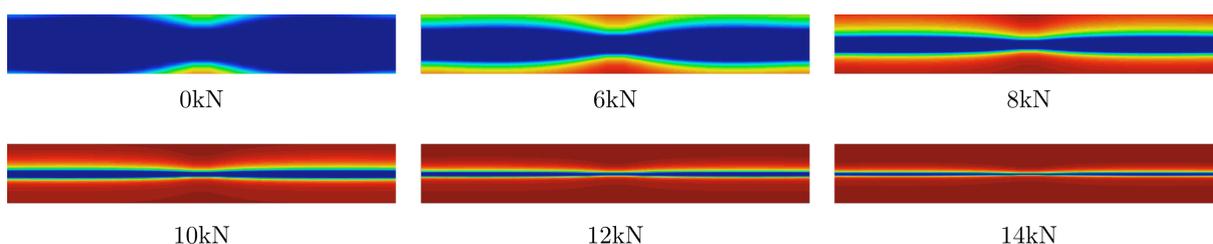
A propagação dos danos numa seção transversal passando pelo centro da laje é mostrada pela figura 32. Essa figura tem a mesma escala de cores relatada para a figura 30. Como o modelo aplica a lei de dano para tração na parte inferior e para compressão na parte superior da seção na laje, é possível observar que na parte inferior a danificação ocorre mais rapidamente em comparação à parte superior. Além disso, observa-se que a região próxima à linha neutra é última a ser afetada, conforme já era esperado.

Figura 31 – Evolução de danos obtidos experimentalmente



Fonte: McNiece (1967)

Figura 32 – Evolução de danos em uma seção da placa



Fonte: O Autor (2019)

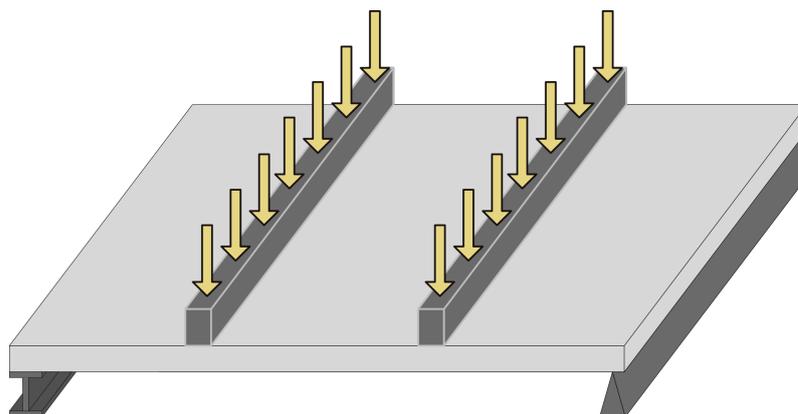
### 6.3 EXEMPLO 3

Neste exemplo, uma laje de concreto armado ensaiada em laboratório foi utilizada para validar o modelo proposto. Neste ensaio o comportamento da primeira frequência e do primeiro modo de vibração da laje foi estudado em função do estado de fissuração da mesma.

O ensaio experimental foi realizado na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), onde uma laje de concreto armado foi fabricada em laboratório, sem a utilização de aditivos, com resistência ( $f_{ck}$ ) aproximada de  $25MPa$ . A estrutura tinha  $3.0m$  de comprimento,  $1.5m$  de largura e  $8,0cm$  de espessura e foi apoiada no suporte utilizando perfis metálicos unidos com argamassa simples.

Em um dos suportes de concreto, um tubo metálico foi colado com argamassa de forma que um lado da laje ficou apoiado apenas nos perfis. No outro lado o apoio foi feito com um perfil  $H$  sobre um tubo metálico. Simulando um apoio de primeiro gênero de um lado e do segundo gênero no outro, conforme demonstra a figura 33

Figura 33 – Laje ensaiada em laboratório



Fonte: O Autor (2019)

Testes de impacto foram realizados para a obtenção dos modos de vibração da laje. A cada teste o acelerômetro registrava os valores em um ponto diferente na estrutura, e outro acelerômetro foi mantido fixo em um ponto para ser utilizado como referência. Este teste foi repetido em 42 pontos distintos distribuídos na laje.

Antes da aplicação das cargas os parâmetros dinâmicos da laje da estrutura sem a presença de danos foram obtidos. Em seguida, um sistema para transmissão de carga foi montado utilizando três perfis metálicos, sendo dois transversais e o terceiro paralelo a maior dimensão laje, simulando um carregamento de flexão pura na parte central da estrutura. Uma placa metálica foi colocada sobre o perfil transversal e, por fim, uma célula de carga com o macaco hidráulico foi posicionada sobre ela, conforme mostra a figura 34.

Figura 34 – Esquema de transmissão de carga



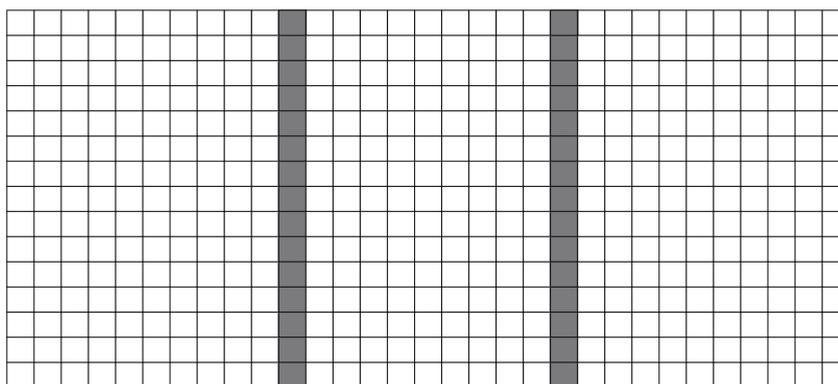
Fonte: O Autor (2019)

A laje então foi sujeita a três níveis de carregamento:  $8kN$ ,  $16kN$  e  $22kN$ . Após cada nível, o carregamento foi removido e os testes de impacto foram realizados. Assim os valores de aceleração foram obtidos e registrados. Também foram feitos registros fotográficos para a análise do mapa de fissuração e sua correlação com o comportamento das frequências naturais de vibração.

### 6.3.1 Modelo Computacional

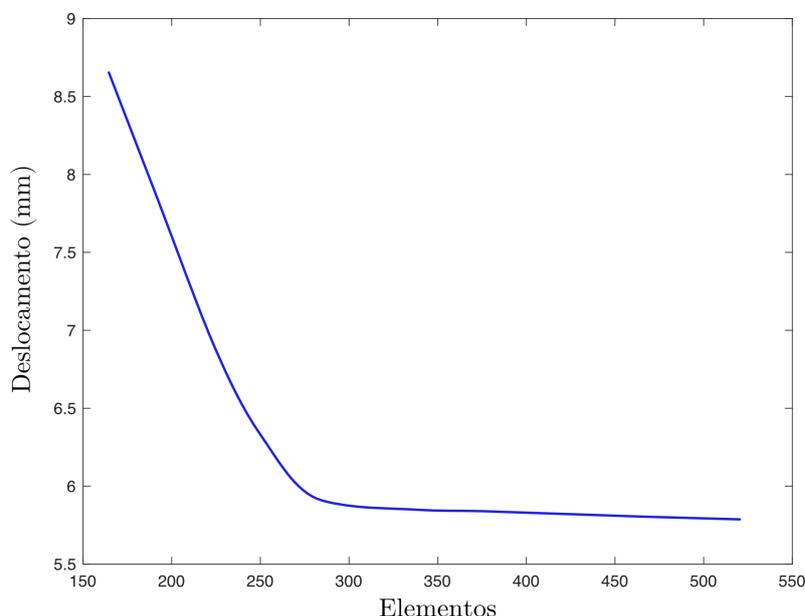
Com o objetivo de reproduzir o ensaio experimental e buscar uma relação entre a redução da primeira frequência natural de vibração em função da evolução das trincas na laje, o modelo computacional composto por uma malha de 495 elementos retangulares de placa foi definido através de uma metodologia de análise de convergência semelhante à aplicada nos exemplos anteriores, conforme sugere a análise de deslocamentos verticais no centro da laje mostrada na figura 36.

Figura 35 – Malha computacional com 495 elementos



Fonte: O Autor (2019)

Figura 36 – Convergência da malha computacional



Fonte: O Autor (2019)

Os parâmetros do modelo de Mazars adotados para esse exemplo foram semelhantes a aqueles usados no exemplo anterior, sendo eles: ( $At = 0,8$ ,  $Bt = 10000$ ,  $Ac = 0.8$  e  $Bc = 1000$ ).

O comportamento estático previsto pelo modelo foi validado através do cálculo do deslocamento máximo no centro da laje em função do carregamento aplicado. Para esta solução, a laje pode ser representada por uma viga (ver figura 37), cujo o deslocamento no seu centro ( $y_{centro}$ ) quando um carregamento excêntrico e simétrico em relação aos apoios é aplicado tem solução analítica conhecida:

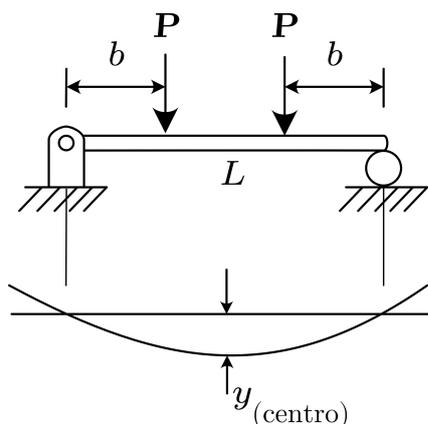
$$y_{centro} = \frac{2Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (6.2)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade,  $I$  o momento de inércia da seção da viga,  $F$  a carga aplicada.

Os resultados obtidos pelo modelo proposto e pela solução conhecida estão representados na figura 38. Nota-se que o deslocamento no centro da laje obtido pelo modelo na parte linear foi o mesmo calculado pela expressão teórica. Já o resultado para o deslocamento vertical máximo após o surgimento de trincas (trecho não linear da figura 38) apresenta um aspecto semelhante a aquele apresentado no exemplo anterior. Entretanto não se dispunha de resultados experimentais para a efetiva comparação.

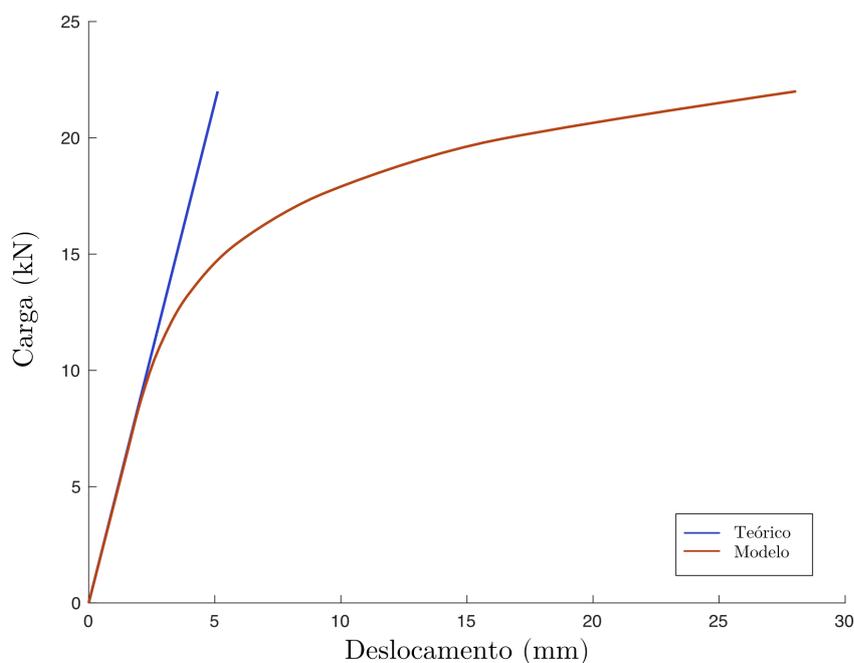
Em seguida, os valores das duas primeiras frequências naturais foram obtidos computacionalmente, e comparados com os respectivos experimentais. As duas primeiras

Figura 37 – Deslocamento no centro de uma viga bi apoiada



Fonte: O Autor (2019)

Figura 38 – Deslocamento máximo na laje



Fonte: O Autor (2019)

frequências naturais obtidas e o erro relativo entre os valores experimentais e numéricos estão descritos na tabela 2 a seguir, evidenciando o bom desempenho do modelo proposto. onde o índice subscrito  $i$  representa qual a frequência e o índice sobrescrito indica a carga que foi aplicada e meio de obtenção, modelo computacional (MOD) ou experimental (EXP).

Após a calibração do modelo íntegro, a implementação de carga foi feita no modelo, simulando o carregamento distribuído que a estrutura real ensaiada em laboratório foi submetida. O modelo de dano proposto foi então utilizado e a estratégia iterativa foi

Tabela 2 – Frequências naturais placa íntegra em  $Hz$ 

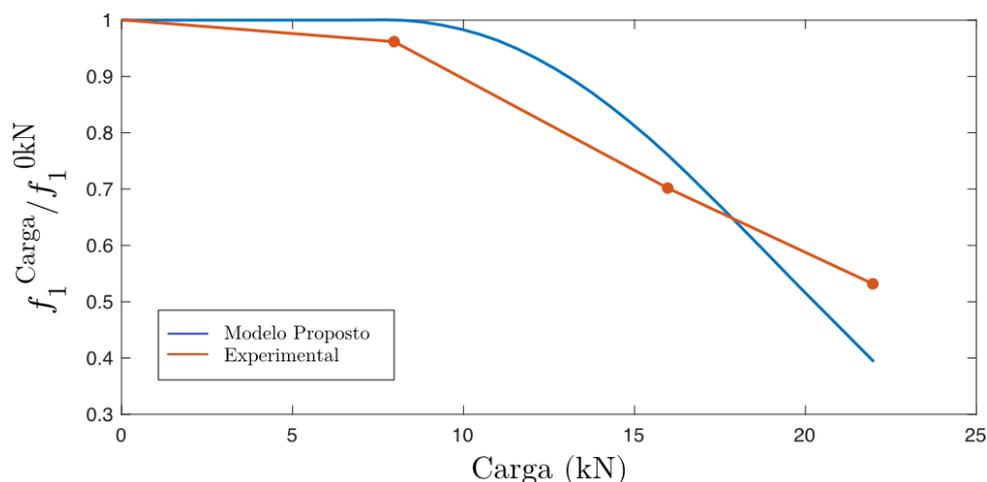
	$f_i^{0,EXP}$	$f_i^{0,MOD}$	Erro (%)
$i=1$	16,42	16,25	0,94
$i=2$	31,52	32,08	1,79

Fonte: O Autor (2019)

aplicada. Assim, o Módulo de Elasticidade de cada elemento foi atualizado a cada iteração até o limite de erro estabelecido ser alcançado.

Diante da evolução de danificação da laje no modelo computacional, os valores da primeira frequência natural foram obtidos e registrados. No gráfico da figura 39 os valores encontrados pelo modelo e pelo experimento podem ser comparados. Pode-se observar que o modelo proposto conseguiu alcançar um comportamento semelhante ao observado experimentalmente.

Figura 39 – Redução da primeira frequência em função do carregamento

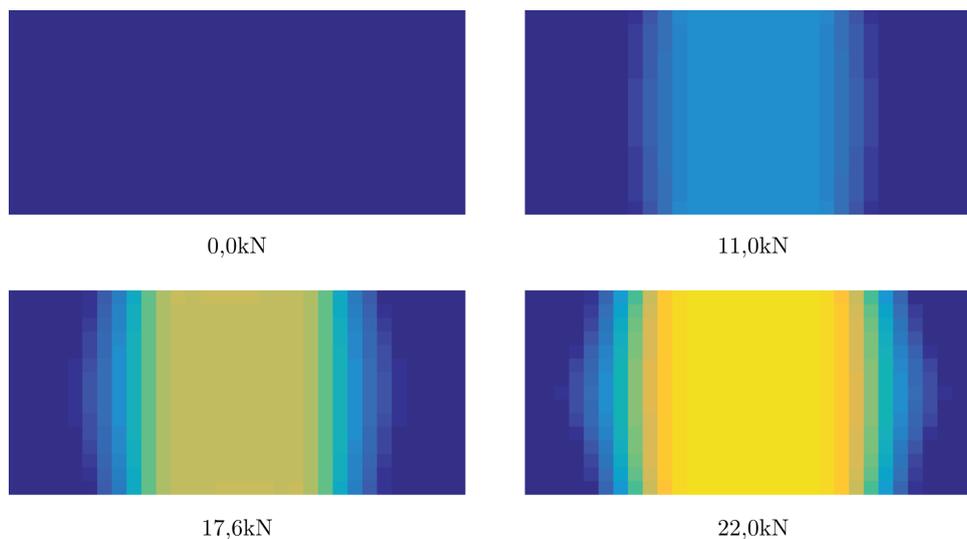


Fonte: O Autor (2019)

Enquanto no experimento a redução da primeira frequência após a aplicação da carga de  $8kN$  foi de cerca de 4%, no modelo computacional a influência dos danos na estrutura ocorreu logo após esse carregamento, entre  $8kN$  e  $10kN$ . No segundo valor de carga estudado experimentalmente,  $16kN$ , a redução da frequência na estrutura real foi de cerca de 30% enquanto no modelo o valor obtido foi de 24%. Já no último valor de carga aplicado,  $22kN$ , o modelo obteve uma redução na ordem de 61%, enquanto no ensaio experimental 47%.

A evolução dos danos na laje obtida pelo modelo está representada na figura 40, e, como esperado, na região central da laje onde ocorre as maiores deformações é o local onde a fissuração ocorre com maior intensidade, e conseqüentemente onde ocorre o colapso da estrutura.

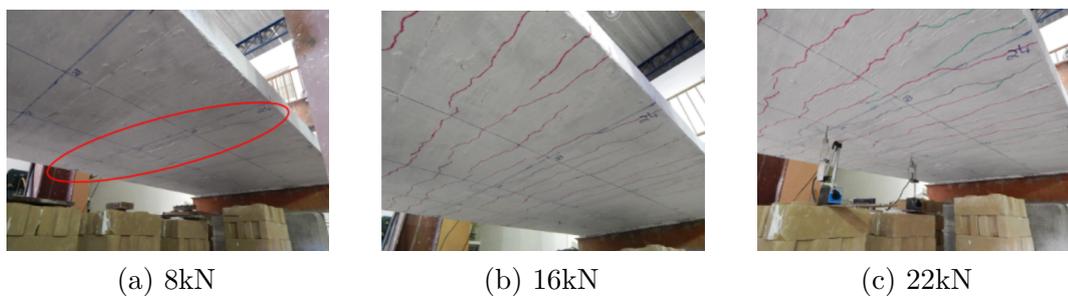
Figura 40 – Evolução dos danos na laje obtida pelo modelo



Fonte: O Autor (2019)

De modo similar ao que ocorreu no teste computacional descrito anteriormente, a evolução das fissuras na laje ensaiada em laboratório ocorreu de maneira muito semelhante. No primeiro estágio de carregamento estudado,  $8kN$ , foi observada uma trinca no centro da laje. Nos demais estágios fissuras se propagaram ao longo de toda a laje, como ilustra a figura 41.

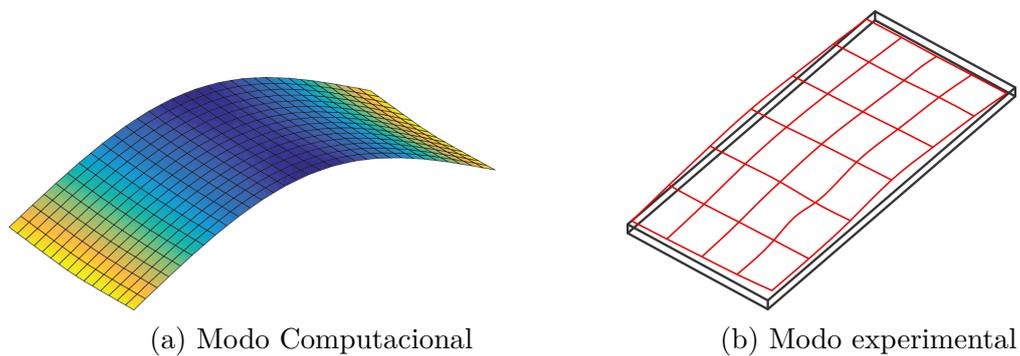
Figura 41 – Evolução dos danos na laje obtida experimentalmente



Fonte: O Autor (2019)

Observou-se também que primeiro modo de vibração obtido pelo modelo, representado pela figura 42a, tem a mesma forma que o modo da estrutura real obtido pelo ensaio realizado em laboratório, mostrado na figura 42b.

Figura 42 – Primeiro modo de vibração da laje



Fonte: O Autor (2019)

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho desenvolveu um modelo computacional para a simulação do comportamento mecânico de lajes de concreto armado fissuradas utilizando o Método dos Elementos Finitos e propondo uma adaptação ao modelo de Mazars para a sua aplicação em lajes sujeitas à flexão.

Apesar da consideração de algumas hipóteses para a simplificação do problema, o modelo proposto obteve resultados satisfatórios se comparados a outros estudos numéricos e experimentais encontrados na literatura.

A implementação computacional realizada foi devidamente validada e os estudos de convergência da malha computacional foram executados e, as duas estratégias desenvolvidas, incremental e iterativa, alcançaram o objetivo de reproduzir o comportamento mecânico de lajes de concreto armado, considerando as fissuras.

As duas estratégias podem ser consideradas complementares, a incremental é capaz de prever o comportamento mecânico para diversos níveis de carga, sendo a iterativa mais precisa para um valor de carga. Conclui-se portanto, que o ideal é utilizar a primeira estratégia para determinar os valores de carga para aplicação da segunda.

O modelo computacional desenvolvido foi capaz de reproduzir a correlação entre a queda da frequência natural em função da perda de rigidez de uma estrutura, conforme ocorreu no ensaio experimental, constatando seu potencial promissor na utilização do mesmo para aplicação e desenvolvimento de ferramentas para a identificação e monitoramento de danos estruturais.

Entretanto, para o aprimoramento do modelo proposto, algumas melhorias podem ser implementadas, como por exemplo um procedimento para o cálculo da posição correta da superfície neutra. Numa estrutura real de concreto armado, a superfície neutra de uma laje não coincide com sua superfície média.

Também algumas estratégias para a distribuição aleatória do o Módulo de Elasticidade do concreto armado podem ser desenvolvidas, partindo do princípio que o concreto não é totalmente homogêneo. A introdução de uma análise não-determinísticas tornariam o modelo mais realístico pois agregaria ao mesmo características que são inerentes a materiais como o concreto armado.

Finalmente destaca-se que a partir deste trabalho, simulações dinâmicas para diversos cenários de fissuração em lajes podem ser executadas para fins de utilização em ferramentas que empregam inteligência computacional para a identificação e localização de danos em estruturas.

## REFERÊNCIAS

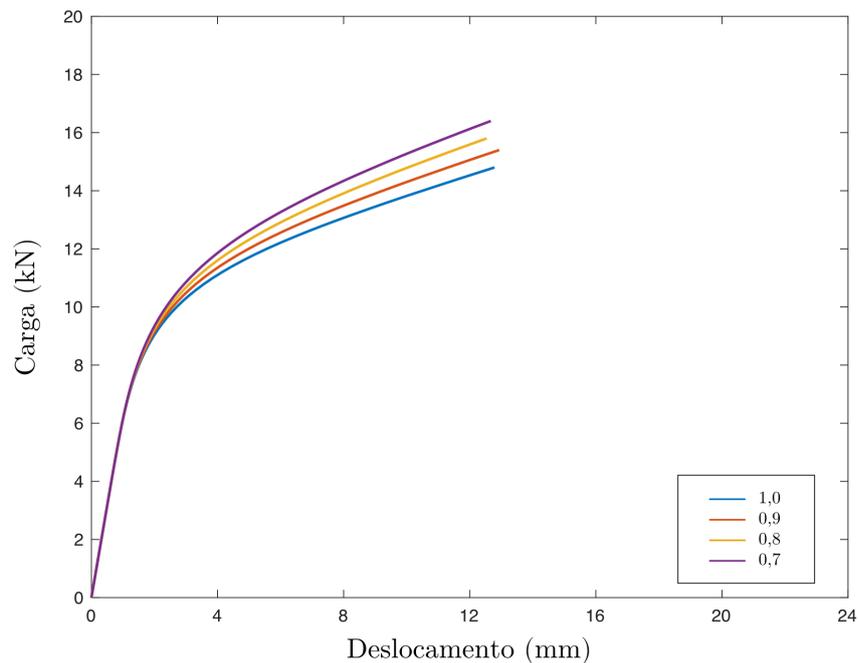
- ÁLVARES, M. da S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ALVARES, M. S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para análise de estruturas de barras em concreto armado**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- AMARAL, R. O. **Análise computacional termo-mecânica de estruturas de concreto sujeitas a temperaturas elevadas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.
- ASSIS, L. S. de. **Avaliação da influência da temperatura no dano do concreto via modelagem computacional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2016. v. 1. ISBN 978-0-9790049-5-7.
- ERAKY, A. *et al.* Damage detection of plate-like structures based on residual force vector. **HBRC Journal**, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 255–262, 2016.
- FU, Y. *et al.* A two-step approach for damage identification in plates. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 22, n. 13, p. 3018–3031, 2016.
- GUELLO, G. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- HULT, J. Cdm-capabilities, limitations and promises. In: **Mechanisms of deformation and fracture**. [S.l.]: Elsevier, 1979. p. 233–247.
- KACHANOV, L. Time of the rupture process under creep conditions, izy akad. **Nank SSR Otd Tech Nauk**, v. 8, p. 26–31, 1958.
- KACHANOV, L. On the brittle fracture of a thin plastic interlayer in creep conditions. In: **Studies in Applied Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1984. v. 6, p. 191–199.
- LEISSA, A. W. **Vibration of plates**. [S.l.], 1969. 353 p.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. **Mécanique des matériaux solides**. [S.l.]: Dunod, 1985. ISBN 9782040157869.
- LIMA *et al.* Finite difference energy method for nonlinear numerical analysis of reinforced concrete slab using simplified isotropic damage model. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 7, n. 6, p. 940–964, 2014.
- MARIGO, J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 861–874, 1985.

- MAZARS, J. **Application de la mecanique de l'endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du beton de structure**. Tese (Doutorado) — Universite Paris VI, Paris, 1984.
- MAZARS, J. A description of micro and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**, p. 729 – 737, 1986.
- MCNIECE, G. M. **Elastic-Pastic bending of plates and slabs by finite element method**. Tese (Doutorado) — London University, London, 1967.
- MURAKAMI, S. Effect of cavity distribution in constitutive equations of creep and creep damage. In: **EUROMECH Colloquium on Damage Mechanics, Cachan, France**. [S.l.: s.n.], 1981.
- PIMENTEL, R. *et al.* Damage detection assessment in reinforced concrete slabs using impact tests. **Procedia engineering**, Elsevier, v. 199, p. 1976–1981, 2017.
- PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1984.
- PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- RASHID, Y. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear engineering and design**, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 334–344, 1968.
- ROBERTS, G. D. **Simplified method to nonlinear analysis of reinforced concrete in pure flexure**. Dissertação (Mestrado) — University of the Witwatersrand, 2015.
- SILVA, A. G. **Um Elemento Finito de Placa Fina para análise de Vibrações Livres**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2014.
- SIMO, J. C.; JU, J. Strain-and stress-based continuum damage models—i. formulation. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 23, n. 7, p. 821–840, 1987.
- SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780471429890.
- TAI, W. H. Plastic damage and ductile fracture in mild steels. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 853–880, 1990.
- THOMAZ, E.; LANDI, F. R. **Trincas em edifícios: causas, prevenção e recuperação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1986.
- WU, C. T.; WANG, H. P. An enhanced cell-based smoothed finite element method for the analysis of reissner–mindlin plate bending problems involving distorted mesh. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 288–312, 2013.
- YOUNG, W. C. *et al.* **Roark's formulas for stress and strain**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2002. v. 7.

## ANEXO A – ESTUDO PARAMÉTRICO

A influência de cada um dos parâmetros do modelo de Mazars ( $At$ ,  $Bt$ ,  $Ac$  e  $Bc$ ) foi estudada, para tanto cada parâmetro foi analisado separadamente. Em cada análise, curvas carga-deslocamento foram geradas com a variação de um parâmetro enquanto os outros foram mantidos constantes. As curvas das figuras 43 e 44 mostram a interferência dos parâmetros  $At$  e  $Ac$ .

Figura 43 – Influência do parâmetro  $At$

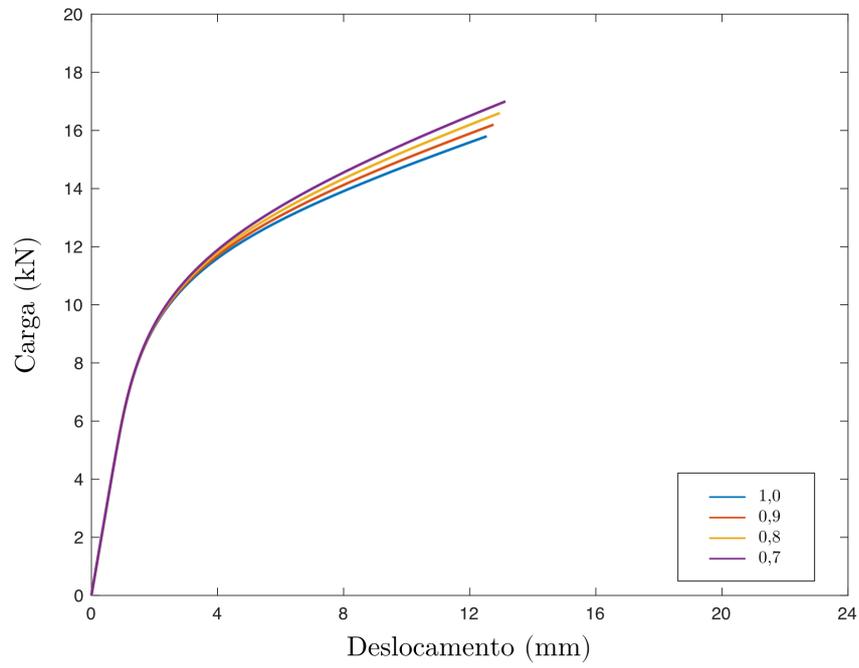


Fonte: O Autor (2019)

Os parâmetros  $Bt$  e  $Bc$  afetam diretamente na velocidade da propagação dos danos, ou seja, quanto maior os valores de  $Bt$  e  $Bc$  maiores serão os deslocamentos para uma mesma carga, como sugerem as figuras 45 e 46.

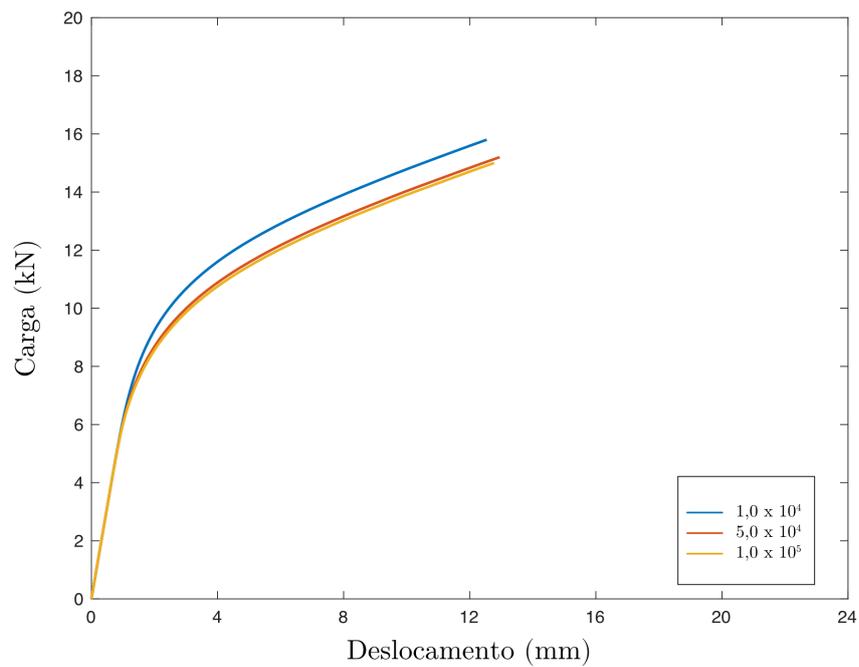
Como foi possível observar, o tamanho do passo de carga  $\Delta F$  foi a variável que mais influenciou a resposta final no modelo proposto e, com o objetivo de reduzir os erros causados pela escolha inadequada desta variável a estratégia iterativa descrita na seção 5.3.2 foi desenvolvida, e os resultados obtidos são mostrados a seguir.

Figura 44 – Influência do parâmetro  $A_c$

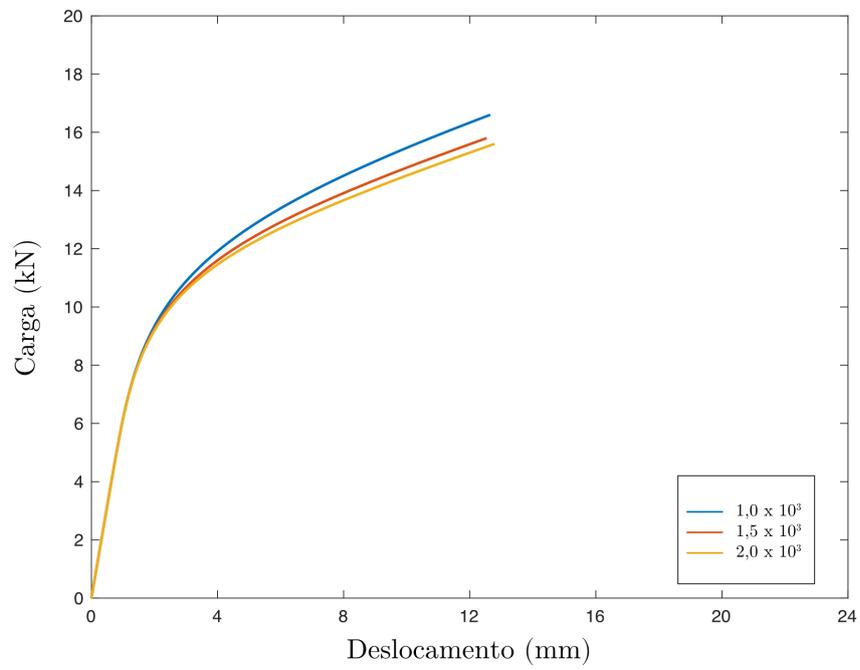


Fonte: O Autor (2019)

Figura 45 – Influência do parâmetro  $B_t$



Fonte: O Autor (2019)

Figura 46 – Influência do parâmetro  $Bc$ 

Fonte: O Autor (2019)