

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

*Pedro André Arroyo Silva*

*Sobre a sensibilidade do fluxo seccional-Anosov*

Juiz de Fora

2013

*Pedro André Arroyo Silva*

***Sobre a sensibilidade do fluxo seccional-Anosov***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de matemática aplicada.

Orientador : Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior.

Juiz de Fora

2013

Arroyo Silva, Pedro André.

Sobre a sensibilidade do fluxo seccional-Anosov / Pedro Arroyo.  
2013. 74f. : il.

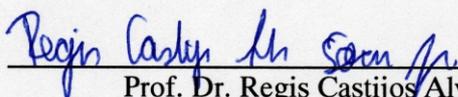
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Fluxo Hiperbólico. 2. Fluxo Anosov. 3. Fluxo seccional-Anosov.  
4. Sensibilidade. I. Título.

PEDRO ANDRÉ ARROYO SILVA

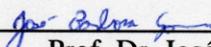
SOBRE A SENSIBILIDADE DO FLUXO SECCIONAL-ANOSOV

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



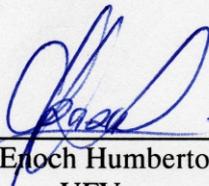
---

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
UFJF



---

Prof. Dr. José Barbosa Gomes  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
UFJF



---

Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla  
UFV

Juiz de Fora, 17 de julho de 2013.

# ***AGRADECIMENTOS***

Agradeço a meu Orientador Prof. Regis Castijos Alves Soares Junior pela dedicação, paciência, incentivo e por todos ensinamentos. Agradeço aos Membros da Banca, Prof. Enoch Humberto Apaza Calla, Prof. José Barbosa Gomes, Prof. Alexandre Miranda Alves e ao Prof. Rogério Casagrande.

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio e força em todos os momentos.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

# ***RESUMO***

O principal objetivo deste trabalho é o estudo da sensibilidade às condições iniciais sobre fluxos seccional-Anosov em variedades compactas tridimensionais para os quais o conjunto maximal invariante é igual ao conjunto não errante. Veremos que em conjuntos hiperbólicos e fluxos Anosov temos sensibilidade às condições iniciais. Generalizando o conceito de hiperbolicidade estudaremos os fluxos seccional hiperbólicos e seccional Anosov. Para este último demonstraremos que todo campo vetorial próximo destes fluxos é sensível às condições iniciais.

Palavras-chave: Fluxo Hiperbólico. Fluxo Anosov. Fluxo seccional-Anosov. Sensibilidade.

# ***ABSTRACT***

The main objective of this work is the study about sensitivity to initial conditions on seccional-Anosov flows on compact 3-dimensional manifolds for which the maximal invariant set and nonwandering sets coincide. We will see that in hyperbolic set and Anosov flow we have sensitivity to initial conditions. Extending the notion of hyperbolicity we study seccional hyperbolic flows and seccional-Anosov flows. For the latter we show that every vector field close to one of these flows is sensitive with respect to initial conditions.

Keywords: Hyperbolic flows. Anosov Flow. seccional-Anosov Flow. Sensitivity.

# *LISTA DE FIGURAS*

0.1	Ferradura de Smale . . . . .	11
0.2	Atrator de Lorenz . . . . .	11
0.3	Atrator de Lorenz Geométrico . . . . .	12
1.1	Definição 1.1.2 . . . . .	19
3.1	Teorema 3.2.7 . . . . .	42
3.2	Retângulo Folheado . . . . .	47
4.1	Teorema 4.1.5 . . . . .	54
4.2	Teorema 4.2.3 . . . . .	56
4.3	$S^t$ e $S^b$ . . . . .	56
5.1	Lema 5.1.3 . . . . .	60
5.2	Teorema 5.2.3 . . . . .	62
5.3	Teorema 5.2.4 . . . . .	64
5.4	$S^{*,\Delta}$ . . . . .	69
5.5	Teorema 5.2.1 . . . . .	70

# *SUMÁRIO*

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
ATRADORES SINGULARES HIPERBÓLICOS CAÓTICOS . . . . .	14
FLUXO SECCIONAL ANOSOV . . . . .	15
SISTEMAS SECCIONAL HIPERBÓLICOS . . . . .	15
EXPOENTES SECCIONAL LYAPUNOV . . . . .	16
UM MELHORADO LEMA DO FECHAMENTO PARA FLUXOS SECCIONAL ANOSOV . . . . .	17
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>18</b>
1.1 VARIEDADES RIEMANNIANAS . . . . .	18
1.1.1 Imersão e Mergulhos . . . . .	21
1.1.2 A Topologia do Espaço de Aplicações $C^r$ . . . . .	25
1.2 SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .	25
<b>2 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS E FLUXOS ANOSOV</b>	<b>30</b>
2.1 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS . . . . .	30
2.1.1 Cones . . . . .	31
2.1.2 O Teorema de Hadamard-Perron . . . . .	32
2.1.3 Aplicação do Teorema de Hadamard-Perron . . . . .	35
<b>3 CONJUNTOS SECCIONAL HIPERBÓLICOS E FLUXOS SECCIO- NAL ANOSOV</b>	<b>37</b>
3.1 DEFINIÇÕES . . . . .	37

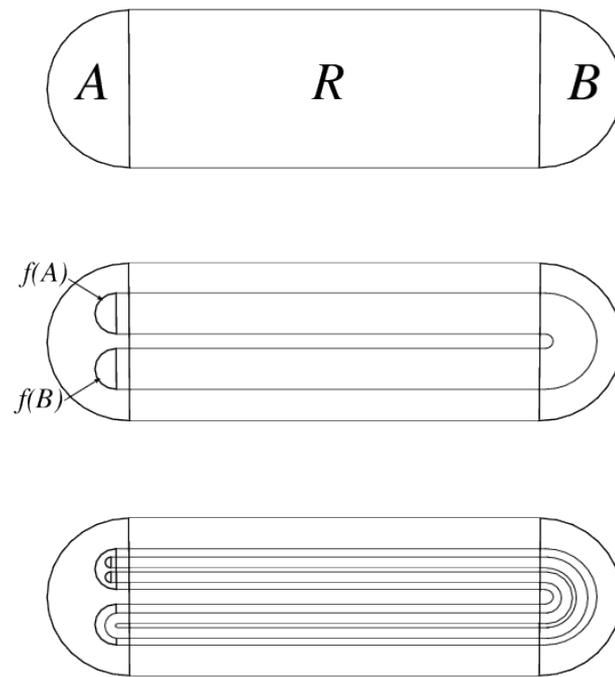
3.2	PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS SECCIONAL HIPERBÓLICOS . . .	38
3.3	PARTIÇÃO SINGULAR . . . . .	44
3.4	RETÂNGULO FOLHEADO . . . . .	46
<b>4</b>	<b>VARIEDADE ESTÁVEL FORTE, LEMA DO FECHAMENTO E SE- ÇÃO TRANSVERSAL SINGULAR</b>	<b>50</b>
4.1	VARIEDADE ESTÁVEL FORTE PARA CONJUNTOS SECCIONAL HI- PERBÓLICOS . . . . .	50
4.2	LEMA DA CONEXÃO PARA FLUXOS SECCIONAL ANOSOV . . . . .	54
4.3	CONSTRUÇÃO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL SINGULAR $S^t, S^b$ e $l^t, l^b$ . . . . .	56
<b>5</b>	<b>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PRINCIPAL</b>	<b>58</b>
5.1	PRELIMINARES DO TEOREMA PRINCIPAL . . . . .	58
5.2	PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL . . . . .	60
5.3	PROVA DO TEOREMA 5.2.1 . . . . .	64
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>

# *INTRODUÇÃO*

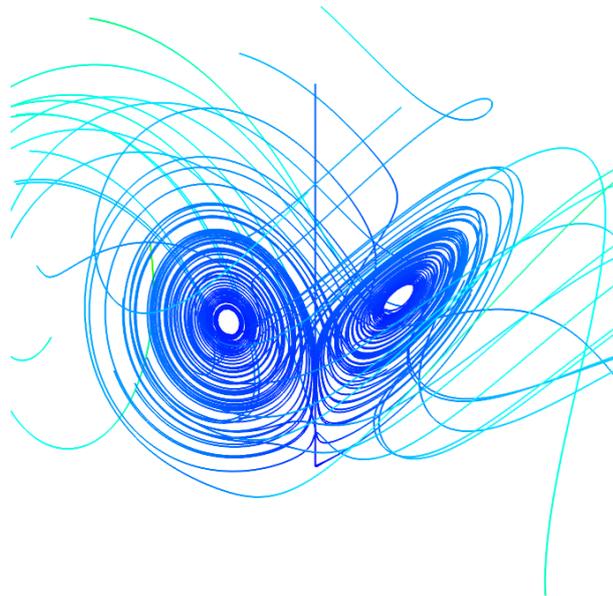
Uma das várias primeiras perguntas que apareceu quando estudamos fluxos Anosov foi, por que do nome. Este nome veio do Professor Dmitri V. Anosov quem estudou esta classe de fluxo com o nome de  $U$ -sistemas. A maior motivação dos fluxos Anosov foi certamente, o que estava atrás das suas extensões. Entre elas podemos citar as ações do grupo Anosov e folheações, o pseudo-Anosov, sistemas Anosov projetivos e assim por diante. Sendo que esta dissertação centra-se em fluxos seccional Anosov, uma extensão onde os campos de vetoriais exibem no conjunto maximal invariante uma decomposição dominada formada por um sub-fibrado que contrai e um sub-fibrado onde a derivada do fluxo expande área de paralelogramos. Estudamos fluxos seccional Anosov, e mais especificamente fluxos seccional Anosov  $X$  sobre uma variedade compacta tridimensional para o qual o conjunto maximal invariante e o conjunto dos pontos não errantes coincidem. Encontramos na literatura que os fluxos hiperbólicos, um caso particular de fluxos seccional Anosov, é sensível às condições iniciais. O que responderemos nesta dissertação será se um fluxo seccional Anosov é sensível às condições, e quais são os condições para que isto aconteça.

**Definição.** Denote por  $d(\cdot, \cdot)$  a métrica em  $M$  induzida pela estrutura Riemanniana. Dizemos que  $X$  é *sensível às condições iniciais* se existe  $\delta > 0$  tal que para todo os  $x \in M$  e toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe um  $y \in U$  e  $t \geq 0$  satisfazendo  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ .

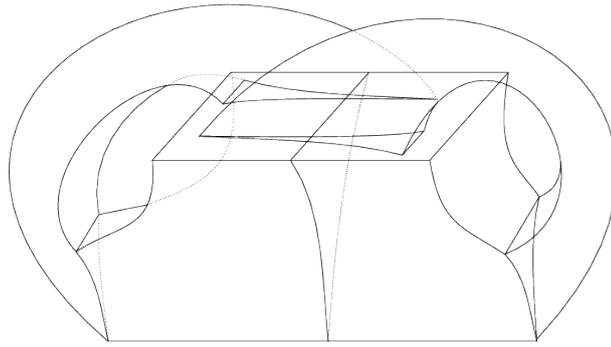
Um exemplo de fluxo que satisfaz essa propriedade são os fluxos de Anosov. Esse fluxos motivam a pergunta de quais fluxos mantém a propriedade de sensibilidade às condições iniciais para sistemas dinâmicos mais gerais que os hiperbólicos. A seguir três figuras, exemplos sobre sensibilidade, a Ferradura de Smale, o Atrator de Lorenz e o Atrator de Lorenz Geométrico.



**Figura 0.1:** Ferradura de Smale



**Figura 0.2:** Atrator de Lorenz



**Figura 0.3:** Atrator de Lorenz Geométrico

A seguir apresentamos, o que chamaremos, teorema principal. O qual extraímos do artigo [33].

**Teorema Principal.** Seja  $X$  um fluxo seccional Anosov em uma variedade compacta tridimensional  $M$ . Se  $\Omega(X) = M(X)$ , então todo campo vetorial perto de  $X$  é sensível às condições iniciais.

Este Teorema nos motivará a incluir um capítulo de preliminares. Usaremos as definições e resultados escritos neste capítulo com os quais resolveremos o caso hiperbólico que é o segundo capítulo juntamente com fluxos Anosov. A seguir apresentamos resultados vistos no artigo [33] com os quais no último capítulo provamos nosso teorema principal.

A área da matemática onde podemos estudar o que apresentamos até agora é Sistemas dinâmicos. É uma área recente das matemáticas, sua origem vem desde Newton e os seus estudos de Mecânica Celeste. Também está Henri Poincaré, quem iniciou o estudo qualitativo das equações diferenciais. No entanto, desde uns 40 anos, aproximadamente, despertou o verdadeiro interesse nessa área graças ao trabalho destacado de matemáticos como: Dmitri Anosov [4], Rufus Bowen [10] e Stephen Smale [42], entre outros.

Se quisermos especificar o conceito de sistema dinâmico, poderíamos dizer que trata-se do estudo de problemas que dependam de alguma variável dada, usualmente supomos ser o tempo, e que variam de acordo com certas propriedades, as quais dependem do problema. Desta maneira, conhecendo um dado inicial, podemos reconstruir o passado e prever o futuro.

Pela dificuldade que representa estudar dinâmicas específicas, centra-se a atenção em buscar propriedades gerais que satisfazem um conjunto de sistemas dinâmicos.

Foi Smale na década dos cinquenta, quem, introduziu o conceito de conjunto hiperbólico conduzindo ao desenvolvimento posterior da teoria hiperbólica, a qual permitiu facilitar o estudo geral dos sistemas dinâmicos.

Os conjuntos singulares hiperbólicos em variedades tridimensionais foram introduzidos por Morales-Pacífico-Pujals em 1998 [32] como uma caracterização dos conjuntos  $C^1$  robustos transitivos singulares de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^1$ , ou seja, um conjunto transitivo que contém singularidades e que é a continuação (em um vizinhança desta na variedade) de todo campo vetorial  $C^1$  perto do campo  $X$ . Desde então estudou-se muitos problemas relacionados com a generalização das propriedades dos conjuntos hiperbólicos em variedades de dimensão  $n$ , os quais caracterizam-se por expandir a área sobre cada subespaço bidimensional no sub-fibrado central. Os conjuntos seccional hiperbólicos coincidem com os conjuntos singulares hiperbólicos em variedades tridimensionais. No entanto, a classe de conjunto seccional hiperbólico é suficientemente ampla para incluir os conjuntos hiperbólicos tipo sela e os atratores geométrico e multidimensional de Lorenz [44, 47]. Estes fatos motivaram estender a teoria desenvolvida sobre conjuntos hiperbólicos e singulares hiperbólicos no caso seccional hiperbólico.

A principal motivação para o desenvolvimento desta teoria foi o sistema das equações de Lorenz, cuja solução numérica sugeriu a existência de um atrator robusto caótico com uma singularidade coexistindo com órbitas regulares acumulando-se sobre este. Mais de três décadas se passaram antes da existência do atrator de Lorenz ser rigorosamente estabelecida por Warwick Tucker com uma prova assistida por computador no ano 2000. A dificuldade no tratamento deste tipo de sistema é tanto conceitual quanto numérica. Por um lado, a presença da singularidade acumulada por órbitas regulares impede que este conjunto invariante seja uniformemente hiperbólico. Por outro lado, no tratamento numérico, as soluções retardam à medida que passam perto do ponto de sela, e aqui os erros de integração numéricos acumulam-se sem limites.

Tentando resolver este problema, uma abordagem bem sucedida foi desenvolvido por Afraimovich Bykov Shil'nikov [1] e Guckenheimer Williams [16] de forma independente, que conduziu à construção de um modelo geométrico mostrando as principais características do comportamento das soluções do sistema de equações de Lorenz. Na década de 1990 um grande avanço foi obtido por Carlos Morales, Enrique Pujals e Maria José Pacifico [32] seguindo ideias originais desenvolvidas por Ricardo Mañé durante a prova da conjectura da estabilidade- $C^1$ , proporcionando uma caracterização de atratores robustos transitivos para fluxos tridimensionais, das quais o atrator geométrico de Lorenz é um exemplo. Esta caracterização colocou a classe destes atratores no domínio de uma forma fraca de hiperbolicidade: estes são conjuntos invariantes parcialmente hiperbólicos com direção central volume expensor (ou conjuntos volume hiperbólico). Além disso, eles provaram que atratores robustamente transitivos sem singularidades são uniformemente hiperbólicos. Estes resultados estendem a teoria clássica uniformemente hiperbólica para fluxos com singularidades isoladas.

Uma vez estabelecido isto, é natural tentar entender as consequências dinâmicas da hiperbolicidade parcial com volume expansor. É importante verificar quais propriedades ainda se mantêm por esta nova forma fraca de hiperbolicidade, conhecido hoje como *singular-hiperbólico*.

A seguir fazemos um resumo de cada tema pelos quais os conjuntos hiperbólicos e suas extensões se desenvolveram.

## ATRATORES SINGULARES HIPERBÓLICOS CAÓTICOS

A teoria da dinâmica uniformemente hiperbólica foi iniciada em 1960 em [42] e, através do trabalho do seus estudantes e colaboradores, assim como os matemáticos da escola Russa, imediatamente levou ao extraordinário desenvolvimento em todo o campo dos sistemas dinâmicos. No entanto, apesar dos grandes sucessos, esta teoria deixou de fora importantes classes de sistemas dinâmicos, que não estava em conformidade com os pressupostos básicos da hiperbolicidade uniforme. Os exemplos mais influentes são aplicação de Hénon [17] para o caso do tempo discreto, e o fluxo de Lorenz [27] para o caso de tempo contínuo.

As equações de Lorenz marcaram o fato que a dinâmica robusta pode ocorrer fora do conjunto de hiperbolicidade uniforme, e, de fato, na presença de singularidades são acumuladas por órbitas periódicas recorrentes. Isto levou à busca de uma extensão da noção de hiperbolicidade uniforme abrangendo todos os sistemas de tempo contínuo com comportamento de dinâmica robusta. Um passo fundamental foi realizado por Morales, Pacifico e Pujals [32, 33] os quais demonstraram que um atrator robusto invariante de um fluxo tridimensional contendo algum ponto de equilíbrio deve ser singular hiperbólico, isto é, deve admitir uma decomposição invariante  $E^s$  e  $E^{cu}$  do fibrado tangente, um sub-fibrado unidimensional exibindo contração uniforme e um sub-fibrado bidimensional volume-expansor.

De fato, Morales, Pacifico, e Pujals [32] demonstraram que qualquer conjunto robusto invariante de um fluxo tridimensional contendo algum ponto de equilíbrio é um atrator singular-hiperbólico ou repulsor. Na ausência de singularidades, robustez implica uniformidade hiperbólica. Os primeiros exemplos de conjuntos singular-hiperbólicos incluíram o atrator de Lorenz [27, 44] e seus modelos geométricos [1, 15, 16, 47], e a ferradura-singular [23], além disso conjuntos uniformemente hiperbólicos.

## FLUXO SECCIONAL ANOSOV

A tese célebre do Prof. Anosov [4] demonstrou que o fluxo geodésico de uma variedade negativamente curvada é um  $U$ -fluxos, ou seja, existe uma decomposição hiperbólica sobre o ambiente todo da variedade. Hoje  $U$ -fluxos são conhecidos como fluxos Anosov e são objeto de uma extensiva teoria abrangendo diversas áreas matemáticas. Apenas mencionamos nesta dissertação que alguns autores estenderam esse conceito incluindo ações de grupos de Lie e fluxos com uma decomposição dominada [20, 21, 36].

Nesta dissertação usamos o conceito de conjuntos seccionalmente-hiperbólico [28] para definir fluxo seccional Anosov como um campo de vetores em uma variedade  $M$  transversal ao bordo  $\partial M$ , cujo conjunto invariante maximal é seccional hiperbólico. Nos trabalhos de [30, 46] mostram que as classes dos fluxos Anosov e seccional Anosov coincidem no caso sem bordo  $\partial M = \emptyset$ . Por outro lado, se  $\partial M \neq \emptyset$  a classe de fluxos seccional Anosov contém os sumidouros hiperbólicos não-triviais e também exemplos não hiperbólicos, como os *atratores de Lorenz geométricos e multidimensionais* [2, 9].

## SISTEMAS SECCIONAL HIPERBÓLICOS

No trabalho [24] está provado que certos conjuntos transitivos robustos com singularidade para campos vetoriais  $C^1$  sobre um variedade  $n$ -dimensional compacta são parcialmente hiperbólicos. Este resultado foi apresentado como uma extensão do resultado central em [33] onde está provado que todo conjunto robusto transitivo é parcialmente hiperbólico para  $n = 3$ . Além disso [33] provou não apenas a hiperbolicidade parcial, mas também que toda singularidade é tipo-Lorenz e também singular-hiperbólico, isto é, volume expensor ao longo do fibrado central. Assim, é natural perguntar se esta última propriedade pode ser provada para conjuntos robustos transitivos em [24].

No trabalho [28], deram uma resposta positiva para esta questão. De fato, eles mostraram que as singularidades contidas em conjuntos robustos transitivos em [24] são similares aos apresentados pelo atrator multidimensional Lorenz [9]. Além disso, mostraram que os conjuntos robustos transitivos considerados em [24] são seccional hiperbólicos, isto é, uma derivada dos correspondentes fluxos expande a área do paralelogramo ao longo do sub-fibrado central.

Seccional hiperbolicidade aparece como um novo tipo de hiperbolicidade o qual satisfaz algumas propriedades interessantes. Primeiro, note que seccional hiperbólico implica singular-hiperbólico e, além disso, reduz-se a singular-hiperbólico precisamente quando  $n = 3$ . Além

disso, vemos que a seccional hiperbolicidade implica a propriedade chamada  $\mathcal{G}^1$  (ou estrela), no sentido que todas as órbitas fechadas em um sistema seccional hiperbólico são hiperbólicas de forma persistente. Observe que  $\mathcal{G}^1$  é falsa para sistemas singular-hiperbólicos em dimensão quatro, por causa do atrator selvagem estranho [43]. Dessa maneira, a classe de sistemas seccional hiperbólicos está propriamente contida na dos sistemas singular hiperbólicos. Também eles provaram que a classe dos sistemas seccional hiperbólicos contém não apenas conjuntos hiperbólicos do tipo sela e conjuntos robustos transitivos [24], mas também o várias vezes mencionado atrator de Lorenz multidimensional.

## EXPOENTES SECCIONAL LYAPUNOV

A teoria dos sistemas hiperbólicos aparecem nos anos sessenta, com o fundamental trabalho de Smale, introduzindo a ferradura. A principal característica desses sistemas dinâmicos é a presença de direções complementares no sub-fibrado tangente, um destes apresenta um comportamento contrator, e o outro apresenta um comportamento expensor. Assim a teoria da dinâmica hiperbólica cresceu, em particular o conhecimento sobre os difeomorfismos Anosov, os quais apresentam este comportamento em toda a variedade, e automorfismos expansores, os quais apresentam uma única expansão em todas as direções, mas são não invertíveis.

No caso de campo vetorial, a teoria hiperbólica também possui uma boa compreensão. Em particular para fluxos Anosov, mas agora, o comportamento hiperbólico ocorre transversalmente na direção do campo vetorial. Isto automaticamente exclui a presença de singularidades quando a variedade é fechada. Além disso, os fluxos Anosov compartilham várias características com difeomorfismos hiperbólicos, tais como estabilidade, decomposição espectral, etc. Na presença de singularidades ainda existem fluxos que apresentam algumas propriedades dinâmicas em um maneira robusta para uma forma fraca de hiperbolicidade, onde o atrator de Lorenz é um exemplo paradigmático [45], e que são chamadas fluxos seccionais-Anosov [8]. Estes fluxos ocorrem em variedades com bordo e também possuem uma decomposição dominada, onde uma direção é uniformemente expansora à área de biplano para dentro deste. É preciso muito esforço para entender as propriedades dinâmicas destes fluxos.

A teoria evoluiu em direções além da hiperbolicidade uniforme. Uma direção foi o estudo dos sistemas dinâmicos não uniformemente hiperbólicos, com a ajuda dos chamados expoentes de Lyapunov. Estes expoentes, quando existem e são não nulos, indicam uma contração ou uma expansão *assintótica* ao longo da órbita. O célebre teorema de Oseledets diz que esses expoentes existem, e variam em um modo mensurável, em um conjunto de medida total, para

qualquer medida de probabilidade invariante do sistema. Acontece que, para difeomorfismos locais, se todos os expoentes de Lyapunov são positivos em um conjunto de *probabilidade total*, isto é, uma medida completa para qualquer medida invariante, então a aplicação é expansora, como mostra [3] e [12]. Um resultado análogo é verdadeiro no caso de difeomorfismos com uma decomposição dominada: Se todos os expoentes de Lyapunov são negativos em um sub-fibrado e positivos em outro, em um conjunto de probabilidade total, então o difeomorfismo é Anosov.

## **UM MELHORADO LEMA DO FECHAMENTO PARA FLUXOS SECCIONAL ANOSOV**

O problema de saber se um ponto não-errante de um campo vetorial pode ser aproximado por pontos periódicos foi considerada na literatura. Isto é o que H. Poincaré conjecturou em 1892 para o seu problema de três corpos. Por outro lado, C. Pugh provou em 1967 que o problema possui uma solução positiva para campos vetoriais genéricos  $C^1$  em variedades fechadas [38, 39]. Anteriormente D. Anosov provou seu Lema do Fechamento Anosov onde uma resposta positiva foi dada para fluxos de Anosov, isto é, fluxos com estrutura hiperbólica em toda a variedade. Tais resultados motivaram a questão de saber se a conclusão do Lema do Fechamento Anosov pode ser estendida, para campos vetoriais mais gerais.

Candidatos naturais para tais extensões são os fluxos seccional Anosov, a saber, campos vetoriais com estrutura seccional hiperbólico [28] sobre o conjunto maximal invariante. Esse fluxos se apresentaram em [8] como uma extensão dos fluxos Anosov que incluíram os atratores hiperbólicos estranhos, os atratores singular-hiperbólicos sobre uma variedade tridimensional [30] assim como os atratores geométricos de Lorenz [2, 16] e o atrator multidimensional de Lorenz [9].

No entanto, o Lema do Fechamento Anosov é falso para fluxos seccional Anosov, visto que existem alguns fluxos para os quais os pontos periódicos e singularidades não são densos no conjunto recorrente [29]. Em vez disso, o que foi provado em [29] foi o seguinte Lema do Fechamento para fluxos seccional Anosov: Todo ponto recorrente de um campo vetorial seccional Anosov sobre uma variedade compacta tridimensional pode ser aproximada por pontos periódicos ou por ponto para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.

# 1 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as bases para o desenvolvimento da nossa dissertação. Dentre as definições com as quais trabalharemos muitas delas podem ser encontradas no livro de Clark Robinson [40], no livro de Manfredo do Carmo [13] e na monografia de Bautista-Morales [8].

## 1.1 VARIEDADES RIEMANNIANAS

Nesta seção falaremos sobre o ambiente em que definiremos nossos sistemas dinâmicos. Começaremos por *superfície regular*.

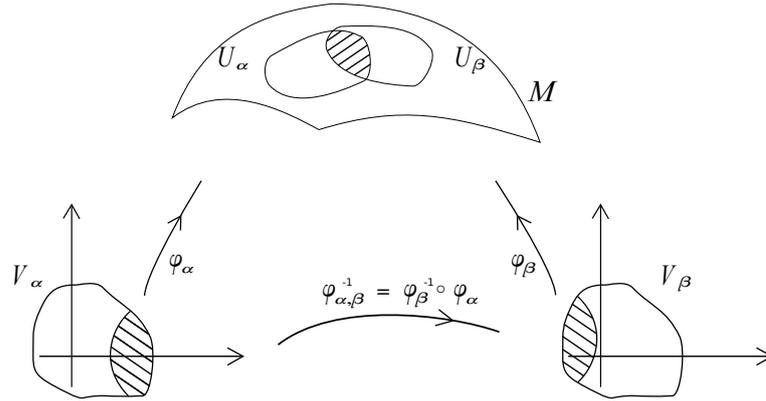
**Definição 1.1.1.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para todo ponto  $p \in S$ , existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S$ , tais que:

- 1)  $\varphi$  é um homeomorfismo diferenciável;
- 2) A diferencial  $(d\varphi)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora para todo  $q \in U$ .

A aplicação  $\varphi$  é chamada uma *parametrização* de  $S$  em  $p$ . A consequência mais importante da definição de superfície regular é o fato de que a mudança de parametrizações é um difeomorfismo. Mais precisamente, se  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$  e  $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow S$  são duas parametrizações tais que  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , então as aplicações  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$  são diferenciáveis. Deste modo, uma superfície regular é intuitivamente uma reunião de abertos do  $\mathbb{R}^2$ , organizados de tal modo que quando dois tais abertos se intersectam a transição de um para outro se faz de maneira diferenciável. Como consequência, tem sentido, em uma superfície regular, falar em funções diferenciáveis e aplicar aí os métodos do Cálculo Diferencial.

**Definição 1.1.2.** Uma *variedade diferenciável de dimensão  $n$*  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações injetoras  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:

- 1)  $\bigcup_{\alpha} \varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) = M$ .
- 2) Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta}) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\varphi_{\alpha}^{-1}(W)$  e  $\varphi_{\beta}^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\varphi_{\beta}^{-1} \circ \varphi_{\alpha}$  são diferenciáveis
- 3) A família  $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$  é máxima relativamente às condições 1) e 2).



**Figura 1.1:** Definição 1.1.2

O par  $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$  (ou aplicação com  $\varphi_{\alpha}$ ) com  $p \in \varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$  é chamado uma parametrização (ou sistemas de coordenadas) de  $M$  em  $p$ ;  $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$  é então chamada uma vizinhança coordenada em  $p$ . Uma família  $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$  satisfazendo 1) e 2) é chamada uma estrutura diferenciável em  $M$ . Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Basta definir que  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se  $\varphi_{\alpha}^{-1}(A \cap \varphi_{\alpha}(U_{\alpha}))$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . É imediato verificar que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a interseção finita de abertos é aberto. A topologia é definida de tal modo que os conjuntos  $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$  são abertos e as aplicações  $\varphi_{\alpha}$  são contínuas.

**Definição 1.1.3.** Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização  $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $f(p)$  existe uma parametrização  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$  e a aplicação

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em  $\varphi^{-1}(p)$ . A aplicação  $f$  é diferenciável em um aberto de  $M_1$  se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma *curva* (diferenciável) em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ . O vetor tangente à  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em  $p$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : \alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ . O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  será indicado por  $T_pM$ . Se escolhermos uma parametrização  $\varphi : U \rightarrow M^n$  em  $p = \varphi(0)$ , podemos exprimir a função  $f$  e a curva  $\alpha$  nesta parametrização por

$$f \circ \varphi(q) = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad q = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in U,$$

e

$$\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo  $f$  a  $\alpha$ , obteremos

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi'_i(0) \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \right) = \left( \sum_i \varphi'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Em outras palavras, o vetor  $\alpha'(0)$  pode ser expresso na parametrização  $\varphi$  por

$$\alpha'(0) = \sum_i \varphi'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_0. \quad (1.1)$$

Observe que  $\left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_0$  é o vetor tangente em  $p$  à “curva coordenada”:

$$\varphi_i \rightarrow \varphi(0, \dots, 0, \varphi_i, 0, \dots, 0). \quad (1.2)$$

A Equação (1.1) mostra que o vetor tangente a uma curva  $\alpha$  em  $p$  depende apenas das derivadas de  $\alpha$  em um sistema de coordenadas. Decorre também de (1.1) que o conjunto  $T_pM$ , com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão  $n$ , e que a escolha de uma parametrização  $\varphi : U \rightarrow M$  determina uma base associada  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right)_0 \right\}$  em  $T_pM$ . É imediato que a estrutura linear em  $T_pM$  assim definida não depende da parametrização  $\varphi$ . O espaço vetorial  $T_pM$  é chamado o *espaço tangente* a  $M$  em  $p$ .

Com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável. A demonstração da proposição e do teorema seguir podem encontradas em [13].

**Proposição 1.1.4.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis e seja  $f : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M_1$  e cada  $v \in T_pM_1$ , escolha uma curva diferenciável*

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . Faça  $\beta = f \circ \alpha$ . A aplicação  $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$  dada por  $df_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear que não depende da escolha de  $\alpha$ .

**Definição 1.1.5.** A aplicação linear  $df_p$  dada pela Proposição 1.1.4 é chamada *diferencial* de  $f$  em  $p$ .

**Definição 1.1.6.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é um *difeomorfismo* se ela é bijetora, diferenciável, e sua inversa  $f^{-1}$  é diferenciável.  $f$  é um difeomorfismo local em  $p \in M$  se existem vizinhanças  $U$  de  $p$  em  $M_1$  e  $V$  de  $f(p)$  em  $M_2$  tais que  $f : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo.

A noção de difeomorfismo é a de equivalência entre variedades diferenciáveis. É uma consequência do Teorema da Função Composta que se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é um difeomorfismo, então  $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$  é um isomorfismo para todo  $p \in M_1$ ; em particular as dimensões de  $M_1$  e  $M_2$  são iguais. Uma recíproca local deste fato é o seguinte teorema.

**Teorema 1.1.7.** *Seja  $f : M_1^n \rightarrow M_2^n$  é uma aplicação diferenciável e seja  $p \in M_1$  tal que  $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$  é um isomorfismo. Então  $f$  é um difeomorfismo local em  $p$ .*

### 1.1.1 Imersão e Mergulhos

**Definição 1.1.8.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma *imersão* se  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se além disto,  $f$  é um homeomorfismo sobre  $f(M) \subset N$ , onde  $f(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $f$  é um *mergulho*. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \hookrightarrow N$  é um *mergulho*, diz-se que  $M$  é uma *subvariedade* de  $N$ .

Observe que se  $f : M^m \rightarrow N^n$  é uma imersão, então  $m \leq n$ ; a diferença  $n - m$  é chamada a *codimensão da imersão*  $f$ .

O seguinte Teorema podemos encontrar em [18] na página 24.

**Teorema 1.1.9 (Whitney).** *Se  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  existe um mergulho adequado  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ .*

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $S \subset M$  uma subvariedade. Uma vizinhança tubular de  $S$  é o par  $(V, \pi)$  onde  $V$  é uma vizinhança de  $S$  em  $M$  e  $\pi : V \rightarrow S$  é uma submersão de classe  $C^\infty$  tal que  $\pi(p) = p$  para  $p \in S$ .

**Teorema 1.1.10.** *Toda subvariedade  $S \subset M$  possui uma vizinhança tubular.*

Toda variedade de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , pode ser considerada de maneira natural como uma variedade de classe  $C^\infty$ .

**Teorema 1.1.11 (Whitney).** *Seja  $M$  uma variedade de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Então existe um mergulho  $C^r$   $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  tal que  $f(M)$  é uma subvariedade fechada  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .*

**Proposição 1.1.12.** *Seja  $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$ ,  $n \leq m$ , uma imersão da variedade  $M_1$  na variedade  $M_2$ . Para todo  $p \in M_1$ , existe uma vizinhança  $V \subset M_1$  de  $p$  tal que a restrição  $f|_V \rightarrow M_2$  é um mergulho.*

**Definição 1.1.13 (O fibrado tangente).** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ . Vamos munir o conjunto  $TM$  de uma estrutura diferenciável (de dimensão  $2n$ ); com tal estrutura  $TM$  será chamado *fibrado tangente* de  $M$ .

Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades, como no caso da Mecânica. Seja  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  a estrutura diferenciável máxima de  $M$ . Indicaremos por  $(\varphi_1^\alpha, \dots, \varphi_n^\alpha)$  as coordenadas de  $U_\alpha$  e por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n^\alpha} \right\}$  as bases associadas nos espaços tangentes de  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ . Para cada  $\alpha$ , defina

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$\varphi_\alpha(\varphi_1^\alpha, \dots, \varphi_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left( \varphi_\alpha(\varphi_1^\alpha, \dots, \varphi_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i^\alpha} \right), (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos coordenadas de um ponto  $(p, v) \in TM$  as coordenadas  $\varphi_1^\alpha, \dots, \varphi_n^\alpha$  de  $p$  junto com as coordenadas de  $v$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n^\alpha} \right\}$ . Vamos mostrar que  $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \psi_\alpha)\}$  é uma estrutura diferenciável em  $TM$ . Como  $\cup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$  e  $(d\varphi_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\varphi_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ , teremos que

$$\bigcup_\alpha \psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

o que verifica a condição 1) da Definição 1.1.2. Seja agora

$$(p, v) \in \psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \psi_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (\varphi_\alpha(q_\alpha), d\varphi_\alpha(v_\alpha)) = (\varphi_\beta(q_\beta), d\varphi_\beta(v_\beta)),$$

onde  $q_\alpha \in U_\alpha, q_\beta \in U_\beta, v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= \psi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(q_\alpha), d\varphi_\alpha(v_\alpha)) \\ &= \left( (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(q_\alpha), d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(v_\alpha) \right).\end{aligned}$$

Como  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  é diferenciável,  $d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$  também o é. Decorre daí que  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$  é diferenciável, o que verifica a condição 2) da Definição 1.1.2. Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades de classe  $C^r$ , para algum  $r \geq 1$ . Dizemos que  $f: M \rightarrow N$  é de classe  $C^r$  se para cada ponto  $p \in M$  e aplicações  $(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  e  $(\varphi_\beta, V_\beta, U_\beta)$  em  $p$  e  $f(p)$  respectivamente  $\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha$  é de classe  $C^r$ .

**Definição 1.1.14.** Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma lei que faz corresponder a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .

Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas, pois a mudança de coordenadas é um difeomorfismo.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par  $X$  e  $Y$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança  $V$  de  $M$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $V$ .

É usual deixar de indicar o índice  $p$  em  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções  $g_{ij}(= g_{ji})$  são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* (ou “os  $g_{ij}$  da métrica”) no sistema de coordenadas  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Vejamos agora uma outra maneira de definir fibrado tangente.

Começemos com um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Fixemos um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ . Um *vetor tangente em  $p$*  é um par  $(p, v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^n$ . Geralmente denota-se o vetor tangente a  $p$  por  $v_p$ . O conjunto de todos os possíveis vetores tangentes em  $p$ , denotado por  $T_p \mathbb{R}^n$  é chamado o *espaço tangente em  $p$* . O espaço tangente em  $p$  é um espaço vetorial onde  $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$  e a união disjunta dos espaços tangentes em pontos diferentes é chamado *fibrado tangente* ou

espaço fibrado tangente de  $\mathbb{R}^n$  e é denotado por  $T\mathbb{R}^n$ .

$$T\mathbb{R}^n = \{(p, v), p \in \mathbb{R}^n \text{ e } v \text{ vetor tangente em } p\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Para uma variedade  $M$ , temos que dizer o que entendemos por vetor tangente. Suponhamos que  $\gamma: (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva  $C^1$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\varphi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  é uma aplicação em  $p$ .

Assim  $\varphi_\alpha^{-1} \circ \gamma(t)$  é  $C^1$  nesta aplicação, o vetor tangente determinado por  $\gamma$  é dado por  $(\varphi_\alpha^{-1} \circ \gamma)'(0) = v_p^\alpha$ .

Se  $\varphi_\beta: V_\beta \rightarrow U_\beta$  é outra aplicação de coordenada em  $p$ , então o vetor determinado por  $\gamma$  nesta aplicação é dado por  $(\varphi_\beta^{-1} \circ \gamma)'(0) = v_p^\beta$ , Note que

$$v_p^\beta = D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(p)} v_p^\alpha$$

Estes dois vetores,  $v_p^\alpha$  e  $v_p^\beta$  devem ser considerados como representantes do mesmo vetor em aplicações diferentes, pois eles são as derivadas de representantes da mesma curva. Assim a *derivada da curva na variedade (ou vetor tangente a uma curva)* é a classe de equivalência dos representantes de diferentes aplicações, onde  $v_p^\alpha \sim v_p^\beta \Leftrightarrow v_p^\beta = D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(p)} v_p^\alpha$ .

Um *vetor tangente em  $p$*  é a derivada de uma curva diferencial que passa por  $p$ . O conjunto de todos os vetores em  $p$ , é escrito  $T_p M$ , e é chamado *Espaço tangente em  $p$* .

$$T_p M = \{v_p : v_p \text{ é a derivada de uma curva diferenciável em } p\}$$

A união disjunta dos vetores tangentes em diferentes pontos fornece o *fibrado tangente* ou *espaço tangente em  $M$*  que é denotado por  $TM$ .

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } p\}$$

Se  $M$  é uma variedade e  $S$  é um subconjunto de  $M$ , denotamos os *vetores tangentes a  $M$  em um ponto de  $S$*  por

$$T_S M = \bigcup_{p \in S} \{p\} \times T_p M.$$

Se  $f: M \rightarrow N$  é uma aplicação  $C^1$  entre variedades consideramos a derivada de  $f$  em  $p$  como sendo a aplicação linear de  $T_p M$  em  $T_{f(p)} N$ ,  $Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ . Se  $(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  e  $(\varphi_\beta, V_\beta, U_\beta)$  são aplicações em  $p$  e  $f(p)$ , respectivamente, então

$$D(\varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(p)} v_p^\alpha = w_{f(p)}^\beta$$

Leva o representante de um vetor em  $p$  na aplicação  $(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  em um representante de um vetor em  $f(p)$  na aplicação  $(\varphi_\beta, V_\beta, U_\beta)$ .

O comprimento de um vetor pode ser determinado por um produto interno em cada espaço tangente  $T_pM$ . Uma vez que o produto interno é conhecido então

$$|v_p|_p = \sqrt{\langle v_p, v_p \rangle_p}$$

define uma *norma riemanniana* em cada espaço tangente.

Na próxima subsecção na Definição 1.2.12 apresentamos que seções transversais existem graças ao Teorema 1.2.11, daí a motivação de apresentarmos esta definição.

**Definição 1.1.15.** Duas variedades são *transversais* em  $M$  se para qualquer ponto  $q \in V \cap W$ , temos que  $T_qV + T_qW = T_qM$ .

A definição acima permite a possibilidade de que  $V \cap W = \emptyset$

### 1.1.2 A Topologia do Espaço de Aplicações $C^r$

Apresentamos aqui uma topologia natural do espaço  $\mathcal{X}^r(M)$  de um campo vetorial  $C^r$  sobre uma variedade compacta  $M$ . Nesta topologia, dois campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$  são próximos se os seus campos vetoriais e suas derivadas de ordem até  $r$  são próximos para todos os pontos de  $M$ . Consideremos primeiro o espaço  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$  das aplicações  $C^r$ ,  $0 \leq r < \infty$ , definido sobre uma variedade compacta  $M$ . Temos uma estrutura natural do espaço vetorial sobre  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ :  $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ ,  $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$  para  $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tomamos uma cobertura finita sobre  $M$  por conjuntos abertos  $V_1, \dots, V_k$  tal que cada  $V_i$  está contida no domínio de uma (aplicação) aplicação local  $(x_i, U_i)$  com  $x_i(U_i) = B(2)$  e  $x_i(V_i) = B(1)$ , onde  $B(1)$  e  $B(2)$  são bolas de raio 1 e 2 centradas na origem em  $\mathbb{R}^m$ . Para  $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$  escrevemos  $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^s$ . Definimos

$$\|f\|_r = \max_i \sup \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\| ; u \in B(1) \}.$$

**Proposição 1.1.16.**  $\|\cdot\|_r$  é uma norma completa sobre  $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ .

## 1.2 SISTEMAS DINÂMICOS

Nosso foco nesta dissertação são sistemas dinâmicos contínuos. Nesta seção apresentamos primeiro os sistemas dinâmicos discretos e logo em seguida os já mencionados sistemas dinâmicos contínuos. A seção de sistemas dinâmicos discretos foi extraída de [41].

**Definição 1.2.1.** Sejam  $M$  um espaço topológico. Um *sistema dinâmico discreto* em  $M$  é uma aplicação  $F : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$  contínua, tal que:

- 1)  $F(0, \cdot) = id$
- 2)  $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x), \forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall x \in M.$

**Observação 1.2.1.** Se definimos para cada  $n \in \mathbb{Z}$  a aplicação  $F_n : M \rightarrow M$  por  $F_n(x) = F(n, x)$ , temos que  $F_n \circ F_m = F_{n+m}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$ . Em particular  $f = F_1$  é um homeomorfismo (a inversa é  $f^{-1} = F_{-1}$ ) e satisfaz  $F_n = f^n$ . Portanto um sistema dinâmico discreto é gerado por um homeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ .

**Definição 1.2.2.** Seja  $x \in M$ .

Se  $f : M \rightarrow M$  é um homeomorfismo, a *órbita* de  $x$  é  $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ .

A *órbita futura* de  $x$  é  $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ .

A *órbita passada* de  $x$  é  $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$ .

**Definição 1.2.3.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um sistema dinâmico discreto.

- Um ponto  $p \in M$  é *fixo* se  $f(p) = p$ .
- Um ponto  $p \in M$  é *periódico* se existe  $k \geq 1$  tal que  $f^k(p) = p$ . Definimos *período* de  $p$  o  $\min \{k \geq 1 : f^k(p) = p\}$ .

**Definição 1.2.4.** Se  $f : M \rightarrow M$  é um sistema dinâmico discreto e  $x \in M$ , definimos o  $\omega$ -*limite* de  $x$  como

$$\omega(x) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Analogamente, definimos o  $\alpha$ -*limite* de  $x$  como

$$\alpha(x) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Um subconjunto  $A \subset M$  é *invariante* se,  $f(A) = A$ . Se  $A$  é invariante, então  $f^m(A) = A, \forall m \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 1.2.5.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um sistema dinâmico. Um ponto  $x \in M$  é *não errante* se  $\forall U$  vizinhança de  $x, \exists n \geq 1$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\Omega(f) = \{x \in M : x \text{ é não errante}\}$ , o *conjunto não errante*.

**Definição 1.2.6.** Seja  $M^m \subset \mathbb{R}^k$  uma variedade diferenciável. Um campo vetorial de classe  $C^r$  em  $M$  é uma aplicação  $C^r X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  o qual associa um vetor  $X(p) \in T_p M$  para cada ponto  $p \in M$ . Este faz uma correspondência com a aplicação  $C^r X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi X$  é a identidade

sobre  $M$  onde  $\pi$  é a projeção natural de  $TM$  em  $M$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^r(M)$  o conjunto de campos vetoriais  $C^r$  sobre  $M$ .

**Definição 1.2.7.** Uma *curva integral* de  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  para um ponto  $p \in M$  é uma aplicação  $C^{r+1}$   $\alpha : I \rightarrow M$ , onde  $I$  é um intervalo contendo 0, tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$  para todo  $t \in I$ . A imagem de uma curva integral é chamada *órbita* ou *trajetória*.

As seguintes duas Proposições apresentam as aplicações  $\phi$  e suas propriedades às quais chamamos de *fluxo*, ou *fluxo determinado pelo campo  $X$* .

As demonstrações destas Proposições podem ser encontradas em [37].

**Proposição 1.2.8.** *Seja  $M$  um conjunto compacto e  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ . Existe sobre  $M$  um fluxo global  $C^r$  de  $X$ . Isto é, existe uma aplicação  $C^r$*

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que  $\phi(0, p) = p$  e  $(\partial/\partial t)\phi(t, p) = X(\phi(t, p))$ .

**Proposição 1.2.9.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  e seja  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  o fluxo determinado por  $X$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  a aplicação  $X_t : M \rightarrow M$ ,  $X_t(p) = \phi(t, p)$ , é um difeomorfismo  $C^r$ . Além disso,  $X_0 =$  identidade e  $X_{t+s} = X_t \circ X_s$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ .*

Seja  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  e seja  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , o fluxo de  $X$ . Dizemos que  $\Lambda \subset M$  é um *conjunto invariante* se  $X_t(\Lambda) = \Lambda$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $p \in M$  é um *ponto não errante* de  $X$  se para toda vizinhança  $U$  de  $p$  e todo  $T > 0$  existe  $t \geq T$  tal que  $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\Omega(X)$  o *conjunto dos pontos não errantes* de  $X$ , o qual é claramente fechado e invariante.

Dado  $p \in M$  definimos *órbita*  $O(p) = \{X_t(p) : X_t(p) \text{ está definida}\}$ .

Uma órbita de  $X$  é um conjunto  $O(p)$  para algum  $p$ . A *órbita positiva* de  $p$  é definida por  $O_+(p) = \{X_t(p) : X_t > 0\}$  e definimos a *órbita negativa*  $O^-(p) = \{X_t(p) : t < 0\}$ .

Se  $X(p) = 0$  a órbita de  $p$  se reduz a  $p$ . Nesse caso dizemos que  $p$  é uma *singularidade* de  $X$ .

Caso contrário, a aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\alpha(t) = X_t(p)$ , é uma imersão. Se  $\alpha$  não é injetora existe  $T > 0$  tal que  $\alpha(T) = \alpha(0) = p$  e  $\alpha(t) \neq p$  para  $0 < t < T$  e dizemos que  $p$  é um *ponto periódico*.

Neste caso a órbita de  $p$  é difeomorfa ao círculo  $S^1$  e dizemos que é uma *órbita periódica* com período  $T$ .

Se a órbita é não singular ou periódica esta é chamada *regular*. Então uma órbita regular é a imagem de uma imersão injetora de uma curva integral.

Denotamos por  $Per(X)$  o conjunto dos pontos periódicos e por  $Sing(X)$  o conjunto das singularidades de  $X$ . Note que  $Per(X) \cup Sing(X) \subset \Omega(X)$ .

Um subconjunto  $\Lambda \subset M$  é *singular* se este possui uma singularidade; *não trivial* se  $\Lambda$  não é uma única órbita; *isolado* se existe uma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

( $U$  é chamado *bloco isolador*); e um *sumidouro* se é isolado e possui um bloco isolador  $U$  invariante positivo, i.e,  $X_t(U) \subset U, \forall t \geq 0$ .

O conjunto  $\omega$ -limite de um ponto  $p \in M$ ,  $\omega(p)$ , é o conjunto dos pontos  $q \in M$  para os quais existe uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  com  $X_{t_n}(p) \rightarrow q$ . Similarmente definimos o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p$ ,  $\alpha(p) = \{q \in M : X_{t_n}(p) \rightarrow q \text{ para alguma sequência } t_n \rightarrow -\infty\}$ . Note que o  $\alpha$ -limite de  $p$  é o  $\omega$ -limite de  $p$  para o campo vetorial  $-X$ . Também  $\omega(p) = \omega(\tilde{p})$  se  $\tilde{p}$  pertence à órbita de  $p$ . De fato,  $\tilde{p} = X_{t_0}(p)$  e assim, se  $X_{t_n}(p) \rightarrow q$  onde  $t_n \rightarrow \infty$ , então  $X_{t_n - t_0}(\tilde{p}) \rightarrow q$  e  $t_n - t_0 \rightarrow \infty$ . Assim podemos definir  $\omega$ -limite para a órbita de  $p$  como  $\omega(p)$ . Intuitivamente  $\alpha(p)$  é onde a órbita de  $p$  “nasce” e  $\omega(p)$  é onde esta “morre”. Um conjunto compacto invariante  $\Lambda$  é *transitivo* ou *possui uma órbita periódica densa* se  $\Lambda = \omega(x)$  para algum  $x \in \Lambda$  ou  $Cl(Per(X) \cap \Lambda) = \Lambda$ . Um *atrator* é um sumidouro transitivo. Um repulsor é um atrator para o campo  $-X$ .

A propriedade a seguir será muito utilizada no texto e evitaremos sua conglomeração de referências na dissertação, assumindo que é conhecida.

**Proposição 1.2.10.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  onde  $M$  é uma variedade compacta e seja  $p \in M$ . Então*

- 1)  $\omega(p) \neq \emptyset$ ,
- 2)  $\omega(p)$  é fechado,
- 3)  $\omega(p)$  é invariante pelo fluxo de  $X$ , isto é  $\omega(p)$  é uma união de órbitas de  $X$ , e
- 4)  $\omega(p)$  é conexo.

**Demonstração.** Ver a demonstração pag.15 [37]. □

**Teorema 1.2.11 (Teorema do Fluxo Tubular).** *Seja  $X \in \mathfrak{X}^p(M)$  e seja  $p \in M$  um ponto regular de  $X$ . Seja  $C = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m; |x^i| < 1\}$  e seja  $X_C$  um campo vetorial sobre  $C$  definido por  $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$ . Então existe um difeomorfismo  $C^r$   $h : V_p \rightarrow C$ , para alguma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $M$ , tomando trajetórias de  $X$  para trajetórias de  $X_C$ .*

**Definição 1.2.12.** Considere um campo vetorial  $X$  em uma variedade  $M$ . Uma *seção transversal* de  $X$  é uma subvariedade  $\Sigma$  de codimensão um transversal a  $X$ . O interior e o bordo de  $\Sigma$  como subvariedades são denotadas por  $Int(\Sigma)$  e  $\partial\Sigma$  respectivamente. Se  $\mathcal{R} = \{S_1, \dots, S_k\}$  é uma coleção de seções transversais ainda denotamos por  $\mathcal{R}$  a união destes elementos. Denotaremos

$$\partial\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^k \partial S_i \text{ e } Int(\mathcal{R}) = \bigcup_{i=1}^k Int(S_i).$$

O diâmetro de  $\mathcal{R}$  será a soma dos diâmetros de seus elementos.

## 2 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS E FLUXOS ANOSOV

Neste capítulo as referências são [5], [8] e [22].

### 2.1 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS

A seguir apresentamos a Definição enunciada na Introdução desta dissertação.

**Definição 2.1.1.** Denote por  $d(\cdot, \cdot)$  a métrica em  $M$  induzida pela estrutura Riemanniana. Dizemos que  $X$  é *sensível às condições iniciais* se existe  $\delta > 0$  tal que para todo os  $x \in M$  e toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe um  $y \in U$  e  $t \geq 0$  satisfazendo  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ .

Denotamos por  $\|\cdot\|$ ,  $m(\cdot)$  e  $Det(\cdot)$  a *norma*, *norma minimal* e *jacobiano* induzidos pela estrutura Riemanniana, respectivamente.

**Definição 2.1.2.** Seja  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  um fluxo em uma variedade  $M$ . Um conjunto compacto invariante  $\Lambda$  é *hiperbólico* se

- 1) Admite uma decomposição contínua e  $DX$  - invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ , isto é, podemos escrever o espaço tangente  $T_x M$  como uma soma direta  $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ , onde  $E_\Lambda^X$  é o subespaço em  $T_x M$  gerado por  $X(x)$ , satisfazendo
  - $DX^t(x) \cdot E_x^i = E_{X^t(x)}^i$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Lambda$  e  $i = s, X, u$
- 2) Existem constantes positivas  $K, \lambda$  tais que
  - $E_\Lambda^s$  é uma  $(K, \lambda)$ -*contração*, isto é, para todo  $x \in \Lambda$  e todo  $t \geq 0$

$$\|DX^t(x)|_{E_x^s}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t},$$

- $E_\Lambda^u$  é uma  $(K, \lambda)$ -expansão, isto é, para todo  $x \in \Lambda$  e todo  $t \geq 0$

$$m(DX_t(x)/E_X^u) \geq K^1 e^{\lambda t},$$

Note que um conjunto hiperbólico pode ter singularidade. Mas neste caso todas estas são isoladas pela decomposição contínua do fibrado tangente.

**Definição 2.1.3.** Um difeomorfismo  $C^1 f : M \rightarrow M$  em uma variedade compacta  $M$  é chamado um *difeomorfismo Anosov* se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $f$ .

**Definição 2.1.4.** Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto invariante para uma aplicação  $C^1 f : U \rightarrow M$ .  $\Lambda$  é chamada um *repulsor hiperbólico* se existe uma métrica Riemanniana em uma vizinhança de  $\Lambda$  tal que para todos os pontos  $x \in \Lambda$  temos  $\|Df^{-1}|_x\| < 1$ .

### 2.1.1 Cones

Os Cones nos auxiliarão a criar vizinhanças hiperbólicas de conjuntos hiperbólicos. Também com os cones, no caso hiperbólico, provamos a existência das variedades estável e instável  $W^s$  e  $W^u$  as quais são tangentes à  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente.

**Definição 2.1.5.** Um  $\gamma$ -cone horizontal em  $p \in \mathbb{R}^n$  é definido por

$$H_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq \gamma \|u\|\}.$$

Um  $\gamma$ -cone vertical em  $p$  é

$$V_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq \gamma \|v\|\}.$$

De maneira geral um cone  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  é definido como a imagem de um cone sobre uma aplicação linear invertível.

Por um *campo de cones* nos referimos a uma aplicação que associa para cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  um cone  $K_p$  em  $T_p \mathbb{R}^n$ . Um difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  age naturalmente sobre os campos de cones:

$$(f_* K)_p = Df_{f^{-1}(p)} \left( K_{f^{-1}(p)} \right).$$

Por uma *família de cones* nos referimos a uma sequência de campos de cones. Uma sequência  $f = \{f_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de difeomorfismos age numa família de cones da seguinte maneira.

$$(f_* K)_{p,m} = (Df_{m-1})_{f_{m-1}^{-1}(p)} \left( K_{f_{m-1}^{-1}(p), m-1} \right).$$

Chamamos uma família de cones  $K$  (*estritamente*) *invariante*, se

$$(f_*K)_{p,m} \subset \text{Int } K_{p,m} \cup \{0\}.$$

Consideramos a ação da sequência  $f = \{f_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1.7 numa família de cones horizontal e vertical o qual associa a  $p \in \mathbb{R}^n$  os cones  $H_p^\gamma$  e  $V_p^\gamma$  para todo  $m$ , respectivamente.

## 2.1.2 O Teorema de Hadamard-Perron

**Definição 2.1.6.** Se  $\Lambda$  é um conjunto invariante, a *variedade estável* de  $\Lambda$ ,  $W^s(\Lambda)$ , é definida como sendo os pontos  $q$  tais que  $\omega(q) \subset \Lambda$ . Analogamente, a *variedades instável* de  $\Lambda$ ,  $W^u(\Lambda)$ , é definida como sendo o conjunto de pontos  $q$  tais que  $\alpha(q) \subset \Lambda$ .

Em *fase* é um conceito utilizado em [40]. É para indicar que os tempos iterados utilizados são os mesmos, no caso  $k$ . Está dizendo que não estamos comparando distâncias em tempos distintos. Digamos um no tempo  $m$  e outro no tempo  $m+n$ .

Um ponto  $q$  na variedade estável de um ponto  $p$  sobre um conjunto invariante possui uma órbita positiva que se aproxima da órbita positiva de  $p$  em fase:  $d(f^k(\mathbf{q}), f^k(p))$  tende a zero quando  $k$  tende a infinito. Se o conjunto invariante não é hiperbólico então um ponto  $q$  poderia aproximar-se do conjunto invariante e estar na variedade estável do conjunto invariante, sem estar em fase com qualquer ponto no conjunto invariante.

Agora estamos prontos para formular o fato central da nossa análise local, O Teorema da Variedade estável-instável. Será utilizada para os conjuntos hiperbólicos. Esta seção foi extraída de [22].

**Teorema 2.1.7 (Teorema de Hadamard-Perron).** *Seja  $\lambda < \mu$ ,  $r \geq 1$  e para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , seja  $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo  $C^r$  tal que para  $(x, y) \in \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$*

$$f_m = (A_m x + \alpha_m(x, y), B_m y + \beta_m(x, y))$$

*para alguma aplicação linear  $A_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $B_m : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  com  $\|A_m^{-1}\| \leq \mu^{-1}$ ;  $\|B_m\| \leq \lambda$  e  $\alpha_m(0) = 0$ ,  $\beta_m(0) = 0$ .*

*Então para  $0 < \gamma < \min\left(1, \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - 1\right)$  e  $0 < \delta < \min\left(\frac{\mu - \lambda}{\gamma + 2 + \frac{1}{\gamma}}, \frac{\mu - (1 + \gamma)^2 \lambda}{(1 + \gamma)(\gamma^2 + 2\gamma + 2)}\right)$*

temos: Se  $\|\alpha_m\|_{C^1} < \delta$  e  $\|\beta_m\|_{C^1} < \delta$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$  então existe:

1) Uma única família  $\{W_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de variedades  $C^1$  de dimensão  $k$ ,

$$W_m^+ = \left\{ (x, \varphi_m^+(x)) \mid x \in \mathbb{R}^k \right\} = \text{graf } \varphi_m^+$$

2) Uma única família  $\{W_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de variedades  $C^1$  de dimensão  $(n-k)$ .

$$W_m^- = \left\{ (\varphi_m^-(y), y) \mid y \in \mathbb{R}^{n-k} \right\} = \text{graf } \varphi_m^-,$$

onde  $\varphi_m^+ : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\varphi_m^- : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|D\varphi_m^\pm\| < \gamma$  e cumpre as propriedades

$$(i) f_m(W_m^-) = W_{m+1}^-, f_m(W_m^+) = W_{m+1}^+.$$

$$(ii) \|f_m(z)\| < \lambda' \|z\| \text{ para } z \in W_m^-, \|f_{m-1}^{-1}(z)\| < (\mu')^{-1} \|z\| \text{ para } z \in W_m^+, \text{ onde } \lambda' = (1 + \gamma)(\lambda + \delta(1 + \gamma)) < \frac{\mu}{1 + \gamma} - \delta = \mu'.$$

(iii) Seja  $\lambda' < \nu < \mu'$ . Se  $\|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(z)\| < C\nu^{-L} \|z\|$  para todo  $L \geq 0$  e algum  $C > 0$ , então  $z \in W_m^-$ .

Similarmente se  $\|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(z)\| < C\nu^{-L} \|z\|$  para todo  $L \geq 0$  e algum  $C > 0$ , então  $z \in W_m^+$ .

Por último no caso hiperbólico  $\lambda < 1 < \mu$  as famílias  $\{W_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$  e  $\{W_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$  são variedades  $C^r$ .

Muitas estimativas não usam a suposição que  $\gamma < 1$ . Fixe  $r > 0$  e seja

$$D_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \mid \|x\| \leq r, \|y\| \leq r \right\}, W_{m,r}^\pm = W_m^\pm \cap D_r.$$

Se  $\lambda' < 1$  (Isto é verdade se  $\lambda < 1$  e  $\gamma$  e  $\delta$  são suficientemente pequenos) então por (ii)  $f_m(W_{m,r}^-) \subset W_{m+1,r}^-$  e  $W_m^-$  se contrai sob a ação de  $f_m$ . Assim nesse caso  $W_{m,r}^-$  é determinado pela ação de  $f_m$  sobre  $D_r$  apenas. Argumentos similares aplicam a  $W_{m,r}^+$  se  $\mu' > 1$ . Assim, nestas situações, obtemos objetos significativos a partir de dados locais.

Em particular no caso hiperbólico  $\gamma, \delta$  suficientemente pequenos, temos  $\lambda' < 1 < \mu'$  e ambos  $W_m^+$  e  $W_{m,r}^+$  são determinados localmente. No caso  $W_m^-$  e  $W_{m,r}^-$  são chamados comumente a variedade estável e instável na origem, respectivamente. Assim podemos escolher  $\nu = 1$  em (iii).

$$W_m^- = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m z\| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

$$W_m^+ = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1} z\| \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

**Proposição 2.1.8.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto invariante hiperbólico. Então*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x) \text{ e}$$

$$W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x).$$

**Proposição 2.1.9.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto invariante hiperbólico. Existe um  $\delta > 0$  tal que se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$  com  $d(f^j(\mathbf{x}), f^j(\mathbf{y})) \leq \delta$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  então  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .*

Um difeomorfismo com as propriedades deste corolário é chamado expansor. Segue da definição de conjunto hiperbólico 2.1.2 os seguintes resultados.

**Proposição 2.1.10.** *Os subespaços  $E_x^-$  e  $E_x^+$  são uniformemente transversais, isto é, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que para qualquer  $x \in \Lambda$ ,  $\xi \in E_x^-$ ,  $\eta \in E_x^+$ , o ângulo entre  $\xi$  e  $\eta$  pelo menos é  $\alpha_0$ .*

**Observação 2.1.1.** *A condição de continuidade não é necessária na definição de conjunto hiperbólico 2.1.2. De fato, é possível deduzir tal propriedade a partir do Teorema de Hadamard Perron 2.1.7, [22].*

**Observação 2.1.2.** *Todo subconjunto fechado invariante de um conjunto hiperbólico para  $f$  também é um conjunto hiperbólico. Mais interessante, as vezes é estudar uma vizinhança para o conjunto hiperbólico.*

**Proposição 2.1.11.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $f : U \rightarrow M$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V \supset \Lambda$  tal que para qualquer  $g$  suficientemente perto de  $f$  na topologia  $C^1$ , o conjunto invariante*

$$\Lambda_V^g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n \bar{V}$$

*é hiperbólico.*

**Demonstração.** A demonstração está nas páginas 265 e 266 de [22]. □

**Corolário 2.1.12.** *Qualquer perturbação  $C^1$  suficientemente pequena de um difeomorfismo Anosov é um difeomorfismo Anosov.*

**Corolário 2.1.13.** *Um conjunto  $f$ -invariante  $\Lambda$  é hiperbólico se existe  $\lambda < 1 < \mu$  tal que para todo  $x \in \Lambda$  existe uma decomposição  $T_x M = S_x \oplus T_x$  (em geral,  $Df$  não invariante), uma família de cones horizontais  $H_x \supset S_x$ , e uma família de cones verticais  $V_x \supset T_x$  associados com a decomposição tal que:*

$$Df_x H_x \subset \text{Int} H_{f(x)}, Df_x^{-1} \subset \text{Int} V_x,$$

$$\|Df_x \xi\| \geq \mu \|\xi\|,$$

para  $\xi \in H_x$  e

$$\|Df_x^{-1} \xi\| \geq \lambda^{-1} \|\xi\|$$

para  $\xi \in V_{f(x)}$ .

**Definição 2.1.14.** Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é chamado *expansivo* se existe uma constante  $\delta > 0$  tal que se  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  então  $x = y$ . Um fluxo contínuo  $\varphi^t$  é chamado *expansivo* se dada qualquer função contínua  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $s(0) = 0$  e  $d(\varphi^t(x), \varphi^{s(t)}(x)) < \delta$  então  $d(\varphi^t(x), \varphi^{s(t)}(y)) < \delta$  implica  $y = \varphi^\tau(x)$  para algum  $\tau \in \mathbb{R}$ .

### 2.1.3 Aplicação do Teorema de Hadamard-Perron

Mostraremos como aplicar o Teorema de Hadamard-Perron 2.1.7 no contexto de conjuntos hiperbólicos.

**Teorema 2.1.15 (Teorema das Variedades Estável e Instável para conjuntos hiperbólicos).**

Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo  $C^1 f : V \rightarrow M$  tal que  $Df$  em  $\Lambda$  admite uma  $(\lambda, \mu)$ -decomposição com  $\lambda < 1 < \mu$ . Então para cada  $x \in \Lambda$  existe um par de discos  $C^1$  mergulhados  $W^s(x)$ ,  $W^u(x)$ , chamados a variedade local estável, e a variedade local instável de  $x$ , respectivamente, tal que:

- 1)  $T_x W^s = E_x^-$ ,  $T_x W^u(x) = E_x^+$ ;
- 2)  $f(W^s(x)) \subset W^s(f(x))$ ,  $f^{-1}(W^u(x)) \subset W^u(f^{-1}(x))$ ;
- 3) para todo  $\delta > 0$  existe  $C(\delta)$  tal que se  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < C(\delta) (\lambda + \delta)^n \text{dist}(x, y)$$

para  $y \in W^s(x)$ ,

$$\text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < C(\delta) (\mu - \delta)^{-n} \text{dist}(x, y)$$

para  $y \in W^u(x)$ ;

- 4) Existe  $\beta > 0$  e uma família de vizinhanças  $O_x$  contendo a bola ao redor de  $x \in \Lambda$  de raio  $\beta$  tal que

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \{y | f^n(y) \in O_{f^n(x)}, n = 0, 1, 2, \dots\}, \\ W^u(x) &= \{y | f^{-n}(y) \in O_{f^{-n}(x)}, n = 0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

**Corolário 2.1.16.** *A restrição de um difeomorfismo para um conjunto hiperbólico é expansor.*

**Demonstração.** Se  $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \beta$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $f^n(y) \in O_{f^n(x)}$  e  $y \in W^s(x) \cap W^u(x) = \{x\}$  pelo Teorema 2.1.15 item 4.  $\square$

Desta maneira resulta que um conjunto hiperbólico é sensível às condições iniciais, o mesmo para um Fluxo Anosov.

Com isto passamos para um caso mais geral, passaremos a fluxos seccional Anosov os quais contêm os fluxos Hiperbólicos. Antes disto apresentamos três definições.

**Definição 2.1.17.** Uma singularidade hiperbólica ou órbita periódica é *tipo sela* se nenhum dos seus sub-fibrados tem dimensão zero.

**Definição 2.1.18.** Dada uma órbita periódica hiperbólica  $p$  do tipo sela de um fluxo  $X \in \mathcal{X}^1$ , definimos uma *classe homoclínica* associada  $H_X(p)$  pelo fechamento do conjunto das interseções transversais entre as variedades estável e instável de  $p$ .

$$H_X(p) = \overline{W_X^u(p) \cap W_X^s(p)}.$$

A Definição, o Teorema e o Corolário a seguir nos auxiliarão na demonstração do Corolário 5.2.2.

**Definição 2.1.19.** Um campo vetorial  $X$  é *Axioma A* se

- 1)  $\Omega(X)$  é um conjunto hiperbólico,
- 2)  $\Omega(X)$  é o fecho do conjunto de órbitas periódicas de  $X$ .

O seguinte é chamado Teorema da Decomposição Espectral, dada por S. Smale. A prova deste Teorema pode ser encontrada em [8].

**Teorema 2.1.20.** *Se  $X$  é um campo Axioma A sobre uma variedade compacta, então existe uma coleção disjunta  $H_1, \dots, H_k$  de conjuntos transitivos hiperbólicos isolados de  $X$  tal que*

$$\Omega(X) = H_1 \cup \dots \cup H_k.$$

Além disso, cada  $H_i$  é uma singularidade ou uma classe homoclínica de  $X$ .

**Corolário 2.1.21.** *Seja  $X$  um campo vetorial Axioma A sobre uma variedade compacta  $M$ .*

- 1)  $X$  possui uma órbita densa se e somente se  $\Omega(X) = M$ ,
- 2)  $X$  possui um atrator e um repulsor.

### 3 **CONJUNTOS SECCIONAL HIPERBÓLICOS E FLUXOS SECCIONAL ANOSOV**

As referências utilizadas neste capítulo foram [5] e [8].

#### 3.1 DEFINIÇÕES

Seja  $X$  um campo vetorial  $C^1$  com fluxo  $X_t$  sobre uma variedade compacta conexa Riemanniana  $M$ . Se o bordo  $\partial M$  de  $M$  não é vazio, suponha que  $X$  é transversal a  $\partial M$  apontando para o interior (nesse caso  $X_t$  é definido em  $\partial M$  para apenas  $t \geq 0$ ). Apresentaremos agora algumas definições as quais nos ajudarão para o desenvolvimento deste capítulo.

**Definição 3.1.1.** Definimos o *conjunto maximal invariante* de  $X$  por

$$M(X) = \bigcap_{t \geq 0} X_t(M).$$

**Definição 3.1.2.** Um subconjunto  $\Lambda \subset M(X)$  é chamado *invariante* se  $X_t(\Lambda) = \Lambda$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $X$  é *transitivo* se  $M(X)$  é um conjunto transitivo de  $X$ .

**Definição 3.1.3.** Dizemos que  $\Lambda$  é *parcialmente hiperbólico* se há uma decomposição contínua invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  e constantes positivas  $K, \lambda$  tais que

$$\begin{aligned} \frac{\|DX_t(x)/E_x^s\|}{m(DX_t(x)/E_x^c)} &\leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t \leq 0 \\ \|DX_t(x)/E_x^s\| &\leq Ke^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

Se, além disso,  $\dim(E^c) \geq 2$  e  $|\det(DX_t(x)|_{L_x})| \geq K^{-1}e^{\lambda t}$  para todo  $x \in \Lambda, t \geq 0$  e todo subespaço bidimensional  $L_x$  de  $E_x^c$  dizemos que o sub-fibrado central  $E_\Lambda^c$  é *seccional expansor*.

A primeira desigualdade da Definição 3.1.3 é dizer que o fibrado  $E^s$  *domina* o fibrado  $E^c$ .

No capítulo anterior vimos que o fibrado tangente para conjuntos hiperbólicos se decompõe em três direções bem definidas,  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^X$ , neste caso em conjuntos parcialmente hiperbólicos apenas temos duas destas,  $E^s$  e  $E^c$ , onde esta última é chamada direção central, aqui estão a direção instável  $E^u$  e a direção do campo  $E^X$ , porém não estão bem definidas.

**Definição 3.1.4.** Um conjunto *seccional hiperbólico* é um conjunto parcialmente hiperbólico com singularidades hiperbólicas e sub-fibrado central seccional expansor.

**Definição 3.1.5.** Um campo vetorial  $C^1$  é um *fluxo seccional Anosov* se o seu conjunto maximal invariante é um conjunto seccional hiperbólico.

Vamos agora enunciar os resultados principais desta dissertação.

## 3.2 PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS SECCIONAL HIPERBÓLICOS

Examinaremos a decomposição seccional hiperbólica  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  de um conjunto seccional hiperbólico  $\Lambda$  de  $X \in \mathcal{X}^1(M)$ . Denotaremos por  $M$  uma variedade compacta.

**Lema 3.2.1.** *Se  $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$ , então  $X(x) \notin E_x^s$ .*

**Demonstração.** Suponha por contradição que exista  $x_0 \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$  tal que  $X(x_0) \in E_{x_0}^s$ . Então,  $X(x) \in E_x^s$  para todo  $x$  na órbita de  $x_0$  visto que  $E_\Lambda^s$  é invariante. Assim  $X(x) \in E_x^s$  para todo  $x \in \alpha(x_0)$  por continuidade. Segue que  $\omega(x)$  é uma singularidade para todo  $x \in \alpha(x_0)$  (Por construção e já que  $E_x^s$  cumpre esta exigência).

Por estarmos com um ponto em  $\alpha(x)$  e por este ser invariante e fechado, em particular  $\alpha(x_0)$  contém uma singularidade  $\sigma$  a qual é necessariamente tipo sela. Desta maneira temos dois casos  $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$ , ou não. Se  $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$  então  $x_0 \in W^u(\sigma)$ .

Para todo  $t \in \mathbb{R}$  definimos o vetor unitário:

$$v^t = \frac{DX_t(x_0)(X(x_0))}{\|DX_t(x_0)(X(x_0))\|}.$$

Como  $x_0 \in W^u(\sigma)$  e este último é invariante, segue que  $DX_t(x_0)(X(x_0)) \in T_{X_t(x_0)}W^u(\sigma)$  e assim

$$v^t \in T_{X_t(x_0)}W^u(\sigma) \cap E_{X_t(x_0)}^s, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tome uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que a sequência  $v^{-t_n}$  converge para  $v^\infty$  (digamos). Temos que

$v^\infty$  é um vetor unitário, e visto que  $X_{-t_n}(x_0) \rightarrow \sigma$  (por este ser  $\alpha$ -limite) e  $E^s$  contínuo obtemos:

$$v^\infty \in T_\sigma W^u(\sigma) \cap E_\sigma^s$$

Dessa maneira  $v^\infty$  é um vetor unitário não nulo que está na direção  $E^u$  e  $E^s$  e a interseção destes é apenas o vetor nulo, contradição. Esta contradição mostra o resultado quando  $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$ . Se  $\alpha(x_0) \neq \{\sigma\}$  então  $(W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha(x_0) \neq \emptyset$ . Temos que  $x_0$  não pode convergir diretamente para  $\sigma$  senão existe uma sequência de pontos os quais se aproximam deste valor. Tome  $x_1 \in (W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha(x_0)$ .

Portanto  $X(x_1) \in E_{x_1}^s$  e assim chegamos a uma contradição, que é a seguinte:  $x_1$  está na direção estável e instável ao mesmo tempo, e como vimos no caso acima isso é uma contradição.  $\square$

**Corolário 3.2.2.** *Se  $\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$ , então  $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ .*

**Demonstração.** Note que  $E_x^s = T_x W^{ss}(\sigma)$  para todo  $x \in W^{ss}(\sigma)$ . Além disto,  $W^{ss}(\sigma)$  é uma variedade invariante, então  $X(x) \in T_x W^{ss}(\sigma)$  para todo  $x \in W^{ss}(\sigma)$ . Concluimos que  $X(x) \in E_x^s$  para todo  $x \in W^{ss}(\sigma)$  e agora aplicamos o Lema 3.2.1 e temos  $x \notin \Lambda$  e assim sai o resultado  $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ .  $\square$

**Lema 3.2.3.** *Se  $x \in \Lambda$ , então  $X(x) \in E_x^c$ .*

**Demonstração.** Se  $x \in \text{Sing}(X)$  o resultado segue de Corolário 3.2.2. Assim podemos supor que  $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$ . Primeiro suponha que  $x$  não pertença a  $W^u(\sigma)$  para todo  $\sigma \in \text{Sing}(X)$ . Então pela prova do Lema 3.2.1,  $\alpha(x)$  possui um ponto regular  $y$ . Tome uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $X_{-t_n}(x) \rightarrow y$ . Pelo Lema 3.2.1 temos  $X(y) \notin E_y^s$ , assim o ângulo entre  $X(y)$  e  $E_y^s$  é positivo.

Por outro lado,  $X(X_{-t_n}) \rightarrow X(y)$  e  $E_{X_{-t_n}(x)}^s \rightarrow E_y^s$  por continuidade daí o ângulo entre  $X(X_{-t_n}(x))$  e  $E_{X_{-t_n}(x)}^s$  é limitado inferiormente por uma constante  $c > 0$  para um  $n$  grande.

Disto e pelo fato que  $E_\Lambda^s$  domina  $E_\Lambda^c$  concluimos que o ângulo entre  $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(X(X_{-t_n}(x)))$  e  $DX_{t_n}(E_{X_{-t_n}(x)}^c(x))$  converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas  $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x)) \cdot (X(X_{-t_n}(x))) = X(x)$  Esta última é pela invariância de  $X(x)$ .

Assim  $DX_{t_n}(E_{X_{-t_n}(x)}^c(x)) = E_x^c$ . Dessa maneira  $X(x) \in E_x^c$  como desejado.

Agora suponha que  $x \in W^u(\sigma)$  para algum  $\sigma \in \text{Sing}(X)$ . Temos que  $T_\sigma W^u(\sigma) \cap E_\sigma^s = \{0\}$ , então  $T_\sigma W^u(\sigma) \subset E_\sigma^c$  pela decomposição dominada. Então  $T_x W^u(\sigma) \subset E_x^c$  e assim  $X(x) \in E_x^c$  visto que  $X(x) \in T_x W^u(\sigma)$ . Isto prova o lema.  $\square$

Seja  $M$  uma variedade compacta e  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Dado  $q \in M \setminus \text{Sing}(X)$  definimos  $N_q$  como o complemento ortogonal de  $E_q^X$  e denotamos por  $O_q : T_qM \rightarrow N_q$  a projeção ortogonal. O seguinte lema de álgebra linear será muito utilizado

**Lema 3.2.4.** *Se  $q \in M \setminus \text{Sing}(X)$  e  $L_q$  é um subespaço de  $T_qM$  tal que  $E_q^X \subset L_q$ , então  $O_q(L_q) = N_q \cap L_q$ .*

**Demonstração.** Fixe  $v_q \in L_q$ . Visto que  $T_{M \setminus \text{Sing}(X)}M$  é uma soma direta de  $N_{M \setminus \text{Sing}(X)}$  e  $E_{M \setminus \text{Sing}(X)}^X$ , temos  $v_q = v_q^N + v_q^X$  para algum  $v_q^N \in N_q$  e  $v_q^X \in E_q^X$ . Por outro lado, visto que  $E_q^X \subset L_q$  e  $v_q^N = v_q - v_q^X$ , obtemos que  $v_q^N \in L_q$  assim  $v_q^N \in L_q \cap N_q$ . Dessa maneira  $O_q(v_q) = v_q^N \in N_q \cap L_q$  daí  $O_q \subset N_q \cap L_q$ . Reciprocamente, se  $v_q \in N_q \cap L_q$  então  $O_q(v_q) = v_q$ , assim  $v_q = O_q(v_q + X(q))$ . Já que  $v_q \in L_q$  e  $X(q) \in E_q^X \subset L_q$  obtemos  $v_q \in O_q(L_q)$ , dessa maneira  $N_q \cap L_q \subset O_q(L_q)$ . Isto conclui a prova.  $\square$

Se  $v \in N_q$  denotamos por  $P_t(q) \cdot v$  a projeção ortogonal de  $DX_t(q) \cdot v$  sobre  $N_{X_t(q)}$ . Em outras palavras,  $P_t(q)v = O_{X_t(q)}(DX_t(q)v)$ . Isto define um fluxo  $P_t$ , no espaço fibrado  $N \rightarrow M \setminus \text{Sing}(X)$  o qual é chamado o *fluxo linear de Poincaré*. Dado um conjunto invariante não singular  $\Lambda$  definimos o espaço fibrado  $N_\Lambda = \bigcup_{q \in \Lambda} N_q$ . Um sub-fibrado  $G_\Lambda$  de  $N_\Lambda$  é chamado invariante se  $P_t(q)G_q = G_{X_t(q)}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $q \in \Lambda$ . Usando o Lema 3.2.4 obtemos um critério simples para invariância para certos sub-fibrados de  $N_\Lambda$  sobre o fluxo Poincaré  $P_t$ .

**Lema 3.2.5.** *Se  $L_\Lambda$  é um sub-fibrado  $X_t$ -invariante de  $T_\Lambda M$  contendo  $E_\Lambda^X$ , então o sub-fibrado induzido  $\bar{L}_\Lambda = N_\Lambda \cap L_\Lambda$  é  $P_t$ -invariante.*

**Demonstração.** Fixe  $q \in \Lambda$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Visto que  $L_\Lambda$  é  $X_t$ -invariante temos por hipótese que  $E_{X_t(q)}^X \subset L_{X_t(q)}$ . Assim  $O_{X_t(q)}(E_{X_t(q)}^c) = N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)}$  pelo Lema 3.2.4. Disto resulta

$$\begin{aligned}
 P_t(\bar{L}_q) &= O_{X_t(q)}(DX_t(q)(N_q \cap L_q)) \\
 &= O_{X_t(q)}(DX_t(q)(N_q) \cap L_{X_t(q)}) \\
 &= P_t(q)(N_q) \cap O_{X_t(q)}(L_{X_t(q)}) \\
 &= N_{X_t(q)} \cap (N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)}) \\
 &= N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)} = \bar{L}_{X_t(q)}
 \end{aligned}$$

$\square$

**Definição 3.2.6.** Dizemos que o fluxo Poincaré  $P_t$  é *hiperbólico* sobre  $\Lambda$  se existem uma decomposição contínua  $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$  e constantes positivas  $k, \lambda$  tais que:

- 1)  $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$  é  $P_t$ -invariante, i.e, ambos  $G_\Lambda$  e  $F_\Lambda$  são  $P_t$ -invariantes.
- 2)  $P_t$  contrai  $G_\Lambda$ , i.e,  $\|P_t(q)|G_q\| \leq ke^{-\lambda t}$  para todo  $t \geq 0$  e  $q \in \Lambda$ .
- 3)  $P_t$  expande  $F_\Lambda$ , i.e,  $m(P_t(q)|F_q) \geq ke^{\lambda t}$  para todo  $t \geq 0$  e  $q \in \Lambda$ .

**Lema 3.2.7.** *Uma condição suficiente e necessária para um conjunto invariante não-singular ser hiperbólico é que seu fluxo Poincaré seja hiperbólico.*

**Demonstração.** Suponha que  $\Lambda$  seja um conjunto não-singular hiperbólico de  $X$  com decomposição hiperbólica  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ . Definindo  $G_\Lambda = (\overline{E^s \oplus E^X})_\Lambda$  e  $F_\Lambda = (\overline{E^s \oplus E^u})_\Lambda$  obtemos uma decomposição contínua  $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$  a qual é  $P_t$ -invariante pelo Lema 3.2.5 já que tomando  $L_\Lambda = G_\Lambda$  no primeiro caso  $E_\Lambda^X \subset G_\Lambda$ , assim  $N_\Lambda \cap G_\Lambda$  é  $P_t$ -invariante, de modo análogo  $N_\Lambda \cap F_\Lambda$  é  $P_t$ -invariante.

Visto que  $\Lambda$  não tem singularidades, facilmente vemos que  $G_\Lambda$  (resp.  $F_\Lambda$ ) contrai (resp. expande) por  $P_t$ . Dessa maneira  $P_t$  é hiperbólico sobre  $\Lambda$ . Reciprocamente, suponha que  $P_t$  seja hiperbólico sobre  $\Lambda$  e denote por  $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$  a decomposição correspondente. Defina os sub-fibrados  $A_\Lambda = G_\Lambda \oplus E_\Lambda^X$  e  $B_\Lambda = E_\Lambda^X \oplus F_\Lambda$  sobre  $\Lambda$ . Veremos que ambos  $A_\Lambda$  e  $B_\Lambda$  são  $X_t$ -invariantes. De fato, se  $x \in \Lambda$  e  $v_x \in A_x$  então existe um único  $v_x^G \in G_x$  tal que  $v_x - v_x^G \in E_x$ .

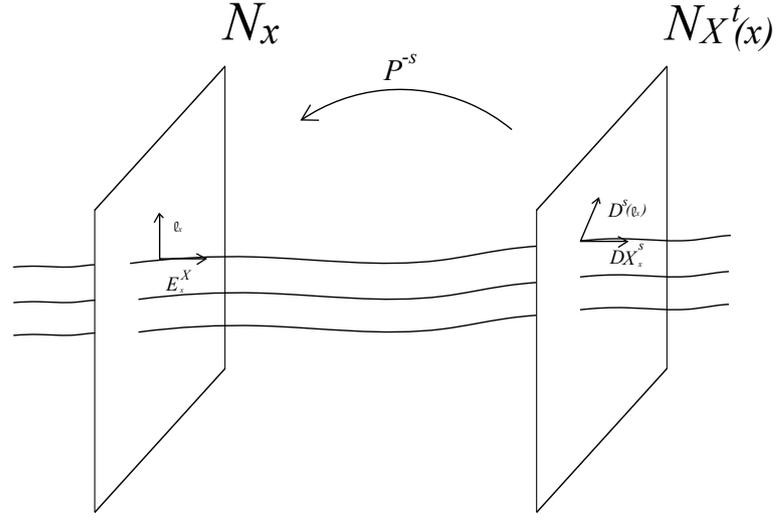
Se  $t \in \mathbb{R}$  então  $DX_t(x)v_x - DX_t(x)v_x^G \in E_{X_t(x)}^X$  visto que  $E_\Lambda^X$  é  $X_t$ -invariante. Então  $O_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) = P_t(x)v_x^G$  para o qual obtemos que  $O_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) \in G_{X_t(x)}$  visto que  $G_\Lambda$  é  $P_t$ -invariante. Como  $DX_t(x)v_x - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) \in E_{X_t(x)}$  pela definição de  $O_{X_t(x)}$  obtemos  $DX_t(x)v_x \in G_{X_t(x)} \oplus E_{X_t(x)} = A_{X_t(x)}$ . Dessa maneira  $A_\Lambda$  é  $X_t$ -invariante. Similarmente para  $B_\Lambda$ . Finalmente, visto que  $\Lambda$  é compacto e não-singular podemos utilizar campos de cones ao redor de  $G_\Lambda$  para obter um sub-fibrado que contrai  $E_\Lambda^s$  em  $A_\Lambda$  complementar a  $E_\Lambda^X$ . Analogamente obtemos um sub-fibrado instável  $E^u$  em  $B_\Lambda$  complementar a  $E_\Lambda^X$ . Já que  $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$  obtemos  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ . Assim obtemos uma decomposição hiperbólica sobre  $\Lambda$ .  $\square$

Consideraremos novamente o caso seccional hiperbólico.

**Lema 3.2.8.** *Existem constantes  $K, \lambda > 0$  tais que*

$$m(P_t(x)/F_x) \cdot m(DX_t(x)/E_x^X) \geq Ke^{\lambda t} \quad (3.1)$$

para todo  $x \in \Lambda^*$  e  $t > 0$ .



**Figura 3.1:** Teorema 3.2.7

**Demonstração.** Pelo fato do fluxo ser seccional hiperbólico, existem  $K, \lambda > 0$  tais que

$$|\det(DX_t(x))/L_x^c| \geq Ke^{\lambda t}, \quad (3.2)$$

para todo  $t \geq 0$ ,  $x \in \Lambda$  e todo subespaço bidimensional  $L_x^c$  de  $E_x^c$ . Fixando  $x \in \Lambda^*$  e tomando  $v, u \in T_x M$ , seja  $A(u, v)$  a área do paralelogramo formado por  $u, v$  em  $T_x M$ . Se  $u \in F_x$  e  $v \in E_x^X$  temos

$$A(u, v) = \|u\| \|v\| \quad (3.3)$$

pela ortogonalidade. Disto obtemos que

$$A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = \|P_t u\| \cdot \|DX_t v\|, \quad (3.4)$$

pela definição de  $P_t$ . Mas  $A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = |\det(DX_t(x) \setminus L_x^c)| \cdot A(u, v)$ , onde  $L_x^c$  é o subespaço gerado por  $\{u, v\}$ . Visto que  $u \in E_x^c$  por definição e  $v \in E_x^c$  pelo Lema 3.2.3, temos  $L_x^c \subset E_x^c$ . Assim aplicando as equações (3.2), (3.3) e (3.4) acima obtemos

$$\|P_t(x) \cdot u\| \cdot \|DX_t(x) \cdot v\| \geq Ke^{\lambda t} \|u\| \cdot \|v\|$$

Já que  $u, v$  são arbitrários obtemos o resultado.  $\square$

**Lema 3.2.9 (Lema Hiperbólico).** *Todo subconjunto compacto invariante sem singularidades de um conjunto seccional hiperbólico é hiperbólico sobre este.*

**Demonstração.** Seja  $\Lambda$  um conjunto seccional hiperbólico de um campo vetorial  $X$  sobre uma variedade compacta  $M$ . Então, existe uma constante  $A > 0$  tal que  $\|X(x)\| \leq A$  para todo  $x \in M$ . Seja  $H \subset \Lambda$  um conjunto compacto invariante sem singularidades de  $X$ . Então, existe  $B > 0$  tal

que  $\|X(x)\| \geq B$  para todo  $x \in H$ . Dessa maneira:

$$\begin{aligned} m(DX_t(x)/E_x^X) &\leq \left\| DX_t(x) \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \right\| = \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \\ &\leq \frac{A}{B} \quad \forall x \in H, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando a Equação (3.1) obtemos:

$$m(P_t(x)/F_x) \cdot \frac{A}{B} \geq m(P_t/F_x) \cdot m(DX_t)(x)/E_x^X \geq Ke^{\lambda t}$$

e assim

$$m(P_t(x)/F_x) \geq Ce^{\lambda t}, \quad \forall x \in H, \forall t > 0,$$

onde  $C = K \cdot \left(\frac{B}{A}\right) > 0$ . Dessa maneira  $P_t$  expande  $F_H$ . Defina a decomposição  $N_H = G_H \oplus F_H$ , onde  $F_G$  é como vimos acima e  $G_H = N_H \cap (E_H^S \oplus E_H^X)$ . Como vimos anteriormente  $F_H$  é  $P_t$ -invariante enquanto pela definição  $G_H = \overline{(E^S \oplus E^X)}_H$  é  $P_t$ -invariante pelo Lema 3.2.5, já que  $E_H^X \subset E_H^S \oplus E_H^X$ . Assim  $P_t$  contrai  $G_H$  e então aplicamos o Lema 3.2.7.  $\square$

A seguir descreveremos as singularidades do conjunto seccional hiperbólico. Para introduzir a seguinte definição denote por  $Re(\cdot)$  a parte real de um número complexo.

A seguinte definição e resultados podem ser encontrados em [8] a partir da página 68 até a página 71.

**Definição 3.2.10.** Dizemos que uma singularidade é *tipo-Lorenz* se ele possui três autovalores  $\lambda^{ss}, \lambda^s, \lambda^u$  com  $\lambda^s, \lambda^u$  reais,  $Re(\lambda^{ss}) < \lambda^s < 0 < -\lambda^s < \lambda^u$ , e tal que a parte real dos autovalores restantes está fora de  $[\lambda^s, \lambda^u]$ .

**Lema 3.2.11.** *Todas as singularidades de  $X$  em  $\Lambda$  é tipo-Lorenz ou possui dois autovalores positivos.*

**Lema 3.2.12.** *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Se  $q \in M$  e  $H \subset \omega(q)$  é um conjunto hiperbólico contendo uma variedade forte estável, então  $q \in H$  e  $H$  é uma fonte hiperbólica. Em particular,  $q$  é recorrente.*

**Teorema 3.2.13.** *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Se que  $q \in M$  e  $\omega(q)$  é um conjunto seccional hiperbólico com singularidades de  $X$ , então  $\omega(x)$  não pode conter nenhuma variedade forte estável.*

**Corolário 3.2.14.** *Um conjunto transitivo, isolado, seccional hiperbólico contendo uma variedade forte estável de um campo vetorial sobre uma variedade compacta é uma fonte hiperbólica*

tipo-sela. Por isso as fontes hiperbólicas tipo-sela são as únicas fontes que são conjuntos seccional Anosov.

### 3.3 PARTIÇÃO SINGULAR

**Definição 3.3.1.** Uma *partição singular* de um conjunto invariante  $\Lambda$  de um campo vetorial  $X$  é uma coleção finita disjunta  $\mathcal{R}$  de seções transversais satisfazendo  $\Lambda \cap \partial \mathcal{R} = \emptyset$  e  $\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \{y \in \Lambda : X_t(y) \in \mathcal{R}, \forall t \in \mathbb{R}\}$ .

Na sequência apresentaremos um resultado de existência geral para partição singular.

**Proposição 3.3.2.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto invariante e tal que todas suas singularidades são hiperbólicas de  $X$ . Suponha que para todo  $\delta > 0$  e todo  $z \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$  existe uma seção transversal  $\Sigma_z$  de diâmetro no máximo  $\delta$  tal que  $z \in \text{Int}(\Sigma_z)$  e  $\Lambda \cap \partial \Sigma_z = \emptyset$ . Então,  $\Lambda$  tem partições singulares de diâmetro arbitrariamente pequenas.*

**Demonstração.** Como toda singularidade de  $\Lambda$  é hiperbólica podemos escolher  $\beta > 0$  tal que

$$\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t \left( \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)} B_\beta(\sigma) \right). \quad (3.5)$$

Para entender melhor a igualdade acima tome um  $\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$  tome uma bola de raio  $\beta_\sigma$ ,  $B_{\beta_\sigma}(\sigma)$ , e sabendo que  $\sigma$  é um ponto hiperbólico logo pode ser uma fonte, um poço ou uma sela. Para cada caso quando vemos  $X_t(B_{\beta_\sigma}(\sigma))$ , fazemos  $t \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$  obtemos que  $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(B_{\beta_\sigma}(\sigma)) = \sigma$ . Ou seja nada mais é outra maneira de denotar as singularidades. Assim para cada  $\beta$  definimos

$$H = \Lambda \setminus \left( \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(S)} B_\beta(\sigma) \right).$$

Podemos supor que  $H \neq \emptyset$ . Com isto, a Equação (3.5) poderia implicar  $\Lambda = \Lambda \cap \text{Sing}(X)$ , como todas as singularidades são hiperbólicas, então temos que estas são finitas. Portanto  $H \subset \Lambda$  e  $H \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$ . Pelas hipóteses,  $\Sigma_z$  existe para todo  $z \in H$ . Para todo  $z$  definimos:

$$V_z = \bigcup_{t \in (-1,1)} X_t(\text{Int}(\Sigma_z)).$$

Obviamente  $z \in V_z$  então  $\{V_z : z \in H\}$  é uma cobertura aberta sobre  $H$  e este  $H$  é compacto pelo fato de ser complementar de abertos e por ser fechado dentro de um compacto resulta ser

compacto. Assim existe um subconjunto finito  $\{z_1, \dots, z_r\} \in H$  tal que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^r V_{z_i}.$$

Pelo movimento das seções transversais  $\Sigma_{z_1}, \dots, \Sigma_{z_r}$  ao longo do fluxo, podemos supor que a coleção  $\mathcal{R} = \{\Sigma_{z_1}, \dots, \Sigma_{z_r}\}$  é dois a dois disjunta. Além disso, como  $\Lambda \cap \partial \Sigma_z = \emptyset$  temos

$$\Lambda \cap \partial R = \emptyset.$$

Se  $z \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$  existe  $t > 0$  tal que  $X_t(z) \notin B_{\beta_\sigma}(\sigma)$ . Dessa maneira podemos obter um  $t$  suficientemente grande ou pequeno tal que

$$X_t(z) \notin \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)} B_{\beta_\sigma}(\sigma).$$

Além disso  $X_t(z) \in \Lambda$ , pois  $\Lambda$  é transitivo, já que  $z \in \Lambda$ . Então  $X_t(z) \in H$  por definição. Dai  $X_t(z) \in V_{z_i}$  para algum  $i$ , isto por  $H$  ser compacto e os  $V_i$  formarem uma cobertura aberta. Logo pela construção dos  $V_i$  a órbita de  $z$  intersecta  $\Sigma_{z_i}$ . Isto prova que

$$\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \{z \in \Lambda : X_t(z) \notin R\}.$$

De onde obtemos o resultado. □

**Definição 3.3.3.** A aplicação de retorno  $\Pi_\Sigma : \text{Dom}(\Pi_\Sigma) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$  associada a uma seção transversal  $\Sigma$  é definida por

$$\text{Dom}(\Pi_\Sigma) = \{x \in \Sigma : X_t(x) \in \Sigma \text{ para algum } t > 0\}$$

e

$$\Pi_\Sigma(x) = X_{t_\Sigma(x)}(x)$$

onde  $t_\Sigma(x)$  é o tempo de retorno

$$t_\Sigma(x) = \inf \{t > 0 : X_t(x) \in \Sigma\}.$$

Para todo conjunto compacto invariante  $\Lambda$  definimos:

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M : \omega(x) \subset \Lambda\} \text{ e } W^u(\Lambda) = \{x \in M : \alpha(x) \subset \Lambda\}.$$

Para todo  $H \subset M$  denotamos

$$W^s(\text{Sing}(X) \cap H) = \bigcup_{\sigma \in \text{Sing}(X) \cap H} W^s(\sigma).$$

A seguir enunciamos dois Lemas nos auxiliarão na demonstração do Teorema da próxima subsecção. A demonstração pode ser encontrada em [8].

**Lema 3.3.4.** *Se  $\mathcal{R}$  é uma partição singular de um conjunto compacto invariante  $H$  de  $X$ , então valem as seguintes propriedades:*

- 1)  $(H \cap \mathcal{R}) \cap \text{Dom}(\Pi_{\mathcal{R}}) \subset \text{Int}(\text{Dom}(\Pi_{\mathcal{R}}))$  e  $\Pi_{\mathcal{R}}$  é  $C^1$  em uma vizinhança de  $H \cap \mathcal{R}$  em  $\mathcal{R}$ .
- 2)  $(H \cap \mathcal{R}) \setminus \text{Dom}(\Pi_{\mathcal{R}}) \subset W^s(\text{Sing}(X) \cap H)$ .

A seguir  $B_{\delta}$  denota a  $\delta$ -bola aberta centrada em  $p \in \mathcal{R}$ . Lembramos que  $O^+(q) = \{X_t(q) : t \geq 0\}$  denota a órbita positiva de  $q \in M$ .

**Lema 3.3.5.** *Seja  $M$  uma variedade tridimensional compacta,  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  e  $q \in M$  tal que toda singularidade em  $\omega(q)$  é hiperbólica com variedade instável unidimensional. Se  $\omega(q)$  não é uma singularidade e  $\mathcal{R}$  é uma partição singular de  $\omega(q)$ , então as seguintes propriedades mantem-se para  $\Pi = \Pi_{\mathcal{R}}$ :*

- 1)  $O^+(q) \cap \mathcal{R} = \{q_1, q_2, \dots\}$  é uma sequência infinita ordenada tal que  $\Pi(q_n) = q_{n+1}$ .
- 2) Existe  $\delta > 0$  tal que se  $n \in \{1, 2, \dots\}$  então ou  $B_{\delta}(q_n) \subset \text{Dom}(\Pi)$  e  $\Pi|_{B_{\delta}(q_n)}$  é  $C^1$  ou existe uma curva  $c_n \subset W^s(\text{Sing}(X) \cap \omega(q)) \cap B_{\delta}(q_n)$  tal que  $B_{\delta}^+(q_n) \subset \text{Dom}(\Pi)$  e  $\Pi|_{B_{\delta}^+(q_n)}$  é  $C^1$ , onde  $B_{\delta}^+(q_n)$  denota a componente conexa de  $B_{\delta}(q_n) \setminus c_n$  contendo  $q_n$ .

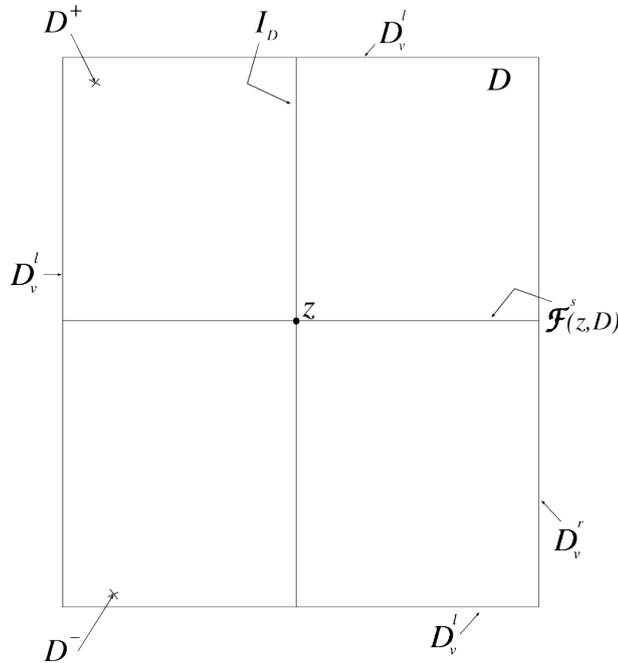
## 3.4 RETÂNGULO FOLHEADO

As definições referente a *folhas* e *folhações* podemos ser encontradas em [11].

Nesta subsecção  $X$  denotará um campo vetorial sobre uma variedade tridimensional compacta  $M$ . Um *retângulo* de  $X$  é uma seção transversal  $D$  difeomorfa a  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Definição 3.4.1.** Vemos que  $\partial D$  consiste de duas partes  $\partial D = \partial^v D \cup \partial^h D$  de tal maneira que  $\partial^v D = D_v^l \cup D_v^r$  e  $\partial^h D = D_h^t \cup D_h^b$ , onde as curvas  $D_v^i (i \in \{l, r\})$  e  $D_h^i (i = \{t, b\})$ . Também supomos que  $I_D$ , a imagem de  $0 \times [0, 1]$ , é uma curva tangente à direção central  $TD \cap E^c$ . Aqui  $TD$  denota o espaço tangente de  $D$ . No caso onde existe uma folheação estável  $W^s$  de  $X$ , por exemplo em uma vizinhança de um conjunto seccional hiperbólico de  $X$  podemos definir um folheação contínua unidimensional em um retângulo  $D$  pela intersecção das folhas de  $W^s$  com  $D$ .

Também podemos dizer que um retângulo  $D$  é um *retângulo folheado* se as folhas de  $\mathcal{F}^s$  possuem a forma  $* \times [0, 1]$  acima identificados. Em tal caso  $\partial^v D$  é formado pelas folhas  $\mathcal{F}^s$  enquanto  $\partial^h D$  é transversal para  $\mathcal{F}^s$ .



**Figura 3.2:** Retângulo Folheado

O fecho e o bordo serão denotadas por  $Cl(\cdot)$  e  $\partial(\cdot)$ , respetivamente. O tamanho de um arco  $J$  será denotado por  $Length(J)$ .

**Teorema 3.4.2.** *Seja  $q \in M$  com conjunto omega-limite seccional hiperbólico  $\omega(q)$  e  $T_U M = \hat{E}_U^s \oplus \hat{E}_U^c$  é uma extensão contínua da decomposição seccional hiperbólica  $T_{\omega(q)} M = E_{\omega(q)}^s \oplus E_{\omega(q)}^c$  de  $\omega(q)$  para uma vizinhança  $U$  de  $\omega(q)$ . Seja  $I$  um arco(intervalo) tangente a  $\hat{E}_U^c$ , transversal a  $X$ , com  $q$  como ponto de fronteira. Se  $\omega(q)$  não é uma singularidade, então para toda partição singular  $\mathcal{R}$  de  $H$  existem  $S \in \mathcal{R}$ ,  $\delta > 0$ , uma sequência  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots \in S$  de pontos na órbita positiva de  $q$  e uma sequência de intervalos  $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \dots \subset S$  na órbita positiva de  $I$  com  $\hat{q}_j$  como um ponto de fronteira de  $\hat{J}_j, \forall j$ ; tal que*

$$L(\hat{J}_j) \geq \delta \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

**Demonstração.** Visto que  $\omega(q)$  é seccional hiperbólico e não é uma singularidade, temos que toda singularidade em  $\omega(q)$  é tipo-Lorenz, e assim, estas possuem variedade instável unidimensional. Então o Lema 3.3.5 aplicado a  $\mathcal{R}$  implica que a aplicação de retorno  $\Pi = \Pi_{\mathbb{R}}$  associada a  $\mathcal{R}$  satisfaz as seguintes propriedades:

- 1)  $O_X^+(q) \cap \mathcal{R} = \{q_1, q_2, \dots\}$  é uma sequência infinita, ordenada de uma maneira que  $\Pi(q_i) = q_{i+1}$ .
- 2) Existe  $\delta$  tal que se  $n \in \{1, 2, \dots\}$  então cada  $B_\delta(q_n) \subset \text{Dom}\Pi$  e  $\Pi/B_\delta(q_n)$  é  $C^1$  ou existe uma curva  $c_n \subset W_X^s(\text{Sing}(X) \cap \omega(q)) \cap B_\delta(q_n)$  tal que:

$$B_\delta^+(q_n) \subset \text{Dom}(\Pi) \text{ e } \Pi/B_\delta^+(q_n) \text{ é } C^1,$$

onde  $B_\delta^+(q_n)$  denota a componente conexa de  $B_\delta(q_n) \setminus c_n$  contendo  $q_n$ .

Assumiremos a segunda alternativa em 2).

Podemos supor que existe  $i_0$  grande tal que  $q_i \in \text{Int}(\mathcal{R})$  para todo  $i \geq i_0$ . Caso contrário  $\omega(q) \cap \partial\mathcal{R} \neq \emptyset$  e obtemos uma contradição porque  $\mathcal{R}$  é uma partição singular de  $\omega(q)$ . Podemos supor  $i_0 = 1$  sem perda de generalidade. Por 1) existe uma sequência  $n_1, n_2, \dots, n_i \in \{1, \dots, k\}$  tal que

$$q_i \in S_{n_i}, \forall i.$$

Utilizando a órbita positiva de  $I$  podemos supor

$$I \subset S_{n_i} \cap \text{Dom}(\Pi).$$

Diminuindo  $I$  se necessário podemos supor também que  $I \subset \text{Int}\left(B_{\frac{1}{\delta}}(q_1)\right)$ , onde obtemos  $\delta$  2). Defina  $I_1 = I$  e, indutivamente, a sequência de intervalos  $I_i = \Pi(I_{i-1}) = \Pi^i(I)$  desde que  $I_{i-1} = \Pi^{i-1}(I) \subset B_\delta(q_{i-1})$ .

Por hipótese  $I$  é tangente a  $E_\Lambda^c$  e transversal a  $X$ . Então a propriedade de expansão do volume de  $E_\Lambda^c$  implica que  $\Pi$  é expansor ao longo de  $I$ , [35] pág 370.

Portanto a sequência  $I_i = \Pi(I_{i-1})$  satisfaz  $\text{Length}(I_i) \rightarrow \infty$  se  $I_i \subset B_\delta^+(q_i)$  para todo  $i$ . Visto que os elementos de  $\mathcal{R}$  possuem diâmetro finito concluímos que existe um primeiro índice  $i_1$  tal que

$$I_{i_1} \not\subset B_\delta^1(q_{i_1}).$$

Por outro lado, as órbitas positivas começando em  $I_{i_1}$  encontram  $\Sigma$  por  $(P)_\Sigma$  enquanto que as órbitas em  $C_i$  não, já que elas tendem a  $\text{Sing}(X) \cap \omega(q)$  por 2). Disto concluímos que

$$I_{i_1} \cap C_{i_1} = \emptyset.$$

Dessa maneira, a componente conexa  $J_{i_1}$  de  $I_{i_1} \cap B_\delta(q_{i_1})$  contendo  $q_{i_1}$  junta  $q_{i_1}$  com outro ponto

em  $\partial B_\delta(q_{i_1})$ . Esta última afirmação implica

$$\text{Length}(J_{i_1}) \geq \delta.$$

Concluindo encontramos um índice  $i_1$  e um intervalo  $J_{i_1} \subset I_{i_1}$  (e assim na órbita positiva de  $I$ ) tal que  $q_{i_1}$  é um ponto limite de  $J_{i_1}$  e  $\text{Length}(J_{i_1}) \geq \delta$ . Repetindo o argumento obtemos uma sequência  $i_1, i_2, \dots \in \{1, \dots, k\}$ , uma sequência de pontos  $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots$  com  $q_{i_j} \in S_{i_j}$ , e uma sequência de intervalos  $J_{i_j} \subset S_{i_j}$  na órbita positiva de  $I$  tal que  $q_{i_j}$  é um ponto limite de  $J_{i_j}$  e  $\text{Length}(J_{i_j}) \geq \delta$ . Como  $\{1, \dots, k\}$  é um conjunto finito e contém  $i_j$  podemos supor que  $i_j = r$  para algum índice  $r \in \{1, \dots, k\}$ . Denotando  $S = S_r, \hat{q}_j = q_{i_j}$  e  $\hat{J}_j = J_{i_j}$  obtemos o resultado.  $\square$

## 4 VARIEDADE ESTÁVEL FORTE, LEMA DO FECHAMENTO E SEÇÃO TRANSVERSAL SINGULAR

Aqui reunimos alguns resultados importantes que precisaremos para o desenvolver o artigo [6].

### 4.1 VARIEDADE ESTÁVEL FORTE PARA CONJUNTOS SECCIONAL HIPERBÓLICOS

Esta subsecção foi extraída da dissertação de [14].

**Definição 4.1.1.** Uma *imersão topológica* de  $\mathbb{R}^s$  em  $M$  é uma aplicação contínua  $F : \mathbb{R}^s \rightarrow M$  tal que todo ponto  $x \in \mathbb{R}^s$  tenha uma vizinhança com a seguinte propriedade:

- 1) A restrição de  $F$  a  $V$ ,  $F|_V$ , é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Um *mergulho topológico* de  $\mathbb{R}^s$  em  $M$  é uma imersão topológica injetora  $F : \mathbb{R}^s \rightarrow M$  que é um homeomorfismo sobre sua imagem. A seguir denotaremos  $u$ -disco um disco de dimensão  $u$ .

O espaço  $Merg(D^u, M)$  de todos os mergulhos de  $u$ -discos fechados em  $M$ , pode ser visto como um espaço fibrado sobre  $M$ . A fibra em  $x \in M$  é o conjunto de todos os mergulhos  $e : D^u \rightarrow M$  tal que  $e(0) = x$ . Para o espaço  $Merg(D^u, M)$  utilizamos a topologia uniforme.

**Definição 4.1.2.** Seja o espaço fibrado  $E$ , onde está definida a aplicação projeção  $\pi : E \rightarrow B$  do espaço  $E$  sobre o conjunto base  $B$ . Uma *seção* é uma aplicação  $s : B \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s(b) = b$  para cada  $b \in B$ .

No caso  $E = Merg(D^u, X)$ ,  $B = X$ .

**Definição 4.1.3.** Se  $a : X \rightarrow \text{Merg}(D^u, M)$  é uma seção contínua sobre  $X \subseteq M$ , então  $A = \{\text{imagem } a(x) : x \in X\}$  é uma família de  $u$ -discos por meio de  $X$ .

**Observação 4.1.1.** Note que  $W_\delta^{uu}$  é uma família de  $u$ -discos para todo  $\delta > 0$ .

O seguinte lema pode ser considerado como o teorema da função inversa para certas famílias de  $u$ -discos. Neste caso, por  $\mathbb{R}^m(\varepsilon)$  nos referiremos ao disco de raio  $\varepsilon$  em  $\mathbb{R}^m$ , centrado na origem.

**Lema 4.1.4.** Seja  $u + s = m$  e  $\mathcal{A} = \{A(y) : y \in \mathbb{R}^s(\delta)\}$  é uma família de  $u$ -discos que atravessa o conjunto  $0 \times \mathbb{R}^s(\delta) \subseteq \mathbb{R}^m$ , onde  $A(y) = \text{graf } g_y$ , para  $g_y : \mathbb{R}^u(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^s(\delta)$  e  $g_y(0) = y$ . Então

$$\bigcup_{y \in \mathbb{R}^s(\delta)} A(y).$$

é uma vizinhança de 0 em  $\mathbb{R}^m$ .

**Demonstração.** A continuidade de  $\mathcal{A}$  implica que se  $g$  se define como:

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^u(\varepsilon) \times \mathbb{R}^s(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \\ (x, y) &\rightarrow (x, g_y(x)) \text{ com } g_y(0) = y \end{aligned}$$

segue da continuidade de  $g_y$  que  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}^u(\varepsilon) \times \mathbb{R}^s(\delta)$  sobre  $\mathbb{R}^m$ . Vejamos a continuidade de  $g|_{\partial B}$ . Seja

$$G_t(x, y) = (x, (1-t)g_y(x) + t \cdot y) \quad t \in [0, 1].$$

Então  $G_t$  é uma homotopia entre a função  $g|_{\partial B}$  e a inclusão  $\partial B \hookrightarrow \mathbb{R}^m - 0$ , visto que

$$G_0(x, y) = (x, g_y(x)) = g|_{\partial B} \text{ e } G_1(x, y) = (x, y) = \text{inclusão } (, ).$$

Daí  $g|_{\partial B}$  e  $\partial B \hookrightarrow \mathbb{R}^m - 0$  são equivalentes pois é uma homotopia. Como a inclusão é contínua  $g|_{\partial B}$  também é. Além disso  $G_t(x, y)$  nunca passa pela origem quando  $(x, y) \in \partial B$ , já que  $x = 0$  implica que  $g_y(0) = y$ , e assim

$$G_t(x, y) = (0, (1-t)g_y(0) + t \cdot y) = (0, (1-t)y + t \cdot y) = (0, y) \neq 0.$$

Assim pela continuidade para todo  $y \in \mathbb{R}(\delta)$ , a função  $G_t(x, y)$  nos dá uma vizinhança ao redor da origem.  $\square$

A seguir o Teorema principal de [14].

**Teorema 4.1.5.** *Todo conjunto transitivo seccional hiperbólico com singularidades não pode conter nenhuma variedade estável forte local.*

**Demonstração.** Seja  $\Lambda$  um conjunto transitivo seccional hiperbólico, com singularidades de um campo vetorial  $X$ . Seja  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  a decomposição parcialmente hiperbólica de  $\Lambda$ . Suponhamos, por contradição, que  $\Lambda$  contém uma variedade estável forte local  $W_\varepsilon^{ss}(x^*)$  para algum  $\varepsilon > 0$  e algum  $x^* \in \Lambda$ . Fixemos  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$ , definimos

$$H = \left\{ y \in M : y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(z_k) \right\},$$

para alguma sequência  $t_n \rightarrow -\infty$  e  $\{z_k\}$  com  $z_k \in W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*)$ . Dessa maneira  $H$  é o conjunto  $\alpha$ -limite de  $W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*)$ , o qual é invariante. Como  $\Lambda$  é transitivo, então  $\Lambda = \omega(p)$  para algum  $p \in \Lambda$ , e portanto  $\Lambda$  é invariante. Note que  $W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*) \subset W_\varepsilon^{ss}(x^*) \subset \Lambda$ , logo  $W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*) \subset \Lambda$ , e assim  $H \subset \Lambda$ .

- Suponhamos que  $H$  contenha uma singularidade  $\sigma$ . Então existem  $\{t_n \rightarrow -\infty\}$  e  $\{z_k\}$  com  $z_k \in W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*)$ , tais que:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(z_k).$$

Como  $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$W_\delta^{ss}(z_k) \subset W_{\varepsilon^*}^{ss}(x^*).$$

Como  $W^{ss}(\Lambda)$  se contrai e  $W_\delta^{ss}(z_k) \subset \Lambda$ , por  $\Lambda$  ser invariante

$$W_\delta^{ss}(X_{t_n}(z_k)) \subset \Lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja  $\psi$  a função que associa a cada  $x \in \Lambda$  uma bola de raio  $\delta$  centrada em  $x$ , contida em  $W^{ss}(x)$ . Esta função é contínua para todo  $\delta > 0$  fixo. Assim usando a continuidade do fluxo e como tomamos nossa singularidade  $\sigma$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_\delta^{ss}(X_{t_n}(z_k)) = W_\delta^{ss}(\sigma).$$

Por  $\Lambda$  ser fechado, pois é compacto, temos que  $W_\delta^{ss}(\sigma) \subset \Lambda$ . Portanto:

$$W_\delta^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = W_\delta^{ss}(\sigma).$$

Mas como  $\Lambda$  é seccional hiperbólico e  $\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$ , então teremos que  $\Lambda \cap W_\delta^{ss} = \{\sigma\}$  isto implica que  $W_\delta^{ss} = \{\sigma\}$ , contradição já que  $\delta > 0$ .

- Suponhamos que  $H$  não contenha singularidades Como  $H$  é um conjunto invariante de um conjunto seccional hiperbólico, pelo Lema Hiperbólico 3.2.9 resulta que  $H$  é hiperbólico. Seja  $y \in \alpha(x^*)$ , então existe uma sequência  $\{t_n\} \rightarrow -\infty$  tal que  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(x^*)$ . O que vem a seguir segue do fato que as variedades estáveis variam continuamente com o

ponto.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{\delta}^{ss}(X_{t_n}(x^*)) = W_{\delta}^{ss}(y) \subset H.$$

Como  $H$  é hiperbólico, existe  $W^{uu}(H)$  com  $\dim(W^{uu}(z)) = \dim(E_{\Lambda}^c) - 1$  para todo  $z \in H$  e  $\dim(W_{\varepsilon^*}^{ss}(y)) = \dim(E_{\Lambda}^s)$  para  $y \in \alpha(x^*)$ . Então pelo Lema 4.1.4, existe  $\Delta > 0$ , tal que:

$$H \cap \text{Int} \left( \bigcup_{t \in [-\Delta, \Delta]} \bigcup_{z \in X_t(W_{\varepsilon^*}^{ss}(y))} W^{uu}(z) \right) \neq \emptyset$$

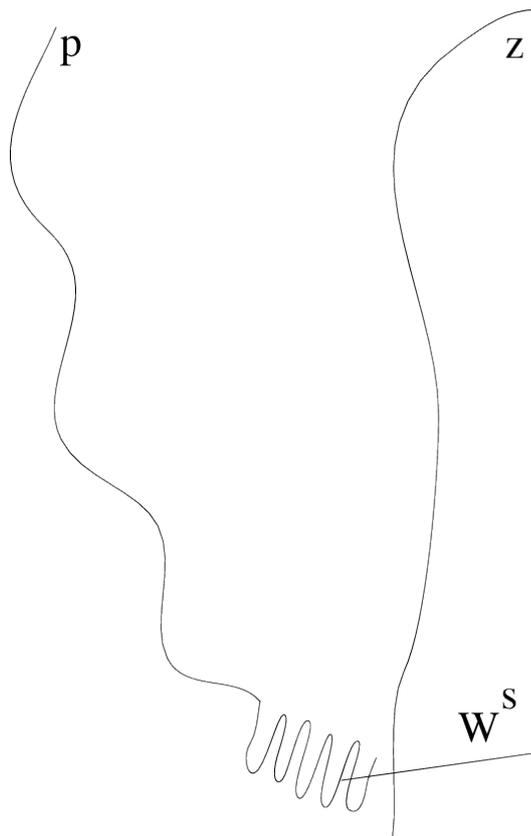
Como  $H \subset \Lambda$  e  $\Lambda = \omega(p)$ , então existem  $t^* > 0$  arbitrariamente grandes tais que:

$$X_{t^*}(p) \in \text{Int} \left( \bigcup_{t \in [-\Delta, \Delta]} \bigcup_{z \in X_t(W_{\varepsilon^*}^{ss}(y))} W^{uu}(z) \right)$$

Ou seja,  $X_{t^*}(p) \in W^{uu}(z)$  com  $z \in X_t(W_{\varepsilon^*}^{ss}(y))$  e  $t \in [-\Delta, \Delta]$ .

- 1) Se  $z \in H$ , então a órbita negativa de  $X_{t^*}(p)$  é assintótica à órbita negativa de algum ponto em  $H$ , e assim  $p \in H$ .
- 2) Se  $z \notin H$ , existe um  $t_n^*$  tal que  $X_{t_n^*}(z) \in H$  e, assim, a órbita negativa de  $X_{t^*}(p)$  é assintótica à órbita negativa de algum ponto em  $H$ , então  $p \in H$ .

Para concluir os itens acima usa-se o fato de que  $H$  é hiperbólico,  $W^s$  ter tamanho positivo e por  $W^s$  ser invariante portanto  $W^s \subset H$ .



**Figura 4.1:** Teorema 4.1.5

Pelo fato que  $p \in H$  implica que  $\omega(p) \subseteq H$ , então  $\Lambda = H$ , o qual é uma contradição, porque  $\Lambda$  possui singularidade e  $H$  não.  $\square$

## 4.2 LEMA DA CONEXÃO PARA FLUXOS SECCIONAL ANOSOV

Esta subseção foi extraída do artigo [7]. A prova do teorema pode ser encontrada neste artigo.

Denotaremos por  $W^s(\cdot)$  e  $W^u(\cdot)$  as usuais variedades estável e instável e por  $Sing(X)$  o conjunto das singularidades de  $X$ . Todos os campos vetoriais considerados nesta dissertação serão de classe  $C^1$ .

**Definição 4.2.1.** Dizemos que existe uma *trajetória* de um ponto  $x$  para um ponto  $y$  se existe  $t > 0$  tal que  $y = X_t(x)$ .

**Teorema 4.2.2 (Lema da Conexão para fluxos seccional Anosov).** *Se  $X$  é um fluxo seccional Anosov em uma variedade compacta tridimensional  $M$ ,  $p \in M(X)$  tenha um conjunto  $\alpha$ -limite*

não singular e  $q \in M$  satisfaz que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma trajetória de um ponto  $\varepsilon$ -próximo de  $p$  para um ponto  $\varepsilon$ -próximo de  $q$ , então existe um ponto  $x \in M$  tal que  $\alpha(x) = \alpha(p)$  e  $\omega(x)$  é uma singularidade ou  $\omega(q)$ .

Seguirá o Corolário que precisaremos para demonstrar o Corolário 5.2.2.

Denote por  $Cl(\cdot)$  o fecho e por  $Sing(X)$  o conjunto das singularidades do campo vetorial  $X$ .

**Corolário 4.2.3.** *Se  $H$  é um conjunto compacto invariante sem singularidades de um fluxo seccional Anosov em uma variedade compacta tridimensional, então  $Cl(W_H^u) \cap Sing(X) \neq \emptyset$ , se e somente se  $W^u(H) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$  para algum  $\sigma \in Sing(X)$ .*

**Demonstração.** Segue das hipóteses que existem uma singularidade e uma sequência  $x_n \rightarrow q$  tal que  $\alpha(x_n) \subset H$  para todo  $n$ . Tome um ponto aderente  $p$  de  $\bigcup_n \alpha(x_n)$ .

**Afirmção 4.2.4.** *Os pontos  $p$  e  $q$  satisfazem as hipóteses do Teorema 4.2.2*

**Prova da Afirmção 4.2.4** Se  $p \in Cl(\bigcup_n \alpha(x_n))$  então  $\alpha(p) = \{x \in M : \exists t_n \rightarrow -\infty; \phi_{t_n}(p) \rightarrow x\}$ . Dessa maneira existe  $y_n \in \bigcup_n \alpha(x_n)$  tal que  $y_n \rightarrow p$  e assim  $\phi_{t_n}(y_n) \rightarrow \phi_{t_n}(p) \rightarrow x$ . Por  $\alpha$ -limite ser invariante, resulta:  $x \in \bigcup_n \alpha(x_n)$  e por hipótese  $\alpha(x_n) \subset H$  para todo  $n$  e como  $H$  não possui pontos singulares  $\alpha(p)$  não possui singularidades. A segunda parte da hipótese segue pela construção dos pontos  $p, q$  e é verificada utilizando sequências.  $\square$

Pela afirmação acima existe  $x \in M$  tal que  $\alpha(x) = \alpha(p)$  e  $\omega(x)$  é uma singularidade  $\sigma$ . Em particular  $x \in W^s(\sigma)$  e, visto que  $H$  é compacto, temos  $p \in H$ , dessa maneira  $\alpha(x) = \alpha(p) \subset H$  e então  $x \in W^u(H)$ . Então  $x \in W^u(H) \cap W^s(\sigma)$  e o resultado segue. Reciprocamente tendo por hipótese que  $W^u(H) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$  para algum  $\sigma \in Sing(X)$ , por  $W^s$  ser um conjunto invariante temos que  $\sigma \in W^s(\sigma)$  e já que  $W^u(H)$  intercepta em algum ponto a  $W^s(\sigma)$  podemos obter uma sequência de pontos os quais convergem para a singularidade  $\sigma$ , ou seja tomando o fecho de  $W^u$  este interceptará uma singularidade e segue:

$$Cl(W^u)(H) \cap Sing(X) \neq \emptyset.$$

$\square$

Aplicando este corolário para uma órbita periódica  $O$  obtemos o seguinte:

**Corolário 4.2.5.** *Se  $O$  é uma órbita periódica de um fluxo seccional Anosov  $X$  em uma variedade compacta satisfazendo  $Cl(W^u)(O) \cap Sing(X) \neq \emptyset$ , então existe  $\sigma \in Sing(X)$  tal que  $W^u(O) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ .*

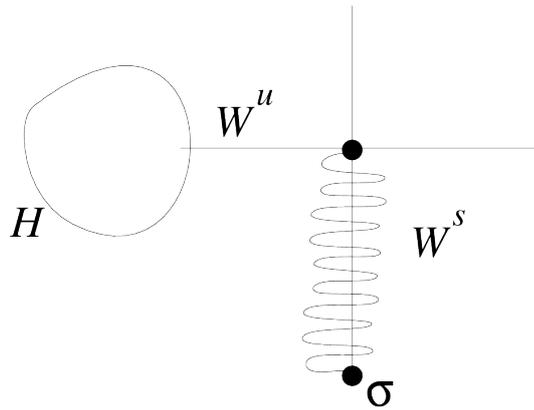


Figura 4.2: Teorema 4.2.3

### 4.3 CONSTRUÇÃO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL SINGULAR $S^t, S^b$ e $l^t, l^b$

Seja  $X$  um fluxo seccional Anosov sobre uma variedade compacta tridimensional  $M$ . Podemos supor que  $X$  possui uma singularidade tipo-Lorenz. Então o conjunto  $LSing(X) = \{\sigma \in Sing(X) : \sigma \text{ é tipo-Lorenz}\}$  não é vazio.

Temos que todo  $\sigma \in LSing(X)$  é hiperbólico e assim possui variedades estável e instável  $W^s(\sigma), W^u(\sigma)$  tangente em  $\sigma$  ao auto-espaço associado ao conjunto dos autovalores  $\{\lambda_2, \lambda_3\}$  e  $\{\lambda_1\}$ . Em particular,  $\dim(W^s(\sigma)) = 2$  e  $\dim(W^u(\sigma)) = 1$ .

Uma outra variedade, a variedade forte estável  $W^{ss}(\sigma)$ , está bem definida e tangente em  $\sigma$  ao auto espaço associado a  $\{\lambda_2\}$ . Consequentemente  $\dim(W^{ss}(\sigma)) = 1$ . Toma um sistema de

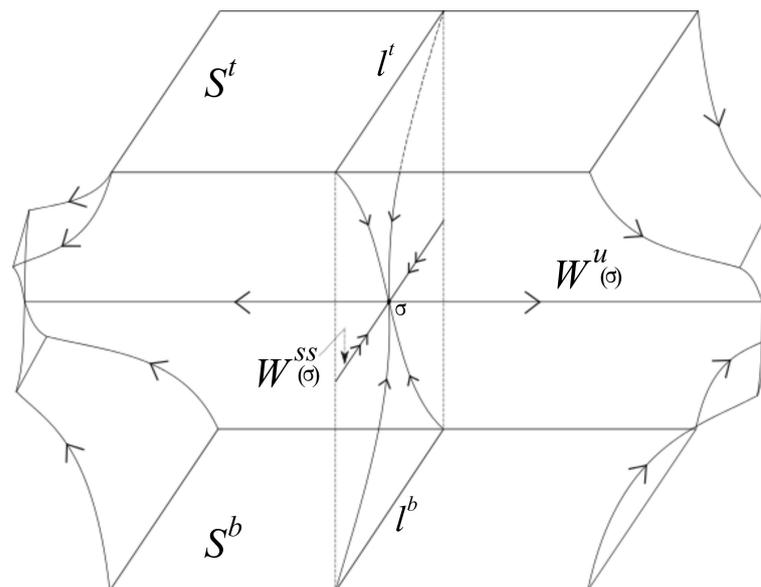


Figura 4.3:  $S^t$  e  $S^b$

coordenadas lineares  $(x_1, x_2, x_3)$  em uma vizinhança de  $\sigma$ .

Note que  $W^{ss}(\sigma)$  separa  $W^s(\sigma)$  em duas componente conexas, chamaremos, a superior e a base. Na componente superior consideramos o retângulo  $S_\sigma^t$  de  $X_t$  junto com a curva  $l_\sigma^t$ . Similarmente consideramos um retângulo  $S_\sigma^b$  e uma curva  $l_\sigma^b$  na componente da base.

Tomamos esses retângulos tal que a curva  $l_\sigma^*$  está contida em  $W^s(\sigma) \setminus W^{ss}(\sigma)$  para  $* = t, b$ . Além disso, ambos retângulos são retângulos folheados de  $X$ . O fluxo positivo das linhas começando em  $S_\sigma^t \cup S_\sigma^b \setminus (l_\sigma^t \cup l_\sigma^b)$  passa por uma vizinhança próxima de  $\sigma$ . Por outro lado, a órbita positiva começando em  $l_\sigma^t \cup l_\sigma^b$  segue diretamente a  $\sigma$ .

Notamos que o bordo de  $S_\sigma^*$  está formado por quatro curvas, duas delas transversais a  $l_\sigma^*$  e duas delas paralelas a  $l_\sigma^*$ . A união destas curvas no bordo de  $S_\sigma^*$  os quais são paralelas (resp. transversais) a  $l_\sigma^*$  é  $\partial^v S_\sigma^*$  (resp.  $\partial^h S_\sigma^*$ ).

Pelo Lema 3.2.11 podemos escolher  $S_\sigma^t, S_\sigma^b$  satisfazendo  $M(X) \cap \partial^h S_\sigma^* = \emptyset$  para  $* = t, b$ . Então a coleção

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma \in LSing(X)} \{S_\sigma^t, S_\sigma^b\}$$

é uma seção transversal singular com a curva singular

$$l_{\mathcal{S}} = \bigcup_{\sigma \in LSing(X)} (l_\sigma^t \cup l_\sigma^b).$$

Portanto  $\mathcal{S}$  pode ser construída perto de  $M(X)$ .

## 5 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PRINCIPAL

Com os resultados anteriores e com estes que apresentaremos, os quais foram extraídos do artigo de Morales [6], provaremos o Teorema Principal.

### 5.1 PRELIMINARES DO TEOREMA PRINCIPAL

**Proposição 5.1.1.** *Seja  $X$  um campo vetorial sobre uma variedade compacta  $M$  com todas suas singularidades hiperbólicas tipo sela. Se todo ponto em  $M$  é aproximado por pontos para os quais o omega-limite é uma singularidade, então  $X$  é sensível às condições iniciais.*

**Demonstração.** Como  $M$  é compacto então  $Sing(X)$  é finito. Isto vêm do fato de que todas as singularidades são hiperbólicas tipo sela, ou seja, cada ponto singular é isolado, isto vem pelo Lema Hiperbólico 3.2.9. Assim existe  $\delta > 0$  tal que o conjunto das  $\delta$ -bolas com centro em  $Sing(X)$  é dois a dois disjunto. Seja  $x \in M$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Por hipótese existem pontos  $(z_t) \in M$  tais que  $z_t \rightarrow x$  quando  $t \rightarrow \infty$ , onde temos também que

$$\omega(z_t) = \{y \in M : y = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{\tau_k}(z_t) \text{ para alguma sequência } \tau_k \rightarrow \infty\},$$

onde  $y \in M$  é uma singularidade.

Temos duas possibilidades  $x \in W^s(\sigma)$  para algum  $\sigma \in Sing(X)$  ou não.

No primeiro caso podemos selecionar  $y \in U$  fora da variedade estável das singularidades, visto que temos uma união finita de conjuntos bidimensionais numa variedade tridimensional, portanto possui interior vazio. Como a órbita positiva de  $x$  converge para  $\sigma$ , e de  $y$  não, eventualmente encontraremos  $t > 0$  tal que  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ .

No segundo caso, podemos escolher  $\sigma \in Sing(X)$  e  $y \in W^s(\sigma) \cap U$ , visto que a união das variedades estáveis das singularidades é densa por hipótese.

De fato, se temos que um ponto é aproximado por pontos cujo  $\omega$ -limite é uma singularidade. Isso significa que estes pontos pertencem à variedade estável da singularidade. Portanto em cada vizinhança de um ponto da variedade existem pontos da variedade estável de alguma singularidade. Se tomamos a união de todas as variedades estáveis, temos que é densa na variedade.

Novamente, afirmamos que a órbita positiva de  $y$  converge a  $\sigma$ , e que  $x$  não. Eventualmente encontramos  $t > 0$  tal que  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ . Isto prova o resultado.  $\square$

Por órbita fechada nos referimos a uma órbita que é singular ou periódica.

**Definição 5.1.2.** Um campo vetorial  $X$  com órbitas hiperbólicas fechadas possui *Propriedade (P)* se para toda órbita periódica  $O$  existe uma singularidade  $\sigma$  tal que  $W^u(O) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ .

O seguinte Lema relaciona *Propriedade (P)* com aproximação por pontos dos quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.

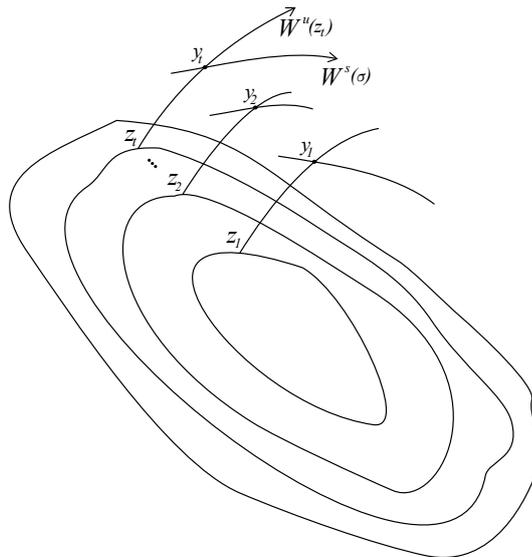
**Lema 5.1.3.** *Todo ponto no fecho das órbitas periódicas de um campo vetorial com a Propriedade (P) é acumulado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.*

**Demonstração.** Seja  $X_p$  um campo vetorial com a Propriedade (P). Seja  $x \in Cl(Per(X))$ . Então existe uma sequência de pontos  $(z_t) \in Per(X)$  tais que  $z_t \rightarrow x$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Aplicamos a Propriedade (P) a cada  $z_t$  e olhamos o  $W^u(z_t)$ , vemos que  $W^u(z_t) \cap W^s(\delta_t) \neq \emptyset$ . A cada interseção chamamos de  $y_t$ . Poderia acontecer que a distância entre os  $z_n$  e  $y_n$  seja sempre constante, dessa maneira não teríamos a  $y_n$  aproximando-se de  $x$ . Para isso tomamos o fluxo negativo nos pontos  $z_n$  e  $y_n$ , estes últimos se aproximarão de  $z_n$ . Além disto, tomando  $\tau_n$  o período de cada órbita que contém  $z_n$  e fazendo

$$X_{-k_n \tau_n}(z_n) \text{ e } X_{-k_n \tau_n}(y_n),$$

mantemos fixos os  $z_n$  e aproximamos os  $y_n$  destes. Dessa maneira para cada  $n$  podemos tomar  $k_n \tau_n$  tal que  $d(z_n, X_{-k_n \tau_n}(y_n)) < \frac{1}{n}$ .

Com isto a medida que  $z_n$  avança,  $y_n$  aproxima-se deste e já que a variedade estável é invariante  $X_{-k_n \tau_n}(y_n) \in W_{\delta_n}^s$ . Como podemos ver na Figura 5.1. e assim  $d(y_n, x) \rightarrow 0$ .  $\square$



**Figura 5.1:** Lema 5.1.3

## 5.2 PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL

**Teorema 5.2.1.** *Se  $X$  é um fluxo seccional Anosov com singularidade de  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ , então todo atrator de todo campo vetorial  $C^1$  próximo de  $X$  tem uma singularidade.*

Adiaremos a demonstração deste teorema para a próxima seção. Com este teorema obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 5.2.2.** *Se  $X$  é um fluxo seccional Anosov com singularidades de  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ , então todo campo vetorial perto de  $X$  tem a Propriedade (P).*

**Demonstração.** Pelo Corolário 4.2.5 é suficiente mostrar que  $Cl(W_Y^u(O)) \cap Sing(Y) \neq \emptyset$  para todo fluxo  $Y$  próximo de  $X$  e para toda órbita periódica  $O$  de  $Y$ . Suponha por contradição que existe  $Y$  perto de  $X$  com órbita periódica  $O$  tal que  $Cl(W_Y^u(O)) \cap Sing(Y) = \emptyset$ . Segue que  $Cl(W_Y^u(O))$  é um conjunto hiperbólico pelo Lema 3.2.9. Visto que  $W_Y^u$  é uma subvariedade bidimensional temos  $Cl(W_Y^u(O))$  é um sumidouro.

De fato, em volta da órbita periódica  $O$  pegamos um toro  $U = ST$ . Seja  $V = \bigcup_{t>0} X_t(U)$ . Temos que  $V$  é um bloco isolante e assim  $\bigcap_{t>0} X_t(V)$  é o fecho da variedade instável da órbita  $O$ .

Pela Teoria hiperbólica necessariamente ele contém um atrator (veja Corollary 6.4.13 de [22] e Proposition 5.3 [40]). Mas tal atrator não existe pelo Teorema 5.2.1.  $\square$

**Observação 5.2.1.** *Segue da Teoria da Variedade Invariante [19] que o sub-fibrado  $E_{M(X)}^S$  de  $X$  pode ser estendida continuamente para um sub-fibrado estável  $E_U^S$  em toda uma vizinhança*

$U$  de  $M(X)$ . Como o fluxo de  $X$  contrai  $M$  em  $M(X)$  podemos supor que uma vizinhança é o próprio  $M$ . Por outro lado isto nos dá que a soma direta  $E_M^s \oplus E_M^X$  é tangente a uma folheação singular estável  $W^s$ .

**Teorema 5.2.3.** *Se  $X$  é um fluxo seccional Anosov com a Propriedade (P) em  $M$  e  $x \in M$  não é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade, então  $\omega(x)$  possui uma partição singular de diâmetro arbitrariamente pequeno.*

**Demonstração.** Pela Proposição 3.3.2 temos que provar que para todo  $z \in \omega(x) \setminus \text{Sing}(X)$  existe uma seção transversal de diâmetro pequeno  $\Sigma_z$  tal que

$$z \in \text{Int}(\Sigma_z) \text{ e } \omega(x) \cap \partial\Sigma_z = \emptyset.$$

Antes precisamos apresentar uma afirmação que nos ajudará a desenvolver a demonstração.

**Afirmção 5.2.1.** Temos que  $\omega(x) \cap W^{ss}(z)$  possui interior vazio em  $W^{ss}(z)$  para todo  $z \in \omega(x)$ .

**Demonstração.** Suponhamos, por contradição, que  $\omega(x)$  contenha uma variedade estável forte local  $W_\varepsilon^{ss}(y)$ , para algum  $y \in \omega(x)$ . Temos dois casos: ou  $\omega(x)$  possui singularidades ou não. Caso não possua singularidades, então  $\omega(x)$  é hiperbólico pelo Lema 3.2.9. Utilizando a variedade instável do ponto  $y \in \omega(x)$ , tem-se que  $x \in \omega(x)$ .

Segue do Teorema 1 do artigo [31] que o ponto  $x$  é acumulado por órbitas periódicas ou por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.

Como pontos periódicos são aproximados por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade, segue que o mesmo acontece com o ponto  $x$ , gerando uma contradição.

Se  $\omega(x)$  possui singularidades, tem-se uma contradição com o Teorema 4.1.5. Provamos, assim, a afirmação.  $\square$

Dessa maneira podemos fixar para todo  $z \in \omega(x)$  um retângulo folheado de diâmetro pequeno  $R_z^0$  tal que  $z \in \text{Int}(R_z^0)$  e  $\omega(x) \cap \partial hR_z^0 = \emptyset$ . Se a órbita positiva de  $x$  intercepta  $\mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  infinitas vezes poderíamos ter que  $\omega(x)$  é uma órbita periódica.

Isto concluímos do fato de  $W^{ss}$  ser invariante assim se intercepta uma vez a órbita ficará confinada ali, logo não podemos ter infinitos pontos. Em tal caso o resultado é trivial.

Podemos supor que a órbita positiva de  $x$  não intercepta  $\mathcal{F}^s(z, R_z^0)$ . Então este intercepta apenas uma ou as duas componentes conexas de  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$ .

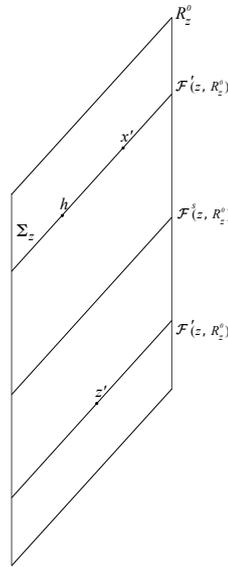
Se a órbita positiva intercepta só uma componente selecionamos algum ponto  $x'$  da órbita positiva dentro dessa componente, um ponto  $z'$  na outra componente e definimos  $\Sigma_z$  como o sub

retângulo de  $R_z^0$  limitado por  $\mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  e  $\mathcal{F}^s(z', R_z^0)$ . Desde que a órbita positiva não passa através da componente conexa.  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  contendo  $z'$  temos que  $\omega(q) \cap \mathcal{F}(x', R_z^0) = \emptyset$ . Agora suponha por enquanto que existe  $h \in \omega(x) \cap \mathcal{F}^s(x', R_z^0)$ .

Visto que  $\omega(x) \subset \Omega(X)$  o melhorado lema do fechamento para fluxos seccional Anosov 4.2.2 e Lema 5.1.3, como vimos nos teoremas anteriores, implicam que  $h$  é acumulado por pontos para o qual o conjunto omega-limite é uma singularidade.

Já que a variedade estável possui tamanho uniformemente estável grande como vimos no Teorema 3.4.2. Temos que  $x'$  também é acumulado por pontos para o qual o conjunto omega-limite é uma singularidade. Isto implica o mesmo para  $x$ , uma contradição. Dessa maneira  $\omega(x) \cap \mathcal{F}^s(x', R_z^0) = \emptyset$ .

Como  $\partial^h \Sigma_z \subset \partial^h R_z^0$  e  $\partial^v \Sigma_z = \mathcal{F}^s(z', R_z^0) \cup \mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  temos que  $\Sigma_z$  possui as propriedades necessárias. No caso quando a órbita positiva intercepta ambas componentes de  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  escolhemos dois pontos  $x', x''$  daquela órbita, em cada componente conexa, e definimos  $\Sigma_z$  como o retângulo de  $R_z^0$  limitado por  $\mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  e  $\mathcal{F}^s(x'', R_z^0)$ . A ideia é tomar  $h_1$  e  $h_2$  pertencendo a  $\mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  e  $\mathcal{F}^s(x'', R_z^0)$  respectivamente. Repetindo o argumento acima vemos que  $\omega(x) \cap (\mathcal{F}^s(x', R_z^0) \cup \mathcal{F}^s(x'', R_z^0)) = \emptyset$ . Assim  $\Sigma_z$  satisfaz as condições exigidas. Isto completa a prova.



**Figura 5.2:** Teorema 5.2.3

□

**Teorema 5.2.4.** *Seja  $X$  um fluxo seccional Anosov com a Propriedade (P) de  $M$ . Então, todo ponto de  $M$  é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.*

**Demonstração.** Suponha por contradição que existam um fluxo seccional Anosov  $X$  com a Propriedade (P) sobre uma superfície compacta tridimensional  $M$  e  $x \in M$  o qual não é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega - limite é uma singularidade. Em particular  $\omega(x)$  não é uma singularidade. Como  $X$  tem a Propriedade (P) podemos aplicar o Teorema 5.2.3 para encontrar em partição singular  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  de  $\omega(x)$  perto deste. Por outro lado, já que  $x$  não é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade, podemos fixar um intervalo aberto  $I$  ao redor de (perto de)  $x$  (que contenha  $x$ ), ou seja, passando por este, tangente a  $E^c$  e ortogonal a  $E^X$  tal que

$I$  não intercepte a variedade estável de nenhuma singularidade. Isto segue do argumento do início da prova do Teorema 5.2.3.

Por outro lado, como  $\omega(x)$  não é uma singularidade, podemos encontrar  $S \in \mathcal{R}$ , uma sequência  $x_n \in S$  de pontos na órbita positiva de  $x$  e uma sequência de intervalos  $J_n \subset S$  na órbita positiva de  $I$  com  $x_n \in J_n$  tal que se  $J_n^+$  e  $J_n^-$  são componentes conexas de  $J_n \setminus \{x_n\}$  então ambas sequências

$$\{L(J_n^+) : n = 1, 2, 3, \dots\} \text{ e } \{L(J_n^-) : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

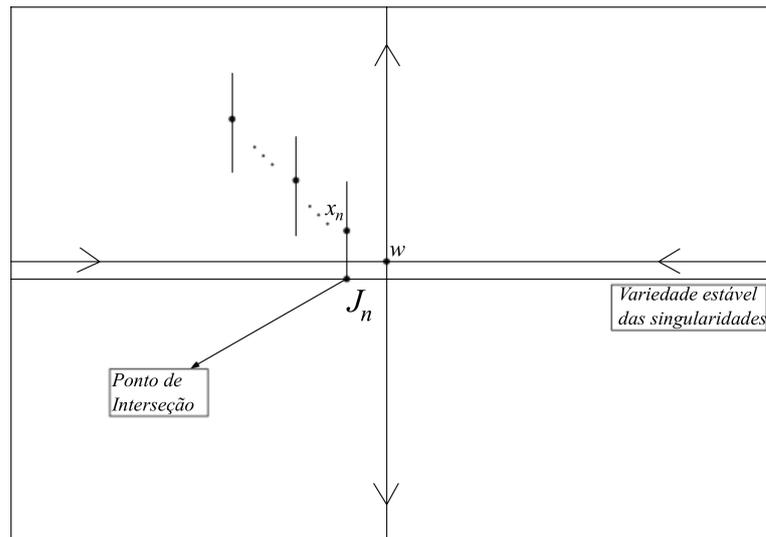
são limitadas inferiormente por um número maior que zero, ou seja  $L(J^\pm) \geq c > 0$ . Não se contraem pois não estão na variedade estável.

Tomando um ponto limite  $w \in S$  de  $x_n$ , então  $w \in \omega(x) \cap \text{Int}(S)$  visto que  $S$  é uma partição singular. Já que  $I$  é tangente a  $E^c$  a sequência de intervalos  $J_n$  converge a um intervalo  $J$  tangente a  $E_w^c \cap T_w S$  na topologia  $C^1$ . Temos que  $J$  é não degenerado  $\{L(J_j^+) : j = 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\{L(J_j^-) : j = 1, 2, 3, \dots\}$  são limitados inferiormente por uma constante  $c > 0$ , segue por limite de sequência.

Segue dos limites inferiores e  $x_j \rightarrow w$  então  $J_n$  intercepta  $W^s(w)$  para um  $n$  grande.

Agora,  $w$  é não errante, por construção, pois é omega-limite de pontos que estão confinados em  $S$ , caso seja errante este ponto sai de  $S$ . Temos do melhorado lema do fechamento para fluxos seccional Anosov 4.2.2 e Lema 5.1.3 que  $w$  é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega limite é uma singularidade.

Segue então da dependência contínua da variedade estável que existe um ponto de interseção entre  $J_n$  e a variedade estável de uma singularidade, como vemos na Figura 5.3. Já que as variedades estáveis das singularidades são fluxos invariantes obtemos que a partir destes pontos caminhamos para trás e já que se intercepta com um ponto invariante esta propriedade segue até chegarmos no  $I$ . Isto contradiz a escolha de  $I$  e a prova segue.



**Figura 5.3:** Teorema 5.2.4

□

**Prova do Teorema Principal.** Seja  $X$  um fluxo seccional Anosov de uma variedade compacta tridimensional  $M$  tal que  $\Omega(X) = M(X)$ . Se  $X$  não tem singularidades, então  $M(X)$  é um atrator hiperbólico, isto vimos no Lema Hiperbólico 3.2.9. Portanto sensível às condições iniciais para campos vetoriais bem perto, isto vimos no Corolário 2.1.16.

Portanto podemos supor que  $X$  tem uma singularidade. Em particular todo campo vetorial  $C^1$  perto de  $X$  também possui uma singularidade. Pelo Corolário 5.2.2 temos que todo campo vetorial  $C^1$  perto de  $X$  também possui a Propriedade (P).

Disto todos esses campos vetoriais também são seccional Anosov, temos pelo Teorema 5.2.4 que todos eles satisfazem que todo ponto é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.

Daí as singularidades do fluxo seccional Anosov são todas hiperbólicas do tipo sela. Portanto podemos aplicar a Proposição 5.1.1 para concluir que todos esses campos vetoriais são sensíveis às condições iniciais e isto termina a prova.

### 5.3 PROVA DO TEOREMA 5.2.1

Apresentamos um Lema que nos auxiliará na prova deste Teorema. A resolução pode ser encontrada em [31], onde este Lema é o Corolário 1.

**Lema 5.3.1.** *Seja  $X$  um fluxo seccional Anosov com singularidades de  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ . Então, todo ponto não errante de  $X$  é aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade.*

**Demonstração do Teorema 5.2.1** A prova do Teorema é feita por contradição, a saber, supomos que existe um fluxo seccional Anosov  $X$  de  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$  o qual é o limite de uma sequência de fluxos  $X^n$  cada um exibindo um atrator sem singularidades  $A^n$ . Claramente podemos supor cada  $X^n$  é seccional Anosov, e assim,  $A^n$  é um atrator hiperbólico  $X^n$  para todo  $n$ .

**Afirmção 5.3.2.**

$$\text{Sing}(X) \cap \text{Cl} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n \right) \neq \emptyset.$$

**Demonstração.** Caso contrário, existe  $\delta > 0$  tal que

$$B_\delta(\text{Sing}(X)) \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n \right) = \emptyset. \quad (5.1)$$

Defina

$$H = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t \left( M \setminus B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(X)) \right).$$

Temos que  $\text{Sing}(X) \cap H = \emptyset$  e assim  $H$  é um conjunto hiperbólico, por ser compacto e pelo Lema 3.2.9. Denote por  $E^s \oplus E^X \oplus E^u$  a decomposição hiperbólica correspondente. Por [19] podemos fixar vizinhanças compactas  $V, W$

$$H \subset \text{Int}(V) \subset V \subset \text{Int}(W) \subset W$$

de  $H$  e  $\varepsilon > 0$  tal que se  $Y$  é um campo vetorial que está próximo de  $X$  na topologia  $C^1$  e  $H_Y$  é um conjunto compacto invariante de  $Y$  em  $W$  então:

1)  $H_Y$  é hiperbólico e sua decomposição hiperbólica  $E^{s,Y} \oplus E^Y \oplus E^{u,Y}$  satisfaz

$$\dim(E^u) = \dim(E^{u,Y}), \quad \dim(E^s) = \dim(E^{s,Y}).$$

2) As variedades locais instáveis fortes  $W_Y^{uu}(y, \varepsilon)$ ,  $y \in H_Y$ , são unidimensionais de tamanho uniforme  $\varepsilon$ .

Afirmamos que  $A^n \subset W$  para todo  $n$  grande. De fato, suponha por contradição que isto não seja verdade. Então existem sequências  $n_k \rightarrow \infty$  e  $x^{n_k} \in A^{n_k}$  tal que  $x^{n_k} \notin W$  para todo  $k$ . Visto que

$M$  é compacto podemos supor que  $x^{n_k} \rightarrow x$  para algum  $x \in M$ . Portanto  $x \in M \setminus \text{Int}(W)$  e assim  $x \notin V$ . Então, visto que

$$H = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t \left( M \setminus B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(X)) \right)$$

e  $H \subset V$ , podemos encontrar um  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $X_t(x) \in B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(x))$  para algum  $k$  grande. Por outro lado,  $X^n \rightarrow X$  e  $x^{n_k} \rightarrow x$  então

$$X_t^{n_k}(x^{n_k}) \rightarrow X_t(x).$$

Assim  $X_t^{n_k} \in B_{\frac{\delta}{2}}$  para  $k$  grande. Entretanto,  $A^n$  é  $X^n$ -invariante assim  $X_t^{n_k}(x^{n_k}) \in A^{n_k}$  onde temos

$$X_t^{n_k}(x^{n_k}) \in A^{n_k} \cap B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(X))$$

e assim  $A^{n_k} \cap B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(X)) \neq \emptyset$ .

Contradizendo a Equação (5.1). Portanto a afirmação é verdadeira.

Como  $X^n \rightarrow X$  e pelo item 2 com  $Y = X^n$  e  $H_Y = A^n$  implica que  $W_{X^n}^{uu}(y, \varepsilon)$  possui tamanho uniforme  $\varepsilon$  para todo  $y \in A^n$  e  $n$  grande. Tome  $x_n \in A^n$  convergindo para algum  $x \in M$ . Claramente  $x \in H$ . Note que os vetores tangentes da curva  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon)$  em todo  $c \in W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon)$  permanecem em  $E_c^{u, X^n}$ . Como  $X^n \rightarrow X$  o ângulo entre as direções  $E^{u, X^n}$  e  $E^u$  vai para zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Seguem que as variedades  $W_X^{uu}(x, \varepsilon)$  e  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon)$  são quase paralelas quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $x^n \rightarrow x$  concluímos que

$$W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon) \rightarrow W_X^{uu}(x, \varepsilon),$$

no sentido de variedades  $C^1$ . Fixe um intervalo aberto  $I \subset W_X^{uu}(x, \varepsilon)$  contendo  $x$ . Temos que  $I \subset M(X)$ . Visto que  $\Omega(X) = M(X)$  e  $I \subset M(X)$  temos que  $I \subset \Omega(X)$ . Então pelo Lema 5.1.3, todo ponto de  $I$  pode ser aproximado por pontos para os quais o conjunto omega-limite é uma singularidade. Visto que  $I$  é um intervalo e a variedade estável possui tamanho uniformemente grande, temos que  $I$  intercepta a variedade estável de uma singularidade em algum ponto  $q$ . Disto obtemos  $T > 0$  tal que

$$X_T(q) \in B_{\frac{\delta}{5}}(\text{Sing}(X)).$$

Então, existe um conjunto aberto  $V_q$  contendo  $q$  tal que

$$X_T(V_q) \subset B_{\frac{\delta}{5}}(\text{Sing}(X)).$$

Como  $X^n \rightarrow X$ , temos

$$X_T^n(V_q) \subset B_{\frac{\delta}{4}}(\text{Sing}(X)) \quad (5.2)$$

Para um  $n$  grande. Mas  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon) \rightarrow W_X^{uu}(x, \varepsilon)$ ,  $q \in I \subset W_X^{uu}(x, \varepsilon)$ ,  $q \in V_q$  e  $V_q$  é aberto. Então

$$W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon) \cap V_q \neq \emptyset.$$

Para todo  $n$  grande. Aplicando a Equação (5.2) para  $X^n$  para  $n$  grande temos

$$X_T^n(W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon)) \cap B_{\frac{\delta}{4}}(\text{Sing}(X)) \neq \emptyset.$$

Como  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \varepsilon) \subset W_{X^n}^u(x^n)$  a invariância de  $W_{X^n}^u(x^n)$  implica

$$W_{X^n}^u(x^n) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(\text{Sing}(X)) \neq \emptyset.$$

Mas  $W_X^u(x^n) \in A^n$  e  $A^n$  é um atrator, então

$$A^n \cap B_{\delta}(\text{Sing}(X)) \neq \emptyset.$$

Contradizendo a Equação (5.1). Segue assim o resultado. Fim da demonstração da Afirmação 5.3.2.  $\square$

Continuemos com a prova do Teorema. Pela afirmação anterior podemos escolher

$$\sigma \in \text{Sing}(X) \cap Cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n\right).$$

Como  $Cl(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n) \subset M(X)$  temos:

$$\sigma \in \text{Sing}(X) \cap M(X),$$

daí temos que  $\sigma$  é tipo-Lorenz e satisfaz:

$$M(X) \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Sejam  $S^t = S_{\sigma}^t$  e  $S^b = S_{\sigma}^b$  as seções transversais singulares associada a  $\sigma$ . Em particular

$$M(X) \cap (\partial^h S^t \cup \partial^h S^b) = \emptyset.$$

Como  $X^n \rightarrow X$  temos que  $S^t, S^b$  são seções transversais singulares de  $X^n$  também. Pelo Teorema da Função Implícita podemos supor que  $\sigma(X^n) = \sigma$ , onde  $\sigma(X^n)$  é a continuação de  $\sigma = \sigma(X)$ . Além disso

$$I^t \cup I^b \subset W_{X^n}^s(\sigma), \forall n$$

O sub-fibrado unidimensional  $E^s$  de  $X$  estende-se para um sub-fibrado invariante contrator em  $M$ . Tome uma extensão contínua (mas não necessariamente invariante) de  $E^c$ . Ainda denotamos por  $E^s \oplus E^c$  a extensão mencionada acima.

Pela Teoria de Variedades Invariantes [19] segue que a decomposição  $E^s \oplus E^c$  persiste para pequenas perturbações de  $X$ . Mais precisamente, para todo  $n$  grande o fluxo  $X^n$  possui uma decomposição  $E^{s,n} \oplus E^{c,n}$  sobre  $U$  tal que  $E^{s,n}$  é uma contração invariante.  $E^{s,n} \rightarrow E^s$  e  $E^{c,n} \rightarrow E^c$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em particular  $E^{s,n} \oplus E^{c,n}$  está definido em  $S^t \cup S^b$  para todo  $n$  grande. No que segue denotaremos por  $E^Y$  o sub-fibrado em  $TM$  gerado por um fluxo  $Y$  em  $M$ . A condição de dominância implica que, para  $* = t, b$ , temos

$$T_x S^* \cap (E_x^s \oplus E_x^c) = T_x l^*,$$

para todo  $x \in l^*$ .

Denote por  $\angle(E, F)$  o ângulo entre dois subespaços lineares. A última equação implica que existe um  $\rho > 0$  tal que

$$\angle(T_x S^* \cap E_x^c, T_x l^*) > \rho,$$

para todo  $x \in l^*$  ( $* = t, b$ ). Mas  $E^{c,n} \rightarrow E^c$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então para todo  $n$  grande temos

$$\angle(T_x S^* \cap E_x^{c,n}, T_x l^*) > \frac{\rho}{2}, \quad (5.3)$$

para todo  $x \in l^*$  (novamente  $* = t, b$ ).

Fixe  $* = t, b$  e um sistema de coordenadas  $(x, y) = (x^*, y^*)$  em  $S^*$  tal que

$$S^* = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad l^* = \{0\} \times [-1, 1]$$

com respeito a  $(x, y)$ .

Denote por  $\Pi^* : S^* \rightarrow [-1, 1]$  a projeção

$$\Pi^*(x, y) = x.$$

e para  $\Delta > 0$  definimos

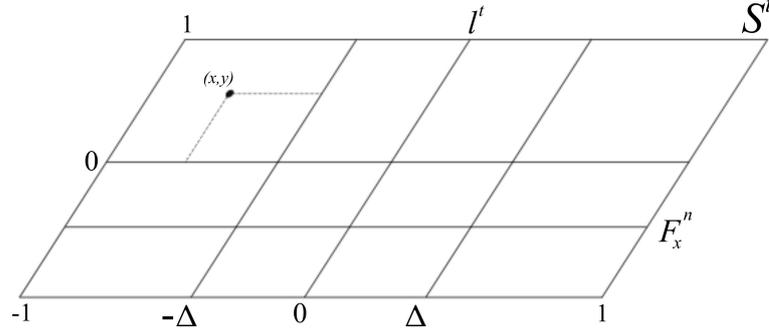
$$S^{*,\Delta} = [-\Delta, \Delta] \times [-1, 1]$$

Define o campo de linhas  $F^n$  em  $S^{*,\Delta}$  por:

$$F_x^n = T_x S^* \cap E_x^{c,n}, \quad x \in S^{*,\Delta}.$$

A continuidade de  $E^{c,n}$  e a Equação (5.3) implicam que  $\exists \Delta_0 > 0$  tal que  $\forall n$  grande a linha  $F^n$  é

transversal à  $\Pi^*$ .



**Figura 5.4:**  $S^{*,\Delta}$

Agora relembremos que  $A^n$  é um atrator hiperbólico de  $X^n$  para todo  $n$ . Segue que as órbitas periódicas de  $X^n$  em  $A^n$  são densas em  $A^n$ . Então, como  $\sigma \in Cl(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n)$ , existe uma sequência de órbitas periódicas  $O_n \in A^n$  acumulando-se em  $\sigma$ . Segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$O_{n_0} \cap Int(S^{t, \Delta_0}) \neq \emptyset \text{ ou } O_{n_0} \cap Int(S^{b, \Delta_0}) \neq \emptyset.$$

Visto  $O_{n_0} \subset A_{n_0}$  concluímos que

$$A^{n_0} \cap Int(S^{t, \Delta_0}) \neq \emptyset \text{ ou } A^{n_0} \cap Int(S^{b, \Delta_0}) \neq \emptyset.$$

Denotamos  $Z = X^{n_0}$ ,  $A = A^{n_0}$ ,  $F = F^{n_0}$  por simplicidade.

Podemos supor que  $A \cap Int(S^t, \Delta_0) \neq \emptyset$ . Note que  $\partial^h S^{t, \Delta_0} \subset \partial^h S^t$  por definição. Então

$$A \cap \partial^h S^{t, \Delta_0} = \emptyset.$$

Denotamos  $S = S^{t, \Delta_0}$ ,  $(x, y) = (x^t, y^t)$ ,  $l = l^t$  e  $\Pi = \Pi^t$  por simplicidade. Note que  $A \cap S$  é fechado, logo compacto por pertencer a  $A$  e não vazio pelo que vimos acima. Então existe  $p \in S \cap A$  tal que

$$dist(\Pi(S^t \cap A), 0) = dist(\Pi(p), 0) > 0 \quad (5.4)$$

pois  $p \notin l^t$ , onde  $dist$  denota a distância em  $[-\Delta_0, \Delta_0]$ .

Agora,  $p \in A$  e assim  $W_Z^u(p)$  é uma subvariedade bidimensional bem definida. A condição de dominância do seccional hiperbólico implica que:

$$T_z(W_Z^u(p)) = E_z^c, \forall z \in W_Z^u(p)$$

Assim

$$T_Z(W_Z^u(p)) \cap T_Z S = E_Z^c \cap T_Z S = F_Z$$

para todo  $z \in W_Z^u(p) \cap S$ . Como a interseção entre  $W_Z^u(p)$  e  $S$  é transversal, e ambos são bidimensionais, temos que  $W_Z^u(p) \cap S$  contém uma curva  $C$  cujo interior contém  $p$ . A última equação implica que  $C$  é tangente a  $F$ . Como  $F$  é transversal a  $\Pi$  temos que  $C$  é transversal a  $\Pi$ . Concluimos que  $\Pi(C)$  contém um intervalo aberto  $I \subset [-\Delta_0, \Delta_0]$  com  $\Pi(p) \in \text{Int}(I)$ . Então existe  $z_0 \in C$  tal que

$$\text{dist}(\Pi(z_0), 0) < \text{dist}(\Pi(p), 0).$$

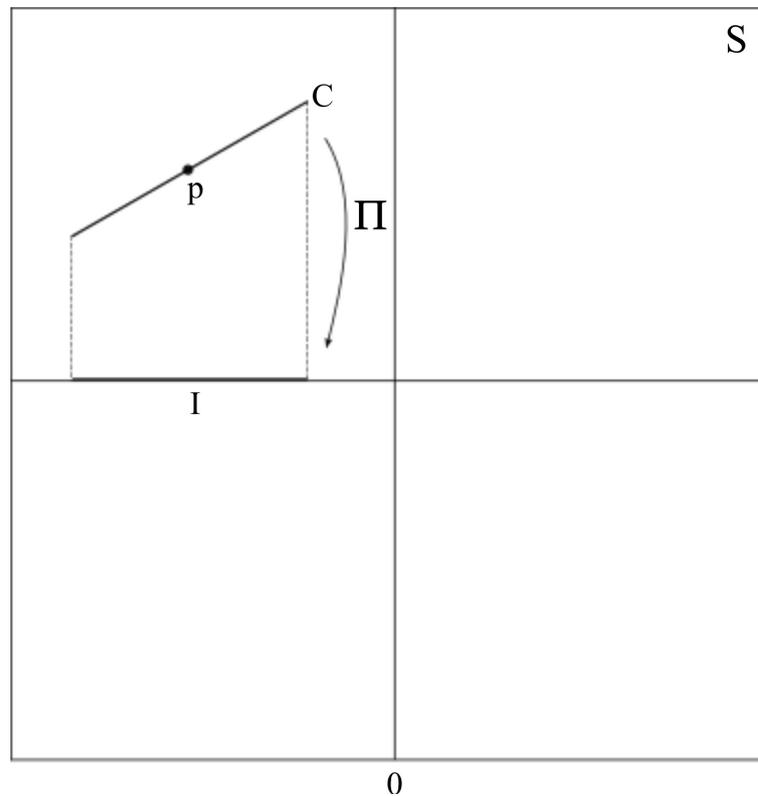
Note que  $C \subset S \cap A$  visto que  $A$  é um atrator de  $Z$  e assim contém suas variedades instáveis. Além disso,  $p \in A$  e  $C \subset W_Z^u(p)$ . Assim pela minimalidade de  $p$ , temos que a desigualdade (5.4) é uma contradição implicando

$$\text{dist}(\Pi(S \cap A), 0) = 0.$$

Como  $A$  é fechado a última equação implica

$$A \cap I' \neq \emptyset$$

Visto que  $I' \subset W_Z^s(\sigma)$  e  $A$  é fechado invariante para  $Z$  concluimos que  $\sigma \in A$ . No entanto isto



**Figura 5.5:** Teorema 5.2.1

é impossível visto que  $A$  é um atrator hiperbólico. Assim segue o resultado. □

## *Referências Bibliográficas*

- [1] AFRAIMOVICH, Valentin S.; BYKOV, V. V.; SHILNIKOV, Leonid P.. On the appearance and structure of the Lorenz attractor. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, v. 234, p. 336-339, 1977.
- [2] AFRAIMOVICH, Valentin. S.; BYKOV, V.V; SHILNIKOV, Leonid P.. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. (Russian) *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, v. 44, p. 150-212, 1982.
- [3] ALVES, José F.; ARAÚJO, Vítor; SAUSSOL, Benoit. On the uniform hyperbolicity of some nonuniformly hyperbolic systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, n. 4, p. 1302-1309, 2003. MR1948124(2003k:37046)
- [4] ANOSOV, Dmitri V.. Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 145 p. 707-709, 1962.
- [5] ARAUJO, Vítor; PACÍFICO, Maria J. *Three-Dimensional Flows*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, v. 53. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010, doi: 10.1007/978-3-642-11414-4.
- [6] ARBIETO, Alexandre.; MORALES, Carlos A.; SENOS, Laura. On the sensitivity of sectional-Anosov flows. *Mathematische Zeitschrift*, p. 545-557, Nov 2010, doi: 10.1007/s00209-010-0811-5.
- [7] BAUTISTA, Serafin.; MORALES, Carlos A.. A sectional-Anosov connecting lemma. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 30, p. 339-359, Jul 2009, doi: 10.1017/SO1433857090000157.
- [8] BAUTISTA, Serafin.; MORALES, Carlos A.. *Lectures on sectional-Anosov flows*. Disponível em: <[http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE\\_D/2011/86.html](http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_D/2011/86.html)>. Acesso em: 10 jun. 2013.
- [9] BONATTI, Christian; PUMARIO, A.; VIANA, Marcelo. Lorenz attractors with arbitrary expanding dimension. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325(8) Série I Math, p. 883-888, 1997.
- [10] BOWEN, Rufus. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. *Lecture Notes in Mathematics*, v.470, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.
- [11] CAMACHO, César e LINS NETO, Alcides. *Teoria Geométrica das Folheações*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides).
- [12] CAO, Yongluo. Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity. *Nonlinearity*, v. 16, n. 4, p. 1473-1479, 2003. MR1986306 (2005g:37061)
- [13] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides).

- [14] ESTEVEZ, Gabriela A. *Varietad estable fuerte para conjuntos seccionales hiperbólicos*. Dissertação (Maestría en Ciencias Matemáticas)—Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C. 2011
- [15] GUCKENHEIMER, John. A strange, strange attractor. In *The Hopf bifurcation theorem and its applications*, p. 368-381, Springer Verlag, 1976.
- [16] GUCKENHEIMER, John.; WILLIAMS, Robert F.. Structural stability of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, t. 50, p. 59-72, 1979.
- [17] HÉNON, Michel. A two dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, p. 67-77, 1976.
- [18] HIRSCH, Morris W.. Differential Topology, *Graduate Texts in Mathematics*, v. 33, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [19] HIRSCH, Morris W.; PUGH, Charles. C.. Stable manifolds and hyperbolic sets. *Proceedings of the American Mathematical Society Symp. Pure Math.* v. 9, p. 133-163, 1970, MR 42:6872
- [20] HIRSCH, Morris W.; PUGH, Charles; SHUB, Michael. Invariant manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 76, p. 1015-1019, 1970.
- [21] HIRSCH, Morris W.; PUGH, Charles C.; SHUB, Michael. Invariant manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, v. 583, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [22] KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. (English summary) with a supplementary chapter by Anatole Katok and Leonardo Mendoza, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, n. 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [23] LABARCA, Rafael E.; PACÍFICO, Maria J. Stability of singular horseshoes. *Topology*, v. 25, p. 337-352, 1986.
- [24] LI, Ming; GAN, Shaobo; WEN, Lan. Robust transitive singular sets via approach of an extended linear Poincaré flow. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, v. 13(2), p. 239-269, 2005.
- [25] LIMA, Elon L. *Curso de Análise: volume 2*. 11 e.d. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999. (Projeto Euclides).
- [26] LIMA, Elon L. *Espaços Métricos*. 2 e.d. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983. (Projeto Euclides).
- [27] LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal American Meteorological Society*, v. 20, p. 130-141, 1963.
- [28] METZGER, Roger J.; MORALES, Carlos A.. Sectional-hyperbolic systems. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, v. 28, p. 1587-1597, 2008.
- [29] MORALES, Carlos A.. A singular-hyperbolic closing lemma. *Michigan Mathematical Journal*, v. 56(1), p. 29-53, 2008.

- [30] MORALES, Carlos A.; PACÍFICO, Maria J.; PUJALS, Enrique R.. Singular Hyperbolic Systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 127, p. 3393-3401, Mai, 1999
- [31] MORALES, Carlos A.. An improved sectional-Anosov closing lemma. *Mathematische Zeitschrift*, p. 317-327, Jan, 2010, doi: 10.1007/s00209-010-0673-x
- [32] MORALES, Carlos A.; PACÍFICO, Maria J.; PUJALS, Enrique R.. On  $C^1$  robust singular transitive sets for three-dimensional flows. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série I, p. 81-86, 1998.
- [33] MORALES, Carlos A.; PACÍFICO, Maria J.; PUJALS, Enrique R.. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. *Annals of Mathematics*, v. 160, p. 375-432, 2004.
- [34] MORALES, Carlos A.. Examples of singular-hyperbolic attracting sets. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, v. 22(3), p. 339-349, 2007.
- [35] MORALES, Carlos A., PACÍFICO Maria J.. Mixing attractors for 3-flows. *Nonlinearity*, v. 14, n. 2, p. 359-378, 2001, doi:10.1088/0951-7715/14/2/310.
- [36] NODA, Takeo. Projectively Anosov flows with differentiable (un)stable foliations. *Annales de l'institut Fourier*, tome 50, n° 5, p. 1671-1647, 2000.
- [37] PALIS, Jacob Jr.; MELO, Wellington de. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Translated by A. K. Manning. New York: Springer Verlag Inc, 1982.
- [38] PUGH, Charles C.. An improved Closing Lemma and a General Density Theorem. *American Journal of Mathematics*, v. 89 n. 4, p. 1010-1021, 1967. doi:10.2307/2373414.
- [39] PUGH, Charles C.. The Closing Lemma *American Journal of Mathematics*, v. 89, p. 956-1009, 1967.
- [40] ROBINSON, Clark. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. Boca Raton, Florida: CRC Press, Inc 1995.
- [41] SAMBARINO, Martín. *Introducción a los Sistemas Dinámicos*. Disponível em: <<http://www.premat.fing.edu.uy/papers/2009/117.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2013.
- [42] SMALE, Stephen. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 73, p. 747-817, 1967.
- [43] TURAEV, D. V.; SHILNIKOV, Leonid P.. An example of a wild strange attractor. *Mat. Sb.*, v. 189(2), p. 137-160, 1998. (in Russian with Russian summary). Engl. Transl. *Sb. Math.*, v. 189 (2), pag. 291-314, 1998, doi: 10.4213/sm300.
- [44] TUCKER, Warwick. The Lorenz attractor exists. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série I, p. 1197-1202, 1999.
- [45] VIANA, Marcelo. What's new on Lorenz strange attractors?. *Math. Intelligencer*, v. 22, n. 3, p. 6-19, 2000. MR1773551 (2001h:37068)
- [46] VIVIER, T.. Projective hyperbolicity and fixed points. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, v.26(3), p. 923-936, 2006.

- [47] WILLIAMS, Robert F.. The structure of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, n. 50, p. 73-99, 1979.