

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
CURSO DE ESTATÍSTICA

Priscila Gregório Bernardo

**Planejamento econômico de Gráficos de Controle \bar{x} com modelo de falha
de Poisson**

JUIZ DE FORA

2011

Priscila Gregório Bernardo

PLANEJAMENTO ECONÔMICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE \bar{x} COM
MODELO DE FALHA DE POISSON

Monografia apresentada ao curso de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador: Lupércio França Bessegato

Doutor em Estatística – Universidade Federal de Minas Gerais

JUIZ DE FORA

2011

PLANEJAMENTO ECONÔMICO DE GRÁFICOS DE CONTROLE \bar{x} COM
MODELO DE FALHA DE POISSON

Monografia apresentada ao curso de
Estatística da Universidade Federal de Juiz de
Fora, como requisito para a obtenção do grau
de Bacharel em Estatística.

Aprovada em 30 de novembro de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Lupércio França Bessegato (orientador)

Doutor em Estatística – Universidade Federal de Minas Gerais

Camila Borelli Zeller

Doutora em Estatística - Universidade Estadual de Campinas

Roberto Quinino

Doutor em Engenharia de Produção - Universidade de São Paulo

Gregório, Priscila – Juiz de Fora, 2011

Planejamento Econômico de Gráficos de Controle \bar{x} com modelo de falha de Poisson/ Priscila Gregório

88.p

Monografia – Universidade Federal de Juiz de Fora e Instituto de Ciências Exatas

À Deus.

“Deus sempre irá te orientar, espera no senhor e tenha coragem, o importante é caminhar. Para cada passo existe um tempo, existe uma hora, Deus vai te orientar, confia e tudo Ele fará.”

Eliana Ribeiro

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus.

Aos meus pais por todo apoio e esforço durante esses anos. A minha irmã, pelo carinho de sempre. A todos os meus familiares que sempre torceram por mim.

Às minhas amigas Gabriela, Paula, Maíra, Larissa, Ariadne e Letícia por mesmo distante estarem sempre presentes. À Thalita, pelas longas conversas e pelos seus conselhos.

Aos amigos do CAEd, aos amigos de faculdade, Thiago, Victor, Bruno, Iago, em especial ao Roberto, por sempre me aturar, à Laura por ser minha amiga em todos os momentos e por sempre me incentivar, à Carol pelo carinho e amizade, ao Samuel pelas caronas e pelas conversas que só a gente tinha. A Sara, Raquel e Leiliane, que sempre estiveram dispostas a nos ajudar.

Ao Luís Gustavo, por todo apoio, incentivo, carinho, paciência e pelo companheirismo.

Aos professores do departamento de Estatística, em especial ao professor Lupércio, pela paciência e orientação durante estes meses.

Muito obrigada à todos.

RESUMO

Os gráficos ou cartas de controle são uma das principais ferramentas do controle estatístico de qualidade para monitorar processos de produção e para melhoria de sua capacidade através da redução da variabilidade. Os gráficos de controle podem ser planejados sob o ponto de vista econômico, considerando os custos de amostragem, os custos associados à investigação de sinais fora de controle e possivelmente à correção de causas atribuíveis, e custos da chegada ao consumidor de unidades não-conformes. Todos esses custos são afetados pela escolha dos parâmetros do gráfico de controle. Portanto, o objetivo deste trabalho é determinar os três parâmetros ótimos, tamanho da amostra (n), intervalo de amostragem (h) e os limites de controle (k) que minimizem o custo esperado do sistema de monitoramento do processo de produção.

Palavras-chave: Gráficos de controle, Planejamento econômico, custo, qualidade.

ABSTRACT

The charts or control charts are one of the main tools of statistical quality control to monitor production processes and to improve their capacity by reducing the variability. Control charts can be planned under the economic point of view, considering the costs of sampling, the costs associated with the investigation of signals out of control and possibly the correction of assignable causes, and costs of the arrival to the consumer of non-conforming units. All these costs are affected by the choice of parameters in control chart. Therefore, the objective of this study is to determine three optimal parameters, sample size (n), sampling interval (h) and control limits (k) that minimize the expected cost of the monitoring system of the production process.

Key-words: Control charts, economic planning, cost, quality.

Sumário

1. Introdução.....	1
1.1. Gráficos de Controle	1
1.2. Gráficos de Controle para variáveis.....	4
1.2.1. Gráficos de controle para \bar{x}	5
1.2.2. Gráfico de R.....	11
1.3. Medidas de desempenho estatístico da curva característica	13
1.4. Introdução ao planejamento econômico	15
1.5. Objetivos	16
2. Metodologia.....	18
2.1. Planejamento econômico dos gráficos de controle \bar{x}	18
2.2. Otimização.....	32
2.3. Crítica ao planejamento econômico	34
2.4. Projetos alternativos ao projeto econômico.....	35
2.4.1. Planejamento semi-econômico dos gráficos de controle	36
2.4.2. Planejamento econômico-estatístico dos gráficos de controle	37
2.5. Outro modelo para o tempo de falha	38
3. Aplicação.....	44
3.1. Exemplo.....	44
3.1.1. Resultados e conclusão	46
3.2. Planejamento econômico versus planejamento estatístico.....	68
4. Conclusão e pesquisa futura	70
Referências Bibliográficas	72
Apêndice A – Script desenvolvido para o modelo econômico.....	74
Apêndice B – Script desenvolvido para o modelo estatístico	76

Lista de Figuras

Figura 1 - Tempo até o sinal	11
Figura 2 - Ciclo de produção	28

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a_1	49
Gráfico 2 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a_1	50
Gráfico 3 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a_1	50
Gráfico 4 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a_2	53
Gráfico 5 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a_2	53
Gráfico 6 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a_2	54
Gráfico 7 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de λ	56
Gráfico 8 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de λ	56
Gráfico 9 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de λ	57
Gráfico 10 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a_4	59
Gráfico 11 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a_4	59
Gráfico 12 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a_4	60
Gráfico 13 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de δ	62
Gráfico 14 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de δ	62
Gráfico 15 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de δ	63

1. Introdução

1.1. Gráficos de Controle

As cartas de controle ou gráficos de controle, desenvolvidas pelo Dr. Walter A. Shewhart são uma das principais ferramentas do controle estatístico de qualidade para solucionar problemas durante a obtenção da estabilidade do processo e na melhoria de sua capacidade através da redução da variabilidade, ou seja, seu principal objetivo é monitorar a variabilidade no processo.

Os gráficos de controle podem ser classificados em dois grupos: gráficos de controle por variáveis e gráficos de controle por atributos. Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) os gráficos de controle por variáveis são utilizados para o monitoramento de características de qualidade representadas por variáveis contínuas e os gráficos de controle por atributos foram criados para o monitoramento de processos produtivos, onde “ser defeituoso ou não” e as não conformidades presentes em um produto são considerados atributos.

Existem várias definições para qualidade. Para Deming (2000) qualidade significa atender, e se possível, exceder as expectativas do consumidor. Para Taguchi, Taguchi e Chowdhury (1999) a produção, o uso e o descarte de um produto sempre acarretam perdas para a sociedade, logo quanto menor o prejuízo, melhor a qualidade do produto.

Segundo Montgomery (2004) qualidade é inversamente proporcional à variabilidade, quanto maior a variabilidade menor a qualidade, e quanto menor a variabilidade melhor a qualidade.

Em um processo de produção por mais bem planejado que seja, sempre existirá uma quantidade de variabilidade natural ou inerente. Essa variabilidade é o efeito cumulativo de muitas causas pequenas, essencialmente inevitáveis. No controle estatístico da qualidade chamamos essa variabilidade natural de sistema estável de causas aleatórias. Diz-se que um processo que opera apenas sob causas aleatórias está sob controle estatístico.

Outro tipo de variabilidade pode estar presente no processo. Em geral ela surge de três fontes: máquinas ajustadas de maneira inadequada, erros do operador ou matéria prima defeituosa. Essa variabilidade é muito grande quando comparada com a variabilidade natural, representando um nível inaceitável de desempenho do processo. Essas fontes de variabilidade recebem o nome de causas atribuíveis ou especiais. Dizemos que um processo que opera na presença de causas atribuíveis está fora de controle.

Um dos grandes objetivos do controle estatístico do processo é detectar com maior rapidez possível a ocorrência de causas atribuíveis das mudanças ocorridas no processo, fazendo com que a investigação do processo e a ação corretiva possam ser feitas antes da produção de muitas unidades não-conformes.

De acordo com Saniga (1989) há vários métodos propostos para a concepção dos gráficos de controle e cada método tem alguns pontos fortes e fracos relativos à facilidade de uso, propriedades estatísticas e relação custo eficácia.

Um processo é dito sob controle estatístico quando opera apenas sob causas aleatórias da variação ou sob causas naturais de variabilidade e o processo é dito fora de controle quando opera na presença de causas especiais, que deslocam a distribuição da variável aleatória X , tirando sua média do valor-alvo e/ou aumentando sua dispersão. Caso o processo esteja fora de controle devemos tomar providências para levar o processo ao estado de controle. Desta maneira, o procedimento de monitoramento é o seguinte:

- a) Se todos os pontos correspondentes às médias amostrais e às amplitudes amostrais nos seus respectivos gráficos estão dentro dos limites de controle e não existindo nenhum padrão de não aleatoriedade, o processo é considerado sob controle.
- b) Se existir algum ponto fora dos limites de controle ou qualquer outro padrão de não aleatoriedade, consideramos que causas especiais de variação estão presentes e portanto uma investigação e uma ação corretiva são feitas para achar e eliminar a causa (ou causas) atribuível responsável por este comportamento. Depois de corrigidas as causas que determinam o padrão de não aleatoriedade, são calculados novos limites e novas linhas

centrais, eliminando para este cálculo os elementos da amostra que determinam o padrão de não aleatoriedade. Este processo deverá ser repetido até que nenhum padrão de não aleatoriedade seja encontrado. E então, quando o processo atingir o estado de controle pode-se aplicar os gráficos como instrumento para monitorar o processo e realizar melhorias no processo.

A relação da análise entre a rapidez de detectar alterações e o custo de operação do gráfico de controle deve orientar na escolha de seus parâmetros de implementação, sendo estes: o tamanho das amostras (n), o intervalo de tempo entre amostragens (h) e o fator que estabelece a largura dos limites de controle no gráfico (k).

1.2. Gráficos de Controle para variáveis

Quando a característica da qualidade é medida em uma escala numérica, de intervalo ou de razão, utiliza-se um par de gráficos para monitorar o processo.

Existem diversos pares de gráficos de controle para variáveis. Entretanto os gráficos mais usados são o gráfico da média amostral (gráfico de \bar{x}) para monitorar a centralidade e o gráfico da amplitude amostral gráfico (gráfico de R) para monitorar a variabilidade.

Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) primeiramente constrói-se o gráfico que monitora a variabilidade (gráfico de R), pois se ele sinalizar um processo fora de controle, devemos investigar a causa especial, eliminá-la e então recomeçar o processo. Quando o processo estiver sob controle, ou seja, nenhum ponto fora dos limites, passe-se a construção do gráfico de média (ou outro gráfico).

1.2.1. Gráficos de controle para \bar{x}

Suponha que a característica de qualidade X tenha uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ . Na prática não conhecemos estes parâmetros, portanto devemos estimá-los através de amostras ou subgrupos preliminares quando o processo estiver sob controle. Estas estimativas devem ser baseadas em pelo menos 20 ou 25 amostras. Dado um conjunto inicial de m amostras, a estimativa usual para média μ é o valor médio das médias amostrais. Suponha que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ sejam as médias de cada amostra. Assim o melhor estimador para a média μ é dado por:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$$

Portanto $\bar{\bar{x}}$ será usado como a linha média no gráfico de \bar{x} .

A estimativa do desvio padrão σ é dada através dos desvios padrão ou das amplitudes das m amostras. Seja $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ uma amostra de tamanho m e R_1, R_2, \dots, R_m as amplitudes das m amostras. A amplitude média será dada por:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Portanto o desvio padrão será dado por:

$$\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

onde os valores de d_2 são tabelados de acordo com os tamanhos de amostra. Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) o valor esperado da variável R , amplitude de amostras constituídas de n variáveis normais X , de média μ e desvio padrão σ , é $E(R) = d_2\sigma$. Como \bar{R} é um estimador não tendencioso de $E(R)$, $\frac{\bar{R}}{d_2}$ torna-se um estimador não tendencioso de σ .

Salienta-se, no caso em que se utilizam medidas individuais ($n=1$) utiliza-se a amplitude móvel para a estimação da variabilidade do processo. Nosso trabalho não abrange tal situação.

O gráfico de controle para média possui uma linha média (LM) localizada na média de \bar{x} e duas linhas horizontais, denominadas limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC), localizados a mais ou menos três desvios padrão da média:

$$LIC = \bar{x} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \quad LSC = \bar{x} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$

Shewhart baseou-se no seguinte lema para construção desses gráficos: se o processo estiver sob controle evite fazer ajustes desnecessários, pois eles tendem a aumentar a sua variabilidade. Já com a abertura de três desvios padrão, com o processo estando sob controle, raramente um ponto cairá na região de ação do gráfico, o que indicaria que se deve intervir no processo para fazer os ajustes necessários.

Quando estamos monitorando um processo através de um gráfico de \bar{x} , amostras de tamanho n são retiradas a cada h horas e a estatística \bar{x} é calculada para cada amostra e registrados graficamente. Pode-se enxergar esse mecanismo como um teste de hipótese, onde:

$$H_0: \text{processo está sob controle } (\mu = \mu_0)$$

$$H_1: \text{processo está fora de controle } (\mu \neq \mu_0)$$

A hipótese H_0 não é rejeitada todas as vezes que o valor de \bar{x} estiver dentro dos limites de controle, e a hipótese H_1 não é rejeitada sempre que o valor de \bar{x} cair fora dos limites de controle.

O erro tipo I ocorre quando consideramos que o processo está fora de controle, quando na verdade não está. O erro tipo II ocorre quando consideramos que o processo está sob controle, quando na verdade não está.

Quando o processo estiver em controle, ou seja, a hipótese H_0 verdadeira, α representa a probabilidade de erroneamente considerar o processo fora de controle (chamado de alarme falso). Quando o processo estiver

fora de controle, ou seja, a hipótese H_1 verdadeira, β representa a probabilidade de erroneamente considerar o processo em controle (chamado de não detecção).

Existem conseqüências praticas associados aos dois tipos de erro. Ao erro tipo I (alarme falso) é intervir no processo na hora errada quando ele está isento de causas especiais, e ao erro tipo II (não-deteccção) é não intervir no processo na hora certa quando ele está sob a influência de causas especiais.

O poder do gráfico de controle de \bar{x} é definido como a probabilidade de deteccção, ou seja, $Pd = 1 - \beta$.

Para determinar o número esperado de amostras até obter-se o primeiro sinal indicativo de que o processo desajustou utiliza-se o número médio de amostras antes de um alarme falso. A distribuição do número médio de amostras que antecedem um alarme falso (incluindo a amostra que gerou o alarme falso) é uma geométrica de parâmetro $p = \alpha$. A média da distribuição geométrica é igual a $\frac{1}{p}$, portanto, o número médio de amostras é dado por:

$$NMAF = \frac{1}{\alpha}$$

O número médio de amostras entre a ocorrência da alteração (ou mudança) na média μ_0 no processo e a sinalização pelo gráfico é dado por:

$$NMA = \frac{1}{Pd}$$

Para avaliação e comparação de desempenho de gráficos de controle nas aplicações práticas, utilizam-se mais frequentemente as quantidades NMAF e NMA ao invés das probabilidades α e $1-\beta$ respectivamente. Essa motivação prende-se à facilidade de entendimento por parte dos operadores dos gráficos de controle.

O gráfico de controle de \bar{x} tem o objetivo de sinalizar alterações na média do processo, mas as vezes essa alteração pode passar despercebida por certo tempo, até que um valor de \bar{x} caia fora dos limites de controle, ou seja, até que se tenha um alarme. Segundo Costa, Epprecht, e Carpinetti (2005), esse intervalo de tempo entre a alteração da média e o alarme é uma medida de eficiência do gráfico, chamado tempo esperado até o sinal (TES), que depende da magnitude do deslocamento da média do processo, do tamanho das amostras n , do intervalo entre as amostragens h e do valor de abertura dos limites de controle k . Na prática, o valor de h acaba sendo escolhido arbitrariamente, onde devemos levar em conta que valores pequenos de h implicam custos elevados com amostragens e maior incidência de alarmes falsos.

Para a determinação dos parâmetros do gráfico de controle \bar{x} é conveniente usar o TES como medida de rapidez de detecção. Mas para isso é preciso definir primeiro a frequência de amostragem admissível de alarmes

falsos (1 a cada 100 horas de operação, 2 a cada 150 horas de operação, etc.) e a taxa de amostragem.

O TES é dado por:

$$TES = E(TS)$$

$$TES = E(h \times NAS - Q)$$

$$TES = h \times E(NAS) - E(Q)$$

$$TES = h \times NMA - \frac{h}{2}$$

$$TES = \frac{h}{Pd} - \frac{h}{2}$$

onde,

TS: é o tempo esperado até o sinal.

NAS: é o número de amostras até o sinal.

Q: é o intervalo de tempo entre o momento da retirada da última amostra antes do deslocamento da média e o instante em que a média se desloca.

A esperança do número de amostras até o sinal, $E(NMA) = NMA$, ou seja, igual ao número médio de amostras até o sinal.

Supõe-se que $E(Q) = \frac{h}{2}$, onde $\frac{h}{2}$ é uma aproximação bastante precisa do valor de $E(Q)$, pois o deslocamento da média pode ocorrer a qualquer instante dentro do intervalo h .

A taxa de amostragem no gráfico de controle \bar{x} , ou seja, a quantidade de amostras coletadas em uma determinada unidade de tempo é dada por $\frac{n}{h}$.

A figura 1 representa o tempo até o sinal:

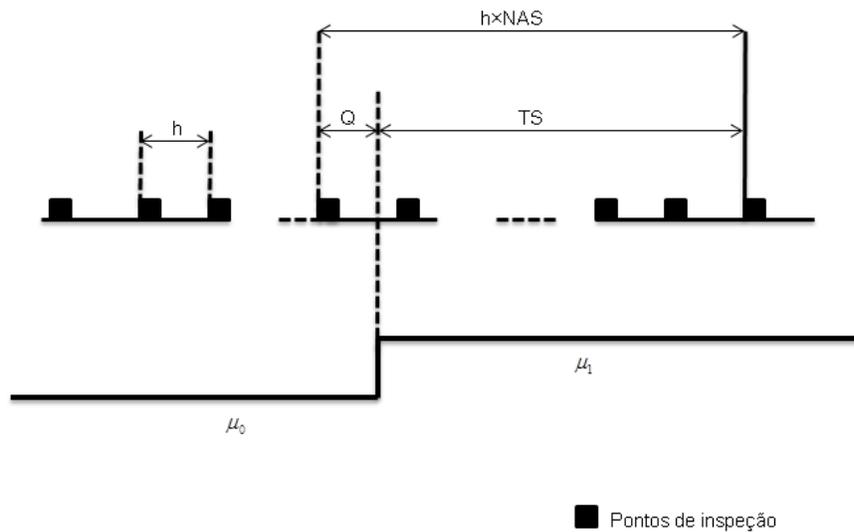


Figura 1 - Tempo até o sinal

(Fonte: Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

1.2.2. Gráfico de R

Durante a coleta de amostras destinada à construção dos gráficos de controle, o processo está sempre sujeito às causas especiais conhecidas ou ainda não diagnosticadas, portanto inicia-se a construção dos gráficos de controle pelo gráfico da amplitude (Gráfico de R). Com isso consegue-se determinar se a variabilidade em um processo está sob controle ou se estão ocorrendo mudanças ao longo do tempo. Se a amplitude do processo está sob controle, então ele pode ser utilizado para desenvolver limites de controle para a média.

Os limites de controle para o gráfico de R são situados usualmente a três desvios-padrão da média e necessita-se de um estimador denominado $\hat{\sigma}_R$. Segundo Montgomery (1985) a distribuição normal é o melhor modelo para

estudos de qualidade. Portanto, assumindo que a característica de qualidade é normalmente distribuída, $\hat{\sigma}_R$ pode ser determinado através da amplitude relativa $W = \frac{R}{\sigma}$. A amplitude relativa tem $E(W) = d_2$ e $Var(W) = d_3^2$, fixados em função de n . Logo, temos que o desvio padrão de W é d_3 e depende de n . Portanto:

$$Var(W) = \frac{1}{\sigma} Var(R)$$

O desvio padrão de R é dado por $\sigma_R = d_3\sigma$. Se σ for desconhecido, podemos estimar σ_R por $\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}}{d_2}$. Portanto, os limites de controle do gráfico de R são dados por:

$$LIC = d_2\hat{\sigma}_R - 3d_3\hat{\sigma}_R \text{ e } LSC = d_2\hat{\sigma}_R + 3d_3\hat{\sigma}_R$$

E a linha média é dada por:

$$LM = d_2\hat{\sigma}_R$$

Os valores de d_2 e d_3 são tabelados de acordo com o tamanho da amostra.

A amplitude por definição, é sempre não-negativa, portanto quando $LIC = \max\{0, d_2\hat{\sigma}_R - 3d_3\hat{\sigma}_R\}$ for negativo, adotamos $LIC=0$, ou seja, ausência de um limite inferior de controle.

Ao se construir o gráfico da amplitude e algum ponto exceder os limites de controle, este ponto deverá ser investigado. Ao se descobrir as causas de variabilidade destes pontos, eles deverão ser eliminados e um novo gráfico de

controle da amplitude deverá ser construído. Quando todos os pontos estiverem dentro dos limites de controle, ou seja, o processo estiver inseto de causas especiais, inicia-se a construção do gráfico de média.

Existem outros gráficos alternativos ao gráfico de R, sendo eles, gráfico da variância (s^2) e o gráfico do desvio padrão (S). Embora amplamente utilizados, é ocasionalmente desejável estimativa do desvio-padrão processo diretamente da faixa de R. Isso leva aos gráficos de controle \bar{x} e S, onde S é o desvio padrão da amostra.

Geralmente, os gráficos \bar{x} e S são preferíveis às suas contrapartes mais familiares, gráficos de \bar{x} e R, quando se quer:

- 1) o tamanho da amostra n é moderadamente grande, digamos $n > 10$ ou 12. (Lembre-se que o método de intervalo para estimar σ perde eficiência estatística para amostras grandes.)
- 2) o tamanho da amostra n é variável.

Em nosso trabalho usaremos o gráfico de R.

1.3. Medidas de desempenho estatístico da curva característica

Dado um gráfico de controle, sua curva característica de operação relaciona características probabilísticas do processo com β , a probabilidade de o ponto amostral não situar-se na zona de alerta do gráfico. A habilidade dos

gráficos de controle em detectar mudanças na qualidade do processo é descrita por suas curvas características de operação (CCO).

Suponha a CCO para um gráfico de \bar{x} com desvio padrão σ conhecido e constante. Suponha também que a média se desloca de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$. Após a mudança na média do processo, a probabilidade de não se detectar esse deslocamento durante a amostragem subsequente (ou seja, o risco β) é dado por:

$$\beta = P\{LIC \leq \bar{x} \leq LSC / \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\}$$

A curva de operação para o gráfico de \bar{x} é feita plotando o risco β versus a magnitude do deslocamento que se quer detectar, expressa em unidades de desvio padrão, para diversos tamanhos de amostra n .

A probabilidade de que o deslocamento seja detectado na r .ª amostra é dada por $1 - \beta$ vezes a probabilidade de não detectá-lo em cada uma das $r-1$ amostras iniciais.

Na construção das curvas característica de operação para o gráfico de R , utilizamos a distribuição da amplitude relativa $w = \frac{R}{\sigma}$. Quando o processo está sob controle o desvio padrão é σ_0 . Portanto a curva de operação representa a probabilidade de não se detectar o deslocamento para um novo valor de σ_1 , onde $\sigma_1 > \sigma_0$, na primeira amostra depois do deslocamento.

Para utilizar os gráficos de controle é necessário que o planejador escolha um tamanho de amostra (n), uma frequência de amostragem ou intervalo entre

amostras (h) e os limites de controle (k) para o gráfico. A escolha desses três parâmetros é denominada de planejamento do gráfico de controle. Essa escolha pode ser baseada em medidas estatísticas de desempenho do gráfico de controle.

1.4. Introdução ao planejamento econômico

Os gráficos de controle podem ser planejados sob o ponto de vista econômico considerando os custos de amostragem, os custos associados à investigação de sinais fora de controle e possivelmente à correção de causas atribuíveis, e os custos da chegada ao consumidor de unidades não-conformes onde todos são afetados pela escolha dos parâmetros do gráfico de controle.

Portanto, buscam-se parâmetros do gráfico de controle que minimizem a função objetivo associados ao custo do sistema de controle.

Duncan (1956) propôs um modelo econômico para o planejamento econômico ótimo do gráfico de controle \bar{x} . Ele baseou-se no trabalho de Girshick e Rubin (1952), utilizando um critério que maximizava a receita líquida do processo por unidade de tempo.

No capítulo 2 apresentaremos o planejamento econômico dos gráficos de controle de \bar{x} com modelo de falha de Poisson, ou seja, a busca pelo tamanho da amostra (n), a largura dos limites de controle (k) e o intervalo de amostragem (h) que minimizem o custo. Serão apresentados alguns

planejamentos alternativos ao planejamento econômico e uma crítica ao planejamento econômico dos gráficos de controle. Por fim, apresentaremos uma sugestão de outro modelo para o tempo de falha e uma breve abordagem sobre otimização.

O capítulo 3 apresenta uma aplicação do planejamento econômico no processo de produção e seus resultados e uma comparação do planejamento estatístico com o planejamento econômico.

Já no capítulo 4, além das conclusões, indicamos algumas sugestões para trabalhos futuros em continuidade a este.

1.5. Objetivos

Os gráficos de controle têm sido planejados em relação apenas a critérios estatísticos que envolvem a escolha do tamanho da amostra (n) e dos limites de controle (k) tais que o comprimento médio da seqüência do gráfico para detectar determinada mudança na característica de qualidade e o comprimento médio da seqüência do procedimento quando o processo está sob controle sejam iguais a valores especificados. A freqüência de amostragem (h) raramente é tratada de forma analítica, e usualmente é aconselhável o planejador levar em conta a taxa de produção, a freqüência esperada de mudanças para um estado fora de controle, e as conseqüências possíveis de tais

mudanças do processo na escolha do intervalo amostral. (Montgomery D. C., 2004)

O objetivo deste trabalho é determinar a entrada dos parâmetros n , k e h para os gráficos de controle de \bar{x} que minimize o custo esperado do sistema de monitoramento do processo de produção.

2. Metodologia

2.1. Planejamento econômico dos gráficos de controle \bar{x}

Segundo Woodall (1987) o modelo econômico seleciona o gráfico de controle que maximize o lucro total esperado do processo de produção onde o lucro é reduzido em função da manutenção do gráfico. Ele mostra que desempenhos estatísticos de gráficos de controle economicamente ótimos geralmente ignorados, podem muitas vezes ser melhorados.

Duncan (1956) formula um modelo econômico para o gráfico de controle com as seguintes suposições.

- 1) Que o processo seja caracterizado por um único estado sob controle e que as causas atribuíveis ocorrem durante um intervalo de tempo de acordo com um processo de Poisson, isto é, o tempo de duração em que o processo permanece sob controle, dado que ele começa sob controle, é uma variável aleatória exponencial.
- 2) As transições entre os estados do processo sejam instantâneas e que o processo seja não autocorretivo, ou seja, uma vez que o estado sob controle passe para o estado fora de controle, o processo pode voltar para o estado sob controle somente com a intervenção gerencial.

Para o planejamento econômico dos gráficos de controle os custos descritos abaixo.

Os custos com amostragem e de teste dado por a_1+a_2n que são baseados em componentes fixos e variáveis, a_1 e a_2 respectivamente. Para Miguel e Rotondaro (2005) estes custos são relacionados à verificação (ou avaliação) do nível de qualidade obtido pelo produto, ou seja, custos relativos às inspeções e aos ensaios requeridos para garantia de que o produto esteja de acordo com os requisitos de desempenho, com as exigências do cliente e dentro das especificações. Incluem custos de inspeção e teste do produto (checagem de conformidade do produto através de teste de aceitação final, teste de vida útil, entre outros) e despesas imediatas com salários de técnicos e inspetores;

Os custos de investigação de sinais fora de controle e ao reparo ou correção de causas atribuíveis encontradas e o custo de investigação de alarmes falsos são considerados custos de prevenção, ou seja, são custos associados à prevenção de não conformidade.

O custo associado à produção de unidades não-conformes é o mais difícil de se estimar; ele abrange custos típicos de falhas, podendo ser estas falhas internas ou externas. Os custos de falhas internas referem-se à ocorrência de unidades, materiais e serviços que não correspondem às exigências da qualidade (defeituosos), mas que são identificados antes da entrega do produto ao cliente. São custos relacionados às falhas internas: os custos com sucata (perda líquida de trabalho, material e despesas provenientes de um produto com defeito que não pode ser reparado economicamente ou usado) e custos de retrabalho (custo

de correção de unidades que não satisfaz aos padrões de qualidade, mas que pode ser corrigida). Os custos de falhas externas referem-se aos produtos com falta de qualidade, mas já entregues ao cliente, ou seja, os gastos relativos aos defeitos identificados pelos clientes ou pelos fornecedores..

A função de custo total para formulação dos modelos econômicos expressa a relação entre os parâmetros de planejamento do gráfico de controle e os tipos de custos expostos acima.

O processo de renovação é um processo de contagem onde o tempo entre os eventos sucessivos é independente e identicamente distribuído com uma distribuição arbitrária. O tempo até o primeiro evento ocorrer tem uma distribuição F , o tempo entre o primeiro evento e o segundo evento tem independente do primeiro, a mesma distribuição F e assim por diante. Quando um evento ocorre, dizemos que a renovação ocorreu.

Considere um processo de renovação $\{N(t), t \geq 0\}$, onde $N(t)$ representa um processo de contagem, tendo X_n como o tempo entre chegadas, $n \geq 1$ e supondo que cada vez que uma renovação ocorre recebemos uma recompensa. Vamos denotar por R_n o ganho recebido no tempo da n -ésima renovação e vamos supor que R_n , $n \geq 1$ é independente e identicamente distribuído. Portanto permitimos a possibilidade de que R_n pode (e normalmente) depende de X_n , ou seja, do comprimento do n -ésimo intervalo de renovação. Se

definirmos $R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$, então $R(t)$ representa o ganho total obtido pelo tempo

t. Portanto:

$$E[R] = E[R_n] \text{ e } E[X] = E[X_n]$$

A teoria da renovação tem uma proposição que diz o seguinte: se $E[R] < \infty$ e $E[X] < \infty$, então:

a) Com probabilidade 1, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$

b) O valor esperado de uma razão não é igual à razão dos valores esperados, mas no nosso caso isso pode ser justificado pela *teoria da renovação*.

Salienta-se que este é um resultado bastante importante. Em geral, ou seja, caso não sejam atendidas as hipóteses do teorema da renovação, tem-se que (Meyer,2009):

$$Z = \frac{C}{T} = H(X)$$

$$E(Z) \cong E\left(\frac{C}{T}\right) \cong \frac{\mu_C}{\mu_T} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial C^2} \sigma_C^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} \sigma_T^2 \right]$$

Mas, atendidas as hipóteses do teorema da renovação podemos afirmar que $E\left(\frac{C}{T}\right) = \frac{E(C)}{E(T)}$.

Se dissermos que um ciclo (seqüência de produção, monitoramento e ajuste) é completado a cada vez que uma renovação ocorre, então a proposição (a) afirma que a longo prazo o ganho médio por unidade de tempo é igual ao ganho esperado recebido durante o ciclo dividido pela duração esperada do

ciclo. Concluímos então que essa seqüência de produção, monitoramento e ajuste com acumulação de custos a cada ciclo pode ser representada por um tipo particular de processo estocástico chamado de *processo de ganho de inovação*.

Montgomery (1980) apresenta como uma série de ciclos independentes o processo de produção, monitoramento e ajuste ao longo do tempo. Cada ciclo se inicia com o processo sob controle e prossegue até que o monitoramento através de gráficos de controle resulte em um sinal de fora de controle. Após o sinal, um ajuste é feito e o processo volta ao estado sob controle, iniciando-se um novo ciclo.

Desta maneira, seja $E(T)$ o comprimento esperado ou comprimento médio de um ciclo e $E(C)$ o custo total esperado incorrido durante um ciclo. Pode-se provar que o custo esperado por unidade de tempo será dado por:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (1)$$

Técnicas de otimização são aplicadas na equação (1) para determinar o planejamento ótimo do gráfico de controle economicamente ótimo, onde C e T são variáveis aleatórias dependentes.

Duncan (1956) foi o pioneiro dos trabalhos envolvendo um modelo totalmente econômico de um gráfico de Shewhart e a adotar uma metodologia formal de otimização na determinação dos parâmetros de um gráfico de controle. Ele propôs um modelo para o planejamento econômico ótimo do

gráfico de controle de \bar{x} . Seu objetivo foi encontrar os parâmetros de planejamento que minimizassem os custos em utilizar um gráfico de \bar{x} no monitoramento de processo de produção.

Em seu modelo de custo considerou que o processo é caracterizado por um estado sob controle com média em μ_0 e que uma única causa atribuível (que ocorre aleatoriamente) de magnitude δ , provoca uma mudança da média de μ_0 para $\mu_0 \pm \delta\sigma$. Ao observar a sinalização desta mudança, ou seja, se um ponto estiver fora dos limites de controle, inicia-se a procura por esta causa atribuível.

Em seu trabalho, ele busca responder a três questões em relação ao projeto dos gráficos de controle:

- a) Qual o tamanho de amostra deve ser usado (n);
- b) Qual intervalo as amostras devem ser tomadas (h);
- c) Qual a largura dos limites de controle (k).

Em seu modelo considera que os parâmetros μ_0 , δ e σ são conhecidos e que n , k e h devem ser determinados. As amostras são extraídas a intervalos de h horas.

A definição de um ciclo de produção consiste no intervalo entre o início da produção com o processo sob controle e o ajuste para detectar e eliminar a causa atribuível. Um ciclo é composto por quatro períodos: período sob

controle, período fora de controle, o tempo para extrair uma amostra e interpretar os resultados e o tempo para achar a causa atribuível.

Dado o processo mantido sob controle até a ocorrência de uma causa atribuível, o intervalo de tempo em que o processo se mantém sob controle é uma variável aleatória exponencial com média $\frac{1}{\lambda}h$.

A probabilidade de não ocorrência de uma causa atribuível antes de um tempo t , medido desde o início do ciclo com o processo sob controle, é dado por:

$$P(\text{não ocorrência}) = 1 - P(\text{ocorrência}) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

onde a probabilidade de ocorrência é dada por:

$$P(\text{ocorrência}) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} + 1 = 1 - e^{-\lambda t}$$

Dado que a causa atribuível ocorra segundo um processo de Poisson com λ ocorrências por hora, a probabilidade de uma ocorrência no intervalo de t até $t+\Delta t$ é aproximadamente dada por:

$$P(\text{uma ocorrência}) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^1}{1!} = \Delta t \lambda e^{-\lambda \Delta t}$$

Denotamos o tempo médio do processo sob controle no intervalo entre a j^{a} e a $(j+1)^{\text{a}}$ amostra dado a ocorrência de uma causa atribuível neste intervalo por:

$$\tau = E(T / jh < T < (j+1)h)$$

$$\tau = \frac{\int_{jh}^{(j+1)h} (t - jh)e^{-\lambda t} \lambda dt}{\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} dt} \quad (2)$$

Resolvendo primeiramente a integral do numerador da equação (2),

$$\int_{jh}^{(j+1)h} (t - jh)e^{-\lambda t} \lambda dt \text{ fazendo substituição de variável, onde } u=t-jh \text{ temos } t=u+jh \text{ e}$$

$$dt=du.$$

Quando $t=jh$ implica que u será igual a 0 e quando $t=(n+1)h$ implica que $u=h$. Pode-se verificar isso substituindo estes valores de t em u . Portanto teremos novos limites de integração:

$$\int_0^h e^{-\lambda(u+jh)} \lambda(u + jh - jh) du = e^{-\lambda jh} \int_0^h \lambda u e^{-\lambda u} du \quad (3)$$

Resolvendo a integral por partes da equação (3), onde $w=u$, $dv=\lambda e^{-\lambda u}$, temos $v=-e^{-\lambda u}$. Usando a fórmula de integração por partes $wv - \int v du$ temos:

$$\begin{aligned} & -ue^{\lambda u} + \int_0^h e^{-\lambda u} du \\ &= -ue^{\lambda u} \Big|_0^h + \frac{-e^{-\lambda u}}{\lambda} \Big|_0^h \\ &= [-he^{\lambda h} - 0] + \frac{[-e^{-\lambda h} + 1]}{\lambda} \\ &= -he^{\lambda h} + \frac{[-e^{-\lambda h} + 1]}{\lambda} \\ &= \frac{-h\lambda e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h} + 1}{\lambda} \end{aligned}$$

Portanto de (3) temos:

$$e^{-\lambda jh} \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + \lambda h)}{\lambda} \quad (4)$$

Na integral do denominador da equação (2), $\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} dt$ vamos fazer a mesma substituição feita na primeira integral: $u=t-jh$. Então temos que $t=u+jh$ e $dt=du$.

$$\begin{aligned}
 \int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} dt &= e^{-\lambda jh} \int_0^h \lambda e^{-\lambda u} du \\
 &= e^{-\lambda jh} \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda u}}{\lambda} \Big|_0^h \right] \\
 &= e^{-\lambda jh} \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda h} + 1}{\lambda} \right] \\
 &= e^{-\lambda jh} [-e^{-\lambda h} + 1]
 \end{aligned} \tag{5}$$

Das equações (2), (4) e (5) temos que:

$$\tau = \frac{e^{-\lambda jh} \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + h\lambda)}{\lambda}}{e^{-\lambda jh} [-e^{-\lambda h} + 1]} = \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + h\lambda)}{1 - e^{-\lambda h}} = \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + h\lambda)}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \tag{6}$$

que nos fornece o tempo médio para ocorrência de uma causa atribuível em um intervalo de tempo h .

Definimos $(1 - \beta)$ como a probabilidade de uma causa atribuível ser detectada, ou seja, a probabilidade de que um ponto esteja fora dos limites de controle onde β é a probabilidade da média estar dentro dos limites de controle quando o processo está fora de controle. Assim, temos que:

$$(1 - \beta) = \int_{-\infty}^{-k - \delta \sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{k - \delta \sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

Por sua vez, a probabilidade de um alarme falso, ou seja, a probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle quando o processo está sob controle é dada por:

$$\alpha = 2 \int_k^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

Duncan (1956) considerou em seu modelo que o processo continua em operação enquanto ocorre a busca pela causa atribuível e que os custos com ajuste ou reparo e o custo de trazer o processo de volta ao controle depois da descoberta da causa atribuível não serão alterados pela receita do processo.

O período sob controle segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ e, portanto, o comprimento esperado do período sob controle é $1/\lambda$.

Tendo em vista que o número de amostras exigidas para produzir um sinal de fora de controle é uma variável aleatória geométrica com média $\frac{1}{1-\beta}$, que h é o intervalo entre as amostras e assumindo que a mudança na média ocorre aproximadamente no ponto τ do intervalo entre a j e a $(j+1)$ -ésima amostras, concluímos então que o comprimento esperado do período fora de controle antes do alarme é $h \times \frac{1}{1-\beta} - \tau$.

Ele assume que o tempo requerido para extrair uma amostra e interpretar os resultados é uma constante g , proporcional ao tamanho da

amostra n . Define-se gn como o comprimento do ciclo até o ponto fora de controle. Assume-se também que o tempo exigido para achar a causa atribuível após um ponto ter caído fora dos limites de controle é uma constante D . A figura (3) ilustra o modelo:

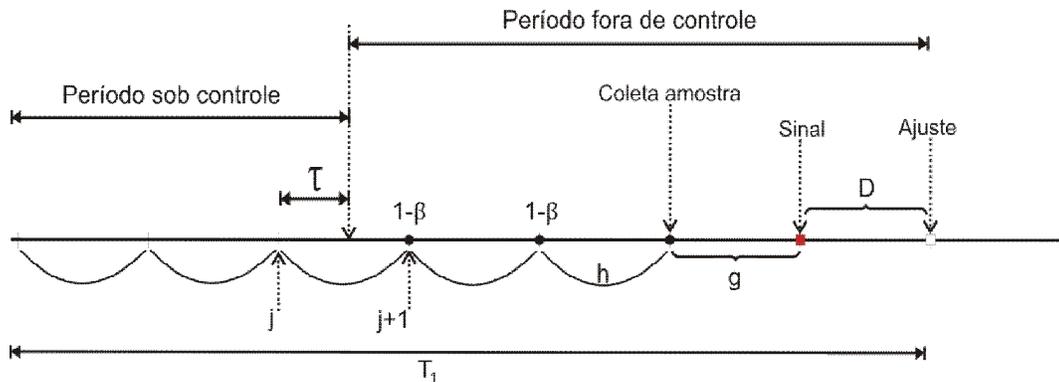


Figura 2 - Ciclo de produção

Logo, o comprimento esperado por ciclo é:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + h \times \frac{1}{1-\beta} - \tau + gn + D \quad (7)$$

Defina V_0 como sendo a receita líquida por hora de operação com o processo sob controle e V_1 a receita líquida por hora de operação com o processo fora de controle. ($V_0 > V_1$)

Supõe-se que $a_1 + a_2n$ seja o custo de extração de uma amostra de tamanho n , onde a_1 é a componente fixa do custo e a_2 é a componente variável do custo de amostragem.

O número esperado de amostras extraídas durante um ciclo é dado por $\frac{E(T)}{h}$, ou seja, o comprimento esperado do ciclo dividido pelo intervalo entre amostras.

Seja a_3 o custo de determinação de uma causa atribuível quando o processo está fora de controle e a_3' o custo de investigação de um alarme falso quando o processo está sob controle.

O número esperado de alarmes falsos gerados durante um ciclo antes de o processo sair fora de controle é definido por $\alpha \times$ (número esperado de amostras extraídas antes da mudança), ou seja:

$$\begin{aligned}
 \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \int_{jh}^{(j+1)h} j \times P\{\text{mudança entre a } j^{\text{a}} \text{ e } (j+1)^{\text{a}} \text{ amostra}\} &= \\
 &= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \times \int_{jh}^{(j+1)h} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \times \left[e^{-\lambda t} \Big|_{(j+1)h}^{jh} \right] \\
 &= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \times \left[e^{-\lambda jh} - e^{-\lambda(j+1)h} \right] \\
 &= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \times e^{-\lambda jh} \left[1 - e^{-\lambda h} \right] \\
 &= \alpha \left[1 - e^{-\lambda h} \right] \sum_{j=0}^{\infty} j \times e^{-\lambda jh} \tag{8}
 \end{aligned}$$

Resolvendo o somatório da expressão (8), temos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \times e^{-\lambda jh} = \frac{-1}{h} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \left[e^{-\lambda jh} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{h} \times \frac{d}{d\lambda} [1 + e^{-\lambda h} + e^{-2\lambda h} + \dots] \\
&= \frac{-1}{h} \times \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{1 - e^{-\lambda h}} \right]
\end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8) temos:

$$\begin{aligned}
\text{Número médio de alarmes falsos} &= \frac{-\alpha}{h} \times [1 - e^{-\lambda h}] \times \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{1 - e^{-\lambda h}} \right] \right\} \\
&= \frac{\alpha e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}
\end{aligned}$$

Portanto temos que a receita líquida esperada por ciclo é dada por:

$$E(C) = V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{1 - \beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} - (a_1 + a_2 n) \times \frac{E(T)}{h} \tag{10}$$

De acordo com a equação (1) a receita líquida esperada por hora, $E(A)$, é a razão da receita líquida esperado por ciclo, $E(C)$ [equação (10)] e o comprimento esperado do ciclo $E(T)$ [equação (7)], ou seja:

$$E(A) = \frac{V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{1 - \beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1 - \beta} - \tau + gn + D} \tag{11}$$

Denotando por a_4 o custo horário da penalidade associada à produção no estado fora de controle, ou seja, $a_4 = V_0 - V_1$. Substituindo $V_1 = V_0 - a_4$ no numerador da equação (11) temos:

$$\begin{aligned}
&V_0 \frac{1}{\lambda} + (V_0 - a_4) \left(\frac{h}{1 - \beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} = \\
&V_0 \frac{1}{\lambda} + \frac{V_0 h}{1 - \beta} - V_0 \tau + V_0 gn + V_0 D - \frac{a_4 h}{1 - \beta} + a_4 \tau - a_4 gn - a_4 D - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} =
\end{aligned}$$

$$V_0 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_4 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} \quad (12)$$

De (11) e (12), temos que:

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{V_0 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_4 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} \\ &= V_0 - \frac{a_4 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} \end{aligned} \quad (13)$$

De (13), verifica-se que:

$$\frac{a_4 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) + a_3 + \frac{a_3' \alpha e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}} + \frac{(a_1 + a_2 n)}{h}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} \quad (14)$$

é a perda horária esperada incorrida pelo processo, verificando-se que ela é função dos parâmetros n , k e h do gráfico de controle.

Denotando (14) por $E(L)$, temos que:

$$E(A) = V_0 - E(L) \quad (15)$$

e percebemos que a maximização da receita líquida por hora esperada equivale à minimização de $E(L)$, ou seja, a minimização da perda horária esperada incorrida pelo processo.

Existem várias aproximações numéricas utilizadas na otimização deste modelo.

2.2. Otimização

Pedregal (2003) define otimização como o estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições em suas variáveis, ambas relacionados às variáveis de decisão.

Quando se otimiza uma função, busca-se o menor ou maior valor possível para a função objetivo, onde cada valor atribuído as variáveis não viole nenhuma restrição.

Os algoritmos de otimização iniciam a partir de uma estimativa inicial da solução ótima, gerando em seguida, uma seqüência de estimativas melhores até conseguir a solução ótima.

Buscamos sempre algoritmos de otimização robustos, que resolvam o problema para qualquer valor inicial; eficiente, que possua baixa complexidade; e preciso, onde a solução ótima é encontrada independente dos erros de arredondamento dos dados.

Snyman (2005) relata que os termos de otimização matemática podem ser descritos como a ciência da determinação das melhores soluções para os problemas matematicamente definidos que podem ser modelos de realidade física ou de produção e de gestão sistemas.

Em alguns casos, considerações comerciais e financeiras de importância econômica para a sociedade e a indústria são obrigados a tomar decisões que garantam, por exemplo, máximo lucro ou custo mínimo.

Quando lidamos com o problema de otimização o objetivo ou a função custo deve medir fielmente a nossa idéia de otimização.

Outro ponto importante, é declarar as restrições que devem ser aplicadas de modo que seja admissível soluções realmente viáveis em nosso problema ou situação. Mais uma vez, se estas restrições não são claramente escritas ou algumas são esquecidos, a nossa resposta final pode não ser o que estávamos procurando.

Um procedimento de otimização é proposto por Montgomery (1980) que usa aproximações numéricas para a primeira derivada parcial de $E(L)$ em relação à n , k e h . Um procedimento iterativo é necessário para encontrar os valores ótimos pra n e k , e uma solução analítica para h é dada usando os valores ótimos de n e k .

Para otimizar os valores de n , k e h neste trabalho, foi usado uma função do software estatístico R, chamada *optim*, no qual escolhemos como método de otimização para essa função o método "L-BFGS-B". Este método permite restrições, onde a cada variável pode ser dado um limite inferior e/ou superior. O valor inicial deve satisfazer as restrições. Este usa uma modificação na

memória limitada do método quase Newton BFGS. Se os limites fornecidos forem não-trivial, este método será selecionado, com um aviso.

2.3. Crítica ao planejamento econômico

Woodall (1987) relata que as performances estatísticas de gráficos economicamente ótimos geralmente ignorados podem muitas vezes ser melhorados e segundo ele, os modelos econômicos necessitam da utilização de restrições estatísticas para melhorar seu desempenho.

Woodall (1986, 1987) criticou o planejamento econômico de gráficos de controle, onde o erro tipo I do gráfico de controle é consideravelmente maior do que seria em um planejamento estatístico, e que isto pode levar a mais alarmes falsos. A ocorrência de um número excessivo de alarmes falsos é sempre um problema, pois os gerentes relutariam em interromper um processo se o esquema de controle tem uma história de muitos alarmes falsos. Segundo ele, o planejamento econômico de gráficos de controle pode não detectar rapidamente os desvios esperados do processo.

O desempenho estatístico de gráficos de controle economicamente projetado tem sido tipicamente ignorado. Para Woodall (1986), o modelo econômico equilibra o custo da má qualidade em relação ao custo de amostragem e ao custo de reparação do processo e por essa razão o método

econômico muitas vezes não é eficaz na produção de gráficos que podem detectar rapidamente pequenas mudanças na qualidade antes que perdas substanciais possam ocorrer. Em geral, para solucionar este problema utiliza-se como recurso a adoção simultânea de gráficos CUSUM durante o procedimento usual de controle.

Lorenzen e Vance (1986) listaram três principais desvantagens do uso de modelos econômicos: as dificuldades em cálculos, intervalos de tempo inábil entre as amostras e parâmetros de processo impreciso.

Os modelos econômicos permaneceram essencialmente inalterados desde que foi originalmente proposto por Duncan (1956). O conceito de custo da qualidade e muitos dos objetivos do controle estatístico da qualidade mudaram drasticamente nos últimos anos. Busca-se assim construir um modelo econômico que reflète mais adequadamente a essas novas idéias.

2.4. Projetos alternativos ao projeto econômico

Vários projetos alternativos ao planejamento econômico foram surgindo. A seguir destacamos alguns deles.

2.4.1. Planejamento semi-econômico dos gráficos de controle

Os modelos semi-econômicos consideram alguns custos e algumas grandezas associadas a custos, dentre elas o custo de amostragem, a frequência de alarmes falsos e o tempo até a detecção de um descontrole.

Um trabalho de grande destaque na área de modelagem de custos de qualidade foi publicado por Girshick e Rubin (1952). Ainda que de pouco ou nenhuma aplicação prática, o trabalho deles tem valor teórico significativo. Eles levam em conta um modelo semi-econômico em que uma máquina produz itens que possuem uma característica de qualidade mensurável x que pode estar em um de quatro estados ($i=1, 2$ e $j=3, 4$). Quando a máquina está no estado $i=1, 2$ ela está em produção e a característica de qualidade x é caracterizada pela função de densidade de probabilidade $f_i(x)$.

Os estados $j=3, 4$ são considerados estados de reparos admitindo que a máquina estivesse anteriormente no estado $j-2$. Nesses estados são necessárias n_j unidades de tempo para fazer o reparo, onde unidade de tempo é definida como o tempo necessário para produzir um item.

O estado 1 é considerado o estado sob controle, enquanto nesse estado há uma probabilidade constante de mudança para o estado 2. Esta probabilidade é própria do processo de produção e assume-se ser conhecida. O

processo é não autocorretivo, fazendo-se necessário um reparo para que o processo volte ao estado 1.

Os primeiros pesquisadores a propor o critério do custo esperado por unidade de tempo mostrando rigorosamente sua adequação a este problema foram Girshick e Rubin em 1952.

Outro trabalho de destaque é o de Weiler (1952). Ele sugeriu que para um gráfico de controle de \bar{x} , o tamanho ótimo da amostra deve minimizar a quantidade total de inspeção exigida para detectar uma mudança específica. Ele não considerou formalmente os custos, considerou que a minimização da inspeção total minimizará o custo total.

Montgomery (2004) aborda que o planejamento econômico de gráficos de controle de Shewhart convencionais foi investigado por vários pesquisadores. Pelo fato de ou o modelo proposto não levar em conta todos os custos relevantes ou não aplicar técnicas formais de otimização à função custo, grande parte do trabalho pode ser classificada como procedimentos semi-econômico.

2.4.2. Planejamento econômico-estatístico dos gráficos de controle

O planejamento econômico-estatístico foi proposto por Saniga (1989) onde um projeto econômico é encontrado sob a probabilidade do erro tipo I e tipo II. Este planejamento pode garantir uma maior qualidade nos produtos e serviços, sendo maleável e robusto. Ele adotou as medidas estatísticas como

restrições estatísticas no modelo econômico para as empresas obterem processos com baixa variabilidade e produtos com grande qualidade e chamou estas restrições de planejamento econômico-estatístico. Ele relatou que qualquer número de restrições pode ser usado, incluindo aquelas que estão em função da média do processo e que o custo de um planejamento econômico estatístico deve ser maior ou igual ao custo de um projeto econômico, uma vez que a adição de restrições não podem reduzir o valor da função objetivo.

A vantagem do planejamento econômico-estatístico é que ele dispõe a segurança de uma produção de grande qualidade e reduz a variância da distribuição da característica de qualidade. E uma desvantagem é que ele gera uma expectativa de maior custo do que o projeto econômico.

2.5. Outro modelo para o tempo de falha

Banerjee e Rahim (1988) propõem uma versão modificada do modelo de Duncan (1956) para o projeto econômico dos gráficos de \bar{x} , estendido para lidar com situações que envolvem o modelo Weibull para o tempo de falha.

A distribuição de Weibull é uma distribuição de probabilidade contínua usada em estudos de tempo de vida de equipamentos e estimativa de falhas. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x/\gamma, \beta) = \frac{\gamma}{\beta} x^{\gamma-1} e^{-x^\beta}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \gamma, \beta > 0$$

Vale ressaltar que a distribuição de Weibull se reduz a uma exponencial quando $\gamma = 1$.

No modelo de custo proposto, a duração do intervalo de amostragem varia com o tempo, ao contrário de Duncan, onde a duração dos intervalos de amostragem é mantida constante.

Consideraram também o modelo de custo de Duncan, modificado por Lorenzen e Vance (1986), com as seguintes restrições:

- 1) O tempo que o processo permanece sob controle segue uma distribuição Weibull, ou seja, sua pdf é dada por:

$$f(t) = \lambda k t^{(k-1)} \exp\{-\lambda t^k\} \text{ com } t > 0, k \geq 1, \lambda > 0.$$

- 2) O processo é monitorado por um sorteio aleatório de amostras de tamanho n nos tempos $h_1, (h_1 + h_2), (h_1 + h_2 + h_3)$ e assim por diante. Duncan assume em seu modelo $h_j = h$ para todo j ($j=1,2,\dots$).

- 3) A produção cessa durante as buscas e reparação das causas especiais

- 4) Supõe que o comprimento dos intervalos de amostragem h_j são definidos de modo a manter a probabilidade de uma mudança em um intervalo, dada nenhuma mudança até o seu início, constante para todos os intervalos. Isto pode ser conseguido através da definição do comprimento da amostragem intervalos h_j ($j = 1, 2, \dots$) da seguinte forma:

$$h_j = [j^{\frac{1}{k}} - (j-1)^{\frac{1}{k}}]h_1 \quad (16)$$

Foram utilizados os seguintes parâmetros no modelo:

- o tamanho da amostra n ;
- o comprimento do intervalo de amostragem j como h_j ($j=1,2,\dots; h_j = 0$);
- o tempo esperado da procura associado ao alarme falso z_0 ;
- o tempo esperado para descobrir a causa atribuível z_1 ;
- o tempo esperado para o reparo no processo z_2 ;
- o custo fixo de amostragem a ;
- o custo por unidade de amostragem b ;
- a largura dos limites de controle L ;
- o custo por alarme falso Y ;
- o custo de localizar e reparar a causa atribuível W ;
- o custo qualidade por hora enquanto o processo permanece sob controle

D_0 ;

- o custo qualidade por hora enquanto o processo está fora de controle

D_1 ;

- a probabilidade de exceder os limites de controle dado que o processo está sob controle α ;

- a probabilidade de não exceder os limites de controle dado que o processo está fora de controle β ;

Considera-se que um ciclo começa quando um novo componente é instalado e no final, após uma mudança devido à falha de um componente ser detectada, o processo é trazido de volta a um estado sob controle.

A probabilidade condicional de que a unidade usada no sistema irá falhar durante o intervalo de amostragem j dado que foi no estado de funcionamento no início do intervalo de j , isto é, no tempo ω_{j-1} , é definida como p_j ($j=1,2,\dots$). E q_j define a probabilidade não condicional de que a unidade irá falhar durante o intervalo de amostragem j . Em outras palavras, para $j=1,2,\dots$:

$$p_j = \frac{\int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(t)dt}{\int_{\omega_{j-1}}^{\infty} f(t)dt} \text{ e } q_j = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(t)dt$$

onde

$$\omega_j = \sum_{i=1}^j h_i \text{ com } j=0,1,\dots \text{ e } \omega_0 = 0.$$

Definindo-se τ_j ($j=1,2,\dots$) como a duração prevista do período sob controle dentro do intervalo de amostragem j , dado que a falha ocorreu durante este intervalo de amostragem, temos então:

$$\tau_j = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} \frac{(t - \omega_{j-1})f(t)dt}{q_j}$$

Eles usaram uma lista de todos os estados possíveis no final do intervalo da primeira amostragem, o valor correspondente do tempo residual do ciclo e

as probabilidades associadas, mostrados na tabela 1, para o cálculo da duração do ciclo esperado $E(T)$:

Tabela 1- O tempo esperado residual

Estado	E(tamanho residual do ciclo)	Probabilidade
Fora de controle e alarme	$z_1 + z_2$	$p(1 - \beta)$
Fora de controle mas sem alarme	$z_1 + z_2 + (1 - \beta) \sum_{i=1}^{\infty} (\omega_{i+1} - h_1) \beta^{i-1}$	$p\beta$
Sob controle e sem alarme	$E(T_1)$	$(1 - p)(1 - \alpha)$
Sob controle e alarme falso	$z_0 + E(T_1)$	$(1 - p)\alpha$

Portanto, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 E(T) = & h_1 + \{z_1 + z_2\}(1 - \beta)p + \{z_1 + z_2 + (1 - \beta) \sum_{i=1}^{\infty} (\omega_{i+1} - h_1) \beta^{i-1}\} p\beta \\
 & + \{E(T_1)\}(1 - p)(1 - \alpha) + \{z_0 + E(T_1)\}(1 - p)\alpha
 \end{aligned} \tag{15}$$

Similarmente, para o cálculo do custo total esperado por ciclo, usaram uma lista de todos os estados e do custo total esperado por ciclo para cada estado e as probabilidades associadas, apresentada na tabela 2.

Tabela 2 – Custo esperado residual

Estado	E(custo durante o período corrente)	E(custo residual)	Probabilidade
Fora de controle e alarme	$a + bn + D_0\tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1)$	W	$p(1 - \beta)$
Fora de controle mas sem alarme	$a + bn + D_0\tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1)$	W+R	$p\beta$
Sob controle e sem alarme	$a + bn + D_0\tau_1$	$E(C_1)$	$(1 - p)(1 - \alpha)$
Sob controle e alarme falso	$a + bn + D_0\tau_1$	$Y + E(C_1)$	$(1 - p)\alpha$

Onde $R = (a + bn) \sum_{i=1}^{\infty} i\beta^{(i-1)}(1 - \beta) + D_1(1 - \beta) \sum_{i=1}^{\infty} (\omega_{i+1} - h_1)\beta^{i-1}$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
 E(C) = & \{a + bn + D_0\tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1) + W\}(1 - \beta)p + \{a + bn + D_0\tau_1 + D_1(h_1 - \tau_1) + W \\
 & + \frac{a + bn}{1 - \beta} + D_1(1 - \beta) \sum_{i=1}^{\infty} (\omega_{i+1} - h_1)\beta^{i-1}\} \beta p + \{a + bn + D_0h_1 + E(C_1)\}(1 - \alpha)(1 - p) \\
 & + \{a + bn + D_0h_1 + Y + E(C_1)\} \alpha(1 - p)
 \end{aligned} \tag{16}$$

O objetivo é encontrar valores para n, L, h_1 que minimizem $\frac{E(C)}{E(T)}$.

3. Aplicação

Como aplicação do planejamento econômico dos gráficos de controle de \bar{x} , utilizaremos um exemplo do livro *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, Douglas C. Montgomery (2004). A otimização foi efetuada por meio do pacote estatístico R (R Development Core Team, 2009). O código desenvolvido está apresentado no Apêndice A.

3.1. Exemplo

Um fabricante produz garrafas de vidro descartáveis para embalar um refrigerante. A espessura da parede das garrafas é uma característica importante da qualidade. Se a parede é muito fina, a pressão interna durante o enchimento fará com que a garrafa se rompa. O fabricante utilizou, por algum tempo, gráficos \bar{x} e R para supervisão do processo. Esses gráficos de controle foram elaborados atendendo a critérios estatísticos. Todavia, a fim de reduzir custos, o fabricante quer planejar um gráfico de \bar{x} economicamente ótimo para o processo.

Com base em uma análise dos salários dos técnicos em controle de qualidade e nos custos do equipamento de testes, estima-se que o custo fixo da extração de uma amostra seja de \$1. O custo variável da amostragem é

estimado em \$0,01 por garrafa, e a medida e o registro da espessura da parede de uma garrafa levam aproximadamente 1 minuto (0.01666667h).

O processo está sujeito a vários tipos diferentes de causas atribuíveis. Entretanto, em média, quando o processo foge ao controle, a magnitude da mudança é de dois desvios padrão, aproximadamente. As mudanças no processo ocorrem aleatoriamente com uma frequência de cerca de uma a cada 20 horas de operação. Assim, a distribuição exponencial com parâmetro $\lambda=0,05$ é um modelo razoável do comprimento da seqüência sob controle. O tempo médio exigido para investigar um sinal de fora de controle é de 1 hora. O custo da investigação de um sinal de ação que resulte na eliminação de uma causa atribuível é de \$25, enquanto o custo de investigação de um alarme falso é \$50.

As garrafas são vendidas a um engarrafador de refrigerantes. Se as paredes são muito finas, as garrafas estouram ao serem cheias. Quando isto ocorre, a prática usual do engarrafador é cobrar do fabricante os custos da limpeza e da produção perdida. Com base nessa prática, o fabricante estima que o ônus da operação em condições fora de controle durante uma hora seja de \$100.

O custo horário esperado associado ao uso de um gráfico de \bar{x} é dado pela equação (14), com $a_1=\$1$, $a_2=\$0,10$, $a_3=\$25$, $a'_3 = \$50$, $a_3=\$50$, $a_4=\$100$, $\lambda=0,05$, $\delta=2,0$, $g=0.01666667$ e $D=1$.

O código desenvolvido (Apêndice A) calcula a largura k dos limites de controle ótimos, a frequência de amostragem h para diversos valores de n , e o valor da função custo da equação (14). Obtém-se também o risco α e o poder para a combinação de n , k e h . O planejamento ótimo do gráfico de controle é obtido por meio de inspeção dos valores da função custo, a fim de achar o mínimo. Em relação ao custo computacional, o processamento do código no software R foi rápido, e como o R é livre, o custo para essa implementação é baixo.

3.1.1. Resultados e conclusão

A tabela 3 exibe a saída do programa, utilizando os valores dos parâmetros do modelo dados acima.

Tabela 3 - Solução ótima

n	k ótimo	h ótimo	Alfa	Poder	Custo
1	2.288	0.50	0.02212	0.3866	14.655
2	2.544	0.59	0.01095	0.6119	11.878
3	2.671	0.70	0.00754	0.7858	10.881
4	2.821	0.77	0.00477	0.8806	10.488
5	2.982	0.82	0.00286	0.9319	10.366
6	3.120	0.84	0.00180	0.9623	10.379
7	3.278	0.88	0.00104	0.9779	10.464
8	3.373	0.91	0.00074	0.9888	10.588
9	3.484	0.94	0.00049	0.9940	10.733
10	3.638	0.96	0.00027	0.9963	10.888
11	3.603	0.99	0.00031	0.9987	11.052
12	3.761	1.01	0.00017	0.9992	11.213

13	3.962	1.04	0.00007	0.9994	11.375
14	3.684	1.06	0.00023	0.9999	11.544
15	3.716	1.08	0.00020	0.9999	11.705

Pela tabela 3, vemos que $n^o=5$, $k^o=2,98$ e $h^o=0,82$ (aproximadamente a cada 49 minutos) produziram o menor custo, de \$10,366 por hora. O risco α para este gráfico de controle é $\alpha=0,0028$ e o poder do teste $1-\beta=0,9319$.

Após estudar o planejamento ótimo do gráfico de \bar{x} , o fabricante das garrafas suspeita que o ônus por operar fora de controle (a_4) pode não ter sido estimado com precisão. Na pior das hipóteses, a_4 pode ter sido subestimado em cerca de 50%. Por isto, ele resolveu voltar ao programa computacional com $a_4=\$150$, para investigar o efeito da especificação incorreta desse parâmetro.

Após a mudança de $a_4=\$100$ para $a_4=\$150$ a solução ótima passou a ser $n^o=5$, $k^o=2,986$, $h^o=0,66$ horas, $\alpha=0,00282$, $1-\beta=0.93135$ e o custo por hora igual a \$13,863.

Observe que o tamanho amostral ótimo e a largura dos limites de controle ótimos permanecem inalterados, ou seja, $n^o=5$, $k^o=2,98$. O aumento de a_4 em 50% reduziu a frequência ótima de amostragem de 0,82 h para 0,66 h (isto é, de 49 minutos para 40 minutos).

Se adotarmos os parâmetros ótimos de $a_4=\$100$ ($n^o=5$, $k^o=2.98$ e $h^o=0.82$) em $a_4=\$150$, o custo ótimo seria de \$13,975, ou seja, 34,8% maior em relação a $c^o=\$10,366$.

Com base nessa análise, o fabricante decide adotar uma frequência amostral de 49 minutos por conveniência administrativa.

A partir da análise de problemas numéricos tais como os do exemplo acima, é possível tirar conclusões gerais sobre o planejamento econômico ótimo do gráfico de controle \bar{x} . Os gráficos e as tabelas abaixo ilustram o que acontece com os valores de n , k , h e o custo ótimo de acordo com modificações em alguns parâmetros no exemplo acima:

- 1) Variação de a_1 (componente fixa do custo de extração de uma amostra de tamanho n)

Tabela 4 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de a_1

a_1	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
1	5	3,004	0,807	10,367
2	6	3,019	1,094	11,407
3	6	2,950	1,284	12,245
4	6	2,902	1,470	12,969
5	6	2,895	1,615	13,616
6	6	2,834	1,777	14,204
7	6	2,781	1,909	14,749
8	6	2,777	2,036	15,256
9	6	2,758	2,150	15,735
10	7	2,901	2,262	16,188
11	7	2,910	2,383	16,617
12	7	2,865	2,487	17,027

Se adotarmos $a_1 = \$2$, a solução ótima passa de $n^o = 5$ para $n^o = 6$ e k passa de 2,99 para 3,019. Podemos observar um aumento da frequência de amostragem para $h = 1,09$. O custo ótimo passa de \$10,366 para \$11,407.

Nota-se que ao calcularmos o custo ótimo para $a_1 = \$2$, utilizando os parâmetros ótimos de $a_1 = \$1$, o custo passa a ser \$ 11.586, ou seja, uma diferença de 11,7% em relação à $c^o = \$10,366$.

Os valores da tabela 4 estão representados nos gráficos 1, 2 e 3:

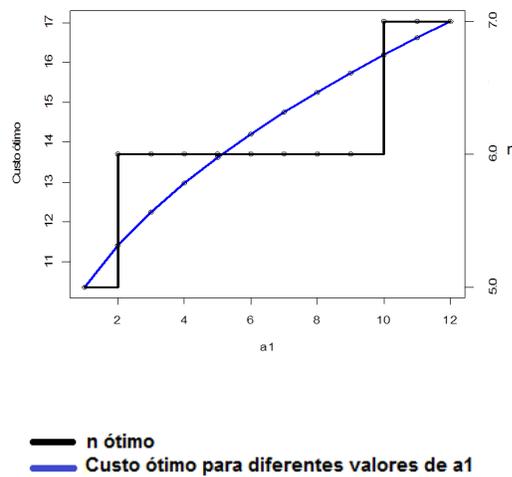


Gráfico 1 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a1

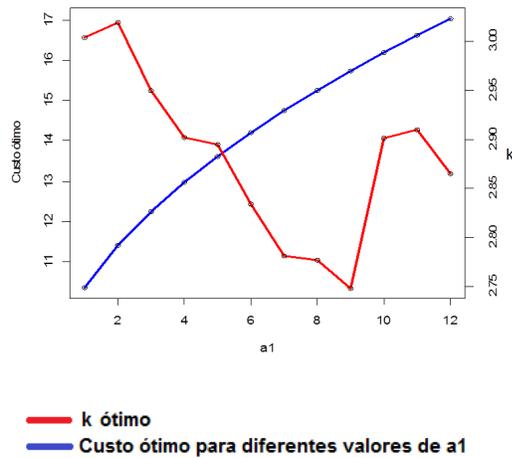


Gráfico 2 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a1

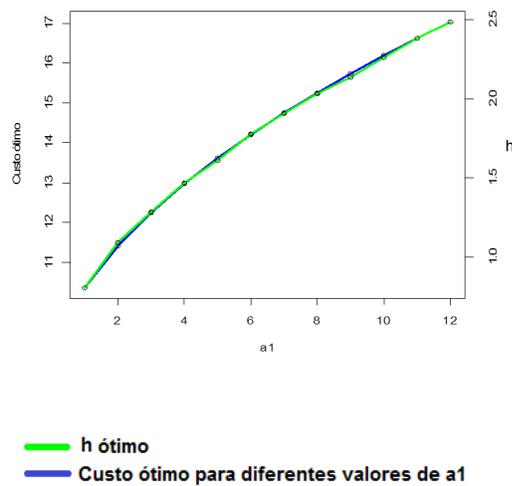


Gráfico 3 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a1

Desses gráficos, observamos que a variação no custo fixo de amostragem (a_1) afeta os três parâmetros do planejamento e o custo ótimo.

Pelo gráfico 1, podemos ver que à medida que aumentamos o custo fixo de amostragem há um ligeiro aumento no tamanho das amostras

(n). O tamanho amostral é pouco sensível a variação de a_1 , pois para valores de a_1 entre 2 e 9 o tamanho amostral permanece constante em 6. Sendo afetado apenas quando a_1 passa de 1 para 2 e de 9 para 10. Nota-se que quanto maior o valor de a_1 , maior o tamanho de amostra e maior o custo ótimo.

No gráfico 2, notamos que à medida que a_1 aumenta, há uma redução na largura dos limites de controle (k). Quando o custo fixo de amostragem varia entre 9 e 10, o limite de controle sofre um aumento substancial, de $k=2,748$ para $k=2,901$.

Este aumento substancial de k , está relacionado com a mudança no tamanho amostral. Nota-se que quando a_1 passa de 9 para 10, o tamanho amostral passa de 6 para 7 e limite de controle salta de $k=2,758$ para $k=2,901$.

No gráfico 3, notamos que o intervalo entre amostras (h) aumenta de acordo com o aumento de a_1 . O aumento de h à medida que aumentamos a_1 pode ser explicado devido ao fato de que se extrairmos amostras em intervalos pequenos e a_1 for grande, o custo ótimo será muito alto. Dessa forma, esperamos que se a_1 for grande, devemos ter intervalos de amostragem grande para minimizarmos o custo ótimo.

Nos três gráficos acima, o custo ótimo também sofre um acréscimo com o aumento do custo fixo de amostragem.

2) Variação de a_2 (componente variável do custo de extração de uma amostra de tamanho n)

Tabela 5 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de a_2

a_2	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
0,10	5	2,990	0,816	10,366
0,20	5	2,918	0,947	10,934
0,30	4	2,736	0,974	11,405
0,40	4	2,677	1,076	11,794
0,50	4	2,652	1,153	12,153
0,60	4	2,618	1,237	12,488
0,70	4	2,587	1,314	12,801
0,80	3	2,421	1,203	13,079
0,90	3	2,388	1,273	13,321
1,0	3	2,369	1,326	13,552

Se adotarmos $a_2=0,5$, a solução ótima passa a ser $n^o=4$, $k^o=2,652$ e $h^o=1,153$. O custo ótimo passa de \$10,366 para \$12,153.

Se adotarmos os parâmetros ótimos obtidos no exemplo, ou seja, $n^o=5$, $k^o=2,98$ e $h^o=0,82$ para $a_2=0,5$, o custo ótimo passa de \$10,366 para \$12,805, ou seja, uma diferença de 23,5% em relação à \$10,366.

Os valores da tabela 5 estão representados nos gráficos 4, 5 e 6:

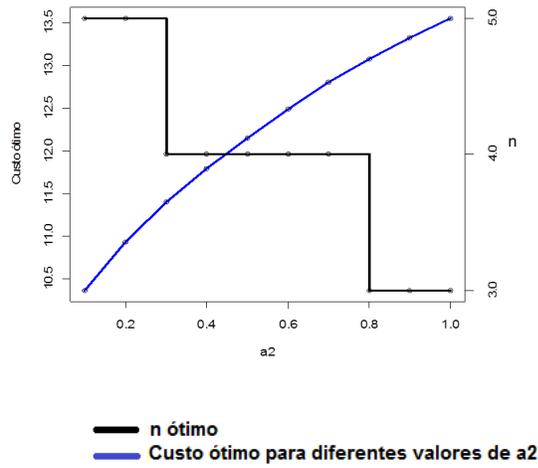


Gráfico 4 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a_2

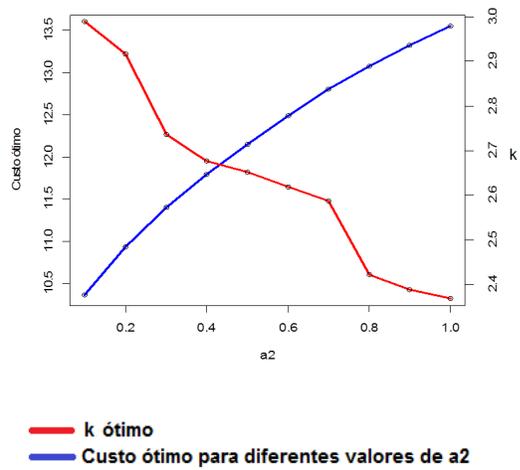


Gráfico 5 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a_2

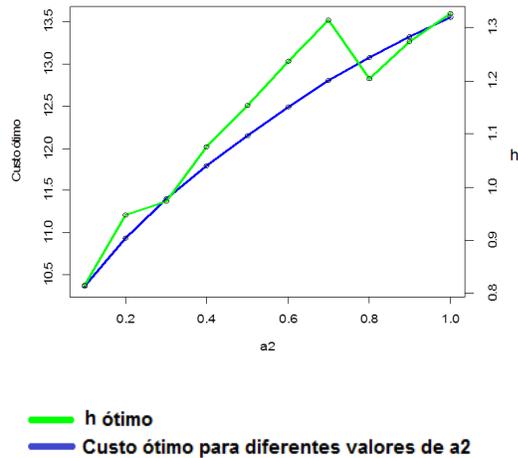


Gráfico 6 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a₂

No gráfico 4, percebe-se que à medida que aumentamos o custo variável de amostragem (a_2) há uma redução no tamanho da amostra. Para os valores de a_2 entre 0,3 e 0,7 o tamanho amostral é constante em $n=4$. Quando a_2 varia entre 0,8 e 0,10, o tamanho amostral é constante em $n=3$.

Por sua vez, no gráfico 5, nota-se que com aumento de a_2 os limites de controle (k) tendem a diminuir, ou seja, a ficarem mais estreitos. Quando a_2 passa de 0,2 para 0,3, k sofre uma redução substancial, o mesmo acontece quando a_2 passa de 0,7 para 0,8.

No gráfico 6, verifica-se que com o aumento de a_2 o intervalo de amostragem (h) tende a aumentar. Note-se que quando a_2 passa de 0,7 para 0,8, o intervalo de amostragem sofre uma redução substancial, de $h=1,314$ para $h=1,203$, embora retome seu padrão de crescimento.

O custo ótimo nos três casos acima aumenta continuamente à medida que aumentamos a_2 .

3) Variação de λ (número médio de ocorrências horárias da causa atribuível)

Tabela 6 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de λ

λ	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
0,01	6	3,144	1,788	3,213
0,02	6	3,134	1,295	5,261
0,03	6	3,121	1,067	7,086
0,04	5	2,977	0,901	8,775
0,05	5	2,969	0,819	10,366
0,06	5	2,999	0,745	11,884
0,07	5	2,983	0,705	13,338
0,08	5	2,974	0,669	14,739
0,09	5	2,965	0,639	16,091
0,10	5	2,975	0,618	17,401
0,11	5	2,961	0,595	18,670

Se adotarmos $\lambda=0,01$ para o exemplo acima, os limites de controle aumentam de $k^o=2,98$ para $k^o=3,14$ e o tamanho amostral passou de $n^o=5$ para $n^o=6$. O intervalo de amostragem aumentou consideravelmente de $h^o=0,82$ para $h^o=1,788$. O custo ótimo que era de \$10,366 passa para \$3,213.

Se adotarmos os parâmetros ótimo encontrados na solução ótima do exemplo onde $\lambda=0,05$ para $\lambda=0,01$, ou seja, $n^o=5$, $k^o=2,98$ e $h^o=0,82$, o custo ótimo passa de \$10,366 para \$ 3.777. Nota-se uma diferença no custo de 63,5% em relação à $c^o=10,366$.

Os valores da tabela 6 estão representados nos gráficos 7, 8 e 9:

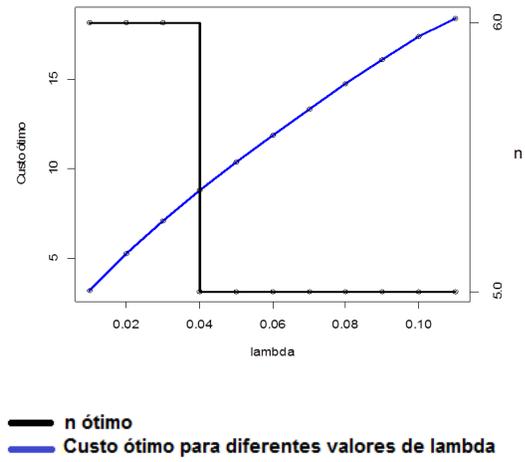


Gráfico 7 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de lambda

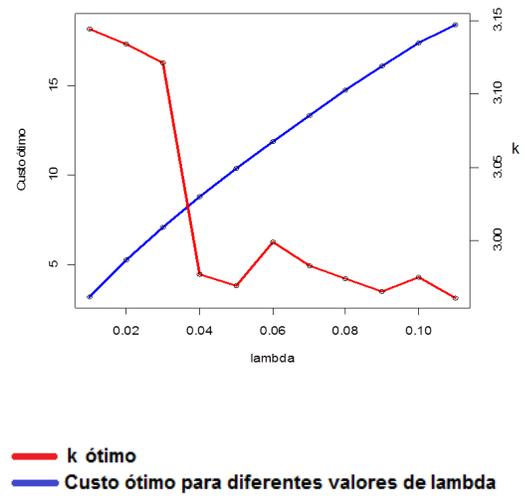


Gráfico 8 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de lambda

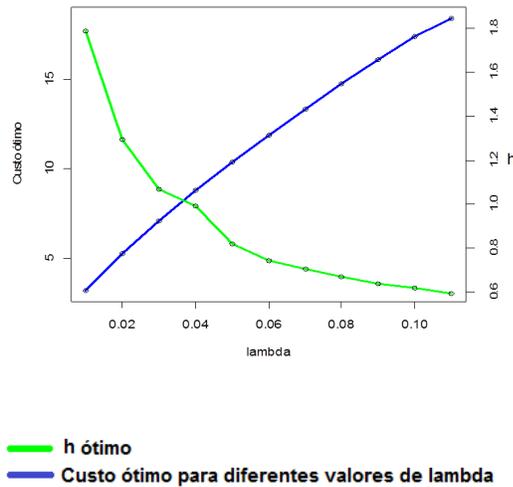


Gráfico 9 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de lambda

Notamos, no gráfico 7 que à medida que aumentamos λ , o tamanho da amostra reduz ligeiramente. Para valores de $\lambda \leq 0,03$ o tamanho amostral se mantém constante em $n=6$. Já para valores de $\lambda \geq 0,04$ o tamanho amostral se mantém constante em $n=5$. A mudança do tamanho amostral ocorre quando $\lambda=0,033$ passa para $\lambda=0,034$.

No gráfico 8, percebemos que ao aumentar λ , a largura possível dos limites de controle se reduz ligeiramente. Percebe-se a existência de uma descontinuidade do limite de controle no mesmo ponto em que ocorre a mudança no tamanho amostral, k passa de 3,099 para 2,986.

No gráfico 9, observa-se que modificações no número médio de ocorrências por hora (λ) da causa atribuível afetam principalmente o intervalo entre amostras (h). À medida que aumentamos λ o intervalo entre amostras diminui, ou seja, ao aumentarmos λ precisamos de intervalos menores de

amostragem. Se diminuirmos λ , ou seja, a duração média do processo sob controle, o intervalo de amostragem terá que aumentar.

A mudança no tamanho amostral também afeta o valor de h , nota-se que quando $\lambda=0,033$, $h=1,032$ e quando $\lambda=0,034$, $h=0,965$.

Já o custo ótimo é proporcional a λ , ou seja, à medida que aumentamos λ , o custo ótimo também aumenta. Sabemos que quanto menor o λ , melhor é o processo. Mas ao aumentarmos λ , precisaremos inspecionar as amostras em intervalos de amostragens menores, o que acarretará em um custo ótimo maior.

4) Variação de a_4 (custo por operar fora de controle)

Tabela 7 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de a_4

a_4	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
50	6	3,114	1,223	6,578
100	5	2,990	0,816	10,366
150	5	2,978	0,667	13,863
200	5	3,001	0,570	17,214
250	5	2,984	0,506	20,470
300	5	2,995	0,465	23,661
350	5	2,992	0,429	26,801

Se adotarmos $a_4=\$200$ o tamanho de amostra ótimo continua sendo 5, os limites de controle passam de $k^0=2,98$ para $k^0=3,001$ e o intervalo de amostragem reduz de $h^0=0,82$ para $h^0=0,57$. O custo ótimo aumenta de $\$10,366$ para $\$17,214$.

Note que se usarmos os parâmetros ótimos encontrados para $a_4 = \$100$ em $a_4 = \$200$, o custo ótimo passa de $\$10,366$ para $\$17,584$, ou seja, uma diferença de 69,6% em relação à $c^0 = \$10,366$.

Os valores da tabela 7 estão representados nos gráficos 10, 11 e 12:

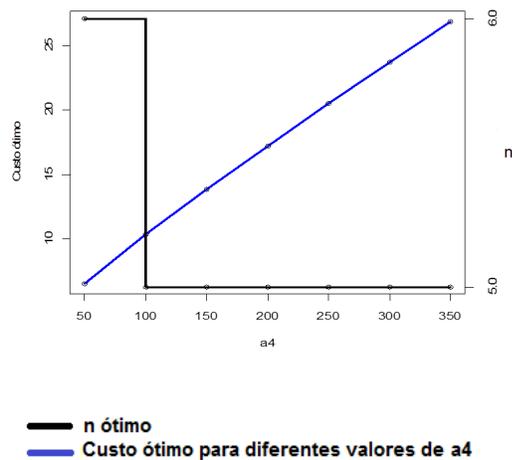


Gráfico 10 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de a_4

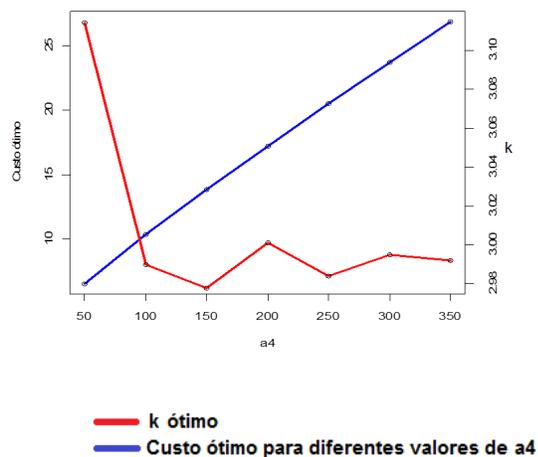


Gráfico 11 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de a_4

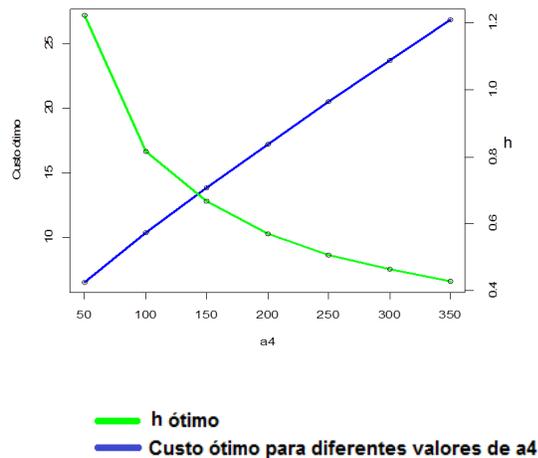


Gráfico 12 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de a_4

De acordo com o gráfico 10, à medida que o custo por operar fora de controle (a_4) aumenta, o tamanho amostral diminui. Para valores de $a_4=50$ o tamanho amostral é $n=6$, para valores maiores de a_4 entre 100 e 350 o tamanho amostral se mantém constante em $n=5$. A mudança no tamanho amostral de $n=6$ para $n=5$ ocorre aproximadamente quando a_4 passa de 63 para 64.

Com o aumento de a_4 , a largura dos limites de controle (k) não se modifica muito, ou seja, são pouco sensíveis a modificações no a_4 . No ponto onde acontece a mudança no tamanho amostral, ou seja, aproximadamente de $a_4=63$ para $a_4=64$ a largura dos limites de controle também sofre uma redução (que pode ser vista no gráfico), passando de $k=3,138$ para $k=2,976$.

Observamos que o custo horário da penalidade para produção no estado fora de controle a_4 afeta principalmente o intervalo entre amostras h . Valores

maiores de a_4 implicam menores valores de h (amostragem mais freqüente). Esse fato pode ser percebido no gráfico 12 no intervalo $200 \leq a_4 \leq 350$. E valores menores de a_4 implicam maiores valores de h (amostragem menos freqüente) que pode ser visto quando $a_4 \leq 150$.

A mudança de $a_4=63$ para $a_4=64$ fez com que o tamanho amostral diminuísse e o intervalo de amostragem h também, passando de $h^o=1,079$ para 1,026.

5) Variação de δ (magnitude do deslocamento da média)

Tabela 8 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de δ

δ	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
1	10	2,464	0,882	12,753
1,5	8	2,886	0,863	11,069
2,0	5	2,969	0,819	10,366
2,5	4	3,191	0,789	9,964
3,0	3	3,301	0,765	9,716
3,5	2	3,220	0,732	9,574

Se adotarmos no exemplo acima $\delta=1,0$, o tamanho amostral ótimo aumenta para $n^o=10$, os limites de controle ótimos se tornam mais limitados, $k^o=2,464$ e o intervalo ótimo de amostragem é ligeiramente maior, $h^o=0,882$ horas. O custo ótimo passa a ser \$12,753, ou seja, uma diferença de 23,0% em relação a \$10,366.

Os valores da tabela 8 estão representados nos gráficos 13, 14 e 15:

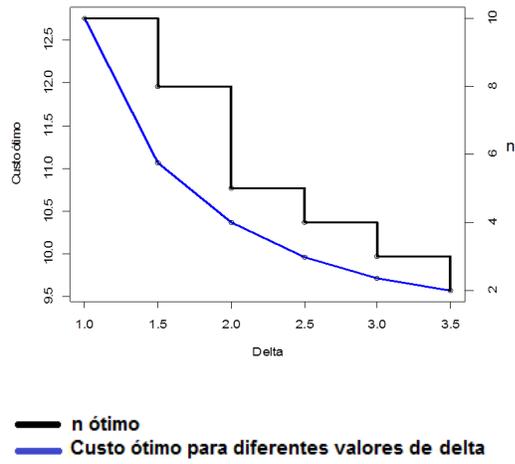


Gráfico 13 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de delta

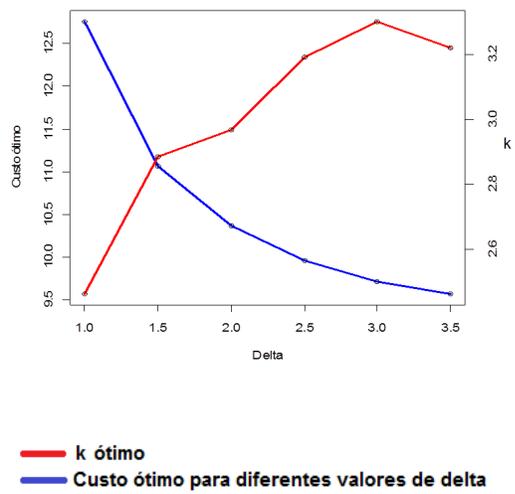


Gráfico 14 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de delta

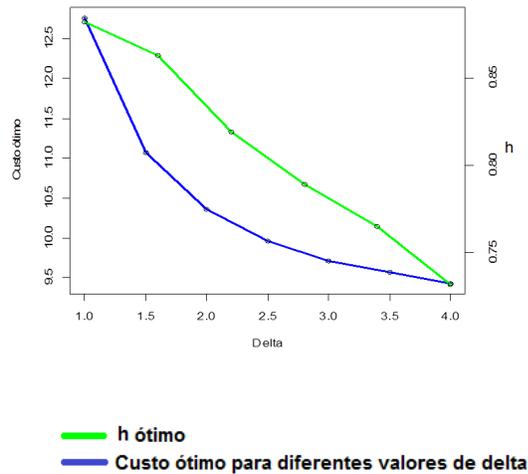


Gráfico 15 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de delta

Notamos no gráfico 13 que o tamanho amostral ótimo é em grande parte determinado pela magnitude da variação de δ , ou seja, o tamanho amostral é sensível a variações de δ . À medida que aumentamos δ , o tamanho de amostra se reduz. Muitas vezes, mudanças relativamente grandes, digamos $\delta \geq 2$, têm como resultado um tamanho amostral relativamente pequeno, digamos $2 \leq n \leq 5$. Mudanças menores requerem amostras muito maiores e mudanças muito pequenas, digamos $\delta \leq 0,5$, podem exigir tamanhos amostrais de até $n \geq 40$.

Pelo gráfico 14, percebemos que ao aumentarmos os valores de delta, os limites de controle tendem a ficar mais largos. Nota-se que em algum ponto no intervalo $[1,5;2,0]$ os limites de controle não aumentam substancialmente quando comparado aos outros pontos.

Com base no gráfico 15, concluímos que o intervalo de amostragem é inversamente proporcional a magnitude do deslocamento da média, ou seja, à medida que aumentamos δ , o intervalo de amostragem h diminuiu.

O mesmo pode ser dito para o custo ótimo, à medida que aumentamos δ , o custo ótimo se reduz.

6) Variação de $a_3 = a'_3$ (custo da determinação de uma causa atribuível=custo de investigação de um alarme falso)

Tabela 9 - Parâmetros ótimos para diferentes valores de $a_3 = a'_3$

$a_3 = a'_3$	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Custo ótimo
25	5	2,832	0,817	10,267
50	5	2,970	0,818	11,526
75	6	3,217	0,817	12,739
100	6	3,287	0,860	13,929
125	6	3,352	0,875	15,116
150	6	3,349	0,911	16,299
175	6	3,435	0,899	17,480
200	6	3,392	0,878	18,647
225	6	3,421	0,904	19,821
250	7	3,579	0,929	20,995
275	7	3,612	0,937	22,160
300	7	3,572	0,938	23,323

Se fizermos $a_3 = a'_3 = \$100$ no exemplo acima, o planejamento ótimo do gráfico de \bar{x} é agora $n^o = 6$, $k^o = 3,287$ e $h^o = 0,86$. O custo ótimo sofreu um aumento de \$10,366 para \$13,929. A largura aumentada dos limites de controle

e a pequena variação em n contribuíram para diminuir consideravelmente o risco α para 0,001 e aumentaram ligeiramente o poder do teste para 0,929.

Se adotarmos os parâmetros ótimos obtidos na solução do nosso exemplo ($n^o=5$, $k^o=2,98$ e $h^o=0,82$) para $a_3 = a_3' = 100$ o custo ótimo passa a ser \$14,005, ou seja, uma diferença de 35,1% em relação a \$10,366.

Os valores da tabela 7 estão representados nos gráficos 16, 17 e 18:

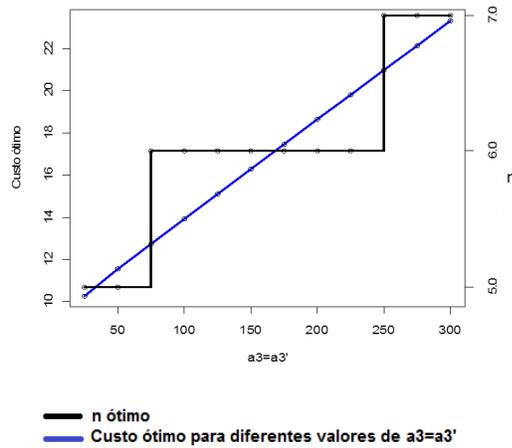


Gráfico 16 - Valores ótimos do custo e de n versus diferentes valores de $a_3 = a_3'$

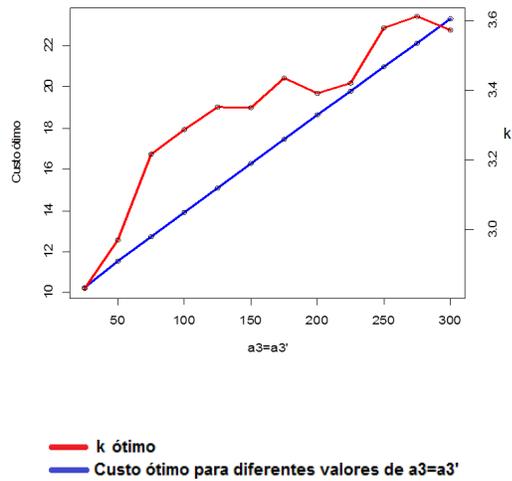


Gráfico 17 - Valores ótimos do custo e de k versus diferentes valores de $a_3=a_3'$

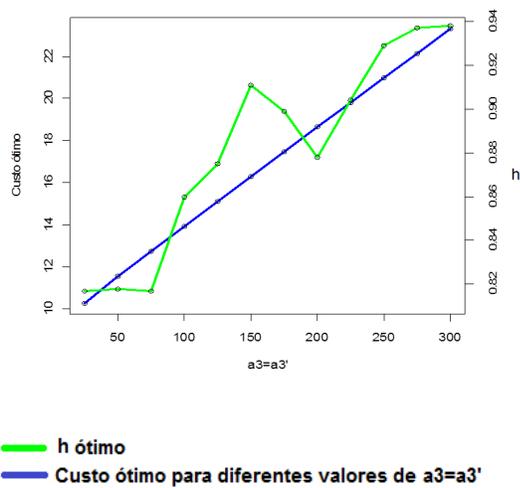


Gráfico 18 - Valores ótimos do custo e de h versus diferentes valores de $a_3=a_3'$

No gráfico 16, nota-se que o tamanho amostral é pouco sensível às variações de $a_3=a_3'$. Para valores $a_3=a_3'$ menores que 50, o tamanho amostral permanece constante em $n^0=5$. Já para valores entre 75 e 225 o tamanho amostral permanece constante em $n^0=6$. E para valores maiores ou iguais a

250, n permanece constante em 7. Ou seja, à medida que aumentamos $a_3=a_3'$, aumenta-se o tamanho amostral.

Observa-se no gráfico 17, que os custos associados à procura de causas atribuíveis afetam principalmente a largura dos limites de controle (k). À medida que aumentamos os valores de $a_3=a_3'$, aumenta-se a largura dos limites de controle. Observa-se que quando $a_3=a_3'$ está entre 175 e 225 os valores dos limites de controle se reduzem, mas a partir de $a_3=a_3'=250$ eles voltam a crescer, tendo uma nova queda quando $a_3=a_3'=300$.

O intervalo de amostragem é bastante sensível às mudanças nos valores de $a_3=a_3'$, ou seja, h oscila no intervalo de $[0,82;0,94]$ para os diferentes valores de $a_3=a_3'$. Isso pode ser visto no gráfico 18.

O custo ótimo é proporcional às variações de $a_3=a_3'$, ou seja, à medida que aumentamos estes custos, o custo ótimo também aumenta.

Vale ressaltar que na medida em que o custo da investigação de sinais de ação aumenta, queremos reduzir a incidência de alarmes falsos, isto é, reduzir α .

Salienta-se, que dos parâmetros de custo (a_1, a_2, a_3, a_3', a_4), o custo a_4 é o que possui em geral estimativa mais imprecisa. Assim, devem-se buscar planejamentos que sejam robustos às variações de custo.

3.2. Planejamento econômico versus planejamento estatístico

Usaremos um exemplo retirado do trabalho de Deventer & Manna (2008) para comparar os dois tipos de planejamento. Suponha que o custo fixo da extração de uma amostra seja $a_1 = \$0,50$ e o custo variável da extração de uma amostra seja $a_2 = 0,10$. Suponha que $g = 0,05$ e a magnitude do deslocamento da média seja $\delta = 1$. Suponha que as mudanças ocorram de acordo com uma distribuição exponencial com uma frequência média de uma a cada cem horas de operação, ou seja, $\lambda = 0,01$. O tempo exigido para achar a causa atribuível subsequente a um sinal de ação é $D = 2$. O custo para investigação de um alarme falso é $a'_3 = 50$ e o custo de determinação de uma causa atribuível é $a_3 = 25$. O custo horário da penalidade associado à produção fora de controle é $a_4 = 100$.

Para a solução deste problema através do planejamento econômico utilizaremos o código computacional que se encontra no Apêndice A com os parâmetros descritos acima. Para o planejamento estatístico iremos adotar a mesma filosofia de Duncan (1956), atribuindo os valores de $n = 5$, $k = 3$ e $h = 1$. O código computacional usado encontra-se no apêndice B.

Os valores dos respectivos planejamentos encontram-se na tabela 10:

Tabela 10 – Planejamento econômico versus planejamento estatístico

	n ótimo	k ótimo	h ótimo	Alpha	Poder	Custo ótimo
Planejamento econômico	10	2,591	1,539	0,010	0,716	5,249
Planejamento estatístico	5	3	1	0,003	0,222	7,241

Neste exemplo ao analisarmos os dois planejamentos, podemos ver que o custo ótimo ao utilizarmos o planejamento econômico com $\alpha=0,010$ é menor do que se utilizarmos o planejamento estatístico com $\alpha=0,003$. O planejamento econômico obteve $n^o=10$ e o estatístico $n^o=5$.

4. Conclusão e pesquisa futura

O objetivo inicial deste trabalho foi a determinação dos parâmetros ótimos para o planejamento econômico dos gráficos de controle \bar{x} .

No capítulo 1, apresentamos uma introdução sobre os gráficos de controle para variáveis, gráficos de \bar{x} e R, e a abordagem de alguns autores como Montgomery (1980) e Saniga (1989) sobre esses gráficos de controle. Abordamos a habilidade dos gráficos de controle em detectar mudanças na qualidade do processo através das curvas características de operação (CCO).

No capítulo 2, abordamos os custos que são levados em conta no planejamento econômico, a teoria da renovação que justifica a razão dos valores esperados do comprimento esperado ou comprimento médio de um ciclo e do custo total esperado incorrido durante um ciclo. Foi abordado também o modelo econômico de Duncan. Apresentamos o método de otimização "optim" usado neste trabalho para obtermos os parâmetros ótimos n , k e h e o custo ótimo. Abordamos algumas críticas ao planejamento econômico, projetos alternativos ao econômico, como o projeto semi-econômico e econômico-estatístico e uma breve abordagem sobre outro modelo para o tempo de falha, o modelo de Weibull.

No capítulo 3, aplicamos o código desenvolvido a um exemplo retirado do livro do Montgomery (2004) e analisamos o efeito da variação de δ , λ , a_1 ,

a_2, a_3, a_3', a_4 sobre os parâmetros ótimos n, k, h e o custo ótimo. Por fim, apresentamos um exemplo do trabalho de Deventer e Manna (2008) para comparação do planejamento econômico e planejamento estatístico.

Através deste trabalho mostramos a importância do planejamento econômico para a construção dos gráficos de controle. A implementação do planejamento econômico dos gráficos de controle deve ser feito com cuidado uma vez que dependemos de alguns custos específicos e do tempo médio em que o processo opera sob controle.

Muitas empresas buscam a redução de custos e aperfeiçoamento da qualidade, mas poucas são as empresas utilizam o planejamento econômico.

Para trabalhos futuros sugere-se que aplique o planejamento econômico em cartas adaptativas. Outra sugestão é estudar diferentes distribuições para o modelo de falha do processo, como por exemplo, a distribuição de Weibull.

Referências Bibliográficas

- Banerjee, P. K., & Rahim, M. A. (1988). Economic Design of X-bar Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics* , 30, p. 407-414.
- Correia, E. A. (2003). Planejamento de Experimentos no Processo Produtivo utilizando o Método de Taguchi. *Dissertação de Mestrado* . Faculdade de Tecnologia-UFAM.
- Costa, A. F., Epprecht, E. K., & Carpinetti, L. C. (2005). *Controle Estatístico de Qualidade*. São Paulo: ATLAS.
- Deming, W. E. (2000). Out of crisis. *Cambridge: MIT Press* .
- Deventer, P. V., & Manna, Z. (3 de Dezembro de 2008). An easy and low cost option for economic statistical process control using excel. *Orion* , pp. (25), p. 1-15.
- Duncan, A. J. (1956). The economic design of X-bar charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association* , 51, 228-242.
- Girshick, M., & Rubin, H. (1952). A Bayes Approach to a Quality Control Model. *Annals of Mathematical Statistics* , 23(1), 114-125.
- Goh, T. N. (1993). Taguchi Methods: Some Technical, Cultural and Pedagogical Perspectives. *Quality and Reability Engineering International* , 9, p.185-202.
- Lorenzen, T. J., & Vance, L. C. (1986). The Economic Design of Charts: A Unified Approach. *Technometrics* , 28, p.3-10.
- Meyer, P. (2009). Probabilidade.
- Miguel, P. A., & Rotondaro, R. G. (2005). Abordagem econômica da qualidade. In: E. Pacheco Paladani, G. Bouer, J. Joaquim do Amaral Ferreira, M. Monteiro de Carvalho, P. A. Cauchick Miguel, R. Wayne Samohyl, et al., *Gestão da qualidade* (pp. 301-318). Rio de Janeiro: Campus.

- Montgomery, D. C. (1985). Economic Design of X-bar Control Charts for Two Manufacturing Process Models. *Naval Research Logistics Quarterly* , (32), p.630-631.
- Montgomery, D. C. (2004). *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. Rio de Janeiro: LTC.
- Montgomery, D. C. (1980). The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey. *Journal of Quality Technology* , 12(2), p. 75-87.
- Pedregal, P. (2003). *Introduction to Optimization*. Spain: Springer.
- Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to X-bar and R charts. *Technometrics* , 31(3), p. 313-320.
- Snyman, J. A. (2005). *Practical Mathematical Optimization*. Springer.
- Sullivan, L. P. (1987). The Power of Taguchi Methods. *Quality Progress* , 76-79.
- Taguchi, G., Taguchi, S., & Chowdhury, S. (1999). *Robust engineering*. New York: McGraw-Hill.
- Weiler, H. (1952). On the most Economical Sample Size for Controlling the Mean of a Population. *Annals of Mathematical Statistics* , (13), p.247-254.
- Woodall, W. H. (1987). Conflicts between Deming's philosophy and the economic design of control charts. *Frontiers in Statistical Quality Control* .
- Woodall, W. H. (1986). Weaknesses of economic design of control charts (Letter to the Editor). *Technometrics* , (28), p.408-410.

Apêndice A – Script desenvolvido para o modelo econômico

Os scripts apresentados neste apêndice foram desenvolvidos no software R, referem-se a rotina de busca dos parâmetros ótimos e o custo ótimo para o modelo econômico proposto no capítulo 2.

```
##-----##
## Usando a função optim ##
##-----##
rm(list=lis(all=TRUE))
## ---- Criando vetores ---- ##
custo=c()
k=c()
h=c()
beta=c()
alpha=c()
D = 10 ##Número de n`s
a = 2
b = 0.2
resultado = list()
## ----- ##
## ---- Otimize EL ---- ##
for(i in 1:D){
  EL=functio n(x,n=i , a1=1, a2=0. 1, a3=25, a4=100, a3l i nha=50, l ambda=0.
05, D=1, g= 0. 01666667, del ta=2){
    k=x[1]
    h=x[2]
    tal=round((1-exp(l ambda*h)*(1+l ambda*h))/(l ambda*(1-exp(-
l ambda*h))), 5)
    beta.fun = functio n(x){exp((-x^2)/2)/(sqrt(2*pi))}
    al pha.fun = functio n(x){2*exp(-x^2/2)/(sqrt(2*pi))}
    beta=round(-(i ntegrate(beta.fun, -l nf, -k-
del ta*sqrt(n))$val ue+i ntegrate(beta.fun, k-
del ta*sqrt(n), l nf)$val ue)+1, 5)
    al pha= round(i ntegrate(al pha.fun, k, l nf)$val ue, 5)
    NUM = round(a4*(h/(1-beta) - tal + n*g + D) + a3 +
(a3l i nha*al pha*exp(-l ambda*h))/(1-exp(-l ambda*h)), 5)
    DEN = round(1/l ambda + h/(1 - beta) - tal + n*g + D, 5)

    round((a1 + a2*n)/(h) + NUM/DEN, 5)
  }

##----- OTIMI ZANDO -----##
otimizado = optim(c(a,b), EL, method = "L-BFGS-B")
##c(2, 0.2) valores iniciais para estimar k e h
k[i] = otimizado$par[1] ##k otimo
h[i] = otimizado$par[2] ##h otimo
custo[i] = otimizado$value ##custo otimo
a = k[i] - 0
b = h[i] - 0.000001
##-----##

##---- Valores de alpha e beta ----##

beta.fun = functio n(x){exp((-x^2)/2)/(sqrt(2*pi))}
##Funcao para integrar e encontrar o beta
```

```

        alpha.fun      =      function(x){2*exp(-x^2/2)/(sqrt(2*pi))}
##Funcao para integrar e encontrar o alpha

        beta[i]       =      round(-(integrate(beta.fun, -Inf, -k[i]-
2*sqrt(i))$value
+ integrate(beta.fun, k[i]-
2*sqrt(i), Inf)$value)+1, 5) ##Integrando e encontrando beta.
        alpha[i]     =      round(integrate(alpha.fun, k[i], Inf)$value, 5)
##Integrando e encontrando alpha.
        ##-----##
    }

    ## ----- ##
    resultado = cbind(1:i, k, h, alpha, 1-beta, custo)
    colnames(resultado)=c("n", "k", "h", "alpha", "beta", "custo", "ótimo", "h
ótimo", "Al pha", "Poder", "Custo")
    resultado

    res.otimo=resul tado[whi ch(resul tado[, 6]==mi n(resul tado[, 6])), ]
##Seleciona a linha óti ma##
    round(res.otimo, 3)

```

Apêndice B – Script desenvolvido para o modelo estatístico

```

##-----##
##---- Usando a função optim ----##
##-----##
rm(list=l s(a l l=TRUE))
## ---- Criando vetores ---- ##
custo=c()
beta=c()
alpha=c()
D = 10 ##Número de n`s
a = 2
b = 0.1
resultado = list()
k=3
n=5
h=1
## ----- ##
## ---- Otimizando EL ---- ##
EL=functi on(x, n=5, k=3, h=1, a1=0.5, a2=0.1, a3=25, a4=100, a3l i nha=50, l amb
da=0.01, D=2, g= 0.05, del ta=1){
  tal = round((1-exp(-l ambda*h) *(1+l ambda*h))/(l ambda*(1-
exp(-l ambda*h))), 5)
  beta.fun = functi on(x){exp((-x^2)/2)/(sqrt(2*pi))}
  alpha.fun = functi on(x){2*exp(-x^2/2)/(sqrt(2*pi))}
  beta = round(-(i ntegrate(beta.fun, -l nf, -k-
del ta*sqrt(n))$val ue + i ntegrate(beta.fun, k-
del ta*sqrt(n), l nf)$val ue)+1, 5)
  alpha = round(i ntegrate(al pha.fun, k, l nf)$val ue, 5)
  NUM = round(a4*(h/(1-beta) - tal + n*g + D) + a3 +
(a3l i nha*al pha*exp(-l ambda*h))/(1-exp(-l ambda*h)), 5)
  DEN = round(1/l ambda + h/(1 - beta) - tal + n*g + D, 5)
  round((a1 + a2*n)/(h) + NUM/DEN, 5)
}
##---- OTIMI ZANDO ----##
otimizado = optim(c(a, b), EL, method = "L-BFGS-B") ##c(2, 0.2)
valores i ni ci ai s para estimar k e h
custo = otimizado$val ue ##custo otimo
##-----##
##---- Valores de alpha e beta ----##
beta.fun = functi on(x){exp((-x^2)/2)/(sqrt(2*pi))} ##Funcao
para i ntegrar e encontrar o beta
alpha.fun = functi on(x){2*exp(-x^2/2)/(sqrt(2*pi))} ##Funcao
para i ntegrar e encontrar o alpha

beta = round(-(i ntegrate(beta.fun, -l nf, -3-1*sqrt(5))$val ue +
i ntegrate(beta.fun, 3-1*sqrt(5), l nf)$val ue)+1, 5) ##I ntegrando e
encontrando beta
alpha= round(i ntegrate(al pha.fun, k, l nf)$val ue, 5) ##I ntegrando e
encontrando al pha
##-----##

resultado = cbi nd(n, k, h, al pha, 1-beta, custo)
col names(resultado) = c("n", "k óti mo", "h
óti mo", "Al pha", "Poder", "Custo")
resultado

res.otimo = resul tado[whi ch(resul tado[, 6]==mi n(resul tado[, 6])), ]
##Seleci ona a l i nha oti ma
round(res.otimo, 3)

```