

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Junior Lamas Faria

Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Birramificadas

Juiz de Fora

2020

Junior Lamas Faria

Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Birramificadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa.

Coorientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro.

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Faria, Junior Lamas.

Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Birramificadas /
Junior Lamas Faria. – 2020.

83 f. : il.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa.

Coorientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Curva Algebróide. 2. Singularidade. 3. Semigrupo. I. Feitosa,
Frederico Sercio, orient. II. Ribeiro, Beatriz Casulari da Motta, coorient.
III. Título.

Junior Lamas Faria

Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Birramificadas

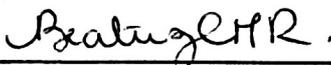
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof^ª. Dra. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro -
Coorientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof^ª Dra. Flaviana Andrea Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. João Helder Olmedo Rodrigues
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Frederico Sercio, pela dedicação, paciência e convivência que tivemos durante a elaboração deste trabalho. À minha coorientadora Beatriz Casulari, pelas orientações iniciais, correções e observações valiosas.

À professora Flaviana e ao professor João Hélder por aceitarem o convite para compor a banca examinadora.

A todos os professores do Mestrado Acadêmico em Matemática da UFJF pelo crescimento pessoal e profissional que me proporcionaram ao longo do curso.

À CAPES e à UFJF pelo fundamental apoio financeiro, sem o qual a conclusão do curso de mestrado e a elaboração deste trabalho não seriam possíveis!

Aos coordenadores Grigori e Eduard, pelas orientações prestadas durante o curso.

À Paula, por sempre atender nossas solicitações à secretaria do mestrado da melhor maneira possível.

Aos colegas do mestrado, pelos momentos únicos que vivenciamos, pela companhia nos estudos e pelo incentivo nos momentos mais difíceis do curso.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática do IF Sudeste MG - Campus Rio Pomba, pela formação de graduação. Em especial à professora Poliana, por me ensinar os primeiros conceitos de Álgebra quando me orientou na Iniciação Científica do PICME e aos professores Marcos Barros e Marcos Pavani, pelas cartas de recomendação enviadas ao programa de mestrado da UFJF.

Aos meus pais Francisco e Francisca, pelo exemplo de vida, dedicação, todo amor e suporte que sempre me ofereceram!

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é determinar o semigrupo associado às valorizações ω_1 e ω_2 correspondentes aos ramos f_1 e f_2 de uma curva algebróide birramificada $f = 0$ com um ponto singular P sobre um corpo K algebricamente fechado. Determinar tal semigrupo, como veremos, é equivalente a determinar seus pontos maximais. Para tal, estudaremos dois casos: em que os ramos possuem tangentes distintas em P e quando a tangente é a mesma, caso que será reduzido ao primeiro a partir de uma sequência de explosões.

Palavras-chave: Curva Algebróide. Singularidade. Semigrupo.

ABSTRACT

The main objective of this work is to determine the semigroup associated with the valuations ω_1 e ω_2 corresponding to branches f_1 and f_2 of a algebroid curve $f = 0$ with two branches and a singular point P on an algebraically closed field K . Determining such a semigroup, as we shall see, is equivalent to determining its maximal points. To this end, we will study two cases: in which the branches have distinct tangents in P and when the tangent is the same, the which case it will be reduced to the first from a blowing-up sequence.

Key-words: Algebroid Curve. Singularity. Semigroup.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Diagrama 1 - Diagrama do Anel de Coordenadas	40
Gráfico 1 - Teorema 4.2	46
Gráfico 2 - Propriedade A	47
Gráfico 3 - Propriedade B	48
Gráfico 4 - Caso 1 do Teorema 5.2	52
Gráfico 5 - Teorema 5.3	55
Gráfico 6 - Afirmação 5.2	70
Gráfico 7 - Afirmação 5.4	74

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	CONCEITOS BÁSICOS	11
2.1	ANÉIS E IDEAIS	11
2.1.1	Anel local, localização e fecho inteiro	11
2.1.2	Valorização discreta e anel de valorização discreta	13
2.2	SÉRIES DE POTÊNCIAS EM DUAS VARIÁVEIS	15
2.2.1	Teorema da Preparação de Weierstrass	17
2.3	CURVAS ALGEBRÓIDES	20
2.3.1	O anel de coordenadas de uma curva algebróide plana	21
2.3.2	Índice de interseção de curvas algebróides	22
2.4	VALORIZAÇÃO EM UM CORPO DE FUNÇÕES	23
3	SEMIGRUPOS E SEQUÊNCIAS DE APÉRY	25
4	SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS ALGEBRÓIDES	34
4.1	SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS UNIRRAMIFICADAS	34
4.2	SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS BIRRAMIFICADAS	40
4.3	O semigrupo G no caso de curvas birramificadas	44
5	PROPRIEDADES DOS PONTOS MAXIMAIS	50
5.1	SIMETRIA DOS PONTOS MAXIMAIS	51
5.2	CURVAS BIRRAMIFICADAS COM TANGENTES DISTINTAS	57
5.3	CURVAS BIRRAMIFICADAS COM TANGENTE ÚNICA	59
5.3.1	Curvas e explosões	59
5.3.2	Caso 1	63
5.3.3	Caso 2	66
5.3.4	Caso 3	72
6	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Sejam $f \in K[[X, Y]]$ e $P = (a, b)$ um ponto singular de f , ou seja, tal as derivadas parciais de f em P , $f_X(P)$ e $f_Y(P)$, são simultaneamente nulas, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, podemos supor que o ponto P seja a origem de um sistema de coordenadas. Definimos em $K[[X, Y]]$ uma relação de equivalência e dizemos que $f, g \in K[[X, Y]]$ são equivalentes se existir $u \in K[[X, Y]]$ invertível, tal que $f = u \cdot g$. Chamamos de curva algebróide cada classe dessa relação obtida. Dizemos que f é uma curva unirramificada quando f é irredutível em $K[[X, Y]]$ e dizemos que f é reduzida quando $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$, com $f_i \neq f_j$, ou seja, quando f_i e f_j não são associados se $i \neq j$. Chamamos de ramo de f cada irredutível f_i da decomposição de f em $K[[X, Y]]$.

O objetivo principal, sob essas hipóteses, é estudar o semigrupo de valorizações G associado ao ponto singular P . Vamos nos restringir ao caso em que a curva possui dois ramos em P , isso significa que $f = f_1 \cdot f_2$ é a decomposição irredutível de f no anel de série de potências $K[[X, Y]]$.

Para o caso de curvas unirramificadas, Apéry [2] mostrou em 1946 que G é um semigrupo simétrico. Já em 1967, Azevedo [4] demonstrou, em característica zero, que G cresce fortemente e que a sequência dos elementos de G onde o máximo divisor comum varia é uma sequência agradável e gera o semigrupo G . Angermüller [1] generalizou os resultados de Azevedo para corpos algebricamente fechados quaisquer e apresentou a seguinte caracterização: G é semigrupo de uma curva algebróide plana irredutível se, e somente se, G cresce fortemente.

Neste trabalho, estudamos em especial os resultados de Garcia [8] e [9] que, embasados na caracterização de Angermüller, utilizam propriedades das sequências de Apéry para estudar as propriedades do semigrupo G no caso de curvas algebróides birramificadas, com objetivo de determinar fórmulas para obtê-lo.

Seja $\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}$ o anel de coordenadas de f na singularidade, denotamos por ω_1 e ω_2 , respectivamente, as valorizações discretas correspondentes aos ramos f_1 e f_2 . Definimos o semigrupo de valorizações como sendo $G = \{(\omega_1(\bar{g}), \omega_2(\bar{g})) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, onde $\omega_1(\bar{g})$ e $\omega_2(\bar{g})$ são as imagens de um elemento $g \in K[[X, Y]]$, respetivamente, nos anéis de coordenadas $\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$ e $\mathcal{O}_{f_2} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2 \rangle}$. Denotamos por v número de interseção dos dois ramos, ou seja, $v = I(f_1, f_2) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, f_2 \rangle}$.

Projetando G nos eixos coordenados, obtemos os semigrupos G_1 e G_2 que são associados respectivamente aos ramos f_1 e f_2 da decomposição de f em $K[[X, Y]]$. Mostramos que tais semigrupos possuem condutores c_1 e c_2 , ou seja, todos os números naturais maiores que c_i pertencem a G_i e $c_i - 1 \notin G_i$, para $i = 1, 2$. Denotamos por $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m_1-1}$

e $b_0 < b_1 < \cdots < b_{m_2-1}$ respectivamente as sequências de Apéry associadas a G_1 em relação a m_1 e a G_2 com relação a m_2 .

Fixadas tais notações, apresentamos a divisão do trabalho:

No Capítulo 2, fazemos uma introdução a resultados preliminares e definições básicas de Álgebra Comutativa e Curvas Algébricas tais como: anel local, localização, fecho inteiro, valorização discreta e anel de valorização discreta. Definimos o anel de série potências, curvas algebróides, o anel de coordenadas de uma curva algebróide, índice de interseção de curvas algebróides e apresentamos algumas propriedades e resultados sobre esses conceitos, que serão úteis ao estudo desenvolvido nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, estudamos semigrupos dos números naturais, o conceito de condutor e suas propriedades. Definimos sequências de Apéry e apresentamos propriedades que serão úteis às provas dos resultados abordados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 4, apresentamos alguns resultados para o caso de curvas unirramificadas, que serão utilizados no estudo das propriedades de G e que nos permitem determinar fórmulas explícitas para obtê-lo. Em seguida, estudamos algumas propriedades que envolvem o anel de coordenadas \mathcal{O} , a inclusão $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}$ e o isomorfismo $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_{f_1} \times \tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$, onde $\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$ são, respectivamente, os fechos inteiros de $\mathcal{O}, \mathcal{O}_{f_1}$ e \mathcal{O}_{f_2} .

Em seguida, definimos o semigrupo G associado a um ponto singular de uma curva birramificada $f \in K[[X, Y]]$ e provamos um importante resultado, que nos permite determinar G fora de um retângulo formado pelos eixos coordenados e as retas vertical que contém o ponto $v + c_1$ e horizontal que contém o ponto $v + c_2$. Por fim, definimos fibras horizontais, verticais e pontos maximais de G .

No Capítulo 5, estudamos as propriedades dos pontos maximais de G . Provamos que o conhecimento de G é equivalente ao conhecimento de seus pontos maximais. Apresentamos o ponto $Q = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$, mostramos que $Q \in G$ e provamos o Teorema de Simetria dos Pontos Maximais: todo ponto máximo de G possui um simétrico em relação a Q , que também é ponto maximal.

Prosseguimos para o objetivo de determinar fórmulas para obter o semigrupo G em função do semigrupo G_1 , associado ao ramo f_1 , do semigrupo G_2 , associado ao ramo f_2 e do índice de inserção v , dos ramos f_1 e f_2 . Inicialmente apresentamos fórmulas para o caso em que os ramos f_1 e f_2 possuem tangentes distintas. Em seguida, estudamos o comportamento de curvas com respeito a explosões e introduzimos uma sequência de explosões até atingir uma curva com tangentes distintas. Veremos que quando não há mudança de multiplicidade nessa sequência de explosões, conseguimos determinar fórmulas para se obter G no caso geral. Quando a multiplicidade muda em apenas um dos ramos, que estaremos supondo ser f_1 , obtemos fórmulas que dependem do número de geradores do semigrupo G_1 . Se G_1 puder ser gerado por 2 ou 3 elementos, conseguimos determinar

fórmulas para G no caso geral, mas se o número mínimo de geradores para G_1 for $n \geq 4$, as fórmulas obtidas dependem da introdução de uma hipótese adicional.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentamos pré-requisitos de Álgebra, Álgebra Comutativa e Curvas Algébricas que são necessários para a compreensão dos conceitos abordados nos capítulos subsequentes. As principais referências para os resultados apresentados são [3], [5], [6], [9] e [12].

2.1 ANÉIS E IDEAIS

Nesta seção, apresentamos algumas definições e propriedades elementares sobre anéis e ideais, que são conceitos de Álgebra Comutativa que fundamentam o estudo deste trabalho. Abordamos em especial, os conceitos de anel local, localização, fecho inteiro, valorização discreta e anel de valorização discreta.

Consideramos sempre R um anel comutativo com unidade e K um corpo algebricamente fechado.

Lembramos que todo anel comutativo $\neq \{0\}$ possui pelo menos um ideal maximal e que cada elemento não invertível de um anel está contido em um ideal maximal.

2.1.1 Anel local, localização e fecho inteiro

Definição 2.1. Um anel local R é um anel que possui um único ideal maximal m . O quociente $K = \frac{R}{m}$ é chamado de corpo residual. Escrevemos (R, m, K) para denotar um anel local R com ideal maximal m e corpo residual K . Quando R possui um número finito de ideais maximais, dizemos que R é um anel semi-local.

Exemplo 2.1. O ideal $I = \langle X \rangle$ é o único ideal maximal do anel de polinômios $\mathbb{C}[[X]]$.

Definição 2.2. Seja R um anel comutativo com unidade. Um sistema multiplicativo de R é um subconjunto $S \subseteq R \setminus \{0\}$, não vazio, tal que $1_R \in S$ e S é fechado com respeito à multiplicação de R . Em $R \times S$, definimos a relação \equiv por:

$$(x, s) \equiv (y, t) \Leftrightarrow (xt - ys)u = 0, \text{ para algum } u \in S.$$

Vamos mostrar que a relação definida acima é uma relação de equivalência para todos $x, y, z \in R, t, s, v \in S$. Temos:

Reflexiva: Tomando $u = 1$, temos: $(xs - xs)u = 0 \Rightarrow (x, s) \equiv (x, s)$.

Simétrica: $(x, s) \equiv (y, t) \Rightarrow \exists u \in S; (xt - ys)u = 0 \Rightarrow (tx - sy)u = 0 \Rightarrow (ys - tx)u = 0 \Rightarrow (y, t) \equiv (x, s)$.

Transitiva: Suponhamos que $(x, s) \equiv (y, t)$ e $(y, t) \equiv (z, v)$. Então existem $u_1, u_2 \in S$

tais que $(xt - ys)u_1 = 0$ e $(yv - zt)u_2 = 0$. Eliminando y dessas duas equações temos $(xv - zs)tu_1u_2 = 0$. Como S é fechado para a multiplicação, segue que $tu_1u_2 \in S$. Assim, $(x, s) \equiv (z, v)$.

Usamos as notações $\frac{x}{s}$ para a classe de equivalência $\overline{(x, s)}$ e $S^{-1}R$ para o conjunto das classes de equivalência.

Ao definirmos em $S^{-1}R$ as operações:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st}$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}$$

para todo $x, y \in R$ e todo $s, t \in S$, o conjunto $S^{-1}R$ passa a ter uma estrutura de anel, que é chamado anel de localização de R em S .

Observação 2.1. Nas condições expressas acima, existe um homomorfismo de anéis $f : R \rightarrow S^{-1}R$ definido por $f(x) = \frac{x}{1}$ que, em geral, não é injetivo, mas o é se R for um domínio. No caso particular $S = R \setminus \{0\}$, chamamos o conjunto $S^{-1}R$ de corpo de frações de R .

Proposição 2.1 (Propriedade Universal da Localização). Sejam R e R_1 anéis, $S \subseteq R$ um sistema multiplicativo, $g : R \rightarrow R_1$ um homomorfismo de anéis tal que $g(s)$ é um invertível em R_1 , para todo $s \in S$. Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow R_1$, tal que $g = h \circ f$.

Demonstração. Ver [3] . Proposição 3.1, pág. 37. □

Seja P um ideal primo de R . Então $S = R \setminus P$ é um sistema multiplicativo e, nesse caso, escrevemos R_P em vez de $S^{-1}R$. O processo de passar de R a R_P é chamado de localização de R em P .

Definição 2.3. Seja R um anel e B um subanel de R tal que $1_R \in B$. Dizemos que $x \in R$ é inteiro sobre B , se x é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em B .

Proposição 2.2. O conjunto C dos elementos de R que são inteiros sobre B é um subanel de R que contém B . Dizemos que este conjunto é o fecho inteiro de B em R .

Demonstração. Ver [3]. Corolário 5.3, pág. 60. □

Observação 2.2. Se $C = B$ dizemos que B é integralmente fechado. Se $C = R$, dizemos que o anel R é inteiro sobre B .

Definição 2.4. Sejam R um domínio de integridade e K seu corpo de frações. Dizemos que R é um anel de valorização de K se para cada $x \in K$ $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$.

Proposição 2.3. Seja R um anel de valorização, então:

- (i) R é um anel local;
- (ii) Se R' é um anel tal que $R \subseteq R' \subseteq K$, então R' é um anel de valorização de K ;
- (iii) R é integralmente fechado em K .

Demonstração. Ver [3]. Proposição 5.18, pág. 65. □

Proposição 2.4. Seja R um subanel de um corpo K . Então o fecho inteiro C de R em K é a interseção de todos os anéis de valorização de K que contém R .

Demonstração. Ver [3]. Corolário 5.22, pág. 66. □

2.1.2 Valorização discreta e anel de valorização discreta

Definição 2.5. Sejam K um corpo e $K^* = K \setminus \{0\}$. Uma valorização discreta em K é uma função $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ sobrejetiva que satisfaz, para todo $x, y \in K^*$:

- (i) $v(xy) = v(x) + v(y)$;
- (ii) $v(x + y) \geq \min \{v(x), v(y)\}$.

Convencionamos definir: $v(0) = \infty$, então $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Se definirmos $\forall n \in \mathbb{Z}, \infty + n := \infty$ e $\infty + \infty := \infty$, então temos que (i) e (ii), definidos acima, valem para todos $x, y \in K$.

Proposição 2.5. Seja $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ uma valorização discreta, então:

- i)** $v(\pm 1) = 0$ e $v(-a) = v(a)$, para todo $a \in K$.
- ii)** $v(a/b) = v(a) - v(b)$ e $v(b^{-1}) = -v(b)$, para todo $a, b \in K$, com $b \neq 0$.
- iii)** $v(a + b) = v(b)$ se $v(a) > v(b)$.
- iv)** Se $a_1 + \dots + a_n = 0$ com $n \geq 2$, então existem $i \neq j$ tais que $v(a_i) = v(a_j)$.

Demonstração. **i)** Segue de $v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$, $v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$ e $v((-1) \cdot a) = v(-1) + v(a)$.

ii) Segue de $v(b) + v(b^{-1}) = v(b \cdot b^{-1}) = v(1)$ e $v(a/b) = v(a) + v(b^{-1})$.

iii) Temos $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\} = v(b)$. Para mostrar a desigualdade oposta, observe que

$$v(b) = v((a + b) + (-a)) \geq \min\{v(a + b), v(-a)\}.$$

Como $v(-a) = v(a) > v(b)$, temos $\min\{v(a+b), v(-a)\} = v(a+b)$, obrigatoriamente. Logo, $v(b) \geq v(a+b)$ também.

iv) Segue de **c)** já que se $v(a_i) \neq v(a_j)$ para todo $i \neq j$ (em particular, haveria no máximo um termo $a_i = 0$), teríamos que a valorização do lado esquerdo da igualdade seria igual a $\min\{v(a_i)\} \in \mathbb{Z}$ (pois há algum termo não nulo) enquanto a valorização do lado direito seria ∞ . \square

O conjunto $R = \{x \in K; v(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização. De fato, dado $x \notin R$, temos que $v(x) < 0$. Como $v(1) = 0$, temos que:

$$0 = v(1) = v(xx^{-1}) = v(x) + v(x^{-1}) \Rightarrow v(x^{-1}) = -v(x).$$

Então $v(x^{-1}) > 0$. Logo, $x^{-1} \in R$. Portanto o conjunto R é um anel de valorização v de K .

Definição 2.6. Seja R um domínio que não é um corpo. R é dito um anel de valorização discreta, se existe um elemento irredutível $t \in R$ tal que todo elemento $z \in R \setminus \{0\}$, pode ser escrito de maneira única como $z = ut^n$, onde u é invertível e n é um inteiro não negativo. O elemento irredutível t é dito parâmetro de uniformização de R ou uniformizante local em R .

Observação 2.3. A condição de R ser um anel de valorização discreta (AVD) é equivalente à R ser noetheriano e local, cujo único ideal maximal é principal. (Ver [6]. Proposição 4, pág. 34)

Se R é o anel de valorização correspondente à valorização v , denotamos R por \mathcal{O}_v e seu ideal maximal por \mathcal{M}_v .

Seja R um domínio de integridade. Se R é um anel de valorização discreta, então R é um anel de valorização de v . Logo, R é um anel local e, o conjunto

$$\mathcal{M}_v = \{x \in K; v(x) > 0\}$$

é seu ideal maximal.

Note que R é um subanel de K . De $v(x) \geq 0$ e $v(y) \geq 0$ temos:

$$v(x \pm y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \geq 0 \quad \text{e} \quad v(xy) = v(x) + v(y) \geq 0.$$

Além disso, de $v(x) \geq 0$ e $v(x^{-1}) \geq 0$ segue que $v(x) = 0$, ou seja, o conjunto de invertíveis de R , denotado por R^\times é dado por:

$$R^\times = \{x \in K; v(x) = 0\} = \mathcal{O}_v - \mathcal{M}_v.$$

2.2 SÉRIES DE POTÊNCIAS EM DUAS VARIÁVEIS

Nesta seção, estudamos propriedades do anel de série de potências formal $K[[X, Y]]$ definido sobre um corpo K em duas variáveis.

Definição 2.7. Sejam K um corpo e X, Y variáveis sobre K . Denotamos por $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas variáveis X, Y , com coeficientes em K .

Sejam $f = P_0 + P_1 + \cdots$ e $g = Q_0 + Q_1 + \cdots$ elementos de \mathcal{A} . Da definição (2.7), temos:

$$f = g \Leftrightarrow Q_i = P_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definimos nesse conjunto as operações:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \quad \text{e} \quad f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i P_j Q_{i-j}.$$

Observação 3.1: O produto definido acima é denominado produto de Cauchy, cada parcela do produto é dada por:

$$S_n = \sum_{j=0}^n P_j Q_{n-j}.$$

Pode-se verificar que o conjunto definido em (2.7) é um domínio de integridade, inclusive para o caso geral com n variáveis, $n \in \mathbb{N}$. (Ver [9]. Proposição 1.4, pág. 7.)

Proposição 2.6. Um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ é invertível em \mathcal{A} se, e somente se, $P_0 \neq 0$.

Demonstração. Seja $g = Q_0 + Q_1 + \cdots$ e considere a equação:

$$1 = f \cdot g = P_0 Q_0 + (P_1 Q_0 + P_0 Q_1) + \cdots$$

Esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} P_0 Q_0 = 1 \\ P_1 Q_0 + P_0 Q_1 = 0 \\ \vdots \\ P_n Q_0 + P_{n-1} Q_1 + \cdots + P_0 Q_n = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Assim, f é invertível se, e somente se, o sistema obtido admite solução nos Q_i s. Nesse caso, $f^{-1} = g$.

(\Rightarrow) Se f é invertível, então existe Q_0 tal que $P_0Q_0 = 1$, logo $P_0 \neq 0$.

(\Leftarrow) Se $P_0 \neq 0$, então o sistema possui solução, dada pelas seguintes relações recursivas:

$$Q_0 = P_0^{-1} \in K$$

$$Q_1 = -P_0^{-1}P_1Q_0$$

\vdots

$$Q_n = -P_0^{-1}(P_nQ_0 + \cdots + P_1Q_{n-1}). \quad \square$$

Definição 2.8. Dados $f, g \in \mathcal{A}$, dizemos que f e g são associados se existe um elemento invertível $u \in \mathcal{A}$ tal que $f = u \cdot g$.

Definição 2.9. Seja $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Suponhamos que $f = P_n + P_{n+1} + \cdots$ onde cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O polinômio homogêneo P_n é chamado **forma inicial** de f . O inteiro n é chamado **multiplicidade** de f e denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, definimos $\text{mult}(f) = \infty$.

Proposição 2.7. Sejam $f, g \in \mathcal{A}$, temos:

a) $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$.

b) $\text{mult}(f + g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$.

Demonstração. a) Dados $f = P_n + P_{n+1} + \cdots$ e $g = Q_m + Q_{m+1} + \cdots$ de multiplicidades n, m respectivamente, temos que $\text{mult}(f \cdot g)$ é o grau de P_nQ_m , ou seja $\text{mult}(f) + \text{mult}(g)$.

b) Segue direto da definição de multiplicidade. \square

Proposição 2.8. $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$ possui um único ideal maximal, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \langle X, Y \rangle$. Denotamos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^i$ a i -ésima potência do ideal $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, e tomamos $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^0 = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Este ideal é tal que:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^i = \{0\}$$

Demonstração. Ver [9]. Proposição 1.5, pág. 7. \square

O resultado que será enunciado a seguir estabelece um importante critério de irreduzibilidade em $K[[X]][Y]$. Por conveniência, definimos o grau do polinômio nulo como sendo $-\infty$, denotamos $\text{grau}(0) = -\infty$.

Lema 2.1 (Lema de Hensel). Seja $f \in K[[X]][Y]$ mônico e tal que $f(0, Y) = p(Y)q(Y)$, onde $p(Y), q(Y) \in K[Y]$ são relativamente primos e não constantes, de graus r e s , respectivamente. Então existem polinômios $g, h \in K[[X]][Y]$, determinados de modo único, de graus r e s , respectivamente, tais que $f = gh$, com $g(0, Y) = p(Y)$ e $h(0, Y) = q(Y)$.

Demonstração. Ver [9]. Teorema 1.16, pág. 17. \square

2.2.1 Teorema da Preparação de Weierstrass

Nesta seção, apresentamos uma versão fraca para o teorema da divisão no anel de séries de potências e o Teorema da Preparação de Weierstrass.

No que segue, denotamos $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ seu ideal maximal.

Definição 2.10. Dizemos que $f \in \mathcal{A}$ é regular de ordem m na variável Y , se $f(0, Y) \neq 0$ e Y^m é a maior potência de Y que divide $f(0, Y)$. Analogamente, dizemos que $f \in \mathcal{A}$ é regular de ordem m na variável X , se X^m é a maior potência de X que divide $f(X, 0)$.

Exemplo 2.2. Temos $f = XY + X^3Y^2 + Y^5 + X^4Y^3 + 3Y^7$ regular em Y de ordem 5, pois $f(0, Y) = Y^5 + 3Y^7 = Y^5(1 + 3Y^2)$, onde Y^5 é a maior potência de Y que divide $f(0, Y)$. Por outro lado, $g = XY + X^2Y + XY^2$ não é regular em X , nem em Y .

É conhecido que o anel de séries de potências não é um domínio euclidiano, no entanto, dada uma série regular em Y , podemos aplicar o teorema que segue.

Teorema 2.1 (Teorema da Divisão de Weierstrass). Seja $f \in K[[X, Y]]$ regular em Y de ordem m . Dado qualquer $g \in K[[X, Y]]$, existem $q \in K[[X, Y]]$ e $r \in K[[X]][Y]$, com $r = 0$ ou $\text{grau}_Y(r) < m$ (onde $\text{grau}_Y(r)$ denota o grau de r na variável Y), determinados de modo único por f e g , tais que:

$$g = fq + r.$$

Demonstração. Sejam $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i Y^i \in K[[X]][[Y]]$ e $g' = \sum_{i=0}^{m-1} g_i Y^i \in K[[X]][Y]$, onde $g_i \in K[[X]]$. Vamos construir recursivamente polinômios $q_i, r_i, i \geq 0$, em $K[X, Y]$, não necessariamente homogêneos, com $r_i = 0$ ou $\text{grau}_Y(r_i) < m$, para todo i , tal que $\text{mult}(q_i) \geq i$ e $\text{mult}(r_i) \geq 1 + i$. Desse modo, tomando $q = q_0 + q_1 + \dots$ e $r = g' + r_0 + r_1 + \dots$, obtemos $g = fq + r$. Observamos que unicidade de q e r decorrem do processo de construção dos polinômios $q_i, r_i, i \geq 0$.

Seja $\text{mult}(f) = n$, escrevendo f como soma de polinômios homogêneos, temos:

$$f = F_n + \dots + F_m + F_{m+1} + \dots$$

Como f é regular em Y de ordem m , temos:

$$p = F_n + \dots + F_m = cY^m + \sum_{i=0}^{m-1} f_i Y^i, f_i \in \mathcal{M}_{K[[X]]}, \quad (2.1)$$

onde $c \in K \setminus \{0\}$ e $\mathcal{M}_{K[[X]]}$ denota o ideal maximal de $K[[X]]$, que também é um anel local. Necessariamente, temos:

$$1 \leq n = \text{mult}(p) \leq m.$$

Seja $g'' = g - g'$, escrevendo g'' com soma de polinômios homogêneos, obtemos:

$$g - g' = g'' = G_m + G_{m+1} + \cdots$$

Como p é da forma (2.1), com $c \in K \setminus \{0\}$, existem únicos $q_0 \in K$ e $r_0 \in K[[X]][Y]$ tais que:

$$G_m = q_0 p + r_0,$$

com $r_0 = 0$ ou $\text{grau}_Y r_0 < m$.

Note que $q_0 = 0$ se, e somente se, $G_m(0, Y) = 0$. Se $q_0 = 0$, temos $r_0 = G_m$ e consequentemente, $\text{mult}(r_0) = m \geq n$. Se $q_0 \neq 0$, temos $\text{mult}(r_0) = n$, pois caso contrário, teríamos $\text{mult}(q_0 p + r_0) \neq m$. Portanto $\text{mult}(r_0) \geq n$. Temos:

$$g = g' + g'' = g' + G_m + G_{m+1} + \cdots = g' + (q_0 p + r_0) + G_{m+1} + \cdots$$

Como $p = f - (F_{m+1} + \cdots)$, temos:

$$g = g' + r_0 + q_0 f - q_0 (F_{m+1} + \cdots) + G_{m+1} + \cdots = g' + r_0 + q_0 f + (G_{m+1} - q_0 F_{m+1}) + \cdots$$

Dividindo $G_{m+1} - q_0 F_{m+1}$ por p , temos:

$$G_{m+1} - q_0 F_{m+1} = q_1 p + r_1,$$

onde $q_1 \in K[[X]]$, $r_1 = 0$ ou $\text{grau}_Y(r_1) < m$. Podemos observar que $\text{mult}(q_1) \geq 1$. Então $\text{mult}(G_{m+1} - q_0 F_{m+1}) = m + 1$ ou $\text{mult}(G_{m+1} - q_0 F_{m+1}) = \infty$.

Se $\text{mult}(G_{m+1} - q_0 F_{m+1}) = m + 1$, temos:

$$m + 1 = \text{mult}(q_1 p + r_1) \leq \min\{\text{mult}(q_1) + n, \text{mult}(r_1)\}$$

Assim, $\text{mult}(r_1) = m + 1 \geq n + 1 > n$.

Se $\text{mult}(G_{m+1} - q_0 F_{m+1}) = \infty$, então $r_1 = -q_1 p$. Logo:

$$\text{mult}(r_1) = \text{mult}(q_1) + n \geq n + 1 > n.$$

Portanto, nos dois casos temos $\text{mult}(r_1) \geq n$. Assim:

$$\begin{aligned} g &= g' + r_0 + q_0 f + (q_1 p r_1) + (G_{m+2} - q_0 F_{m+2}) + \cdots \\ &= g' + r_0 + r_1 + (q_0 f + q_1 f) + (G_{m+2} - q_0 F_{m+2} - q_1 F_{m+1}) + \cdots \end{aligned}$$

Repetindo esse processo, obtemos $q_0, q_1, \dots \in K[[X]][[Y]]$ e $r_0 r_1, \dots \in K[[X]][Y]$ de tal modo que:

$$g = f(q_0 + q_1 + \cdots) + g' + r_0 + r_1 + \cdots$$

Tomando $q = q_0 + q_1 + \cdots$ e $r = g' + r_0 + r_1 + \cdots \in K[[X]][Y]$, obtemos $g = fq + r$. \square

Teorema 2.2 (Teorema da Preparação de Weierstrass). Seja $f \in K[[X, Y]]$ regular em Y de ordem m . Então, existem $u \in K[[X, Y]]$ invertível e $a_0, a_1, \cdots, a_m \in K[[X]]$ tais que

$$fu = Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_m(X),$$

com $\text{mult}(a_i) \geq i$ para $i = 1, \cdots, m$.

Demonstração. Tomando $g = Y^m$ no Teorema da Divisão (2.1), segue que existem $q \in \mathcal{A}$ e $r \in K[[X]]$, com $\text{grau}_Y(r) < m$, determinados de modo único por f e g , tais que:

$$Y^m = fq + r.$$

Como $r \in K[[X]][Y]$ e $\text{grau}_Y(r) < m$, existem $a_1, \cdots, a_m \in K[[X]]$, tais que:

$$a_1Y^{m-1} + a_2Y^{m-2} + \cdots + a_m = -r.$$

Observe que podemos tomar $u = q$, o fato de u ser invertível segue da demonstração do Teorema da Divisão, pois como $g = Y^m = G_m$, temos $q_0 \neq 0$.

Temos que:

$$f(0, Y)u(0, Y) = Y^m + a_1(0)Y^{m-1} + a_2(0)Y^{m-2} + \cdots + a_m(0).$$

Como Y^m divide $f(0, Y)$, temos $a_1(0) = a_2(0) = \cdots = a_m(0) = 0$. Logo, $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathcal{M}_{K[[X]]}$.

Ademais, se f é regular em Y de ordem m , então temos:

$$\text{mult}(Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_m(X)) = \text{mult}(fu) = \text{mult}(f) = m.$$

Portanto, $\text{mult}(a_i) \geq i, \forall i = 1, \cdots, m$. \square

Definição 2.11. A série $g(X, Y) = Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_m(X)$, como no enunciado do Teorema da Preparação de Weierstrass 2.2, é chamada polinômio de Weierstrass e é um polinômio com coeficientes em $K[[X]]$.

Teorema 2.3. O anel de série de potências $A = K[[X, Y]]$ é um domínio de fatoração única (DFU).

Demonstração. Ver [9]. Teorema 2.12, pág. 25. \square

2.3 CURVAS ALGEBRÓIDES

Nesta seção, definimos curvas algebróides planas e estudamos algumas propriedades que serão úteis aos resultados que serão desenvolvidos nos demais capítulos.

Definição 2.12 (Curva Algebróide). Uma curva plana algebróide (f) é uma classe de equivalência de um elemento não invertível f de $K[[X, Y]] \setminus \{0\}$, módulo a relação de associados. Ou seja:

$$(f) = \{u \cdot f; u \text{ é uma unidade em } K[[X, Y]]\}.$$

Assim, temos da definição:

$$(f) = (g) \Leftrightarrow \exists \text{ uma unidade } u \in K[[X, Y]] \text{ tal que } g = u \cdot f.$$

Definição 2.13. Seja (f) uma curva algebróide, a multiplicidade de (f) é dada por $\text{mult}(f)$ (Definição (2.9)). Dizemos que uma curva plana algebróide é suave ou regular se sua multiplicidade é igual a um. Caso sua multiplicidade seja maior que um, a curva é singular.

Seja (f) uma curva plana algebróide, como \mathcal{A} é DFU, podemos considerar a decomposição de f em fatores irredutíveis em $K[[X, Y]]$, digamos, $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$. As curvas planas algebróides (f_j) para $j = 1, \dots, r$ são chamadas ramos da curva f . A curva (f) é chamada reduzida se $(f_i) \neq (f_j)$ para $i \neq j$, ou seja, f_i e f_j não são associados se $i \neq j$.

Sabemos que muitas propriedades das curvas algebróides são mantidas após uma mudança de coordenadas em $K[[X, Y]]$ através de um K-automorfismo. Motivados por essa observação, definimos a seguir uma relação de equivalência entre curvas algebróides.

Definição 2.14. Dizemos que duas curvas algebróides (f) e (g) são equivalentes se existem um K-automorfismo Φ de $K[[X, Y]]$ e uma unidade u de $K[[X, Y]]$ tais que $\Phi(f) = u \cdot g$. Neste caso, denotamos $(f) \equiv (g)$.

Proposição 2.9. Se (f) e (g) são curvas algebróides regulares então (f) e (g) são equivalentes.

Demonstração. Ver [9]. Proposição 3.3, pág. 34. □

Definição 2.15. Seja (f) uma curva plana algebróide de multiplicidade n , ou seja,

$$f = F_n + F_{n+1} + \cdots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i e $F_n \neq 0$. Dizemos que a curva (F_n) é o cone tangente da curva (f) .

Como um polinômio homogêneo em duas variáveis com coeficientes em um corpo algebricamente fechado pode ser decomposto em produto de fatores lineares, podemos escrever:

$$F_n = \prod_{i=1}^s (a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=1}^s r_i = n$; $a_i, b_j \in K$, para $i, j = 1, \dots, s$, e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$. Então o cone tangente de (f) consiste nas formas lineares $(a_i X + b_i Y)$, $i = 1, \dots, s$, cada uma tomada com multiplicidade r_i , chamadas retas tangentes de (f) .

Lema 2.2 (Lema da Unitangente). Seja $f \in K[[X, Y]]$ tal que $f(0, 0) = 0$, reduzida e de multiplicidade n . Então a forma inicial de f é da forma:

$$F_n = (aX + bY)^n,$$

com $a, b \in K$ não simultaneamente nulos.

Demonstração. Ver [9] Lema 3.15, pág. 43. □

2.3.1 O anel de coordenadas de uma curva algebróide plana

Definição 2.16. Seja f um elemento do ideal maximal $\mathcal{M} = \langle X, Y \rangle$ de $K[[X, Y]]$. Definimos o anel de coordenadas da curva (f) como sendo a K -álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Se $h \in K[[X, Y]]$ e $B \subset K[[X, Y]]$, denotamos por \bar{h} a classe de restos de h em \mathcal{O}_f e por \bar{B} o conjunto das classes de resto dos elementos de B . Vamos denotar por y a classe de restos de Y e por x a classe de restos de X .

Podemos observar que o anel \mathcal{O}_f é um anel local que possui como único ideal maximal $\mathcal{M}_f = \bar{\mathcal{M}}$. (Ver [9] pág. 53).

Quando f é irredutível, o ideal $\langle f \rangle$ é primo, e então \mathcal{O}_f é um domínio de integridade. Nesse caso, o corpo de frações de \mathcal{O}_f é denotado por \mathcal{K}_f .

A seguir, apresentamos um resultado que mostra que \mathcal{O}_f é um invariante importante das classes de equivalências de curvas algebróides planas. Quando duas K -álgebras locais \mathcal{O}_f e \mathcal{O}_g são isomorfas, escrevemos $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.

Teorema 2.4. Sejam (f) e (g) duas curvas algebróides. Temos que (f) e (g) são isomorfas e denotamos $(f) \simeq (g)$ se, e somente se, $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.

Demonstração. Ver [9]. Teorema 4.1, pág. 53. □

2.3.2 Índice de interseção de curvas algebróides

Definição 2.17. Sejam $f, g \in K[[X, Y]]$. O índice de interseção de f e g é:

$$I(f, g) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Observemos que se f ou g é uma unidade em $K[[X, Y]]$, então $\langle f, g \rangle = K[[X, Y]]$, e portanto $I(f, g) = 0$. Ademais, as propriedades da definição de espaço vetorial para $\frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$ decorrem naturalmente considerando a soma das classes resto e do produto escalar por um elemento do corpo K .

Denotamos por z' a imagem de $z \in K[[X, Y]]$ em \mathcal{O}_f . Então, podemos verificar que:

$$I(f, g) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle}.$$

Definição 2.18. Dizemos que duas curvas algebróides planas (f) e (g) são transversais, se (f) e (g) são regulares e possuem retas tangentes distintas.

Teorema 2.5. Sejam $f, g, h, u, v \in K[[X, Y]]$, Φ um automorfismo de $K[[X, Y]]$ e u, v unidades. O índice de interseção possui as seguintes propriedades:

- i) $I(f, g) < \infty$, se, e somente se, f e g são relativamente primos em $K[[X, Y]]$.
- ii) $I(f, g) = I(g, f)$.
- iii) $(\Phi(f), \Phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$.
- iv) $I(f, gh) = I(f, g) + I(f, h)$.
- v) $I(f, g) = 1$ se, e somente se, (f) e (g) são transversais.
- vi) $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

Demonstração. Ver [9]. Teorema 4.14, pág. 62. □

É possível mostrar que as propriedades do Teorema (2.5) são equivalentes à definição de índice de interseção, ou seja dada uma aplicação

$$\begin{aligned} I' : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ (f, g) &\mapsto I'(f, g) \end{aligned}$$

onde I' possui todas as propriedades do Teorema (2.5), então temos $I = I'$. Uma prova desse fato pode ser encontrada em [9] Teorema 4.15, pág. 64.

2.4 VALORIZAÇÃO EM UM CORPO DE FUNÇÕES

Definição 2.19. Um corpo de funções algébricas em duas variáveis sobre K é a extensão de corpos finitamente gerada $F|K$, com grau de transcendência ≥ 1 .

Como exemplo para a definição anterior, podemos considerar o corpo de funções algébricas obtido a partir de $f = X^3 - Y^2 \in K[[X, Y]]$, tomando $F = \mathcal{O}_f := \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}$. Assim, $\mathcal{O}_f = K(x, y)$, onde $x^3 = y^2$, x é a classe de restos $x \equiv X \pmod{f}$ e y a classe de restos $y \equiv Y \pmod{f}$. Nesse exemplo, como x e y são dados a partir da equação $x^3 = y^2 - 1$, temos que K é um corpo de funções em uma variável.

Definição 2.20. Seja $F|K$ um corpo de funções algébricas em duas variáveis. Um anel de valorização \mathcal{V} de F é um subanel \mathcal{V} de F tal que:

- i) $K \subsetneq \mathcal{V} \subsetneq F$;
- ii) $\forall z \in F$ temos $z \in \mathcal{V}$ ou $z^{-1} \in \mathcal{V}$.

Definição 2.21. Seja $F|K$ um corpo de funções algébricas em duas variáveis. Uma valorização discreta normalizada v de F é uma aplicação $v : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ que possui as seguintes propriedades:

- i) $v(x) = \infty$ se, e somente se $x = 0$;
- ii) $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in F$;
- iii) $v(x + y) \geq \min \{v(x), v(y)\}, \forall x, y \in F$;
- iv) Existe $t \in F$ tal que $v(t) = 1$; (t é chamado uniformizante local de F).
- v) Se $a \in K$ e $a \neq 0$, então $v(a) = 0$;

$\mathcal{V} := \{a \in F; v(a) \geq 0\}$ é chamado anel de valorização de v .

Proposição 2.10. Seja v uma valorização discreta normalizada $F|K$. Então:

- i) \mathcal{V} é um anel local cujo ideal maximal é o conjunto \mathcal{M} dos elementos não inversíveis de \mathcal{V} ;
- ii) \mathcal{V} é um domínio de ideais principais. Mais precisamente, se $\mathcal{M} = t\mathcal{V}$ e J é um ideal não nulo de K , então $K = t^n\mathcal{V}$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Demonstração. Ver [11], Proposições 3.8 e 3.9, págs. 120 e 121. □

A seguir, fazemos uma breve exposição sobre o Corpo de Laurent $K((t))$ e a norma induzida pela valorização. Tais conceitos serão utilizados na prova do Teorema (4.1).

Sejam $F|K$ um corpo de funções algébricas em duas variáveis, v uma valorização de $F|K$ e t um uniformizante local em v . Para cada $f \in F$, considere a série $\sum_{n=m_f}^{\infty} c_n t^n$ chamada série formal de Laurent, onde $m_f = v(f)$ e $c_{m_f} \neq 0$. O conjunto formado por todas essas séries é chamado Corpo das Séries Formais de Laurent em t sobre K .

Podemos identificar a imersão de F em $K((t))$ através da inclusão $F \subseteq K((t))$ (Ver [5], pág. 179). Desse modo, podemos estender as valorizações v de $F|K$ para $K((t))$. Seja $f \in K((t))$, podemos definir:

$$v(f) = \text{ord}_t(f) := \text{menor expoente da série de Laurent em } t.$$

Podemos observar que se s é outro uniformizante local em $F|K$, então $v(s) = 1$. Então $s = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, com $a_i \in K$ para $i \geq 1$ e $a_1 \neq 0$. Assim, $K((s)) = K((t))$. Portanto a definição da valorização v não depende do uniformizante t .

O corpo $K((t))$ pode ser considerado um completamento de F com a norma dada por:

$$|f|_v := 2^{-v(f)}.$$

3 SEMIGRUPOS E SEQUÊNCIAS DE APÉRY

Neste capítulo apresentamos definições e propriedades dos semigrupos de números naturais e das sequências de Apéry que serão úteis para as provas dos resultados que estudaremos nos capítulos posteriores. As principais referências para os resultados apresentados são [2] e [8].

Definição 3.1. Um semigrupo é um par $(G, *)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária associativa sobre G .

São exemplos de semigrupos $(\mathbb{N}, +)$ e (\mathbb{N}, \cdot) , que representam o conjunto dos números naturais munido das operações de soma e produto usuais.

Definição 3.2. Um semigrupo de números naturais é um subconjunto $G \subset \mathbb{N}$ tal que:

- (i) $0 \in G$;
- (ii) se $x, y \in G$, então $x + y \in G$.

Exemplo 3.1. $G = \{0, 3, 5, 8, 9, 10, \dots\}$.

Dados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} números naturais, utilizamos a seguinte notação:

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_j; \lambda_j \in \mathbb{N} \text{ para } 0 \leq j \leq n-1 \right\}$$

$$g_j = \text{MDC}(x_0, x_1, \dots, x_j), \text{ para } 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } g_0 = x_0,$$

onde $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ é chamado o semigrupo gerado por x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Dados a, p números naturais, denotamos por $a + p\mathbb{N} = \{a + pn; n \in \mathbb{N}\}$.

Estudamos os semigrupos G tais que $\mathbb{N} \setminus G = \{x \in \mathbb{N}; x \notin G\}$ seja um conjunto finito. Nesses semigrupos, existe um elemento c , chamado condutor de G tal que:

- (i) $c - 1 \notin G$;
- (ii) $x \in \mathbb{N}$ e $x \geq c \Rightarrow x \in G$.

Definição 3.3. Sejam G um semigrupo de números naturais e $0 \neq p \in G$. Denotamos por $a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1}$, a sequência de Apéry de G em relação a p , que é definida por:

$$a_0 = 0;$$

$$a_1 = \min(G \setminus p\mathbb{N});$$

$$a_2 = \min\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=0}^1 (a_j + p\mathbb{N})\right)\right);$$

$$\vdots$$

$$a_{p-1} = \min\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{p-2} (a_j + p\mathbb{N})\right)\right).$$

Proposição 3.1. Considerando a relação de congruência usual, que denotaremos por \equiv , as seqüências de Apéry possuem as seguintes propriedades:

- i) $a_i \not\equiv a_j \pmod{p}$ para $i \neq j$.
- ii) $G = \bigcup_{j=1}^{p-1} (a_j + p\mathbb{N})$.
- iii) $c = a_{p-1} - p + 1$ onde c é o condutor de G .

Demonstração. i) Suponhamos $i > j$, logo $a_i > a_j$, assim $a_i - a_j = pq$, com $q \in \mathbb{N}$, contradição.

ii) Temos que $\overline{a_0}, \dots, \overline{a_{p-1}}$, são as distintas classes de equivalência módulo p . Da definição de seqüência de Apéry, segue que a_0, \dots, a_{p-1} são, respectivamente, os menores representantes das classes $\overline{a_0}, \dots, \overline{a_{p-1}}$. Assim, dado $x \in G$, aplicando o algoritmo da divisão, temos $x = qp + a_i$, para algum $0 \leq i \leq p-1$. Portanto, $G = \bigcup_{j=1}^{p-1} (a_j + p\mathbb{N})$.

iii) Vamos mostrar inicialmente que $a_{p-1} - p \notin G$. De fato, se $a_{p-1} - p \in G$, então $a_{p-1} = g + p$, contradição com a definição de seqüência de Apéry em relação a p . Agora vamos mostrar que $x = a_{p-1} - p + r \in G, \forall r \in \mathbb{N}^*$. Suponhamos que $x \notin G$, então $x = a_i + \lambda p$, com $\lambda < 0$. Assim, $a_{p-1} - p + r = a_i + \lambda p$. Então, $a_{p-1} - a_i = \lambda p + p - r < 0$, contradição com a definição de a_{p-1} . Portanto $a_{p-1} - p + 1$ é o condutor de G . \square

Exemplo 3.2. Considere o semigrupo: $G = \{0, 5, 7, 9, 10, 11, \dots\}$, com condutor 9. Vamos determinar a seqüência de Apéry de G com relação a 5, dada por $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$, onde:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_1 &= \min(G \setminus 5 \cdot \mathbb{N}) = 7; \\ a_2 &= \min\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=0}^1 (a_j + 5 \cdot \mathbb{N})\right)\right) = 9; \\ a_3 &= \min\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=0}^2 (a_j + 5 \cdot \mathbb{N})\right)\right) = 11; \\ a_4 &= \min\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=0}^3 (a_j + 5 \cdot \mathbb{N})\right)\right) = 13. \end{aligned}$$

No que segue, dados números naturais x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , estaremos supondo que:

- i) $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1}$;
- ii) $g_0 > g_1 > \dots > g_{n-2} > g_{n-1} = 1$,

onde $g_j = \text{MDC}(x_0, x_1, \dots, x_j)$, para $1 \leq j \leq n-1$ e $g_0 = x_0$.

Ou seja, o conjunto de naturais está em ordem crescente, enquanto a sequência de MDC decresce, sendo o MDC de todos os elementos da sequência igual a 1.

Note que, nessas condições, $\frac{x_0}{g_j}, \dots, \frac{x_j}{g_j}$ também possui as propriedades i) e ii), para cada $1 \leq j \leq n-1$.

Podemos observar também que $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \subseteq [g_{n-2}, x_{n-1}]$, uma vez que $g_{n-2} = MDC(x_0, \dots, x_{n-2})$. A proposição a seguir determina quando um elemento de $[g_{n-2}, x_{n-1}]$ pertence a $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Proposição 3.2. Dados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} números naturais e $\alpha = \lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1}$ onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq \lambda_2 < g_{n-2}$, temos:

$$\alpha \in [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \Leftrightarrow \lambda_1 \in \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1} \right].$$

Demonstração. (\Leftarrow) Nesse caso, temos $\lambda_1 = qx_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x_i}{g_{n-2}} a_i$. Daí,

$$\alpha = x_{n+1}(\lambda_2 + qg_{n-2}) + \sum_{i=0}^{n-2} x_i a_i.$$

(\Rightarrow) Escrevendo $\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k$, com $a_k \in \mathbb{N}$. Temos: $\lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k$. Então

$(a_{n-1} - \lambda_2)x_{n-1} = \lambda_1 g_{n-2} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_k$. Como g_{n-2} divide o lado direito da igualdade e $MDC(g_{n-2}, x_{n-1}) = 1$, temos que $\alpha_{n-1} - \lambda_2 = \beta g_{n-2}$ para algum $\beta \in \mathbb{Z}$. De $\lambda_2 < g_{n-2}$ e $\alpha_{n-1} \geq 0$, segue que $\beta \geq 0$. Então, $\beta g_{n-2} x_{n-1} = \lambda_1 g_{n-2} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_k$, com $\beta \in \mathbb{N}$. Dividindo essa expressão por g_{n-2} , obtemos:

$$\lambda_1 \in \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1} \right].$$

□

Proposição 3.3. Dados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} números naturais. Sejam

c o condutor de $G = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$, e

c' o condutor de $G' = \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1} \right]$.

Então:

$$c - 1 = (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, podemos ver que $(c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1} \notin G$. Vamos mostrar que se $z \in \mathbb{Z}$ e $z > (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}$, então $z \in G$. Como $\text{MDC}(g_{n-2}, x_{n-1}) = 1$ temos do algoritmo da divisão que todo inteiro pode ser escrito de modo único como $\lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1}$, com $0 \leq \lambda_2 < g_{n-2}$. Então:

$$z = \lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1} > (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}.$$

Como $\lambda_2 < g_{n-2}$, temos $\lambda_1 > c' - 1$. Assim, $\lambda_1 \geq c'$ e então $\lambda_1 \in G'$. Pela Proposição (3.2), segue que $z = \lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1} \in G$. \square

Corolário 3.1. Sob as condições da Proposição (3.3) se:

$$c'' \text{ é o condutor de } \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \frac{x_1}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}} \right].$$

Então:

$$c - 1 \leq (c'' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}.$$

Demonstração. Decorre de $c'' \geq c$. \square

Definição 3.4. (propriedade simétrica) Sejam G um semigrupo e c o condutor de G . Dizemos que G é simétrico quando, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$n \in G, \text{ se e somente se, } c - 1 - n \notin G.$$

Proposição 3.4. Sejam G um semigrupo, $0 \neq p \in G$ e $a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1}$ a sequência de Apéry de G em relação à p . São equivalentes:

- i) G é semigrupo simétrico.
- ii) $a_i + a_{p-1-i} = a_{p-1}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$.

Demonstração. Ver [2], Lema 1, pág. 1199. \square

Observação 3.1. Dados x_0 e x_1 números naturais, com $\text{MDC}(x_0, x_1) = 1$, então o semigrupo $G = [x_0, x_1]$ é simétrico e o condutor c de G é dado por $c = (x_0 - 1)(x_1 - 1)$. Tomando $n = 2$ na Proposição (3.3), obtemos $G' = \mathbb{N}$ e então $c' = 0$. Então a fórmula $c = (x_0 - 1)(x_1 - 1)$ é a mesma da obtida na Proposição (3.3). Temos $g_{n-1} = g_0 = x_0$.

Definição 3.5. Dizemos que os números naturais $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ formam uma sequência agradável quando:

$$\frac{x_j}{g_j} \in \left[\frac{x_0}{g_{j-1}}, \frac{x_1}{g_{j-1}}, \dots, \frac{x_{j-1}}{g_{j-1}} \right],$$

para cada $1 \leq j \leq n - 1$.

Observação 3.2. i) x_0, x_1 formam uma sequência agradável se $\text{MDC}(x_0, x_1) = 1$.

ii) Se x_0, x_1, \dots, x_{n-1} formam uma sequência agradável, então $\frac{x_0}{g_j}, \frac{x_1}{g_j}, \dots, \frac{x_j}{g_j}$ também formam uma sequência agradável para $1 \leq j \leq n - 1$.

Proposição 3.5. Seja $G = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$, então $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ é sequência agradável se, e somente se, o condutor c de G é dado por:

$$c - 1 = -x_1 + \left(\frac{x_1}{g_1} - 1\right)x_0 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_{j+1}.$$

Demonstração. (\Rightarrow) A demonstração será por indução sobre n . Para $n = 2$ o resultado segue da Observação (3.1). Seja $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ uma sequência agradável. Pelo item ii) da Observação (3.2), temos que $\frac{x_0}{g_{n-2}}, \frac{x_1}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}$ é sequência agradável. Seja c' o condutor de $\left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}\right]$. Por hipótese de indução, temos:

$$c' - 1 = -\frac{x_1}{g_{n-2}} + \left(\frac{x_1}{g_1} - 1\right)\frac{x_0}{g_{n-2}} + \sum_{j=1}^{n-3} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)\frac{x_{j+1}}{g_{n-2}}.$$

Como x_0, x_1, \dots, x_{n-1} é sequência agradável, temos:

$$\left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}\right] = \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1}\right].$$

Então, pela Proposição (3.3), segue que $c - 1 = (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}$. Usando o valor de c' dado pela hipótese de indução, temos o resultado.

(\Leftarrow) Ver [1] Teorema 1, pág. 272. □

A Proposição (3.5) é útil para os casos em que não sabemos nada sobre os números x_0, x_1, \dots, x_{n-1} .

Proposição 3.6. Sejam $x_0 < x_1, \dots < x_{n-1}$ números naturais tais que $g_0 > g_1 > \dots > g_{n-1} = 1$, temos:

$$G = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \quad \text{e} \quad G' = \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1}\right].$$

Então, G é simétrico $\Leftrightarrow G'$ é simétrico.

Demonstração. Pela Proposição (3.3), temos $c - 1 = (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}$, onde c é o condutor de G e c' é o condutor de G' .

(\Rightarrow) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha + \beta = c' - 1$. Suponhamos que $\alpha \in G'$. Temos:

$$c - 1 = (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1}.$$

Então:

$$\alpha g_{n-2} + \beta g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1} = c - 1.$$

Temos $\alpha g_{n-2} \in G$, pois $\alpha \in G'$. Como G é simétrico, temos que $\beta g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1} \notin G$. Então, da Proposição (3.2), segue que $\beta \notin G'$.

De modo análogo, para $\alpha \notin G'$, concluímos que $\beta \in G'$.

(\Leftarrow) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha + \beta = c - 1$. Suponhamos que $\alpha \in G$. Pela Proposição (3.2), $\alpha = \lambda_1 g_{n-2} + \lambda_2 x_{n-1}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \in G'$ e $0 \leq \lambda_2 < g_{n-2}$. Então:

$$\beta = c - 1 - \alpha = (c' - 1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1)x_{n-1} - \lambda_1 g_{n-2} - \lambda_2 x_{n-1}.$$

Assim:

$$\beta = (c' - 1 - \lambda_1)g_{n-2} + (g_{n-2} - 1 - \lambda_2)x_{n-1}.$$

Pela simetria de G' , temos $c' - 1 - \lambda_1 \notin G'$. Da Proposição (3.2), temos $\beta \notin G$.

De modo análogo, para o caso $\alpha \notin G$, concluímos que $\beta \in G$. \square

Proposição 3.7. Seja x_0, x_1, \dots, x_{n-1} uma seqüência agradável e $G = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$. Então, G é simétrico.

Demonstração. A demonstração será por indução sobre n . Para $n = 2$, o resultado segue da Observação (3.1) e da Proposição (3.6). Seja x_0, x_1, \dots, x_{n-1} uma seqüência agradável, então temos que $\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}$ é seqüência agradável. Por hipótese de indução, $G' = \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}} \right]$ é simétrico. Como x_0, x_1, \dots, x_{n-1} é seqüência agradável, temos:

$$\left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}} \right] = \left[\frac{x_0}{g_{n-2}}, \dots, \frac{x_{n-2}}{g_{n-2}}, x_{n-1} \right].$$

Assim, temos que G' simétrico. Portanto, da Proposição (3.6) segue que G é simétrico. \square

Definição 3.6. Sejam G um semigrupo, $m = \min(G \setminus \{0\})$ e $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$ a seqüência de Apéry de G em relação a m . Dizemos que o semigrupo G cresce fortemente se:

$$a_i + a_j \leq a_{i+j},$$

para cada $0 \leq i \leq m - 1$ e cada $0 \leq j \leq m - 1$ tal que $i + j \leq m - 1$.

Proposição 3.8. Seja G um semigrupo, se G cresce fortemente então G é simétrico.

Demonstração. Seja $a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1}$ a sequência de Apéry de G em relação a $m = \min(G \setminus \{0\})$. Pela proposição (3.4), é suficiente mostrar que $a_{m-1} - a_i = a_{m-1-i}$, para $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Para $i = 0$, temos o resultado, pois $a_0 = 0$. Suponhamos por indução que $a_{m-1} - a_r = a_{m-1-r}$, para $r = 0, 1, \dots, k-1$. Vamos mostrar que $a_{m-1} - a_k = a_{m-1-k}$. Como $\overline{a_0}, \dots, \overline{a_{m-1}}$ são as distintas classes de equivalência módulo m , temos $\overline{a_{m-1}} - \overline{a_k} = \overline{a_j}$, para algum $\overline{a_j} \in \{\overline{a_0}, \dots, \overline{a_{m-1}}\}$. Assim, $a_{m-1} - a_k \equiv a_j \pmod{m}$ para algum $0 \leq j \leq m-1$. Inicialmente, vamos mostrar que $0 \leq j \leq m-1-k$. Suponhamos que $j = m-k+s$, para algum $0 \leq s \leq k-1$, então $j = m-k+s = m-1 - ((k-1) - s)$. Tomando $r = (k-1) - s$, temos $0 \leq r \leq k-1$. Assim, $j = m-1-r$, para algum $0 \leq r \leq k-1$. Temos então $a_j = a_{m-1-r} = a_{m-1} - a_r$. Assim, $a_{m-1} - a_k \equiv a_{m-1} - r - a_{m-1} - a_r \pmod{m}$. Desse modo, teríamos, $a_k \equiv a_r \pmod{m}$ para algum $0 \leq r \leq k-1$, contradição com a Proposição (3.1).

Dos argumentos acima temos que $a_{m-1} - a_k \equiv a_j \pmod{m}$, para algum $0 \leq j \leq m-1-k$. Escrevemos $a_{m-1} - a_k = a_j + \lambda m$, para algum $0 \leq j \leq m-1-k$ e algum $\lambda \in \mathbb{Z}$. De $j \leq m-1-k$, segue que $j+k \leq m-1$ e então $a_k + a_j \leq a_{k+j}$, pois G cresce fortemente.

Observe que se $\lambda = 0$, então $a_{m-1} = a_k + a_j \leq a_{k+j}$, daí $a_{m-1} - a_k = a_j \leq a_{k+j} - a_k \leq a_{m-1} - a_k$ assim, $k+j = m-1$ e concluímos o resultado. Vamos mostrar que $\lambda = 0$.

Suponhamos $\lambda < 0$. Como $a_i = \min\{\overline{a_i} \pmod{p}\} \cap G$ e $a_{m-1} \leq a_{k+j} + \lambda m$, da Proposição (3.1) segue que $a_{m-1} - m < a_{k+j} + \lambda m$ contradiz a_{m-1} ser o maior número natural que não pertence a G . Suponhamos então $\lambda > 0$. Como $a_{m-1} = a_k + a_j + \lambda m$, então $a_{m-1} - m = a_k + a_j + (\lambda - 1)m$. Da Proposição (3.1) segue que $a_{m-1} - m < a_k + a_j + (\lambda - 1)m \in G$ o que contradiz $a_{m-1} - m \notin G$. Assim, temos $\lambda = 0$ e concluímos usando a Proposição (3.4) que G é simétrico. \square

Definição 3.7. Sejam G semigrupo e $m = \min(G \setminus \{0\})$. Definimos a sequência dos elementos de G onde o máximo divisor comum varia por:

$$x_0 = m;$$

$$x_1 = \min(G \setminus m\mathbb{N}).$$

Definimos $g_1 = \text{MDC}(x_0, x_1)$, temos então $g_1 < g_0 := x_0$.

Se $g_1 = 1$, então a sequência é formada apenas por x_0, x_1 . Se $g_1 > 1$, então definimos x_2 e g_2 , por:

$$x_2 = \min\{x \in G; \text{MDC}(x_0, x_1, x) < g_1\} \quad \text{e} \quad g_2 = \text{MDC}(x_0, x_1, x_2).$$

Se $g_2 = 1$, então a sequência é formada apenas por x_0, x_1, x_2 . Se $g_2 > 1$, então definimos x_3 e g_3 , por:

$$x_3 = \min\{x \in G; MDC(x_0, x_1, x_2, x) < g_2\} \quad \text{e} \quad g_3 = MDC(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Desse modo, definimos uma sequência $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ de G tal que:

- i) $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1}$;
- ii) $g_0 > g_1 > \dots > g_{n-2} > g_{n-1} = 1$.

Proposição 3.9. Se G e H são semigrupos simétricos tais que $H \subseteq G$ e ambos têm o mesmo condutor, então $H = G$.

Demonstração. Seja c condutor de G e H . Dado $x \in G$, como G é simétrico, temos $(c-1) - x \notin G$, como $H \subseteq G$ segue que $(c-1) - x \notin H$. Mas $x + (c-1) - x = c-1$. Como H é simétrico, temos $x \in H$. Portanto $G \subseteq H$. \square

Proposição 3.10. Sejam G semigrupo, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} a sequência de elementos de G onde o máximo divisor comum varia e $H = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$. Se G cresce fortemente, temos:

- i) x_0, x_1, \dots, x_{n-1} é sequência agradável;
- ii) $H = G$.

Demonstração. Sejam m e $g_j, 0 \leq j \leq n-1$, como na Definição (3.7), $a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1}$ a sequência de Apéry de G em relação à m , c o condutor de G e c' o condutor de H .

Como $H \subseteq G$, temos $c' \geq c$. Sabemos que:

$$c' \leq -x_0 + \left(\frac{x_0}{g_1} - 1\right)x_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_{j+1} + 1.$$

Como $c = a_{m-1} - m + 1, x_0 = m$ e $x_1 = a_1$, temos:

$$a_{m-1} \leq \left(\frac{m}{g_1} - 1\right)a_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_{j+1}.$$

Suponhamos que sabemos provar que $x_{j+1} \leq a_{\frac{m}{g_j}}$, para cada $j = 1, 2, 3, \dots, n-2$. Como G cresce fortemente, temos:

$$\left(\frac{m}{g_1} - 1\right)a_1 \leq a_{\frac{m}{g_1}-1}; \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)a_{\frac{m}{g_j}} \leq a_{\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)\frac{m}{g_j}} = a_{m-\frac{m}{g_1}}. \quad (3.2)$$

Usando as desigualdades (3.1) e (3.2), supondo que $x_{j+1} \leq a_{\frac{m}{g_j}}$ na expressão de a_{m-1} , como G cresce fortemente, temos: $a_{m-1} \leq a_{\frac{m}{g_1}-1} + a_{m-\frac{m}{g_1}} \leq a_{m-1}$, onde na última desigualdade também usamos que G cresce fortemente. Obtemos então uma igualdade, o que implica que as desigualdades (3.1) e (3.2) também são igualdades. Em particular, temos:

$$x_{j+1} = a_{\frac{m}{g_j}}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$c = c' = -x_0 + \left(\frac{x_0}{g_1} - 1\right)x_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_{j+1} + 1.$$

Pela Proposição (3.5) segue que x_0, x_1, \dots, x_{n-1} é sequência agradável, assim pela Proposição (3.7) $H = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ é semigrupo simétrico. Além disso, o semigrupo G é simétrico pela Proposição (3.8).

Para concluir a demonstração, resta provar que $x_{j+1} \leq a_{\frac{m}{g_j}}$, para cada $j = 1, 2, \dots, n-2$. Suponhamos que $x_{j+1} > a_{\frac{m}{g_j}}$, para algum $j = 1, 2, \dots, n-2$. Então, temos $m < a_1 < a_2 < \dots < a_{\frac{m}{g_j}} < x_{j+1}$. Pela definição de x_{j+1} , como o MDC dos elementos da sequência de Apéry varia, segue que g_j divide a_k , para $k = 1, 2, \dots, \frac{m}{g_j}$. Podemos escrever de modo único $a_k = \alpha_k m + \beta_k g_j$, onde $\alpha_k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \beta_k < \frac{m}{g_j}$, para cada $1 \leq k \leq \frac{m}{g_j}$.

Sejam $k, k' \in \left\{1, 2, \dots, \frac{m}{g_j}\right\}$ distintos. Então se $\beta_k = \beta_{k'}$ temos $a_k \equiv a_{k'} \pmod{m}$, contradição com Proposição (3.1). Assim, $\beta_k \neq \beta_{k'}$. Desse modo, teríamos que $\left\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\frac{m}{g_j}}\right\}$ são $\frac{m}{g_j}$ elementos distintos em $\left\{1, 2, \dots, \frac{m}{g_j} - 1\right\}$ e então, temos $x_{j+1} \leq a_{\frac{m}{g_j}}$. \square

Observação 3.3. Seja G semigrupo que cresce fortemente. Se G é gerado por, no mínimo, n elementos, então esses elementos são $m < a_1 < a_{\frac{m}{g_1}} < \dots < a_{\frac{m}{g_{n-2}}}$. Ademais, esses são os elementos da sequência de G , onde o máximo divisor comum varia. Temos ainda:

$$c = -a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1\right)m + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)a_{\frac{m}{g_j}} + 1.$$

4 SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS ALGEBRÓIDES

Neste capítulo, estudamos o semigrupo G associado a um ponto singular P de uma curva algebróide reduzida. Abordamos principalmente os resultados de Garcia [7] e [8], que utilizam propriedades das sequências de Apéry para estudar o semigrupo G no caso de curvas algebróides birramificadas singulares, com objetivo de determinar fórmulas para se obter o semigrupo G em função do semigrupo G_1 , associado ao ramo f_1 , do semigrupo G_2 , associado ao ramo f_2 e do índice de inserção v , dos ramos f_1 e f_2 .

4.1 SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS UNIRRAMIFICADAS

Sejam K um corpo algebricamente fechado e f_1 um elemento irredutível do anel de séries de potências $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$. Pelo Lema da Unitangente (2.2), sabemos que f_1 tem uma única tangente, ou seja, se m_1 denota a multiplicidade de f_1 , então sua forma inicial é, a menos de um fator constante, da forma:

$$F_{m_1}(X, Y) = (Y - \alpha X)^{m_1}, \text{ para algum } \alpha \in K \text{ ou } X^{m_1}.$$

Sabemos que $f_1 = 0$ representa a equação de uma curva algebróide reduzida unirramificada. Denotamos por $\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$ o anel de coordenadas de f_1 e por \bar{g} a imagem em \mathcal{O}_{f_1} de um elemento $g \in \mathcal{A}$. Seja $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ o fecho inteiro de \mathcal{O}_{f_1} no seu corpo de frações, então $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ é anel de valorização discreta. Denotamos por ω_1 a valorização correspondente em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$.

Proposição 4.1. Sejam f_1 uma curva algebróide irredutível e $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ o fecho inteiro do anel de coordenadas $\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$ de f_1 . Dadas uma série $g \in K[[X, Y]]$ não nula e v a valorização discreta normalizada de $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$, então temos:

$$I(f_1, g) = v(\bar{g}),$$

onde $\bar{g} = g + f_1$ é a classe de restos de g em \mathcal{O}_{f_1} .

Demonstração. Como $\bar{g} \in \mathcal{O}_{f_1} \subset \tilde{\mathcal{O}}_{f_1} = K[[t]]$, podemos escrever $\bar{g} = a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \dots$, com $a_j \in K$ e $a_n \neq 0$. Assim, $v(\bar{g}) = v(a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \dots) = n$, pois $v(t) = 1$. Logo, $\bar{g} = t^n \cdot u$, com u invertível em $K[[t]]$, pois $a_n \neq 0$. Assim, temos:

$$\dim_K \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}}{\bar{g} \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}} \right) = \dim_K \left(\frac{K[[t]]}{\bar{g} K[[t]]} \right) = \dim_K \left(\frac{K[[t]]}{t^n K[[t]]} \right) = n = v(\bar{g}).$$

Por definição, temos:

$$I(f_1, g) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, g \rangle} = \dim_K \frac{\mathcal{O}_{f_1}}{\bar{g}\mathcal{O}_{f_1}}.$$

Temos então que $I(f, g) = v(\bar{g})$, pois $\dim_K \frac{\mathcal{O}_{f_1}}{\bar{g}\mathcal{O}_{f_1}} = \dim_K \frac{\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}}$. \square

Nessas condições, definimos:

Definição 4.1. O semigrupo associado a uma curva algebróide plana afim irredutível f_1 é:

$$G_1 = G(f_1) = \{\omega_1(\bar{g}); g \in \mathcal{A}\}.$$

Sabemos a partir da caracterização de Angermüller e das propriedades de sequências de Apéry que o semigrupo G_1 **possui condutor** e a propriedade **simétrica**.

Definição 4.2. Sejam $R \subset S$ anéis. Definimos o ideal condutor \mathcal{C} de R em S , como sendo:

$$\mathcal{C} = \{r \in R; r \cdot S \subset R\}.$$

Note que pela definição de \mathcal{C} , segue que \mathcal{C} é ideal de R e de S simultaneamente.

Proposição 4.2. Sejam $R \subseteq S \subseteq T$ anéis, \mathcal{C}_1 o condutor de R em S , \mathcal{C}_2 o condutor de S em T e \mathcal{C}_3 o condutor de R em T . Então, $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_3$.

Demonstração. Seja $x = yz \in \mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2$, para mostrar que $x \in \mathcal{C}_3$ é suficiente mostrar que $yzt \in R$, $\forall yz \in \mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2$ e $\forall t \in T$. Como \mathcal{C}_2 é condutor de S em T , temos que $zt \in S$, $\forall z \in \mathcal{C}_2$ e $\forall t \in T$ e, como \mathcal{C}_2 é condutor de R em S , temos $y(zt) \in R$, $\forall y \in \mathcal{C}_1$ e $\forall zt \in S$. Portanto, $x \in \mathcal{C}_3$. \square

Denotamos por \mathcal{C}_1 o condutor de \mathcal{O}_{f_1} em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ e por c_1 o condutor de $G_1 = G(f_1)$. As relações entre o condutor \mathcal{C}_1 de \mathcal{O}_{f_1} e o condutor c_1 de $G_1 = G(f_1)$, são dadas por:

$$\mathcal{C}_1 = \pi_1^{c_1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}; \mathcal{C}_1 = \{\alpha_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}; \omega_1(\alpha_1) \geq c_1\}; \quad (4.1)$$

$$c_1 = \min\{\omega_1(\alpha_1); \alpha_1 \in \mathcal{C}_1 \setminus \{0\}\}, \quad (4.2)$$

onde π_1 é um uniformizante em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$.

Dado $g \in K[[X, Y]]$ não pertencente ao ideal $\langle f_1 \rangle \subset \mathcal{A}$, ou seja, $g \in \mathcal{A} \setminus \langle f_1 \rangle$. Denotamos por \bar{g} a imagem de g em $\frac{\mathcal{A}}{\langle f_1 \rangle} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$ e então:

$$\omega_1(\bar{g}) = I(f_1, g) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, g \rangle}.$$

Temos:

$$G_1 = G(f_1) = \{\omega_1(\bar{g}); g \in K[[X, Y]]\} = \{I(f_1, g); g \in K[[X, Y]]\}.$$

Seja $f_1 \in K[[X, Y]]$ irredutível, com multiplicidade m_1 . Depois de uma mudança de coordenadas e aplicando o Teorema da Preparação de Weierstrass (2.2), obtemos outro elemento da mesma classe de equivalência de f_1 , assim o semigrupo $G_1 = G(f_1)$ permanece o mesmo. Nessas condições, podemos assumir que:

$$f_1 = Y^{m_1} + d_1(X)Y^{m_1-1} + \cdots + d_{m_1}(X),$$

onde $d_j(X) \in K[[X]]$ e $\text{ord}(d_j(X)) > j$, para cada $j = 1, 2, \dots, m_1$.

Temos que $m_1 = \min(G_1 \setminus \{0\})$, já que a valorização e o índice de interseção coincidem. Então, devemos ter:

$$\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle} \cong \frac{K[[X]][Y]}{\langle f_1 \rangle} \cong K[[X]] \oplus K[[X]]y \oplus \cdots \oplus K[[X]]y^{m_1-1},$$

onde y é a classe de restos de Y módulo f_1 .

Temos então a base $\{\bar{1}, y, y^2, \dots, y^{m_1-1}\}$ de \mathcal{O}_{f_1} como $K[[X]]$ -módulo livre.

Vamos mostrar que podemos determinar uma $K[[X]]$ -base de \mathcal{O}_1 , obtida de $\{\bar{1}, y, \dots, y^{m_1-1}\}$, que nos permite obter a seqüência de Apéry de G_1 .

Teorema 4.1 (Angermüller e Azevedo). Sejam f_1 uma curva algebróide plana irredutível, $\mathcal{O}_{f_1} = K[[X]] \oplus K[[X]]y \oplus \cdots \oplus K[[X]]y^{m_1-1}$ seu anel local, $m_1 = \omega_1(X)$ e

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m_1-1},$$

a seqüência de Apéry de G_1 em relação a m_1 . Considere a seguinte cadeia de submódulos de \mathcal{O}_{f_1} :

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{m_1-1},$$

definida por:

$$M_i = K[[X]] \oplus K[[X]]y \oplus \cdots \oplus K[[X]]y^i.$$

Então, temos:

i) para cada $i = 1, \dots, m_1 - 1$, existe $\bar{A}_i \in y^i + M_{i-1}$ tal que $\omega_1(\bar{A}_i) \notin \omega_1(M_{i-1})$.

ii) Tomando $\bar{A}_0 = 1$, temos:

$$\mathcal{O}_{f_1} = K[[X]]\bar{A}_0 \oplus K[[X]]\bar{A}_1 \oplus \cdots \oplus K[[X]]\bar{A}_{m_1-1}.$$

iii) $\omega_1(\bar{A}_i) + \omega_1(\bar{A}_{i-j}) \leq \omega_1(\bar{A}_j)$, para todos $0 \leq i \leq j \leq m_1 - 1$. Em particular:

$$0 = \omega_1(\bar{A}_0) < \omega_1(\bar{A}_1) < \cdots < \omega_1(\bar{A}_{m_1-1}).$$

iv) $\omega_1(\bar{A}_i) = a_i$, ou seja, $\omega_1(\bar{A}_0) < \omega_1(\bar{A}_1) < \cdots < \omega_1(\bar{A}_{m_1-1})$ é a sequência de Apéry de G_1 em relação a m_1 .

Demonstração. i) Suponhamos por contradição que para algum $i \in \{\bar{1}, y, \dots, m_1 - 1\}$ e todo $\alpha_1 \in y^i + M_{i-1}$ temos $\omega_1(\alpha_1) \in \omega_1(M_{i-1})$. Vamos construir uma sequência $(x_n) \subset M_{i-1}$ tal que $\omega_1(y^i - x_n) \geq n$. Seja $x_0 = 0$, então $x_0 \in M_{i-1}$. Suponhamos que exista $x_n \in M_{i-1}$ tal que $\omega_1(y^i - x_n) \geq n$. Como $y^i - x_n \in M_{i-1}$, temos $\omega_1(y^i - x_n) \in \omega_1(M_{i-1})$. Assim, existe $\tilde{x}_n \in M_{i-1}$ tal que:

$$\omega_1(y^i - x_n) = \omega_1(\tilde{x}_n) \geq n.$$

Seja $g_n = \omega_1(\tilde{x}_n)$. Assim, $g_n \geq n$. Escrevemos:

$$y^i - x_n = c_n t^{g_n} + c_{n+1} t^{g_{n+1}} + \cdots \quad \text{e} \quad \tilde{x}_n = d_n t^{g_n} + d_{n+1} t^{g_{n+1}} + \cdots$$

com $c_r, d_r \in K$, para $r \geq n$, $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

Temos:

$$y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n = \left(c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n} d_{n+1} \right) t^{g_{n+1}} + \cdots$$

Logo,

$$\omega_1 \left(y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n \right) = \omega_1 \left(\left(c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n} d_{n+1} \right) t^{g_{n+1}} + \cdots \right) \geq g_{n+1} \geq n + 1.$$

Seja $x_{n+1} = x_n + \frac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n$. Temos:

$$|x_{n+1} - y^i|_{\omega_1} = 2^{-\omega_1(x_{n+1} - y^i)} \leq 2^{-n(n+1)}.$$

Assim, (x_n) converge para y^i na norma induzida pela valorização. Como $x_n \in M_{i-1}$ e M_{i-1} é completo, segue que $y^i \in M_{i-1}$, o que contradiz o fato de que M_{i-1} só contém potências de y de 1 a $i - 1$.

ii) Vamos mostrar, por indução sobre i , que $M_i = K[[X]]\bar{A}_0 \oplus \cdots \oplus K[[X]]\bar{A}_i$.

Para $i = 0$ o resultado é imediato, tomando $\bar{A}_0 = 1$.

Pelo item i) temos $\bar{A}_i \in y^i + M_{i-1}$, então existe $n_{i-1} \in M_{i-1}$ tal que $\bar{A}_i = y^i + n_{i-1}$. Suponhamos por indução que existe $i > 0$ tal que $M_{i-1} = K[[X]]\bar{A}_0 \oplus \cdots \oplus K[[X]]\bar{A}_{i-1}$.

Assim, por hipótese, $M_i = M_{i-1} \oplus K[[X]]y^i$. Portanto:

$$\begin{aligned} M_i &= K[[X]]\bar{A}_0 \oplus \cdots \oplus K[[X]]\bar{A}_{i-1} \oplus K[[X]](\bar{A}_i - n_{i-1}) \\ &= K[[X]]\bar{A}_0 \oplus \cdots \oplus K[[X]]\bar{A}_{i-1} \oplus K[[X]]\bar{A}_i. \end{aligned}$$

iii) Pelo item i), existem $n_1, \dots, n_s \in M_{i-1}$ tais que $\bar{A}_i = y^i + n_i$. Assim, $\bar{A}_i\bar{A}_{j-i} = n + \bar{A}_j$, onde $n = \bar{A}_i\bar{A}_{j-i} - \bar{A}_j$. Daí, $\omega_1(n) \geq \min\{\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}), \omega_1(\bar{A}_j)\}$. Então, temos dois casos:

Caso 1: Se $\min\{\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}), \omega_1(\bar{A}_j)\} = \omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i})$ então:

$$\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}) = \omega_1(\bar{A}_i) + \omega_1(\bar{A}_{j-i}) \leq \omega_1(\bar{A}_j).$$

Caso 2: Se $\min\{\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}), \omega_1(\bar{A}_j)\} = \omega_1(\bar{A}_j)$, então:

$$\omega_1(\bar{A}_j) \leq \omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}) \text{ e } \omega_1(n) \geq \omega_1(\bar{A}_j).$$

De $\bar{A}_j = \bar{A}_i\bar{A}_{j-i} - n$, temos:

$$\omega_1(\bar{A}_j) \geq \min\{\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}), \omega_1(n)\},$$

logo, $\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i})$ ou $\omega_1(n) = \omega_1(\bar{A}_j)$.

Como $\bar{A}_j = \bar{A}_i - n$, temos $\omega_1(\bar{A}_j) \geq \min\{\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-1}), \omega_1(n)\}$. Logo, $\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(n)$ ou $\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-1})$. Assim, é suficiente mostrar que $\omega_1(n) \neq \omega_1(\bar{A}_j)$ para concluir que $\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-1})$. De i) temos que $\bar{A}_j \in y^j + M_{j-1}$ e $\omega_1(\bar{A}_j) \notin \omega_1(M_{j-1})$, mas $n \in M_{j-1}$, assim $\omega_1(n) \neq \omega_1(\bar{A}_j)$. Portanto,

$$\omega_1(\bar{A}_i\bar{A}_{j-i}) = \omega_1(\bar{A}_i) + \omega_1(\bar{A}_{j-i}) = \omega_1(\bar{A}_j).$$

iv) Vamos mostrar inicialmente que $\omega_1(\bar{A}_i) \not\equiv \omega_1(\bar{A}_j) \pmod{m}$ se $i \neq j$.

Suponhamos que $\omega_1(\bar{A}_i) \equiv \omega_1(\bar{A}_j) \pmod{m}$ para $i < j$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(\bar{A}_i) + \lambda m$. Por iii), $\lambda \geq 0$. Assim:

$$\omega_1(\bar{A}_j) = \omega_1(\bar{A}_i) + \lambda \omega_1(x) = \omega_1(\bar{A}_i) + \omega_1(x^\lambda) = \omega_1(\bar{A}_i x^\lambda) \in \omega_1(M_{j-1}).$$

O que contradiz o fato de que $\omega_1(\bar{A}_j) \notin \omega_1(M_{j-1})$.

Vamos agora mostrar que:

$$G = \omega_1(\mathcal{O}_{f_1} \setminus \{0\}) = \bigcup_{j=0}^{m_1-1} (\omega_1(\bar{A}_j) + m_1\mathbb{N}).$$

Temos a inclusão $\bigcup_{j=0}^{m_1-1} (\omega_1(\bar{A}_j) + m_1\mathbb{N}) \subseteq \omega_1(\mathcal{O}_{f_1} \setminus \{0\})$. Para mostrar a inclusão contrária, note que se $n \in \omega_1(\mathcal{O}_{f_1} \setminus \{0\})$ então existem $\alpha_i(x) \in K[[x]]$ tais que:

$$\begin{aligned} n &= \omega_1(a_0(x) + a_1(x)\bar{A}_1 + \cdots + a_{m_1-1}(x)\bar{A}_{m_1-1}) \\ &\geq \min\{\omega_1(a_i(x)) + \omega_1(\bar{A}_i)\} \end{aligned}$$

Como $\omega_1(a_i(x)) + \omega_1(\bar{A}_i)$ são distintos para $i = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ então

$$n = \min_{0 \leq i \leq m_1-1} \{\omega_1(a_i(x)) + \omega_1(\bar{A}_i)\}.$$

Logo $n \in \omega_1(\bar{A}_j + m_1\mathbb{N})$ para algum $j \in \{0, 1, \dots, m_1 - 1\}$.

Assim, pela Proposição (3.1), podemos concluir que $0 < \omega_1(\bar{A}_1) < \omega_1(\bar{A}_2) < \cdots < \omega_1(\bar{A}_{m_1-1})$ é a sequência de Apéry de G_1 em relação a m_1 . Portanto, $0 < \omega_1(\bar{A}_1) < \omega_1(\bar{A}_2) < \cdots < \omega_1(\bar{A}_{m_1-1})$ é a sequência de Apéry de G_1 em relação a m_1 . \square

Considerando a base $\{\bar{1} = \bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{m_1-1}\}$ de \mathcal{O}_{f_1} , determinada no Teorema (4.1), escrevemos:

$$A_k = Y^k + \sum_{p=0}^{k-1} A_{k,p}(X)y^p, \text{ onde } A_{k,p}(X) \in K[[X]].$$

Proposição 4.3. Seja $A_k = Y^k + \sum_{p=0}^{k-1} A_{k,p}(X)Y^p$. Então:

$$\text{ord}(A_{k,p}(X)) \geq k - p, \text{ para todo } 1 \leq k \leq m_1 - 1 \text{ e } 0 \leq p \leq k - 1.$$

onde $\text{ord}(A_{k,p}(X)) \geq k - p$ é o menor inteiro positivo n tal que αX^n é parcela de $A_{k,p}(X) \in K[[X]]$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a forma inicial de A_k é Y^r para algum $r \in \mathbb{N}$, ou seja, Y é a única tangente a A_k . Temos:

$$A_k = Y^k + \sum_{p=0}^{k-1} A_{k,p}(X)Y^p.$$

Suponhamos que A_k possui outra tangente além de Y . Tomando um fator irredutível g de A_k com essa outra tangente, temos $A_k = g \cdot h$ para algum $h \in \mathcal{A}$.

Então $a_k = \omega_1(\bar{A}_k) = \omega_1(\bar{g}) + \omega_1(\bar{h})$, ou seja, $a_k \in m_1\mathbb{N} + G$, que é uma contradição com $\omega_1(\bar{g}) = I(f, g) = m_1 \cdot m_g$, onde m_1 e m_g são as multiplicidades de f_1 e g , ou seja $\omega_1(\bar{g})$ é múltiplo de m_1 .

Vamos mostrar que $\text{ord}(A_{k,p}(X)) \geq k - p$. Suponhamos que $\text{ord}(A_{k,p}(X)) < k - p$. Para este k , tomando na expressão

$$A_k = Y^k + \sum_{p=0}^{k-1} A_{k,p}(X)Y^p$$

o termo $A_{k,p}$ com o p fixado acima, temos que a forma inicial de A_k tem grau menor que k . Seja A_k^i a forma inicial de A_k , onde:

$$A_k^i = Y^r + \prod_{j=1}^t (Y - \alpha_j X)^{r_j}, \text{ onde } r + \sum_{j=1}^t r_j < k.$$

Sabemos que a única tangente a A_k é Y , ou seja, $A_k^i = Y^s$, com $s < k$. Aplicando o Teorema da Preparação de Weierstrass (2.2), segue que existe uma unidade $u \in \mathcal{A}$, tal que:

$$uA_k = Y^s + d'_1(X)Y^{s-1} + \cdots + d'_s(X), \text{ onde } d'_j(X) \in K[[X]].$$

Logo,

$$\omega_1(\bar{A}_k) = a_k = \omega_1(Y^s + d'_1(X)Y^{s-1} + \cdots + d'_s(X)).$$

Então $a_k \in \omega_1(M_{k-1})$, pois $s < k$, o que contradiz o Teorema (4.1 i). \square

Nessas condições, temos $a_k = I(f_1, A_k) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, A_k \rangle}$, onde A_k tem a forma inicial igual à k -ésima potência da tangente à f_1 .

4.2 SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A CURVAS BIRRAMIFICADAS

Seja $f \in K[[X, Y]]$ uma curva algebróide birramificada singular em $P = (0, 0)$ tal que $f = f_1 \cdot f_2$ é a decomposição de f em $K[[X, Y]]$.

Sejam $\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}$ o anel de coordenadas de f . Sabemos que \mathcal{O} não possui elementos nilpotentes. (Ver [15] Vol II. Teorema 31, pág. 320), assim, na decomposição $f = f_1 \cdot f_2$, temos que f_1 e f_2 não são associados. A partir daqui, vamos dar os argumentos necessários para concluir a existência do seguinte diagrama:

Diagrama 1 - Diagrama do Anel de Coordenadas

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{O}} & \simeq & \tilde{\mathcal{O}}_{f_1} \times \tilde{\mathcal{O}}_{f_2} \\ \left| \mathcal{C} \right. & & \left| \mathcal{C}_1 \right. \quad \left| \mathcal{C}_2 \right. \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\mathcal{C}'} & \mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

No diagrama, a inclusão injetiva $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}$ é dada por:

$$\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle} \hookrightarrow \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle} \times \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2 \rangle}$$

$$g + f\mathcal{A} \mapsto (g + f_1\mathcal{A}, g + f_2\mathcal{A}),$$

onde $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$, $g \in \mathcal{A}$ é qualquer, $\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$ e $\mathcal{O}_{f_2} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2 \rangle}$.

Sejam $\tilde{\mathcal{O}}$ o fecho inteiro de \mathcal{O} em seu anel total de frações, $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$ os fechos inteiros de \mathcal{O}_{f_1} e \mathcal{O}_{f_2} , respectivamente.

$\tilde{\mathcal{O}}$ é um anel semi-local (i.e. possui um número finito de ideais maximais) com o número de ideais maximais igual ao número de ideais primos minimais em \mathcal{O} , ou seja, 2 ideais. Denotamos por m_1 e m_2 esses ideais maximais de $\tilde{\mathcal{O}}$.

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ representam respectivamente os condutores de \mathcal{O}_{f_1} em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ e de \mathcal{O}_{f_2} em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$. \mathcal{C} representa o condutor de \mathcal{O} em $\tilde{\mathcal{O}}$.

Consideramos em $\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}$ o ideal gerado pelos elementos f_1 e f_2 módulo f . Podemos observar que, via a inclusão, esse ideal de \mathcal{O} se estende ao ideal de $\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}$ dado por $f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2}$.

Proposição 4.4. Seja \mathcal{C}' o condutor de \mathcal{O} em $\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}$. Temos:

$$\mathcal{C}' = f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2}.$$

Demonstração. Sabemos que $f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}'$. Dado $g \in \mathcal{A}$, temos que:

$$g + f\mathcal{A} = (g + f_1\mathcal{A}, g + f_2\mathcal{A}).$$

Se $g + f\mathcal{A} \in \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{O}$, temos:

$$(g + f\mathcal{A}) \cdot (1, 0) = (g + f_1\mathcal{A}, 0) \in \mathcal{O} \quad \text{e} \quad (g + f\mathcal{A}) \cdot (0, 1) = (0, g + f_2\mathcal{A}) \in \mathcal{O}.$$

Então existem $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ tais que:

$$(g + f_1\mathcal{A}, 0) = (g_1 + f_1\mathcal{A}, g_1 + f_2\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (0, g + f_2\mathcal{A}) = (g_2 + f_1\mathcal{A}, g_2 + f_2\mathcal{A}).$$

Assim,

$$g_1 = f_2 \cdot h_1, \text{ para algum } h_1 \in K[[X, Y]] \quad \text{e} \quad g_2 = f_1 \cdot h_2, \text{ para algum } h_2 \in K[[X, Y]].$$

Logo,

$$g + f_1\mathcal{A} = f_2h_1 + f_1\mathcal{A} \quad \text{e} \quad g + f_2\mathcal{A} = f_1h_2 + f_2\mathcal{A}.$$

ou seja:

$$g + f\mathcal{A} = (g + f_1\mathcal{A}, g + f_2\mathcal{A}) = (f_2h_1 + f_1\mathcal{A}, f_1h_2 + f_2\mathcal{A}) \in f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2}.$$

Portanto, $\mathcal{C}' = f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2}$. \square

Denotamos por \mathcal{C}'' o condutor de $\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$. Segue das definições de condutor e produto cartesiano que $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Assim, pela proposição (4.2) temos $\mathcal{C}' \cdot \mathcal{C}'' = \mathcal{C}$, ou seja:

$$\mathcal{C}' = f_2\mathcal{C}_1 \times f_1\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}.$$

É conhecido que, em geral, não é válida a igualdade no caso da Proposição (4.4). No entanto, no caso em que abordamos nesse estudo, podemos provar a igualdade, ou seja:

Proposição 4.5. Seja \mathcal{C} o condutor de \mathcal{O} em $\tilde{\mathcal{O}}$, temos:

$$\mathcal{C} = f_2\mathcal{C}_1 \times f_1\mathcal{C}_2.$$

Demonstração. Da Proposição (4.2), temos $f_2\mathcal{C}_1 \times f_1\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$. Dado $g \in \mathcal{A}$, se $g + f\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, então $g + f\mathcal{A} \in \mathcal{C}'$, ou seja:

$$(g + f_1\mathcal{A}, g + f_2\mathcal{A}) \in f_2\mathcal{O}_{f_1} \times f_1\mathcal{O}_{f_2}.$$

Então, existem $h_1, h_2 \in K[[X, Y]]$ tais que:

$$(g + f_1\mathcal{A}, g + f_2\mathcal{A}) = (f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}, f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}).$$

Temos que mostrar que $h_1 + f_1\mathcal{A} \in \mathcal{C}_1$ e $h_2 + f_2\mathcal{A} \in \mathcal{C}_2$. Como $(f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}, f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}) \in \mathcal{C}$, temos:

$$\begin{aligned} (f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}, f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}) \cdot (\tilde{\mathcal{O}}_{f_1} \times \{0\}) &\subseteq \mathcal{O} \quad \text{e} \\ (f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}, f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}) \cdot (\{0\} \times \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}) &\subseteq \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Então:

$$(f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}, 0) \subseteq \mathcal{O} \quad \text{e} \quad (0, f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}.$$

Para mostrar que $h_1 + f_1\mathcal{A} \in \mathcal{C}_1$ e $h_2 + f_2\mathcal{A} \in \mathcal{C}_2$, basta mostrar que:

$$(h_1 + f_1\mathcal{A}) \cdot \alpha_1 \in \mathcal{O}_{f_1} \quad \text{e} \quad (h_2 + f_2\mathcal{A}) \cdot \alpha_2 \in \mathcal{O}_{f_2}, \quad \text{para } \alpha_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}, \alpha_2 \in \tilde{\mathcal{O}}_{f_2}.$$

Sabemos que:

$$((f_2 \cdot h_1 + f_1\mathcal{A}) \cdot \alpha_1, 0) \in \mathcal{O} \quad \text{e} \quad (0, (f_1 \cdot h_2 + f_2\mathcal{A}) \cdot \alpha_2) \in \mathcal{O}, \quad \text{para } \alpha_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_{f_1}, \alpha_2 \in \tilde{\mathcal{O}}_{f_2}.$$

Logo, temos a existência de $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ tais que:

$$\begin{aligned} ((f_2 \cdot h_1 + f_1 \mathcal{A}) \cdot \alpha_1, 0) &= (g_1 + f_1 \mathcal{A}, g_1 + f_2 \mathcal{A}) \quad \text{e} \\ (0, (f_1 \cdot h_2 + f_2 \mathcal{A}) \cdot \alpha_2) &= (g_2 + f_1 \mathcal{A}, g_2 + f_2 \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Assim, temos $g_1 = f_2 \cdot g'_1$, para algum $g'_1 \in \mathcal{A}$ e $g_2 = f_1 \cdot g'_2$, para algum $g'_2 \in \mathcal{A}$. Então:

$$(f_2 \cdot h_1 + f_1 \mathcal{A}) \cdot \alpha_1 = f_2 \cdot g'_1 + f_1 \mathcal{A} \quad \text{e} \quad (f_1 \cdot h_2 + f_2 \mathcal{A}) \cdot \alpha_2 = f_1 \cdot g'_2 + f_2 \mathcal{A}.$$

Como $\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$ são domínios, podemos cancelar respectivamente $f_2 + f_1 \mathcal{A}$ e $f_1 + f_2 \mathcal{A}$ nas igualdades acima em ambos os lados. Então, obtemos:

$$(h_1 + f_1 \mathcal{A}) \cdot \alpha_1 = g'_1 + f_1 \mathcal{A} \in \mathcal{O}_{f_1} \quad \text{e} \quad (h_2 + f_2 \mathcal{A}) \cdot \alpha_2 = g'_2 + f_2 \mathcal{A} \in \mathcal{O}_{f_2}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (g_1 + f_1 \mathcal{A}) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{f_1} &\subseteq \mathcal{O}_{f_1} \quad \text{e} \quad \text{então} \quad h_1 + f_1 \mathcal{A} \in \mathcal{C}_1, \\ (g_2 + f_2 \mathcal{A}) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{f_2} &\subseteq \mathcal{O}_{f_2} \quad \text{e} \quad \text{então} \quad h_2 + f_2 \mathcal{A} \in \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

□

Decorre da simetria de $G(f_1)$ e $G(f_2)$ que:

$$\dim_K(\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}/\mathcal{O}_{f_1}) = \dim_K(\mathcal{O}_{f_1}/\mathcal{C}_1) \quad \text{e} \quad \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}/\mathcal{O}_{f_2}) = \dim_K(\mathcal{O}_{f_2}/\mathcal{C}_2) \quad (\text{Ver [10]}).$$

Vamos mostrar que dessa informação local, podemos concluir que no caso semi-local o resultado também é válido.

Proposição 4.6. Sejam $\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \cdot f_2 \rangle}$, $\tilde{\mathcal{O}}$, o fecho inteiro de \mathcal{O} e \mathcal{C} o condutor de \mathcal{O} em $\tilde{\mathcal{O}}$. Temos:

$$\dim_K(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{C}).$$

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathcal{O}} \cong \tilde{\mathcal{O}}_{f_1} \times \tilde{\mathcal{O}}_{f_2} \\ | \\ \mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2} \\ | \\ \mathcal{O} \\ | \\ \mathcal{C}' = f_2 \mathcal{O}_{f_1} \times f_1 \mathcal{O}_{f_2} \\ | \\ \mathcal{C} = f_2 \mathcal{C}_1 \times f_1 \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Basta então mostrar que:

- i) $\dim_K(\mathcal{O}/(\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2})) = \dim_K(\mathcal{C}'/\mathcal{C})$.
- ii) $\dim_K((\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2})/\mathcal{O}) = \dim_K(\mathcal{O}/\mathcal{C}')$.

i) Temos:

$$\begin{aligned} \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2}) &= \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}_{f_1}/\mathcal{O}_{f_1}) + \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}/\mathcal{O}_{f_2}) \\ &= \dim_K(\mathcal{O}_{f_1}/\mathcal{C}_1) + \dim_K(\mathcal{O}_{f_2}/\mathcal{C}_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde a última igualdade é consequência dos seguintes isomorfismos de K espaços vetoriais.

Por outro lado:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O}_{f_1} \rightarrow f_2\mathcal{O}_{f_1} & \mathcal{O}_{f_2} \rightarrow f_1\mathcal{O}_{f_2} \\ g + f_1\mathcal{A} \mapsto f_2 \cdot g + f_1\mathcal{A} & g + f_2\mathcal{A} \mapsto f_1 \cdot g + f_2\mathcal{A}, \end{array}$$

$$\dim_K(\mathcal{C}'/\mathcal{C}) = \dim_K(f_2\mathcal{O}_{f_1}/f_2\mathcal{C}_1) + \dim_K(f_1\mathcal{O}_{f_2}/f_1\mathcal{C}_2) = \dim_K(\mathcal{O}_{f_1}/\mathcal{C}_1) + \dim_K(\mathcal{O}_{f_2}/\mathcal{C}_2).$$

ii) Basta mostrar que $\dim_K((\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2})/\mathcal{C}') = 2 \dim_K(\mathcal{O}/\mathcal{C}')$. Agora,

$$\begin{aligned} \dim_K((\mathcal{O}_{f_1} \times \mathcal{O}_{f_2})/\mathcal{C}') &= \dim_K(\mathcal{O}_{f_1}/f_2\mathcal{O}_{f_1}) + \dim_K(\mathcal{O}_{f_2}/f_1\mathcal{O}_{f_2}) \\ &= I(f_1, f_2) + I(f_2, f_1) \\ &= 2I(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Temos que mostrar então que $\dim_K(\mathcal{O}/\mathcal{C}') = I(f_1, f_2)$. Segue diretamente da definição de índice de interseção que:

$$\dim_K\left(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}\right) = \dim_K\left(\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2, f_1 \rangle}\right) = I(f_1, f_2).$$

Portanto, $\dim_K(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \dim_K(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{C})$. □

4.3 O semigrupo G no caso de curvas birramificadas

Definição 4.3. O semigrupo G associado ao ponto singular $(0, 0)$ da curva algebróide reduzida birramificada $f = 0$ é definido por:

$$G = \left\{ (\omega_1(\alpha), \omega_2(\alpha)); \alpha \in \mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \cdot f_2 \rangle} \right\},$$

onde w_1 e w_2 são respectivamente as valorizações associadas aos ramos f_1 e f_2 de f e $\mathcal{O} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \cdot f_2 \rangle}$ é o anel de coordenadas de f na singularidade.

Esse semigrupo, pode ser descrito por:

$$G = \{(I(f_1, g), I(f_2, g)); g \in \mathcal{A}\} = \{(\omega_1(\bar{g}), \omega_2(\bar{g})); g \in \mathcal{A}\},$$

onde \bar{g} e \bar{g} são as imagens de $g \in \mathcal{A}$ respectivamente em \mathcal{O}_{f_1} e \mathcal{O}_{f_2} . Consideramos $\pi_1(G) = G_1$ e $\pi_2(G) = G_2$, que são as projeções na primeira e segunda coordenadas, onde G_1 é associado a f_1 e G_2 a f_2 .

Denotamos por $v = I(f_1, f_2) = \dim_K \left(\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, f_2 \rangle} \right)$ e por c_1, c_2 os condutores de G_1 e G_2 , respectivamente.

Da fórmula $\mathcal{C} = \bar{f}_2 \mathcal{C}_1 \times \bar{f}_1 \mathcal{C}_2$, temos que:

$$\mathcal{C} = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}; \omega_1(\alpha) \geq v + c_1 \text{ e } \omega_2(\alpha) \geq v + c_2\}.$$

Podemos observar que no caso das curvas algebróides birramificadas, o semigrupo de valores associado ao ponto singular não é finitamente gerado como ocorre no caso das curvas algebróides unirramificadas. Veremos que o processo de determinar tais semigrupos dependerá do conceito de pontos maximais e que a propriedade de simetria desses pontos maximais é muito útil nesse processo.

No que segue, prosseguimos para o objetivo de determinar o semigrupo G associado a um ponto singular de uma curva algebróide reduzida birramificada $f = f_1 \cdot f_2 \in K[[X, Y]]$ a partir do semigrupo $G_1 = G(f_1)$, do semigrupo $G_2 = G(f_2)$ e do índice de intercessão $v = I(f_1, f_2) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, f_2 \rangle}$.

O próximo teorema determina o semigrupo G , em função de G_1, G_2 e v , fora do retângulo formado pelos eixos coordenados e as retas $x = v + c_1$ e $y = v + c_2$. Assim, após aplicar este teorema, para determinar todo o semigrupo G é suficiente determinar os finitos pontos G que estão dentro do retângulo citado.

Teorema 4.2. Seja $P = (v + x, v + y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- i) Se $x \geq c_1$ então $P \in G \Leftrightarrow y \in G_2$.
- ii) Se $y \geq c_2$ então $P \in G \Leftrightarrow x \in G_1$.

Demonstração. i) (\Leftarrow) Vamos mostrar que se $x \in G_1$ e $y \in G_2$ então $P \in G$. Sejam $g_1, g_2 \in K[[X, Y]]$ tais que $\omega_1(\bar{g}_1) = x$ e $\omega_2(\bar{g}_2) = y$. Tomando $g = g_1 f_2 + g_2 f_1$ temos

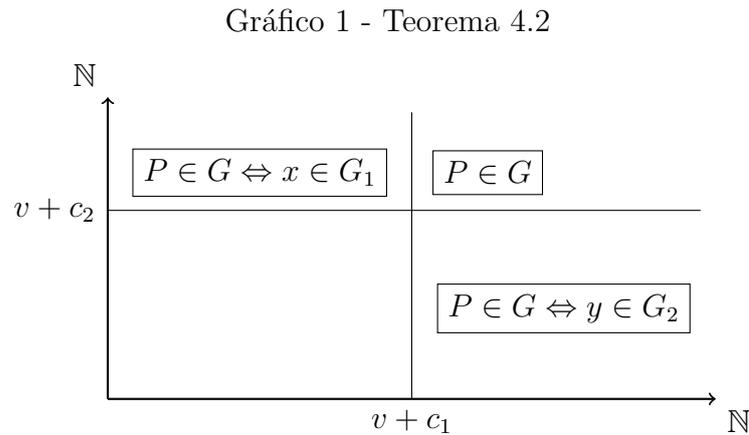
$$(v + x, v + y) = (\omega_1(\bar{g}), \omega_2(\bar{g})) \in G.$$

(\Rightarrow) Seja $g \in K[[X, Y]]$ tal que $(\omega_1(\bar{g}), \omega_2(\bar{g})) = (v + x, v + y)$. Seja $\alpha = \frac{\bar{g}}{f_2}$ no corpo de frações de \mathcal{O}_{f_1} . Como $\omega_1(\alpha) = x \geq c_1$, temos $\alpha \in \mathcal{C}_1$ e então $\bar{g} \in \bar{f}_2 \mathcal{C}_1$. Como $(\bar{g}, \bar{0}) \in \bar{f}_2 \mathcal{C}_1 \times \bar{f}_1 \mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ e $(\bar{g}, \bar{g}) = (\bar{g}, \bar{0}) + (\bar{0}, \bar{g})$, temos $(\bar{0}, \bar{g}) \in \mathcal{O}$. Então existe um elemento $h \in \mathcal{A}$ tal que $(\bar{0}, \bar{g}) = (\bar{h}, \bar{h})$. Como $h = f_1 h_1$ para algum $h_1 \in \mathcal{A}$, temos:

$$y = \omega_2(\bar{g}) - \omega_2(\bar{f}_1) = \omega_2(\bar{h}) - \omega_2(\bar{f}_1) = \omega_2(\bar{h}_1) \in G_2.$$

A prova do item ii) é análoga. \square

Observe que, a partir do Teorema (4.2) segue que dado um ponto $P = (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então $P \in G \Leftrightarrow y \in G_2$, se $b > v + c_2$, então $P \in G \Leftrightarrow x \in G_1$. Por fim, se $a > v + c_1$ e $b > v + c_2$, temos $P \in G$, pois as condições anteriores serão simultaneamente satisfeitas. Graficamente, temos:



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Definição 4.4. Dado $x \in \mathbb{N}$, a fibra vertical sobre x é conjunto $FV(x)$ dos pontos de G com abscissa igual a x , ou seja:

$$FV(x) = \{(x, y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x, y') \in G\}.$$

Dizemos que a fibra é infinita, finita e não vazia ou vazia, respectivamente quando o conjunto $FV(x)$ é infinito, finito, não vazio e vazio.

De acordo com o Teorema (4.2), temos:

$$FV(x) \text{ vazio} \Leftrightarrow x \notin G_1;$$

$$FV(x) \text{ finito e não vazio} \Leftrightarrow x \in G_1 \text{ e } x - v \notin G_1;$$

$$FV(x) \text{ infinito} \Leftrightarrow x - v \in G_1.$$

Analogamente, definimos:

Definição 4.5. Dado $y \in \mathbb{N}$, a fibra horizontal sobre y é o conjunto:

$$FH(y) = \{(x', y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x', y) \in G\}.$$

Também de modo análogo, temos:

$FH(y)$ vazio $\Leftrightarrow y \notin G_2$;

$FH(y)$ finito e não vazio $\Leftrightarrow y \in G_2$ e $y - v \notin G_2$;

$FH(x)$ infinito $\Leftrightarrow y - v \in G_2$.

Definição 4.6. (a) Dizemos que um ponto (x_1, y_1) está acima (respectivamente, à direita) de outro ponto (x_2, y_2) se $x_1 = x_2$ e $y_1 > y_2$ (respectivamente $y_1 = y_2$ e $x_1 > x_2$).

(b) Seja $x \in \mathbb{N}$; $x \in G_1$ e $x - v \notin G_1$, ou seja, $FV(x)$ é finita e não vazia. Dizemos que o ponto da $FV(x)$ que está acima de todos os outros pontos em $FV(x)$ é o ponto máximo de $FV(x)$. Ou seja:

$P = (x, b)$ é um ponto máximo de $FV(x)$, se $b = \max\{b_i \in \mathbb{N}; (x, b_i) \in G\}$.

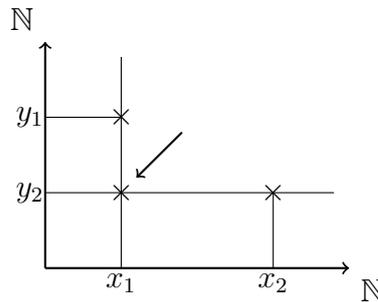
De modo análogo, definimos o ponto máximo de uma fibra horizontal que é finita e não vazia. Ou seja:

$P = (a, y)$ é um ponto máximo de $FH(y)$ se $a = \max\{a_i \in \mathbb{N}; (a_i, y) \in G\}$.

A seguir, apresentamos duas propriedades que serão muito úteis para o objetivo de obter fórmulas para determinar G .

Proposição 4.7. [Propriedade A] Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencem a G e $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$ então (x_1, y_2) também pertence a G . Graficamente, temos:

Gráfico 2 - Propriedade A



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Demonstração. Como (x_1, y_1) e (x_2, y_2) estão em G , existem g_1 e g_2 em \mathcal{A} tais que:

$$\omega_1(g_1 + f_1\mathcal{A}) = x_1 \text{ e } \omega_2(g_1 + f_2\mathcal{A}) = y_1.$$

$$\omega_1(g_2 + f_1\mathcal{A}) = x_2 \text{ e } \omega_2(g_2 + f_2\mathcal{A}) = y_2.$$

Consideramos em \mathcal{A} o elemento $g_1 + g_2$. Então:

$$\omega_1(g_1 + g_2 + f_1\mathcal{A}) = x_1.$$

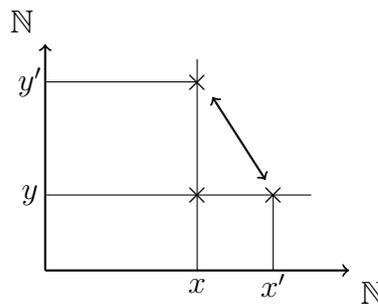
$$\omega_2(g_1 + g_2 + f_2\mathcal{A}) = y_2.$$

Portanto $(x_1, y_2) \in G$.

Nas igualdades acima, usamos que a valorização da soma de dois elementos é maior ou igual ao mínimo das valorizações de cada elemento da soma e que o mínimo só pode ser atingido em uma das parcelas. Ver Definição (2.5 ii) e Proposição (2.5 iii). \square

Proposição 4.8. [Propriedade B] Seja $(x, y) \in G$ qualquer. Então, existe ponto em G da forma (x, y') com $y' > y$ se, e somente se, existe ponto em G da forma (x', y) com $x' > x$. Graficamente, temos:

Gráfico 3 - Propriedade B



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Demonstração. (\Leftarrow) Suponhamos que exista $(x', y) \in G$ com $x' > x$. Então, existem $g, g' \in \mathcal{A}$ tais que:

$$\omega_1(g + f_1\mathcal{A}) = x \text{ e } \omega_2(g + f_2\mathcal{A}) = y;$$

$$\omega_1(g' + f_1\mathcal{A}) = x' \text{ e } \omega_2(g' + f_2\mathcal{A}) = y.$$

Seja π_2 uma uniformizante em $\tilde{\mathcal{O}}_{f_2}$. Então, $g + f_2\mathcal{A} = d\pi_2^y +$ termos de grau $> y$ e $g' + f_2\mathcal{A} = d'\pi_2^y +$ termos de grau $> y$, onde $d, d' \in K \setminus \{0\}$.

Considerando o elemento $g - \frac{d}{d'}g' \in K[[X, Y]]$, temos que:

$$\omega_1\left(g - \frac{d}{d'}g' + f_1\mathcal{A}\right) = x;$$

$$\omega_2\left(g - \frac{d}{d'}g' + f_2\mathcal{A}\right) = y' > y.$$

Analogamente, temos (\Rightarrow) . \square

A propriedade B mostra que (x, y) é ponto máximo de $FV(x)$ se, e somente se é ponto máximo de $FH(y)$. Por esse motivo, daqui em diante, denominamos tais pontos (x, y) apenas de pontos maximais.

A seguir, apresentamos uma proposição que junto com as definições (4.4) e (4.5) e o fato de que (x, y) é ponto máximo de $FV(x)$ se, e somente se é ponto máximo de $FH(y)$, nos mostra que o número de pontos maximais de G é $v = I(f_1, f_2)$.

Proposição 4.9. Sejam H um semigrupo de números naturais, $n \in H$ e $H_n = \{x \in H; x - n \notin H\}$ temos: $\#H_n = n$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que H_n tem pelo menos n elementos. Dado $n \in H$, considere o conjunto $N = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Seja $x_i \in N$. Se $x_i \in H$, temos $x_i - n \notin \mathbb{N}$, logo $x_i - n \notin H$ e então $x_i \in H_n$. Se $x_i \notin H$, temos $x_i + n \in H_n$, pois $(x_i + n) - n = x_i \notin H$. Se $x_i + n \notin H$, tomamos $x_i + 2n$. Se $x_i + 2n \in H$, temos $x_i + 2n \in H_n$, pois do passo anterior $(x_i + 2n) - n = x_i + n \notin H$. Se $x_i + 2n \notin H$, tomamos $x_i + 3n$ e repetimos o argumento. Como H possui condutor, segue que para algum $k \in \mathbb{N}$ temos $x_i + kn \in H$, com $x_i + (k-1)n \notin H$. Além disso, o algoritmo da divisão garante que se $x_i \neq x_j$ então $(x_i + kn) \neq (x_j + k'n), \forall k, k' \in \mathbb{N}$, pois $(x_i + kn) \equiv x_i \pmod{n}$ e $(x_j + k'n) \equiv x_j \pmod{n}$. Sabemos que $\#N = n$ e como para cada $x_i \in N$ obtemos um elemento de H_n da forma $(x_i + kn)$, segue que H_n possui pelo menos n elementos.

Vamos mostrar agora que H_n possui exatamente n elementos. Do algoritmo da divisão, segue que dado $x \in H_n$, existem únicos $x_i \in N$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $x = x_i + kn$. Suponhamos por contradição que H_n possui mais de n elementos. Assim, existem $x, x' \in H_n$ e $k, k' \in \mathbb{N}$, tais que $x = x_i + kn$ e $x' = x_i + k'n$, para algum x_i . Podemos supor $k < k'$. Temos que $x_i + kn \in H$ e $n \in H$, como H é semigrupo, segue que:

$$x_i + k'n = (x_i + kn) + (k' - k)n \in H, \forall k' > k. \quad (4.4)$$

Desse modo, $(x_i + k'n) - n \geq x_i + k$, logo $(x_i + k'n) - n \in H, \forall k' > k$. Portanto, $x_i + k' \notin H_n, \forall k' > k$, contradição com (4.4). \square

Observação 4.1. Podemos observar que conjunto H_n determinado na primeira parte da demonstração da Proposição (4.9) é o conjunto formado pelos elementos da sequência de Apéry de H em relação a n , obtido a partir da Definição (3.3) do capítulo anterior. Assim, dado um semigrupo H de números naturais com condutor (ou seja, $\mathbb{N} \setminus H$ é finito). Seja $n \in H$, dizemos que $\{x \in H; x - n \notin H\} = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}\}$, é o conjunto de Apéry de H relativo a n , onde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} é a sequência de Apéry de H em relação a n .

5 PROPRIEDADES DOS PONTOS MAXIMAIS

Seja $f = f_1 \cdot f_2 \in K[[X, Y]]$ uma curva algebróide birramificada que possui um ponto singular em $P = (0, 0)$, continuamos denotando por $v = I(f_1, f_2) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, f_2 \rangle}$, c_1 e c_2 os condutores dos semigrupos G_1 e G_2 associados respectivamente aos ramos f_1 e f_2 .

Neste capítulo, continuamos o estudo dos resultados de Garcia [7] e [8]. Apresentamos propriedades dos pontos maximais do semigrupo G da Definição (4.3) e mostramos que o problema de determinar o semigrupo de valores G associado ao ponto singular de uma curva algebróide birramificada $f = f_1 \cdot f_2 \in K[[X, Y]]$, a partir de $G_1 = G(f_1)$, $G_2 = G(f_2)$ e do índice de interseção $v = I(f_1, f_2)$ é equivalente a determinar seus pontos maximais. Provamos que o ponto $\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$ é um ponto maximal de G e que todos os demais pontos de maximais de G são simétricos em relação ao ponto \mathcal{Q} . A partir da simetria de G e dos conceitos estudados nos capítulos anteriores, obtemos resultados que nos permitem determinar fórmulas para o semigrupo G no caso de curvas birramificadas.

Dividimos nosso estudo em dois casos. Se os ramos f_1 e f_2 possuem tangentes distintas em $(0, 0)$, conseguimos determinar fórmulas para obter o semigrupo G . Por outro lado, se f_1 e f_2 possuem a mesma tangente na origem, mostramos que, a partir de uma sequência finita de explosões, é possível obter uma curva $f^{(j)}$, decomposta como produto de dois ramos $f_1^{(j)}, f_2^{(j)} \in K[[X, Y]]$ que possuem tangentes distintas. Em seguida, provamos que é possível obter o semigrupo G associado a curva f quando a multiplicidade não muda na sequência de explosões até obter a curva com tangentes distintas. No caso em que a multiplicidade muda em apenas um dos ramos, digamos f_1 , se o número de geradores do semigrupo G_1 for 2 ou 3, conseguimos determinar fórmulas para obter G no caso geral. No entanto, se o número de geradores de G_1 é $n \geq 4$, obtemos fórmulas que dependem de uma hipótese adicional pouco restritiva.

O Teorema a seguir mostra que o conhecimento do semigrupo G é equivalente ao conhecimento de seus pontos maximais.

Teorema 5.1. Temos:

$$G = \{(x, y) \in G_1 \times G_2; (x, y) \text{ não está acima, nem à direita de um ponto maximal de } G\}$$

Demonstração. (\subseteq) A inclusão segue do fato de que dado um ponto maximal P de G , não existe ponto de G acima ou à direita de P e das projeções $\pi_1(G) = G_1$ e $\pi_2(G) = G_2$.

(\supseteq) Seja $(x, y) \in \{(x, y) \in G_1 \times G_2; (x, y) \text{ não está acima, nem à direita de um ponto maximal de } G\}$. Então podemos assumir que (x, y) não é um ponto maximal de G . De fato, se (x, y) é um ponto maximal de G , então $(x, y) \in G$ por definição. Logo, $FV(x)$ e

$FH(y)$ são não vazias. Usando a hipótese de que (x, y) não está acima nem a direita de um ponto maximal de G e assumindo que (x, y) não é um ponto maximal de G , concluímos que existem pontos de G acima e a direita de (x, y) . Portanto, pela propriedade A (4.7), (x, y) deve pertencer a G . \square

Corolário 5.1. O conhecimento dos pontos maximais de G determina o semigrupo G .

Demonstração. Sabemos que v é o número de pontos maximais. Projetando os pontos maximais por π_1 e π_2 , obtemos os conjuntos de Apéry G_1 e G_2 em relação a v e então, obtemos os semigrupos G_1 e G_2 . Aplicando o teorema anterior, determinamos os pontos de $G_1 \times G_2$ que pertencem a G , então G está determinado. \square

5.1 SIMETRIA DOS PONTOS MAXIMAIS

Nesta seção estudamos a simetria dos pontos maximais de G . Mostramos que $(0, 0)$ é um ponto maximal de G . Denotamos por \mathcal{Q} o ponto

$$\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1).$$

A seguir, mostramos que \mathcal{Q} também é um ponto maximal de G e que cada ponto maximal de G possui um simétrico em relação a \mathcal{Q} que também é um ponto maximal.

Proposição 5.1. $(0, 0)$ é um ponto maximal de G .

Demonstração. Temos de (4.3) que:

$$G = \{(I(f_1, g), I(f_2, g)); g \in \mathcal{A}\}.$$

Como $1 \in \mathcal{A}$, temos $I(f_1, 1) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, 1 \rangle} = 0$ e $I(f_2, 1) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2, 1 \rangle} = 0$. Assim, $(0, 0) \in G$. Por outro lado, como f_1 e f_2 não são unidades de $K[[X, Y]]$, temos:

$$\langle f_1, g \rangle = K[[X, Y]] \Leftrightarrow g \text{ é invertível} \Leftrightarrow \langle f_2, g \rangle = K[[X, Y]].$$

Daí,

$$I(f_1, g) = 0 \Leftrightarrow \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1, g \rangle} = 0 \Leftrightarrow \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_2, g \rangle} = 0 \Leftrightarrow I(f_2, g) = 0.$$

Portanto, $(0, 0)$ é ponto maximal de G . \square

A seguir apresentamos um lema auxiliar que será utilizado para mostrar que \mathcal{Q} é um ponto maximal de G .

Lema 5.1. Seja $y \in \mathbb{N}$ com $y \leq v + c_2 - 2$. Se $y - v \notin G_2$, então:

Sabemos da existência de $y > 0$ tal que $(v + c_1 - 1, y) \in G$. O Lema (5.1) mostra então que $y \geq v$, pois se $y < v$ teríamos $y - v \notin G_2$. Então, pelo Teorema (5.1) para mostrar que $\mathcal{Q} \in G$, basta mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 5.1. Se $(v + c_1 - 1, y) \in G$ com $v \leq y \leq v + c_2 - 2$, então existe ponto de G da forma $(v + c_1 - 1, y')$ com $y' > y$, ou seja, existe um ponto de G acima de $(v + c_1 - 1, y)$.

Seja $(v + c_1 - 1, y) \in G$ com $v \leq y \leq v + c_2 - 2$. Pelo Lema (5.1), temos que $y - v \in G_2$. Pelo Teorema (4.2), temos $(x, y) \in G$ para cada $x \geq v + c_1$. Pela Propriedade B (4.8), segue que existe em G um ponto acima deste, ou seja, da forma $(v + c_1 - 1, y')$, com $y' > y$.

Caso 2: $c_2 = 0$, ou seja, $G_2 = \mathbb{N}$ e f_2 é um ramo não singular.

Do Lema (5.1), segue que $(v + c_1 - 1, y) \notin G$ para cada $y \in \mathbb{N}$ tal que $y \leq v - 2$. Pelo Teorema (4.2), sabemos que $(v + c_1 - 1, y) \notin G$ para $y \geq v + c_2 = v$. Então $\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v - 1)$ pertence à G , pois a fibra $FV(v + c_1 - 1)$ é não vazia, pois $v + c_1 - 1 \in G_1$.

□

Definição 5.1. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Chamamos de ponto simétrico de P em relação a \mathcal{Q} o ponto $P_S = (x_s, y_s)$ tal que

$$P + P_S = \mathcal{Q},$$

ou seja, $x_s = v + c_1 - 1 - x$ e $y_s = v + c_2 - 1 - y$.

Lema 5.2. Sejam $P = (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $P_S = (x_s, y_s)$ o seu simétrico em relação a \mathcal{Q} . Então:

i) $FV(x)$ é finita e não vazia $\Leftrightarrow FV(x_s)$ é finita e não vazia;

ii) $FH(y)$ é finita e não vazia $\Leftrightarrow FH(y_s)$ é finita e não vazia.

Demonstração. Como o simétrico do simétrico é o próprio ponto e a demonstração de ii) é análoga, é suficiente mostrar (\Rightarrow) de i).

Seja $x \in \mathbb{N}$ tal que $FV(x)$ é finita e não vazia. Sabemos então que $x \in G_1$ e $x - v \notin G_1$. Para mostrar que $FV(v + c_1 - 1 - x)$ é finita e não vazia, devemos mostrar que:

1) $v + c_1 - 1 - x \in G_1$.

2) $v + c_1 - 1 - x - v = c_1 - 1 - x \notin G_1$.

De $x \in G_1$ e $x + (c_1 - 1 - x) = c_1 - 1$, pela simetria de G_1 , concluímos **2**).

De $x - v \in G_1$ e $(x - v) + (v + c_1 - 1 - x) = c_1 - 1$, pela simetria de G_1 , concluímos **1**). □

Teorema 5.3 (Simetria dos Pontos Maximais). Seja $P = (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Então, P é um ponto maximal de G se, e somente se P_S é um ponto maximal de G .

Demonstração. Como o simétrico do simétrico é o próprio ponto, é suficiente fazer (\Rightarrow).

A demonstração será por indução sobre a primeira coordenada. Da Proposição (5.1) temos que $(0, 0)$ é ponto maximal de G . Do Teorema (5.2) temos $\mathcal{Q} \in G$ e do Teorema (4.2) segue que não existe ponto de G acima ou à direita de \mathcal{Q} , pois $c_1 - 1 \notin G_1$ e $c_2 - 1 \notin G_2$. Assim, \mathcal{Q} também é ponto maximal de G .

Seja (x, y) um ponto maximal de G . Tomemos por hipótese de indução que a simetria vale para todos os pontos maximais de G com a primeira coordenada menor que x . Tomando $P = (x, y)$, temos por definição $P + P_S = \mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$.

Vejamos que para provar que P_S é ponto maximal de G , basta mostrar que $P_S \in G$.

De fato, tomando $P_S = (x_s, y_s)$, temos que não existe ponto em G da forma (x_s, y') com $y' > y_s$. Se existisse tal ponto em G , teríamos:

$$(x, y) + (x_s, y') = (v + c_1 - 1, y + y') \in G,$$

onde $y + y' > y + y_s = v + c_2 - 1$, em contradição com o Teorema (4.2 ii).

Analogamente, segue que $(x', y_s) \notin G$ para cada $x' > x_s$. Vamos então mostrar que $P_S \in G$. Como (x, y) é ponto máximo, temos que: $FV(x)$ é finita e não vazia e $FH(y)$ é finita e não vazia. Então, pelo Lema (5.2), $FV(x_s)$ e $FH(y_s)$ são ambas finitas e não vazias. Suponhamos que $P_S \notin G$. Logo, o ponto máximo de $FV(x_s)$, que denotamos por B , é da forma $B = (x_s, y')$, com $y' < y_s$. Seja B_S o simétrico de B . Denotando $B_S = (x, y'_s)$, temos que $y'_s > y$, assim, $B_S \notin G$. Temos que $(x', y'_s) \notin G$ para cada $x' > x$. De fato, se $(x', y'_s) \in G$, teríamos que $(x_s + x', y' + y'_s)$ é um ponto de G à direita de \mathcal{Q} , contradição com o Teorema (4.2). Como $FH(y')$ é finita e não vazia, o Lema (5.2) garante que $FH(y'_s)$ é finita e não vazia.

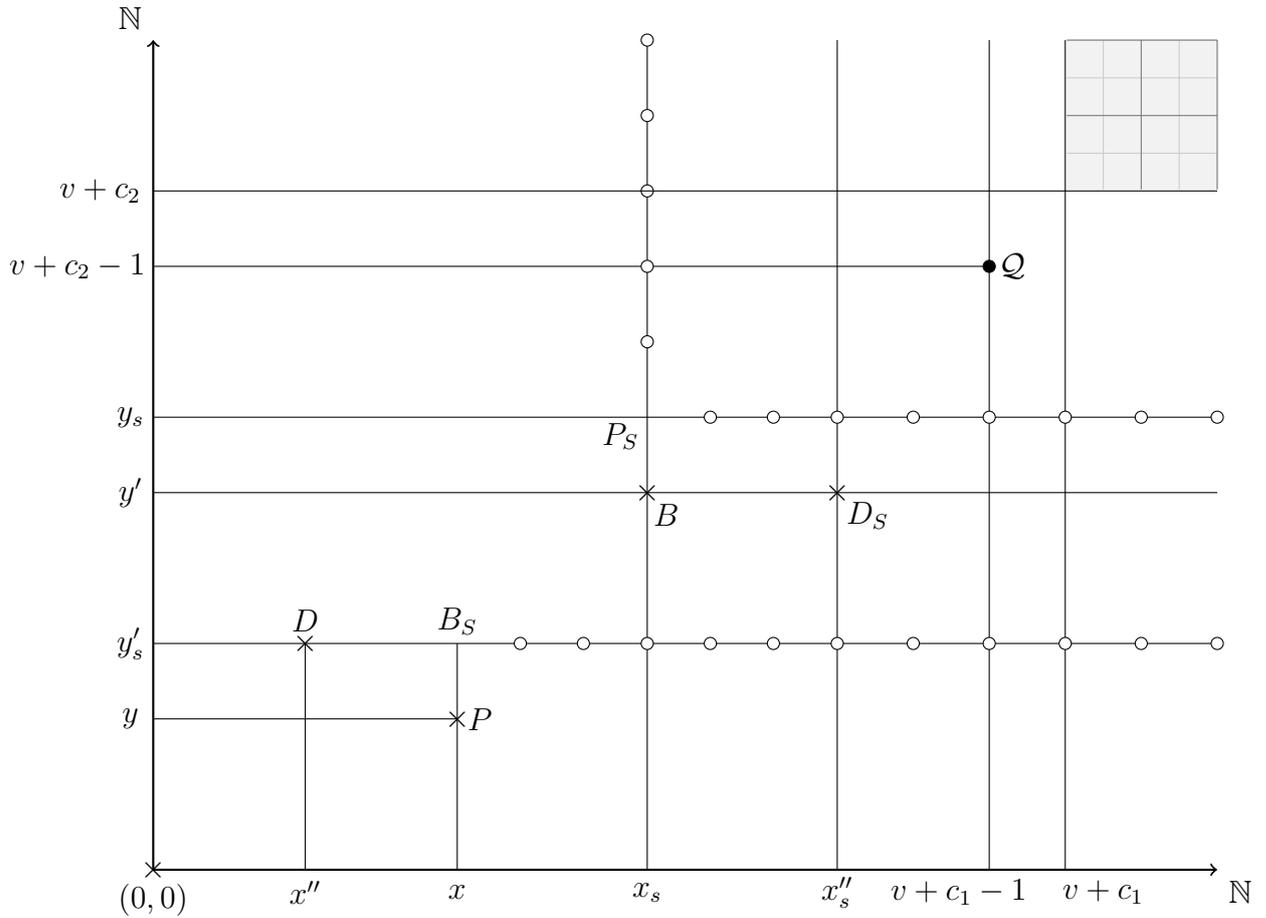
As observações que fizemos, garantem que o ponto máximo de $FH(y'_s)$, que denotamos por $D = (x'', y'_s)$, é tal que $x'' < x$ e é ponto maximal de G .

Assim, pela hipótese de indução aplicada a D , concluímos que $D_S = (x''_s, y')$ é ponto maximal de G . Mas, claramente $x''_s > x_s$, o que é uma contradição, pois nesse caso a fibra horizontal $FH(y')$ teria dois pontos máximos distintos, a saber B e D_S .

A seguir, apresentamos uma representação gráfica dos argumentos utilizados na demonstração.

□

Gráfico 5 - Teorema 5.3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Proposição 5.2. Seja $P = (x, y)$ ponto máximo de G . Se $(x, y') \in G$ com $y' < y$, então $y - y' \in G_2$.

Demonstração. Pela definição, $P + P_s = Q = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$, onde P_s é ponto maximal de G pelo Teorema de Simetria (5.3). Denotando $P_s = (x_s, y_s)$. Então o ponto dado por:

$$(x, y') + (x_s, y_s) = (v + c_1 - 1, y' + y_s)$$

é um ponto de G na fibra $FV(v + c_1 - 1)$. Pelo Lema (5.1), vemos que $y' + y_s = v + y''$, com $y'' \in G_2$. Por outro lado, $y + y_s = v + c_2 - 1$. Temos então $y - y' = (y + y_s) - (y' + y_s) = c_2 - 1 - y''$. Usando que $y' \in G_2$ e a simetria de G_2 , temos que $y - y' \notin G_2$. \square

De modo análogo, podemos demonstrar que se (x, y) é ponto máximo de G e (x', y) ponto de G com $x' < x$, então $x - x' \in G_1$.

Seja $FV(x)$ fibra infinita. Isto significa que $x - v \in G_1$, logo existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $\omega_1(g + f_1\mathcal{A}) = x - v$. Então, $\omega_1(g \cdot f_2 + f_1\mathcal{A}) = x$.

Proposição 5.3. Seja $(x, y) \in G$ tal que $FV(x)$ é uma fibra infinita. Então, $(x, y + y') \in G$, para cada $y' \in G_2$.

Demonstração. Suponhamos $(x, y) \in G$ e $y' \in G_2$. Como $(0, 0)$ é ponto maximal de G , não existe ponto de G à direita ou acima de $(0, 0)$, assim, podemos assumir $y' > 0$. Então, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\omega_1(h + f_1\mathcal{A}) = x = \omega_1(gf_2 + f_1\mathcal{A}) \text{ e } \omega_2(h + f_2\mathcal{A}) = y.$$

Como $y' \in G_2$, existe $h' \in \mathcal{A}$ tal que $\omega_2(h' + f_2\mathcal{A}) = y' > 0$. Consideramos então o elemento $h \cdot h' + f_2g \in \mathcal{A}$. Assim

$$\omega_1(h \cdot h' + f_2g + f_1\mathcal{A}) = \omega_1(f_2g + f_1\mathcal{A}) = x,$$

pois $\omega_1(h' + f_1\mathcal{A}) > 0$ ou $h' \in f_1\mathcal{A}$. Temos

$$\omega_2(h \cdot h' + f_2g + f_2\mathcal{A}) = \omega_2(h \cdot h' + f_2\mathcal{A}) = \omega_2(h + f_2\mathcal{A}) + \omega_2(h' + f_2\mathcal{A}) = y + y',$$

que mostra que $(x, y + y') \in G$. □

De modo análogo a Proposição (5.3), podemos afirmar que dado $y \in \mathbb{N}$ tal que $FH(y)$ é fibra infinita. Se $(x, y) \in G$ e $x' \in G_1$ quaisquer. Então, $(x + x', y) \in G$.

Proposição 5.4. Seja f uma curva algebróide birramificada reduzida singular na origem. Suponhamos que um dos ramos de f tenha multiplicidade igual a 1. Então, se (x, y) é ponto máximo de G , temos que $FV(x) = \{(x, y)\}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos tomar $G_2 = \mathbb{N}$. Suponhamos por que exista um ponto em G da forma (x, y') com $y' < y$, então, pela Proposição (5.1), teríamos $y - y' \notin G_2 = \mathbb{N}$, contradição. Por outro lado, assumindo que $G_1 = \mathbb{N}$, a conclusão seria que dado (x, y) ponto máximo de G , então $FH(y) = \{(x, y)\}$. □

Proposição 5.5. Dada uma curva algebróide birramificada singular na origem, com $G_2 = \mathbb{N}$, temos que os pontos máximos de G são dados por:

$$(0, 0); (a_1, 1); (a_2, 2); \cdots; (a_{v-1}, v - 1),$$

onde $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{v-1}$ é a sequência de Apéry de G_1 em relação a v .

Ainda, $0 < 1 < 2 < \cdots < v - 1$ é a sequência de Apéry de $G_2 = \mathbb{N}$ em relação a v .

Demonstração. Sabemos que $(0, 0)$ é ponto maximal de G . Suponhamos, por hipótese de indução, que $(0, 0); (a_1, 1); \dots; (a_{i-1}, i-1)$ são pontos máximos de G . Vamos mostrar que (a_i, i) é ponto máximo.

Suponhamos que (a_i, i) não é ponto máximo. Então, o ponto máximo de $FV(a_i)$ é da forma (a_i, j) para algum $i < j < v-1$. Da mesma forma, teríamos que o ponto maximal de $FH(i)$ é (a_k, i) para algum $i < k < v-1$. Aplicando a propriedade A (4.7) aos pontos (a_i, j) e (a_k, i) , obtemos o ponto de G dado por (a_i, i) . Então, em $FV(a_i)$ temos os pontos (a_i, i) e (a_i, j) , contradição com a Proposição (5.4) \square

5.2 CURVAS BIRRAMIFICADAS COM TANGENTES DISTINTAS

No que segue, denotamos por $f = f_1 \cdot f_2$ a decomposição em $\mathcal{A} = K[[X, Y]]$ de uma curva algebróide birramificada singular na origem f , G_1 o semigrupo associado ao ramo f_1 , G_2 o semigrupo associado ao ramo f_2 , m_1 a multiplicidade de f_1 e m_2 a multiplicidade de f_2 . Sabemos que $m_1 = \min(G_1 \setminus \{0\})$ e $m_2 = \min(G_2 \setminus \{0\})$. Vamos denotar por $a_0 < a_1 < \dots < a_{m_1-1}$ e $b_0 < b_1 < \dots < b_{m_2-1}$ respectivamente as seqüências de Apéry de G_1 , com relação a m_1 e de G_2 , com relação a m_2 .

Lema 5.3. Seja f uma curva algebróide plana afim irredutível birramificada singular na origem, com tangentes distintas. Então:

- i) $FV(a_j) = \{(a_j, jm_2)\}$, para cada $0 \leq j \leq m_1 - 1$;
- ii) $FH(b_i) = \{(im_1, b_i)\}$, para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$.

Demonstração. i) Dos resultados da Seção 4.1, temos que:

$$\mathcal{A} = K[[X, Y]] = \sum_{k=0}^{m_1-1} K[[X]]A_k + f_1\mathcal{A} \quad (5.1)$$

Seja $0 \leq j \leq m_1 - 1$ fixado. Seja (a_j, r) um ponto de G . Temos que mostrar que $r = jm_2$. Como $(a_j, r) \in G$, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\omega_1(h + f_1\mathcal{A}) = a_j \quad \text{e} \quad \omega_2(h + f_2\mathcal{A}) = r.$$

De (5.1), segue que existem $h(X) \in K[[X]]$ para $0 \leq k \leq m_1 - 1$ e $h' \in \mathcal{A}$ tais que:

$$h = \sum_{k=0}^{m_1-1} h_k(X)A_k + f_1 \cdot h'.$$

Como $\omega_1(h + f_1\mathcal{A}) = a_j$, segue que $\text{ord}(h_j(X)) = 0$ e $\omega_1(h_k(X)A_k + f_1\mathcal{A}) > a_j$ para cada $0 \leq k \leq m_1 - 1$ e $k \neq j$. Escrevemos h como:

$$h = h_j(X)A_j + \sum_{k=0}^{j-1} h_k(X)A_k + \sum_{k=j+1}^{m_1-1} h_k(X)A_k + f_1 h'.$$

Como a forma inicial de A_k é Y^k e a forma inicial de f_1 é Y^{m_1} , segue que devemos ter a forma inicial de $\sum_{k=j+1}^{m_1-1} h_k(X)A_k + f_1h'$ com grau estritamente maior que j .

Dado $0 \leq k \leq j-1$. De $\omega_1(h_k(X)A_k + f_1\mathcal{A}) > a_j$, temos $\omega_1(h_k(X) + f_1\mathcal{A}) > a_j - a_k$. Como G_1 cresce fortemente segue que:

$$\omega_1(h_k(X) + f_1\mathcal{A}) > a_j - a_k \geq a_{j-k} \geq (j-k)a_1 \geq (j-k)m_1.$$

Como $\omega_1(h_k(X) + f_1\mathcal{A}) = m_1 \cdot \text{ord}(h_k(X))$, temos que $\text{ord}(h_k(X)) > j-k$ para cada $0 \leq k \leq j-1$. Então $\sum_{k=0}^{j-1} h_k(X)A_k$ tem a forma inicial com grau estritamente maior que j . Desse modo, a forma inicial em h é Y^j . Por hipótese, supomos que a tangente ao ramo f_2 é diferente de Y , portanto, temos:

$$\omega_2(h + f_2\mathcal{A}) = I(h, f_2) = jm_2.$$

A demonstração do item ii) é análoga. □

Teorema 5.4. Seja f uma curva plana algebróide plana afim irredutível birramificada singular na origem, com tangentes distintas. Então, os pontos maximais de G são dados por $(a_j + im_1, b_i + jm_2)$ para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$ e para cada $0 \leq j \leq m_1 - 1$.

Demonstração. Como por hipótese as tangentes a f_1 e f_2 são distintas, temos:

$$v = I(f_1, f_2) = m_1 \cdot m_2.$$

Sabemos que o total de pontos do enunciado é v . Portanto, é suficiente mostrar que tais pontos são pontos maximais de G .

Inicialmente vamos mostrar que \mathcal{Q} possui a forma do enunciado. Temos:

$$\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1) = (m_1 \cdot m_2 + a_{m_1-1} - m_1, m_1 \cdot m_2 + b_{m_2-1} - m_2).$$

Logo, \mathcal{Q} é da forma $(a_j + im_1, b_i + jm_2)$, com $j = m_1 - 1$ e $i = m_2 - 1$.

Do Lema (5.3) segue que para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$ e para cada $0 \leq j \leq m_1 - 1$, temos $(a_j + im_1, b_i + jm_2) \in G$. Fixando i e j com $0 \leq j \leq m_1 - 1$ e $0 \leq i \leq m_2 - 1$. Considere a soma:

$$(a_j + im_1, b_i + jm_2) + (a_{m_1-1-j} + (m_2 - 1 - i)m_1, b_{m_2-1-i} + (m_1 - 1 - j)m_2).$$

O resultado dessa soma é o ponto $\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$. Ademais, na soma acima e cada parcela é formada por um ponto de G . Afirmamos que $(a_j + im_1, b_i + jm_2)$ é ponto máximo de G . De fato, suponhamos que exista algum ponto de G da forma $(x', b_i + jm_2)$ com $x' > a_j + im_1$, somando a este ponto o ponto dado por:

$$(a_{m_1-1-j} + (m_2 - 1 - i)m_1, b_{m_2-1-i} + (m_1 - 1 - j)m_2),$$

obtemos um ponto de G da forma $(x'', v + c_2 - 1)$ com

$$x'' > a_j + im_1 + a_{m_1-1-j} + (m_2 - 1 - i)m_1 = v + c_1 - 1,$$

contradição com o fato de \mathcal{Q} ser ponto maximal de G . □

5.3 CURVAS BIRRAMIFICADAS COM TANGENTE ÚNICA

Nesta seção, vamos nos restringir ao caso de curvas algebróides e curvas birramificadas com tangente única. Assim, no que segue, $f = f_1 \cdot f_2$ denotará sempre uma curva birramificada com tangente única em $P = (0, 0)$.

5.3.1 Curvas e explosões

Lembramos que dado $f \in K[[X, Y]]$ irredutível, podemos supor que X não é tangente à f . Pelo teorema da preparação de Weierstrass, podemos supor:

$$f = Y^m + d_1(X)Y^{m-1} + \cdots + \cdots d_m(X)$$

onde m é a multiplicidade de f e $d_j(X) \in K[[X]]$, com $\text{ord}(d_j(X)) \geq j$, para $1 \leq j \leq m$. Sabemos então que a tangente a f é da forma $Y + \alpha X$ e a forma inicial de f é $(Y + \alpha X)^m$, para algum $\alpha \in K$.

Definição 5.2. Seja f uma curva plana afim com dois ramos, definimos a explosão de f por:

$$f^{(1)}(X, Y_1) = \frac{1}{X^m} f(X, XY_1)$$

onde m é a multiplicidade de f na origem, ou seja, $m = m_1 + m_2$.

Segue da definição acima e da decomposição $f = f_1 \cdot f_2$ que:

$$f^{(1)}(X, Y_1) = f_1^{(1)}(X, Y_1) \cdot f_2^{(1)}(X, Y_1).$$

Nessas condições, temos que $f^{(1)}$ é redutível ou irredutível em $K[[X, Y_1]]$, conforme $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$, respectivamente. Suponhamos $\alpha = 0$, ou seja, fizemos uma mudança de coordenadas de modo que a tangente a f é Y . Então, nesse caso, $f^{(1)}$ possui dois ramos em $K[[X, Y_1]]$.

Podemos considerar a inclusão:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O}_{f_1} &\rightarrow \mathcal{O}_{f_1}^{(1)} \\ \overline{g(X, Y)} &\mapsto \overline{g(X, Y_1)^{(1)}} \end{aligned}$$

onde $\overline{g(X, Y)} = g + f_1\mathcal{A}$ e $\overline{g(X, Y_1)^{(1)}} = g^{(1)} + f_1\mathcal{A}$.

Denodando por $x = X + f_1\mathcal{A}$ e $y = Y + f_1\mathcal{A}$, temos que $\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle} = K[[x, y]]$. Consideremos a inclusão $K[[x, y]] \subseteq K\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$. Pode-se mostrar que $K\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$ é isomorfo a $\frac{K[[X, Y_1]]}{\langle f_1^{(1)} \rangle}$ a partir da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} K[[X, Y_1]] &\rightarrow K\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right] \\ h(X, Y_1) &\mapsto h\left(x, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Tal isomorfismo transforma a inclusão $\frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle} \subseteq \frac{K[[X, Y_1]]}{\langle f_1^{(1)} \rangle}$ na inclusão $K[[x, y]] \subseteq K\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$. (Ver [8], pág. 55).

Definição 5.3. Chamamos $\frac{K[[X, Y_1]]}{\langle f_1^{(1)} \rangle} = K\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$ a explosão de $K[[x, y]] = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$.

Sejam G_1 o semigrupo de f_1 e $G_1^{(1)}$ o semigrupo de $f_1^{(1)}$, ou seja, chamando de ω_1 a valorização do fecho inteiro de $\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$, temos:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\omega_1(h + f_1\mathcal{A}); h \in \mathcal{A} \setminus f_1\mathcal{A}\}; \\ G_1^{(1)} &= \{\omega_1(h + f_1^{(1)}\mathcal{A}); h \in \mathcal{A} \setminus f_1^{(1)}\mathcal{A}^{(1)}\}. \end{aligned}$$

Pela inclusão $\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle} \subseteq \frac{K[[X, Y_1]]}{\langle f_1^{(1)} \rangle}$, temos $G \subseteq G^{(1)}$. Sabemos ainda que $m_1 = \min(G_1 \setminus \{0\})$.

Proposição 5.6. Sejam $a_0 < a_1 < \dots < a_{m_1-1}$ a sequência de Apéry de G em relação a m_1 e $a_0^{(1)} < a_1^{(1)} < \dots < a_{m_1-1}^{(1)}$ a sequência de Apéry de $G_1^{(1)}$ em relação a $m_1^{(1)}$. Temos:

$$a_j = a_j^{(1)} + jm_1, \text{ para cada } 0 \leq j \leq m_1 - 1.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 4, pág. 278. □

A Proposição (5.6) mostra que podemos obter $G^{(1)}$ a partir de G .

Proposição 5.7. Seja $f_1 = Y^{m_1} + d_1(x)Y^{m_1-1} + \dots + d_{m_1}(X)$, onde $d_j(X) \in K[[X]]$ e $\text{ord}(d_j(X)) > j$. Então $m_1^{(1)} < m_1$ se, e somente se a forma inicial de $f_1^{(1)}$ é $X^{m_1^{(1)}}$, ou seja, a multiplicidade de $f^{(1)}$ é menor que a de f_1 se, e somente se, X é a tangente à $f^{(1)}$.

Demonstração. Considere a inclusão:

$$\frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle} \rightarrow \frac{K[[X, Y_1]]}{\langle f_1^{(1)} \rangle} \quad (5.2)$$

$$h(X, Y) + f_1\mathcal{A} \mapsto h(X, XY_1) + f_1^{(1)}\mathcal{A}^{(1)},$$

onde $\mathcal{A}^{(1)} = K[[X, Y_1]]$ e $Y_1 = \frac{Y}{X}$.

Seja ω_1 a valorização de $\mathcal{O}_{f_1} = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_1 \rangle}$.

(\Rightarrow) Suponhamos $m_1^{(1)} < m_1$. Sabemos que $\omega_1(X + f_1\mathcal{A}) = I(X, f) = m_1$. Da inclusão (5.2), temos que:

$$\omega_1(X + f_1\mathcal{A}) = \omega_1(X + f_1^{(1)}\mathcal{A}^{(1)}) = I(X, f_1^{(1)})$$

Assim, $I(X, f_1^{(1)}) = m_1 > m_1^{(1)}$. Portanto, X é tangente à f_1 .

(\Leftarrow) Da inclusão (5.2), temos:

$$\omega_1(X + f_1\mathcal{A}) = \omega_1(X + f_1^{(1)}\mathcal{A}^{(1)}) = I(X, f_1^{(1)})$$

Sabemos que $\omega_1(X + f_1\mathcal{A}) = I(X, f_1)m_1$. Como por hipótese X é a tangente à f_1 , temos $I(X, f_1^{(1)}) > m_1^{(1)}$. Portanto, $m_1 > m_1^{(1)}$. \square

A seguir, definimos a sequência que será denominada sequência de explosões adaptada a f .

Fazemos uma mudança de coordenadas para que a tangente a f na origem seja Y e depois a explosão de f na origem, obtendo $f^{(1)}$. Se $f^{(1)}$ possuir tangentes distintas na origem, a sequência é justamente f e $f^{(1)}$. Se não, fazemos uma mudança de coordenadas para que a tangente a $f^{(1)}$ na origem seja Y e fazemos a explosão de $f^{(1)}$ na origem, obtendo $f^{(2)}$.

$$f^{(2)}(X, Y_2) = \frac{1}{X^{m^{(1)}}} f^{(1)}(X, XY_2),$$

onde $m^{(1)}$ é a multiplicidade de $f^{(1)}$ na origem. Se $f^{(2)}$ possuir tangentes distintas na origem, então a sequência é $f, f^{(1)}$ e $f^{(2)}$, caso contrário fazemos uma mudança de coordenadas em $f^{(2)}$ para que sua tangente na origem seja Y e repetimos o processo para obter $f^{(3)}$.

Desse modo, obtemos a sequência

$$f^{(0)} = f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(t-1)}, f^{(t)},$$

onde a tangente a $f^{(j)}$ é Y , para $0 \leq j \leq t-1$ e $f^{(t)}$ possui tangentes distintas na origem.

Correspondente, obtemos a seguinte sequência:

$$\mathcal{O}_f^{(0)} \subseteq \mathcal{O}_f^{(1)} \subseteq \mathcal{O}_f^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}_f^{(t-1)} \subseteq \mathcal{O}_f^{(t)},$$

onde

$$\mathcal{O}_f^{(j)} = \frac{K[[X, Y_j]]}{\langle f^{(j)} \rangle}, \text{ para } 0 \leq j \leq t.$$

Podemos observar que cada explosão $f^{(j)}$ possui dois ramos na origem. Escrevemos $f^{(j)} = f_1^{(j)} \cdot f_2^{(j)}$ para a decomposição de $f^{(j)}$ em $\mathcal{A}^{(j)}$.

Denotamos por $m^{(j)}$ (respectivamente, $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}$) a multiplicidade de $f^{(j)}$ (respectivamente, $f_1^{(j)}, f_2^{(j)}$) na origem, $G^{(j)}$ (respectivamente, $G_1^{(j)}, G_2^{(j)}$) o semigrupo associado a $f^{(j)}$ (respectivamente, $f_1^{(j)}, f_2^{(j)}$) e $v^{(j)} = I(f_1^{(j)}, f_2^{(j)})$.

Também denotamos por

$$a_0^{(j)} < a_1^{(j)} < \dots < a_{m_1-1}^{(j)},$$

respectivamente

$$b_0^{(j)} < b_1^{(j)} < \dots < b_{m_2-1}^{(j)},$$

as sequências de Apéry de $G_1^{(j)}$ e $G_2^{(j)}$ referentes a m_1 e m_2 .

Ademais, para $i = 1, 2$, temos $\mathcal{O}_i^{(j)} = \frac{\mathcal{A}^{(j)}}{f_i^{(j)}}$ e $\bar{g}^{(j)}$ (respectivamente, $\bar{g}^{(j)}$) a imagem de $g \in \mathcal{A}^{(j)}$ em $\mathcal{O}_{f_1}^{(j)}$ (respectivamente, $\mathcal{O}_{f_2}^{(j)}$).

Proposição 5.8. $v = v^{(1)} + m_1 \cdot m_2$.

Demonstração. Consideremos a inclusão $\psi : \mathcal{O}_{f_1} \rightarrow \mathcal{O}_{f_1}^{(1)}$ dada por $\overline{g(X, Y)} \mapsto \overline{g(X, XY_1)}^{(1)}$. Por definição,

$$X^{m_2} \cdot f_2^{(1)}(X, Y_1) = f_2(X, XY_1)$$

Usando a definição e ψ , obtemos:

$$\begin{aligned} v = \omega_1(\bar{f}_2) &= \omega_1(\overline{f_2(X, XY_1)}^{(1)}) = m_2 \omega_1(\bar{X}^{(1)}) + \omega_1(\overline{f_2^{(1)}(X, Y_1)}^{(1)}) \\ &= m_2 \omega_1(\bar{X}) + v^{(1)} = m_1 \cdot m_2 + v^{(1)} \end{aligned}$$

□

Corolário 5.2. $v = \sum_{j=0}^t m_1^{(j)} m_2^{(j)}$.

Demonstração. Temos $v^{(t)} = m_1^{(t)} m_2^{(t)}$, pois $f^{(t)}$ tem tangentes distintas. Então sucessivas aplicações da proposição anterior prova o resultado. □

Corolário 5.3. O conhecimento de G_1, G_2 e v é equivalente ao conhecimento de G_1, G_2 e t .

Demonstração. Da Proposição (5.6), segue que conhecendo G_1 , obtemos $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}$, e assim por diante. Conhecendo G_1 , obtemos $m_1^{(j)}$ para todo $j \geq 0$. O mesmo fazemos para G_2 e $m_2^{(j)}$. Do Corolário (5.2), temos:

$$v = \sum_{j=0}^t m_1^{(j)} m_2^{(j)}.$$

Sabemos que a multiplicidade é sempre positiva e se mantém ou diminui quando efetuamos as explosões. Logo, conhecendo v podemos substituir na equação acima os valores de $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, 0 \leq j \leq t$, onde $t = \min \left\{ t' \in \mathbb{N}; v = \sum_{j=0}^{t'} m_1^{(j)} m_2^{(j)} \right\}$. Assim, obtemos t . □

No que segue, dividimos em três casos o processo de determinar fórmulas para se obter o semigrupo G associado a uma curva algebróide birramificada singular na origem, com tangente única:

Caso 1: quando não há mudança de multiplicidade na sequência de explosões, até atingir a curva com tangentes distintas.

Caso 2: quando a multiplicidade muda em apenas um dos ramos, que vamos supor que seja f_1 , e o semigrupo G_1 pode ser gerado por 2 ou 3 elementos.

Caso 3: quando a multiplicidade muda em apenas um dos ramos, que vamos supor que seja f_1 , e o número mínimo de geradores para o semigrupo G_1 é $n \geq 4$. Neste último caso, as fórmulas dependem da introdução de uma hipótese adicional.

5.3.2 Caso 1

Este é o caso onde $m_1^{(j)} = m_1$ e $m_2^{(j)} = m_2, 0 \leq j \leq t$. Do Corolário (5.2), temos $v = (t + 1)m_1 \cdot m_2$.

Proposição 5.9. Sejam k_1 e k_2 números naturais tais que:

$$k_1 m_1 < a_1 < (k_1 + 1)m_1 \text{ e } k_2 m_2 < b_1 < (k_2 + 1)m_2.$$

Então a multiplicidade de f_1 (respectivamente, f_2) muda pela primeira vez depois de k_1 (respectivamente, k_2) explosões.

Demonstração. Este resultado decorre de sucessivas aplicações da Proposição (5.6). Aplicando $a_j = a_j^{(1)} + jm$, para $j = 1, k$ vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1^{(1)} + m \\ a_1^{(1)} &= a_1^{(2)} + m^{(1)} \\ a_1^{(2)} &= a_1^{(3)} + m^{(2)} \\ &\vdots \\ a_1^{(k-2)} &= a_1^{(k-1)} + m^{(k-2)} \\ a_1^{(k-1)} &= a_1^{(k)} + m^{(k-1)} \\ a_1^{(k)} &= a_1^{(k+1)} + m^{(k)}. \end{aligned}$$

De $a_1^{(k-1)} = a_1^{(k)} + m^{(k-1)}$, isolando $a_1^{(k)}$ e substituindo nas equações anteriores, temos:

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= a_1^{(k-1)} - m^{(k-1)} \\ &= (a_1^{(k-2)} - m^{(k-2)}) - m^{(k-1)} \\ &= \vdots \quad (\text{k vezes}) \\ &= a_1 - km, \text{ pois por hipótese } m = m^{(j)}, 0 < j < k - 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo as mesmas operações com $a_1^{(k)} = a_1^{(k+1)} + m^{(k)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_1^{(k+1)} &= a_1^{(k)} - m^{(k)} \\ &= \vdots \quad (\text{k+1 vezes}) \\ &= a_1 - (k+1)m. \end{aligned}$$

Desse modo, teríamos $a_1^{(k+1)}$ negativo, contradição. Portanto, após a k -ésima explosão, devemos ter $m^{(k)} \neq m^{(k-1)} = m$.

Nessas condições, temos:

$$m_1^{(k_1)} = a_1^{(k_1)} = a_1 - k_1 m_1 \quad \text{e} \quad m_2^{(k_2)} = b_1^{(k_2)} = b_1 - k_2 m_2.$$

Assim, não há mudança de multiplicidade $\Leftrightarrow t < \min(k_1, k_2)$. □

Lema 5.4. Se $t < \min(k_1, k_2)$, temos:

- i) $(a_j, (t+1)jm_2) \in G$, para cada $0 \leq j \leq m_1 - 1$,
- ii) $((t+1)im_1, b_i) \in G$, para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$.

Demonstração. i) A demonstração será feita por indução sobre t . Para o caso $t = 0$, o resultado segue do Lema (5.3).

Por hipótese de indução temos que:

$$(a_j^{(1)}, tjm_2^{(1)}) \in G^{(1)}, \text{ para } 0 \leq j \leq m_1^{(1)} - 1.$$

Como não há mudança na multiplicidade, temos que $(a_j^{(1)}, tjm_2) \in G^{(1)}$, para cada $0 \leq j \leq m_1 - 1$. Tomando $g \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\omega_1(\bar{g}^{(1)}) = a_j^{(1)} \text{ e } \omega_2(\bar{g}^{(1)}) = tjm_2,$$

$m_1^{(1)} = m_1$ e da Proposição (5.7), temos que a forma inicial de $f_1^{(1)}$ é $(Y + \alpha X)^{m_1}$, para algum $\alpha \in K$. O mesmo argumento utilizado no Lema (5.3), mostra que podemos assumir:

$$g = Y^j + d_1(X)Y^{j-1} + \dots + d_j(X) + f_1^{(1)}g',$$

onde $d_p(X) \in K[[X]]$, $\text{ord}(d_p(X)) \geq p$ e $g' \in \mathcal{A}$.

A forma inicial de g é da forma $(Y + \alpha X)^j$ e, depois, aplicamos o Teorema da Preparação de Weierstrass (2.2). Ademais, segue do Corolário (5.2) que:

$$\omega_2(\overline{f_1^{(1)}}^{(1)}) = v^{(1)} = tm_1m_2 > tjm_2.$$

Então, podemos assumir que $g' = 0$. Podemos observar que $X^jg = h(X, XY)$ para algum $h \in A$. Temos então:

$$\begin{aligned} \omega_1(\bar{h}) &= \omega_1(\overline{h(X, XY)}^{(1)}) = j\omega_1(\bar{X}^{(1)}) + \omega_1(\bar{g}^{(1)}) = jm_1 + a_j^{(1)} = a_j \\ \omega_2(\bar{h}) &= \omega_2(\overline{\overline{h(X, XY)}}^{(1)}) = j\omega_2(\bar{X}^{(1)}) + \omega_2(\bar{g}^{(1)}) = jm_2 + tjm_2 = (t+1)jm_2. \end{aligned}$$

A demonstração do item ii) é análoga. □

Teorema 5.5. No caso $t < \min(k_1kK_2)$ os pontos maximais de G são dados por:

$$(a_j + (t+1)im_1, b_i + (t+1)jm_2) + r(m_1, m_2),$$

onde $0 \leq j \leq m_1 - 1$, $0 \leq i \leq m_2 - 1$ e $0 \leq r \leq t$.

Demonstração. Vamos denotar por:

$$P(j, i, r) = (a_j + (t+1)im_1, b_i + (t+1)jm_2) + r(m_1, m_2).$$

Os mesmos cálculos do Teorema (5.4) mostram que:

$$Q = P(j, i, r), \text{ com } j = m_1 - 1, i = m_2 - 1 \text{ e } r = t;$$

$$P(j, i, r)_S = P(j', i', r'), \text{ com } j' = m_1 - 1 - j, i' = m_2 - 1 - i \text{ e } r' = t - r.$$

Por fim, o Lema (5.4) mostra que $P(j, i, r)$ e $P(j, i, r)_S$ devem pertencer a G e, portanto, não existe ponto de G acima de $P(i, j, r)$. \square

5.3.3 Caso 2

Vamos assumir o caso em que temos apenas uma mudança de multiplicidade que será no ramo f_1 . A Proposição (5.7) mostra que se após uma explosão, apenas uma das multiplicidades mudar, chegamos ao máximo da sequência, ou seja:

$$m_1^{(j)} < m_1^{(j-1)} \text{ e } m_2^{(j)} = m_2^{(j-1)} \Rightarrow j = t.$$

Então, o caso a ser considerado aqui é:

$$m_1^{(j)} = m_1 \text{ para } 0 \leq j \leq t - 1; \quad m_1^{(t)} < m_1; \quad m_2^{(j)} = m_2 \text{ para } 0 \leq j \leq t.$$

Sejam k_1, k_2 tais que:

$$k_1 m_1 < a_1 < (k_1 + 1)m_1 \text{ e } k_2 m_2 < b_1 < (k_2 + 1)m_2.$$

Como vimos anteriormente, a multiplicidade muda após a k -ésima explosão, assim, se a multiplicidade muda em apenas um dos ramos e $k = \min\{k_1, k_2\}$, devemos ter $k_1 \neq k_2$. Vamos assumir que $k_1 < k_2$ já que estamos supondo que a multiplicidade que muda é a do ramo f_1 . Das Proposições (5.7) e (5.9) segue que $t \leq k_1 < k_2$. O caso $t < k_1 < k_2$ é o caso tratado anteriormente. Então, vamos assumir $t = k_1 < k_2$.

Pela Proposição (5.9) podemos assumir $m_1^{(k_1)} = a_1 - k_1 m_1$. Da fórmula

$$v = \sum_{j=0}^t m_1^{(j)} m_2^{(j)},$$

do Corolário (5.2), temos $v = a_1 m_2$.

Lema 5.5. Se $t = k_1 < k_2$ temos:

$$(ia_1, b_i) \in G \text{ para cada } 0 \leq i \leq m_2 - 1.$$

Demonstração. Por indução sobre o número t de explosões, assumimos que

$$(ia_1^{(1)}, b_i^{(1)}) \in G^{(1)} \text{ para cada } 0 \leq i \leq m_2 - 1. \quad (5.3)$$

Note que para $t = 1$, temos $a_1^{(1)} = m_1^{(1)}$ e (5.3) decorre do Lema (5.3).

Seja $g \in A$ com $\omega_1(\bar{g}^{(1)}) = ia_1^{(1)}$ e $\omega_2(\bar{g}^{(1)}) = b_i^{(1)}$. De $\omega_2(\bar{g}^{(1)}) = b_i^{(1)}$ e $m_2^{(1)} = m_2$, procedendo como na demonstração do Lema (5.4), podemos assumir que

$$g = Y^i + d_1(X)Y^{i-1} + \cdots + d_i(X), d_p(X) \in K[[X]], \text{ord}(d_p(X)) \geq p.$$

Podemos observar que $X^i g = h(X, XY)$ para algum $h \in \mathcal{A}$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \omega_1(\bar{h}) &= \omega_1(\overline{h(X, XY)}^{(1)}) = i\omega_1(\bar{X}^{(1)}) + \omega_1(\bar{g}^{(1)}) = im_1 + ia_1^{(1)} = ia_i, \\ \omega_2(\bar{h}) &= \omega_2(\overline{h(X, XY)}^{(1)}) = i\omega_2(\bar{X}^{(1)}) + \omega_2(\bar{g}^{(1)}) = im_2 + b_i^{(1)} = b_i. \end{aligned} \quad \square$$

A seguir, apresentamos alguns resultados do caso unirraficado que serão utilizados para provar os demais resultados para determinar o semigrupo G associado a curvas birrafimicadas quando uma multiplicidade muda na sequência de explosões. No que segue, MDC significa máximo divisor comum.

Na sequência $m_1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m_1-1}$, vamos considerar a subsequência que consiste nos elementos onde o MDC diminui, isto é, que consiste nos elementos a'_p s tais que:

$$\text{MDC}(m_1, a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p) < \text{MDC}(m_1, a_1, \cdots, a_{p-1}).$$

Sabemos que essa subsequência é dada por:

$$m_1 < a_1 < \frac{a_{m_1}}{g_1} < \frac{a_{m_1}}{g_2} \cdots < \frac{a_{m_1}}{g_{n-2}},$$

onde $g_j = \text{MDC}\left(m_1, a_1, \cdots, a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}}\right)$ para $1 \leq j \leq n-1$, $g_0 = m_1$ e n é definido por $g_{n-2} > g_{n-1} = 1$. Vamos denotar $v_j = \frac{m_1}{g_j}$ e $r_j = \frac{g_j}{g_{j+1}}$, para $0 \leq j \leq n-2$.

Utilizando divisões sucessivas, podemos verificar que um número natural p , onde $0 \leq p \leq m_1 - 1$, pode ser escrito de maneira única da forma

$$p = \sum_{j=0}^{n-1} p_j v_j \text{ com } 0 \leq p_j \leq r_j.$$

Desse modo, $a_p = \sum_{j=0}^{n-1} p_j a_{v_j}$ relaciona o elemento geral da sequência de Apéry com os pertencentes à subsequência. É possível mostrar que essa subsequência é o menor conjunto de geradores para G_1 . Em particular, temos:

$$a_{m_1-1} = \sum_{j=0}^{n-2} (r_j - 1) a_{v_j}.$$

Os resultados para o caso unirramificado citados acima são conseqüências de $a_i + a_j \leq a_{i+j}$ e podem ser consultados em [1].

Teorema 5.6. No caso $t = k_1 < k_2$, se o número mínimo de geradores para G_1 é $n = 2$, então os pontos maximais de G são dados por:

$$(ia_1 + rm_1, b_i + rm_2), 0 \leq i \leq m_2 - 1 \text{ e } 0 \leq r \leq a_1.$$

Demonstração. Sabemos que o número total de pontos do enunciado é $v = a_1 m_2$. Então, é suficiente mostrar que os pontos do enunciado são pontos maximais de G . Da equação $a_{m_1-1} = \sum_{j=0}^{n-2} (r_j - 1) a_{v_j}$, temos que:

$$n = 2 \Leftrightarrow a_{m_1-1} = (m_1 - 1) a_1.$$

Denotando $P(i, r) = (ia_1 + rm_1, b_i + rm_2)$. Vamos mostrar que

$$Q = P(i, r), \text{ com } i = m_2 - 1 \text{ e } r = a_1 - 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} P(m_2 - 1, a_1 - 1) &= ((m_2 - 1)a_1 + (a_1 - 1)m_1, b_{m_2-1} + (a_1 - 1)m_2) \\ &= (m_2 a_1 - a_1 + a_1 m_1 - m_1, b_{m_2-1} + a_1 m_2 - m_2) \\ &= (m_2 a_1 - [(a_1 - 1)(m_1 - 1) - 1], a_1 m_2 + b_{m_2-1} - m_2) \end{aligned}$$

Da Observação (3.1), segue que o condutor de $G = [m_1, a_1]$ é dado por $(a_1 - 1)(m_1 - 1)$, assim, $(a_1 - m_1)(m_1 - 1) - 1 = c_1 - 1$. Da Proposição (3.1), temos que $c_2 = a_{m_2-1} - m_2 + 1$ assim, $a_1 m_2 + b_{m_2-1} = c_2 - 1$. Como $v = a_1 m_2$, temos:

$$P(m_2 - 1, a_1 - 1) = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 2) = Q$$

Vamos mostrar agora que: $P(i, r)_S = P(i', r')$ com $i' = m_2 - 1 - i$ e $r' = a_1 - 1 - r$.

De fato, temos:

$$\begin{aligned} &P(i, r) + P(i', r') \\ &= P(i, r) + P(m_2 - 1 - i, a_1 - 1 - r) \\ &= (ia_1 + rm_1, b_i + rm_2) + ((m_2 - 1 - i)a_1 + (a_1 - 1 - r)m_1, b_{m_2-1-i} + (a_1 - 1 - r)m_2) \\ &= (m_2 a_1 - a_1 + a_1 m_1 - m_1, b_{m_2-1-i} + a_1 m_2 - m_2 + b_i). \end{aligned}$$

Da Proposição (3.4), temos que $b_{m_2-1-i} + b_i = b_{m_2-1}$. Daí,

$$P(i, r) + P(i', r') = (m_2 a_1 - a_1 + a_1 m_1 - m_1, b_{m_2-1} + a_1 m_2 - m_2) = Q$$

Assim, $P(i, r)_S = P(i', r')$. Do Lema (5.5), temos que $P(i, r)$ e $P(i, r)_S$ pertencem a G . Portanto, $P(i, r)$ é um ponto maximal. \square

Nos resultados a seguir, a fórmula para os pontos maximais dependerá do número de geradores para G_1 . Suponhamos que o número mínimo de geradores para G_1 seja n . Da Observação (3.3) segue que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a_{\frac{m_1}{g_1}} < \cdots < a_{\frac{m_1}{g_{n-2}}} \right] \text{ e que}$$

$$c_1 - 1 = -a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 \right) a_{\frac{m_1}{g_j}}.$$

Lema 5.6. Seja $f \in K[[X, Y]]$ birramificada, tal que $t = k_1 < k_2$. Seja n o número mínimo de geradores de G_1 . Seja:

$$D = \left\{ ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}; \right.$$

$$\left. 0 \leq i \leq m_1 - 1, 0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1, 1 \leq j \leq n - 2, 0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} \right\},$$

então, $FV(x)$ é finita e não vazia se, e somente se, $x \in D$.

Demonstração. Seja $B = \{x \in G_1; x - a_1 m_1 \notin G_1\}$, devemos mostrar então que $B = D$. Podemos observar que $\#B = \#D = a_1 m_2 = v$. Então, é suficiente mostrar que $D \subseteq B$.

Seja $x \in D$ então $x \in G_1$. Resta mostrar que $x - a_1 m_2 \notin G_1$. Como $x \in D$, segue que existem $0 \leq i \leq m_2 - 1, 0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e, para cada $1 \leq j \leq n - 1$ existe $0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$ tais que:

$$x = ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-1} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}.$$

Considere a soma:

$$(x - a_1 m_2) + \left[(m_2 - 1 - i)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 - r \right) m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 - r_j \right) a_{\frac{m_1}{g_j}} \right].$$

Podemos verificar que o resultado da soma acima é $c_1 - 1$. Como

$$\left[(m_2 - 1 - i)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 - r \right) m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 - r_j \right) a_{\frac{m_1}{g_j}} \right] \in G_1,$$

pela simetria de G_1 segue que $x - a_1 m_2 \notin G_1$. \square

O Lema (5.6) fornece a sequência de Apéry de G_1 em relação à $v = a_1 m_2$ a partir da sequência de Apéry de G_1 em relação à m_1 .

Lema 5.7. Sejam $f \in K[[X, Y]]$ birramificada, tal que $t = k_1 < k_2$ e n o número mínimo de geradores de G_1 . Seja:

$$E = \left\{ b_i + r m_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2; \right. \\ \left. 0 \leq i \leq m_2 - 1, 0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1, 1 \leq j \leq n - 2, 0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 \right\},$$

então $FH(y)$ é finita e não vazia se, e somente se, $y \in E$.

Demonstração. Note que

$$E = \left\{ b_i + m_2 \left(r + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} \right); 0 \leq i \leq m_2 - 1, 0 \leq \lambda \leq a_1 - 1 \right\}, \text{ onde } \lambda = r + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j}.$$

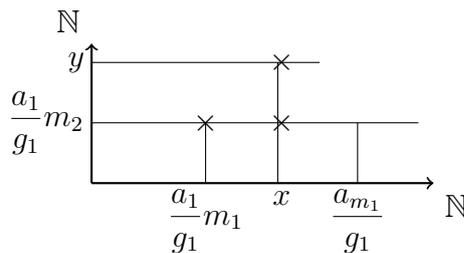
□

Lema 5.8. Seja $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Então, existe ponto de G da forma $\left(x, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$ com $x \geq a_{\frac{m_1}{g_1}}$.

Demonstração. Para $n = 2$, temos $a_{\frac{m_1}{g_1}} = \frac{m_1}{g_1} a_1 = \frac{a_1}{g_1}$, assim $\left(\frac{a_1}{g_1} m_1, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$ satisfaz o enunciado. Vamos então supor $n \geq 3$. Nesse caso, temos: $a_{\frac{m_1}{g_1}} > \frac{a_1}{g_1} m_1$. Sabemos que $\left(\frac{a_1}{g_1} m_1, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$. Pela Propriedade B (4.8), é suficiente provar a seguinte afirmação.

Afirmação 5.2. Se $\left(x, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$ com $\frac{a_1}{g_1} m_1 \leq x \leq a_{\frac{m_1}{g_1}}$, então existe um ponto de G acima dele, ou seja, da forma (x, y) com $y > \frac{a_1}{g_1} m_2$. Graficamente, temos:

Gráfico 6 - Afirmação 5.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Seja $\left(x, \frac{a_1}{g_1}m_2\right) \in G$, com $\frac{a_1}{g_1}m_1 \leq x < a\frac{m_1}{g_1}$. Podemos assumir que $VF(x)$ é finita e não vazia. Do Lema (5.6), segue que $x = ia_1 + rm_1$, para algum $0 \leq i \leq m_2 - 1$ e algum $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$. De $x \geq \frac{a_1}{g_1}m_1$ segue que $i \neq 0$. Temos $t = k_1$, então, pela definição de k_1 , segue que:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 > ia_1 + rm_1 = x \geq \frac{a_1}{g_1}m_1.$$

Daí, $i(t+1) + r > \frac{a_1}{g_1}$. Sabemos que $(ia_1 + rm_1, b_i + rm_2) \in G$. Então, precisamos mostrar apenas que $b_i + rm_2 > \frac{a_1}{g_1}$. Como G_2 cresce fortemente, temos:

$$\begin{aligned} b_i + rm_2 &\geq ib_1 + rm_2 \\ &> ik_2m_2 + rm_2 \\ &\geq i(k_1 + 1)m_2 + rm_2 \\ &= i(t+1)m_2 + rm_2 \\ &= (i(t+1) + r)m_2 \\ &> \frac{a_1}{g_1}m_2. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.7. Sejam $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Suponhamos que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a\frac{m_1}{g_1} \right], \text{ ou seja } G \text{ é gerado minimamente por 3 elementos.}$$

Então, os pontos de G são dados por:

$$\left(ia_1 + rm_1 + r_1 a\frac{m_1}{g_1}, b_i + rm_2 + r_1 \frac{a_1}{g_1} m_2 \right),$$

onde $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_1 \leq g_1$.

Demonstração. Sabemos que o total de pontos de G é dado por $v = a_1m_2$. Então, basta mostrar que tais pontos são maximais de G .

De $c_1 - 1 = -a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1\right)m_1 + (g_1 - 1)a\frac{m_1}{g_1}$, segue que o ponto

$$Q = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$$

pode ser escrito como:

$$\left((m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + (g_1 - 1) \frac{a_{m_1}}{g_1}, b_{m_2-1} + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_2 + (g_1 - 1) \frac{a_1}{g_1} m_2 \right).$$

Suponhamos que $\left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$.

Então:

$$\left(ia_1 + rm_1 + r_1 a_{\frac{m_1}{g_1}}, b_i + rm_2 + r_1 \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G,$$

para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_1 \leq g_1 - 1$.

Fixemos i, r, r_1 tais que $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_1 \leq g_1 - 1$. Seja

$$P = \left(ia_1 + rm_1 + r_1 a_{\frac{m_1}{g_1}}, b_i + rm_2 + r_1 \frac{a_1}{g_1} m_2 \right).$$

Vamos provar que P é maximal de G . Seja P_S o simétrico de P em relação a \mathcal{Q} , denotamos:

$$P_S = \left(ia_1 + r'm_1 + r'_1 a_{\frac{m_1}{g_1}}, b'_i + r'm_2 + r'_1 \frac{a_1}{g_1} m_2 \right),$$

onde $i' = m_1 - 1 - i$, $r' = \frac{a_1}{g_1} - 1 - r$ e $r'_1 = g_1 - 1 - r_1$.

Podemos verificar que $P + P_S = \mathcal{Q}$, assim, P é ponto maximal de G . Resta mostrar que $\left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$ é ponto de G .

Pelo Lema (5.8), segue que existe ponto em G da forma $\left(x, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$, onde $x \geq a_{\frac{m_1}{g_1}}$.

Consideramos então o ponto de G :

$$T = \left((m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + (g_1 - 1)x, b_{m_2-1} + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_2 + (g_1 - 1) \frac{a_1}{g_1} m_2 \right).$$

Como a segunda coordenada de T é igual à segunda coordenada de \mathcal{Q} , temos:

$$(m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + (g_1 - 1)x \leq (m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + (g_1 - 1) \frac{a_{m_1}}{g_1}.$$

Portanto, $x \leq a_{\frac{m_1}{g_1}}$. □

5.3.4 Caso 3

No que segue, estudamos como determinar fórmulas para obter o semigrupo G quando o número de geradores de G_1 é $n \geq 4$. Seja $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Vamos supor que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a_{\frac{m_1}{g_1}} < \cdots < a_{\frac{m_1}{g_{n-2}}} \right], \text{ com } n \geq 4.$$

Mostramos que a partir da introdução de uma hipótese adicional pouco restritiva, temos que os pontos maximais de G são dados por:

$$\left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right).$$

Definição 5.4. Se o semigrupo o número mínimo de geradores para o semigrupo G_1 é $n \geq 4$. A hipótese adicional sobre o semigrupo G_1 é dada por:

$$S_{j-1} - \sum_{l=1}^{j-1} (r_l - 1) S_l \geq (a_1 - m_1) \left(\frac{m_1}{g_j} - \frac{m_1}{g_1} \right),$$

para cada $2 \leq j \leq n - 2$, onde $S_j = a_{\frac{m_1}{g_j}} - \frac{a_1}{g_j} m_1$, para cada $2 \leq j \leq n - 2$.

Lema 5.9. Seja $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Suponhamos que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a_{\frac{m_1}{g_1}} < \cdots < a_{\frac{m_1}{g_{n-2}}} \right], \text{ com } n \geq 4.$$

Se existe um ponto de G da forma $\left(x_{j-1}, \frac{a_1}{g_{j-1}} \right)$ com $x_{j-1} \geq a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}}$ e G_1 satisfaz a hipótese adicional da Definição (5.4) para $2 \leq j \leq n - 2$ então existe ponto de G da forma:

$$\left(x_j, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right), \text{ com } x_j \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}.$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que se $j = 2$ for fixado, então, segue do Lema (5.6), que existe ponto de G da forma $\left(x_j, \frac{a_1}{g_j} \right)$, com $x_j \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}$.

Observemos também que, da hipótese adicional, segue que $S_1 \geq (a_1 - m_1) \left(\frac{m_1}{g_2} - \frac{m_1}{g_1} \right)$.

Vamos provar agora a seguinte afirmação:

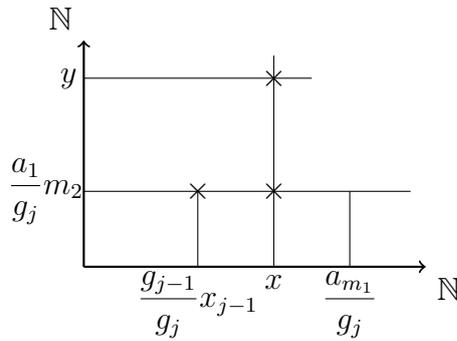
Afirmação 5.3. Para cada $1 \leq k \leq n - 2$ existe ponto de G da forma $\left(a_{\frac{m_1}{g_k}}, y_k \right)$ com $y_k > \frac{m_1}{g_k} m_2$.

A partir de uma mudança de coordenadas, podemos assumir que a tangente a f na origem é Y . Pela Proposição (4.3), temos que existe $g \in \mathcal{A}$ com forma inicial $Y^{\frac{m_1}{g_k}}$ tal que $\omega_1(g + f_1 \mathcal{A}) = a_{\frac{m_1}{g_k}}$. Assim, $\omega_2(g + f_2 \mathcal{A}) = I(g, f_2) > \frac{m_1}{g_k} m_2$, pois g e f_2 tem Y como tangente. Prosseguimos agora com a demonstração do Lema.

De $\left(x_{j_1}, \frac{a_1}{g_{j-1}} \right) \in G$, temos $\left(\frac{g_{j-1}}{g_j} x_{j-1}, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right) \in G$. Se tivermos $\frac{g_{j-1}}{g_j} x_{j-1} \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}$ temos o resultado. Podemos então supor que $\frac{g_{j-1}}{g_j} x_{j-1} < a_{\frac{m_1}{g_j}}$. Então, pela propriedade B (4.8), é suficiente provar que:

Afirmção 5.4. Se $\left(x, \frac{a_1}{g_j}m_2\right) \in G$ com $\frac{g_{j-1}}{g_j}x_{j-1} \leq x < \frac{a_{m_1}}{g_j}$ então existe um ponto de G acima deste, ou seja, da forma (x, y) , com $y > \frac{a_1}{g_j}m_2$. Graficamente, temos:

Gráfico 7 - Afirmção 5.4



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Seja $\left(x, \frac{a_1}{g_j}m_2\right) \in G$, com $\frac{g_{j-1}}{g_j}x_{j-1} \leq x \leq \frac{a_{m_1}}{g_j}$. Podemos assumir que $FV(x)$ é finita e não vazia. Do Lema (5.6), segue que se $x \in D$ e $x < \frac{a_{m_1}}{g_j}$ então:

$$x = ia_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_{m_1}}{g_k},$$

para algum $0 \leq i \leq m_2 - 1, 0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_k \leq \frac{g_k}{g_{k+1}}$.

Seja $\left(\frac{a_{m_1}}{g_k}, y_k\right) \in G$, com $y_k > \frac{m_1}{g_k}$, dado pela Afirmção (5.3), temos

$$\left(x, b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k y_k\right) \in G.$$

Assim, é suficiente mostrar que $b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k y_k > \frac{a_1}{g_j}m_2$. Temos:

$$x = ia_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_{m_1}}{g_k}. \quad (5.4)$$

$$x \geq \frac{g_{j-1}}{g_j}x_{j-1} \geq \frac{g_{j-1}}{g_j}a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}}. \quad (5.5)$$

Das desigualdades, segue que devemos ter $i \neq 0$ ou $r_k \neq 0$, para algum $1 \leq k \leq j - 1$. Temos:

$$b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k y_k \geq ib_1 + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_2,$$

onde, se vale a igualdade, então $r_k = 0$ para cada $1 \leq k \leq j-1$. Temos também:

$$ib_1 + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_2 \geq i(t+1)m_2 + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_2,$$

onde é válida a igualdade se, e somente se, $i = 0$. Como sabemos que $i \neq 0$ ou $r_k \neq 0$ para algum $1 \leq k \leq j-1$, temos:

$$b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k y_k > i(t+1)m_2 + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_2.$$

Então é suficiente mostrar que:

$$i(t+1) + r + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} \geq \frac{a_1}{g_j}.$$

Sabemos que:

$$ia_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k a \frac{a_1}{m_1} \geq \frac{g_{j-1}}{g_j} a \frac{m_1}{g_{j-1}}.$$

Então,

$$ia_i + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \left(\frac{m_1}{g_k} a_1 + S_k \right) \geq \frac{g_{j-1}}{g_j} \left(\frac{m_1}{g_{j-1}} a_1 + S_{j-1} \right).$$

Como $(t+1)m_1 > a_1$, temos:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \left(\frac{m_1}{g_k} a_1 + S_k \right) \geq \frac{a_1}{g_j} m_1 + \frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1}.$$

Assim:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} m_1 \geq \frac{a_1}{g_j} m_1 + \left(\frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} r_k S_k \right).$$

Podemos escrever:

$$\sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} m_1 = \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1 - m_1}{g_k} m_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_1.$$

Substituindo na desigualdade acima, temos:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} m_1 \geq \frac{a_1}{g_1} m_1 + \frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} r_k S_k - (a_1 - m_1) \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k}.$$

Então, basta mostrar que:

$$\frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} r_k S_k - (a_1 - m_1) \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{m_1}{g_k} \geq 0.$$

Como $0 \leq r_k \leq \frac{g_k}{g_{k+1}} - 1$, é suficiente mostrar que:

$$\frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k \geq (a_1 - m_1) \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) \frac{m_1}{g_k}.$$

Podemos observar então que:

$$\begin{aligned} \frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k &= S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-2} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k; \\ \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) \frac{m_1}{g_k} &= \frac{m_1}{g_j} - \frac{m_1}{g_1}. \end{aligned}$$

Portanto é suficiente que seja satisfeita a hipótese adicional:

$$S_{j-1} - \sum_{l=1}^{j-1} (r_l - 1) S_l \geq (a_1 - m_1) \left(\frac{m_1}{g_j} - \frac{m_1}{g_1} \right).$$

□

Teorema 5.8. Sejam $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Suponhamos que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a \frac{m_1}{g_1} < \cdots < a \frac{m_1}{g_{n-2}} \right], \text{ com } n \geq 4.$$

Se G_1 satisfaz a hipótese adicional da Definição (5.4) para $2 \leq j \leq n - 2$, então os pontos maximais de G são dados por:

$$\left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a \frac{m_1}{g_j}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right),$$

onde $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e para cada $1 \leq j \leq n - 2$, $0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$.

Demonstração. Sabemos que o total de pontos do enunciado é $v = a_1 m_2$. Então é suficiente mostrar que tais pontos são pontos maximais de G . Temos que:

$$c_1 - 1 = -a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1 \right) m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 \right) a \frac{m_1}{g_j}.$$

Então, podemos escrever o ponto $\mathcal{Q} = (v + c_1 - 1, v + c_2 - 1)$ da forma

$$\mathcal{Q} = \left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right),$$

onde $i = m_2 - 1$, $r = -\frac{a_1}{g_1} - 1$ e $r_j = \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$, para cada j .

Suponhamos que tenhamos provado que $\left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$ para cada $1 \leq j \leq n - 2$.

Então:

$$\left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_1 \right) \in G,$$

para cada $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$.

Vamos fixar i, r, r_j para $1 \leq j \leq n - 2$, tais que $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $0 \leq r_j \leq \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$. Denotamos por:

$$P = \left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right).$$

Vamos mostrar que P é um ponto maximal de G . Seja:

$$P_S = \left(i'a_1 + r'm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r'_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + r'm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r'_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right).$$

onde $i' = m_2 - 1 - i$, $r' = \frac{a_1}{g_1} - 1 - r$ e para cada $1 \leq j \leq n - 2$, $r'_j = \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1 - r_j$. Podemos observar que $P + P_S = \mathcal{Q}$. Portanto P é ponto máximo de G . Falta então mostrar que $\left(a_{\frac{m_1}{g_j}}, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right) \in G$ pra cada $1 \leq j \leq n - 2$.

Pelo Lema (5.8) temos que existe ponto de G da forma $\left(x_1, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$, com $x_1 \geq a_{\frac{m_1}{g_1}}$. Tomando $j = 2$ na hipótese adicional da Definição (5.4) e usando o Lema (5.8), segue que existe ponto de G da forma $\left(x_2, \frac{a_1}{g_2} m_2 \right)$ com $x_2 \geq a_{\frac{m_1}{g_2}}$.

Tomando $j = 3$ na hipótese adicional e usando o Lema (5.8), segue que existe ponto de G da forma $\left(x_3, \frac{a_1}{g_3} m_2 \right)$, com $x_3 \geq a_{\frac{m_1}{g_3}}$. Repetindo esse argumento, para cada $1 \leq j \leq n - 2$, obtemos um ponto de G da forma $\left(x_j, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right)$ com $x_j \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}$.

Considere o ponto de G dado por:

$$T = \left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j x_j, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right),$$

onde $i = m_2 - 1$, $r = \frac{a_1}{g_1} - 1$ e $r_j = \frac{g_j}{g_{j+1}} - 1$.

Como a segunda coordenada de T é igual à segunda coordenada de \mathcal{Q} , temos:

$$\begin{aligned} & (m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1\right)m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_j \\ & \leq (m_2 - 1)a_1 + \left(\frac{a_1}{g_1} - 1\right)m_1 + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)a_{\frac{m_1}{g_j}}. \end{aligned}$$

Assim, temos: $\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)x_j \leq \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{g_j}{g_{j+1}} - 1\right)a_{\frac{m_1}{g_j}}$. Como $x_j \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}$ para cada $1 \leq j \leq n-2$, temos $x_j = a_{\frac{m_1}{g_j}}$ para cada $1 \leq j \leq n-2$. \square

Teorema 5.9. Seja $f \in K[[X, Y]]$ birramificada e tal que $t = k_1 < k_2$. Suponhamos que:

$$G_1 = \left[m_1 < a_1 < a_{\frac{m_1}{g_1}} < \cdots < a_{\frac{m_1}{g_{n-2}}} \right], \text{ com } n \geq 4.$$

Seja $2 \leq j \leq n-2$ fixado. Se

$$P_l = \left(a_{\frac{m_1}{g_k}}, \frac{a_1}{g_l} m_2 \right) \in G \text{ para cada } 1 \leq l < j,$$

então existe um ponto de G à direita ou igual a P_j , ou seja, da forma:

$$\left(x, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right), \text{ com } x \geq a_{\frac{m_1}{g_j}}.$$

Demonstração. Temos $P_l = \left(a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}}, \frac{a_1}{g_{j-1}} m_2 \right) \in G$. Então $\left(\frac{g_{j-1}}{g_j} a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}}, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right) \in G$.

Podemos observar que $\frac{g_{j-1}}{g_j} a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}} < a_{\frac{m_1}{g_j}}$. Pela Propriedade B, é suficiente mostrar que para cada ponto de G da forma:

$$\left(x, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right), \text{ com } \frac{g_{j-1}}{g_j} a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}} \leq x < a_{\frac{m_1}{g_j}},$$

existe um ponto de G acima dele, ou seja, um ponto de G da forma (x, y) com $y > \frac{a_1}{g_j} m_2$.

Seja $\left(x, \frac{a_1}{g_j} m_2 \right) \in G$, com $\frac{g_{j-1}}{g_j} a_{\frac{m_1}{g_{j-1}}} \leq x < a_{\frac{m_1}{g_j}}$. Podemos supor que $FV(x)$ é finita e não vazia. De $x < a_{\frac{m_1}{g_j}}$ e do Lema (5.6), temos:

$$x = ia_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k a_{\frac{m_1}{g_k}} \text{ para algum } 0 \leq i \leq m_1 - 1, 0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1 \text{ e } 0 \leq r_k \leq \frac{g_k}{g_{k+1}} - 1.$$

Temos:

$$\left(x, b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} m_2 \right) \in G.$$

Basta então mostrar que:

$$b_i + rm_2 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} m_2 > \frac{a_1}{g_j} m_2.$$

Como $b_i \geq ib_1 \geq i(t+1)m_2$, basta mostrar que:

$$i(t+1) + r + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} > \frac{a_1}{g_j}.$$

Sabemos que:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1 m_1}{g_k} \geq x \geq \frac{g_{j-1}}{g_j} a \frac{m_1}{g_{j-1}}.$$

Então:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \left(\frac{m_1}{g_k} a_1 + S_k \right) \geq \frac{g_{j-1}}{g_j} \left(\frac{m_1}{g_{j-1}} a_1 + S_{j-1} \right).$$

Reescrevendo a desigualdade acima, obtemos:

$$i(t+1)m_1 + rm_1 + \sum_{k=1}^{j-1} r_k \frac{a_1}{g_k} m_1 \geq \frac{a_1}{g_j} m_1 + \left(\frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} r_k S_k \right).$$

Assim, basta mostrar que:

$$\frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} r_k S_k > 0.$$

Então, é suficiente mostrar que:

$$S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-2} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k = \frac{g_{j-1}}{g_j} S_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k > 0.$$

Para $j = 2$, a desigualdade é $S_1 > 0$.

Para $j = 3$, a desigualdade é $S_2 - \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) S_1 > 0$. Nesse caso a desigualdade é verdadeira, pois temos $S_2 > \frac{g_1}{g_2} S_1$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
S_{j-1} &> \frac{g_{j-1}}{g_{j-1}} S_{j-2} \\
&= \left(\frac{g_{j-1}}{g_{j-1}} - 1 \right) S_{j-2} + S_{j-2} \\
&> \left(\frac{g_{j-2}}{g_{j-1}} - 1 \right) S_{j-2} + \left(\frac{g_{j-3}}{g_{j-2}} - 1 \right) S_{j-3} + S_{j-3}.
\end{aligned}$$

Repetindo esse processo, obtemos:

$$S_{j-1} > \sum_{k=2}^{j-2} \left(\frac{g_k}{g_{k+1}} - 1 \right) S_k + S_2, \text{ para cada } 4 \leq j \leq n-2.$$

□

Corolário 5.4. Se o número mínimo de geradores para o semigrupo G é $n = 4$ e $t = k_1 < k_2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$;

ii) Os pontos dados pelo Teorema (5.9) são os pontos maximais de G .

Demonstração. i) \Rightarrow ii): Como $P_1 = \left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$. Pelo Teorema (5.9), temos que existe ponto em G à direita de P_1 , ou seja, da forma $\left(x, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right)$ com $x \geq a_{\frac{m_1}{g_2}}$. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema (5.9), segue que $x = a_{\frac{m_1}{g_2}}$.

ii) \Rightarrow i): Sabemos que os pontos maximais de G são dados por:

$$\left(ia_1 + rm_1 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j a_{\frac{m_1}{g_j}}, b_i + rm_2 + \sum_{j=1}^{n-2} r_j \frac{a_1}{g_j} m_2 \right),$$

onde $0 \leq i \leq m_2 - 1$, $0 \leq r \leq \frac{a_1}{g_1} - 1$, $0 \leq r_1 \leq g_1$ e $0 \leq r_2 \leq g_2 - 1$. Em particular, temos que $\left(a_{\frac{m_1}{g_1}}, \frac{a_1}{g_1} m_2 \right) \in G$, tomando $i = r = r_2 = 0$ e $r_1 = 1$. □

A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar que a hipótese adicional que assumimos anteriormente não é muito restritiva.

Exemplo 5.1. Suponha que G_1 é gerado minimamente por 4 elementos. Sejam $m_1 = 8$ e $a_1 = 12$. Então G_1 é gerado por m_1, a_1, a_{v_1} e a_{v_2} .

Claramente, $v_1 = \frac{8}{4} = 2$ e se G_1 não satisfaz a hipótese adicional, devemos ter

$$a_{v_1} - v_1 a_1 < (a_1 - m_1) \left(\frac{m_1}{g_2} - \frac{m_1}{g_1} \right), \text{ ou seja } a_2 < 32.$$

Como $a_2 > 2a_1 = 24$, podemos ver que a única possibilidade para G_1 que não satisfaz a hipótese adicional é:

$$a_2 = 26 \text{ ou } a_2 = 30.$$

Por outro lado, tomando $a_2 \neq 26$ e $a_2 \neq 30$, podemos obter infinitos valores para a_2 nas condições acima, que satisfazem a hipótese adicional.

6 CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho o processo de determinação de fórmulas para se obter semigrupos de valores associados a pontos singulares de curvas algebróides birramificadas. Vimos que tais semigrupos não são finitamente gerados, como no caso das curvas algebróides unirramificadas, mas sim um subconjunto específico do produto cartesiano dos semigrupos associados a cada um dos ramos.

Observamos que o estudo das propriedades dos pontos maximais, principalmente da simetria, desempenha um papel fundamental no processo de determinação das fórmulas estudadas. Além disso, as fórmulas para os semigrupos estudados dependem do número de tangentes no ponto de singularidade e, no caso de tangente única, podem depender do número mínimo de geradores do semigrupo associado a um dos ramos.

Inicialmente estudamos as curvas com tangentes distintas e em seguida, o caso de curvas com tangente única. Para este segundo caso, definimos uma sequência finita de explosões que nos permite obter uma curva com tangentes distintas. Assim, o segundo caso pôde ser reduzido ao primeiro, salvo uma exceção, relacionada ao número de geradores de um dos semigrupos, que se aplica quando uma multiplicidade muda na sequência de explosões e o número mínimo de geradores para o semigrupo associado a um dos ramos é maior ou igual a 4. Nesse caso, precisamos de hipótese adicional sobre a qual utilizamos um exemplo para justificar que tal hipótese é pouco restritiva.

Por fim, concluímos que este trabalho apresenta uma caracterização detalhada do processo de determinação de fórmulas para os semigrupos de valores associados a pontos singulares de curvas algebróides birramificadas em função dos semigrupos associados a cada ramo e do índice de interseção entre os ramos.

REFERÊNCIAS

- [1] ANGERMÜLLER, G. Die Wertehalbgruppe Einer Ebenen Irreduziblen Algebroiden Kurve. **Mathematische Zeitschrift** by Springer-Verlag, Berlin, v. 153, p. 267-282, 1977.
- [2] APÉRY, R. Sur Les Branches Superlinéaires des Courbes Algébriques. **C.R. Académie des Sciences**, Paris, v. 222, p. 1198-1200, 1946.
- [3] ATIYAH, Michael Francis; MACDONALD, Ian Grant. **Introduction to Comutative Algebra**. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [4] AZEVEDO, Alberto de Carvalho Peixoto. **The Jacobian Ideal of a Plane Algebroid Curve**. Tese (Doutorado em Matemática) - Purdue University, Fortwayne, 1967.
- [5] COHN, Paul Moritz. **Algebraic Numbers and Algebraic Functions**. Londres: Chapman & Hall Mathematics, 1991.
- [6] FULTON, William. **Algebraic Curves. An Introduction To Algebraic Geometry**. New York: W.A.Benjamin, 1969.
- [7] GARCIA, A. L. P. Semigroups associated to singular points of a plane curves. **J. reine angew. Math.**, Berlin, v. 336, p. 165-184, 1982.
- [8] GARCIA, Arnaldo Leite Pinto. **Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Algébricas**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1980.
- [9] HEFEZ, A. Irreducible Plane Curve Singularities. In: MOND, D.; SALA, M. J. **Real And Complex Singularities**. New York: Marcel Kekker, 2003. p. 1-120.
- [10] KUNZ, Ernest. The Value-semigroup of a One-dimensional Gorenstein Ring. **Proceedings of the American Mathematical Society**, [s. l.], v. 25 p. 748-751, 1970. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/proc/1970-025-04/S0002-9939-1970-0265353-7/S0002-9939-1970-0265353-7.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2020.
- [11] NEUKIRCH, Jürgen. **Algebraic Numbers Theory**. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [12] TENGAN, Eduardo; BORGES, Herivelto. **Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [13] VIEIRA, Stéfani Concolato **O algoritmo de Apéry para uma curva plana algebróide com dois ramos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, 2015.
- [14] ZARISKI, Oscar, SAMUEL, Pierre. **Commutative Algebra Vol. I**. Princeton: D.Van Nostrand, 1958.
- [15] ZARISKI, Oscar, SAMUEL, Pierre. **Commutative Algebra Vol. II**. Princeton: D.Van Nostrand, 1960.