

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Danilo Machado Tereza

Formulação covariante da teoria de Pauli e precessão de Thomas

Juiz de Fora

2020

Danilo Machado Tereza

Formulação covariante da teoria de Pauli e precessão de Thomas

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Acadêmico em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexei Deriglazov

Coorientador: Walberto Guzmán Ramírez

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Machado Tereza, Danilo.

Formulação covariante da teoria de Pauli e precessão de Thomas /
Danilo Machado Tereza. – 2020.

111 f. : il.

Orientador: Alexei Deriglazov

Coorientador: Walberto Guzmán Ramírez

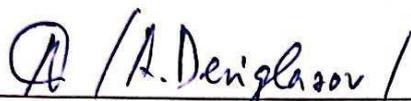
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Hamiltoniano de Pauli. 2. Partícula com Spin. 3. Hamiltoniano
Covariante. 4. Precessão de Thomas. 5. Observador Acompanhante. 6.
Observador instantâneo. 7. Transformações de Lorentz. 8. Equações BMT.
I. Deriglazov, Alexei, orient. II. Guzmán, Walberto, coorient. III. Título.

DANILO MACHADO TEREZA

FORMULAÇÃO COVARIANTE DA TEORIA DE PAULI E PRECESSÃO DE THOMAS

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



Prof. Dr. Alexei Anatolevich Deriglazov
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



Prof. Dr. Walberto Guzman Ramirez
(Co-Orientador)



Prof.^a. Dr.^a. Valéria Mattos Rosa
UFJF



Prof. Dr. Genaro Pablo Zamudio Chauca
USP

Juiz de Fora, 20 de fevereiro de 2020.

AGRADECIMENTOS

É chegado ao fim mais um dos ciclos de minha trajetória acadêmica, de muitas realizações, aprendizado, alegrias e frustrações que foram necessárias para que este passo pudesse ser dado. Sendo assim, dedico este trabalho e agradeço a todos que fizeram parte, direta e indiretamente, desta etapa em minha vida.

Agradeço à Deus por me fortalecer espiritualmente e guiar nas escolhas que trouxeram-me até aqui. Aos meus pais, Maria Aparecida e Paulo Roberto, pelo suporte incondicional em minha vida, pela paciência em compreender minhas jornadas de estudos, e todo nervosismo e ansiedade que vem junto dela. À minha irmã Dani e sobrinha Laura por me motivar, confiar no meu potencial e estar comigo sempre que precisava. À minha estimada companheira, Carolina, que acompanhou de perto todo este processo e pode sentir de mim o turbilhão de desafios que esta vida acadêmica proporciona, e que por muitas vezes fora compartilhado somente com ela. Se não fosse o amor de vocês e todo este suporte, nada disso teria sido possível. Espero que os dias dedicados ao estudo não tenham ofuscado a recíproca deste sentimento.

Aos meus amigos próximos e todos colegas na Instituição, com quem também pude compartilhar as dificuldades e frustrações, mas também as conquistas e alegrias do mestrado. Sejam nas rápidas demonstrações ao quadro, ou incansáveis discussões sobre assuntos que ultrapassam a matemática, algumas filosóficas e outras nem tanto, mas cada uma delas fazendo desta caminhada mais leve e divertida.

Ao meu orientador Alexei pelo empenho e dedicação em transmitir uma pequena parcela de seus conhecimentos. Ajudando-me a desenvolver o senso crítico científico, chamando minha atenção nas horas necessárias e sendo fundamental para que eu diferenciase a “verdade obtida” da “verdade lida”. À minha antiga orientadora de graduação, Beatriz, pelo esforço incontável em me guiar e introduzir neste vasto universo e ser a primeira a acreditar em meu potencial. Em especial aos dois, mas também aos professores que tornaram cada passo possível, e a todos eles a confiança que me fora depositada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“It is comprehensible that a person could not have arrived at such a far-reaching change of view by continuing to follow the old beaten paths, but only by introducing some sort of new idea.”

Hendrik Lorentz

RESUMO

Nós mostramos que existe uma versão manifestamente covariante do Hamiltoniano de Pauli. Covariância relativista inevitavelmente nos leva a uma não comutatividade da posição: colchetes clássicos das variáveis de posição são proporcionais ao spin. É essa não comutatividade induzida pelo spin que é responsável por transformar o Hamiltoniano covariante no Hamiltoniano de Pauli, sem nenhum apelo à fórmula da precessão de Thomas. A teoria de Pauli pode ser obtida como uma aproximação até a ordem $1/c^2$ da teoria covariante escrita em certas variáveis especiais. Essas observações esclarecem a questão de longa data sobre a discrepância entre os hamiltonianos covariante e de Pauli. Nós também discutimos propriedades de transformação do eixo de spin na passagem do laboratório para observadores acompanhante e instantaneamente acompanhante, revelando o papel do vetor de spin de Thomas no modelo covariante; rescrevemos nossa teoria covariante em termos de novas variáveis para esclarecer outro problema de longa data: obter uma formulação hamiltoniana das equações, propostas por Bargmann, Michel and Telegli, para uma partícula com spin na presença de um campo eletromagnético (aqui no caso geral, campo arbitrário).

Este trabalho foi baseado no artigo: Danilo Machado Tereza, Alexei Deriglazov, *Covariant version of Pauli Hamiltonian, spin-induced non commutativity, Thomas precession and precession of spin*, Phys. Rev. **D 100** (2019) 105009; arXiv:1910.11140.

Palavras-chave: Hamiltoniano de Pauli. Partícula com spin. Hamiltoniano covariante. Precessão de Thomas. Observador acompanhante. Observador instantâneo. Transformações de Lorentz. Equações BMT.

ABSTRACT

We show that there is a manifestly covariant version of Pauli Hamiltonian. Relativistic covariance inevitably leads to non commutative positions: classical brackets of the position variables are proportional to the spin. It is the spin-induced non commutativity that is responsible for transforming the covariant Hamiltonian into the Pauli Hamiltonian, without any appeal to the Thomas precession formula. The Pauli theory can be thought as $1/c^2$ -approximation of the covariant theory written in special variables. These observations clarify the long standing question on discrepancy between the covariant and Pauli Hamiltonians. We also discuss the transformational properties of spin axis in the passage from laboratory to comoving and instantaneous frames, and reveal the role of Thomas spin-vector in the covariant scheme; we rewrote our covariant theory in terms of new variables to clarify another long-standing problem: to obtain a Hamiltonian formulation of the equations proposed by Bargmann, Michel and Telegli, for a particle with spin in the presence of an electromagnetic field (here in the general case, arbitrary field).

This work was based on the article: Danilo Machado Tereza, Alexei Deriglazov, *Covariant version of Pauli Hamiltonian, spin-induced non commutativity, Thomas precession and precession of spin*, Phys. Rev. **D 100** (2019) 105009; arXiv:1910.11140.

Key-words: Pauli Hamiltonian. Spin particle. Covariant Hamiltonian. Thomas precession. Comoving frame. Instantaneous frames. Lorentz transformations. BMT equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Vetor sob transformação de Lorentz	15
Figura 2 – Ângulo sob transformação de Lorentz	16
Figura 3 – Eixos sob transformação de Lorentz	16
Figura 4 – Velocidades relativas entre três sistemas	20
Figura 5 – Velocidades relativas entre três sistemas	26
Figura 6 – Velocidades relativas segundo observador O'	28
Figura 7 – Família de observadores acompanhantes aproximados quando $N = 3$. .	44
Figura 8 – Observador acompanhante aproximado, no intervalo I_1	46
Figura 9 – Observador acompanhante aproximado, no intervalo I_2	47
Figura 10 – Partícula com movimento circular	51
Figura 11 – Trajetórias de OA e partícula com velocidade \vec{w} segundo O	53
Figura 12 – Disposição de vetores definidos	110
Figura 13 – (A) Disposição espacial; (B) Disposição no plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	110

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	12
2.1	CASOS ESPECIAIS E PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	13
2.2	COMPORTAMENTO DE 3-VETORES	17
2.3	LORENTZ ARBITRÁRIA SEGUNDO DECOMPOSIÇÃO POLAR	21
2.4	PRODUTO DE IMPULSOS E SUA DECOMPOSIÇÃO	25
2.4.1	Rotação de Thomas-Wigner	28
2.5	APROXIMAÇÕES	29
2.6	FORMALISMO COVARIANTE	33
2.6.1	4-vetor velocidade	34
2.6.2	4-tensor momento	35
2.6.3	Transformações de variáveis dinâmicas	39
2.6.4	Parametrização por tempo próprio	39
3	PRECESSÃO DE THOMAS	42
3.1	INTRODUÇÃO	42
3.2	CONSTRUÇÃO	43
3.2.1	Observador acompanhante de uma partícula (OA)	44
3.2.2	Observadores Inerciais e a Precessão de Thomas	48
3.2.3	Rotação (precessão) em torno do eixo fixo	50
3.3	APLICAÇÃO	52
3.3.1	Observador inercial instantâneo (OII)	52
3.3.2	Vetor velocidade segundo OA	53
3.3.3	Precessão de Thomas do 3-vetor velocidade	54
4	VERSÃO COVARIANTE DO HAMILTONIANO DE PAULI	58
4.1	MODELO CLÁSSICO E O FORMALISMO COVARIANTE	58
4.2	HAMILTONIANOS COVARIANTE E DE TEMPO FÍSICO	61
4.3	COLCHETES NÃO-CANÔNICOS	69
4.4	EQUIVALÊNCIA CLÁSSICA E QUÂNTICA	75
4.5	VERSÃO COVARIANTE MANIFESTA DA TEORIA DE PAULI	82
4.6	O PAPEL DO SPIN DE THOMAS NO FORMALISMO COVARIANTE	89
4.7	UMA SEGUNDA FORMULAÇÃO	97
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103

REFERÊNCIAS	104
APÊNDICE A – Tensor de Levi-Civita	108
APÊNDICE B – Matriz de rotação dados vetores e eixo	110

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos propor uma versão manifestamente covariante da teoria de Pauli para a descrição de um elétron com spin no formalismo Hamiltoniano. Para entendermos como os Hamiltonianos covariante e de Pauli estão relacionados sem apelar à fórmula da Precessão de Thomas precisaremos entender cada um destes assuntos de maneira independente, trabalhar seus significados físicos e suas construções matemáticas, para somente então entender o contexto que foram inseridos. Com este objetivo, subdividimos este texto em outros três capítulos, onde o final trará os resultados principais desta dissertação.

No primeiro, iremos discutir as transformações de Lorentz: Trazer a motivação pela qual as estudamos, apresentar alguns exemplos simples com uma breve discussão geométrica de cada um deles. Bem como analisar o comportamento de determinadas grandezas sob tais transformações, e apresentar sua formulação geral. Com essas ideias, estudar a não comutatividade entre o produto de dois casos especiais e entender como surge a rotação de Thomas-Wigner. Encerramos este capítulo trazendo um breve comentário sobre o formalismo covariante. Aqui, enunciamos o que será fundamental para os outros dois subsequentes.

No capítulo seguinte, discutiremos o fenômeno da Precessão de Thomas: Faremos um breve comentário histórico de como surgiu esta proposta e como há confusões a respeito dela. Tal fenômeno ficará evidente ao construirmos as transformações para um observador acompanhante (geralmente não inercial) e compararmos grandezas com as mensuradas por um observador instantâneo. Nosso objetivo é trazer a precessão fora do contexto que ela fora inicialmente inserida, pois assim ao discutirmos este contexto, ficará evidente o seu papel (ou a falta de papel) nele.

Por fim, discutiremos a versão covariante do Hamiltoniano de Pauli: Faremos inicialmente uma breve discussão entre a diferença deste modelo clássico e do formalismo covariante, apresentando qual foi a solução dada por Thomas. Depois, faremos nossa construção covariante, enunciando uma coleção de colchetes não-canônicos e entendendo como esta teoria está ligada à de Pauli a nível clássico e quântico. Por fim, traremos sua versão manifestamente covariante e entenderemos o papel do spin de Thomas neste contexto. Ao final, faremos uma equivalência desta teoria para novas variáveis afim de trazermos também uma formulação hamiltoniana manifestamente covariante das equações que descrevem uma partícula com spin na presença de campo elétrico e magnético constantes, propostas por Bargmann, Michel e Telegli.

Neste trabalho adotaremos as notações de Einstein para obter uma simplicidade operacional em diversas construções apresentadas, tal como grande parte da nossa bibliografia também adota. Além disso, ressaltamos brevemente que:

1. Os índices quando denotados por α, β, \dots representarão uma contagem em $0, 1, 2, 3$;
2. Os índices quando denotados por a, b, \dots representarão uma contagem em $1, 2, 3$;
3. 3-vetores serão denotados $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$; Em casos especiais por \vec{v} quando quisermos diferenciar as grandezas \vec{v} e \mathbf{v} ;
4. Uma matriz 3×3 será denotada por $R_{3 \times 3}$ ou simplesmente R ; A matriz identidade será denotada por I .
5. Dados os 3-vetores $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ e $\mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)$, tem-se:
 - a) Produto interno: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv a^i b_i$;
 - b) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{3 \times 3}^{ij} \equiv a^i b^j$;
 - c) Produto vetorial: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^i \equiv \epsilon^{ijk} a^j b^k$;
6. A notação $[\cdot, \cdot]$ quando tratado com operadores será considerado o comutador deles: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.
7. Simplificamos as seguintes operações através das notações:
 - a) $A^{(\alpha\mu} B^{\beta\nu)} = [A^{\alpha\mu} B^{\beta\nu} + A^{\nu\alpha} B^{\mu\beta} + A^{\beta\nu} B^{\alpha\mu} + A^{\mu\beta} B^{\nu\alpha}]$
 - b) $A^{[\mu} B^{\nu]} = A^{\mu} B^{\nu} - A^{\nu} B^{\mu}$;

2 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

O conceito de relatividade fora idealizado para abranger todos os fenômenos da natureza e tem o intuito de relacionar dois observadores através do que se entende por espaço e tempo. Até meados do século XIX, tais transformações podiam ser expressadas por

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d} \quad \text{e} \quad t' = t + \tau. \quad (2.1)$$

Onde \mathbf{v} representa uma velocidade relativa entre os observadores, \mathbf{d} um deslocamento, R uma rotação, e τ um deslocamento temporal. Estes 10 parâmetros compõem o Grupo de Galileo e a invariância das leis do movimento, propostas por Newton, sobre essas transformações seria chamada de invariância de Galileo, ou princípio da relatividade de Galileo.

Existia uma compreensão aceitável de que todas as teorias respeitariam este conceito de relatividade, até que em meados do século XIX iniciou-se um processo de reformulação deste conceito¹. A comunidade científica se dividia e experimentos como o de Fizeau de 1851 e os de Michelson e Morley ao longo da década de 1880 a respeito da velocidade da luz indicavam que alguma mudança deveria ser feita.

Lorentz propôs um novo grupo de transformações no espaço e tempo, e não somente adequou a teoria aos resultados experimentais, como também verificou que as equações de Maxwell permaneceriam invariantes sob este novo grupo (que ficaria conhecido como transformações de Lorentz).

Seguindo uma sugestão de Poincaré, Einstein propôs que todas as leis físicas deveriam ser tais que permanecessem inalteradas sob uma transformação de Lorentz. E em 1905, era proposta por ele, a relatividade restrita que utilizava esse grupo de transformações como base da teoria, resultando em uma nova visão sobre o espaço e tempo e como estes conceitos estão relacionados. Nela, a velocidade da luz seria dada por uma constante c , não importasse o referencial.

Essa reformulação em noções fundamentais encontrou certa resistência por parte da comunidade científica. Porém tal teoria se consolidou quando, em 1908, Hermann Minkowski introduziu o conceito de espaço-tempo, que é absoluto, um passo importante em seu desenvolvimento. Sendo assim, com suas devidas correções, poderíamos levar a mecânica clássica a esse novo conceito relativístico e através dele, descrever melhor as leis da natureza². Hoje a teoria é consolidada experimentalmente, ver [2], e aceita na comunidade científica.

¹ Para mais detalhes sobre as questões levantadas e os principais experimentos realizados na época, ver [1–4].

² Uma discussão com mais rigor matemático pode ser encontrada em [1, 5].

Por essa motivação, somos levados a estudar tal grupo de transformações com mais detalhes, levando-nos à seguinte definição:

Definição 2.0.1. Considere $O(x^0 = ct, \mathbf{x})$ e $O'(x'^0 = ct', \mathbf{x}')$ sistemas de coordenadas do espaço-tempo. Uma *transformação de Poincaré* é uma transformação $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ tal que

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad (2.2)$$

fixado $a^\alpha \in \mathbb{R}$, e Λ^α_β é uma matriz 4×4 que satisfaz

$$\Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{onde} \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A matriz η é conhecida como *métrica de Minkowski* e no caso particular que $a^\alpha = 0$, $\forall \alpha$ a transformação $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ é chamada de *transformação de Lorentz*. Por conta disso, quando estivermos trabalhando no espaço de Minkowski 4-dimensional com coordenadas $x^\mu = (x^0 = ct, x^i)$, usaremos esta métrica $\eta_{\mu\nu}$.

Este conceito relativístico não é tão evidente como o anterior, portanto nos dedicaremos, ao longo deste capítulo, a entender melhor como tais transformações funcionam. Na seção 2.1, estudaremos alguns casos particulares e suas propriedades geométricas. Na seção 2.2, vamos apresentar o comportamento de algumas grandezas sob essas transformações. Ao final traremos a velocidade relativa entre três sistemas inerciais, uma diferença substancial da teoria anterior. Na seção 2.3, vamos caracterizar uma transformação de Lorentz como o produto de duas transformações específicas, para então, na seção 2.4, estudarmos o produto de dois impulsos e assim entendermos como surge a rotação de Thomas-Wigner. Ao final, na seção 2.5, faremos um estudo aproximado dos resultados já obtidos e na seção 2.6 uma breve apresentação sobre o formalismo covariante.

2.1 CASOS ESPECIAIS E PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Considere $O(x^0 = ct, \mathbf{x})$ e $O'(x'^0 = ct', \mathbf{x}')$ observadores inerciais relacionados por meio da seguinte transformação de Lorentz:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad \text{onde} \quad \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

Exemplo 2.1.1. A transformação (2.4) pode representar uma rotação $R_{3 \times 3}$ no espaço, dada por

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ \mathbf{x}' = R\mathbf{x} \end{cases} \quad \text{onde} \quad R^T R = I \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Neste caso, denotaremos $\Lambda \equiv \Lambda_R$.

Exemplo 2.1.2. A transformação (2.4) também pode representar um impulso de velocidade \mathbf{v} em relação ao observador O , dada por

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma \left[x^0 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{x} \right) \right] \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v}^2} (\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mathbf{v} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} x^0 \equiv \gamma A \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{x} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} x^0 \end{cases} \quad (2.6)$$

ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v}^T/c \\ -\mathbf{v}/c & A(\mathbf{v}/c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde

$$\gamma \equiv \gamma \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

e

$$A \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{1}{\gamma} \left[I + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right] \quad \text{com} \quad A^{-1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \gamma \left[I - \frac{(\gamma - 1) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right]. \quad (2.9)$$

onde $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})^{ij} \equiv \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j$. Pode-se verificar que tal transformação é de Lorentz apenas verificando a condição (2.4). Neste caso, denotaremos $\Lambda \equiv \Lambda_{\mathbf{v}}$.

Considere a sequência de eventos $x^\mu = (ct, \mathbf{v}t)$ observados por O . Segundo a transformação (2.6), obtemos as coordenadas desta sequência no sistema O' , e que são dadas por $x'^\mu = (\gamma^{-1}ct, \mathbf{0})$. Portanto origem de O' se move com velocidade \mathbf{v} segundo O e passa pela origem de O no instante $x^0 = ct = 0$ que condiz com nossa afirmação inicial sobre o sistema.

Exemplo 2.1.3. Afirmamos que inversa de transformação (2.7), é dada por

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v}^T/c \\ \mathbf{v}/c & A(\mathbf{v}/c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

De fato, por cálculo direto obtemos $\Lambda_{\mathbf{v}} \Lambda' = I_{4 \times 4} = \Lambda' \Lambda_{\mathbf{v}}$, onde $\Lambda_{\mathbf{v}}$ representa a matriz da transformação (2.7) e Λ' a matriz da transformação (2.10). E mais, a sequência de eventos $\mathbf{x}' = (ct', -\mathbf{v}t')$ em O' são transformados por (2.10) em eventos de coordenadas $\mathbf{x} = (\gamma^{-1}x'^0, \mathbf{0})$ em O . Portanto origem de O se move com velocidade $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ segundo O' e passa pela origem de O' no instante $t' = 0$.

Para simplificarmos as notações, consideramos

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \vec{v} \quad \text{então} \quad \vec{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (2.11)$$

Com certo abuso de terminologia, podemos chamar \vec{v} como sendo a velocidade do sistema O' em relação a O . Segundo essa notação, rescrevemos (2.7) e (2.10) como sendo respectivamente

$$\Lambda_{\vec{v}} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -\vec{v} & A(\vec{v}) \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\vec{v}}^{-1} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{v}^T \\ \vec{v} & A(\vec{v}) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

onde podemos considerar $\Lambda_{\vec{v}}^{-1} = \Lambda_{-\vec{v}}$, pois $\gamma(\vec{v}) = \gamma(-\vec{v})$ e $A(\vec{v}) = A(-\vec{v})$. Definimos as projeções paralela e ortogonal a \vec{v} como sendo, respectivamente:

$$P^{ij}(\vec{v}) = \frac{v^i v^j}{\vec{v}^2} \quad \text{e} \quad N^i_j(\vec{v}) = \delta^i_j - P^i_j(\vec{v}) \quad (2.13)$$

com as seguintes propriedades

$$P^2 = P, \quad P\vec{v} = \vec{v}, \quad N^2 = N, \quad N\vec{v} = \mathbf{0}, \quad NP = PN = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad I = N + P \quad (2.14)$$

Com isso, dado um 3-vetor \mathbf{x} , podemos decompor como $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = N\mathbf{x} + P\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$. E assim, rescrevemos as equações de $A(\vec{v})$ e sua inversa $A^{-1}(\vec{v})$ como sendo

$$A(\vec{v}) = \frac{1}{\gamma}N(\vec{v}) + P(\vec{v}) \quad \text{e} \quad A^{-1}(\vec{v}) = \gamma N(\vec{v}) + P(\vec{v}), \quad (2.15)$$

com as seguintes propriedades:

$$A(\vec{v})\vec{v} = \vec{v}, \quad A^2(\vec{v}) = \frac{1}{\gamma^2}N + P, \quad A^{-1}(\vec{v})\vec{v} = \vec{v}, \quad A^{-1}A^{-1} = \gamma^2 N + P. \quad (2.16)$$

Usando as projeções (2.13) na transformação (2.12) no instante $t = 0$, isto é, $x^0 = 0$, obtemos o vetor posição dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \Lambda_{\vec{v}}\mathbf{x} = \Lambda_{\vec{v}}(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) = \gamma A(\vec{v})(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) = \\ &= (N(\vec{v}) + \gamma P(\vec{v}))(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) = \mathbf{x}_\perp + \gamma\mathbf{x}_\parallel, \end{aligned}$$

portanto

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_\perp + \gamma\mathbf{x}_\parallel. \quad (2.17)$$

Por essa construção, podemos interpretar geometricamente o vetor \mathbf{x}' : Se o vetor \mathbf{x} representa uma partícula observada por O , então vetor posição segundo O' será soma de representante ortogonal \mathbf{x}_\perp com o fator $\gamma\mathbf{x}_\parallel$, ou seja,

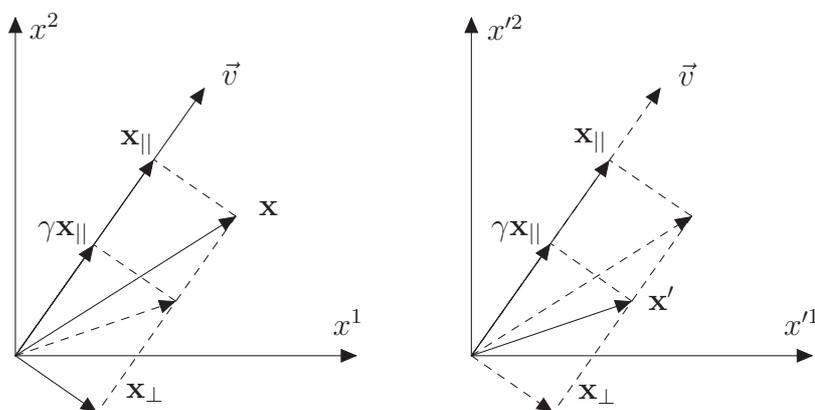


Figura 1 – Vetor sob transformação de Lorentz

Exemplo 2.1.4. Considere a transformação de Lorentz dada por (2.12), onde \vec{v} é paralelo a x^1 tal que $\gamma = 2$. No instante $t = 0$, considere uma haste com extremidade A em $(0, 0, 0)$ e extremidade B em $(1, 0, 0)$ segundo O . Pela identidade (2.17), após transformação de Lorentz, os extremos A e B desta haste serão respectivamente $(0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ segundo O' , ou seja, no ponto de vista de O , eixo de O' na direção de impulso estará comprimido 2 vezes. Portanto O' vai achar que a haste é duas vezes maior.

Exemplo 2.1.5. Sob a mesma transformação do exemplo anterior, considera uma haste com extremidades A em $(0, 0, 0)$ e B em $(1, 1, 0)$. Logo, ângulo entre haste e direção de impulso será 45° . Segundo a identidade (2.17), após transformação de Lorentz, extremidades A e B dessa haste serão respectivamente $(0, 0, 0)$ e $(2, 1, 0)$, portanto O' encontrará ângulo entre haste e direção de impulso menor que 45° .

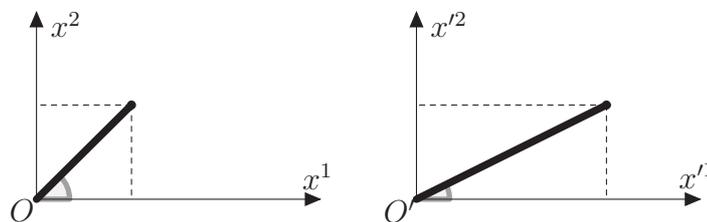


Figura 2 – Ângulo sob transformação de Lorentz

Em particular, esta haste pode ser eixo de um dos observadores em relação dos eixos de outro.

Exemplo 2.1.6. Considere a transformação de Lorentz dada por (2.12), onde \vec{v} possui ângulo de 45° com eixo x^1 em O , e que $\gamma = 2$. No instante $t = 0$, considere \mathbf{x}' sobre eixo x'^1 , e \mathbf{y}' sobre eixo x'^2 no sistema O' . Coordenadas de \mathbf{x}' e \mathbf{y}' no sistema O são dadas segundo $\mathbf{x} = \mathbf{x}'_{\perp} + \gamma\mathbf{x}'_{\parallel}$. Veja construção na figura a seguir (à direita).

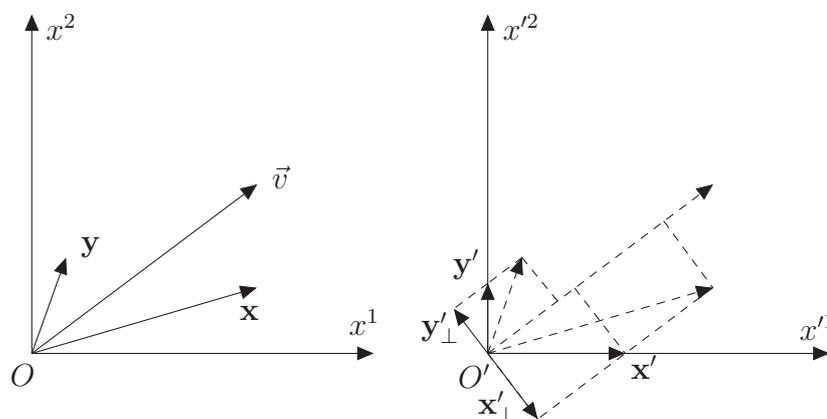


Figura 3 – Eixos sob transformação de Lorentz

Assim O vai observar vetores dos eixos de O' deformados nas posições apontadas pela figura acima (à esquerda). Portanto, no ponto de vista de O , eixos de O' não são perpendiculares, porém distorcidos na direção de impulso \vec{v} .

2.2 COMPORTAMENTO DE 3-VETORES

No estudo de transformações das Lorentz é importante ressaltar como são as regras de transformação de alguns 3-vetores especiais. Nesta seção, iremos obter tais regras para 3-vetores que representam velocidade e momento e veremos que eles não possuem um comportamento linear. No caso da velocidade, esta não possui a mesma regra para composição de velocidades da relatividade de Galileo. Para tais cálculos utilizamos algumas propriedades do símbolo de Levi-Civita enunciadas no apêndice A.

Com isso, levantamos a importância de compreendermos sobre qual grandeza estamos tratando em um determinado problema, visto que grandezas diferentes possuem comportamentos diferentes sob essas transformações.

Exemplo 2.2.1. Sejam O' e O relacionados por meio de uma transformação de Lorentz Λ . Suponhamos que O' esteja observando uma partícula que se move com velocidade $\mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'}$. Como \mathbf{w}' se transforma quando a transformação é dada por Λ , Λ_R ou $\Lambda_{\vec{v}}$?

Pela notação proposta em (2.11), obtemos

$$w'^i = \frac{dx'^i}{dx'^0} = \frac{\Lambda^i_0 dx^0 + \Lambda^i_j dx^j}{\Lambda^0_0 dx^0 + \Lambda^0_k dx^k} = \frac{\Lambda^i_0 + \Lambda^i_j \frac{dx^j}{dx^0}}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k \frac{dx^k}{dx^0}} = \frac{\Lambda^i_0 + \Lambda^i_j w^j}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} \quad (2.18)$$

Quando $\Lambda \equiv \Lambda_R$ representa uma rotação, como vimos em (2.5), obtemos

$$\vec{w}' = R\vec{w}, \quad (2.19)$$

ou seja, \vec{w} tem comportamento Euclidiano.

Quando $\Lambda \equiv \Lambda_{\vec{v}}$ representa um impulso, como vimos em (2.12), obtemos

$$\vec{w}' = \frac{A(\vec{v})\vec{w} - \vec{v}}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} \quad \text{com inversa} \quad \vec{w} = \frac{A(\vec{v})\vec{w}' + \vec{v}}{1 + (\vec{v}, \vec{w}')}, \quad (2.20)$$

onde \vec{w} são as coordenadas de vetor \vec{w}' em relação de O . Em particular, \vec{w}' pode ser início de sistema O'' , então este novo sistema está ligado com O' por meio de mais uma transformação de Lorentz $\Lambda_{\vec{w}'}$. Neste caso, a segunda identidade de (2.20) representa regra de soma de velocidades na relatividade especial. Contudo, deixaremos essa discussão para o final da seção.

Quando $c \rightarrow \infty$, isto é, quando restringimos ao contexto da física clássica, a segunda identidade em (2.20) se reduz a $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{v}$, ou seja, comportamento esperado para composição de velocidades (no sentido de composição de transformações de Galileo).

Observação 2.2.2. Assumindo (2.20), afirmamos que sistema O tem velocidade $-\vec{v}$ em relação de O' . De fato, vamos supor que uma partícula está se movendo com velocidade $-\vec{v}$ em relação a O' . Pela segunda identidade de (2.20), a velocidade da partícula observada por O será:

$$\vec{w} = \frac{A(\vec{v})(-\vec{v}) + \vec{v}}{1 + (\vec{v}, -\vec{v})} = \frac{\frac{1}{\gamma} [I + (\gamma - 1)P(\vec{v})] (-\vec{v}) + \vec{v}}{1 - (\vec{v}, \vec{v})} = \mathbf{0}.$$

Exemplo 2.2.3. Suponhamos que O' observou, no instante x'^0 , uma partícula de massa $m = 1$ no ponto \mathbf{x}' com velocidade \mathbf{w}' e formou o momento angular dela em relação da sua origem: $\vec{\mu}' = [\mathbf{x}', \mathbf{w}']$. Como $\vec{\mu}'$ se transforma quando a transformação é dada por Λ , Λ_R ou $\Lambda_{\vec{v}}$?

Quando Λ é arbitrária, sabemos que $x^i = \Lambda^i_{\nu} x'^{\nu}$ e pela identidade (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} \mu'^k &= [\mathbf{x}', \mathbf{w}']^k = c[\mathbf{x}', \vec{w}']^k = c\epsilon^{kij} x'^i w'^j = c\epsilon^{kij} \Lambda^i_{\nu} x'^{\nu} \left(\frac{\Lambda^j_0 + \Lambda^j_n w^n}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} \right) = \\ &= \frac{c}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} [\epsilon^{kij} \Lambda^i_m x^m \Lambda^j_n w^n + \epsilon^{kij} (\Lambda^i_m x^m \Lambda^j_0 + \Lambda^i_0 x^0 \Lambda^j_n w^n)] = \\ &= \frac{1}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} [\det(\Lambda^a_b) (\Lambda^{-1})^s_k \mu^s + c\epsilon^{kij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_n (x^0 w^n - x^n)], \end{aligned}$$

portanto

$$\mu'^k = \frac{1}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} [\det(\Lambda^a_b) (\Lambda^{-T})^k_s \mu^s + c\epsilon^{kij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_n (x^0 w^n - x^n)]. \quad (2.21)$$

Quando $\Lambda \equiv \Lambda_R$, sabemos $\det(R) = 1$, $R^T R = I$, $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$, e por (2.19), obtemos $\vec{w}' = R\vec{w}$. Assim

$$\begin{aligned} \mu'^k &= [\mathbf{x}', \mathbf{w}']^k = c[\mathbf{x}', \vec{w}']^k = c[R\mathbf{x}, R\vec{w}]^k = c\epsilon^{kij} R^{in} x^n R^{jm} w^m = \\ &= c\epsilon^{lij} \delta^k_l R^{in} x^n R^{jm} w^m = c\epsilon^{lij} R^{lr} R^{kr} R^{in} R^{jm} x^n w^m = \\ &= c \det(R) \epsilon^{rnm} R^{kr} x^n w^m = c\epsilon^{rnm} R^{kr} x^n w^m = \\ &= R^{kr} [\mathbf{x}, \mathbf{w}]^r = (R\vec{\mu})^k, \end{aligned}$$

portanto

$$\vec{\mu}' = R\vec{\mu}. \quad (2.22)$$

Quando $\Lambda \equiv \Lambda_{\vec{v}}$ sabemos que \mathbf{x}' segue regra de transformação (2.12) e \vec{w}' segue regra (2.20). Assim

$$\begin{aligned} \mu'^k &= c[\mathbf{x}', \vec{w}']^k = c\epsilon^{kij} x'^i w'^j = \\ &= \frac{1}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} c\epsilon^{kij} \gamma(v) [A^{in}(v) x^n - v^i x^0] [A^{jm}(v) w^m - v^j] = \\ &= \frac{1}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} c\epsilon^{kij} \gamma(v) [A^{in}(v) x^n A^{jm}(v) w^m - v^i x^0 A^{jm}(v) w^m - A^{in}(v) x^n v^j + v^i x^0 v^j]. \end{aligned}$$

Façamos separadamente cada parcela, onde

$$\begin{aligned} -c\epsilon^{kij}\gamma(v)v^ix^0A^{jm}(v)w^m &= -c\epsilon^{kij}\left(x^0v^iw^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}x^0v^jv^mw^mv^i\right) = \\ &= -c\epsilon^{kij}x^0v^iw^j; \\ -c\epsilon^{kij}\gamma(v)A^{in}(v)x^nv^j &= -c\epsilon^{kij}\left(x^iv^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^iv^nx^nv^j\right) = \\ &= -c\epsilon^{kij}x^iv^j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\epsilon^{kij}\gamma(v)A^{in}(v)x^nA^{jm}(v)w^m &= c\epsilon^{kij}\left(x^i + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^iv^nx^n\right)\frac{1}{\gamma(v)}\left(w^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^mw^mv^j\right) = \\ &= \frac{c}{\gamma(v)}\left([\mathbf{x}, \vec{w}]^k + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}(v^mv^j\epsilon^{kij}(w^mx^i - x^mw^i))\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}\left([\mathbf{x}, \mathbf{w}]^k + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^mv^j\epsilon^{kij}[\mathbf{x}, \mathbf{w}]_{im}\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}\left(\mu^k + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^mv^j\epsilon^{kij}\epsilon^{lim}[\mathbf{x}, \mathbf{w}]^l\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}\left(\mu^k + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}[\vec{v}, [\vec{\mu}, \vec{v}]]^k\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}\left(\mu^k + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}(\mu^kv^2 - v^kv^n\mu^n)\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}\gamma(v)\left(\mu^k - \frac{(\gamma(v)-1)}{\gamma(v)}\frac{v^kv^n}{v^2}\mu^n\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(v)}(A^{-1})^{kn}(v)\mu^n; \end{aligned}$$

$$c\epsilon^{kij}\gamma(v)v^ix^0v^j = c\gamma(v)[\vec{v}, \vec{v}]^kx^0 = 0.$$

Portanto

$$\vec{\mu}' = \frac{1}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} \left(\gamma^{-1}(v)A^{-1}(v)\vec{\mu} + c[x^0\vec{w} - \vec{x}, \vec{v}] \right). \quad (2.23)$$

Da mesma forma que a velocidade de uma partícula, o momento não tem comportamento linear na transformação de Lorentz (impulso).

Na seção 2.6, veremos que tais grandezas podem ser associadas a outras de dimensão maior: no caso do 3-vetor velocidade, vamos estudá-lo como um 4-vetor; e no caso do 3-vetor de momento, vamos estudá-lo como um 4-tensor. A vantagem em fazer essa correspondência está na linearidade destas grandezas sob transformações de Lorentz, embora elas não possuam um significado físico direto.

Para encerrarmos a seção vamos estudar a velocidade relativa entre três sistemas de coordenadas. Para isso, considere observadores inerciais O' e O'' transformados a partir do observador O pelas respectivas transformações de Lorentz (impulso):

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\vec{v}}^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \quad \text{e} \quad x''^{\mu} = \Lambda_{\vec{w}}^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}.$$

Como sabemos, sistema O' tem velocidade \vec{v} em relação a O , e sistema O'' velocidade \vec{w} em relação a O . Como vimos na observação (2.2.2), sistema O tem velocidade $-\vec{v}$ em relação a O' e $-\vec{w}$ em relação a O'' .

Resta-nos a velocidade relativa entre os sistemas O' e O'' . Considere \vec{v}'' a velocidade do sistema O' em relação de O'' e \vec{w}' velocidade de O'' em relação de O' , veja esquema abaixo:

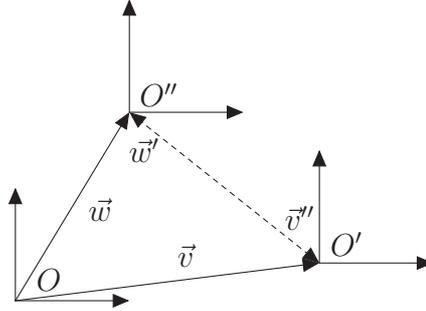


Figura 4 – Velocidades relativas entre três sistemas

Pelas observações no início da seção, conhecendo os vetores \vec{v} e \vec{w} podemos construir vetores \vec{v}'' e \vec{w}' através da identidade (2.20). Ou seja

$$\vec{w}' = \frac{A(\vec{v})\vec{w} - \vec{v}}{1 - (\vec{v}, \vec{w})}, \quad (2.24)$$

e

$$\vec{v}'' = \frac{A(\vec{w})\vec{v} - \vec{w}}{1 - (\vec{v}, \vec{w})}. \quad (2.25)$$

Observação 2.2.4. Comprimento euclidiano de vetores \vec{w}' e \vec{v}'' coincidem. De fato, pelas propriedades em (2.16), temos $A(\vec{v})\vec{w}\vec{v} = \vec{v}\vec{w} = A(\vec{w})\vec{v}\vec{w}$. Portanto

$$\begin{aligned} (\vec{w}')^2 - (\vec{v}'')^2 &= \frac{(A(\vec{v})\vec{w})^2 - 2A(\vec{v})\vec{w}\vec{v} + \vec{v}^2 - (A(\vec{w})\vec{v})^2 + 2A(\vec{w})\vec{v}\vec{w} - \vec{w}^2}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = \\ &= \frac{(A(\vec{v})\vec{w})^2 - 2\vec{w}\vec{v} + \vec{v}^2 - (A(\vec{w})\vec{v})^2 + 2\vec{v}\vec{w} - \vec{w}^2}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = \\ &= \frac{\frac{\vec{w}^2}{\gamma^2(\vec{v})} + \vec{v} \otimes \vec{v}\vec{w} \otimes \vec{w} + \vec{v}^2 - \frac{\vec{v}^2}{\gamma^2(\vec{w})} - \vec{w} \otimes \vec{w}\vec{v} \otimes \vec{v} - \vec{w}^2}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = \\ &= \frac{\frac{\vec{w}^2}{\gamma^2(\vec{v})} + \vec{v}^2 - \frac{\vec{v}^2}{\gamma^2(\vec{w})} - \vec{w}^2}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = \frac{\vec{w}^2 \left(\frac{1}{\gamma^2(\vec{v})} - 1 \right) - \vec{v}^2 \left(\frac{1}{\gamma^2(\vec{w})} - 1 \right)}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = \\ &= \frac{\vec{w}^2 (-\vec{v}^2) - \vec{v}^2 (-\vec{w}^2)}{(1 - (\vec{v}, \vec{w}))^2} = 0 \end{aligned}$$

Observe que (2.24) e (2.25) implicam que as velocidades \vec{w}' e \vec{v}'' não são opostas, ou seja, não possuem o comportamento da observação 2.2.2. Portanto, sistemas O' e O'' não estão ligados por meio de uma transformação de Lorentz do tipo impulso, neste caso teríamos ainda uma rotação entre os sistemas.

Assim, mesmo que os sistemas O' e O'' estejam ligados a O somente por seus respectivos impulsos isso induz entre eles, além de um impulso, uma certa rotação. Antes de entendermos mais sobre essa rotação e como as velocidades (2.24) e (2.25) estão relacionadas somos levados a enunciar a decomposição de uma transformação de Lorentz arbitrária, e através dela entender melhor como se dá esta composição de dois impulsos de Lorentz.

2.3 LORENTZ ARBITRÁRIA SEGUNDO DECOMPOSIÇÃO POLAR

Considere uma transformação de Lorentz arbitrária dada por Λ^α_β , que relaciona os sistemas de coordenadas $O(x^0 = ct, \mathbf{x})$ e $O'(x'^0 = ct', \mathbf{x}')$ segundo

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad (2.26)$$

e que atende a condição (2.3). Além disso, consideramos também que o observador O' possui velocidade $\mathbf{v} = (v^i)$ em relação a O .

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma decomposição de $\Lambda^\alpha_\beta \equiv \Lambda$ que nos possibilite uma interpretação de seus parâmetros e nos ajude a compreender a relação entre as velocidades relativas (2.24) e (2.25) na composição de impulsos. Para isso, façamos como apresentado em [6], e escrevemos a seguinte representação:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \ell & \mathbf{m}^T \\ \mathbf{k} & T \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

em que $\ell = \Lambda^0_0$; $\mathbf{m} = (m_i)_{3 \times 1}$ onde $m_i = \Lambda^0_i$; $\mathbf{k} = (k^j)_{3 \times 1}$ onde $k^j = \Lambda^j_0$; e $T = (T^j_i)_{3 \times 3}$ onde $T^j_i = \Lambda^j_i$.

Como O' está se movendo com velocidade \mathbf{v} em relação a O , construímos o evento $(ct, \mathbf{v}t)$ em O que representa origem de O' , assim como vimos no exemplo 2.1.2. Com isso obtemos, por (2.27), que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{k}x^0 + T\mathbf{r} = 0 \quad \text{onde} \quad \frac{\mathbf{r}}{x^0} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (2.28)$$

A partir dessas igualdades construímos a seguinte relação:

$$0 = \mathbf{k}x^0 + T \left(x^0 \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \implies \mathbf{k} = -\frac{1}{c} T\mathbf{v} \quad (2.29)$$

Estudamos alguns casos da condição (2.3) e rescrevemos para as notações dessa seção. Consideramos $\alpha = 0$ e $\beta = i$, obtemos

$$\begin{aligned}\eta_{0i} &= \Lambda^\mu_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_i = (\Lambda^0_0 \eta_{0\nu} + \Lambda^j_0 \eta_{j\nu}) \Lambda^\nu_i \\ &= -\ell \Lambda^0_i + k^j \Lambda^j_i \\ &= -\ell m_i + k^j T^j_i\end{aligned}$$

Como $i \neq 0$ temos $\eta_{0i} = 0$ para todo i , portanto

$$\ell \mathbf{m} - \mathbf{k}T = 0. \quad (2.30)$$

E quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ obtemos pelo mesmo procedimento

$$\ell^2 - \mathbf{k}^2 = 1 \quad (2.31)$$

Considerando (2.29) e (2.30) obtemos

$$\ell m_i = k^a T^a_i = -\frac{1}{c} (T^a_b v_b T^a_i) = -\frac{1}{c} Q^i_b v_b \quad \text{onde } Q = T^T T,$$

portanto

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{\ell c} Q \mathbf{v}. \quad (2.32)$$

Pela equação (2.31) obtemos

$$\ell^2 - 1 = \mathbf{k}^2 = k^a k^a = \left(-\frac{1}{c} T^a_b v_b\right) \left(-\frac{1}{c} T^a_i v_i\right) = \frac{1}{c^2} v_i Q^i_b v_b,$$

portanto

$$\mathbf{v} Q \mathbf{v}^T = c^2 (\ell^2 - 1) \quad (2.33)$$

Retornando ao estudo de caso da condição (2.3), quando $\alpha = i$ e $\beta = j$, obtemos

$$\begin{aligned}\eta_{ij} &= \Lambda^\mu_i \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_j = (\Lambda^0_i \eta_{0\nu} + \Lambda^n_i \eta_{n\nu}) \Lambda^\nu_j \\ &= -\Lambda^0_i \Lambda^0_j + \Lambda^n_i \Lambda^n_j \\ &= -m_i m_j + T^a_i T^a_j \\ &= -m_i m_j + Q^j_i.\end{aligned}$$

Como $i \neq 0 \neq j$, sendo I a matriz identidade 3×3 , temos

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - Q = -I, \quad (2.34)$$

onde $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})_{ij} = m_i m_j$. Multiplicando esta equação por \mathbf{v} e aplicando as identidades (2.32) e (2.33) obtemos:

$$\begin{aligned}\eta_{ij} v_i &= (-m_i m_j + Q^j_i) v_i = \frac{1}{c\ell} Q^i_b v_b m_j v_i + Q^j_i v_i = \frac{1}{c\ell} c^2 (\ell^2 - 1) m_j + Q^j_i v_i = \\ &= c\ell m_j - \frac{c}{\ell} m_j + Q^j_i v_i = -Q^j_b v_b - \frac{c}{\ell} \left(-\frac{1}{c\ell} Q^j_b v_b\right) m_j + Q^j_i v_i = \frac{1}{\ell^2} Q^j_b v_b\end{aligned}$$

portanto,

$$Q\mathbf{v} = \ell^2\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

A equação (2.35) nos permite concluir que \mathbf{v} é autovetor da matriz simétrica \mathbf{Q} , cujo autovalor é ℓ^2 . Pelas equações (2.33) e (2.35) podemos relacionar este autovalor com a velocidade do observador, isto é,

$$\ell^2 = (1 - \vec{v}^2)^{-1} \quad \text{onde} \quad \vec{v} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (2.36)$$

Considerando $\gamma = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}$ e $\xi = \pm 1$, obtemos de maneira explícita um dos parâmetros da transformação em termos da velocidade, dado por:

$$\ell = \xi\gamma. \quad (2.37)$$

Pelas relações (2.32) e (2.35) temos

$$\mathbf{m} = -\frac{\ell}{c}\mathbf{v}, \quad (2.38)$$

que combinada com a identidade (2.34) nos dá

$$Q = I + \gamma^2\vec{v}^2\mathcal{P} \quad \text{onde} \quad P(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{\vec{v}^2}. \quad (2.39)$$

Como vimos, $P(\vec{v})$ é projeção sobre direção de \vec{v} e possui as propriedades (2.14). Por fim, definimos $\Gamma = \frac{T}{\gamma}$, a partir dele e das identidades (2.29), (2.37) e (2.38) somos capazes de reescrever a transformação Λ da seguinte forma

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} \xi & -\xi\vec{v}^T \\ -\Gamma\vec{v} & \Gamma \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

em que é verificado a igualdade

$$\Gamma^T\Gamma = (1 - \vec{v}^2)I + \vec{v}^2P(\vec{v}). \quad (2.41)$$

Dessa forma, podemos aplicar o teorema da decomposição polar, ver [7], na matriz Γ , que garante a existência de uma matriz ortogonal R e uma matriz positiva simétrica A que nos permite escrever

$$\Gamma = RA \quad \text{onde} \quad R^T R = I \quad \text{e} \quad A^T = A, \quad (2.42)$$

de maneira única quando Γ é não singular. Então podemos ver que a identidade (2.41) determina a matriz A . De fato,

$$A^2 = AA = A^T A = A^T R^T R A = (RA)^T (RA) = \Gamma^T \Gamma = (1 - \vec{v}^2)I + \vec{v}^2 P(\vec{v}).$$

Portanto,

$$A = \left(\sqrt{1 - \vec{v}^2}\right) I + \left(1 - \sqrt{1 - \vec{v}^2}\right) P(\vec{v}). \quad (2.43)$$

Por construção, rescrevemos a decomposição (2.40), da seguinte maneira

$$\Lambda = \Lambda_{R\xi}\Lambda_{\vec{v}} \quad \text{onde} \quad \Lambda_{R\xi} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\vec{v}} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -\vec{v} & A \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Como Λ é arbitrária, obtemos uma boa interpretação de como é seu comportamento segundo a decomposição acima. Observe que decompomos a transformação de Lorentz em duas etapas: a primeira diz respeito ao “impulso” empregado na transformação; e a segunda diz respeito às rotações do espaço e se há ou não uma reflexão temporal. Portanto, é suficiente mostrar o comportamento de algum evento ou grandeza estudada somente nestes casos, contemplando assim, o caso geral.

Embora tenhamos apresentado uma representação de uma transformação de Lorentz arbitrária, a discussão ao longo deste texto não abordará uma reflexão temporal, somente transformações como as estudadas na seção 2.1, então podemos assumir que $\xi = 1$, e assim rescrever (2.44) em

$$\Lambda = \Lambda_{R''}\Lambda_{\vec{v}} \quad \text{onde} \quad \Lambda_{R''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\vec{v}} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -\vec{v} & A \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Assim $x'^{\mu} = (\Lambda_{R''}\Lambda_{\vec{v}}x)^{\mu}$. Damos importância para a notação R'' ao invés de simplesmente R , pois não podemos dizer que O' está rotacionado por R'' em relação a O , pois não temos noção de rotação para sistemas em movimento relativo. Entretanto, podemos construir o sistema auxiliar $O'' : x''^{\mu} = (\Lambda_{\vec{v}})^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ que implica em $x'^{\mu} = \Lambda_{R''}x''^{\mu}$. Cujas interpretações é conectar os sistemas O' e O'' através de uma rotação R'' , ou seja, inícios desses sistemas coincidem para todo x^0 e estes sistemas diferem somente de uma rotação. Desta maneira a rotação que aparece na decomposição polar não representa rotação do sistema inicial O para o final O' , mas sim do sistema auxiliar O'' (que foi impulsionado por $\Lambda_{\vec{v}}$) para o final.

Por outro lado, também podemos escrever a transformação de Lorentz Λ da seguinte maneira:

$$\Lambda = \Lambda_{\vec{v}'''}\Lambda_R \quad \text{onde} \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\vec{v}'''} = \gamma''' \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}'''^T \\ -\vec{v}''' & A''' \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Mas antes de apresentarmos essa construção, observe que nessa representação invertemos a ordem de aplicação das transformações, logo $x'^{\mu} = (\Lambda_{\vec{v}'''}\Lambda_Rx)^{\mu}$. Neste caso, temos uma rotação do sistema O para o sistema auxiliar $O''' : x'''^{\mu} = (\Lambda_R)^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ e um impulso deste sistema auxiliar para o final O' .

Para construirmos a decomposição (2.46) a partir da (2.45), vamos considerar

$$R'' \equiv R \quad \text{e} \quad \vec{v}''' = R\vec{v}. \quad (2.47)$$

Como $|\vec{v}''''| = |\vec{v}|$ (rotação), temos $\gamma'''' = \gamma$. Por fim, observe que a construção de A depende do parâmetro \vec{v} , ou seja, $A(\vec{v})$, então, se fizermos:

$$\begin{aligned} RA(\vec{v}) &= RA(R^T R\vec{v}) = RA(R^T \vec{v}''') = \frac{1}{\gamma''''} R \left(I + (\gamma - 1) \frac{R^T \vec{v}'''' (R^T \vec{v}'''')^T}{\vec{v}''''^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(R + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}'''' \vec{v}''''^T R}{\vec{v}''''^2} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(I + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}'''' \vec{v}''''^T}{\vec{v}''''^2} \right) R = \\ &= A'''' R, \end{aligned}$$

obtemos

$$RA = A'''' R \quad (2.48)$$

Pelas identidades (2.47), (2.48) e $\gamma'''' = \gamma$, rescrevemos a decomposição (2.45) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -R'' \vec{v} & R'' A \end{pmatrix} &= \gamma'''' \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -R\vec{v} & RA \end{pmatrix} = \gamma'''' \begin{pmatrix} 1 & -R^T R\vec{v}^T \\ -R\vec{v} & A'''' R \end{pmatrix} = \\ &= \gamma'''' \begin{pmatrix} 1 & -R^T \vec{v}''''^T \\ -\vec{v}'''' & A'''' R \end{pmatrix} = \gamma'''' \begin{pmatrix} 1 & -(\vec{v}'''' R)^T \\ -\vec{v}'''' & A'''' R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em que essa última igualdade representa a decomposição em (2.46). Por construção, temos R e R'' coincidindo numericamente, embora representam rotações entre sistemas diferentes. Observe também que depois de fazermos a rotação R o vetor \vec{v} no sistema O'''' tem coordenadas $R\vec{v} = \vec{v}''''$, ou seja, impulso $\Lambda_{\vec{v}''''}$ que transforma sistema auxiliar para final é representado pelo impulso $\vec{v}'''' = R\vec{v}$, isto é, impulso inicial rotacionado por R . Assumindo $\vec{v}' = -\vec{v}''''$, podemos escrever (2.46) na seguinte forma

$$\Lambda = \Lambda_{\vec{v}''''} \Lambda_R \quad \text{onde} \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_{\vec{v}''''} = \gamma' \begin{pmatrix} 1 & \vec{v}'^T \\ \vec{v}' & A' \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

onde \vec{v}' representa a velocidade de O em relação a O' .

2.4 PRODUTO DE IMPULSOS E SUA DECOMPOSIÇÃO

Considere a mesma construção feita ao final da seção 2.2, isto é, observadores inerciais O' e O'' transformados a partir do observador O pelas respectivas transformações de Lorentz (impulso):

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\vec{v}'}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{e} \quad x''^{\mu} = \Lambda_{\vec{v}''}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}.$$

Veja o diagrama abaixo:

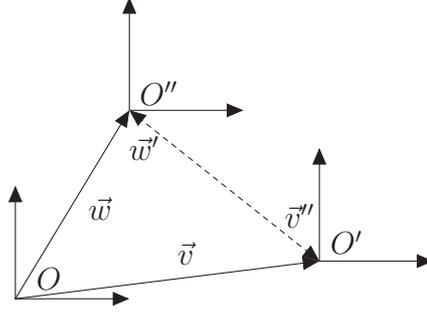


Figura 5 – Velocidades relativas entre três sistemas

Assim como fizemos em (2.12), as transformações $\Lambda_{\vec{v}}$ e $\Lambda_{\vec{w}}$ podem ser representadas por matrizes na forma

$$\Lambda_{\vec{v}} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 & -\vec{v}^T \\ -\vec{v} & A(\vec{v}) \end{pmatrix} \quad \text{com inversa} \quad \Lambda_{\vec{v}}^{-1} = \gamma(\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{v}^T \\ \vec{v} & A(\vec{v}) \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

e

$$\Lambda_{\vec{w}} = \gamma(\vec{w}) \begin{pmatrix} 1 & -\vec{w}^T \\ -\vec{w} & A(\vec{w}) \end{pmatrix} \quad \text{com inversa} \quad \Lambda_{\vec{w}}^{-1} = \gamma(\vec{w}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{w}^T \\ \vec{w} & A(\vec{w}) \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Analisando o diagrama anterior, podemos fazer

$$x''^\mu = (\Lambda_{\vec{w}} x)^\mu = (\Lambda_{\vec{w}} \Lambda_{-\vec{v}} x')^\mu = (\Lambda_{\vec{w}} \Lambda_{\vec{v}}^{-1} x')^\mu.$$

Pois como vimos na observação 2.2.2, temos $\Lambda_{\vec{v}}^{-1} = \Lambda_{-\vec{v}}$. Ou seja:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x''^0 \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} &= \gamma(\vec{v}) \gamma(\vec{w}) \begin{pmatrix} 1 & -\vec{w}^T \\ -\vec{w} & A(\vec{w}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{v}^T \\ \vec{v} & A(\vec{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \\ &= \gamma(\vec{v}) \gamma(\vec{w}) \begin{pmatrix} 1 - (\vec{v}, \vec{w}) & \vec{v}^T - \vec{w}^T A(\vec{v}) \\ -\vec{w} + A(\vec{w}) \vec{v} & -\vec{w} \otimes \vec{v}^T + A(\vec{w}) A(\vec{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \\ &= \gamma(\vec{v}) \gamma(\vec{w}) [1 - (\vec{v}, \vec{w})] \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\vec{v}^T + (A(\vec{v}) \vec{w})^T}{[1 - (\vec{v}, \vec{w})]}} \\ \frac{-\vec{w} + A(\vec{w}) \vec{v}}{[1 - (\vec{v}, \vec{w})]} & \frac{-\vec{w} \otimes \vec{v}^T + A(\vec{w}) A(\vec{v})}{[1 - (\vec{v}, \vec{w})]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando

$$B^{ij} \equiv \frac{-w^i v^j + A_{ik}(\vec{w}) A_{kj}(\vec{v})}{[1 - (\vec{v}, \vec{w})]},$$

e as identidades (2.24) e (2.25), que representam as velocidades relativas \vec{w}' e \vec{v}'' , obtemos

$$\begin{pmatrix} x''^0 \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} = \gamma(\vec{v}) \gamma(\vec{w}) [1 - (\vec{v}, \vec{w})] \begin{pmatrix} 1 & -\vec{w}'^T \\ \vec{v}'' & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

Portanto, na matriz que representa o produto de impulsos de Lorentz, obtemos a influência direta dos valores \vec{w}' e \vec{v}'' , mas para entendermos o porquê de terem aparecido, precisamos retornar com nossa construção da seção 2.3, em que também podemos escrever a decomposição (2.52) de outras duas maneiras.

Como estamos na transformação $O' \rightarrow O''$, para adequarmos às notações da seção 2.3, entendemos que em (2.44) temos $\vec{v} \equiv \vec{w}'$, e em (2.49) temos $\vec{v}' \equiv \vec{v}''$. Além disso, a observação 2.2.4, implica que $\gamma(\vec{w}') = \gamma(\vec{v}'')$ e combinando (2.44), (2.49) com (2.52), obtemos

$$\gamma(\vec{w}') = \gamma(\vec{v}'') = \gamma(\vec{v})\gamma(\vec{w})[1 - (\vec{v}, \vec{w})]. \quad (2.53)$$

Com isso, escrevemos $\Lambda_{\vec{w}}\Lambda_{\vec{v}}^{-1}$ nas seguintes formas:

$$\gamma(\vec{w}') \begin{pmatrix} 1 & -\vec{w}'^T \\ \vec{v}'' & B \end{pmatrix} = \gamma(\vec{w}') \begin{pmatrix} 1 & -\vec{w}'^T \\ -R\vec{w}' & RA(\vec{w}') \end{pmatrix} = \gamma(\vec{v}'') \begin{pmatrix} 1 & (\vec{v}''R)^T \\ \vec{v}'' & A(\vec{v}'')R' \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Portanto, obtemos a forma explícita da matriz de rotação R , dada por

$$R^{ij} = [BA^{-1}(\vec{w}')]^{ij} = \frac{\gamma(\vec{w}')}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} [A^{ia}(\vec{w})A^{ak}(\vec{v}) - \vec{w}^i\vec{v}^k] \left[\delta^{kj} - \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\gamma(\vec{w}')(\vec{w}')^2} \vec{w}'^k\vec{w}'^j \right] \quad (2.55)$$

Além disso, a relação que procurávamos ao final da seção 2.2 entre \vec{w}' e \vec{v}'' , é dada por

$$-\vec{v}'' = R\vec{w}' \quad (2.56)$$

Da forma manifesta de R , em (2.55), podemos mostrar que $R([\vec{v}'', \vec{w}']) = [\vec{v}'', \vec{w}']$, isto é, eixo de rotação é ortogonal ao plano que contém velocidades relativas entre os sistemas O' e O'' . Para isso, basta observar que vetores \vec{w}' e \vec{v}'' são combinações de \vec{w} e \vec{v} , donde plano que contém estes 4 vetores é ortogonal a $[\vec{v}'', \vec{w}']$; e pelas propriedades (2.16), temos

$$A(\vec{v})([\vec{v}'', \vec{w}']) = \frac{[\vec{v}'', \vec{w}']}{\gamma(\vec{v})}.$$

Com esta identidade e a relação (2.53) segue que

$$\begin{aligned} (R[\vec{v}'', \vec{w}'])^i &= \frac{\gamma(\vec{w}')}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} [A^{ia}(\vec{w})A^{ak}(\vec{v}) - \vec{w}^i\vec{v}^k] \left[\delta^{kj} - \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\gamma(\vec{w}')(\vec{w}')^2} \vec{w}'^k\vec{w}'^j \right] [\vec{v}'', \vec{w}']^j \\ &= \frac{\gamma(\vec{w}')}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} [A^{ia}(\vec{w})A^{ak}(\vec{v}) - \vec{w}^i\vec{v}^k] [\vec{v}'', \vec{w}']^k = \\ &= \frac{\gamma(\vec{w}')}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} [A^{ia}(\vec{w})A^{ak}(\vec{v})] [\vec{v}'', \vec{w}']^k = \\ &= \frac{\gamma(\vec{w}')}{(1 - (\vec{v}, \vec{w})) \gamma(\vec{w})\gamma(\vec{v})} [\vec{v}'', \vec{w}']^i \\ &= [\vec{v}'', \vec{w}']^i \end{aligned}$$

Portanto, a identidade (2.56) nos diz que ângulo de rotação produzido por R é menor ângulo entre vetores \vec{w}' e $-\vec{v}''$, lembrando que estes vetores representam, respectivamente,

a velocidade de O'' em relação de O' e o simétrico da velocidade do sistema O' em relação de O'' .

A matriz na forma (2.55) está determinada com dependência direta aos valores \vec{v} e \vec{w} . Entretanto, como foi observado, esta rotação faz parte da transformação $O' \rightarrow O''$, e com esta dependência sua interpretação não se faz muito clara em relação a estes observadores. Seria interessante buscar uma representação de R com dependência direta de \vec{v}'' e \vec{w}' .

Sabendo que a matriz R gira \vec{w}' em $-\vec{v}''$ através do eixo $[\vec{w}', -\vec{v}'']$. Pela construção do apêndice B, obtemos

$$R^{ij} = \frac{1}{|\vec{w}'||\vec{v}''|} \left\{ -(\vec{w}', \vec{v}'')\delta_j^i + (|\vec{w}'||\vec{v}''| + (\vec{w}', \vec{v}'')) \frac{[\vec{w}', \vec{v}'']^i [\vec{w}', \vec{v}'']^j}{[\vec{w}', \vec{v}'']^2} + \epsilon^{kij} [\vec{w}', \vec{v}'']^k \right\} \quad (2.57)$$

As equações (2.55) e (2.57) representam a rotação nesta transformação de Lorentz e, por construção, devem coincidir.

2.4.1 Rotação de Thomas-Wigner

Como havíamos comentado, a matriz R representa uma rotação adicional ao fazermos a composição de impulsos de Lorentz. Sendo assim, no ponto de vista de O'' , juntamente com um impulso \vec{v}'' observador O' está rotacionado por R^T e do mesmo modo, do ponto de vista de O' juntamente com um impulso \vec{w}' observador O'' está rotacionado por R , o que corrobora a relação (2.56), ver figura abaixo.

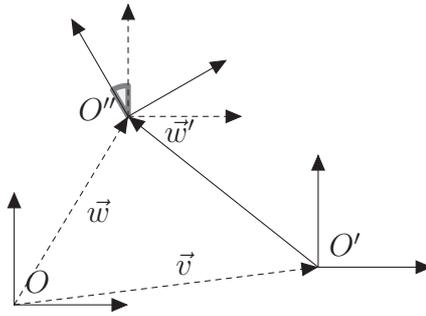


Figura 6 – Velocidades relativas segundo observador O'

O ângulo de tal rotação foi proposto inicialmente nos trabalhos de L. H. Thomas, ver [8,9], e que será discutido com mais detalhes no capítulo 3. Este fenômeno foi enunciado com o intuito de explicar um problema da Mecânica Quântica, que veremos no capítulo 4, cujo formalismo matemático foi, posteriormente, dado por E. P. Wigner, em [10]. É conhecido como ângulo de rotação de Wigner, ou rotação de Thomas, ou também rotação de Thomas-Wigner.

Observação 2.4.1. Como foi comentado, observadores O' e O'' estão ligados por um impulso e uma rotação, descritas na transformação (2.52). Como vimos na seção 2.3, podemos escrever a passagem de O' para O'' tanto iniciando pela rotação e depois aplicando impulso, quanto que iniciando pelo impulso e depois aplicando rotação. Entretanto, em cada um dos casos a rotação ocorre relativa a um dos observadores, em outras palavras, se aplicarmos a rotação primeiro, estamos rotacionando O' em relação de um observador auxiliar \tilde{O} , para então transformar este observador a O'' pelo impulso. Se optarmos por fazer o impulso primeiro, então a rotação será feita entre \tilde{O} e O'' . Em suma:

1. Não dizemos que os observadores O' e O'' estão rotacionados entre si, pois devemos considerar ainda o impulso, que distorce os eixos coordenados na direção da velocidade, como já observamos anteriormente.
2. Como comentamos acima, o efeito rotacional está associado exclusivamente a essa passagem, ou seja, entre os observadores O' e O'' , e não tem relação observacional com o laboratório O .

Sob a relatividade de Galileo não haveria diferença nos vetores velocidades e assim não seria mensurado nenhum tipo de rotação, porém, na relatividade especial os vetores formam um ângulo relativo, explicado pela construção acima. Este ângulo pode ser calculado a partir da relação (B.3) do apêndice B e faremos uma discussão mais detalhada quando assumimos um caso aproximado na seção 2.5.

2.5 APROXIMAÇÕES

Retornaremos à proposta da seção 2.4, entretanto estamos interessados no caso em que as velocidades são próximas, isto é, iremos considerar

$$\vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \vec{w} + \delta\vec{w}. \quad (2.58)$$

A partir disso, simplificaremos grande parte dos resultados obtidos até agora considerando suas expansões até a ordem linear. Nossa primeira aproximação será feita nas velocidades \vec{w}' e \vec{v}' . Observe:

$$\begin{aligned} \vec{w}' &= \frac{A(\vec{w} + \delta\vec{w})\vec{w} - (\vec{w} + \delta\vec{w})}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} = \frac{A(\vec{w} + \delta\vec{w})\vec{w} - A(\vec{w} + \delta\vec{w})(\vec{w} + \delta\vec{w})}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} = \\ &= \frac{A(\vec{w} + \delta\vec{w})(\vec{w} - (\vec{w} + \delta\vec{w}))}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} = -\frac{A(\vec{w} + \delta\vec{w})\delta\vec{w}}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} \cong -\frac{A(\vec{w})\delta\vec{w}}{1 - \vec{w}^2}, \end{aligned}$$

e

$$-\vec{v}' = \frac{\vec{w} - A(\vec{w})(\vec{w} + \delta\vec{w})}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} = \frac{\vec{w} - A(\vec{w})\vec{w} - A(\vec{w})\delta\vec{w}}{1 - (\vec{w}, \vec{w} + \delta\vec{w})} \cong -\frac{A(\vec{w})\delta\vec{w}}{1 - \vec{w}^2}.$$

Portanto,

$$\vec{w}' \cong -\gamma(\vec{w})^2 A(\vec{w})\delta\vec{w} \cong -\vec{v}'. \quad (2.59)$$

Observação 2.5.1. Ao trocarmos nossa aproximação (2.58) por

$$\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \vec{v} + \delta\vec{v}, \quad (2.60)$$

observamos que a fórmula aproximada obtida em (2.59) sofre uma alteração de sinal, tornando-se

$$\vec{w}' \cong \gamma(\vec{w})^2 A(\vec{w}) \delta\vec{w} \cong -\vec{v}'. \quad (2.61)$$

Foi obtido anteriormente duas formas de representar a matriz R que representa uma rotação adicional no produto de impulsos de Lorentz, são elas (2.55) e (2.57). Cada uma delas têm dependência a um grupo de variáveis, a primeira ainda depende de valores associados ao laboratório O , enquanto que a segunda depende somente dos valores associados aos observadores O' e O'' .

Para obtermos tais expressões aproximadas, precisamos construir algumas outras expressões aproximadas auxiliares. Temos:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{w}') &= \gamma(\vec{v})\gamma(\vec{w})[1 - (\vec{v}, \vec{w})] = \gamma(\vec{w} + \delta\vec{w})\gamma(\vec{w})[1 - (\vec{w} + \delta\vec{w}, \vec{w})] \cong \\ &\cong \gamma(\vec{w})[\gamma(\vec{w}) + \gamma^3(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})][1 - (\vec{w} + \delta\vec{w}, \vec{w})] \cong \\ &\cong \gamma^2(\vec{w})[1 + \gamma^2(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})](1 - \vec{w}^2) - \gamma^2(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) = 1. \end{aligned}$$

Assim a aproximação de $A^{-1}(\vec{w}')$ será

$$[A^{-1}(\vec{w}')]^{ij} = \delta^{ij} - \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\gamma(\vec{w}')(\vec{w}')^2} \vec{w}'^i \vec{w}'^j \cong \delta^{ij}, \quad (2.62)$$

ou seja, matriz identidade na primeira aproximação. Além disso,

$$\begin{aligned} A^{ij}(\vec{w} + \delta\vec{w}) &= \frac{1}{\gamma(\vec{w} + \delta\vec{w})} \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w} + \delta\vec{w}) - 1)}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w} + \delta\vec{w})^i (\vec{w} + \delta\vec{w})^j \right\} = \\ &= \frac{1}{\gamma(\vec{w})} \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w} + \delta\vec{w}) - 1)}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w} + \delta\vec{w})^i (\vec{w} + \delta\vec{w})^j \right\} - \\ &- \gamma(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w} + \delta\vec{w}) - 1)}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w} + \delta\vec{w})^i (\vec{w} + \delta\vec{w})^j \right\} + O_2(\delta\vec{w}) = \\ &= \frac{1}{\gamma(\vec{w})} \left\{ \delta^{ij} + \frac{[\gamma(\vec{w}) - 1 + \gamma^3(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})]}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w} + \delta\vec{w})^i (\vec{w} + \delta\vec{w})^j \right\} - \\ &- \gamma(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w}) - 1)}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w} + \delta\vec{w})^i (\vec{w} + \delta\vec{w})^j \right\} + O_2(\delta\vec{w}) = \\ &= \frac{1}{\gamma(\vec{w})} \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w}) - 1)}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} (\vec{w}^i \vec{w}^j + \vec{w}^i \delta\vec{w}^j + \delta\vec{w}^i \vec{w}^j) + \frac{\gamma^3(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})}{(\vec{w} + \delta\vec{w})^2} \vec{w}^i \vec{w}^j \right\} - \\ &- \gamma(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) \left\{ \delta^{ij} + \frac{(\gamma(\vec{w}) - 1)}{\vec{w}^2} \vec{w}^i \vec{w}^j \right\} + O_2(\delta\vec{w}) = \\ &= A^{ij}(\vec{w}) + (\vec{w}, \delta\vec{w}) \vec{w}^i \vec{w}^j \left\{ -\frac{2(\gamma(\vec{w}) - 1)}{\gamma(\vec{w})\vec{w}^4} + \frac{\gamma^2(\vec{w})}{\vec{w}^2} - \frac{\gamma(\vec{w})(\gamma(\vec{w}) - 1)}{\vec{w}^2} \right\} + \\ &+ \frac{\gamma(\vec{w})}{\gamma(\vec{w} + 1)} (\vec{w}^i \delta\vec{w}^j + \delta\vec{w}^i \vec{w}^j) - \gamma(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) \delta^{ij} + O_2(\delta\vec{w}). \end{aligned}$$

Portanto a aproximação linear de A será

$$A^{ij}(\vec{w} + \delta\vec{w}) \cong A^{ij}(\vec{w}) - \gamma(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w}) \left\{ \delta^{ij} - \frac{\gamma^2(\vec{w})}{(\gamma(\vec{w}) + 1)^2} \vec{w}^i \vec{w}^j \right\} + \frac{\gamma(\vec{w})}{\gamma(\vec{w}) + 1} (\vec{w}^i \delta\vec{w}^j + \delta\vec{w}^i \vec{w}^j) \quad (2.63)$$

Como vimos $\gamma(\vec{w}') \cong 1$, e pelas igualdades (2.62) e (2.63), podemos obter a primeira aproximação para R a partir da fórmula (2.55), representada novamente abaixo:

$$R^{ij} = [BA^{-1}(\vec{w}')]^{ij} = \frac{\gamma(\vec{w}')}{1 - (\vec{v}, \vec{w}')} \left[A^{ia}(\vec{w}') A^{ak}(\vec{v}) - \vec{w}'^i \vec{v}^k \right] \left[\delta^{kj} - \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\gamma(\vec{w}')(\vec{w}')^2} \vec{w}'^k \vec{w}'^j \right]$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} R^{ij} &= \frac{A^{ik}(\vec{w}') A^{kj}(\vec{w}') - \vec{w}'^i (\vec{w}')^j}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \frac{\frac{A^{kj}(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}')} \left[\delta^{ik} + \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\vec{w}'^2} \vec{w}'^i \vec{w}'^k \right] - \vec{w}'^i (\vec{w}')^j}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \frac{\frac{A^{kj}(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}')} \left[\delta^{ik} + \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\vec{w}'^2} \vec{w}'^i (\vec{w}' + \delta\vec{w}' - \delta\vec{w}')^k \right] - \vec{w}'^i (\vec{w}')^j}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \frac{\frac{A^{ij}(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}')} + \frac{\gamma(\vec{w}') - 1}{\vec{w}'^2 \gamma(\vec{w}')} \vec{w}'^i [(\vec{w}' + \delta\vec{w}')^j - A^{kj}(\vec{w}') \delta\vec{w}'^k] - \vec{w}'^i (\vec{w}')^j}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \frac{\frac{A^{ij}(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}')} - (\vec{w}', \delta\vec{w}') \delta^{ij} + \frac{1}{\gamma(\vec{w}') + 1} (\vec{w}'^j \delta\vec{w}'^i + \vec{w}'^i \delta\vec{w}'^j) - \frac{\vec{w}'^i \vec{w}'^j}{\gamma(\vec{w}') + 1} - \frac{2\vec{w}'^i \delta\vec{w}'^j}{\gamma(\vec{w}') + 1}}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \frac{\delta^{ij} [1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')] + \frac{1}{\gamma(\vec{w}') + 1} (\vec{w}'^j \delta\vec{w}'^i - \vec{w}'^i \delta\vec{w}'^j)}{1 - (\vec{w}' + \delta\vec{w}', \vec{w}')} \cong \\ &\cong \delta^{ij} + \frac{1}{\gamma(\vec{w}') + 1} \frac{(\vec{w}'^j \delta\vec{w}'^i - \vec{w}'^i \delta\vec{w}'^j)}{1 - \vec{w}'^2} = \delta^{ij} + \frac{\gamma^2(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}') + 1} (\vec{w}'^j \delta\vec{w}'^i - \vec{w}'^i \delta\vec{w}'^j) = \\ &= \delta^{ij} + \frac{\gamma^2(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}') + 1} [\delta\vec{w}', \vec{w}']_{ij} = \delta^{ij} - \frac{\gamma^2(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}') + 1} [\vec{w}', \delta\vec{w}']_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto a aproximação até a ordem linear da matriz R é dada por

$$R_{\vec{w}}^{ij} \cong \delta^{ij} - \frac{\gamma^2(\vec{w}')}{\gamma(\vec{w}') + 1} \epsilon^{kij} [\vec{w}', \delta\vec{w}']_k \quad (2.64)$$

Observação 2.5.2. Caso façamos novamente a alteração (2.60), a fórmula aproximada obtida em (2.63) não altera sua estrutura básica, ficando

$$A^{ij}(\vec{v} + \delta\vec{v}) \cong A^{ij}(\vec{v}) - \gamma(\vec{v})(\vec{v}, \delta\vec{v}) \left\{ \delta^{ij} - \frac{\gamma^2(\vec{v})}{(\gamma(\vec{v}) + 1)^2} \vec{v}^i \vec{v}^j \right\} + \frac{\gamma(\vec{v})}{\gamma(\vec{v}) + 1} (\vec{v}^i \delta\vec{v}^j + \delta\vec{v}^i \vec{v}^j). \quad (2.65)$$

Entretanto, a fórmula aproximada obtida para R em (2.64), sofre uma pequena alteração devido ao termo $-2\vec{w}^i \delta \vec{w}^j / (\gamma(\vec{w}) + 1)$ presente na quinta linha de sua construção. Tal fator, quando consideramos a aproximação (2.60), torna-se equivalente a $-2\vec{v}^j \delta \vec{v}^i / (\gamma(\vec{v}) + 1)$ e assim a aproximação de R fica

$$R_{\vec{v}}^{ij} \cong \delta^{ij} + \frac{\gamma^2(\vec{v})}{\gamma(\vec{v}) + 1} \epsilon^{kij} [\vec{v}, \delta \vec{v}]_k. \quad (2.66)$$

Ambas consistentes, pois enquanto que um dos observadores mensura um dado ângulo, no ponto de vista do outro, este mensura seu simétrico.

Seguindo com as aproximações, façamos agora para R representada por (2.57) e novamente escrita abaixo

$$R^{ij} = \frac{1}{|\vec{w}'||\vec{v}''|} \left\{ -(\vec{w}', \vec{v}'') \delta_j^i + (|\vec{w}'||\vec{v}''| + (\vec{w}', \vec{v}'')) \frac{[\vec{w}', \vec{v}'']^i [\vec{w}', \vec{v}'']^j}{[\vec{w}', \vec{v}'']^2} + \epsilon^{kij} [\vec{w}', \vec{v}'']^k \right\}.$$

De acordo com (2.59), \vec{w}' e \vec{v}'' são lineares em $\delta \vec{w}$, com isso precisamos considerar uma ordem acima na expansão em séries em $\delta \vec{w}$ para obtermos uma aproximação relevante de R que nos permita comparar com a obtida anteriormente. Façamos então algumas novas observações com relação às aproximações de \vec{w}' e \vec{v}'' .

$$\vec{v}'' = \frac{1}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} \left[\frac{1}{\gamma(\vec{w})} N(\vec{w}) \delta \vec{w} + \frac{(\vec{w}, \delta \vec{w})}{\vec{w}^2} \vec{w} \right]. \quad (2.67)$$

Assim

$$|\vec{v}''|^2 = \frac{1}{[1 - (\vec{v}, \vec{w})]^2} \left[\frac{\delta^2 \vec{w}}{\gamma^2(\vec{w})} + (\vec{w}, \delta \vec{w})^2 \right]. \quad (2.68)$$

Com isso, e pela identidade (2.63), temos

$$\begin{aligned} \vec{w}' &= -\frac{A(\vec{w} + \delta \vec{w}) \delta \vec{w}}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} = \\ &= -\frac{1}{1 - (\vec{v}, \vec{w})} \left[A(\vec{w}) \delta \vec{w} + \frac{\gamma(\vec{w})}{\gamma(\vec{w}) + 1} ((\vec{w}, \delta \vec{w}) \delta \vec{w} + \delta^2 \vec{w} \vec{w}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^3(\vec{w})}{(\gamma(\vec{w}) + 1)^2} (\vec{w}, \delta \vec{w})^2 \vec{w} - \gamma(\vec{w}) (\vec{w}, \delta \vec{w}) \delta \vec{w} \right] = \\ &= -\vec{v}'' + \frac{\gamma(\vec{w})}{[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]} \left[(\vec{w}, \delta \vec{w}) \gamma(\vec{w}) \delta \vec{w} - \delta^2 \vec{w} \vec{w} - \frac{\gamma^2(\vec{w})}{\gamma(\vec{w}) + 1} (\vec{w}, \delta \vec{w})^2 \vec{w} \right], \end{aligned}$$

logo

$$\vec{w}' = -\vec{v}'' + \frac{\gamma(\vec{w})}{[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]} \left[(\vec{w}, \delta \vec{w}) \gamma(\vec{w}) N(\vec{w}) \delta \vec{w} + \frac{\vec{w}}{\vec{w}^2} [(\vec{w}, \delta \vec{w})^2 - \delta^2 \vec{w} \vec{w}^2] \right] \quad (2.69)$$

Além disso, obtemos

$$\begin{aligned}
[\vec{w}', \vec{v}'] &= \frac{\gamma(\vec{w})}{[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]} \left\{ \frac{(\vec{w}, \delta\vec{w})^2 - \delta^2\vec{w}\vec{w}^2}{\vec{w}^2\gamma(\vec{w})[1 - (\vec{v}, \vec{w})]} - \frac{(\vec{w}, \delta\vec{w})^2\gamma(\vec{w})}{\vec{w}^2[1 - (\vec{v}, \vec{w})]} \right\} [\vec{w}, N(\vec{w})\delta\vec{w}] = \\
&= - \left\{ \gamma^2(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})^2 - (\vec{w}, \delta\vec{w})^2 + \delta^2\vec{w}\vec{w}^2 \right\} \frac{[\vec{w}, N(\vec{w})\delta\vec{w}]}{\vec{w}^2[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]^2} \cong \\
&\cong - \left\{ \gamma^2(\vec{w})(\vec{w}, \delta\vec{w})^2 + \delta^2\vec{w} \right\} \frac{[\vec{w}, \delta\vec{w}]}{[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]^2} = \\
&= - \left\{ (\vec{w}, \delta\vec{w})^2 + \delta^2\vec{w}/\gamma^2(\vec{w}) \right\} \frac{\gamma^2(\vec{w})[\vec{w}, \delta\vec{w}]}{[\gamma(\vec{w}) + 1][1 - (\vec{v}, \vec{w})]^2},
\end{aligned}$$

donde

$$[\vec{w}', \vec{v}'] \cong - \frac{\gamma^2(\vec{w})}{\gamma(\vec{w}) + 1} |\vec{v}''|^2 [\vec{w}, \delta\vec{w}]. \quad (2.70)$$

Por (2.59) temos $|\vec{w}'| = |\vec{v}''|$, assim na aproximação de R a partir de (2.57), o segundo termo será nulo, e o restante será dado por

$$R_{\vec{w}}^{ij} \cong \delta_j^i - \frac{\gamma^2(\vec{w})}{\gamma(\vec{w}) + 1} \epsilon^{kij} [\vec{w}, \delta\vec{w}]_k. \quad (2.71)$$

Tal expressão coincide com a obtida em (2.64).

Observação 2.5.3. Caso façamos novamente a alteração (2.60), observe que expressões (2.67), (2.68) e (2.69) serão análogas. E devido a isso, expressão (2.70) sofre uma alteração de sinal no produto vetorial, levando a equação de R ser dada por

$$R_{\vec{v}}^{ij} \cong \delta_j^i + \frac{\gamma^2(\vec{v})}{\gamma(\vec{v}) + 1} \epsilon^{kij} [\vec{v}, \delta\vec{v}]_k. \quad (2.72)$$

Ou seja, coincidindo com expressão obtida anteriormente em (2.66).

A compreensão deste estudo aproximado, principalmente as identidades que explicitam a matriz de rotação para velocidades próximas, será fundamental nas discussões propostas no capítulo 3.

2.6 FORMALISMO COVARIANTE

Ao longo desta seção, faremos uma breve discussão sobre o formalismo covariante, ou seja, nas subseções seguintes trataremos os conceitos das grandezas tridimensionais 3-vetor de velocidade, 3-vetor de momento que foram iniciadas na seção 2.2, e que aqui serão associadas a grandezas como 4-vetor velocidade e 4-tensor de momento. Tais grandezas nos trazem vantagens ao aplicarmos transformações de Lorentz. Na sequência, discutiremos a transformação de variáveis dinâmicas e a parametrização por tempo próprio. Assuntos que serão utilizados nos capítulos 3 e 4.

2.6.1 4-vetor velocidade

As transformações de Lorentz são lineares

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (2.73)$$

quando atuam no espaço de Minkowski de 4 dimensões. Entretanto, como observamos na seção 2.2, o 3-vetor de velocidade $\vec{w} = \frac{d\vec{x}}{dx^0}$ não tem regra linear de transformação, vide identidade (2.18). No sistema O , vamos associar ao 3-vetor \vec{w} o 4-vetor \hat{w} da seguinte forma

$$\hat{w} = (\hat{w}^0, \hat{w}) \equiv (\gamma(\vec{w}), \gamma(\vec{w})\vec{w}) \quad \text{onde} \quad \gamma(\vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{w}^2}}. \quad (2.74)$$

Por construção, este vetor equivale a \vec{w} , pois possui 3 componentes independentes que podem ser relacionadas da seguinte maneira:

$$w^i = \frac{\hat{w}^i}{\hat{w}^0}. \quad (2.75)$$

Além disso, obtemos

$$\hat{w}'^{\nu} \hat{w}_{\nu} = -\hat{w}^0 \hat{w}^0 + \hat{w}^0 \hat{w}^0 (w^i w_j) = -\gamma^2(\vec{w})(1 - \vec{w}^2) = -\gamma^2(\vec{w})\gamma^{-2}(\vec{w}) = -1. \quad (2.76)$$

Em um sistema O' , ligado a O através de uma transformação de Lorentz Λ , podemos definir \hat{w}'^{μ} por meio da seguinte regra:

$$\hat{w}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \hat{w}^{\nu}. \quad (2.77)$$

Assim, \hat{w}'^{μ} possui a mesma regra de transformação de \vec{x}^{μ} em (2.73). E como $\hat{w}'^{\nu} \hat{w}'_{\nu} = -1$, podemos afirmar que \hat{w}'^{ν} também possui 3 componentes independentes, digamos \hat{w}'^i , e outra dada por

$$\hat{w}'^0 = \sqrt{1 + \hat{w}'^i \hat{w}'^i}. \quad (2.78)$$

Pelas identidades (2.75) e (2.77), obtemos

$$\frac{\hat{w}'^i}{\hat{w}'^0} = \frac{\Lambda^i_0 \hat{w}^0 + \Lambda^i_j \hat{w}^j}{\Lambda^0_0 \hat{w}^0 + \Lambda^0_k \hat{w}^k} = \frac{\Lambda^i_0 + \Lambda^i_j w^j}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k}.$$

Coincidindo com valor de w'^i em (2.18), portanto em todos os sistemas de coordenadas, incluindo O , componentes de 4-vetor e 3-vetor estão ligadas por meio de

$$w'^i = \frac{\hat{w}'^i}{\hat{w}'^0}. \quad (2.79)$$

Equivalentemente,

$$\hat{w}' = (\hat{w}'^0, \hat{w}') \equiv (\gamma(\vec{w}'), \gamma(\vec{w}')\vec{w}') \quad \text{onde} \quad \gamma(\vec{w}') = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{w}'^2}}. \quad (2.80)$$

Como uma transformação de Lorentz arbitrária Λ pode ser decomposta como $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_{\vec{v}}$ é suficiente mostrar o comportamento para estes casos. Considere $\Lambda \equiv \Lambda_R$. Por (2.77), obtemos $\hat{w}' = R\hat{w}$, e por (2.79), temos $\vec{w}' = R\vec{w}$. Que está em conformidade com (2.19).

Considere $\Lambda \equiv \Lambda_{\vec{v}}$. Por (2.77), obtemos

$$\hat{w}'^0 = \Lambda^0_0 \hat{w}^0 + \Lambda^0_j \hat{w}^j = \gamma(\vec{v})[\hat{w}^0 - \vec{v}^j \hat{w}^j] = \gamma(\vec{v})\gamma(\vec{w})[1 - \vec{v}^j \vec{w}^j] = \gamma(\vec{w}'), \quad (2.81)$$

e assim

$$\begin{aligned} \hat{w}'^k &= \Lambda^k_0 \hat{w}^0 + \Lambda^k_j \hat{w}^j = \gamma(\vec{v})[A^{kj}(\vec{v})\hat{w}^j - \vec{v}^k \hat{w}^0] = \\ &= \gamma(\vec{v})\gamma(\vec{w})(A^{kj}(\vec{v})\vec{w}^j - \vec{v}^k) = \\ &= \gamma(\vec{v})\gamma(\vec{w}) \frac{[1 - \vec{v}^n \vec{w}^n]}{[1 - \vec{v}^n \vec{w}^n]} (A^{kj}(\vec{v})\vec{w}^j - \vec{v}^k) = \\ &= \gamma(\vec{w}') \left(\frac{A^{kj}(\vec{v})\vec{w}^j - \vec{v}^k}{1 - \vec{v}^n \vec{w}^n} \right), \end{aligned}$$

portanto

$$\hat{w}'^k = \gamma(\vec{w}') \left(\frac{A^{kj}(\vec{v})\vec{w}^j - \vec{v}^k}{1 - \vec{v}^n \vec{w}^n} \right). \quad (2.82)$$

E por (2.79), obtemos (2.20) tal como esperávamos. Combinando (2.81) e (2.82), temos

$$\hat{w}' = (\hat{w}'^0, \hat{w}') = (\gamma(\vec{w}'), \gamma(\vec{w}')\vec{w}'). \quad (2.83)$$

Desta maneira, preservamos a estrutura definida em (2.74). O que implica que 4-vetores \hat{w}^ν e \hat{w}'^ν construídos por (2.74) e (2.83) são equivalentes. E mais, a regra de transformação é linear dada por (2.77).

Observação 2.6.1. Assim como observamos na notação (2.11), o vetor \vec{v} , sob um certo abuso de terminologia, pode ser considerado como velocidade, porém lembramos que $\mathbf{v}/c = \vec{v}$, ou seja, é uma grandeza que não carrega nenhuma unidade física. Também dizemos que (2.83) é 4-velocidade, porém, do mesmo modo, é uma grandeza que também não carrega nenhuma unidade física. Para obtermos isso, bastaríamos multiplicar pelo fator c .

Em resumo, cálculos em relatividade especial podem ser feitos usando quantidades 4-dimensionais, para então ser reconstruídas em quantidades 3-dimensionais ao final. Vantagem deste 4-formalismo é covariância relativística explícita, porém a desvantagem é que tais grandezas não tem interpretação física direta.

2.6.2 4-tensor momento

Para obtermos a mesma linearidade na transformação façamos a construção anterior para o 3-vetor de momento angular $\vec{\mu}$ estudado no exemplo 2.2.3 da seção 2.2. Para isso,

vamos expandi-lo para um 4-tensor, grandeza esta que pode ser definida sob a seguinte regra de transformação,

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^{\alpha\beta}, \quad (2.84)$$

onde o 4-tensor A se transforma no 4-tensor A' sob a transformação linear Λ . Com isso, definimos o 4-tensor de momento angular como sendo

$$\hat{\mu}^{\lambda\nu} = c(x^\lambda \hat{w}^\nu - x^\nu \hat{w}^\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{N}^1 & \hat{N}^2 & \hat{N}^3 \\ -\hat{N}^1 & 0 & \hat{\mu}^3 & -\hat{\mu}^2 \\ -\hat{N}^2 & -\hat{\mu}^3 & 0 & \hat{\mu}^1 \\ -\hat{N}^3 & \hat{\mu}^2 & -\hat{\mu}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

e pelas identidades do apêndice A, podemos denotar

$$\hat{N}^i \equiv \hat{\mu}^{0i} = c(x^0 \hat{w}^i - x^i \hat{w}^0), \quad (2.86)$$

$$\hat{\mu}^{ij} = c(x^i \hat{w}^j - x^j \hat{w}^i) = \epsilon^{ijk} \hat{\mu}^k, \quad (2.87)$$

$$\hat{\mu}^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \hat{\mu}^{ij} \quad \text{ou} \quad \hat{\mu}^k = c \epsilon^{kij} x^i \hat{w}^j. \quad (2.88)$$

Considere uma transformação de Lorentz Λ arbitrária. Pela regra de transformação (2.84) e pelas identidades acima podemos estudar como se comportam as componentes $\hat{\mu}'^k$ sob Λ , assim

$$\begin{aligned} \hat{\mu}'^k &= \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \hat{\mu}'^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_\alpha \Lambda^j{}_\beta \hat{\mu}^{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{kij} [\Lambda^i{}_n \Lambda^j{}_m \epsilon^{nmp} \hat{\mu}^p + \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_m \hat{\mu}^{0m} + \Lambda^i{}_n \Lambda^j{}_0 \hat{\mu}^{n0} + \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 \hat{\mu}^{00}] = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_n \Lambda^j{}_m \epsilon^{nmp} \hat{\mu}^p + \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_n \hat{\mu}^{0n} = \\ &= \frac{1}{2} \det(\Lambda^a{}_b) (\Lambda^{-1})^s{}_k \epsilon^{snm} \epsilon^{nmp} \hat{\mu}^p + \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_n \hat{N}^n = \\ &= \frac{1}{2} \det(\Lambda^a{}_b) (\Lambda^{-1})^s{}_k 2\delta^s{}_p \hat{\mu}^p + \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_n \hat{N}^n = \\ &= \det(\Lambda^a{}_b) (\Lambda^{-T})^k{}_s \hat{\mu}^s + \epsilon^{kij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_n \hat{N}^n. \end{aligned}$$

Denotando $\vec{\Lambda}^i \equiv \Lambda^i{}_0$, e $\Lambda_3 \equiv \Lambda^r{}_s$ a parte espacial de $\Lambda^\mu{}_\nu$, temos

$$\hat{\mu}' = \det(\Lambda^r{}_s) (\Lambda^T)^{-1} \hat{\mu} + [\vec{\Lambda}, \Lambda_3 \hat{N}]. \quad (2.89)$$

Considerando o caso em que $\Lambda \equiv \Lambda_R$, temos $\Lambda^i{}_0 = 0$, $\det(R) = 1$ e $R^T R = I$, o que implica em $(R^T)^{-1} = R$. Portanto (2.89) ficará

$$\hat{\mu}' = R \hat{\mu} \quad (2.90)$$

Por fim, consideramos o caso em que $\Lambda \equiv \Lambda_{\vec{v}}$. Pelas construções anteriores, sabemos que

$$x'^i = \gamma(v) [A^{in}(v) x^n - v^i x^0] \quad \text{e} \quad \hat{w}'^j = \gamma(v) [-v^j \hat{w}^0 + A^{jm}(v) \hat{w}^m],$$

e substituindo na segunda identidade de (2.88), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^k &= c\epsilon^{kij}\gamma(v)[A^{in}(v)x^n - v^i x^0]\gamma(v)[-v^j \hat{w}^0 + A^{jm}(v)\hat{w}^m] = \\ &= c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)[-A^{in}(v)x^n v^j \hat{w}^0 + A^{in}(v)x^n A^{jm}(v)\hat{w}^m + v^i x^0 v^j \hat{w}^0 - v^i x^0 A^{jm}(v)\hat{w}^m].\end{aligned}$$

Resolvemos cada parcela separadamente, considerando que $\epsilon^{kij}v^i v^j = 0$, temos

$$\begin{aligned}-c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)A^{in}(v)x^n v^j \hat{w}^0 &= -c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)\frac{1}{\gamma(v)}\left(x^i + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i v^n x^n\right)v^j \hat{w}^0 = \\ &= -c\epsilon^{kij}\gamma(v)x^i v^j \hat{w}^0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)v^i x^0 A^{jm}(v)\hat{w}^m &= -c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)v^i x^0 \frac{1}{\gamma(v)}\left(\hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^j v^m \hat{w}^m\right) = \\ &= -c\epsilon^{kij}\gamma(v)v^i \hat{w}^j x^0;\end{aligned}$$

$$c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)v^i x^0 v^j \hat{w}^0 = 0,$$

$$\begin{aligned}c\epsilon^{kij}\gamma^2(v)A^{in}(v)x^n A^{jm}(v)\hat{w}^m &= c\epsilon^{kij}\left(x^i + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i v^n x^n\right)\left(\hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^j v^m \hat{w}^m\right) = \\ &= c\epsilon^{kij}\left(x^i \hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i v^n x^n \hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^j v^m \hat{w}^m x^i\right) = \\ &= c\epsilon^{kij}\left(x^i \hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i v^n (x^n \hat{w}^j - x^j \hat{w}^n)\right) = \\ &= \epsilon^{kij}\left(cx^i \hat{w}^j + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i v^n \hat{\mu}^{nj}\right) = \\ &= \epsilon^{kij}\left(cx^i \hat{w}^j - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i [\vec{v}, \hat{\mu}]^j\right).\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^k &= -c\epsilon^{kij}\gamma(v)x^i v^j \hat{w}^0 + c\epsilon^{kij}\gamma(v)v^j \hat{w}^i x^0 + \epsilon^{kij}\left(cx^i \hat{w}^j - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^i [\vec{v}, \hat{\mu}]^j\right) = \\ &= \epsilon^{kij}\gamma(v)c(x^0 \hat{w}^i - x^i \hat{w}^0)v^j + c\epsilon^{kij}x^i \hat{w}^j - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}\epsilon^{kij}v^i [\vec{v}, \hat{\mu}]^j = \\ &= \epsilon^{kij}\gamma(v)\hat{N}^i v^j + c\epsilon^{kij}x^i \hat{w}^j - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}\epsilon^{kij}v^i [\vec{v}, \hat{\mu}]^j = \\ &= \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]^k + \hat{\mu}^k - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}[\vec{v}, [\vec{v}, \hat{\mu}]]^k \\ &= \hat{\mu}^k - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}(v^k(v^n \hat{\mu}^n) - \hat{\mu}^k v^2) + \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]^k = \\ &= \gamma(v)\hat{\mu}^k - \frac{\gamma(v)-1}{v^2}v^k(\vec{v}, \hat{\mu}) + \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]^k = \\ &= \gamma(v)\left(\hat{\mu}^k - \frac{\gamma(v)-1}{\gamma(v)v^2}v^k(\vec{v}, \hat{\mu})\right) + \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]^k \\ &= (A^{-1}(v)\hat{\mu})^k + \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]^k,\end{aligned}$$

portanto

$$\hat{\mu}' = A^{-1}(v)\hat{\mu} + \gamma(v)[\hat{N}, \vec{v}]. \quad (2.91)$$

Para compararmos as equações (2.89), (2.90) e (2.91), com as obtidas no exemplo 2.2.3, e assim concluir que 4-tensor representa o 3-vetor de momento angular, precisamos determinar a relação entre $\hat{\mu}$ e $\vec{\mu}$, assim como fizemos para a velocidade em (2.75) e (2.79). Porém, segundo o observador O , temos

$$\vec{\mu} = [\mathbf{x}, \mathbf{w}] = c[\mathbf{x}, \vec{w}] = \frac{c}{\gamma(w)} [\mathbf{x}, \hat{w}] = \frac{1}{\gamma(w)} \hat{\mu}. \quad (2.92)$$

E segundo O' , temos

$$\vec{\mu}' = [\mathbf{x}', \mathbf{w}'] = c[\mathbf{x}', \vec{w}'] = \frac{c}{\gamma(w')} [\mathbf{x}', \hat{w}'] = \frac{1}{\gamma(w')} \hat{\mu}'. \quad (2.93)$$

De acordo com (2.92) e (2.93), momento angular $\vec{\mu}$ multiplicado por fator $\gamma(w)$ é parte espacial de tensor de 4-momento angular $\hat{\mu}$. Rescrevendo (2.89) com (2.92) e (2.93), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\mu}'^k &= \frac{1}{\gamma(w')} \hat{\mu}'^k = \frac{1}{\gamma(w')} [\det(\Lambda^a_b)(\Lambda^{-T})^k_s \mu^s \gamma(w) + \epsilon^{kij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_n \hat{N}^n] = \\ &= \frac{\gamma(w)}{\gamma(w')} [\det(\Lambda^a_b)(\Lambda^{-T})^k_s \mu^s + \epsilon^{kij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_n c(x^0 w^n - x^n)], \end{aligned}$$

e como

$$\frac{\gamma(w)}{\gamma(w')} = \frac{\hat{w}^0}{\hat{w}'^0} = \frac{\hat{w}^0}{\Lambda^0_\nu \hat{w}^\nu} = \frac{\hat{w}^0}{\Lambda^0_0 \hat{w}^0 + \Lambda^0_k \hat{w}^k} = \frac{1}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k},$$

temos

$$\vec{\mu}'^k = \frac{1}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_k w^k} \{ \det(\Lambda^a_b)(\Lambda^{-T})^k_s \mu^s + \epsilon^{kij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_n c(x^0 w^n - x^n) \}. \quad (2.94)$$

Portanto (2.94) condiz com identidade obtida em (2.21). Do mesmo modo, rescrevendo (2.90) com (2.92) e (2.93), obtemos

$$\vec{\mu}' = R\vec{\mu}, \quad (2.95)$$

que condiz com identidade obtida em (2.22). Por fim, rescrevendo (2.91) com (2.81), (2.92) e (2.93), temos

$$\begin{aligned} \vec{\mu}' &= \frac{1}{\gamma(w')} \{ A^{-1} \vec{\mu} \gamma(w) + \gamma(v) [\hat{N}, \vec{v}] \} = \\ &= \frac{A^{-1} \vec{\mu} \gamma(w) + \gamma(v) [c(x^0 \hat{w} - \vec{x} \hat{w}^0), \vec{v}]}{\gamma(v) \gamma(w) [1 - \vec{v} \vec{w}]} = \\ &= \frac{A^{-1} \vec{\mu}}{\gamma(v) [1 - \vec{v} \vec{w}]} + \frac{c[(x^0 \vec{w} - \vec{x}), \vec{v}]}{[1 - \vec{v} \vec{w}]}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\vec{\mu}' = \frac{1}{1 - \vec{v} \vec{w}} \{ \gamma^{-1}(v) A^{-1}(v) \vec{\mu} + c[x^0 \vec{w} - \vec{x}, \vec{v}] \}, \quad (2.96)$$

que também condiz com identidade obtida em (2.23). Desta forma, 4-momento angular definido em (2.85), possui regra linear de transformação dada em (2.84) e, como foi visto, preserva regras de transformação do 3-momento angular obtidas no exemplo 2.2.3.

2.6.3 Transformações de variáveis dinâmicas

Considere a função vetorial $\mathbf{x}(t)$, ou seja, aplicação dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{x}(t)\end{aligned}$$

que representa trajetória de uma partícula no sistema O . Queremos encontrar expressão $\mathbf{x}'(t')$ de trajetória no sistema O' , ligado a O por uma transformação de Lorentz (2.73). Tal transformação é dada no espaço de Minkowski $\mathbb{M}^{(1,3)}$ e gera uma transformação no espaço de funções $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}'(t')$. Descreveremos este processo da seguinte maneira:

Associamos a $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ uma curva dada em $\mathbb{M}^{(1,3)}$ com o seguinte gráfico $(ct, \mathbf{x}(t))$. Parametrizamos esta curva por σ , um parâmetro arbitrário, obtendo assim a curva parametrizada $x^\mu(\sigma)$ dada por

$$x^\mu(\sigma) = (ct(\sigma), \mathbf{x}(t(\sigma))) \equiv (x^0(\sigma), \mathbf{x}(\sigma)) \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}(t(\sigma)) \equiv \mathbf{x}(\sigma) \quad (2.97)$$

sendo $x^\mu(\sigma)$ um ponto de $\mathbb{M}^{(1,3)}$ para todo σ . Portanto a equação (2.73) determina a passagem de coordenadas $x^\mu(\sigma)$ em O para $x'^\mu(\sigma)$ em O' , isto é,

$$\Lambda : x^\mu(\sigma) \rightarrow x'^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\sigma) \quad (2.98)$$

Assim, dadas as funções $x^\mu(\sigma)$, esta fórmula determina quatro funções $x'^\mu(\sigma)$ em função de σ . Excluindo o parâmetro σ destas funções, obtemos três funções $\mathbf{x}'(x'^0) = \mathbf{x}'^\mu(ct')$. Elas representam a trajetória da partícula no sistema O' , e o vetor tangente $dx^\mu/d\sigma$ é chamado de 4-velocidade. Calculando a derivada de (2.98), como Λ não depende de σ , obtemos a regra de transformação da 4-velocidade, a saber

$$\frac{dx'^\mu}{d\sigma} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \quad (2.99)$$

Vetores de velocidade 3-dimensional $d\mathbf{x}/dt$ e $d\mathbf{x}'/dt'$ podem ser construídos a partir dos 4-vetores $dx^\mu/d\sigma$ e $dx'^\mu/d\sigma$. A saber

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c \left. \frac{d\mathbf{x}/d\sigma}{dx^0/d\sigma} \right|_{\sigma(t)} \quad (2.100)$$

De modo equivalente, podemos observar que $\mathbf{x}(t)$ é forma explícita e $x^\mu(\sigma)$ é forma paramétrica da mesma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Portanto (2.100) é fórmula conhecida do Cálculo para derivada de uma função, dada em forma paramétrica.

2.6.4 Parametrização por tempo próprio

Dada a trajetória $\mathbf{x}(t)$, então $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}/dt$ é sua velocidade. Podemos definir o parâmetro τ da seguinte forma

$$\tau(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{1}{\gamma(\vec{v}(t))} dt \quad \text{onde} \quad \gamma(\vec{v}) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \quad (2.101)$$

e utilizá-lo para parametrizar a curva (2.97). Chamaremos τ de tempo próprio da partícula, onde $[\tau] = \text{segundos}$.

Observação 2.6.2. Este conceito foi introduzido por Minkowski, em 1908, e em contraste com o que entendemos por tempo, o tempo coordenada, é o tempo entre dois eventos medidos por um observador usando seu próprio método de atribuição temporal; enquanto $c d\tau$ se comporta como um intervalo no espaço $\mathbb{M}^{(1,3)}$.

Calculando a derivada de (2.101), obtemos

$$\left. \frac{dx^0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau(t)} = c\gamma(\vec{v}) \quad (2.102)$$

onde $\gamma(\vec{v})$ está ligado a passagem do laboratório ao observador inercial que, instantaneamente, acompanha o movimento da partícula. Aplicando este resultado em (2.100) obtemos regra formal de passagem de 4-vetor $dx^\mu(\tau)/d\tau$ para a velocidade física $d\mathbf{x}/dt$, isto é,

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} = c\gamma(\vec{v}) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dx^0} = \gamma(\vec{v}) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (2.103)$$

Assim, por (2.102) e (2.103) o 4-vetor de velocidade da trajetória (2.97) fica

$$\mathbf{v}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\gamma(\vec{v}), \gamma(\vec{v})\mathbf{v}) = c(\gamma(\vec{v}), \gamma(\vec{v})\vec{v}) \quad (2.104)$$

Em contraste com o que foi observado em 2.6.1, esta grandeza de fato carrega a unidade m/s e está em conformidade com o formalismo obtido em (2.83).

Observação 2.6.3. O tempo próprio pode ser definido de várias maneiras. Na forma como fizemos em (2.101), ou então

$$-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 \equiv c^2 d\tau^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)^2 = -c^2$$

Observação 2.6.4. A propriedade fundamental que distingue as transformações de Lorentz é manter invariante o tempo próprio. De fato, utilizando a definição sugerida acima, por (2.99), obtemos

$$c^2 d\tau'^2 = -\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = -\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\beta = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2$$

Observação 2.6.5. (Dilatação temporal) A partir de (2.102) temos uma relação entre dx^0 e $d\tau$. No observador O' , ligado a O por um impulso de velocidade \vec{v} , isto é, $\Lambda\vec{v} = \vec{v}' = 0$, pois é a própria velocidade do observador, donde $\gamma(\vec{v}') = 1$, temos

$$dx'^0 = \frac{1}{\gamma(\vec{v})} dx^0 \quad \text{ou} \quad dt' = \frac{1}{\gamma(\vec{v})} dt$$

Para encerrarmos esta seção sobre formalismo covariante, ressaltamos que estudar grandezas físicas sob a perspectiva desta teoria, ou seja, construir modelos 4-dimensionais que englobam estas grandezas e que nos possibilita cálculos mais diretos, pode ser visto em várias referências na literatura. Aqui, fizemos apenas as grandezas que serão nossos objetos de estudo. Para mais detalhes, veja [1]. Por fim, vamos apenas enunciar as notações usadas para o campo eletromagnético na observação abaixo, que será bastante utilizada no capítulo 4.

Observação 2.6.6. Para o campo eletromagnético com 4-potencial A^μ , usamos a notação presente em [5], dada por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.105)$$

onde definimos $F_{0i} = -E_i$; $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$. Assim, obtemos

$$E_i = -\frac{1}{c}\partial_t A_i + \partial_i A_0 \quad \text{e} \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k. \quad (2.106)$$

Sob uma transformação de Lorentz Λ arbitrária, o tensor eletromagnético possui a seguinte regra de transformação:

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta}. \quad (2.107)$$

a partir desta poderíamos obter as regras de transformação para os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} embutidas em $F_{\mu\nu}$, assim como fizemos para a velocidade e o momento angular. Entretanto, deixaremos este estudo para a afirmação 4.6.1 no capítulo 4 onde os resultados, e a construção, serão mais pertinentes.

3 PRECESSÃO DE THOMAS

3.1 INTRODUÇÃO

A precessão de Thomas (TP) é um efeito cinemático relativista, proposto por L. H. Thomas em 1927 e originou-se da discussão sobre o movimento do elétron, ver [8, 9]. O fenômeno descreve que o spin de uma partícula elementar (ou o eixo de rotação de um giroscópio mecânico, ou o eixo coordenado de um referencial) que se move ao longo de uma trajetória curvilínea sofre um efeito rotacional (precessão) em relação dos eixos coordenados do laboratório.

Devido à não comutatividade das transformações de Lorentz, o produto de dois impulsos de Lorentz, mesmo que estes não possuam rotações relativas a um observador fixado, resulta em um impulso seguido de uma rotação adicional entre eles. Sugerida por Thomas e posteriormente explicada por Wigner, em [10], tal rotação ficou conhecida como rotação de Thomas, ou de Wigner, ou simplesmente rotação de Thomas-Wigner. A precessão de Thomas é uma consequência da rotação de Wigner quando consideramos movimento não inercial.

A consideração deste fenômeno, segundo Thomas, garante que os valores calculados e observados coincidam, entretanto seu objetivo era solucionar o problema no ponto de vista da mecânica quântica, onde surgiu tal discussão, porém a falta de clareza em seu texto trouxe inúmeros trabalhos divergentes ao longo de quase um século depois de sua proposta.

No capítulo seguinte, discutiremos mais sobre o problema que Thomas tentou resolver, entretanto, neste capítulo nosso objetivo é compreender na precessão de Thomas. O fenômeno, por si só, já é um problema que nos exige uma construção detalhada e que será discutida ao longo deste capítulo. Porém, deixamos para o próximo uma abordagem mais profunda de como este fenômeno pode estar relacionado, ou não, ao problema resolvido por Thomas.

O maior problema encontrado na literatura é a falta de clareza na construção do fenômeno, o que acarreta em confusões na solução final da TP. Em 1952, C. Möller propôs em [11] uma solução para a TP ao considerar sucessivas transformações de Lorentz infinitesimais. Em seu texto, a precessão de Thomas nos eixos de um sistema de coordenadas descrevendo uma trajetória curvilínea é, nas notações atuais, dada por

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Möller}} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}[\vec{v}, \dot{\vec{v}}] \quad (3.1)$$

no referencial do laboratório, onde \vec{v} é a velocidade do sistema acompanhante em um dado instante no referencial do laboratório e $\gamma^2 \equiv (1 - \vec{v}^2)^{-1}$. Sua solução, também referenciada no livro de J. D. Jackson, ver [2], coincide com a de Thomas a menos de um sinal.

Quando consideramos a velocidade \vec{v} tendendo a velocidade da luz, isto é, $|\vec{v}| \rightarrow 1$, obtemos $\gamma \rightarrow +\infty$, e conseqüentemente a expressão (3.1) representa uma precessão infinita, entrando em conflito com o trabalho sugerido por V. I. Ritus em [12].

O primeiro a considerar os resultados de Ritus foi A. Chakrabarti que, em [13], sugeriu uma nova expressão para a TP. Quase que simultaneamente e de maneira independente Ya. A. Smorodinskii, em [14], obteve o mesmo resultado. Ambos afirmaram que a expressão que representa a precessão de Thomas é dada por

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Ritus}} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} [\vec{v}, \dot{\vec{v}}] \quad (3.2)$$

também no referencial do laboratório. Tal expressão também pode ser derivada dos resultados no trabalho já citado de V. I. Ritus ou em diversos trabalhos posteriores, como os de [15–17]. O que levanta o questionamento de qual expressão está correta, pois ainda que ambas divirjam em sinal e magnitude, elas afirmam representar o fenômeno da TP no ponto de vista do laboratório.

Além dessas expressões, inúmeras outras surgiram com o desenvolvimento dessa teoria. O artigo de G. B. Malykin, ver [18], aborda outras 7 expressões que descreveriam a precessão de Thomas no referencial do laboratório evidenciando o erro cometido pelos autores em cada uma delas.

Nossa proposta é discutir o fenômeno da TP com maior rigor matemático e assim trazer uma solução cuja construção seja a mais natural possível, evitando construções complexas como as encontradas em [12] e [14], mas também evitando saltos teóricos que poderiam nos levar a um mau entendimento da solução final, como foi feito em [11]. A partir dessa construção, preencheremos a lacuna teórica que falta na grande maioria dos textos que abordam este fenômeno, bem como esclarecer o que de fato é a precessão de Thomas.

3.2 CONSTRUÇÃO

Considere um giroscópio de trajetória curvilínea $\mathbf{x}(t)$, com velocidade $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}/dt$ e eixo de rotação descrito por $\mathbf{S}(t)$. Estamos interessados na evolução de $\mathbf{S}(t)$ ao longo da trajetória, mais precisamente, em sua variação quando se faz a passagem de tempo t para $t + \delta t$.

Imagine que $\mathbf{S}(t)$ foi teoricamente calculada, logo são conhecidas no laboratório O . Entretanto, são valores sem significado observacional visto a dificuldade em medi-los neste referencial. Como podemos experimentalmente medir $\mathbf{S}(t)$ em O ?

Para fazermos isso devemos considerar o referencial O'' que acompanha o movimento do giroscópio e não tem rotação relativa ao laboratório O . Neste referencial podemos medir a evolução do eixo de rotação do giroscópio, e associar a $\mathbf{S}''(t)$. O problema é que devido

ao movimento do giroscópio o observador O'' é não inercial, logo não podemos relacionar O e O'' diretamente por uma transformação de Lorentz. Como podemos comparar os valores de $\mathbf{S}(t)$ e $\mathbf{S}''(t)$?

Para isso, considere um observador inercial O^{t_1} , que no instante t_1 passa pelo ponto $\mathbf{x}(t_1)$ com velocidade $\mathbf{v}(t_1)$. A observação feita por O^{t_1} do eixo de rotação do giroscópio será dada por $S^{t_1}(t)$, em particular, no instante t_1 será dada por $S^{t_1}(t_1)$ coincidindo com $S''(t_1)$ feita por O'' . Além disso, O^{t_1} é sistema inercial, portanto é possível relacioná-lo, instantaneamente, ao laboratório O através de uma transformação de Lorentz.

Vamos chamar O^{t_1} de observador inercial que instantaneamente (no instante t_1) acompanha o giroscópio. Podemos construir tais sistemas para cada instante do giroscópio, obtendo uma família uniparamétrica de observadores inerciais acompanhantes.

3.2.1 Observador acompanhante de uma partícula (OA)

Seja $\mathbb{C} : \vec{x} = \vec{f}(\sigma)$ a trajetória de uma partícula representada no intervalo de tempo $\sigma \equiv ct \in [0, \sigma_N]$ segundo laboratório O , onde N é o número de partições deste intervalo, assim

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N \quad \text{onde} \quad \Delta\sigma_i \equiv \sigma_i - \sigma_{i-1}. \quad (3.3)$$

Substituímos a curva $\mathbb{C} : \vec{x} = \vec{f}(\sigma)$ por uma união de intervalos $\bigcup_{i=1}^N I_i$, em que a cada partição de tempo $\Delta\sigma_i$ associaremos o segmento I_i que conecta os pontos $\vec{f}(\sigma_{i-1})$ a $\vec{f}(\sigma_i)$ substituindo o movimento da partícula em $\vec{f}(\sigma)$, com $\sigma \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ pelo movimento em I_i . Veja figura abaixo:

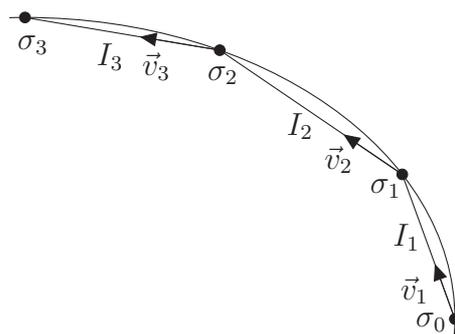


Figura 7 – Família de observadores acompanhantes aproximados quando $N = 3$

Onde a velocidade em cada partição será dada por

$$\vec{v}_i \equiv \frac{\vec{f}(\sigma_i) - \vec{f}(\sigma_{i-1})}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} = \frac{\vec{f}(\sigma_i) - \vec{f}(\sigma_{i-1})}{\Delta\sigma_i}. \quad (3.4)$$

Considere $O^{(i)}$ o sistema inercial que durante intervalo de tempo $x^0 \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ se move ao longo do intervalo I_i com velocidade \vec{v}_i , ver figura 7. A família

$$\mathcal{A}_N = \{O^{(i)} \mid i = 1, \dots, N\} \quad (3.5)$$

será chamada de família de observadores acompanhantes aproximados. Nosso interesse é no limite $N \rightarrow \infty$.

Para começarmos esta construção, considere o sistema inercial $O^{(i)}$ como foi enunciado, isto é, observador ligado ao “laboratório” deslocado por

$$(x^0 - \sigma_{i-1}, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) \quad (3.6)$$

através de um impulso de Lorentz $\Lambda_{\vec{v}_i}$. Para isso, basta considerarmos o impulso na forma (2.12) aplicado ao sistema auxiliar (3.6). Logo,

$$O^{(i)} : \begin{cases} x_i^0 = \gamma_i [x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}))], \\ \vec{x}_i = \gamma_i [A(\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \vec{v}_i(x^0 - \sigma_{i-1})]. \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\gamma_i \equiv \gamma(\vec{v}_i)$. Eventos $(x^0 = \sigma_{i-1} + \sigma, \vec{x} = \vec{f}(\sigma_{i-1}) + \vec{v}_i \sigma)$ onde $\sigma \in [0, \Delta\sigma_i]$ correspondem à propagação aproximada da partícula no intervalo I_i no sistema $O^{(i)}$. De fato, segundo (3.7), os eventos são transformados em

$$x_i^0(\sigma) = \gamma_i[\sigma - (\vec{v}_i, \vec{v}_i \sigma)] = \frac{\sigma}{\gamma_i} \quad \text{e} \quad \vec{x}_i(\sigma) = \vec{0}, \quad (3.8)$$

para todo $\sigma \in [0, \Delta\sigma_i]$.

Assim, eventos correspondem a origem do sistema $O^{(i)}$ no intervalo de tempo indicado. Em particular, quando $\sigma = 0$, ou seja $x^0 = \sigma_{i-1}$, a partícula está no instante $x_i^0 = 0$ e ao final, ou seja, $\sigma = \Delta\sigma_i$, a partícula está no instante $\Delta\sigma_i/\gamma_i$. Portanto, neste intervalo de tempo, observador $O^{(i)}$ acompanha aproximadamente partícula através do segmento I_i .

Para construirmos família de sistemas acompanhantes aproximados da partícula, é natural pensarmos que os relógios entre os observadores $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ estejam sincronizados no evento que representa a interseção dos segmentos I_i e I_{i+1} . E por construção os relógios não estão, pois no instante $x^0 = \sigma_i$ os sistemas $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ se encontram em $\vec{f}(\sigma_i)$, porém os relógios de $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ marcam, respectivamente, $x_i^0 = \Delta\sigma_i/\gamma_i$ e $x_{i+1}^0 = 0$.

Para ajustarmos os relógios, vamos corrigir transformação temporal do observador $O^{(i)}$ dado por (3.7), rescrevendo família \mathcal{A}_N a partir desses novos observadores. Começamos por $O^{(1)}$, temos

$$O^{(1)} : \begin{cases} x_1^0 = \gamma_1 [x^0 - (\vec{v}_1, \vec{x} - \vec{f}(0))], \\ \vec{x}_1 = \gamma_1 [A(\vec{v}_1)(\vec{x} - \vec{f}(0)) - \vec{v}_1(x^0)]. \end{cases}$$

que não necessita de ajuste, pois é o primeiro observador aproximadamente acompanhante. Evento $(x^0 = \sigma_1, \vec{x} = \vec{f}(\sigma_1))$ representa encontro dos observadores $O^{(1)}$ e $O^{(2)}$. Como vimos, neste instante relógio de $O^{(2)}$ marca 0 enquanto que o relógio de $O^{(1)}$ marca $\Delta\sigma_1/\gamma_1$. Assim, o ajuste de $O^{(2)}$ pode ser feito na forma

$$O^{(2)} : \begin{cases} x_2^0 = \gamma_2 [x^0 - \sigma_1 - (\vec{v}_2, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_1))] + \frac{\Delta\sigma_1}{\gamma_1}, \\ \vec{x}_2 = \gamma_2 [A(\vec{v}_2)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_1)) - \vec{v}_2(x^0 - \sigma_1)]. \end{cases}$$

Do mesmo modo, observador $O^{(3)}$ precisa ser sincronizado com $O^{(2)}$ para que no evento de passagem entre eles, seus relógios tenham a mesma marcação, assim

$$O^{(3)} : \begin{cases} x_3^0 = \gamma_3 [x^0 - \sigma_2 - (\vec{v}_3, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_2))] + \frac{\Delta\sigma_1}{\gamma_1} + \frac{\Delta\sigma_2}{\gamma_2}, \\ \vec{x}_3 = \gamma_3 [A(\vec{v}_3)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_2)) - \vec{v}_3(x^0 - \sigma_2)]. \end{cases}$$

Indutivamente, obtemos o termo geral desta família, que substituirá a forma (3.7) por

$$O^{(i)} : \begin{cases} x_i^0 = \gamma_i [x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}))] + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta\sigma_k/\gamma_k, \\ \vec{x}_i = \gamma_i [A(\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \vec{v}_i(x^0 - \sigma_{i-1})]. \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$. Qual o significado desta família de observadores acompanhantes aproximados? Considere um evento (x^0, \vec{x}) segundo o laboratório O . É possível decompormos x^0 na forma

$$x^0 = \sigma_{i-1} + \sigma \quad \text{onde} \quad \sigma \in [0, \Delta\sigma_i], \quad (3.10)$$

então obtemos observador inercial $O^{(i)}$ correspondente que melhor se aproxima da partícula, ver figuras 8 e 9.

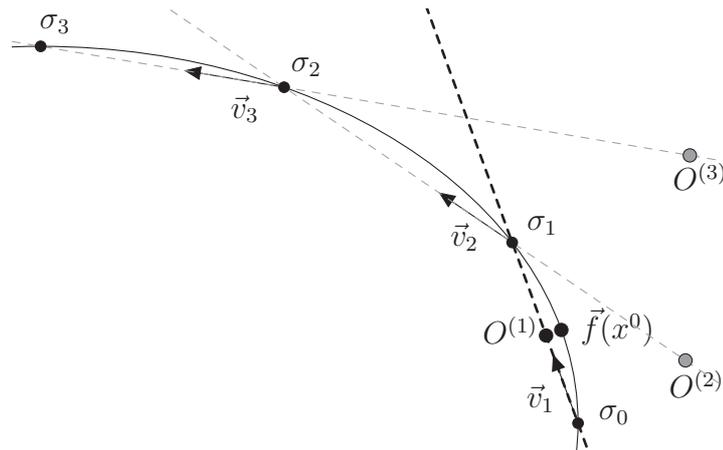


Figura 8 – Observador acompanhante aproximado, no intervalo I_1

Somente para esse sistema a origem dele fica sobre um ponto da trajetória I_i que, no instante x^0 é aproximadamente a trajetória da partícula. Outros sistemas ainda não atingiram seus segmentos representantes ou já ultrapassaram, ver figura 9.

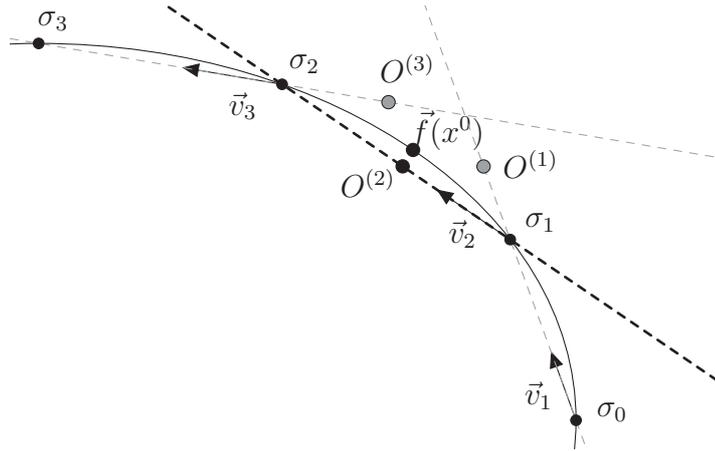


Figura 9 – Observador acompanhante aproximado, no intervalo I_2

Portanto as coordenadas deste evento medidas pela partícula são aproximadamente as coordenadas medidas pelo observador $O^{(i)}$. Para encontrarmos as coordenadas exatas basta considerarmos $N \rightarrow \infty$ em (3.9). Fazendo isso, obtemos

$$\gamma_i \rightarrow \gamma(\vec{v}(x^0)), \quad \vec{f}(\sigma_{i-1}) \rightarrow \vec{f}(x^0), \quad \sigma_{i-1} \rightarrow x^0. \quad (3.11)$$

Portanto, sistema acompanhante será dado por

$$O^{(a)} : \begin{cases} x_a^0 = \int_0^{x^0} \sqrt{1 - \vec{v}^2(\sigma)} d\sigma - \gamma(\vec{v}_{x^0})(\vec{v}_{x^0}, \vec{x} - \vec{f}(x^0)) \\ \vec{x}_a = \gamma(\vec{v}_{x^0})A(\vec{v}_{x^0})(\vec{x} - \vec{f}(x^0)), \end{cases} \quad (3.12)$$

onde $\vec{v}_{x^0} \equiv \vec{v}(x^0)$. Observe que a integral representa o tempo próprio do movimento da partícula quando ela passa de $\vec{f}(0)$ para $\vec{f}(x^0)$. Para cada evento que ocorre sobre trajetória de partícula, isto é, $(x^0, \vec{f}(x^0))$ ele será transformado, a partir de (3.12), em

$$O^{(a)} : \begin{cases} x_a^0 = \int_0^{x^0} \sqrt{1 - \vec{v}^2(\sigma)} d\sigma \\ \vec{x}_a = \vec{0}. \end{cases}$$

ou seja, evento representa posição de partícula no instante x^0 na trajetória curvilínea. No limite Newtoniano ($c \rightarrow \infty$) a equação (3.12) se transforma na passagem esperada:

$$O^{(a)} : \begin{cases} x_a^0 = x^0 \\ \vec{x}_a = \vec{x} - \vec{f}(x^0). \end{cases} \quad (3.13)$$

Por construção, identidades (3.12) tornam evidente a ideia intuitiva de considerar uma transformação de Lorentz que depende do tempo para representar a passagem do laboratório para o observador acompanhante.

3.2.2 Observadores Inerciais e a Precessão de Thomas

Construímos em (3.9) a passagem entre O e $O^{(i)}$ e bastaria um ajuste de índices para obtermos a passagem entre O e $O^{(i+1)}$, donde

$$O^{(i+1)} : \begin{cases} x_{i+1}^0 = \gamma_{i+1} \left[x^0 - \sigma_i - (\vec{v}_{i+1}, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_i)) \right] + \sum_{k=1}^i \\ \vec{x}_{i+1} = \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_{i+1})(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_i)) - \vec{v}_{i+1}(x^0 - \sigma_i) \right]. \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $\sum^i \equiv \sum_{k=1}^i \Delta\sigma_k / \gamma_k$. Assim como fizemos no capítulo anterior para os observadores O , O' e O'' , façamos o mesmo raciocínio em O , $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ quando são próximos, ou seja, quando

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i. \quad (3.15)$$

Por construção $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ se encontram em $\vec{f}(\sigma_i)$ no instante de tempo σ_i , assim a velocidade relativa de $O^{(i+1)}$ em relação a $O^{(i)}$ será dada por

$$\vec{w}_i = \gamma_i^2 A(\vec{v}_i) \delta\vec{v}_i. \quad (3.16)$$

Basta utilizarmos (2.24) a partir de sua aproximação (2.61) na observação 2.5.1. Vamos encontrar fórmulas de passagem entre $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ até a aproximação linear em $\delta\vec{v}_i$. Para isso, vamos encontrar a inversa de (3.9), aplicando a inversa do impulso (2.12) no deslocamento proposto em (3.6), onde $x^0 \sim x_i^0 - \sum^{i-1}$, assim

$$O^{(i)-1} : \begin{cases} x^0 - \sigma_{i-1} = \gamma_i \left[x_i^0 - \sum^{i-1} + (\vec{v}_i, \vec{x}_i) \right] \\ \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}) = \gamma_i \left[A(\vec{v}_i) \vec{x}_i + \vec{v}_i (x_i^0 - \sum^{i-1}) \right]. \end{cases} \quad (3.17)$$

Como $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i$ e $\vec{f}(\sigma_i) = \vec{f}(\sigma_{i-1}) + \vec{v}_i \Delta\sigma_i$ ajustamos (3.14) e assim

$$O^{(i+1)} : \begin{cases} x_{i+1}^0 = \gamma_{i+1} \left[x^0 - \sigma_{i-1} - \Delta\sigma_i - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}) - \vec{v}_i \Delta\sigma_i) \right] + \sum_{k=1}^i \\ \vec{x}_{i+1} = \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}) - \vec{v}_i \Delta\sigma_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_{i-1} - \Delta\sigma_i) \right]. \end{cases} \quad (3.18)$$

Com isso, podemos combinar (3.17) e (3.18) e eliminar x^0 e \vec{x} para encontrarmos as fórmulas de passagem entre $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$. Façamos:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^0 &\cong \gamma_i \left\{ x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i^2} + (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) \Delta\sigma_i + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_i^2 (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) \left[x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i^2} \right] \right\} + \sum_{k=1}^i = \\ &= \gamma_i \left[x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) \right] + \sum_{k=1}^{i-1} -\gamma_i (\delta\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \\ &\quad - \gamma_i^3 (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) + \gamma_i^3 (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) (x^0 - \sigma_{i-1}) = \\ &= x_i^0 - \gamma_i (\delta\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) + \gamma_i^2 (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) \left(x_i^0 - \sum_{k=1}^{i-1} \right) \stackrel{(3.17)}{=} \\ &= x_i^0 - \left(\gamma_i^2 \delta\vec{v}_i, A(\vec{v}_i) \vec{x}_i \right), \end{aligned}$$

portanto, a aproximação até a ordem linear de x_{i+1}^0 será

$$x_{i+1}^0 = x_i^0 - (\vec{w}_i, \vec{x}_i). \quad (3.19)$$

Observação 3.2.1. Como foi construído, o evento ($x^0 = \sigma_i, \vec{x} = \vec{f}(\sigma_i)$) no laboratório, representa passagem entre observador $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$, além disso relógios estão sincronizados. Assim, este evento se transforma em $x_i^0 = \sum^i = x_{i+1}^0$ e $\vec{x}_i = \vec{0} = \vec{x}_{i+1}$. Pela fórmula (3.19), temos

$$x_{i+1}^0 = x_i^0 - (\vec{w}_i, \vec{0}) = x_i^0 = \sum^i,$$

portanto continua sincronizado, como é esperado.

Por fim, façamos

$$\begin{aligned} \vec{x}_{i+1} &= \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}) - \vec{v}_i \Delta\sigma_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_{i-1} - \Delta\sigma_i) \right] \\ &= \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i - \delta\vec{v}_i) \Delta\sigma_i - \right. \\ &\quad \left. - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_{i-1} - \Delta\sigma_i) \right] = \\ &= \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \Delta\sigma_i + A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \delta\vec{v}_i \Delta\sigma_i - \right. \\ &\quad \left. - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_i) + (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \Delta\sigma_i \right] \cong \\ &\cong \gamma_i A(\vec{v}_i) \delta\vec{v}_i \Delta\sigma_i + \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_i) \right] = \\ &= \vec{w}_i \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i} + \gamma_{i+1} \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)(x^0 - \sigma_i) \right] \stackrel{(3.17)}{=} \\ &= \vec{w}_i \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i} + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \left(A(\vec{v}_i) \vec{x}_i + \vec{v}_i \left(x_i^0 - \sum^{i-1} \right) \right) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \left(\vec{x}_i - \sum^{i-1} + (\vec{v}_i, \vec{x}_i) \right) \right] = \\ &= \vec{w}_i \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i} + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) A(\vec{v}_i) \vec{x}_i - A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \delta\vec{v}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^{i-1} \right) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) (\vec{v}_i, \vec{x}_i) \right] = \\ &= \vec{w}_i \frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i} + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) A(\vec{v}_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i \right] \vec{x}_i - \gamma_i^2 A(\vec{v}_i) \delta\vec{v}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^{i-1} \right) = \\ &= \vec{w}_i \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\gamma_i} - x_i^0 + \sum^{i-1} \right) + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) A(\vec{v}_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i \right] \vec{x}_i = \\ &= -\vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) A(\vec{v}_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i \right] \vec{x}_i. \end{aligned}$$

Façamos separadamente a expansão do termo $A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)A(\vec{v}_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i$, obtendo

$$\begin{aligned} A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i)A(\vec{v}_i) - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i &= \frac{1}{\gamma_i} A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) + \\ &+ \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i \vec{v}_i^2} (A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i - \delta\vec{v}_i)) \otimes \vec{v}_i - (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i = \\ &= \frac{1}{\gamma_i} A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) + \left[\frac{\gamma_i}{\gamma_i + 1} - 1 \right] (\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i - \frac{\gamma_i}{\gamma_i + 1} (A(\vec{v}_i) \cdot \delta\vec{v}_i) \otimes \vec{v}_i = \\ &= \frac{1}{\gamma_i} A(\vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) - \frac{\vec{v}_i \otimes \vec{v}_i}{\gamma_i + 1} - 2 \frac{\delta\vec{v}_i \otimes \vec{v}_i}{\gamma_i + 1} - \frac{\gamma_i^2}{(\gamma_i + 1)^2} (\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i) \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i. \end{aligned}$$

Retornando a expansão de \vec{x}_{i+1} a partir da expansão acima e da aproximação (2.63), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{x}_{i+1} &= -\vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[\frac{A(\vec{v}_i)}{\gamma_i} - (\vec{v}_i, \delta \vec{v}_i) \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma_i + 1} (\vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i + \delta \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{v}_i \otimes \vec{v}_i}{\gamma_i + 1} - 2 \frac{\delta \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i}{\gamma_i + 1} \right] \vec{x}_i = \\ &= -\vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) + \gamma_{i+1} \gamma_i \left[\frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{I} - (\vec{v}_i, \delta \vec{v}_i) \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma_i + 1} (\vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i - \delta \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i) \right] \vec{x}_i \cong \\ &\cong \vec{x}_i - \vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) + \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i + 1} (\vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i - \delta \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i) \vec{x}_i,\end{aligned}$$

portanto, a aproximação até a ordem linear de \vec{x}_{i+1} será

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - \vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) - \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i + 1} [[\vec{v}_i, \delta \vec{v}_i], \vec{x}_i]. \quad (3.20)$$

Portanto, fórmulas de passagem $O^{(i)} \rightarrow O^{(i+1)}$ são dadas por

$$O^{(i+1)} : \begin{cases} x_{i+1}^0 = x_i^0 - (\vec{w}_i, \vec{x}_i) \\ \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - \vec{w}_i \left(\vec{x}_i^0 - \sum^i \right) - \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i + 1} [[\vec{v}_i, \delta \vec{v}_i], \vec{x}_i] \end{cases} \quad (3.21)$$

Observação 3.2.2. Novamente evento ($x^0 = \sigma_i, \vec{x} = \vec{f}(\sigma_i)$) representa passagem entre observadores, pois como vimos relógios de $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ continuam sincronizados e representam origem dos observadores segundo (3.21).

Fórmulas de passagem (3.21) nos diz que observadores $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$ estão ligados por um impulso de velocidade \vec{w}_i após uma sincronização, seguido de uma rotação equivalente à encontrada em (2.66). Esta rotação, é a precessão de Thomas que ocorre na passagem do observador $O^{(i)}$ para $O^{(i+1)}$ e seu entendimento pode ser complementado com a observação 2.4.1. A partir dessa construção fica claro como identificamos a precessão e sob qual transformação ela está relacionada.

3.2.3 Rotação (precessão) em torno do eixo fixo

Seja uma partícula com vetor posição $\mathbf{x}(t)$ e que obedece a equação

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}] \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.22)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é um vetor constante dado.

Afirmção 3.2.3. *Partícula se move em uma circunferência de raio $r = |\mathbf{x}(0)| \sin \alpha$ (onde α é o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{x}), que fica no plano ortogonal a $\boldsymbol{\Omega}$ com velocidade angular $\omega = |\boldsymbol{\Omega}|$. Então a velocidade da partícula será $\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \equiv v = r\omega$.*

Para mostrarmos isso, dado t , a equação (3.22) nos dá

$$\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = (\mathbf{x}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}]) = 0 \implies \frac{d}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \implies |\mathbf{x}| = c_0$$

ou seja, movimento da partícula é na esfera de raio $|\mathbf{x}(0)|$. Além disso, também obtemos

$$\left(\boldsymbol{\Omega}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = (\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}]) = 0 \implies \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}) = 0 \implies (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}) = c_1$$

ou seja, $|\boldsymbol{\Omega}||\mathbf{x}| \cos \alpha = c_1$. Porém, $\boldsymbol{\Omega}$ é vetor constante dado e como vimos $|\mathbf{x}|$ também é constante, então ângulo entre \mathbf{x} e $\boldsymbol{\Omega}$ é constante também. Combinando os resultados, movimento da partícula será interseção de cone com esfera, isto é, meridiano da esfera de raio $|\mathbf{x}(0)| \sin \alpha$. Assim

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = |[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}]| = |\boldsymbol{\Omega}||\mathbf{x}| \sin \alpha = |\boldsymbol{\Omega}||r| \implies \frac{v}{r} = |\boldsymbol{\Omega}| \quad (3.23)$$

onde $r = c_0 |\sin \alpha|$, mas v/r para movimento sobre circunferência é exatamente velocidade angular, ver observação 3.2.4 abaixo, portanto

$$\omega = |\boldsymbol{\Omega}| \quad (3.24)$$

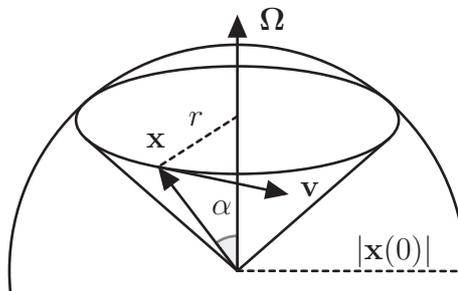


Figura 10 – Partícula com movimento circular

Observação 3.2.4. Para mostrarmos que $r\omega = v$ basta considerarmos partícula sobre circunferência de raio r que durante tempo Δt girou um ângulo $\Delta\varphi$, então pela definição de arco, tem-se $r\Delta\varphi = \Delta\ell$, logo

$$r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \quad \text{mas} \quad \omega \equiv \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \implies r\omega = v$$

Equação (3.22) recebe o nome de precessão do vetor $\mathbf{x}(0)$. Em particular, derivando (3.22) em relação a t , temos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] \quad (3.25)$$

ou seja, vetor velocidade sofre precessão junto com vetor posição de partícula.

Eixo de rotação Ω pode ser relacionado com construção anterior para a precessão de Thomas. Em (3.21), podemos identificar

$$\Omega = -\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i + 1}[\vec{v}_i, \delta\vec{v}_i]$$

representa eixo de rotação e como vimos em (3.24) sua magnitude é velocidade angular. Que está bem relacionada com a construção que fizemos no apêndice B. Grandeza Ω é calculada com valores do laboratório, entretanto na forma como vimos, está associada ao eixo de rotação na passagem dos observadores $O^{(i)}$ e $O^{(i+1)}$.

3.3 APLICAÇÃO

Ao estudarmos o movimento de uma partícula podemos: vincular ao seu movimento um observador acompanhante, geralmente não inercial cuja matriz que representa a transformação depende do instante analisado (visto na seção anterior); ou podemos estudar instantaneamente a partícula vinculando um observador inercial que terá origem coincidindo com partícula apenas naquele instante estudado, chamaremos este de observador inercial instantâneo (OII) e iremos construí-lo a seguir.

A partir dessas duas construções podemos comparar as taxas de variação das grandezas quando analisadas no OA e no OII. Faremos isso nas seções seguintes com a 4-velocidade e no capítulo seguinte com o spin de uma partícula.

3.3.1 Observador inercial instantâneo (OII)

Vimos na seção 3.2.1 como construir observador acompanhante de partícula. Seu movimento, geralmente, é não inercial e foi construído a partir do limite $N \rightarrow \infty$ na família \mathcal{A}_N de observadores inerciais acompanhantes aproximados.

Para cada x^0 podemos associar instantaneamente a $O^{(a)}$ um observador inercial e podemos nos perguntar como será a transformação do laboratório até ele, não somente para o instante que é construído mas ao longo de todo seu movimento. Para isso, fixamos $x^0 = \lambda$ e construímos observador inercial $O^{(\lambda)}$ com fórmulas de passagem análogas a (3.9) no limite que obtemos em (3.12), assim

$$O^{(\lambda)} : \begin{cases} x_\lambda^0 = \gamma_\lambda [x^0 - \lambda - (\vec{v}_\lambda, \vec{x} - \vec{f}(\lambda))] + \int_0^\lambda \sqrt{1 - \vec{v}^2(\sigma)} d\sigma, \\ \vec{x}_\lambda = \gamma_\lambda [A(\vec{v}_\lambda)(\vec{x} - \vec{f}(\lambda)) - \vec{v}_\lambda(x^0 - \lambda)]. \end{cases} \quad (3.26)$$

onde observador $O^{(\lambda)}$ tem velocidade $\vec{v}(\lambda) = \left. \frac{d\vec{f}(x^0)}{dx^0} \right|_{x^0=\lambda}$. No instante $x^0 = \lambda$ coordenadas $\vec{x} = \vec{f}(\lambda)$ serão transformadas em $\vec{x}_\lambda = \vec{0}$, ou seja, coincidindo com observador acompanhante $O^{(a)}$ neste instante. Além disso, neste evento relógio de $O^{(\lambda)}$ marcará $x_\lambda^0 = \int_0^\lambda \sqrt{1 - \vec{v}^2(\sigma)} d\sigma$, isto é, tempo sincronizado com $O^{(a)}$ neste instante.

Todos os eventos na forma $(x^0 = \lambda, \vec{x})$ têm mesmas coordenadas tanto no observador $O^{(a)}$, a partir de (3.12), quanto no observador instantâneo $O^{(\lambda)}$, a partir de (3.26). Entretanto, possui coordenadas diferentes para outros valores de x^0 , portanto quantidades que dependem não somente do instante $x^0 = \lambda$ mas de outros valores, como velocidades, devem ter comportamentos diferentes em $O^{(a)}$ e $O^{(\lambda)}$ no “instante” λ .

3.3.2 Vetor velocidade segundo OA

Da mesma forma que estudamos uma partícula com velocidade sendo transformada segundo impulso de Lorentz (seção 2.2) podemos estudar comportamento do vetor velocidade segundo OA. Considere uma partícula A com trajetória $\vec{x}(x^0)$ e velocidade

$$\vec{w}(x^0) = \lim_{\Delta x^0 \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(x^0 + \Delta x^0) - \vec{x}(x^0)}{\Delta x^0}, \quad (3.27)$$

em relação ao laboratório O . Do mesmo modo, considere observador acompanhante de uma outra partícula B , com trajetória $\vec{f}(x^0)$ e velocidade $\vec{v}(x^0)$, ver figura 11. Este observador segue regra de transformação (3.12), construída na seção 3.2.1. Para que o observador acompanhante compute o valor da velocidade $\vec{w}(x^0)$ em seu sistema, denotando por $\vec{w}_a(x^0)$, aproveitaremos a construção feita para se obter a regra de transformação (3.12) do sistema OA.

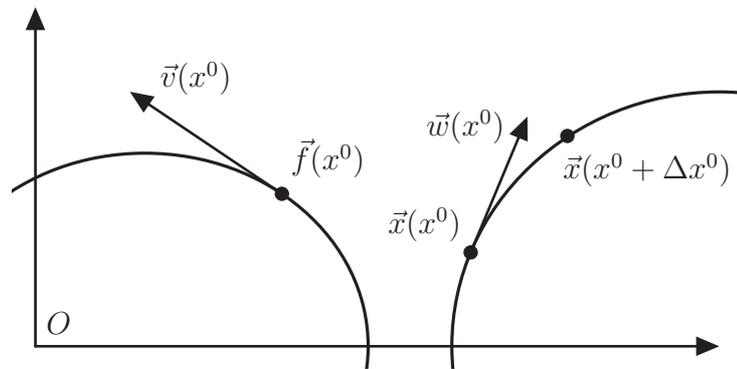


Figura 11 – Trajetórias de OA e partícula com velocidade \vec{w} segundo O

Fixe o evento $(x^0, x(x^0))$, isto é, trajetória da partícula A . Podemos decompor $x^0 = \sigma_{i-1} + \sigma$, onde $\sigma \in [0, \Delta\sigma_i]$, ver (3.10). Desta decomposição, o melhor observador da família \mathcal{A}_N que aproxima a trajetória da partícula B é $O^{(i)}$, ver figuras 8 e 9. E cuja regra de transformação do evento é dada por (3.9). Rescrevemos abaixo

$$O^{(i)} : \begin{cases} x_i^0 = \gamma_i \left[x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) \right] + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta\sigma_k / \gamma_k, \\ \vec{x}_i = \gamma_i \left[A(\vec{v}_i)(\vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \vec{v}_i(x^0 - \sigma_{i-1}) \right]. \end{cases}$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$.

Agora considere um novo evento dado por $(x^0 + \Delta x^0, \vec{x} + \Delta \vec{x}) \equiv (y^0, \vec{y})$, ver figura 11. Perceba que a escolha do observador $O^{(j)}$ da família \mathcal{A}_N que melhor aproxima a trajetória da partícula B para este evento depende do acréscimo Δx^0 . Basta que

$$x^0 + \Delta x^0 = \sigma_{j-1} + \bar{\sigma}, \quad \text{onde } \bar{\sigma} \in [0, \Delta \sigma_j]$$

Como queremos estudar o caso em que $\Delta x^0 \rightarrow 0$ podemos supor que o incremento Δx^0 é escolhido de forma a

$$x^0 + \Delta x^0 = \sigma_{i-1} + \bar{\sigma},$$

neste caso $\Delta x^0 = \bar{\sigma} - \sigma$, ou seja, $\bar{\sigma} = \Delta x^0 + \sigma$. Portanto, observador $O^{(i)}$ da família \mathcal{A}_N é também o que melhor representa a trajetória da partícula B para este evento. Assim, evento (y^0, \vec{y}) se transforma segundo a regra:

$$O^{(i)} : \begin{cases} y_i^0 = \gamma_i [x^0 + \Delta x^0 - \sigma_{i-1} - (\vec{v}_i, \vec{x} + \Delta \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1}))] + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta \sigma_k / \gamma_k, \\ \vec{y}_i = \gamma_i [A(\vec{v}_i)(\vec{x} + \Delta \vec{x} - \vec{f}(\sigma_{i-1})) - \vec{v}_i(x^0 + \Delta x^0 - \sigma_{i-1})]. \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} y_i^0 - x_i^0 = \gamma_i [\Delta x^0 - (\vec{v}_i, \Delta \vec{x})] \\ \vec{y}_i - \vec{x}_i = \gamma_i [A(\vec{v}_i) \Delta \vec{x} - \vec{v}_i \Delta x^0] \end{cases} \implies \frac{\vec{y}_i - \vec{x}_i}{y_i^0 - x_i^0} = \frac{A(\vec{v}_i) \Delta \vec{x} / \Delta x^0 - \vec{v}_i}{1 - (\vec{v}_i, \Delta \vec{x} / \Delta x^0)}$$

Portanto, velocidade $\vec{w}_i(x^0)$ no observador inercial aproximadamente acompanhante $O^{(i)}$ será dada por

$$\vec{w}_i(x^0) = \lim_{\Delta x^0 \rightarrow 0} \frac{\vec{y}_i - \vec{x}_i}{y_i^0 - x_i^0} = \frac{A(\vec{v}_i) \vec{w}(x^0) - \vec{v}_i}{1 - (\vec{v}_i, \vec{w}(x^0))}$$

Assim como fizemos para a regra de transformação do observador acompanhante, quando $N \rightarrow \infty$, obtemos (3.11), e assim

$$\vec{w}_a(x^0) = \frac{A(\vec{v}(x^0)) \vec{w}(x^0) - \vec{v}(x^0)}{1 - (\vec{v}(x^0), \vec{w}(x^0))}. \quad (3.28)$$

coincidindo com fórmula de passagem esperada em (2.24). Considerando um campo vetorial $\vec{v}(\vec{f}(x^0))$ ao longo da trajetória do OA é possível utilizar (3.28) como regra de transformação, dada por

$$\vec{w}_a = \frac{A(\vec{v}(\vec{f}(x^0))) \vec{w}(\vec{f}(x^0)) - \vec{v}(\vec{f}(x^0))}{1 - (\vec{v}(\vec{f}(x^0)), \vec{w}(\vec{f}(x^0)))}. \quad (3.29)$$

3.3.3 Precessão de Thomas do 3-vetor velocidade

Nesta seção tornaremos evidente a precessão de Thomas ao compararmos a taxa de variação do 3-vetor de velocidade computada pelos observadores acompanhante e Inercial

Instantâneo em um dado instante t_0 do movimento. Considere uma partícula que, segundo o laboratório O , possui trajetória $\vec{x} = \vec{f}(t)$ e velocidade (adimensional, como denotamos) dada por

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.30)$$

Além disso, considere um campo vetorial $\vec{w}(t) \equiv \frac{1}{c} \mathbf{w}(t)$ ao longo da trajetória $\vec{f}(t)$. Em um dado instante de tempo t_0 podemos calcular $\vec{w}(t_0)$ no laboratório e computá-lo no observador acompanhante da partícula, denotando por $\vec{w}'(t_0)$; e do mesmo modo, computá-lo no observador inercial instantâneo, denotando por $\vec{w}''(t_0)$. Assim, no instante t_0 , podemos comparar as taxas de variação do vetor velocidade no OA, dada por $d\vec{w}'/dt$, com a do OII, dada por $d\vec{w}''/dt$. Como vimos na seção 3.3.2, equação (3.29) indica que velocidade no OA será dada por:

$$\vec{w}' = \frac{A(\vec{p})\vec{w} - \vec{p}}{1 - \vec{p}\vec{w}} \quad (3.31)$$

onde denotamos $\vec{p} \equiv \vec{v}(t)$ temporariamente, para distinguirmos a variável $\vec{v}(t)$ do número $\vec{v}(t_0) \equiv \vec{v}$. No instante de tempo t_0 , no OII, a velocidade é dada por:

$$\vec{w}'' = \frac{A(\vec{v})\vec{w} - \vec{v}}{1 - \vec{v}\vec{w}} \quad (3.32)$$

Observador inercial instantâneo, no instante t_0 , coincidirá com observador acompanhante, cuja inversa de (3.32) é dada por:

$$\vec{w} = \frac{A(\vec{v})\vec{w}'' + \vec{v}}{1 + \vec{v}\vec{w}''} \quad (3.33)$$

Combinando (3.31) e (3.33), obtemos a relação de \vec{w}' e \vec{w}'' , ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{w}' &= \frac{1}{1 - \vec{p}\vec{w}} \left(A(\vec{p}) \frac{A(\vec{v})\vec{w}'' + \vec{v}}{1 + \vec{v}\vec{w}''} - \vec{p} \right) = \\ &= \frac{1}{(1 - \vec{p}\vec{w})(1 + \vec{v}\vec{w}'')} \{ A(\vec{p})A(\vec{v})\vec{w}'' + A(\vec{p})\vec{v} - \vec{p}(1 + \vec{v}\vec{w}'') \} \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde denotaremos $X \equiv [(1 - \vec{p}\vec{w})(1 + \vec{v}\vec{w}'')]^{-1}$ e $Y \equiv A(\vec{p})A(\vec{v})\vec{w}'' + A(\vec{p})\vec{v} - \vec{p}(1 + \vec{v}\vec{w}'')$. No instante t_0 , ou seja, quando $\vec{p} = \vec{v}$, obtemos:

$$\begin{aligned} X \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} &= \left[\left(1 + \vec{v} \frac{A(\vec{v})\vec{w} - \vec{v}}{1 - \vec{v}\vec{w}} \right) (1 - \vec{v}\vec{w}) \right]^{-1} = \\ &= \left[\frac{1 - \vec{v}\vec{w} + A(\vec{v})\vec{v}\vec{w} - \vec{v}^2}{1 - \vec{v}\vec{w}} (1 - \vec{v}\vec{w}) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{\gamma^2} \right]^{-1} = \gamma^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} &= A(\vec{v})A(\vec{v})\vec{w}'' + A(\vec{v})\vec{v} - \vec{v}(1 + \vec{v}\vec{w}'') = A^2(\vec{v})\vec{w}'' - (\vec{v} \otimes \vec{v})\vec{w}'' = \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{\gamma^2 \vec{v}^2} + \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{\vec{v}^2} - \vec{v} \otimes \vec{v} \right) \vec{w}'' = \left(\mathbf{I} - (1 - \gamma^2 + \gamma^2 \vec{v}^2) \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{\vec{v}^2} \right) \frac{\vec{w}''}{\gamma^2} = \frac{\vec{w}''}{\gamma^2} \end{aligned}$$

Combinando os termos acima em (3.34), obtemos

$$\vec{w}'(t_0) = \vec{w}''(t_0) \quad (3.35)$$

tal como deveria ser. Calculando a taxa de variação de (3.34) em t_0 , temos

$$\dot{\vec{w}}' = \dot{X} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} Y \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} + X \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} \dot{Y} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} = \frac{\vec{w}''}{\gamma^2} \dot{X} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} + \gamma^2 \dot{Y} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}}$$

Para calcularmos cada uma das derivadas acima e assim obter $\dot{\vec{w}}'$, enunciaremos as seguintes derivadas auxiliares:

$$\dot{A}(\vec{p}) = -\gamma(\dot{\vec{p}}\vec{p})N - 2\frac{\gamma}{\gamma+1}(\dot{\vec{p}}\vec{p})P + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\dot{\vec{p}} \otimes \vec{p} + \vec{p} \otimes \dot{\vec{p}}); \quad (3.36)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma^3(\dot{\vec{p}}\vec{p}); \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)' = -\gamma(\dot{\vec{p}}\vec{p}); \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{1}{\vec{p}^2}\right)' = -\frac{2\dot{\vec{p}}\vec{p}}{\vec{p}^2\vec{p}^2} \quad (3.39)$$

onde P e N são as projeções na direção e ortogonal à velocidade, respectivamente. Com isso, após um extenso cálculo algébrico¹, o primeiro termo será dado por:

$$\frac{\vec{w}''}{\gamma^2} \dot{X} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} = \frac{\vec{w}''}{\gamma^2} \gamma^4 \left\{ \frac{1}{\gamma}(\dot{\vec{v}}\vec{w}'') + \frac{\gamma}{1+\gamma}(\vec{v}\dot{\vec{v}})(\vec{v}\vec{w}'') + (\dot{\vec{v}}\vec{v}) \right\}$$

E o segundo será:

$$\gamma^2 \dot{Y} \Big|_{\vec{p}=\vec{v}} = \gamma^2 \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \dot{\vec{w}}'' - (\vec{v}\dot{\vec{v}})\vec{w}'' + \frac{1}{1+\gamma}(\dot{\vec{v}}\vec{w}'')\vec{v} - \frac{1}{\gamma+1}(\vec{v}\vec{w}'')\dot{\vec{v}} - \frac{1}{1+\gamma}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\vec{v} - \frac{1}{\gamma}\dot{\vec{v}} \right\}$$

Assim, combinando os termos obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\vec{w}}' &= \dot{\vec{w}}'' + [(\vec{v}\dot{\vec{v}}) - (\vec{v}\dot{\vec{v}})]\gamma^2\vec{w}'' + \left(\gamma \left(\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma-1}{\vec{v}^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\vec{v} \right), \vec{w}'' \right) \vec{w}'' + \\ &+ \frac{\gamma^2}{1+\gamma}[\dot{\vec{v}} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \dot{\vec{v}}]\vec{w}'' - \gamma \left(\dot{\vec{v}} + \frac{\gamma-1}{\vec{v}^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\vec{v} \right) = \\ &= \dot{\vec{w}}'' + (\gamma^2 A(\vec{v})\dot{\vec{v}}, \vec{w}'')\vec{w}'' - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}[[\vec{v}, \dot{\vec{v}}], \vec{w}''] - \gamma^2 A(\vec{v})\dot{\vec{v}}. \end{aligned}$$

Denote $\vec{a}'' = \gamma^2 A(\vec{v})\dot{\vec{v}}$, a aceleração do observador acompanhante com relação ao instantâneo, logo

$$\frac{d\vec{w}'}{dt} = \frac{d\vec{w}''}{dt} - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}[[\vec{v}, \dot{\vec{v}}], \vec{w}''] + (\vec{a}'', \vec{w}'')\vec{w}'' - \vec{a}'' \quad (3.40)$$

O segundo termo em (3.40) é a precessão de Thomas, o terceiro termo é da ordem $1/c^3$ e o último termo é um fator extra devido ao caráter não inercial do observador acompanhante.

¹ Optamos por omiti-lo por ser próximo aos cálculos feitos anteriormente e por sua extensão demasiada, mas que pode ser obtido através das derivadas auxiliares enunciadas, bem como as propriedades das projeções e a identidade $(\gamma^2 - 1) = \gamma^2 \vec{v}^2$.

Aqui, nos é relevante o segundo fator, onde as taxas de variação dos vetores velocidades em seus respectivos referenciais, OA e OII, está acrescida de um torque extra.

No capítulo seguinte, vamos discutir o problema que Thomas tentava solucionar ao propor este fenômeno, e veremos novamente a precessão de Thomas relacionando as taxas de variação do 3-vetor de Spin (definido neste contexto) no observador acompanhante e no instantaneamente acompanhante.

4 VERSÃO COVARIANTE DO HAMILTONIANO DE PAULI

4.1 MODELO CLÁSSICO E O FORMALISMO COVARIANTE

Modelos clássicos de spin relativístico representam uma forte ferramenta usada na descrição do comportamento de partículas elementares e corpos rotativos em campos eletromagnéticos e gravitacionais. Um ponto obscuro dessa abordagem – que já foi levantada em trabalhos pioneiros [9, 19–21] e permanece sob debate até hoje – é o chamado “problema do formalismo covariante”.

O esclarecimento desta questão pode ser de interesse em várias áreas, incluindo experimentos $g - 2$ de muon, em [22], e elétron, em [23]; influência do spin na trajetória de corpos rotativos na relatividade geral, em [24–29]; e na física do buraco negro próximo ao horizonte de eventos, em [24, 30–32]. Nos livros didáticos tornou-se quase uma tradição discutir o problema sem formulá-lo de maneira exata¹. Pretendemos, ao longo deste capítulo, quebrar esta tradição².

Historicamente, a noção clássica do elétron com spin [9, 19–21] foi desenvolvida na tentativa de explicar os níveis de energia do espectro atômico. Seguindo as ideias de Uhlenbeck e Goudsmit [19], Thomas assumiu que uma partícula com spin pode ser descrita usando o vetor posição $\mathbf{x}(t)$, e o vetor direção do eixo de spin $\mathbf{S}_T(t)$ atrelado à partícula. O vetor posição obedece à *equação da força de Lorentz*:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}]. \quad (4.1)$$

Enquanto a taxa de variação do spin foi, inicialmente, assumida como:

$$\frac{d\mathbf{S}_T}{dt} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] \right\} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{E} = \alpha\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ é um campo elétrico de Coulomb, com α sendo uma constante, e \mathbf{B} um campo magnético constante. A quantidade \mathbf{S}_T é chamada *vetor de spin de Thomas* e a equação (4.2) é dita *equação e Thomas*. Thomas mostrou [9] que estas equações, junto com a regra de quantização de Bohr do momento angular, possibilita uma descrição satisfatória dos níveis de energia atômico.

Um cálculo mais sistemático foi alcançado na mecânica quântica que fora construída com base nessas equações. Pauli notou [36] que (4.1) e (4.2) seguem do formalismo Hamiltoniano

$$H_p = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}_T, \mathbf{B}) + \frac{1}{2mc} (\mathbf{S}_T, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \quad (4.3)$$

com os colchetes canônicos

$$\{x^i, p^j\} = \delta^i_j, \quad \{x^i, x^j\} = \{p^i, p^j\} = \{x^i, S_T^j\} = \{p^i, S_T^j\} = 0, \quad \{S_T^i, S_T^j\} = \epsilon^{ijk} S_T^k \quad (4.4)$$

¹ Ver p. 541 e p. 558 em [2]; p. 563 em [23]; p. 87 em [33]; e p. 6 em [34].

² Este capítulo, exceto a última seção, foi publicado em [35].

Logo, no formalismo de Pauli é assumido que (4.2) representa a equação do movimento para o spin no sistema do laboratório. A partir desta formulação Hamiltoniana, Pauli construiu a mecânica quântica do elétron com spin substituindo as variáveis clássicas $z^A \equiv (x^i, p^j, S_T^k)$ por operadores que devem obedecer a *regra de quantização de Dirac* dada por

$$[\hat{z}^A, \hat{z}^B] = i\hbar\{z^A, z^B\} \Big|_{z \rightarrow \hat{z}}. \quad (4.5)$$

Onde aqui $[\cdot, \cdot]$ representa o comutador dos operadores dados por

$$\hat{p}^i = -i\hbar\partial_i, \quad \hat{x}^i = x^i, \quad \hat{S}_T^i = \frac{\hbar}{2}\sigma^i \quad (4.6)$$

que agem no espaço de funções de onda de duas componentes: $\Psi_a(t, \mathbf{x})$, $a = 1, 2$, onde σ^i são as matrizes de Pauli 2×2 representadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

que formam uma base do espaço vetorial das matrizes Hermitianas 2×2 sem traço. Tais matrizes possuem algumas propriedades algébricas que devemos enunciar para uso posterior, são elas

$$(\sigma^i)^2 = \mathbf{1}, \quad \sigma^i \sigma^j = i\epsilon^{ijk} \sigma^k + \delta^i_j \quad (4.8)$$

$$\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2 \times \delta^i_j \quad \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i \equiv [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (4.9)$$

para um estudo mais específico consultar [5].

Substituindo as variáveis clássicas de (4.3) pelos operadores, Pauli obteve o Hamiltoniano quântico

$$\hat{H}_{ph} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \right)^2 + eA^0(x^i) - \frac{e}{mc} \left\{ (\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{B}) + \frac{1}{2mc} (\hat{\mathbf{S}}, [\mathbf{E}, \hat{\mathbf{p}}]) \right\} \quad (4.10)$$

e mostrou que a mecânica quântica resultante reproduz os níveis de energia atômico [36]. O Hamiltoniano (4.3) pode ser também obtido da equação de Dirac, ver [37, 38].

Ressaltamos que, ao substituirmos as variáveis clássicas pelos operadores, a identidade (4.10) deveria ter as parcelas referentes ao potencial como $\mathbf{A}(\hat{x}^i)$ e $A^0(\hat{x}^i)$ e não como foi colocado. Entretanto, apenas omitimos este passo, pois os operadores em (4.6) nos dão diretamente que

$$-\frac{e}{c} \mathbf{A}(\hat{x}^i) = -\frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \quad \text{e} \quad eA^0(\hat{x}^i) = eA^0(x^i). \quad (4.11)$$

Embora esta passagem seja trivial na formulação de Pauli, veremos que será de extrema importância no problema do formalismo covariante, por isso a observação.

Dificuldades surgiram quando tentaram desenvolver uma generalização relativística covariante dessa teoria clássica [9, 19, 20]. Várias tentativas³, levaram a equações do spin

³ Veja os trabalhos pioneiros [9, 20, 21, 39, 40] e as revisões [24, 41].

e do hamiltoniano que, na aproximação $1/c^2$, diferem da teoria de Pauli. Por exemplo, assumindo que o spin 3-dimensional é a parte espacial do tensor covariante de spin de Frenkel 4-dimensional [20, 21], a teoria covariante implicaria nas expressões:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{mc} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \right\}, \quad (4.12)$$

$$H_{ph} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \quad (4.13)$$

onde chamaremos a quantidade \mathbf{S} de vetor de spin de Frenkel. Os dois Hamiltonianos diferem pelo famoso fator $1/2$ no último termo, enquanto que o último fator do spin difere, além deste fator, em estrutura. Por que o formalismo covariante não nos dá diretamente o resultado esperado? Essa questão foi levantada em 1926, [9, 20, 21], e está sob discussão até hoje, [24].

Com o intuito de explicar essa discrepância, Thomas comparou as taxas de variação do vetor direção do eixo de spin num observador acompanhante (OA) e num observador inercial instantâneo (OII). A relação resultante é a famosa fórmula da precessão de Thomas⁴.

Em particular, é amplamente aceito [2, 18, 23, 33, 34] que a precessão de Thomas é relevante ao problema do formalismo covariante. A respeito disso, ressaltamos que a fórmula de Thomas relaciona quantidades em sistemas de coordenadas diferentes, entretanto equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.12), (4.13) são consideradas no mesmo sistema, o laboratório. O que nos leva a acreditar que esta justificativa não se aplica neste contexto.

O principal objetivo deste capítulo é esclarecer essa questão. Nós iremos apresentar a formulação manifestamente covariante de uma partícula com spin que, na aproximação $1/c^2$ implicará na mecânica quântica de Pauli, sem nenhum apelo à fórmula da precessão de Thomas. Ao final faremos uma comparação detalhada dos vetores de spin de Thomas e de Frenkel, onde entenderemos o papel da precessão de Thomas no esquema do formalismo covariante.

Para isto, na seção 4.2, vamos começar do formalismo covariante para uma partícula sem spin, e assumindo que o spin na teoria relativista pode ser descrito pelo tensor de spin de Frenkel, discutiremos como introduzi-lo neste formalismo. Obtemos assim a expressão esperada para os Hamiltonianos manifestamente covariante e físico de uma partícula com spin.

Na seção 4.3 iremos corrigir os colchetes canônicos para garantir a consistência das equações hamiltonianas com a condição suplementar imposta pelo tensor de spin de Frenkel. Em particular, mostraremos que as variáveis de posição acabam não sendo comutativas no formalismo covariante.

⁴ Tal fórmula, por si só, tornou-se objeto de numerosos debates, como discutimos no capítulo 3.

Em seguida, na seção 4.4, mostraremos como essa não comutatividade da posição induzida pelo spin resolvem o problema do formalismo covariante. Os cálculos desta seção são válidos na aproximação $1/c^2$.

Na seção 4.5 construiremos os colchetes covariantes e mostraremos que existe a versão manifestamente covariante da teoria de Pauli. Na seção 4.6, retornaremos à discussão da teoria covariante na aproximação $1/c^2$ e revelaremos o significado do spin de Thomas neste esquema covariante.

Por fim, na seção 4.7, iremos rescrever nossa versão manifestamente covariante da teoria de Pauli para novas variáveis, com base no modelo de spin proposto por Pauli-Lubanski. Assim traremos a resposta para outro problema de longa data que consiste em obter a formulação Hamiltoniana para as equações propostas por Bargmann, Michel e Telegli que descrevem uma partícula com spin.

4.2 HAMILTONIANOS COVARIANTE E DE TEMPO FÍSICO

Inicialmente, vamos revisar o formalismo conhecido [5] para a descrição covariante manifesta de uma partícula sem spin em um campo eletromagnético com 4-potencial $A^\mu(x^\alpha)$; e logo após, discutir a maneira mais natural de incluir o spin neste modelo covariante. Como a teoria central deste capítulo é o formalismo Hamiltoniano, iremos usar ao longo deste, diversas propriedades que podem ser obtidas com mais detalhes em [5].

Como vimos na seção 2.6.3, descrevemos a trajetória da partícula na seguinte forma paramétrica

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow x^\mu(\tau) = (ct(\tau), \mathbf{x}(\tau) \equiv \mathbf{x}(t(\tau))) \quad (4.14)$$

como parâmetro τ consideramos tempo próprio. Ver seção 2.6.4 para mais propriedades, em particular uma atenção maior às identidades (2.102) e (2.103).

Na formulação Hamiltoniana, para cada variável $x^\mu(\tau)$ do espaço de configuração associamos a função $p_\mu(\tau)$ chamada *momento conjugado*. O formalismo hamiltoniano covariante de uma partícula sem spin na presença de um campo eletromagnético⁵ com 4-potencial $A^\mu(x^\alpha)$ é

$$H' = \frac{1}{2m} \left[\left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right)^2 + (mc)^2 \right] \quad (4.15)$$

acompanhado dos colchetes covariantes de Poisson:

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{x^\mu, x^\nu\} = 0 \quad \text{e} \quad \{p_\mu, p_\nu\} = 0.$$

Definimos o *momento canônico*, como sendo

$$\mathcal{P}^\mu \equiv p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu. \quad (4.16)$$

⁵ Para o campo eletromagnético usamos as notações apresentadas ao final da seção 2.6.4.

Afirmção 4.2.1. *Os colchetes de Poisson implicam em $\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}$.*

Demonstração. De fato, como o potencial $A^\mu(x^\alpha)$ depende explicitamente apenas de x^α e o colchete $\{x^\mu, x^\nu\} = 0$, assim:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\} &= \left\{ p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu, p^\nu - \frac{e}{c}A^\nu \right\} = -\frac{e}{c}(\{p^\mu, A^\nu\} + \{A^\mu, p^\nu\}) = \\ &= -\frac{e}{c} \left(\frac{\partial p^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial A^\nu}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial p^\mu}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial p^\nu}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial A^\mu}{\partial p_\alpha} \right) = \\ &= -\frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\alpha} \delta^\mu_\alpha + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \delta^\nu_\alpha \right) = -\frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{e}{c}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

□

A seguir faremos uma série de afirmações com o objetivo de chegar nas equações (4.23), que representam a dinâmica descrita pelo Hamiltoniano (4.15) na aproximação $1/c^2$. Após isso, traremos outro Hamiltoniano, (4.24), e iremos obter as mesmas equações (4.23), ou seja, os Hamiltonianos são equivalentes. Porém, este segundo Hamiltoniano, coincide com parte sem spin do Hamiltoniano de Pauli (4.3), tal como desejaríamos que fosse. Portanto, o Hamiltoniano (4.15) é um bom ponto de partida para nossa formulação.

Afirmção 4.2.2. *As equações Hamiltonianas $\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H'\}$, $\dot{p}^\mu = \{p^\mu, H'\}$ podem ser reescritas na forma*

$$m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \mathcal{P}^\mu \quad e \quad \frac{d\mathcal{P}^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu \quad (4.17)$$

Demonstração. De fato, substituindo a definição do Hamiltoniano (4.15), levando em consideração que o fator constante $(mc)^2$ resulta em um colchete nulo, e a regra do produto para colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \{x^\mu, H'\} = \left\{ x^\mu, \frac{1}{2m} [\mathcal{P}^2 + (mc)^2] \right\} = \\ &= \frac{1}{2m} \{x^\mu, \mathcal{P}^\nu \mathcal{P}_\nu\} = \frac{1}{2m} (\{x^\mu, \mathcal{P}^\nu\} \mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu \{x^\mu, \mathcal{P}_\nu\}) = \\ &= \frac{1}{2m} \left(\left\{ x^\mu, p^\nu - \frac{e}{c}A^\nu \right\} \mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu \left\{ x^\mu, p_\nu - \frac{e}{c}A_\nu \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2m} (\{x^\mu, p^\nu\} \mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu \{x^\mu, p_\nu\}) = \frac{1}{2m} (\eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu \delta^\mu_\nu) = \\ &= \frac{1}{m} \mathcal{P}^\mu \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}^\mu}{d\tau} &= \{\mathcal{P}^\mu, H'\} = \frac{1}{2m}(\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}_\nu\}) = \\
&= \frac{1}{2m}(\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}^\nu\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\alpha\}\eta^\alpha{}_\nu) = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}F^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \frac{e}{c}F^{\mu\alpha}\eta^\alpha{}_\nu\eta^\nu{}_\beta\mathcal{P}_\beta\right) = \\
&= \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}F^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \frac{e}{c}F^{\mu\alpha}\mathcal{P}_\alpha\right) = \\
&= \frac{e}{mc}F^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu
\end{aligned}$$

□

Da exigência da invariância de calibre do Hamiltoniano, segue a invariância do momento canônico sob transformações $U(1)$ de calibre, (em conformidade com sua interpretação obtida na afirmação anterior, no sentido de velocidade, onde observáveis são $U(1)$ -calibre invariantes). Assim

$$\mathcal{P}'_\mu = \mathcal{P}_\mu.$$

Entretanto, o momento conjugado não é invariante sob transformações $U(1)$ de calibre, pois o potencial pode ser dado por

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu\lambda \quad \text{o que implica em} \quad p_\mu = p'_\mu + \frac{e}{c}\partial_\mu\lambda \quad (4.18)$$

onde λ é uma função arbitrária e os potenciais A_μ e A'_μ são equivalentes. Portanto, assim como esperávamos, as equações Hamiltonianas (4.17) podem ser representadas em termos da quantidade \mathcal{P}_μ , que é $U(1)$ -calibre invariante.

Afirmção 4.2.3. *Parametrização por tempo próprio implica na relação*

$$\mathcal{P}^2 + (mc)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad cp^0 = c\sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2} + eA^0 \quad (4.19)$$

cuja aproximação é dada por

$$cp^0 \approx mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA^0 \quad (4.20)$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^2 + (mc)^2 &= \mathcal{P}^\nu(\tau)\mathcal{P}_\nu(\tau) + (mc)^2 = -\mathcal{P}^0(\tau)\mathcal{P}^0(\tau) + (\mathcal{P}(\tau))^2 + (mc)^2 = \\
&= -m^2\left(\frac{dx^0(\tau)}{d\tau}\right)^2 + m^2\left(\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right)^2 + (mc)^2 = -m^2c^2\gamma^2 + m^2c^2\gamma^2\vec{v}^2 + (mc)^2 = \\
&= -(mc)^2(\gamma^2 - 1) + (mc)^2\gamma^2\vec{v}^2 = -(mc)^2\gamma^2\vec{v}^2 + (mc)^2\gamma^2\vec{v}^2 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

A segunda identidade em (4.19) resulta direto das relações

$$(\mathcal{P}^0)^2 = (mc)^2 + \mathcal{P}^2 \quad \text{e} \quad c\mathcal{P}^0 = cp^0 - eA^0$$

onde \mathcal{P}^2 é o quadrado da parte espacial. Para esta, obtemos a seguinte expansão em séries de $1/c$, até a ordem linear⁶:

$$\begin{aligned} cp^0 &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{\mathcal{P}^2}{(mc)^2}} + eA^0 \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}^2}{2m^2c^2} + O_4 \right) + eA^0 \approx \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA^0 \end{aligned}$$

□

Desde que $x^\mu(\tau)$ e $p_\mu(\tau)$ representam as variáveis físicas dinâmicas $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ na forma paramétrica, nós podemos escrever

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c \frac{d\mathbf{x}/d\tau}{dx^0/d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = c \frac{d\mathcal{P}/d\tau}{dx^0/d\tau}.$$

Usando (4.17) e (4.19), obtemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{c\mathcal{P}}{\sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e[\mathcal{P}, \mathbf{B}]}{\sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2}} \quad (4.21)$$

de fato,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c \frac{\mathcal{P}/m}{\mathcal{P}^0/m} = \frac{c\mathcal{P}}{\sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2}}$$

pois pela identidade (4.19), temos $\mathcal{P}^0 = \sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2}$. E mais,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}^j}{dt} &= c \frac{d\mathcal{P}^j/d\tau}{dx^0/d\tau} = c \frac{e}{mc} F^{j\nu} \mathcal{P}_\nu \frac{m}{\mathcal{P}^0} = e \frac{F^{j\nu} \mathcal{P}_\nu}{\mathcal{P}^0} = \\ &= \frac{eF^{j0} \mathcal{P}_0 + eF^{jk} \mathcal{P}_k}{\mathcal{P}^0} = -\frac{eF^{j0} \mathcal{P}^0}{\mathcal{P}^0} + \frac{eF_{jk} \mathcal{P}_k}{\mathcal{P}^0} = \\ &= -eF^{j0} + \frac{e\epsilon_{jkm} B_m \mathcal{P}_k}{\mathcal{P}^0} = eE^j + \frac{e[\mathcal{P}, \mathbf{B}]^j}{\mathcal{P}^0} \end{aligned}$$

Além disso, expandindo $1/\mathcal{P}^0$ em séries de $1/c$ obtemos

$$\frac{1}{\mathcal{P}^0} = \frac{1}{\sqrt{(mc)^2 + \mathcal{P}^2}} = \frac{1}{mc} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathcal{P}^2}{(mc)^2}}} = \frac{1}{mc} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{2m^2c^2} + O_4 \right) \quad (4.22)$$

⁶ Denotamos $O_n \equiv O(1/c^n)$ apenas para reduzir a notação.

Substituindo em (4.21), mantendo apenas os termos até a ordem $1/c$ e usando o fato de que $\mathcal{P} = \mathbf{p} + O_1$ obtemos

$$m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{p}, \mathbf{B}], \quad (4.23)$$

que representa a dinâmica do Hamiltoniano (4.15) na aproximação $1/c$. A primeira equação nos mostra que o momento canônico \mathcal{P} representa a velocidade da partícula no formalismo Hamiltoniano e combinando as fórmulas (4.23) obtemos a equação da força de Lorentz (4.1).

Enquanto em geral, a teoria de reparametrização com restrições de Dirac requer cuidado [42–48], o resultado final é bastante simples [49]: o Hamiltoniano físico coincide com o lado direito da segunda equação em (4.19) cuja expansão em séries de $1/c$, até a ordem linear, foi vista em (4.20). Tal aproximação, coincide com parte sem spin do Hamiltoniano de Pauli, assim como queríamos.

Entretanto, podemos evitar este caminho e simplesmente enunciar o Hamiltoniano físico como sendo

$$H'_{ph} \equiv cp^0 \approx mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + eA^0 \quad (4.24)$$

onde \approx foi vista em (4.20). Além disso, associado a ele, consideramos os colchetes canônicos. Deste modo, para garantirmos a equivalência entre os hamiltonianos (4.15) e (4.24), basta mostrarmos a seguinte afirmação:

Afirmção 4.2.4. *Hamiltoniano dado em (4.24) determina a mesma dinâmica descrita em (4.23).*

Demonstração. Como H'_{ph} é apresentado em termos das variáveis físicas $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$, onde o parâmetro é o tempo físico t temos

$$\begin{aligned} \frac{dx^j}{dt} &= \{x^j, H'_{ph}\} = \left\{ x^j, mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + eA^0 \right\} = \\ &= \frac{1}{2m} \{x^j, (\mathcal{P})^2\} = \frac{1}{2m} \{x^j, \mathcal{P}^i \mathcal{P}_i\} = \\ &= \frac{1}{m} \{x^j, \mathcal{P}^i\} \mathcal{P}_i = \frac{1}{m} \left\{ x^j, p^i - \frac{e}{c}A^i \right\} \mathcal{P}_i = \\ &= \frac{1}{m} \{x^j, p^i\} \mathcal{P}_i = \frac{\mathcal{P}^j}{m} \implies m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{P} \end{aligned}$$

e, como \mathcal{P}^j pode depender explicitamente do t , devido ao potencial, devemos considerar ∂_t na identidade, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}^j}{dt} &= \{\mathcal{P}^j, H'_{ph}\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} = \left\{ \mathcal{P}^j, mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + eA^0 \right\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{2m} \{\mathcal{P}^j, (\mathcal{P})^2\} + \{\mathcal{P}^j, eA^0\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{m} \{\mathcal{P}^j, \mathcal{P}^i\} \mathcal{P}_i + \{\mathcal{P}^j, eA^0\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} \end{aligned}$$

mas

$$\{\mathcal{P}^j, eA^0\} = e \left(\frac{\partial \mathcal{P}^j}{\partial x^a} \frac{\partial A^0}{\partial p_a} - \frac{\partial A^0}{\partial x^a} \frac{\partial \mathcal{P}^j}{\partial p_a} \right) = -e \frac{\partial A^0}{\partial x^a} \delta_a^j = e \frac{\partial A_0}{\partial x^j}$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}^j}{dt} &= \frac{e}{mc} F^{ji} \mathcal{P}_i + \{\mathcal{P}^j, eA^0\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} = \\ &= \frac{e}{mc} F^{ji} \mathcal{P}_i + e \frac{\partial A_0}{\partial x^j} - e \frac{\partial A_j}{\partial x^0} \approx \\ &\approx \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}]^j + eE^j \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

□

A única diferença entre (4.24) e a parte sem spin do Hamiltoniano de Pauli (4.3), é o fator mc^2 , mas este fator constante não influencia na dinâmica descrita pelos Hamiltonianos. Além disso, enquanto o primeiro preserva a covariância (que procuramos), o segundo pode ser comparado com o de Pauli (como desejávamos).

Na tentativa de incluir o spin neste esquema covariante, introduzimos a função $\mathbf{S}(t)$ na parametrização por tempo próprio, definindo

$$\mathbf{S}(\tau) \equiv \mathbf{S}(t(\tau)). \quad (4.25)$$

Seguindo Frenkel [20], identificamos as componentes S^i do 3-vetor de spin com a parte espacial do 4-tensor antissimétrico de spin $S^{\mu\nu}$ seguindo a regra

$$S^{ij} = 2\epsilon^{ijk} S^k \quad \text{ou} \quad S^i = \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} S^{jk} \quad (4.26)$$

onde $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$. A quantidade 3-dimensional S^i será chamada de *spin de Frenkel* e pode ser identificado com o eixo de spin no referencial do laboratório. Assumimos que em cada instante do movimento $S^{\mu\nu}$ obedece à condição suplementar de spin⁷:

$$S^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu = 0. \quad (4.27)$$

E por essa condição, temos

$$0 = S^{i\nu} \mathcal{P}_\nu = S^{i0} \mathcal{P}_0 + S^{ij} \mathcal{P}_j \quad \Longrightarrow \quad S^{i0} = -\frac{S^{ij} \mathcal{P}_j}{\mathcal{P}_0} \quad \Longrightarrow \quad S^{0i} = \frac{S^{ij} \mathcal{P}_j}{\mathcal{P}_0}.$$

Como $\mathcal{P}_0 = -\mathcal{P}^0$ pela aproximação (4.22) e por (4.26) obtemos

$$S^{0i} = \frac{2}{\mathcal{P}_0} \epsilon^{ijk} S^k \mathcal{P}_j = \frac{2}{\mathcal{P}_0} [\mathbf{P}, \mathbf{S}]^i \approx -\frac{2}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^i + \mathcal{O}(1/c^2). \quad (4.28)$$

⁷ Nós poderíamos usar também $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$, onde p_ν é o momento conjugado. Como vimos, a diferença entre os dois é da ordem de $1/c$, o que não contribui nas expressões subsequentes na aproximação $1/c^2$.

Por (4.26) e (4.28), somos capazes de escrever o 4-tensor de spin $S^{\mu\nu}$. Como consequência, o número de componentes independentes do spin da teoria relativista e de Pauli é o mesmo. Além disso, no referencial de repouso da partícula, quando $\mathcal{P} = 0$, as componentes extras são nulas.

Nossas variáveis básicas $z^A \equiv (x^\mu, p_\nu, S^{\mu\nu})$ se transformam linearmente sob transformações de Lorentz, a saber

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \quad \text{e} \quad S'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta S^{\alpha\beta}$$

Na tentativa de incluir o spin neste formalismo, precisamos encontrar funções escalares que contenham a interação spin-campo. Desta forma, devido ao nosso modelo de spin, a função deve conter pelo menos $S^{\mu\nu}$ junto de $F_{\mu\nu}$ ou pelo menos o potencial A^μ , assim podem ser

$$S_{\mu\nu} A^\mu x^\nu, \quad S_{\mu\nu} A^\mu \mathcal{P}^\nu, \quad S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu, \quad S_{\mu\nu} A^\mu p^\nu, \quad F_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$$

O fator que contém x^μ será descartado, pois não queremos uma dependência com o sistema de coordenadas; o fator que contém \mathcal{P}^ν será descartado, pois a condição (4.27) o torna identicamente nulo; o fator $S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ também será identicamente nulo, pois $S_{\mu\nu}$ é antissimétrico e assim podemos fazer

$$S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \frac{1}{2} S_{\nu\mu} A^\nu A^\mu + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = -\frac{1}{2} S_{\mu\nu} A^\nu A^\mu + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 0$$

onde fizemos, na segunda identidade, uma troca dos índices de soma e depois, na terceira identidade, utilizamos a propriedade antissimétrica de $S_{\mu\nu}$. Por fim, descartamos a quarta opção, pois como $p^\mu = \mathcal{P}^\mu + \frac{e}{c} A^\mu$ e nos dois casos anteriores a função escalar era identicamente nula segue o mesmo resultado para esta. Portanto a única função escalar contendo a interação spin-campo desejada será

$$-\frac{e\mu}{2c} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = -\frac{2e\mu}{c} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathcal{P}]) \right\} \quad (4.29)$$

Nós adicionamos a interação do spin com o campo eletromagnético através do momento magnético que corresponde a relação giromagnética $g = 2\mu$. Nas seções 4.3, 4.4 e 4.6 utilizamos o valor clássico $\mu = 1$.

Os escalares no lado esquerdo da identidade (4.29) podem ser definidos de forma arbitrária, fizemos esta escolha para obtermos o escalar do lado direito da identidade, pois este resultará no mesmo escalar que acompanha o fator de spin no Hamiltoniano de Pauli. Entretanto, neste fator percebe também que já obtemos a diferença 1/2 no segundo termo. Tal diferença não pode ser compensada por um simples escalar, pois o primeiro fator está

em correspondência. Além disso, para obter a identidade basta fazer:

$$\begin{aligned}
-\frac{e\mu}{2c}F_{\mu\nu}S^{\mu\nu} &= -\frac{e\mu}{2c}\left\{F_{00}S^{00} + F_{0j}S^{0j} + F_{i0}S^{i0} + F_{ik}S^{ik}\right\} = \\
&= -\frac{e\mu}{2c}\left\{-E_jS^{0j} - E_jS^{0j} + 2\epsilon^{ikt}B^t\epsilon^{ikl}S^l\right\} \stackrel{(4.28)}{=} \\
&= -\frac{e\mu}{2c}\left\{-\frac{4}{\mathcal{P}_0}E_j[\mathcal{P}, \mathbf{S}]^j + 4\delta^l_t B^t S^l\right\} = \\
&= -\frac{2e\mu}{c}\left\{\frac{1}{\mathcal{P}^0}(\mathbf{E}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]) + (\mathbf{S}, \mathbf{B})\right\} \stackrel{(4.22)}{\approx} \\
&\approx -\frac{2e\mu}{c}\left\{\frac{1}{mc}(\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathcal{P}]) + (\mathbf{S}, \mathbf{B})\right\}
\end{aligned}$$

Adicionando este termo em (4.15) obtemos o Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu\right)^2 - \frac{e\mu}{2c}F_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + (mc)^2\right] \quad (4.30)$$

Afirmção 4.2.5. *Hamiltoniano físico resultante de (4.30), assumindo $\mu = 1$, será dado por*

$$H_{ph} = mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA^0 - \frac{e}{mc}\left\{(\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc}(\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}])\right\} \quad (4.31)$$

na aproximação até a ordem $1/c^2$.

Para calcularmos a dinâmica de (4.30) e de (4.31) e obtermos a equivalência entre os Hamiltonianos (assim como fizemos com a parte sem spin) precisamos completar a teoria enunciando a coleção de colchetes associados a (4.30), que na aproximação $1/c^2$ será a coleção de colchetes associados a (4.31). Porém, veremos nas próximas seções que não podemos utilizar os colchetes (4.4), pois a condição suplementar de spin (4.27) implicará em algumas alterações.

Neste momento poderíamos sugerir qual seria a coleção de colchetes e trabalhar a partir dela, entretanto a coleção é demasiadamente complexa não trazendo nenhuma ideia intuitiva de como obtê-la. Por isso, na seção seguinte, vamos construir nossa coleção adaptando a coleção previamente assumida de forma a agregarmos certas propriedades aos nossos colchetes, isto é, veremos que ao exigir uma propriedade para o colchete o mesmo deverá sofrer uma alteração.

Na seção 4.3 trataremos os colchetes na aproximação $1/c^2$, assim será possível calcularmos a dinâmica de (4.31); e a partir dessa motivação, na seção 4.5 trataremos a coleção em sua forma covariante, onde iremos calcular a dinâmica de (4.30). Somente com ambas dinâmicas enunciadas que seremos capazes de concluir afirmação 4.2.5.

Observação 4.2.6. Ainda que tenhamos que adiar a demonstração já podemos perceber a diferença explícita entre o hamiltoniano da teoria de Pauli e o hamiltoniano físico resultante da teoria covariante. Além disso, assumimos $\mu = 1$ para fazermos o comparativo com a

teoria de Pauli, pois nos experimentos da época era-se utilizado tal valor. Entretanto, experimentos posteriores indicariam que $\mu \approx 1$, portanto quando formularmos a teoria completa covariante vamos assumir como sendo μ .

4.3 COLCHETES NÃO-CANÔNICOS

A condição (4.27) deve ser consistente com as equações do movimento resultante, isso nos leva a uma observação crucial para a explicação do fator $1/2$: Formalismo covariante inevitavelmente leva à correções da ordem $1/c^2$ nos colchetes canônicos (4.4). A condição suplementar de spin implica

$$\frac{d}{d\tau}(S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu) = 0.$$

No formalismo Hamiltoniano, a taxa de variação de uma função no espaço de fase é igual ao colchete dessa função com o Hamiltoniano, então

$$0 = \frac{d}{d\tau}(S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu) = \{S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu, H\} = \{S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu, z^A\} \frac{\partial H}{\partial z^A}. \quad (4.32)$$

A última igualdade de (4.32) só será igual a zero, validando a primeira identidade, se considerarmos

$$\{z^A, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} = 0. \quad (4.33)$$

É essa equação que acarretará na primeira alteração dos colchetes canônicos. Vamos assumir que o colchete

$$\{x^\alpha, \mathcal{P}_\beta\} = \{x^\alpha, p_\beta\} - \frac{e}{c}\{x^\alpha, x^\gamma\}\partial_\gamma A_\beta$$

permanece inalterado até a ordem $1/c^2$. Assim, obtemos

$$\{x^\alpha, \mathcal{P}_\beta\} = \delta^\alpha_\beta + O_3 \implies \{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu \implies \{x^i, p_j\} = \delta^i_j. \quad (4.34)$$

Além disso, essa identidade nos indica que o colchete $\{x^\alpha, x^\beta\}$ deverá ser de ordem quadrática. Assumimos também que o seguinte colchete permanece inalterado até a ordem $1/c^2$:

$$\{p_i, p_j\} = 0 + O_3 = 0. \quad (4.35)$$

Com isso, obtemos

$$\{p^i, \mathcal{P}_j\} = \{p^i, p_j\} - \frac{e}{c}\{p^i, x_k\}\partial_k A_j = \frac{e}{c}\delta^i_k \partial_k A_j \implies \{p^i, \mathcal{P}_j\} = \frac{e}{c}\partial_i A_j. \quad (4.36)$$

Condição (4.33), quando $z^A = x^\alpha$, implica em

$$0 = \{x^\alpha, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} = \{x^\alpha, S^{\mu\nu}\}\mathcal{P}_\nu + S^{\mu\nu}\{x^\alpha, \mathcal{P}_\nu\}.$$

Essa última igualdade será válida, ou seja, identicamente nula, se considerarmos

$$\{x^\alpha, S^{\mu\nu}\} = \frac{\mathcal{P}^\mu S^{\nu\beta} - \mathcal{P}^\nu S^{\mu\beta}}{\mathcal{P}^2} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\beta\}. \quad (4.37)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \{x^\alpha, S^{\mu\nu}\} \mathcal{P}_\nu + S^{\mu\nu} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\nu\} &= \frac{\mathcal{P}^\mu S^{\nu\beta} - \mathcal{P}^\nu S^{\mu\beta}}{\mathcal{P}^2} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\beta\} \mathcal{P}_\nu + S^{\mu\nu} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\nu\} \stackrel{(4.27)}{=} \\ &= -\frac{\mathcal{P}^2 S^{\mu\beta} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\beta\}}{\mathcal{P}^2} + S^{\mu\nu} \{x^\alpha, \mathcal{P}_\nu\} = 0, \end{aligned}$$

tal como queríamos. Além disso, assumir (4.37), implica em

$$\{x^i, S^j\} = \frac{p^i S^j - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \quad (4.38)$$

na aproximação $1/c^2$. De fato,

$$\begin{aligned} \{x^i, S^j\} &= \frac{1}{4} \epsilon^{jnm} \{x^i, S^{nm}\} = \frac{1}{4} \epsilon^{jnm} \left(\frac{\mathcal{P}^n S^{m\beta} - \mathcal{P}^m S^{n\beta}}{\mathcal{P}^2} \right) \{x^i, \mathcal{P}_\beta\} = \\ &= \frac{1}{4\mathcal{P}^2} (\epsilon^{jnm} \mathcal{P}^n S^{m\beta} - \epsilon^{jnm} \mathcal{P}^m S^{n\beta}) \{x^i, \mathcal{P}_\beta\} = \\ &= \frac{1}{4\mathcal{P}^2} (2\epsilon^{jnm} \mathcal{P}^n \epsilon^{m\beta k} S^k - 2\epsilon^{jnm} \mathcal{P}^m \epsilon^{n\beta k} S^k) \{x^i, \mathcal{P}_\beta\} = \\ &= \frac{1}{2\mathcal{P}^2} [(\delta^j_\beta \delta^n_k - \delta^j_k \delta^n_\beta) \mathcal{P}^n S^k + (\delta^j_\beta \delta^m_k - \delta^j_k \delta^m_\beta) \mathcal{P}^m S^k] \{x^i, \mathcal{P}_\beta\} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}^2} (\delta^j_\beta(\mathcal{P}, \mathbf{S}) - S^j \mathcal{P}^\beta) \{x^i, \mathcal{P}_\beta\} = \\ &= \frac{S^j \mathcal{P}^\beta - \delta^j_\beta(\mathcal{P}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \delta^i_\beta + O_3 \approx \\ &\approx \frac{S^j p^i - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \end{aligned}$$

Assumimos que o seguinte colchete permaneça inalterado na aproximação $1/c^2$:

$$\{S^{\alpha\beta}, p_\nu\} = 0 + O_3 \implies \{S^i, p_j\} = 0, \quad (4.39)$$

assim

$$\{S^{\alpha\beta}, \mathcal{P}_\nu\} = \{S^{\alpha\beta}, p_\nu\} - \frac{e}{c} \{S^{\alpha\beta}, x^\gamma\} \partial_\gamma A_\nu \implies \{S^{\alpha\beta}, \mathcal{P}_\nu\} = 0 + O_3. \quad (4.40)$$

Condição (4.33), quando $z^A = S^{\alpha\beta}$, implica em

$$0 = \{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu\} = \{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\} \mathcal{P}_\nu + S^{\mu\nu} \{S^{\alpha\beta}, \mathcal{P}_\nu\} = \{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\} \mathcal{P}_\nu + O_3.$$

Essa última igualdade será válida, ou seja, identicamente nula, se considerarmos

$$\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\} = 2N^{(\alpha\mu} S^{\beta\nu)} \equiv 2(N^{\alpha\mu} S^{\beta\nu} - N^{\alpha\nu} S^{\beta\mu} - N^{\beta\mu} S^{\alpha\nu} + N^{\beta\nu} S^{\alpha\mu}) \quad (4.41)$$

onde N é a projeção no plano ortogonal a \mathcal{P}^μ , isto é,

$$N^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu}{\mathcal{P}^2} \implies N^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu = 0$$

Para verificarmos a validade basta observar que o colchete está sendo multiplicado por \mathcal{P}_ν e assim utilizar a identidade (4.27) e a definição da projeção no plano ortogonal N . Para as componentes espaciais obtemos

$$\{S^i, S^j\} = \left\{ \frac{1}{4} \epsilon^{ilk} S^{lk}, \frac{1}{4} \epsilon^{jnm} S^{nm} \right\} = \frac{1}{4^2} \epsilon^{ilk} \epsilon^{jnm} \{S^{lk}, S^{nm}\} = \frac{1}{8} \epsilon^{ilk} \epsilon^{jnm} N^{ln} S^{km}.$$

Façamos apenas o cálculo da primeira parcela de $N^{ln} S^{km}$ na identidade acima, pois os outros três fatores de (4.41) serão iguais a este. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \epsilon^{ilk} \epsilon^{jnm} N^{ln} S^{km} &= \frac{1}{8} \epsilon^{ilk} \epsilon^{jnm} N^{ln} 2 \epsilon^{kmt} S^t = \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon^{ilk} (\delta^j_k \delta^n_t - \delta^j_t \delta^n_k) N^{ln} S^t = \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon^{ilj} N^{lt} S^t + \frac{1}{4} \epsilon^{ilk} N^{lk} S^j = \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon^{ilj} \left(\eta^{lt} - \frac{\mathcal{P}^l \mathcal{P}^t}{\mathcal{P}^2} \right) S^t + \frac{1}{4} \epsilon^{ilk} \left(\eta^{lk} - \frac{\mathcal{P}^l \mathcal{P}^k}{\mathcal{P}^2} \right) S^j = \\ &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \left(S^k - \frac{\mathcal{P}^k(\mathcal{P}, \mathbf{S})}{\mathcal{P}^2} \right) \end{aligned}$$

Assim, o termo se repetirá quatro vezes resultando na identidade

$$\{S^i, S^j\} = \epsilon^{ijk} \left(S^k - \frac{\mathcal{P}^k(\mathcal{P}, \mathbf{S})}{\mathcal{P}^2} \right) = \epsilon^{ijk} \left(S^k + \frac{p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) + O_3. \quad (4.42)$$

Resta-nos apenas o caso $z^A = p_\alpha$ na condição (4.33). Mas assim como fizemos anteriormente precisamos garantir

$$\{p_\alpha, S^{\mu\nu}\} \mathcal{P}_\nu + \{p_\alpha, \mathcal{P}_\nu\} S^{\mu\nu} = 0,$$

porém nas aproximações que assumimos não vamos conseguir atender a identidade apenas com os fatores de ordem $1/c^2$ ou menor. Retornaremos a este caso quando trabalharmos com a formulação completa da teoria, na seção 4.5, e veremos que devido ao produto por \mathcal{P}_ν um fator de ordem superior à quadrática contido no colchete $\{p_\alpha, S^{\mu\nu}\}$ se reduzirá a ordem linear compensando assim os termos do fator $\{p_\alpha, \mathcal{P}_\nu\} S^{\mu\nu}$. Por fim, para o colchete $\{x^i, x^j\}$, podemos seguir dois caminhos:

- Construir sua correção nos mantendo apenas na teoria clássica, para isso vamos exigir a identidade de Jacobi em nossa coleção de colchetes; ou
- Estudar o comportamento dos comutadores, na teoria quântica.

Para mantermos nossa construção fechada na teoria clássica vamos seguir pelo primeiro caminho, porém na seção seguinte vamos apresentar o outro (e assim mostrar que uma não contradiz a outra) para compararmos as teorias covariante e de Pauli a níveis clássico e quântico.

A seguir vamos testar a identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

para todo trio $\{A, B, C\}$ de variáveis que podemos escrever com $\{x^i, p^j, S^k\}$. Vamos começar desenvolvendo (na aproximação $1/c^2$) para:

$$\begin{aligned} & \{x^k, \{x^i, S^j\}\} + \{x^i, \{S^j, x^k\}\} + \{S^j, \{x^k, x^i\}\} = \\ & = \left\{ x^k, \frac{p^i S^j - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right\} + \left\{ x^i, \frac{\delta^k_j(\mathbf{p}, \mathbf{S}) - p^k S^j}{(mc)^2} \right\} + \{S^j, \{x^k, x^i\}\} = \\ & = \{x^k, p^i\} \frac{S^j}{(mc)^2} + \{x^k, S^j\} \frac{p^i}{(mc)^2} - \{x^k, p^l\} \frac{S^l \delta^i_j}{(mc)^2} - \{x^k, S^l\} \frac{p^l \delta^i_j}{(mc)^2} + \\ & + \{x^i, p^l\} \frac{S^l \delta^k_j}{(mc)^2} + \{x^i, S^l\} \frac{p^l \delta^k_j}{(mc)^2} - \{x^i, p^k\} \frac{S^j}{(mc)^2} - \{x^i, S^j\} \frac{p^k}{(mc)^2} + \{S^j, \{x^k, x^i\}\} = \\ & = \frac{\delta^k_i S^j}{(mc)^2} - \frac{\delta^i_j S^k}{(mc)^2} + \frac{\delta^k_j S^i}{(mc)^2} - \frac{\delta^i_k S^j}{(mc)^2} + \{S^j, \{x^k, x^i\}\} + O_4 = \\ & = -\frac{\delta^i_j S^k}{(mc)^2} + \frac{\delta^k_j S^i}{(mc)^2} + \{S^j, \{x^k, x^i\}\}. \end{aligned}$$

Para que a identidade acima seja igual a zero devemos assumir

$$\{x^i, x^j\} = \frac{1}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} S^k \quad (4.43)$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{\delta^k_j S^i - \delta^i_j S^k}{(mc)^2} + \left\{ S^j, \frac{\epsilon^{kit} S^t}{(mc)^2} \right\} &= \frac{\delta^k_j S^i - \delta^i_j S^k}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{kit}}{(mc)^2} \epsilon^{jtl} S^l + O_4 = \\ &= \frac{\delta^k_j S^i - \delta^i_j S^k}{(mc)^2} - (\delta^k_j \delta^i_l - \delta^k_l \delta^i_j) \frac{S^l}{(mc)^2} = \\ &= 0, \end{aligned}$$

tal como queríamos.

Porém, para usarmos este argumento (e assim completar nossa lista de colchetes) precisamos mostrar a identidade de Jacobi para o restante dos trios. Os casos em que $\{A, B, C\}$ é da forma

$$\{p^i, p^j, p^k\}, \quad \{x^i, x^j, p^k\}, \quad \{p^i, p^j, S^k\}, \quad \{p^i, p^j, x^k\}, \quad \{S^i, S^j, p^k\}, \quad \{x^i, p^j, S^k\}$$

são facilmente verificados devido a trivialidade dos colchetes. O caso $\{x^i, x^j, x^k\}$ também será nulo, pois o colchete $\{x^i, x^j\}$ já é da ordem $1/c^2$, e como $\{x^i, S^j\}$ também é desta ordem todos os três fatores serão de ordem superior.

Restam apenas dois casos, $\{x^i, \{S^j, S^k\}\}$ e $\{S^i, \{S^j, S^k\}\}$, onde para este último vamos utilizar a seguinte identidade:

$$\epsilon^{jkl}\epsilon^{ilt} + \epsilon^{kil}\epsilon^{jlt} + \epsilon^{ijl}\epsilon^{klt} = 0$$

Assim:

$$\begin{aligned} & \{x^i, \{S^j, S^k\}\} + \{S^j, \{S^k, x^i\}\} + \{S^k, \{x^i, S^j\}\} = \\ & = \left\{ x^i, \epsilon^{jkl} S^l + \frac{\epsilon^{jkl} p^l(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right\} + \left\{ S^j, \frac{\delta^i_k(\mathbf{p}, \mathbf{S}) - p^i S^k}{(mc)^2} \right\} + \left\{ S^k, \frac{p^i S^j - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right\} = \\ & = \frac{\epsilon^{jkl} p^i S^l}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{jkl} p^l S^i}{(mc)^2} + \frac{\delta^i_k p^t \epsilon^{jtl} S^l}{(mc)^2} - \frac{p^i \epsilon^{jkt} S^t}{(mc)^2} + \frac{p^i \epsilon^{kjt} S^t}{(mc)^2} - \frac{\delta^i_j p^t \epsilon^{klt} S^l}{(mc)^2} = \\ & = \frac{\epsilon^{jkl}(p^i S^l + p^l S^i)}{(mc)^2} + \frac{\delta^i_k [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j}{(mc)^2} - \frac{\delta^i_j [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k}{(mc)^2} - \frac{2p^i \epsilon^{jkl} S^l}{(mc)^2} = \\ & = \frac{\epsilon^{jkl}(p^l S^i - p^i S^l)}{(mc)^2} + \frac{\delta^i_k [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j - \delta^i_j [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k}{(mc)^2} = \\ & = \frac{1}{(mc)^2} (\epsilon^{jkl} \epsilon^{lit} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^t + \delta^i_k [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j - \delta^i_j [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{1}{(mc)^2} (-\delta^i_k [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j + \delta^i_j [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k + \delta^i_k [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j - \delta^i_j [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = 0. \end{aligned}$$

E para o último caso, temos

$$\begin{aligned} & \{S^i, \{S^j, S^k\}\} + \{S^j, \{S^k, S^i\}\} + \{S^k, \{S^i, S^j\}\} = \\ & = \left\{ S^i, \epsilon^{jkl} \left(S^l + \frac{p^l(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) \right\} + \left\{ S^j, \epsilon^{kil} \left(S^l + \frac{p^l(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) \right\} + \left\{ S^k, \epsilon^{ijl} \left(S^l + \frac{p^l(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) \right\} = \\ & = (\epsilon^{jkl}\epsilon^{ilt} + \epsilon^{kil}\epsilon^{jlt} + \epsilon^{ijl}\epsilon^{klt}) \left(S^t + \frac{p^t(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) + \frac{p^l}{(mc)^2} (\epsilon^{jkl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^i + \epsilon^{kil} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{p^l}{(mc)^2} (\delta^j_n \epsilon^{nkl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^i + \delta^i_n \epsilon^{knl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{p^l}{(mc)^2} (\epsilon^{nkl} (\delta^j_n [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^i - \delta^i_n [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j) + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{p^l}{(mc)^2} (\epsilon^{nkl} \epsilon^{jim} \epsilon^{ntm} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^t + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{p^l}{(mc)^2} ((\delta^k_t \delta^l_m - \delta^k_m \delta^l_t) \epsilon^{jim} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^t + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{p^l}{(mc)^2} (\epsilon^{jil} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k - \epsilon^{jik} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^l + \epsilon^{ijl} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^k) = \\ & = \frac{1}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} [\mathbf{p}, \mathbf{S}]^l p^l = \\ & = 0. \end{aligned}$$

Assim, nossos colchetes atendem a identidade de Jacobi, portanto nossa coleção de colchetes não canônicos na aproximação $1/c^2$ será

$$\{x^i, p^j\} = \delta^i_j \quad (4.44)$$

$$\{p^i, p^j\} = 0 \quad (4.45)$$

$$\{x^i, S^j\} = \frac{p^i S^j - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \quad (4.46)$$

$$\{S^i, p^j\} = 0 \quad (4.47)$$

$$\{S^i, S^j\} = \epsilon^{ijk} \left(S^k + \frac{p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right) \quad (4.48)$$

$$\{x^i, x^j\} = \frac{1}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} S^k \quad (4.49)$$

bem como os colchetes com o momento canônico

$$\{x^i, \mathcal{P}_j\} = \delta^i_j, \quad \{p^i, \mathcal{P}_j\} = \frac{e}{c} \partial_i A_j, \quad \{S^i, \mathcal{P}_j\} = 0, \quad \{\mathcal{P}^i, \mathcal{P}^j\} = \frac{e}{c} F^{ij} \quad (4.50)$$

Motivados por essa lista de colchetes, quando estudarmos os colchetes da teoria covariante, na seção 4.5, precisaremos obter nesta na aproximação os listados acima. Além disso, na aproximação $1/c$ nossa coleção de colchetes coincide com a canônica (4.4). Com nossa coleção completa de colchetes podemos enunciar:

Afirmção 4.3.1. *O Hamiltoniano (4.31) com os colchetes acima implicam nas equações de Frenkel (4.12) e (4.23) para a dinâmica da partícula.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \{x^i, H_{ph}\} = \left\{ x^i, mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \right\} = \\ &= \left\{ x^i, \frac{1}{2m} \mathcal{P}^2 - \frac{e}{mc} S^k B^k - \frac{e}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} E^i p^j S^k \right\} = \\ &= \{x^i, \mathcal{P}^k\} \frac{\mathcal{P}^k}{m} - \frac{e}{mc} \{x^i, S^k\} B^k + O_2 = \{x^i, \mathcal{P}^k\} \frac{\mathcal{P}^k}{m} + O_2 = \\ &= \{x^i, p^k\} \frac{\mathcal{P}^k}{m} + O_2 = \frac{\mathcal{P}^k}{m} + O_2 \quad \implies \quad m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{P}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}^i}{dt} &= \{\mathcal{P}^i, H_{ph}\} + \frac{\partial \mathcal{P}^i}{\partial t} = \left\{ \mathcal{P}^i, \frac{1}{2m} \mathcal{P}^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \right\} - \frac{e}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} = \\ &= \{\mathcal{P}^i, \mathcal{P}^j\} \frac{\mathcal{P}^j}{m} + e \{\mathcal{P}^i, x^j\} \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - \frac{e}{mc} \{\mathcal{P}^i, S^k B^k\} - e \frac{\partial A^i}{\partial x^0} + O_2 = \\ &= \frac{e}{mc} F^{ij} \mathcal{P}^j - e \delta^i_j \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - e \frac{\partial A^i}{\partial x^0} - \frac{e}{mc} \{p^i, S^k B^k\} + O_2 = (*) \\ &= \frac{e}{mc} [\mathcal{P}, \mathbf{B}]^i + e \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^0} \right) + O_2 = \\ &= \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}]^i + e E^i + O_2 \quad \implies \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}] + e \mathbf{E}. \end{aligned}$$

onde em (\star) utilizamos que o campo magnético é constante, ver seção 4.1. Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{dS^i}{dt} &= \{S^i, H_{ph}\} = \left\{ S^i, \frac{1}{2m} \mathcal{P}^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \right\} = \\
&= \{S^i, \mathcal{P}^k\} \frac{\mathcal{P}^k}{m} + e \{S^i, x^j\} \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - \frac{e}{mc} \{S^i, S^k B^k\} - \frac{e}{(mc)^2} \epsilon^{nmk} \{S^i, E^n p^m S^k\} = \\
&= -\frac{e}{c} \{S^i, A^k\} \frac{\mathcal{P}^k}{m} - e \{x^j, S^i\} \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - \frac{e}{mc} \{S^i, S^k\} B^k - \frac{e \epsilon^{nmk} E^n p^m \epsilon^{ikl} S^l}{(mc)^2} + O_3 = \\
&= -\frac{e}{c} \{S^i, x^n\} \frac{\partial A^k}{\partial x^n} \frac{\mathcal{P}^k}{m} - \frac{e}{(mc)^2} (p^j S^i - \delta^i_j (\mathbf{p}, \mathbf{S})) \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - \frac{e}{mc} \epsilon^{ikl} S^l - \frac{e}{(mc)^2} [[\mathbf{E}, \mathbf{p}], \mathbf{S}]^i = \\
&= \frac{e}{(mc)^2} ((\mathbf{E}, \mathbf{p}) S^i - E^i (\mathbf{p}, \mathbf{S})) - \frac{e}{mc} \left([\mathbf{B}, \mathbf{S}]^i + \frac{1}{mc} [[\mathbf{E}, \mathbf{p}], \mathbf{S}]^i \right) + O_3 = \\
&= \frac{e}{(mc)^2} ([\mathbf{p}, [\mathbf{S}, \mathbf{E}]]^i + [\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]]^i) - \frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}]^i + O_3 =^{(\star\star)} \\
&= -\frac{e}{(mc)^2} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i - \frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}]^i + O_3 = \\
&= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}]^i + \frac{1}{mc} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i \right\} \implies \frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{mc} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \right\}.
\end{aligned}$$

onde em $(\star\star)$ utilizamos a identidade de Jacobi. \square

Perceba que esta afirmação é a primeira parte da demonstração da afirmação 4.2.5, onde veremos a segunda parte somente na seção 4.5, quando tivermos a coleção completa de colchetes covariantes.

4.4 EQUIVALÊNCIA CLÁSSICA E QUÂNTICA

Pauli, com sua formulação Hamiltoniana (4.3) e (4.4) construiu a mecânica quântica (4.10) substituindo as variáveis clássicas pelos operadores (4.6) que devem obedecer a regra de quantização de Dirac. Como vimos, Hamiltoniano (4.31) e colchetes (4.46), (4.48) e (4.49) diferem da teoria de Pauli, mesmo assim veremos que ambas teorias produzem a mesma mecânica quântica.

Para substituirmos as variáveis clássicas $z^A \equiv (x^i, p^j, S^k)$ por operadores que respeitam a regra de quantização de Dirac (4.5), as variáveis devem ser obtidas dos operadores Hermitianos

$$\hat{p}^i = -i\hbar\partial_i, \quad (4.51)$$

$$\hat{x}^i = x^i - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{p}^j \sigma^k \quad (4.52)$$

e

$$\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \left\{ \sigma^i - \frac{\hat{p}^i(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{2(mc)^2} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^i}{2(mc)^2} \right\} = \frac{\hbar}{2} \left\{ \sigma^i + \frac{1}{2(mc)^2} [\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]] \right\} \quad (4.53)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli 2×2 . Os operadores agem no espaço de funções de onda de duas componentes: $\Psi_a(t, \mathbf{x})$, $a = 1, 2$.

Afirmção 4.4.1. *A partir da regra de quantização de Dirac (4.5), os comutadores dos operadores definidos em (4.51)-(4.53) estão em correspondência com os colchetes não canônicos: (4.44)-(4.49).*

Demonstração. Primeiro, como o operador \hat{p}^i tem comportamento de derivada parcial, e o comutador age sobre uma função ψ , obtemos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} [\hat{p}^i, \hat{A}^j]\psi &= (\hat{p}^i \hat{A}^j - \hat{A}^j \hat{p}^i)\psi = \hat{p}^i(\hat{A}^j\psi) - \hat{A}^j(\hat{p}^i\psi) = \\ &= (\hat{p}^i \hat{A}^j)\psi + \hat{A}^j(\hat{p}^i\psi) - \hat{A}^j(\hat{p}^i\psi) = (\hat{p}^i \hat{A}^j)\psi \end{aligned}$$

portanto, considerando $\hat{A}^j = \hat{p}^j, \hat{x}^j, \hat{S}^j$ e a regra de quantização de Dirac, temos

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{p^i, p^j\} = 0 \quad (4.54)$$

$$[\hat{p}^i, \hat{x}^j] = -i\hbar\delta^i_j \quad \Longrightarrow \quad \{x^i, p^j\} = \delta^i_j \quad (4.55)$$

$$[\hat{p}^i, \hat{S}^j] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{p^i, S^j\} = 0 \quad (4.56)$$

em conformidade com o obtido anteriormente. Façamos

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{S}^j] &= \frac{\hbar}{2}[x^i, \sigma^j] - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \left\{ [x^i, \hat{p}^j(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})] - [x^i, \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^j] \right\} - \frac{\hbar^2}{8(mc)^2} \epsilon^{inm} [\hat{p}^n \sigma^m, \sigma^j] + O_4 = \\ &= -\frac{\hbar}{4(mc)^2} \left\{ [x^i, \hat{p}^j](\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) + \hat{p}^j [x^i, \hat{p}^k \sigma^k] - [x^i, \hat{\mathbf{p}}^2] \sigma^j \right\} - \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{8(mc)^2} \epsilon^{inm} \hat{p}^n [\sigma^m, \sigma^j] + O_4 = \\ &= \frac{-i\hbar^2 \delta^i_j}{4(mc)^2} (\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \hat{p}^j [x^i, \hat{p}^k] \sigma^k + \frac{\hbar}{4(mc)^2} \left\{ [x^i, \hat{p}^k] \hat{p}^k + \hat{p}^k [x^i, \hat{p}^k] \right\} \sigma^j - \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{8(mc)^2} \epsilon^{inm} \hat{p}^n 2i\epsilon^{mjk} \sigma^k + O_4 = \\ &= -\frac{i\hbar^2 \delta^i_j (\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{4(mc)^2} - \frac{i\hbar^2 \hat{p}^j \delta^k_i \sigma^k}{4(mc)^2} + \frac{i\hbar^2 \delta^k_i \hat{p}^k \sigma^j}{2(mc)^2} - \frac{i\hbar^2}{4(mc)^2} (\delta^i_j \delta^n_k - \delta^i_k \delta^n_j) \hat{p}^n \sigma^k + O_4 = \\ &= -\frac{i\hbar^2 \delta^i_j (\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{2(mc)^2} + \frac{i\hbar^2 \hat{p}^j \sigma^j}{2(mc)^2} + O_4 = \\ &= \frac{i\hbar}{(mc)^2} \left\{ \frac{\hbar}{2} \hat{p}^i \sigma^j - \delta^i_j \left(\hat{\mathbf{p}}, \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} + O_4 = (*) \\ &= \frac{i\hbar}{(mc)^2} \left\{ \hat{p}^i \frac{\hbar}{2} \left(\sigma^j + \frac{[\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]]^j}{2(mc)^2} \right) - \delta^i_j \left(\hat{\mathbf{p}}, \frac{\hbar}{2} \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{[\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]]}{2(mc)^2} \right) \right) \right\} + O_4 = \\ &= i\hbar \frac{\hat{p}^i \hat{S}^j - \delta^i_j (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})}{(mc)^2} \end{aligned}$$

onde em (*) adicionamos termos de ordem $1/c^4$, assim

$$[\hat{x}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \frac{\hat{p}^i \hat{S}^j - \delta^i_j (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})}{(mc)^2} \quad \Longrightarrow \quad \{x^i, S^j\} = \frac{p^i S^j - \delta^i_j (\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2}. \quad (4.57)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
[\hat{S}^i, \hat{S}^j] &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ [\sigma^i, \sigma^j] - \frac{1}{2(mc)^2} [\sigma^i, \hat{p}^j(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})] + \frac{1}{2(mc)^2} [\sigma^i, \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^j] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(mc)^2} [\hat{p}^i(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}), \sigma^j] + \frac{1}{2(mc)^2} [\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^i, \sigma^j] \right\} + O_4 = \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k - \frac{1}{2(mc)^2} \hat{p}^j \hat{p}^k [\sigma^i, \sigma^k] + \frac{1}{2(mc)^2} \hat{\mathbf{p}}^2 [\sigma^i, \sigma^j] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(mc)^2} \hat{p}^i \hat{p}^k [\sigma^k, \sigma^j] + \frac{1}{2(mc)^2} \hat{\mathbf{p}}^2 [\sigma^i, \sigma^j] \right\} + O_4 = \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k - \frac{2i\epsilon^{ikl} \sigma^l \hat{p}^j \hat{p}^k}{2(mc)^2} - \frac{2i\epsilon^{kjl} \sigma^l \hat{p}^i \hat{p}^k}{2(mc)^2} + \frac{2i\epsilon^{ijk} \sigma^k \hat{\mathbf{p}}^2}{(mc)^2} \right\} + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} \epsilon^{ijk} \left(\sigma^k + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{2(mc)^2} \right) + \frac{i\hbar^2 \epsilon^{ijk} \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{4(mc)^2} + \frac{i\hbar^2}{4(mc)^2} (\hat{p}^i [\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}]^j - \hat{p}^j [\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}]^i) + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} \epsilon^{ijk} \left(\sigma^k + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{2(mc)^2} \right) + \frac{i\hbar^2 \epsilon^{ijk} \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{4(mc)^2} - \frac{i\hbar^2}{4(mc)^2} \epsilon^{ijk} [\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]]^k + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} \epsilon^{ijk} \left(\sigma^k + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{2(mc)^2} \right) + \frac{i\hbar^2}{4(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} \epsilon^{ijk} \left(\sigma^k + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{2(mc)^2} - \frac{\hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{2(mc)^2} \right) + \frac{i\hbar^2}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) + O_4 = \\
&= i\hbar \epsilon^{ijk} \left(\hat{S}^k + \frac{\hat{p}^k}{(mc)^2} \left(\hat{\mathbf{p}}, \frac{\hbar}{2} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{2(mc)^2} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \boldsymbol{\sigma}}{2(mc)^2} \right) \right) \right) + O_4 = \\
&= i\hbar \epsilon^{ijk} \left(\hat{S}^k + \frac{\hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})}{(mc)^2} \right) + O_4,
\end{aligned}$$

logo

$$[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \epsilon^{ijk} \left(\hat{S}^k + \frac{\hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})}{(mc)^2} \right) \implies \{S^i, S^j\} = \epsilon^{ijk} \left(S^k + \frac{p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \right). \quad (4.58)$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= [x^i, x^j] - \frac{\hbar \epsilon^{jnm}}{4(mc)^2} [x^i, \hat{p}^n \sigma^m] - \frac{\hbar \epsilon^{inm}}{4(mc)^2} [\hat{p}^n \sigma^m, x^j] + O_4 = \\
&= -\frac{\hbar \epsilon^{jnm} [x^i, \hat{p}^n] \sigma^m}{4(mc)^2} - \frac{\hbar \epsilon^{inm} [\hat{p}^n, x^j] \sigma^m}{4(mc)^2} + O_4 = \\
&= -\frac{i\hbar^2 \epsilon^{jnm} \delta_n^i \sigma^m}{4(mc)^2} + \frac{i\hbar^2 \epsilon^{inm} \delta_n^j \sigma^m}{4(mc)^2} + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar^2 \epsilon^{ijk} \sigma^k}{2(mc)^2} + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} \frac{\hbar}{2} \left(\sigma^k - \frac{\hat{p}^k(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma})}{2(mc)^2} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^k}{2(mc)^2} \right) + O_4 = \\
&= \frac{i\hbar}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{S}^k,
\end{aligned}$$

assim

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \frac{i\hbar}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{S}^k \quad \Longrightarrow \quad \{x^i, x^j\} = \frac{1}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} S^k \quad (4.59)$$

Portanto todos os comutadores, segundo a regra de quantização de Dirac, estão em conformidade com os colchetes obtidos anteriormente. \square

Observação 4.4.2. Caso não tivéssemos feito a construção do colchete $\{x^i, x^j\}$ pela identidade de Jacobi, veríamos a necessidade de defini-lo da mesma forma como fizemos em (4.49) ao estudarmos seu comutador $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$, em (4.59), pois somente assim obteríamos a validade da quantização de Dirac.

Como havíamos comentado na seção 4.1, a estrutura final do Hamiltoniano quântico da teoria de Pauli, dado por (4.10), foi devido também a relação trivial (4.11). Entretanto, a próxima afirmação mostrará que, devido a não trivialidade do operador posição (4.52), na teoria covariante, a expansão do potencial será diferente. Este fator extra que contribuirá para a equivalência das teorias, a nível quântico.

Afirmção 4.4.3. *Substituindo os operadores (4.51), (4.52) e (4.53) em $A^\mu(\hat{x}^i)$ e expandindo a expressão resultante em séries até a ordem $1/c^2$, obtemos*

$$-\frac{e}{c} \mathbf{A}(\hat{x}^i) = -\frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \quad e \quad eA^0(\hat{x}^i) = eA^0(x^i) + \frac{e}{2(mc)^2} (\hat{\mathbf{S}}, [\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{p}}]) \quad (4.60)$$

Demonstração. Fazemos a expansão em séries de $\mathbf{A}(\hat{x}^i)$ até a ordem $1/c^2$. Perceba que na identidade que queremos, tal fator já é acompanhado de $1/c$, denotamos

$$\delta^j \equiv \frac{\hbar}{4(mc)^2} \epsilon^{jnm} \hat{p}^n \sigma^m \sim \frac{1}{c^2}$$

assim

$$\begin{aligned} -\frac{e}{c} A^i(\hat{x}^j) &= -\frac{e}{c} A^i(x^j - \delta^j) = -\frac{e}{c} \left\{ A^i(x^j) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} \delta^j + \delta^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) + O_3 \right\} = \\ &= -\frac{e}{c} A^i(x^j) + O_3 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{e}{c} \mathbf{A}(\hat{x}^i) = -\frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \end{aligned}$$

Agora, pelas condições iniciais que impomos nos campos elétrico e magnético, o potencial \mathbf{A} não depende explicitamente de x^0 portanto $\partial_0 A^i = 0$, assim $-E_i = \partial_i A_0$. Temos

$$\begin{aligned} A^0(\hat{x}^i) &= A^0(x^i - \delta^i) = A^0(x^i) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} \delta^i + \delta^i \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \right) + O_3 = \\ &= A^0(x^i) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} \delta^i + \frac{i\hbar}{2(mc)^2} (\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{rot} \mathbf{E}) + \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \delta^i \right) + O_3 = (*) \\ &= A^0(x^i) + \frac{1}{2(mc)^2} E_i \epsilon^{inm} \hat{p}^n \frac{\hbar}{2} \left(\sigma^m + \frac{1}{2(mc)^2} [\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]]^m \right) + O_3 = \\ &= A^0(x^i) + \frac{1}{2(mc)^2} (\mathbf{E}, [\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}]) + O_3 \quad \Longrightarrow \quad eA^0(\hat{x}^i) = eA^0(x^i) + \frac{e}{2(mc)^2} (\hat{\mathbf{S}}, [\mathbf{E}, \hat{\mathbf{p}}]) \end{aligned}$$

onde em (*) utilizamos o fato do campo elétrico ser central. \square

É segunda equação de (4.60) que resultará no fator 1/2 desejado: Substituindo as variáveis clássicas do hamiltoniano (4.31) pelos operadores Hermitianos (4.51), (4.52) e (4.53), o Hamiltoniano quântico da teoria covariante será

$$\hat{H}_{ph} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} A(x^i) \right)^2 + eA^0(x^i) - \frac{e}{mc} \left\{ (\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{B}) + \frac{1}{2mc} (\hat{\mathbf{S}}, [\mathbf{E}, \hat{\mathbf{p}}]) \right\} \quad (4.61)$$

Coincidindo com o Hamiltoniano quântico (4.10) da teoria de Pauli. Portanto, a nível quântico, as teorias são equivalentes.

Também podemos nos perguntar qual a relação entre as formulações de Pauli e a covariante como teorias clássicas. Partindo da formulação covariante, procuramos pelo espaço de fase das variáveis que obedecem aos colchetes canônicos, isto é, queremos $\{x_c^i, p_c^i, S_T^i\}$ que obedecem aos colchetes (4.4) e que estão ligados a $\{x^i, p^i, S^i\}$ da teoria covariante por algum conjunto de transformações. Definimos este conjunto de transformações como:

$$p_c^i = p^i \quad (4.62)$$

$$x_c^i = x^i + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} p^j S^k \quad (4.63)$$

$$S_T^i = S^i + \frac{p^i(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{2(mc)^2} - \frac{\mathbf{p}^2 S^i}{2(mc)^2} \equiv S^i + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i \quad (4.64)$$

Afirmção 4.4.4. *Transformações (4.62), (4.63) e (4.64) caracterizam $\{x_c^i, p_c^i, S_T^i\}$ com colchetes canônicos.*

Demonstração. Utilizando a lista de colchetes não-canônicos (4.44), (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49), temos

$$\begin{aligned} \{p_c^i, p_c^j\} &= \{p^i, p^j\} = 0 \\ \{x_c^i, p_c^j\} &= \left\{ x^i + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{inm} p^n S^m, p^j \right\} = \delta^i_j \\ \{p_c^i, S_T^j\} &= \left\{ p^i, S^j + \frac{p^j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{2(mc)^2} - \frac{\mathbf{p}^2 S^j}{2(mc)^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x_c^i, x_c^j\} &= \left\{ x^i + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{inm} p^n S^m, x^j + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{jlt} p^l S^t \right\} = \\ &= \{x^i, x^j\} + \frac{\epsilon^{jlt}}{2(mc)^2} \{x^i, p^l S^t\} + \frac{\epsilon^{inm}}{2(mc)^2} \{p^n S^m, x^j\} + O_4 = \\ &= \frac{\epsilon^{ijk} S^k}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{jlt}}{2(mc)^2} (\{x^i, p^l\} S^t + p^l \{x^i, S^t\}) + \frac{\epsilon^{inm}}{2(mc)^2} (\{p^n, x^j\} S^m + p^n \{S^m, x^j\}) + O_4 = \\ &= \frac{\epsilon^{ijk} S^k}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{jlt}}{2(mc)^2} \delta^i_l S^t - \frac{\epsilon^{inm}}{2(mc)^2} \delta^n_j S^m = \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_c^i, S_T^j\} &= \left\{ x^i + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{inm} p^n S^m, S^j + \frac{p^j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{2(mc)^2} - \frac{\mathbf{p}^2 S^j}{2(mc)^2} \right\} = \\
&= \{x^i, S^j\} + \frac{1}{2(mc)^2} (\{x^i, p^j p^k S^k\} - \{x^i, p^k p^k S^j\}) + \frac{\epsilon^{inm}}{2(mc)^2} \{p^n S^m, S^j\} + O_4 = \\
&= \{x^i, S^j\} + \frac{1}{2(mc)^2} (\{x^i, p^j\} p^k S^k + p^j \{x^i, p^k\} S^k) - \\
&\quad - \frac{1}{2(mc)^2} (\{x^i, p^k\} p^k S^j + p^k \{x^i, p^k\} S^j) + \frac{\epsilon^{inm}}{2(mc)^2} p^n \{S^m, S^j\} + O_4 = \\
&= \frac{p^i S^j}{(mc)^2} - \frac{\delta_j^i(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} + \frac{\delta_j^i(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{2(mc)^2} + \frac{p^j S^i}{2(mc)^2} - \frac{p^i S^j}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{inm} p^n \epsilon^{mjk} S^k}{2(mc)^2} + O_4 = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{S_T^i, S_T^j\} &= \left\{ S^i + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i, S^j + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^j \right\} = \\
&= \{S^i, S^j\} + \frac{1}{2(mc)^2} (\{S^i, [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^j\} + \{[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i, S^j\}) + O_4 = \\
&= \epsilon^{ijk} S^k + \frac{\epsilon^{ijk} p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} + \frac{\epsilon^{ikl} p^j p^k S^l}{2(mc)^2} - \frac{\epsilon^{ijk} \mathbf{p}^2 S^k}{2(mc)^2} + \frac{\epsilon^{kjl} p^i p^k S^l}{2(mc)^2} - \frac{\epsilon^{ijk} \mathbf{p}^2 S^k}{2(mc)^2} + O_4 = \\
&= \epsilon^{ijk} S_T^k + \frac{\epsilon^{ijk}}{2(mc)^2} (p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S}) - \mathbf{p}^2 S^k) + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} [[\mathbf{p}, \mathbf{S}], \mathbf{p}]^k + O_4 = \\
&= \epsilon^{ijk} S_T^k - \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} [[\mathbf{p}, \mathbf{S}], \mathbf{p}]^k + \frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} [[\mathbf{p}, \mathbf{S}], \mathbf{p}]^k = \\
&= \epsilon^{ijk} S_T^k.
\end{aligned}$$

□

Afirmação 4.4.5. *O Hamiltoniano físico da teoria covariante, (4.31), escrito em termos destas variáveis $\{x_c^i, p_c^i, S_T^i\}$ transforma-se no Hamiltoniano de Pauli.*

Demonstração. Assim como fizemos na passagem clássica \rightarrow quântica, precisamos expandir o potencial segundo (4.63), ou seja,

$$A^\mu(x_c^i) = A^\mu(x^i - \delta^i) \quad \text{onde} \quad \delta^i = -\frac{1}{2(mc)^2} \epsilon^{inm} p^n S^m \sim O_2.$$

com isso, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{e}{c} A^i(x_c^j) &= -\frac{e}{c} A^i(x^j - \delta^j) = -\frac{e}{c} \left[A^i(x^j) + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \delta^j + O_3 \right] = \\
&= -\frac{e}{c} A^i(x^j) + O_3 \quad \implies \quad -\frac{e}{c} \mathbf{A}(x_c^i) = -\frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A^0(x_c^i) &= A^0(x^i - \delta^i) = A^0(x^i) + \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \delta^i + O_3 = \\
&= A^0(x^i) - \frac{E^i \epsilon^{inm} p^n S^m}{2(mc)^2} + O_3 = \\
&= A^0(x^i) - \frac{1}{2(mc)^2} (\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]) + O_3 \quad \implies \quad A^0(x_c^i) = A^0(x^i) - \frac{1}{2(mc)^2} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]).
\end{aligned}$$

Levando em conta que $\mathbf{S}_T = \mathbf{S} + O_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
H_p &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_c - \frac{e}{c} \mathbf{A}(x_c^i) \right)^2 + eA^0(x_c^i) - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}_T, \mathbf{B}) + \frac{1}{2mc} (\mathbf{S}_T, [\mathbf{E}, \mathbf{p}_c]) \right\} = \\
&= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \right)^2 + A^0(x^i) - \frac{1}{2(mc)^2} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{2mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} = \\
&= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(x^i) \right)^2 + A^0(x^i) - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} = \\
&= H_{ph} - (mc)^2
\end{aligned}$$

□

Logo, a nível clássico, as formulações covariante e de Pauli estão relacionadas pelas transformações não canônicas (4.62), (4.63) e (4.64) do espaço de fase (na aproximação até a ordem $1/c^2$). Portanto, descrevem a mesma teoria clássica.

Como consequência, o vetor \mathbf{S}_T , definido em (4.64), obedece à equação de Thomas (4.2). Devido a isso, podemos chamá-lo também de spin de Thomas. Para mostrarmos este fato, primeiro observe que $\mathbf{S}_T = \mathbf{S} + O_2$ e

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathcal{P}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{E}] + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + O_1. \quad (4.65)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{S}_T}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \right\} = \\
&= \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \frac{1}{2(mc)^2} \left\{ \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}] \right] + \left[\mathbf{p}, \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{S} \right] \right] + \left[\mathbf{p}, \left[\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right] \right] \right\} \stackrel{(4.12)}{=} \stackrel{(4.65)}{=} \\
&= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{e}{(mc)^2} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + \frac{e}{2(mc)^2} \{ [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + [\mathbf{p}, [\mathbf{E}, \mathbf{S}]] \} + O_3 = \\
&= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{e}{2(mc)^2} \{ [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + [\mathbf{p}, [\mathbf{S}, \mathbf{E}]] \} + O_3 = \\
&= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{2mc} [[\mathbf{E}, \mathbf{p}], \mathbf{S}] \right\} + O_3 = \\
&= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] \right\} + O_3
\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \right\} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] \right\} \quad (4.66)$$

Situação similar ocorre para um corpo rotacionando na relatividade geral. Aqui, equações da dinâmica para o spin podem ser deduzidas a partir da análise das equações de Einstein no formalismo multipolar [50], ou no cenário geométrico, assumindo o transporte de Fermi-Walker do vetor de spin [51]. Os dois spins acabam sendo diferentes e relacionados pela analogia gravitacional da equação (4.64), comparar equação (103) da referência [52] com a obtida em (4.66).

4.5 VERSÃO COVARIANTE MANIFESTA DA TEORIA DE PAULI

Como vimos anteriormente, na aproximação $1/c^2$, a expressão (4.30) do Hamiltoniano covariante nos conduz a teoria de Pauli, portanto podemos considerá-lo como sendo o Hamiltoniano de sua versão explicitamente covariante. Entretanto, tal Hamiltoniano deve ser acompanhado da generalização dos colchetes (4.44), (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49) de forma a serem Poincaré-invariantes.

Além disso, os colchetes devem nos levar a equações $U(1)$ -invariantes do movimento, então eles precisam ser invariantes sob transformações de calibre (locais); bem como, na aproximação $1/c^2$, coincidir com os propostos na versão aproximada e reproduzir a mesma dinâmica descrita nas equações de Frenkel (4.12) e (4.23) para a dinâmica da partícula. Neste momento encerraremos a discussão iniciada na afirmação 4.2.5. Pelas identidades (4.18), obtemos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu A'_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu A'_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \lambda = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F'_{\mu\nu} \quad (4.67)$$

e como $S^{\mu\nu}$ depende explicitamente de \mathcal{P}^μ segue que $S'^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$. Obtemos assim, por cálculo direto, a invariância local do Hamiltoniano (4.30). A seguir, faremos a construção dos colchetes explicitamente covariantes, onde a cada proposta de colchetes iremos mostrar a $U(1)$ -invariância e sua equivalência com os propostos na aproximação $1/c^2$. Já de antemão, percebemos que os colchetes $\{x^\mu, p_\nu\}$, $\{p_\mu, p_\nu\}$ e $\{p_\mu, S^{\alpha\beta}\}$ não são $U(1)$ -invariantes, portanto devem ser modificados. Primeiro, generalizamos

$$\{x^\mu, x^\nu\} = -\frac{1}{2\mathcal{P}^2} S^{\mu\nu}, \quad (4.68)$$

$$\{x^\alpha, S^{\mu\nu}\} = \frac{1}{\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\alpha}. \quad (4.69)$$

Na aproximação $1/c^2$:

$$\{x^i, x^j\} = -\frac{1}{2\mathcal{P}^2} S^{ij} = \frac{2\epsilon^{ijk} S^k}{2(mc)^2} = \frac{1}{(mc)^2} \epsilon^{ijk} S^k$$

e

$$\begin{aligned} \{x^i, S^j\} &= \frac{1}{4} \epsilon^{jnm} \left\{ \frac{1}{\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[n} S^{m]i} \right\} = -\frac{\epsilon^{jnm}}{4(mc)^2} \left\{ \mathcal{P}^n 2\epsilon^{mik} S^k - \mathcal{P}^m 2\epsilon^{nik} S^k \right\} = \\ &= \frac{-(\delta^i_j \delta^n_k - \delta^j_k \delta^n_i) \mathcal{P}^n S^k - (\delta^i_j \delta^m_k - \delta^j_k \delta^m_i) \mathcal{P}^m S^k}{2(mc)^2} = \\ &= \frac{\mathcal{P}^i S^j - \delta^i_j(\mathcal{P}, \mathbf{S})}{(mc)^2} = \frac{p^i S^j - \delta^i_j(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2} \end{aligned}$$

em conformidade com os propostos em (4.46) e (4.49). Além disso, são $U(1)$ -invariantes, pois dependem explicitamente de $S^{\mu\nu}$ e \mathcal{P}^μ .

Substituindo as transformações locais no colchete $\{x^\mu, p'_\nu\} = \delta^\mu_\nu$ definido em (4.34), obtemos

$$\{x^\mu, p'_\nu\} = \delta^\mu_\nu + \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu \lambda$$

ao invés de $\{x^\mu, p'_\nu\} = \delta^\mu_\nu$. Precisamos compensar o fator extra alterando o colchete original para

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu. \quad (4.70)$$

Na aproximação $1/c^2$:

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j + \frac{e}{2c(mc)^2} S^{i\alpha} \partial_\alpha A_j = \delta^i_j + O_3 = \delta^i_j$$

em conformidade com o proposto em (4.44). Substituindo as transformações locais neste colchete, obtemos

$$\begin{aligned} \{x^\mu, p'_\nu\} &= \{x^\mu, p_\nu\} + \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\nu \lambda = \\ &= \delta^\mu_\nu - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu + \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\nu \lambda = \\ &= \delta^\mu_\nu - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha A'_\nu \end{aligned}$$

ou seja, é $U(1)$ -invariante.

Pelo mesmo processo em $\{p_\mu, p_\nu\} = 0$, seguindo a formulação antiga, obtemos

$$\begin{aligned} \{p'_\mu, p'_\nu\} &= -\frac{e}{c} \{p_\mu, \partial_\nu \lambda\} - \frac{e}{c} \{\partial_\mu \lambda, p_\nu\} + \frac{e^2}{c^2} \{\partial_\mu \lambda, \partial_\nu \lambda\} = \\ &= -\frac{e}{c} \{p_\nu, x^\gamma\} \partial_\gamma \partial_\nu \lambda - \frac{e}{c} \partial_\gamma \partial_\mu \lambda \{x^\gamma, p_\nu\} + \frac{e^2}{c^2} \partial_\gamma \partial_\mu \lambda \{x^\gamma, x^\alpha\} \partial_\alpha \partial_\nu \lambda = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} [S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha A_\mu) (\partial_\gamma \partial_\nu \lambda) - S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha A_\nu) (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda) + S^{\gamma\alpha} (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda) (\partial_\alpha \partial_\nu \lambda)] = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} [S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha (A_\mu - \partial_\mu \lambda)) (\partial_\gamma \partial_\nu \lambda) - S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha A_\nu) (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda)] = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} [S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha A'_\mu) (\partial_\gamma \partial_\nu \lambda) - S^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha A_\nu) (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda)] \end{aligned}$$

ao invés de $\{p'_\mu, p'_\nu\} = 0$. Para compensarmos o fator extra, alteramos o colchete para

$$\{p_\mu, p_\nu\} = -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A_\nu. \quad (4.71)$$

Na aproximação $1/c^2$:

$$\{p_i, p_j\} = \frac{e^2}{2c^2(mc)^2} S^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_i \partial_\beta A_j = O_4 = 0$$

em conformidade com o proposto em (4.45). Substituindo as transformações locais, obtemos

$$\begin{aligned} \{p'_\mu, p'_\nu\} &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} [S^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\mu) (\partial_\beta A_\nu) - S^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\mu) (\partial_\beta \partial_\nu \lambda)] - \\ &\quad - \frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} [-S^{\alpha\beta} (\partial_\beta A_\nu) (\partial_\alpha \partial_\mu \lambda) + S^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\mu \lambda) (\partial_\beta \partial_\nu \lambda)] = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A'_\nu + \frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\mu \lambda) \partial_\beta A'_\nu = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} \partial_\alpha A'_\mu \partial_\beta A'_\nu, \end{aligned}$$

ou seja, é $U(1)$ -invariante.

Observação 4.5.1. A partir dos colchetes enunciados, para o momento canônico \mathcal{P}_μ , obtemos

$$\{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu}, \quad \{x^\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{p_\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu. \quad (4.72)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu\} &= \{p_\mu, p_\nu\} - \frac{e}{c} \{p_\mu, x^\alpha\} \partial_\alpha A_\nu - \frac{e}{c} \partial_\alpha A_\mu \{x^\alpha, p_\nu\} + \frac{e^2}{c^2} \partial_\alpha A_\mu \{x^\alpha, x^\beta\} \partial_\beta A_\nu = \\ &= -\frac{e^2}{c^2 \mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\mu) (\partial_\beta A_\nu) + \frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu - \frac{e}{c} \partial_\nu A_\mu + \frac{e^2}{c^2 \mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} (\partial_\beta A_\nu) (\partial_\alpha A_\mu) = \\ &= \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{e}{c} F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x^\mu, \mathcal{P}_\nu\} &= \delta^\mu_\nu - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu + \frac{e}{2c\mathcal{P}^2} S^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu = \\ &= \delta^\mu_\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_\mu, \mathcal{P}_\nu\} &= -\frac{e^2}{2c^2 \mathcal{P}^2} S^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A_\nu + \frac{e}{c} \delta^\gamma_\mu \partial_\gamma A_\nu - \frac{e^2}{2c^2 \mathcal{P}^2} S^{\gamma\alpha} \partial_\alpha A_\mu \partial_\gamma A_\nu = \\ &= \frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu. \end{aligned}$$

Repetindo a construção para $\{p_\mu, S^{\alpha\beta}\} = 0$, obtemos

$$\{p'_\mu, S^{\alpha\beta}\} = -\frac{e}{c\mathcal{P}^2} (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda) \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma},$$

ao invés de $\{p'_\mu, S^{\alpha\beta}\} = 0$. Para compensarmos o fator extra, alteramos o colchete para

$$\{p_\alpha, S^{\mu\nu}\} = \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\beta} \partial_\alpha A_\beta. \quad (4.73)$$

Na aproximação $1/c^2$:

$$\{p_i, S^j\} = \frac{e}{4c\mathcal{P}^2} \epsilon^{jnm} \mathcal{P}^{[n} S^{m]\beta} \partial_i A_\beta = -\frac{e}{4c(mc)^2} \mathcal{P}^{[n} S^{m]\beta} \partial_i A_\beta = O_3 = 0$$

em conformidade com o proposto em (4.47). Substituindo as transformações locais, obtemos

$$\begin{aligned} \{p'_\mu, S^{\alpha,\beta}\} &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} \partial_\mu A_\gamma - \frac{e}{c\mathcal{P}^2} (\partial_\gamma \partial_\mu \lambda) \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} = \\ &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} \partial_\mu A'_\gamma, \end{aligned}$$

ou seja, é $U(1)$ -invariante.

Observação 4.5.2. Novamente, para o momento canônico, obtemos

$$\{S^{\mu\nu}, \mathcal{P}_\alpha\} = \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\beta} F_{\beta\alpha}. \quad (4.74)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \{S^{\mu\nu}, \mathcal{P}_\alpha\} &= -\frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\beta} \partial_\alpha A_\beta + \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\beta} \partial_\beta A_\alpha = \\ &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\mu} S^{\nu]\beta} F_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Para determinarmos o último colchete, o de $\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\}$, as transformações locais não exigem nenhuma alteração se adotarmos a definição dada em (4.41). Entretanto, nossa coleção de colchetes covariantes deve preservar a identidade (4.33). Veremos a seguir que para as variáveis x^α e p_β a condição é satisfeita a partir dos colchetes já enunciados, mas será válida para $S^{\alpha\beta}$ somente se fizermos uma alteração no colchete $\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\}$. Confirmamos então para as duas primeiras variáveis:

$$\begin{aligned}\{x^\alpha, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} &= S^{\mu\nu}\{x^\alpha, \mathcal{P}_\nu\} + \{x^\alpha, S^{\mu\nu}\}\mathcal{P}_\nu = S^{\mu\nu}\delta^\alpha_\nu + \frac{1}{\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\mu}S^{\nu]\alpha}\mathcal{P}_\nu = \\ &= S^{\mu\alpha} + \frac{1}{\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\mu S^{\nu\alpha}\mathcal{P}_\nu - \frac{1}{\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\nu S^{\mu\alpha}\mathcal{P}_\nu = S^{\mu\alpha} - S^{\mu\alpha} = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\{p_\alpha, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}S^{\gamma\beta}\partial_\gamma A_\alpha\partial_\beta A_\nu + \frac{e}{c}S^{\mu\nu}\left(\delta^\gamma_\alpha - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2}S^{\gamma\beta}\partial_\beta A_\alpha\right)\partial_\gamma A_\nu + \\ &+ \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\mu}S^{\nu]\beta}\partial_\alpha A_\beta\mathcal{P}_\nu = \\ &= -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}S^{\gamma\beta}(\partial_\gamma A_\alpha)(\partial_\beta A_\nu) - \frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}S^{\gamma\beta}(\partial_\beta A_\alpha)(\partial_\gamma A_\nu) + \\ &+ \frac{e}{c}S^{\mu\nu}\partial_\alpha A_\nu + \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\mu S^{\nu\beta}\partial_\alpha A_\beta\mathcal{P}_\nu - \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\nu S^{\mu\beta}\partial_\alpha A_\beta\mathcal{P}_\nu = \\ &= 0\end{aligned}$$

porém, para a última variável (considerando a definição (4.41)) obtemos

$$\begin{aligned}\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}\mathcal{P}^{[\alpha}S^{\beta]\gamma}F_{\gamma\nu} + 2N^{(\alpha\mu}S^{\beta\nu)}\mathcal{P}_\nu = \\ &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}\mathcal{P}^{[\alpha}S^{\beta]\gamma}F_{\gamma\nu}\end{aligned}$$

Para compensarmos este fator, redefinimos o colchete para

$$\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\} = 2N^{(\alpha\mu}S^{\beta\nu)} + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta][\mu}\mathcal{P}^{\nu]}. \quad (4.75)$$

Na aproximação $1/c^2$:

$$\begin{aligned}\{S^i, S^j\} &= \frac{1}{16}\epsilon^{inm}\epsilon^{jab}\left[2N^{(na}S^{mb)} + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[n}(SFS)^{m][a}\mathcal{P}^{b]}\right] = \\ &= \epsilon^{ijk}\left(S^k - \frac{\mathcal{P}^k(\mathbf{P}, \mathbf{S})}{\mathcal{P}^2}\right) + O_3 = \epsilon^{ijk}\left(S^k + \frac{p^k(\mathbf{p}, \mathbf{S})}{(mc)^2}\right)\end{aligned}$$

em conformidade com o proposto em (4.48). Por definição, não precisamos testar a $U(1)$ -invariância. E finalmente, a condição (4.33) é satisfeita para essa nova definição do colchete, de fato

$$\begin{aligned}\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu\} &= \frac{e}{c\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}\mathcal{P}^{[\alpha}S^{\beta]\gamma}F_{\gamma\nu} + 2N^{(\alpha\mu}S^{\beta\nu)}\mathcal{P}_\nu + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta][\mu}\mathcal{P}^{\nu]}\mathcal{P}_\nu = \\ &= -\frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\alpha(SFS)^{\beta\mu} + \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^\beta(SFS)^{\alpha\mu} + \\ &+ \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta]\mu}\mathcal{P}^2 + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}S^{\beta]\gamma}F_{\gamma\sigma}S^{\sigma\nu}\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}_\nu = \\ &= -\frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta]\mu} + \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta]\mu} = 0.\end{aligned}$$

Portanto a coleção de colchetes será

$$\{x^\mu, x^\nu\} = -\frac{1}{2\mathcal{P}^2}S^{\mu\nu}, \quad (4.76)$$

$$\{x^\alpha, S^{\mu\nu}\} = \frac{1}{\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\mu}S^{\nu]\alpha}, \quad (4.77)$$

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu{}_\nu - \frac{e}{2c\mathcal{P}^2}S^{\mu\alpha}\partial_\alpha A_\nu, \quad (4.78)$$

$$\{p_\mu, p_\nu\} = -\frac{e^2}{2c^2\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta A_\nu, \quad (4.79)$$

$$\{p_\alpha, S^{\mu\nu}\} = \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\mu}S^{\nu]\beta}\partial_\alpha A_\beta, \quad (4.80)$$

$$\{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\} = 2N^{(\alpha\mu}S^{\beta\nu)} + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SF S)^{\beta][\mu}\mathcal{P}^{\nu]} \quad (4.81)$$

onde são todos $U(1)$ -invariantes, explicitamente covariantes, atendem à condição (4.33) e, na aproximação $1/c^2$, retornam a coleção de colchetes obtida na seção 4.3. Além disso, os colchetes com o momento canônico são

$$\{x^\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \delta^\mu{}_\nu, \quad \{p_\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \frac{e}{c}\partial_\mu A_\nu \quad (4.82)$$

$$\{\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu\} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}, \quad \{S^{\mu\nu}, \mathcal{P}_\alpha\} = \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\mu}S^{\nu]\beta}F_{\beta\alpha} \quad (4.83)$$

Afirmção 4.5.3. *Computando $\dot{z}^A = \{z^A, H\}$, a dinâmica descrita pelo Hamiltoniano covariante (4.30) será*

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} - \frac{e\mu}{2mc\mathcal{P}^2}(SF\mathcal{P})^\alpha + \frac{e\mu}{8mc\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^\alpha = \frac{e}{mc}F^{\alpha\beta}\mathcal{P}_\beta + \frac{e\mu}{4mc}(\partial^\alpha F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - \frac{e^2\mu}{2mc^2\mathcal{P}^2}(FSF\mathcal{P})^\alpha \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}^{\alpha\beta} &= -\frac{e\mu}{mc}F^{[\alpha}{}_\nu S^{\beta]\nu} + \frac{e(1-\mu)}{mc\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SF\mathcal{P})^{\beta]} + \\ &+ \frac{e\mu}{4mc\mathcal{P}^2}\mathcal{P}^{[\alpha}S^{\beta]\gamma}(\partial_\gamma F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - \frac{e^2\mu}{2mc^2(\mathcal{P}^2)^2}\mathcal{P}^{[\alpha}(SF S F\mathcal{P})^{\beta]} \end{aligned} \quad (4.86)$$

e na aproximação $1/c^2$ obtemos (4.12) e (4.23) para a dinâmica da partícula.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \dot{x}^\alpha &= \{x^\alpha, H\} = \frac{1}{2m}\{x^\alpha, \mathcal{P}^\nu\mathcal{P}_\nu\} - \frac{e\mu}{4mc}\{x^\alpha, F_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\} = \\ &= \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} - \frac{e\mu}{4mc}[\{x^\alpha, x^\beta\}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\{x^\alpha, S^{\mu\nu}\}] = \\ &= \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} + \frac{e\mu}{8mc\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - \frac{e\mu}{4mc\mathcal{P}^2}F_{\mu\nu}(\mathcal{P}^\mu S^{\nu\alpha} - \mathcal{P}^\nu S^{\mu\alpha}) = \\ &= \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} + \frac{e\mu}{8mc\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - \frac{e\mu}{4mc\mathcal{P}^2}(F_{\mu\nu}\mathcal{P}^\mu S^{\nu\alpha} - F_{\nu\mu}\mathcal{P}^\mu S^{\nu\alpha}) = \\ &= \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} + \frac{e\mu}{8mc\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - \frac{e\mu}{2mc\mathcal{P}^2}F_{\nu\mu}\mathcal{P}^\mu S^{\nu\alpha} = \\ &= \frac{\mathcal{P}^\alpha}{m} - \frac{e\mu}{2mc\mathcal{P}^2}(SF\mathcal{P})^\alpha + \frac{e\mu}{8mc\mathcal{P}^2}S^{\alpha\beta}(\partial_\beta F_{\mu\nu})S^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

tal como queríamos. E na aproximação $1/c^2$ é direto que

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathcal{P}.$$

Para o momento canônico obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}^\alpha &= \{\mathcal{P}^\alpha, H\} = \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta - \frac{e\mu}{4mc} [-\{x^\gamma, \mathcal{P}^\alpha\} (\partial_\gamma F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \{\mathcal{P}^\alpha, S^{\mu\nu}\}] = \\ &= \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta + \frac{e\mu}{4mc} (\partial^\alpha F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} + \frac{e^2\mu}{2mc^2 \mathcal{P}^2} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu S^{\nu\gamma} F_\gamma^\alpha = \\ &= \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta + \frac{e\mu}{4mc} (\partial^\alpha F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} - \frac{e^2\mu}{2mc^2 \mathcal{P}^2} (FSF\mathcal{P})^\alpha \end{aligned}$$

tal como queríamos. E na aproximação $1/c^2$ também é direto que

$$\dot{\mathcal{P}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}].$$

Por fim, para o spin obtemos

$$\begin{aligned} \dot{S}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{m} \{S^{\alpha\beta}, \mathcal{P}_\mu\} \mathcal{P}^\mu - \frac{e\mu}{4mc} [\{S^{\alpha\beta}, F_{\mu\nu}\} S^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \{S^{\alpha\beta}, S^{\mu\nu}\}] = \\ &= \frac{e}{mc \mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} F_{\gamma\mu} \mathcal{P}^\mu - \frac{e\mu}{4mc} \left[-\frac{1}{\mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} (\partial_\gamma F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} + \right. \\ &= \left. + F_{\mu\nu} \left(2N^{(\alpha\mu} S^{\beta\nu)} + \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2} \mathcal{P}^{[\alpha} (SFS)^{\beta][\mu} \mathcal{P}^{\nu]} \right) \right] = \\ &= \frac{e\mu}{4mc \mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} (\partial_\gamma F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} + \frac{e}{mc \mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} (SFP)^{\beta]} - \\ &- \frac{e\mu}{2mc} N^{(\alpha\mu} F_{\mu\nu} S^{\beta\nu)} - \frac{e^2\mu}{4mc^2 (\mathcal{P}^2)^2} \mathcal{P}^{[\alpha} (SFS)^{\beta][\mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\nu]} \stackrel{(\star)}{=} \\ &= -\frac{e\mu}{mc} F^{[\alpha}{}_\nu S^{\beta]\nu} + \frac{e(1-\mu)}{mc \mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} (SFP)^{\beta]} + \\ &+ \frac{e\mu}{4mc \mathcal{P}^2} \mathcal{P}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} (\partial_\gamma F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} - \frac{e^2\mu}{2mc^2 (\mathcal{P}^2)^2} \mathcal{P}^{[\alpha} (SFSFP)^{\beta]}, \end{aligned}$$

onde na passagem (\star) fizemos para o penúltimo termo (consideramos uma permutação cíclica dos índices na definição (4.41)):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} N^{(\alpha\mu} S^{\beta\nu)} &= F_{\mu\nu} [N^{\alpha\mu} S^{\beta\nu} - N^{\alpha\nu} S^{\beta\mu} + N^{\mu\beta} S^{\nu\alpha} - N^{\nu\beta} S^{\mu\alpha}] = \\ &= F_{\mu\nu} N^{\alpha\mu} S^{\beta\nu} - F_{\nu\mu} N^{\alpha\mu} S^{\beta\nu} + F_{\mu\nu} N^{\beta\mu} S^{\nu\alpha} - F_{\nu\mu} N^{\mu\beta} S^{\nu\alpha} = \\ &= 2F_{\mu\nu} (N^{\alpha\mu} S^{\beta\nu} + N^{\beta\mu} S^{\nu\alpha}) = 2F_{\mu\nu} (N^{\mu\alpha} S^{\beta\nu} - N^{\mu\beta} S^{\alpha\nu}) = 2F_{\mu\nu} N^{\mu[\alpha} S^{\beta]\nu} = \\ &= 2 \left[F_{\mu\nu} \left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\alpha}{\mathcal{P}^2} \right) S^{\beta\nu} - F_{\mu\nu} \left(\eta^{\mu\beta} - \frac{\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\beta}{\mathcal{P}^2} \right) S^{\alpha\nu} \right] = \\ &= 2 \left[F^\alpha{}_\nu S^{\beta\nu} - F^\beta{}_\nu S^{\alpha\nu} + \frac{\mathcal{P}^\alpha S^{\beta\nu} F_{\nu\mu} \mathcal{P}^\mu}{\mathcal{P}^2} - \frac{\mathcal{P}^\beta S^{\alpha\nu} F_{\nu\mu} \mathcal{P}^\mu}{\mathcal{P}^2} \right] = \\ &= 2 \left[F^{[\alpha}{}_\nu S^{\beta]\nu} + \frac{\mathcal{P}^{[\alpha} (SFS)^{\beta]}}{\mathcal{P}^2} \right] \end{aligned}$$

e para o último termo na passagem (\star), fizemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta] \mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\nu] &= \mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta] \mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\nu - \mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta] \nu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu = \\
&= \mathcal{P}^\alpha (SFS)^{\beta\mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\nu - \mathcal{P}^\beta (SFS)^{\alpha\mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\nu - \mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta] \mu} F_{\nu\mu} \mathcal{P}^\nu = \\
&= \mathcal{P}^\alpha (SFSF\mathcal{P})^\beta - \mathcal{P}^\beta (SFSF\mathcal{P})^\alpha + \mathcal{P}^{[\alpha}(SFS)^{\beta] \mu} F_{\mu\nu} \mathcal{P}^\nu = \\
&= 2\mathcal{P}^{[\alpha}(SFSF\mathcal{P})^\beta].
\end{aligned}$$

Na aproximação $1/c^2$, obtemos (assumindo $\mu = 1$ a fim de comparação):

$$\begin{aligned}
\dot{S}^k &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} S^{ij} = -\frac{e\epsilon^{ijk}}{4mc} [F^i{}_0 S^{j0} + F^i{}_t S^{jt} - F^j{}_0 S^{i0} - F^j{}_t S^{it}] = \\
&= -\frac{e}{4mc} \epsilon^{ijk} \left\{ \frac{E^i 2[\mathbf{p}, \mathbf{S}]^j}{mc} - \frac{E^j 2[\mathbf{p}, \mathbf{S}]^i}{mc} - \epsilon^{itn} B^n 2\epsilon^{jtl} S^l + \epsilon^{jtn} B^n 2\epsilon^{itl} S^l \right\} = \\
&= -\frac{e}{2(mc)^2} \epsilon^{ijk} \epsilon^{ijl} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^l - \frac{e}{2mc} \epsilon^{ijk} (\delta^i{}_j \delta^n{}_l - \delta^i{}_l \delta^n{}_j) [B^n S^l - B^l S^n] = \\
&= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}]^k + \frac{1}{mc} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^k \right\}
\end{aligned}$$

□

Junto com as equações algébricas $S^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu = 0$ e $H = 0$ elas formam a versão explicitamente Poincaré-invariante da teoria de Pauli para um valor arbitrário de momento magnético μ . Os colchetes (4.76)-(4.81) obedecem a condição (4.33) então a condição suplementar de spin (4.27) é consistente com a dinâmica (4.84)-(4.86). A condição $H = 0$ é consistente por construção, $\dot{H} = \{H, H\} = 0$.

O Hamiltoniano (4.30), mesmo sendo função linear do spin e do campo eletromagnético, nos dá equações não-lineares do movimento. Isso acontece devido ao fato de que uma parte essencial da interação acaba por ser codificada nos colchetes não-canônicos (4.76)-(4.81).

Como vimos também, na aproximação $1/c^2$, nossas equações da dinâmica (4.84)-(4.86) se reduzem as equações de Frenkel (4.12) e (4.23), enquanto que colchetes (4.76)-(4.81) se reduzem aos (4.44)-(4.49). Mostrando que (4.31) é o Hamiltoniano de tempo físico da teoria covariante (4.30), na aproximação $1/c^2$.

Observação 4.5.4. Equação (4.84), na aproximação $1/c^3$, implica na seguinte expressão para o momento canônico:

$$\mathcal{P}^\alpha = m\dot{x}^\alpha - \frac{e\mu}{2mc^3} (SF\dot{x})^\alpha + \frac{e\mu}{8m^2c^3} S^{\alpha\beta} (\partial_\beta F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu}, \quad (4.87)$$

isso pode ser usado para excluir \mathcal{P}^α das equações (4.85) e (4.86), novamente, na aproximação $1/c^3$. Além disso, mantendo apenas a ordem linear nos termos $F^{\mu\nu}$ (aproximação estudada por Frenkel [20]), as equações resultantes coincidem com as de Frenkel, a saber:

$$\frac{d}{d\tau} \left[m\dot{x}^\alpha - \frac{e}{2mc^3} (SF\dot{x})^\alpha + \frac{e}{8m^2c^3} S^{\alpha\beta} (\partial_\beta F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} \right] = \frac{e}{c} (F\dot{x})^\alpha + \frac{e}{4mc} (\partial^\alpha F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} \quad (4.88)$$

e

$$\dot{S}^{\alpha\beta} - \frac{e}{mc} \left[F^{[\alpha}{}_{\nu} S^{\beta]\nu} + \frac{1}{4mc^2} \dot{x}^{[\alpha} S^{\beta]\gamma} (\partial_{\gamma} F_{\mu\nu}) S^{\mu\nu} \right] \quad \text{e} \quad S^{\mu\nu} \dot{x}_{\nu} = 0 \quad (4.89)$$

portanto as equações de Frenkel aproximadamente covariantes podem ser transformadas em covariantes ao adicionarmos termos que não são mais do que quadráticos no spin e no campo.

4.6 O PAPEL DO SPIN DE THOMAS NO FORMALISMO COVARIANTE

Nesta seção, retornamos a análise da teoria covariante na aproximação $1/c^2$. Como vimos, equações (4.84)-(4.86), na aproximação $1/c^2$ reduzem às equações de Frenkel (4.12) e (4.23). Assim como vimos na seção 4.4, elas resultam na mecânica quântica de Pauli sem nenhum apelo ao vetor de Thomas ou a fórmula da precessão de Thomas. Para entendermos o papel do vetor de Thomas no formalismo covariante vamos examinar as propriedades de transformação do spin de Frenkel na passagem do laboratório para os observadores: acompanhante (OA) e instantaneamente acompanhante (OII).

Observador acompanhante é um sistema não inercial em que a partícula está sempre centrada na origem. Para 4-vetores e 4-tensores (campos ao longo da trajetória da partícula) as transformações do laboratório ao observador acompanhante são determinadas pela matriz de transformação de impulso (2.7) ou (2.12), onde a velocidade \mathbf{v} depende do parâmetro, rescrevemos:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\mathbf{v}(\tau)) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v}^T/c \\ -\mathbf{v}/c & A(\mathbf{v}/c) \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

onde

$$A^i{}_j(\mathbf{v}/c) = \frac{1}{\gamma} \left[\delta^i{}_j + \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2} v^i v^j \right], \quad (4.91)$$

ressaltando que γ e $A^i{}_j$ passam a ser grandezas que dependem do parâmetro, pois dependem explicitamente de $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\tau) = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t(\tau)}$; e não vamos utilizar a notação do capítulo 2, pois precisamos manter explicitamente o fator $1/c$ para sabermos onde aproximar. Por (4.17) é conveniente escrever a velocidade em relação ao momento canônico

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}^0} = \frac{\mathbf{p}(\tau)}{m} + O_1. \quad (4.92)$$

Usando a regra de transformação do tensor de spin de Frenkel

$$S_a'^{\mu\nu}(\tau) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} S^{\alpha\beta}(\tau)$$

e equação (4.28) obtemos a seguinte regra de transformação para as componentes espaciais do tensor de spin:

$$S_a'^{ij} = 2\epsilon^{ijk} \left[S^k + \left(\frac{\gamma}{(\mathcal{P}^0)^2} - \frac{(\gamma - 1)}{(\mathcal{P})^2} \right) [\mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^k \right]. \quad (4.93)$$

De fato, façamos separadamente os termos abaixo

$$\begin{aligned}
\Lambda^i_n \Lambda^j_0 S^{m0} &= -\gamma \left(\delta^i_n + \frac{(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2} v^i v^n \right) v^j \frac{S^{nm}}{\mathcal{P}^0} \mathcal{P}^m = \\
&= -\frac{2\gamma}{(\mathcal{P}^0)^2} \epsilon^{imk} S^k \mathcal{P}^j \mathcal{P}_m - \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2 (\mathcal{P}^0)^2} (\mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]) \mathcal{P}^i \mathcal{P}^j = \\
&= -\frac{2\gamma}{(\mathcal{P}^0)^2} \mathcal{P}^j [\mathcal{P}, \mathbf{S}]^i
\end{aligned}$$

$$\Lambda^i_0 \Lambda^j_m S^{0m} = -\Lambda^i_0 \Lambda^j_m S^{m0} = \frac{2\gamma}{(\mathcal{P}^0)^2} \mathcal{P}^i [\mathcal{P}, \mathbf{S}]^j$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^i_n \Lambda^j_m S^{nm} &= \left(\delta^i_n + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^n \right) \left(\delta^j_m + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^j \mathcal{P}^m \right) 2\epsilon^{nmk} S^k = \\
&= 2\epsilon^{ijk} S^k + \frac{2(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \epsilon^{imk} S^k \mathcal{P}^j \mathcal{P}^m + \frac{2(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \epsilon^{njk} S^k \mathcal{P}^i \mathcal{P}^n = \\
&= 2\epsilon^{ijk} S^k - \frac{2(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} [\mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^k
\end{aligned}$$

Combinando as três parcelas obtemos a identidade (4.93).

Nós assumimos que as funções $S_a^i = \frac{1}{4} \epsilon^{inm} S_a^{nm}$ descrevem a direção do eixo de spin no sistema acompanhante. Na aproximação $1/c^2$, equação (4.93) implica na seguinte regra de transformação:

$$\mathbf{S}'_a = \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]. \quad (4.94)$$

De fato, como na aproximação $1/c^2$ temos

$$\frac{1}{(\mathcal{P}^0)^2} = \frac{1}{(mc)^2} - \frac{\mathcal{P}^2}{(mc)^4} + O_6 \quad \text{e} \quad \gamma = 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + O_4,$$

então o termo

$$\frac{\gamma}{(\mathcal{P}^0)^2} = \frac{1}{(mc)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\gamma-1}{(\mathcal{P})^2} = \frac{1}{2(mc)^2}$$

nos levando diretamente a identidade (4.94).

Comparando (4.94) com a definição do spin de Thomas (4.64) o *vetor de Thomas representa a direção do eixo de spin no sistema acompanhante*, isto é

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}'_a \quad (4.95)$$

isso nos indica o significado do spin de Thomas na teoria covariante: Usando os valores do laboratório \mathbf{S} e \mathbf{p} , o laboratório consegue computar o vetor \mathbf{S}_T de acordo com a equação (4.64), obtendo assim a magnitude e a direção do eixo de spin, como se fosse medido pelo observador acompanhante.

Pela identidade (4.95) esperamos que a equação de Thomas (4.2) descreva a evolução do eixo de spin no observador acompanhante. Isso será confirmado através do cálculo que faremos abaixo.

Derivando a equação (4.94) obtemos a taxa de variação do vetor que representa o eixo de spin no observador acompanhante através de quantidades medidas no laboratório, tal como segue:

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} = \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} - \frac{1}{2(mc)^2} \left[\left[\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right], \mathbf{S} \right] + \frac{1}{(mc)^2} \left[\mathbf{p}, \left[\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \mathbf{S} \right] \right] \quad (4.96)$$

onde usamos a regra do produto para derivadas e a identidade de Jacobi para o produto interno. Além disso, utilizamos o fator de conversão

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} + O_2 = \frac{d}{dt}$$

para obtermos a taxa de variação com relação ao tempo do laboratório. Como trabalhamos na aproximação $1/c^2$, quase todas as equações desta seção permanecem válidas se simplesmente substituirmos $d/d\tau$ por d/dt seguindo a relação acima. Usando equações (4.12) e (4.23) obtemos a seguinte identidade:

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}] \right\}. \quad (4.97)$$

De fato, como os fatores de (4.96), exceto o primeiro, são da ordem $1/c^2$ obtemos direto de (4.23) que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} &= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{mc} [\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \right\} - \frac{1}{2(mc)^2} [[\mathbf{p}, e\mathbf{E}], \mathbf{S}] + \frac{1}{(mc)^2} [\mathbf{p}, [e\mathbf{E}, \mathbf{S}]] = \\ &= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{mc} ([\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}] - [\mathbf{p}, [\mathbf{E}, \mathbf{S}]]) - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}] \right\} = \\ &= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}] \right\}. \end{aligned}$$

se as dinâmicas das quantidades do laboratório $\mathbf{p}(\tau)$ e $\mathbf{S}(\tau)$ são conhecidas, equação (4.97) adquire a forma $d\mathbf{S}'_a/d\tau = \mathbf{f}(\tau)$. Resolvendo esta equação, o laboratório irá obter a dinâmica do eixo de spin segundo o que é visto pelo observador acompanhante. Equação (4.94) indica que $\mathbf{S}'_a = \mathbf{S} + O_2$, então substituindo no lado direito da equação (4.97), mantendo a aproximação $1/c^2$, obtemos diretamente

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} = -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}, \mathbf{S}'_a] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}'_a] \right\} \quad (4.98)$$

se as equações do laboratório \mathbf{E} , \mathbf{B} e $\mathbf{p}(\tau)$ são conhecidas, o laboratório pode resolvê-la para \mathbf{S}'_a .

A equação (4.98) apenas coincide com equação de Thomas (4.2), isso explica o motivo da equação de Thomas na teoria covariante: Resolvendo equação (4.2) com o

uso de quantidades do laboratório, o mesmo irá obter as funções $S^i(\tau)$, que descrevem a evolução no eixo de spin na perspectiva do observador acompanhante. Enfatizamos novamente que essa interpretação é válida apenas porque trabalhamos na aproximação $1/c^2$.

Afirmção 4.6.1. *Para o campo eletromagnético centrado no sistema acompanhante obtemos as seguintes regras de transformação (tal como proposto em [2]):*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_a - \frac{1}{mc}[\mathbf{p}, \mathbf{B}'_a] + O_2 \quad e \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'_a + \frac{1}{mc}[\mathbf{p}, \mathbf{E}'_a] + O_2 \quad (4.99)$$

Demonstração. Para mostrarmos este fato, construímos a regra de transformação quando consideramos um sistema inercial, isto é, um impulso de Lorentz de velocidade \mathbf{v} , após isso, utilizando a relação (4.92) obtemos a regra de transformação quando a velocidade depende do parâmetro τ , isto é, no observador acompanhante. Façamos

$$\begin{aligned} F'^{ij} &= (\Lambda^i_0 \Lambda^j_a - \Lambda^j_0 \Lambda^i_a) F^{0a} + \Lambda^i_a \Lambda^j_b F^{ab} = (\Lambda^i_0 \Lambda^j_a - \Lambda^j_0 \Lambda^i_a) E^a \Lambda^i_a \Lambda^j_b \epsilon^{abc} B^c = \\ &= -\frac{\gamma}{c} v^i E^j + \frac{\gamma}{c} v^j E^i + \left(\delta^i_a + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^a \right) \left(\delta^j_b + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^j \mathcal{P}^b \right) \epsilon^{abc} B^c + O_3 = \\ &= -\frac{\gamma}{c} \epsilon^{ijc} [\mathbf{v}, \mathbf{E}]^c + \epsilon^{ijc} B^c + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^a \epsilon^{ajc} B^c + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^j \mathcal{P}^b \epsilon^{ibc} B^c + O_3 = \\ &= \epsilon^{ijc} \left\{ B^c - \frac{\gamma}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}]^c \right\} - \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \epsilon^{ijc} [\mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathbf{B}]]^c + O_3 = \\ &= \epsilon^{ijc} \left\{ B^c - \frac{\gamma}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}]^c \right\} + O_2 \end{aligned}$$

Como $B'^i = \frac{1}{2} \epsilon^{inm} F'^{nm}$, obtemos

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] + O_2.$$

E como

$$\begin{aligned} E'^i &= F'^{0i} = -\frac{\gamma^2}{c^2} v^a v^i E^a + \gamma \left(\delta^i_a + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^a \right) E^a - \frac{\gamma}{c} v^a \left(\delta^i_b + \frac{(\gamma-1)}{(\mathcal{P})^2} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^b \right) \epsilon^{abc} B^c = \\ &= \gamma E^i - \frac{\gamma}{c} \epsilon^{aic} v^a B^c + O_2 = \gamma E^i + \frac{\gamma}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]^i + O_2 \end{aligned}$$

obtemos

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] + O_2.$$

Considerando o caso do observador acompanhante, isto é, estamos transformando $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'_a$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'_a$, combinando o resultado anterior com a identidade (4.92) temos

$$\mathbf{B}'_a = \mathbf{B} - \frac{1}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{E}] \quad e \quad \mathbf{E}'_a = \mathbf{E} + \frac{1}{mc} [\mathbf{p}, \mathbf{B}]$$

e como $\mathbf{B}'_a = \mathbf{B} + O_1$ e $\mathbf{E}'_a = \mathbf{E} + O_1$ obtemos diretamente as equações (4.99). \square

Usando as equações (4.23), (4.98) e (4.99) obtemos a expressão que pode ser considerada como a equação da dinâmica do vetor que representa o eixo de spin no observador acompanhante, dada por

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} = -\frac{e}{mc}[\mathbf{B}', \mathbf{S}'_a] + [\boldsymbol{\omega}_T, \mathbf{S}'_a] \quad (4.100)$$

onde

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\frac{1}{2(mc)^2} \left[\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] \quad (4.101)$$

é o vetor velocidade angular da precessão de Thomas. Para obtermos (4.100), basta fazermos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} &= -\frac{e}{mc} \left\{ [\mathbf{B}', \mathbf{S}'_a] + \frac{1}{mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}'], \mathbf{S}'_a] - \frac{1}{2mc} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}'], \mathbf{S}'_a] \right\} + O_3 = \\ &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}', \mathbf{S}'_a] + \left[-\frac{1}{2(mc)^2} [\mathbf{p}, e\mathbf{E}], \mathbf{S}'_a \right] + O_3 = \\ &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}', \mathbf{S}'_a] + \left[-\frac{1}{2(mc)^2} \left[\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right], \mathbf{S}'_a \right] + O_3 \end{aligned}$$

Observador acompanhante detectará um torque no spin exercido pelo campo magnético \mathbf{B}' e um torque extra segundo o eixo dado pelo vetor $\boldsymbol{\omega}_T$ devido ao caráter não inercial do observador acompanhante (tal como discutimos na seção 3.3). Se $\mathbf{E} = 0$ no laboratório, pela equação (4.23) temos $d\mathbf{p}/dt = O_1$ e assim (4.100) reduz a equação da precessão de spin no campo magnético

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} = -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}', \mathbf{S}'_a] \quad (4.102)$$

Para completarmos a análise, vamos discutir sobre o vetor de Frenkel no observador instantâneo, no instante τ_0 . Como foi discutido, este observador está relacionado com o laboratório pela transformação (4.90) onde v^i representam as componentes da velocidade da partícula no instante τ_0 fixado. Usando a regra de transformação do tensor-spin de Frenkel

$$S''_{inst}{}^{\mu\nu}(\tau) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta S^{\alpha\beta}(\tau)$$

e equação (4.28) obtemos a seguinte regra de transformação para as componentes espaciais do tensor de spin:

$$S''_{inst}{}^{ij} = 2\epsilon^{ijk} \left\{ S^k - \frac{\gamma}{c\mathcal{P}_0} [\mathbf{v}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^k - \frac{(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2} [\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]]^k \right\} \quad (4.103)$$

De fato, o cálculo é análogo ao que fizemos para obter a equação (4.93), apenas ressaltando que aqui o impulso é exato. Assim

$$\begin{aligned} S''^{ij} &= (\Lambda^i{}_n \Lambda^j{}_0 - \Lambda^j{}_n \Lambda^i{}_0) S^{n0} + \Lambda^i{}_n \Lambda^j{}_m S^{nm} = \\ &= \frac{2\gamma}{c\mathcal{P}_0} \epsilon^{ijk} [[\mathcal{P}, \mathbf{S}], \mathbf{v}]^k + \left(\delta^i{}_n + \frac{\gamma-1}{\mathbf{v}^2} v^i v^n \right) \left(\delta^j{}_m + \frac{\gamma-1}{\mathbf{v}^2} v^j v^m \right) 2\epsilon^{nmk} S^k = \\ &= 2\epsilon^{ijk} \left\{ S^k - \frac{\gamma}{c\mathcal{P}_0} [\mathbf{v}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^k \right\} + \frac{(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2} 2\epsilon^{ijk} [[\mathbf{v}, \mathbf{S}], \mathbf{v}]^k \end{aligned}$$

Afirmção 4.6.2. Na aproximação $1/c^2$ a identidade (4.103) implica nas leis de transformação para os vetores de spin de Frenkel e Thomas. São elas respectivamente:

$$\mathbf{S}''_{inst} = \mathbf{S} + \frac{1}{mc^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] - \frac{1}{2c^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]] \quad (4.104)$$

e

$$\mathbf{S}''_{T,inst} = \mathbf{S}_T + \frac{1}{2mc^2}[[\mathbf{v}, \mathbf{p}], \mathbf{S}_T] \quad (4.105)$$

onde \mathbf{v} é velocidade da partícula no instante τ_0 enquanto que \mathbf{p} é o momento da partícula no instante de observação.

Demonstração.

$$\begin{aligned} S''_{inst}{}^i &= \frac{1}{4}\epsilon^{inm}S''_{inst}{}^{mm} = \frac{2}{4}\epsilon^{inm}\epsilon^{nmk} \left\{ S^k - \frac{\gamma}{c\mathcal{P}_0}[\mathbf{v}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^k - \frac{(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]]^k \right\} = \\ &= S^i + \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + O_4 \right) \left(\frac{1}{mc} + O_3 \right) [\mathbf{v}, [\mathcal{P}, \mathbf{S}]]^i - \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + O_4 \right) \frac{1}{\mathbf{v}^2} [\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]]^i = \\ &= S^i + \frac{1}{mc^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]^i - \frac{1}{2c^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]]^i + O_3 \end{aligned}$$

Para calcularmos a lei de transformação do spin de Thomas fazemos primeiro a transformação de \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} p''_{inst}{}^i &= \Lambda^i{}_{\alpha}p^{\alpha} = -\frac{\gamma}{c}v^ip^0 + p^i + \frac{(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2}v^i(\mathbf{v}, \mathbf{p}) = \\ &= -\frac{\gamma}{c}v^i \left(mc + \frac{e}{c}A_0 + \frac{1}{2mc} \left(\mathcal{P}^2 - \frac{e\mu}{2c}F_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \right) \right) + p^i + O_2 = \\ &= p^i - mv^i + O_2, \end{aligned}$$

logo

$$\mathbf{p}''_{inst} = \mathbf{p} - m\mathbf{v} + O_2 \quad (4.106)$$

Devido a isso, escrevemos o spin de Thomas no observador inercial instantâneo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}''_{T,inst} &= \mathbf{S}''_{inst} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}''_{inst}, [\mathbf{p}''_{inst}, \mathbf{S}''_{inst}]] = \\ &= \mathbf{S} + \frac{1}{mc^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] - \frac{1}{2c^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]] + \\ &+ \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p} - m\mathbf{v} + O_2, [\mathbf{p} - m\mathbf{v} + O_2, \mathbf{S} + O_2]] = \\ &= \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + \frac{1}{mc^2}[\mathbf{v}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] - \frac{1}{2mc^2} \{ [\mathbf{p}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \}^{(*)} \\ &= \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}[\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + \frac{1}{2mc^2}[[\mathbf{v}, \mathbf{p}], \mathbf{S}] = \\ &= \mathbf{S}_T + \frac{1}{2mc^2}[[\mathbf{v}, \mathbf{p}], \mathbf{S}_T + O_2] = \\ &= \mathbf{S}_T + \frac{1}{2mc^2}[[\mathbf{v}, \mathbf{p}], \mathbf{S}_T] \end{aligned}$$

onde em $(*)$ utilizamos a identidade de Jacobi para o termo $[\mathbf{p}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]]$. □

Computando a derivada das expressões (4.104) e (4.105), ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}''_{inst}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \frac{1}{mc^2} \left\{ \left[\mathbf{v}, \left[\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \mathbf{S} \right] \right] + \left[\mathbf{v}, \left[\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \right] \right] - \frac{1}{2c^2} \left[\mathbf{v}, \left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \right] \right] \right\} = \\ &= \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \frac{1}{mc^2} \left[\mathbf{v}, \left[\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \mathbf{S} \right] \right] + O_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}''_{T,inst}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} + \frac{1}{2mc^2} \left\{ \left[\left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right], \mathbf{S}_T \right] + \left[[\mathbf{v}, \mathbf{p}], \frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} \right] \right\} = \\ &= \frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} + \frac{1}{2mc^2} \left[\left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right], \mathbf{S}_T \right] + O_3.\end{aligned}$$

obtemos a taxa de variação no observador inercial instantâneo através de quantidades do laboratório. Assim

$$\frac{d\mathbf{S}''_{inst}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} + \frac{1}{mc^2} \left[\mathbf{v}, \left[\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \mathbf{S} \right] \right] \quad (4.107)$$

$$\frac{d\mathbf{S}''_{T,inst}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} + \frac{1}{2mc^2} \left[\left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right], \mathbf{S}_T \right] \quad (4.108)$$

Afirmção 4.6.3. *Tanto a equação de Thomas (4.2) como a de Frenkel (4.12) preservam sua forma sob essas transformações e portanto podem ser usadas como as equações do movimento para essas quantidades, por quaisquer observadores inerciais.*

Demonstração. Assumimos que a equação de Thomas (4.2) seja válida em um observador inercial de velocidade \mathbf{v} em relação ao laboratório. Para mostrarmos a validade da equação de Thomas no laboratório, vamos utilizar as regras de transformação do campo eletromagnético calculadas na afirmação 4.6.1 (no caso do observador inercial), a regra de transformação do momento (4.106) e o fato de que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathcal{P}}{dt} + O_1 = e\mathbf{E} + O_1 \quad (4.109)$$

Assim, pela validade de

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}''_{T,inst}}{d\tau} &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}''_{inst}, \mathbf{S}''_{T,inst}] + \frac{e}{2(mc)^2} [[\mathbf{P}''_{inst}, \mathbf{E}''_{inst}], \mathbf{S}''_{T,inst}] = \\ &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] + \frac{e}{mc^2} [[\mathbf{v}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2(mc)^2} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] - \frac{e}{2mc^2} [[\mathbf{v}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] + O_3 = \\ &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2mc^2} [[\mathbf{v}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2(mc)^2} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] + O_3\end{aligned}$$

pelas equações (4.108) e (4.109) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} + \frac{1}{2mc^2} [[\mathbf{v}, e\mathbf{E}], \mathbf{S}_T] &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2mc^2} [[\mathbf{v}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2(mc)^2} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T] \\ \frac{d\mathbf{S}_T}{d\tau} &= -\frac{e}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{S}_T] + \frac{e}{2(mc)^2} [[\mathbf{p}, \mathbf{E}], \mathbf{S}_T]\end{aligned}$$

Logo a covariância da equação de Thomas é válida, ou seja, a equação preserva sua forma em qualquer observador inercial e assim pode ser usada como equação do movimento.

Para a covariância da equação de Frenkel, façamos a mesma construção

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}''_{inst}}{d\tau} &= -\frac{e}{mc}[\mathbf{B}''_{inst}, \mathbf{S}''_{inst}] - \frac{e}{(mc)^2}[\mathbf{E}''_{inst}, [\mathbf{p}''_{inst}, \mathbf{S}''_{inst}]] = \\ &= -\frac{e}{mc}[\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{e}{mc^2}[[\mathbf{v}, \mathbf{E}], \mathbf{S}] - \frac{e}{(mc)^2}[\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + \frac{e}{mc^2}[\mathbf{E}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]] + O_3 \end{aligned}$$

pelas equações (4.107) e (4.109) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} &= -\frac{e}{mc}[\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{e}{(mc)^2}[\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + \frac{e}{mc^2}\{[\mathbf{E}, [\mathbf{v}, \mathbf{S}]] + [\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{S}, \mathbf{E}]]\} = \\ &= -\frac{e}{mc}[\mathbf{B}, \mathbf{S}] - \frac{e}{(mc)^2}[\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \end{aligned}$$

tal como queríamos. \square

No instante τ_0 a partícula está instantaneamente em repouso, então $\frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v}$ e assim (4.104) se reduz a

$$\mathbf{S}''_{inst} = \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] \quad (4.110)$$

coincidindo com (4.94) como esperado. Do mesmo modo, equação (4.105) neste instante será:

$$\mathbf{S}''_{T,inst}(\tau_0) = \mathbf{S}_T(\tau_0) \quad (4.111)$$

como esperado também.

Considere a diferença entre (4.96) e (4.107) no instante τ_0 e substituindo na expressão resultante o fato de $\mathbf{S} = \mathbf{S}''_{inst} + O_2$ (direto da equação (4.104)) obtemos a relação entre a taxa de variação do vetor de eixo de spin no observador acompanhante com a do observador inercial instantâneo. Obtendo assim a precessão de Thomas do spin de Frenkel:

$$\frac{d\mathbf{S}'_a}{d\tau} - \frac{d\mathbf{S}''_{inst}}{d\tau} = [\boldsymbol{\omega}_T, \mathbf{S}''_{inst}] \quad (4.112)$$

A diferença, no instante τ_0 , é uma rotação do eixo de spin \mathbf{S}''_{inst} pelo vetor $\boldsymbol{\omega}_T$, com velocidade angular igual ao seu módulo.;

Thomas explicou esse efeito cinemático analisando o produto de impulsos de Lorentz, assim como fizemos no capítulo 2, ver também [9]. Formalmente, enfatizamos que as equações similares obtidas ao longo dessa construção, tais como

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + O_3,$$

$$\mathbf{S}'_a = \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + O_3, \quad \mathbf{S}''_{inst} = \mathbf{S} + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]] + O_3$$

representam, fora da aproximação $1/c^2$, diferentes equações e assim adquirem significados totalmente diferentes.

As imprecisões (incluindo imprecisão na notação) feita por diferentes autores na derivação e na análise dessas equações representam a fonte de inúmeras confusões da literatura. Através deste capítulo elucidamos o significado destas equações no ponto de vista da teoria covariante (4.84)-(4.86).

4.7 UMA SEGUNDA FORMULAÇÃO

Nesta seção resolveremos um problema de longa duração, que consiste em obter a formulação Hamiltoniana e assim construir a mecânica quântica para as equações de V. Bargmann, Louis Michel e V. L. Telegli, propostas em [40], que descrevem uma partícula com spin.

Anteriormente, nós apresentamos a versão covariante do Hamiltoniano de Pauli para a descrição de um elétron com spin pautando o formalismo no modelo $S^{\mu\nu}$: um tensor 4-dimensional antissimétrico que está relacionado ao 3-vetor de spin de Frenkel S^i através das identidades:

$$S^i = \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}S^{jk}, \quad S^{ij} = 2\epsilon^{ijk}S^k, \quad \text{e} \quad S^{0i} = \frac{1}{\mathcal{P}_0}S^{ij}\mathcal{P}_j$$

Visto que nós assumimos que o spin de Frenkel pode ser identificado como o eixo de spin no referencial do laboratório e em cada instante de tempo do movimento $S^{\mu\nu}$ obedece à condição suplementar de spin dada por:

$$S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu = 0.$$

Agora, iremos reescrever o modelo covariante para o spin de Frenkel em forma equivalente, substituindo $S^{\mu\nu}$ pelo vetor 4-dimensional J^μ através da seguinte igualdade

$$J_\mu \equiv \frac{mc}{4\mathcal{P}^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{P}^\nu S^{\alpha\beta} \quad (4.113)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita 4-dimensional, para mais identidades ver apêndice A. Na teoria das representações de campos de Poincaré o 4-vetor J_μ é conhecido como vetor de Pauli-Lubanski. Como $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é antissimétrico J^μ obedece à identidade:

$$\mathcal{P}^\mu J_\mu = 0 \quad \implies \quad J_0 = -\frac{(\mathcal{P}, \mathbf{J})}{\mathcal{P}^0} \quad (4.114)$$

E conseqüentemente, obtemos a fórmula inversa de (4.113):

$$S^{\mu\nu} = \frac{2}{mc}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}J_\alpha\mathcal{P}_\beta \quad (4.115)$$

E a partir das identificações (4.113) e (4.115) vamos fazer uma correspondência entre ambas as teorias, o que se espera é sua equivalência. Para isso, vamos utilizar com frequência as identidades (na aproximação $1/c^2$) já obtidas anteriormente:

$$\frac{1}{\mathcal{P}^0} = \frac{1}{mc} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{2(mc)^2} + O_4 \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^0 = mc \left(1 + \frac{\mathcal{P}^2}{2(mc)^2} + O_4 \right) \quad (4.116)$$

Observação 4.7.1. Embora a proposta de identificação dada em (4.113) possa parecer artificial, apenas omitimos sua construção que poderia ser feita, resumidamente, da seguinte forma:

1. Vamos assumir a existência de um 4-vetor J_μ que atende, em cada instante do movimento, a condição suplementar (4.114). Em seguida, façamos como na teoria anterior e procuremos a função escalar contendo a interação desejada entre o spin e o campo eletromagnético.
2. Dentre as primeiras possibilidades de função, temos

$$J^\mu J^\nu F_{\mu\nu}, \quad J^\mu x^\nu F_{\mu\nu}, \quad J^\mu p^\nu F_{\mu\nu}, \quad J^\mu A^\nu F_{\mu\nu}, \quad J^\mu p_\mu, \quad J^\mu A_\mu, \quad J^\mu \mathcal{P}_\mu, \quad J^\mu \mathcal{P}^\nu F_{\mu\nu}$$

Descartando todas as identicamente nulas ou inviáveis, resta-nos somente a última opção $J^\mu \mathcal{P}^\nu F_{\mu\nu}$. Multiplicando pelo fator $e\mu/(mc)^2$ e expandindo até a ordem $1/c^2$, obtemos

$$\frac{e\mu}{(mc)^2} J^\mu \mathcal{P}^\nu F_{\mu\nu} = -\frac{e}{mc} \left(-(\mathbf{J}, \mathbf{E}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{J}, [\mathbf{B}, \mathbf{p}]) \right)$$

3. Portanto seria este o nosso candidato a adicionar ao Hamiltoniano covariante desta teoria. Porém, ao compararmos com o Hamiltoniano construído anteriormente, identidade (4.30), obtemos a seguinte relação $S^{\mu\nu} = J^\mu \mathcal{P}^\nu$ e assim pela condição suplementar de $S^{\mu\nu}$ teríamos $J^\mu \equiv 0$.
4. Desta forma precisaríamos continuar na procura de uma função escalar, porém a aproximação feita no item 2, está muito próxima da estrutura pretendida (4.29). Para isso, introduzimos o símbolo de Levi-Civita e assim obtemos a função escalar $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_\mu \mathcal{P}_\nu F_{\alpha\beta}$.
5. Multiplicando esta função pelo escalar $e\mu/2(mc)^2$ e expandindo até a ordem $1/c^2$ obtemos

$$-\frac{1}{2m} \frac{e\mu}{mc^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_\mu \mathcal{P}_\nu F_{\alpha\beta} = -\frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{J}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{J}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} + O_3. \quad (4.117)$$

ou seja, este será nosso candidato a ser adicionado ao Hamiltoniano covariante desta teoria.

6. Por fim, bastaria comparar os Hamiltonianos para obtermos a identidade (4.115), que combinada com (4.114) resultaria em (4.113). Por isso, faz sentido iniciar com a identificação (4.113).

Pela identidade (4.113) a parte espacial de J_μ é dada por

$$J_i = S_i + \frac{1}{(mc)^2} p_i(\mathbf{p}, \mathbf{S}) - \frac{1}{2(mc)^2} \mathbf{p}^2 S_i, \quad (4.118)$$

ou seja, $\mathbf{J} = \mathbf{S} + O_2$, que combinado à identidade (4.117), implica em

$$-\frac{1}{2m} \frac{e\mu}{mc^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_\mu \mathcal{P}_\nu F_{\alpha\beta} = -\frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{S}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{S}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \quad (4.119)$$

tal como queríamos que fosse (em correspondência com (4.29)). Desta forma, o Hamiltoniano covariante desta teoria será dado por

$$H_J = \frac{1}{2m} \left[\left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right)^2 - \frac{e\mu}{mc^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_\mu \mathcal{P}_\nu F_{\alpha\beta} + (mc)^2 \right]. \quad (4.120)$$

Tal como vimos na primeira teoria e pela equação (4.119), a expressão esperada para o Hamiltoniano físico na aproximação $1/c^2$ será dada por

$$H_{J,ph} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA^0 - \frac{e}{mc} \left\{ (\mathbf{J}, \mathbf{B}) + \frac{1}{mc} (\mathbf{J}, [\mathbf{E}, \mathbf{p}]) \right\} \quad (4.121)$$

e assim $H_{J,ph} = H_{ph} + O_2$, onde H_{ph} é dado por (4.31). Vamos confirmar a validade desta expressão mais adiante. A condição (4.114) implica em $\frac{d}{d\tau} (\mathcal{P}^\mu J_\mu) = 0$. Isso implica, como vimos no formalismo Hamiltoniano, em

$$\frac{d}{d\tau} (\mathcal{P}^\mu J_\mu) = \{H_J, \mathcal{P}^\mu J_\mu\} = \{z^A, \mathcal{P}^\mu J_\mu\} \frac{\partial H_J}{\partial z^A}$$

Onde a última igualdade certamente será nula se considerarmos

$$\{z^A, \mathcal{P}^\mu J_\mu\} = 0 \quad (4.122)$$

Então precisamos verificar a validade desta identidade para a coleção de colchetes que acompanhará o Hamiltoniano (4.120). Agora, vamos identificar esta coleção de colchetes Poincaré-covariantes e $U(1)$ -invariantes, tais que, seguindo nossa motivação do hamiltoniano físico, resultará, na aproximação $1/c^2$, na coleção já enunciada de colchetes. Para fazermos isso, vamos utilizar as correspondências (4.113) e (4.115) para transformar o conjunto de colchetes do formalismo $S^{\mu\nu}$ no subseqüente apresentado:

$$\{x^\mu, x^\nu\} = -\frac{1}{mc\mathcal{P}^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_\alpha \mathcal{P}_\beta \quad (4.123)$$

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu - \frac{e}{mc^2\mathcal{P}^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\sigma} J_\beta \mathcal{P}_\sigma \partial_\alpha A_\nu \quad (4.124)$$

$$\{p_\mu, p_\nu\} = -\frac{e^2}{mc^3\mathcal{P}^2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} (\partial_\alpha A_\mu) (\partial_\beta A_\nu) J_\gamma \mathcal{P}_\sigma \quad (4.125)$$

$$\{x^\gamma, J_\alpha\} = -\frac{1}{\mathcal{P}^2} J^\gamma \mathcal{P}_\alpha \quad (4.126)$$

$$\{p_\gamma, J_\alpha\} = -\frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}_\alpha J^\beta \partial_\gamma A_\beta \quad (4.127)$$

$$\{J_\mu, J_\nu\} = -\frac{mc}{\mathcal{P}^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{P}^\alpha J^\beta - \frac{e}{c(\mathcal{P}^2)^2} F^{\alpha\beta} J_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\mu J_\nu \quad (4.128)$$

Para o momento canônico $\mathcal{P}^\mu = p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$, eles implicam em

$$\{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu}, \quad \{x^\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{p_\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu, \quad \{\mathcal{P}_\gamma, J_\alpha\} = \frac{e}{c\mathcal{P}^2} \mathcal{P}_\alpha J^\beta F_{\beta\gamma} \quad (4.129)$$

Observação 4.7.2. Para este formalismo não iremos desenvolver com detalhes os passos algébricos executados, pois os mesmos se assemelham aos da construção anterior, entretanto basta levar em conta que:

1. J_μ é uma grandeza $U(1)$ -invariante, direto por (4.113).
2. Os colchetes $\{x^\mu, x^\nu\}$, $\{x^\mu, p_\nu\}$ e $\{p_\mu, p_\nu\}$ decorrem diretamente da identidade (4.115) e dos colchetes (4.76), (4.78) e (4.79). São covariantes, $U(1)$ -invariantes e na aproximação resultam, respectivamente, nos colchetes (4.49), (4.44) e (4.45). Com isso, é possível obter os três primeiros colchetes para o momento canônico, em (4.129).
3. Pela mesma construção, obtemos o seguinte resultado: $\{x^\gamma, J_\alpha\}\mathcal{P}^2 = A^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{P}^\beta$, onde $A^\gamma_{\alpha\beta} = A^\gamma_{\beta\alpha}$. Desta forma, podemos definir $A^\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\mathcal{P}^2}J^\gamma\mathcal{P}_\alpha\mathcal{P}_\beta$, o que atende à propriedade imposta e resulta em (4.126). Tal colchete é covariante, $U(1)$ -invariante e na aproximação resultar (4.46), por consequência de (4.118) e

$$\{x^i, J^k\} = \frac{1}{(mc)^2}J^i p^k + O_4.$$

4. Da mesma forma, obtemos $\{p_\gamma, J_\alpha\}\mathcal{P}^2 = B_{\gamma\sigma\alpha}\mathcal{P}^\sigma$, onde $B_{\gamma\sigma\alpha} = B_{\gamma\alpha\sigma}$. Desta forma, definimos $B_{\gamma\sigma\alpha} = -\frac{e}{c\mathcal{P}^2}J^\beta(\partial_\gamma A_\beta)\mathcal{P}_\sigma\mathcal{P}_\alpha$ que atende à propriedade imposta e resulta em (4.127). Tal colchete é covariante, $U(1)$ -invariante e na aproximação resultar (4.47), por consequência de (4.118) e $\{p_i, J_k\} = 0 + O_3$. Com isso é possível obter a última identidade de (4.129) para o momento canônico.
5. Com estes colchetes definidos, é possível obter a condição (4.122), quando z^A é x^γ , p^γ , ou \mathcal{P}^γ .
6. Por fim, resta-nos o colchete $\{J_\mu, J_\nu\}$ que requer um extenso cálculo algébrico. Após isso, fora necessário um ajuste em sua proposta final para que $z^A = J^\gamma$ atendesse à condição (4.122). Além de ser covariante, $U(1)$ -invariante e na aproximação resultar em (4.48), por consequência de (4.118) e

$$\{J^i, J^k\} = \epsilon^{ikm}J^m + O_3$$

Os colchetes desta teoria, na aproximação $1/c^2$, junto com o Hamiltoniano enunciado em (4.121), implicam nas equações de Frenkel⁸

$$m\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{P}, \quad \frac{d\mathcal{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{p}, \mathbf{B}] \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{e}{mc}\left\{[\mathbf{B}, \mathbf{S}] + \frac{1}{mc}[\mathbf{E}, [\mathbf{p}, \mathbf{S}]]\right\} \quad (4.130)$$

assim como havíamos visto.

⁸ As duas primeiras equações apenas com termos de ordem $1/c$, assim como fizemos na primeira formulação, ver (4.23).

Por fim, computando $\dot{z}^A = \{z^A, H_J\}$ obtemos as equações Hamiltonianas para a teoria explicitamente covariante, isto é:

$$\dot{x}^\gamma = \frac{1}{m}\mathcal{P}^\gamma + \frac{e\mu}{2(mc)^2}\epsilon^{\gamma\mu\alpha\beta}J_\mu \left[F_{\alpha\beta} + \frac{1}{mc\mathcal{P}^2}\mathcal{P}_\alpha\partial_\beta(F_{\nu\sigma})\epsilon^{\nu\sigma\theta\lambda}J_\theta\mathcal{P}_\lambda \right] \quad (4.131)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^\gamma = \frac{e}{mc}F^{\gamma\alpha}\mathcal{P}_\alpha + \frac{e\mu}{2(mc)^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}J_\mu \left[P_\nu\partial^\gamma F_{\alpha\beta} - \frac{e}{c}F^\gamma{}_\nu F_{\alpha\beta} \right] \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_\gamma &= \frac{e\mu}{mc}F_{\gamma\alpha}J^\alpha + \frac{e}{mc\mathcal{P}^2}(\mu-1)\mathcal{P}_\gamma F_{\alpha\beta}J^\alpha\mathcal{P}^\beta - \\ &- \frac{e\mu\mathcal{P}_\gamma\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}J_\mu}{2(mc)^2\mathcal{P}^2} \left\{ \mathcal{P}_\nu\partial_\sigma(F_{\alpha\beta})J^\sigma + \frac{e}{c}F_{\nu\sigma}J^\sigma F_{\alpha\beta} - \frac{e}{c\mathcal{P}^2}\mathcal{P}_\nu F_{\alpha\beta}F^{\theta\sigma}J_\theta\mathcal{P}_\sigma \right\} \end{aligned} \quad (4.133)$$

Junto com as equações algébricas $\mathcal{P}^\mu J_\mu = 0$ e $H_J = 0$ elas também formam a versão explicitamente Poincaré-invariante da teoria de Pauli para um valor arbitrário de momento magnético μ . Os colchetes (4.123)-(4.129) obedecem à condição (4.122), então a condição suplementar (4.114) é consistente com a dinâmica (4.131)-(4.133).

Na aproximação até $1/c$ em (4.131) e (4.132), e assumindo $\mu = 1$ nossas equações coincidem com as primeiras duas equações de (4.130). E para a última, (4.133), na aproximação $1/c^2$ obtemos

$$\mathbf{j}^i = \frac{e}{(mc)^2}E^i(\mathcal{P}, \mathbf{J}) + \frac{e}{mc}[\mathbf{J}, \mathbf{B}]^i \quad (4.134)$$

A última equação em (4.130) segue desta acima e da relação (4.118). Assim como vimos anteriormente, as equações (4.130) representam as equações do movimento para o Hamiltoniano (4.121). Portanto isso mostra que o Hamiltoniano de tempo físico da teoria covariante (4.120) na aproximação $1/c^2$ é de fato (4.121).

Para encerrarmos, vamos discutir os resultados obtidos desta seção. A nossa teoria anterior para uma partícula relativista com spin (4.84)-(4.86) pode ser reescrita em termos das variáveis x^μ , \mathcal{P}^ν e J^α , ao invés de x^μ , \mathcal{P}^ν e $S^{\alpha\beta}$, resultando nas equações (4.131)-(4.133). Para compararmos tais equações com existentes na literatura, observamos que elas implicam em

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{mc}F^\mu{}_\nu\dot{x}^\nu + O_2, \quad J^\mu\dot{x}_\mu = 0 \quad (4.135)$$

$$\dot{J}_\gamma = \frac{e\mu}{mc}F_{\gamma\alpha}J^\alpha + \frac{e}{mc\mathcal{P}^2}(\mu-1)\mathcal{P}_\gamma F_{\alpha\beta}J^\alpha\mathcal{P}^\beta + O_4 \quad (4.136)$$

Para esta última, pela relação $g = 2\mu$ e assumindo $c = 1$, podemos também escrevê-la como sendo

$$\dot{J}_\gamma = \frac{e}{m} \left[\frac{g}{2}F_{\gamma\alpha}J^\alpha - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \dot{x}_\gamma J^\alpha F_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right] \quad (4.137)$$

Equações (4.135) e (4.137) coincidem com as equações propostas por V. Bargmann, Louis Michel e V. L. Telegli (BMT) para descrever uma partícula com spin na presença dos campos elétrico e magnético constantes, ver [40]. Portanto (4.131)-(4.133) podem ser

consideradas como formulação Hamiltoniana das equações BMT, generalizadas no caso de campo eletromagnético arbitrário.

Os autores B.M.T. sugeriram que spin de elétron pode ser identificado com \mathbf{J} no lugar de \mathbf{S} . Para comparar as duas sugestões (de Frenkel e de BMT), poderíamos considerar (4.120) e (4.123)-(4.129) na aproximação $1/c^2$. A partir disso construir a mecânica quântica das equações (4.135) e (4.137) de B.M.T.. De acordo com os parágrafos anteriores isso nos leva a mecânica quântica de Pauli, com certos operadores para a descrição do momento \hat{p}_B^i , posição \hat{x}_B^i e spin \hat{J}^i , dados da seguinte maneira:

$$\hat{p}_B^i = \hat{p}^i, \quad \hat{x}_B^i = \hat{x}^i, \quad \text{e} \quad \hat{J}^i = \hat{S}^i + \frac{\hbar}{2(mc)^2} \hat{p}^i(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^i \quad (4.138)$$

onde \hat{p}^i , \hat{x}^i e \hat{S}^i são dados em (4.51)-(4.53). A diferença entre as três teorias é que posição e spin de partícula nestas teorias descrevem operadores diferentes:

Teoria	Operador posição	Operador de Spin
Pauli	$\hat{x}_P^i = x^i$	$\hat{S}_T^i = \frac{\hbar}{2} \sigma^i$
Frenkel	$\hat{x}^i = x^i - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \epsilon^{ijk} \hat{p}^j \sigma^k$	$\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \left\{ \sigma^i + \frac{1}{2(mc)^2} [\hat{\mathbf{p}}, [\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{p}}]] \right\}$
BMT	$\hat{x}_B^i = \hat{x}^i$	$\hat{J}^i = \hat{S}^i + \frac{\hbar}{2(mc)^2} \hat{p}^i(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{\hbar}{4(mc)^2} \hat{\mathbf{p}}^2 \sigma^i$

Na primeira aproximação (desprezando os termos de ordem $1/c^2$ ou superior) as teorias são indistinguíveis. Entretanto, experimentos de boa precisão são capazes de capturar as correções relativistas das ordens superiores, e poderiam dar uma resposta à pergunta: o elétron da natureza é elétron de Pauli, de Frenkel, ou de B.M.T.?

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar a versão manifestamente covariante da teoria de Pauli para a descrição de um elétron com spin no formalismo Hamiltoniano. Os colchetes covariantes da teoria foram obtidos a partir da exigência de consistência das equações Hamiltonianas com a condição suplementar de spin (4.27). Isso implica em uma deformação não trivial dos colchetes canônicos. Em particular, o colchete $\{x^\mu, x^\nu\}$ que obtemos em (4.76) afirma que as variáveis de posição não são comutativas.

Portanto, a descrição manifestamente covariante do spin inevitavelmente leva à teoria dotada de uma geometria não comutativa. Como mostramos, esse é o fundamento que é responsável por transformar o hamiltoniano covariante no hamiltoniano de Pauli. A esse respeito, destacamos que as partículas com spin representam um exemplo excepcional da teoria invariante intrinsecamente não comutativa e relativista, com a não comutatividade induzida pelo spin que já se manifesta na escala Compton. Os efeitos devidos à geometria não comutativa estão sob considerável interesse na literatura atual [53–61] e certamente merecem um estudo detalhado no contexto da invariância relativista e da não comutatividade induzida por spin.

Na aproximação $1/c^2$, tanto o hamiltoniano (4.31) da teoria covariante quanto os colchetes (4.44)-(4.49) associados a ele diferem da teoria de Pauli. No entanto, eles levam à mesma mecânica quântica, sem nenhum apelo à fórmula da precessão de Thomas (4.112). A fórmula (4.52) nos mostra que a posição da partícula, na mecânica quântica, é dada pelo operador Pryce (d) em [62]. A nível clássico, a teoria de Pauli pode ser interpretada como uma aproximação $1/c^2$ da teoria covariante escrita com variáveis especiais (4.62)-(4.64). Essa observação explica a discrepância entre os hamiltonianos covariante (4.31) de Pauli (4.3).

Acidentalmente, a relação (4.64) entre os vetores de spin de Frenkel e Thomas no referencial do laboratório coincide com a regra de transformação do vetor de spin de Frenkel na passagem do laboratório para o observador acompanhante, ver (4.94). Isso esclarece o significado do spin de Thomas e da equação de Thomas no esquema covariante: resolvendo equação (4.2), com o uso de quantidades do laboratório, o laboratório obterá as funções $S_T^i(\tau)$ que descrevem a evolução do eixo de spin no referencial do observador acompanhante.

A partir do formalismo covariante do modelo $S^{\mu\nu}$, construímos outro equivalente com base no modelo J^μ e obtemos o esperado: na aproximação $1/c^2$, obtemos os mesmos resultados da teoria $S^{\mu\nu}$. Este modelo, entretanto, nos possibilitou a formulação hamiltoniana manifestamente covariante das equações B.M.T., generalizadas no caso de uma partícula com spin na presença de campos elétrico e magnético arbitrários.

REFERÊNCIAS

- [1] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley-VCH (1972).
- [2] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Willey and Sons, (1975).
- [3] B. LESCHE, *Teoria da relatividade*, 1 ed. Livraria da Física, São Paulo (2005), pp.11-17.
- [4] R. P. FEYNMAN, *Física em 12 lições: fáceis e não tão fáceis*, 2 ed, Nova Fronteira, Rio de Janeiro (2017), 212-215.
- [5] A. DERIGLAZOV, *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism*, 2. ed, Springer (2017).
- [6] D. M. GITMAN, I. V. TYUTIN, J. L. ASSIRATI, M. G. DA COSTA, *Structure of the Lorentz transformation of general form*, Gravitation and Cosmology, Vol 4 (1998), pp. 163-166.
- [7] P. D. LAX, *Linear Algebra and its applications*, 2. ed, Wiley, (2007), pp. 169.
- [8] L. H. THOMAS, *Motion of the Spinning Electron*, Nature 117, (1926), pp. 514.
- [9] L. H. THOMAS, *The Kinematics of an Electron with an Axis*, Philosophical Magazine and Journal of Science **3** S.7, No.13 (1927) 1.
- [10] E. P. WIGNER, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Annals of Mathematics, vol 40, no 1, (1939), pp. 149-204.
- [11] C. MÖLLER, *The Theory of Relativity*, Clarendon, Oxford, (1952).
- [12] V. I. RITUS, *Transformations of the inhomogeneous lorentz group and the relativistic kinematics of polarized states*, Soviet Physics Jetp, vol 13, no 1, (1961), pp. 240-248.
- [13] A. CHAKRABARTI, *Applications of the Lorentz Transformation Properties of Canonical Spin Tensors*, Journal of Mathematical Physics, 5, 1747, (1964).
- [14] Ya. A. SMORODINSKII, *Lobachevskian kinematics and geometry*, Atomnaya Energiya, vol 14, no 1, (1963), pp. 110-121.
- [15] V. I. RITUS, *On the difference between Wigner's and Moller's approaches to description of the Thomas precession*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk, **177** (1), (2007), 105.
- [16] S. S. STEPANOV, *Thomas Precession for Spin and for a Rod*, Physics of Particles and Nuclei, **43**, (2012), 128.
- [17] K. O'DONNELL, M. VISSER, *Elementary analysis of the special relativistic combination of velocities, Wigner rotation, and Thomas precession*; School of Mathematics Statistics and Operations Research Victoria University of Wellington, New Zealand, (2018).
- [18] G. B. MALYKIN, *Thomas Precession: Correct and Incorrect Solutions*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (8), (2006), 865.

- [19] G. E. UHLENBECK, G. E. GOUDSMIT, *Spinning electrons and structure of spectra*, Nature, **117** (1926) 264.
- [20] J. FRENKEL, *Die elektrodynamik des rotierenden elektrons*, Z. Phys, **37** (1926) 243.
- [21] J. FRENKEL, *Spinning Electrons*, Nature, **117** (1926) 653.
- [22] J. P. MILLER, E. DE RAFAEL, B. L. ROBERTS, *Muon ($g - 2$): experiment and theory*, Reports on Progress in Physics, **70(5)** (2007) 795; Preprint CPT-P07-2007.
- [23] J. H. FIELD, E. PICASSO, F. COMBLEY, *Tests of fundamental physical theories from measurements of free charged leptons*, Sov. Phys. Uspekhi, **22** (1979) 199.
- [24] A. A. POMERANSKY, R. A. SENKOV, I. B. KHRIPLOVICH *Spinning relativistic particles in external fields*, Phys. Usp, **170** (2000) 1055; [Usp. Fiz Nauk **43** (2000) 1129].
- [25] M. A. OANCEA, C. F. PAGANINI, J. JOUDIOUX, L. ANDERSSON *An overview of the gravitational spin Hall effect*, arXiv: 1904.09963.
- [26] V. WITZANY, J. STEINHOFF, G. LUKES-GERAKOPOULOS, *Hamiltonians and canonical coordinates for spinning particles in curved space-time*, Class. Quantum Grav. **36** (2019) 075003; arXiv: 1808.06582.
- [27] PASQUALE BOSSO, SAURYA DAS, *Lorentz invariant mass and length scales*, Int. J. Mod. Phys, **D 28** (2019) 1950068; arXiv: 1812.05595.
- [28] L. MARSOT, *How does the photon's spin affect Gravitational Wave measurements?*, arXiv: 1904.09260.
- [29] SALMAN ABARGHOUEI NEJAD, MEHDI DEHGHANI, MAJID MONEMZADEH, *Spinning Toroidal Brane Cosmology; A Classical and Quantum Survey*, arXiv: 1901.03292.
- [30] A. NAGAR, S. BERMUZZI, W. DEL POZZO, G. RIEMENSCHNEIDER, S. AKCAY, G. CARULLO, P. FLEIG, S. BABAK, K. W. TSANG, M. COLLEONI, F. MESSINA, G. PRATTEN, D. RADICE, P. RETTEGNO, M. AGATHOS, E. FAUCHON-JONES, M. HANNAM, S. HUSA, T. DIETRICH, P. CERDA-DURAN, J. A. FONT, F. PANARALE, P. SCHMIDT, T. DAMOUR, *Time-domain effective-one-body gravitational waveforms for coalescing compact binaries with nonprecessing spins, tides and self-spin effects*, Phys. Rev. **D 98** (2018) 104052; arXiv: 1806.01772.
- [31] KAYE JIALE LI, KINWAH WU, DINESH SINGH, *Spin dynamics of a millisecond pulsar orbiting closely around a massive black hole*, arXiv: 1902.03146.
- [32] VASIL TODORINOV, PASQUALE BOSSO, SAURYA DAS, *Relativistic Generalized Uncertainty Principle*, arXiv:1810.11761.
- [33] J. J. SAKURAI, *Advanced quantum mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1967).
- [34] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields*, vol 1, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

- [35] D. TEREZA, A. DERIGLAZOV, *Covariant version of Pauli Hamiltonian, spin-induced non commutativity, Thomas precession and precession of spin*, Phys. Rev. **D 100** (2019) 105009.
- [36] W. PAULI, *On the quantum mechanics of magnetic electrons*, Zeit. f. Phys, **43** (1927) 600.
- [37] P. A. M. DIRAC, *The physical interpretation of the quantum dynamics*, Proc. Roy. Soc. (A) **113** (1927) 621.
- [38] L. L. FOLDY, S. A. WOUTHUYSEN, *On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit*, Phys. Rev. **78** 29 (1950).
- [39] H. A. KRAMERS, *On the classical theory of the spinning electron*, Physica **1** (1934) 825.
- [40] V. BARGMANN, L. MICHEL, V. L. TELEGLI, *Precession of the polarized particles moving in a homogeneous electromagnetic field*, Phys. Rev. Lett **2** (1959) 435.
- [41] H. C. CORBEN, *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles*, Holden-Day, San Francisco (1968).
- [42] J. ASSIRATI, D. M. GITMAN, *Covariant quantizations in plane and curved spaces*, Eur. Phys. J. C **77** (2017) 476; arXiv: 1705.09960.
- [43] V. G. GUEORGUIEV, *Reparametrization-Invariance and Some of the Key Properties of Physical Systems*, arXiv: 1903.02483.
- [44] TAKAYUKI HORI, *Another counter-exemple to Dirac's conjecture*, arXiv: 1902.09296.
- [45] C. OTTINGER, *Hamiltonian formulation of a class of constrained fourth-order differential equations in the Ostrogradsky framework*, Phys. Commum **2** (2018) 125006, 1-10; arXiv: 1810.02193.
- [46] MATEJ PAVSIC, *On the direct quantization of gravity coupled to matter and the emergence of time*, arXiv: 1906.03987.
- [47] R.BREBAN, *The Four Dimensional Dirac Equation in Five Dimensions*, Annalen der Physik **530** (2018) arXiv:1801.06054.
- [48] G. DARVAS, *Algebra of hypersymmetry (extended version) applied to state transformation in strongly relativistic interactions illustrated on an extended form of the Dirac equation*, arXiv: 1809.05396.
- [49] A. DERIGLAZOV, A. P. MAKSIMOV, *Relativistic corrections to the algebra of position variables and spin-orbital interaction*, Phys. Lett **B 761** (2016) 207.
- [50] W. G. DIXOR, *A covariant Multipole Formalism for Extended Test Bodies in General Relativity*, Nuovo Cimento **34** (1964) 317.
- [51] J. L. SYNGE, *Relativity: the general theory*, Series in Physics, North-Holland, Amsterdam (1964).
- [52] S. M. KOPEIKIN, *Covariant Equations of Motion of Extended Bodies with Arbitrary Mass and Spin Multipoles*, Phys. Rev. **D 99** (2019) 084008; arXiv: 1810.11713.

- [53] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari e A. Tureanu, *Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative QED*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2716.
- [54] Tiberiu Harko, Shi-Dong Liang, *Energy-dependent noncommutative quantum mechanics*, arXiv:1903.06776.
- [55] Kai Ma, Ya-Jie Ren, Ya-Hui Wang, *Probing Noncommutativities of Phase Space by Using Persistent Charged Current and Its Asymmetry*, Phys. Rev. **D 97** (2018) 117011, arXiv:1703.10923.
- [56] Kai Ma, *Chiral Spin Noncommutative Space and Anomalous Dipole Moments*, arXiv:1903.11439.
- [57] Kai Ma, Jian-Hua Wang, Huan-Xiong Yang, *Time-dependent Aharonov-Bohm effect on the noncommutative space*, Phys. Lett. **B 759** (2016) 306; arXiv:1604.02110.
- [58] Ya-Jie Ren, Kai Ma, *Influences of the coordinate dependent noncommutative space on charged and spin currents*, Int. J. Mod. Phys. **A 33**, (2018) 1850093; arXiv:1802.10452.
- [59] M. Daszkiewicz, *Generalized twist deformations of Poincaré and Galilei quantum groups*, Mod. Phys. Lett. **A 30**, 1550034 (2015).
- [60] M. Daszkiewicz, *Photoelectric effect for twist-deformed space-time*, Acta Phys.Polon **B 47** 1293 (2016).
- [61] C. A. Stechhahn, *Aharonov-Bohm scattering for relativistic particles in (3 + 1)-dimensional noncommutative space with spin dependence*, arXiv:1905.12538.
- [62] M. H. L. Pryce, *The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **195** (1948) 62.

APÊNDICE A – Tensor de Levi-Civita

Reservaremos para este apêndice as principais identidades relacionadas aos símbolos de Levi-Civita, muito úteis em diversos desenvolvimentos algébricos feitos no decorrer deste texto. Em especial, discutiremos os casos três e quatro dimensionais.

Definição A.0.1. O símbolo de Levi-Civita n -dimensional é definido por

$$\epsilon^{a_1 \cdots a_n} = \begin{cases} 0, & \text{se ao menos dois índices são iguais,} \\ \text{sinal}(a_1, \cdots, a_n), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

com $a_k \in \{1, \cdots, n\}$ para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$. Além disso, se a_1, \cdots, a_n forem todos distintos, dizemos que $\text{sinal}(a_1, \cdots, a_n)$ vale 1 caso a n -úpla (a_1, \cdots, a_n) possa ser levada à n -úpla $(1, \cdots, n)$ por um número par de permutações e -1 se for por um número ímpar de permutações.

A seguir, uma propriedade fundamental que relaciona o determinante de uma matriz $A \in M(\mathbb{C}, n)$ com o símbolo de Levi-Civita:

$$\det(A) = \epsilon^{a_1 \cdots a_n} A_{1a_1} \cdots A_{na_n}, \quad (\text{A.1})$$

Podemos também expressá-los de outra maneira: defina $\Delta(a_1, \cdots, a_n)$ a matriz $n \times n$ cujo elemento ij é dado por $\Delta(a_1, \cdots, a_n)_{ij} = \delta^i_{a_j}$. A partir desta identificação podemos provar várias relações úteis, como por exemplo:

$$\epsilon_{a_1 \cdots a_n} \epsilon_{b_1 \cdots b_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_{a_1} & \cdots & \delta^{b_1}_{a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_n}_{a_1} & \cdots & \delta^{b_n}_{a_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Se $a_1 = b_1$ temos $\delta^{b_1}_{a_1} = 1$, por propriedade do determinante obtemos

$$\sum_{a_1=1}^n \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n} \epsilon_{a_1 b_2 \cdots b_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^{b_2}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_2}_{a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_n}_{a_2} & \cdots & \delta^{b_n}_{a_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Portanto, podemos generalizar:

$$\sum_{a_1=1}^n \cdots \sum_{a_r=1}^n \epsilon_{a_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n} \epsilon_{a_1 \cdots a_r b_{r+1} \cdots b_n} = r! \det \begin{pmatrix} \delta^{b_{r+1}}_{a_{r+1}} & \cdots & \delta^{b_{r+1}}_{a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{b_n}_{a_{r+1}} & \cdots & \delta^{b_n}_{a_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Com isso, podemos retornar aos nossos casos de interesse enunciando as principais identidades usadas neste texto:

Propriedade A.0.2. Para o caso $n = 3$, temos:

1. $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj} = -\epsilon^{kji}$;
2. $\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn} = \delta_i^l\delta_j^m\delta_k^n + \delta_i^m\delta_j^n\delta_k^l + \delta_i^n\delta_j^l\delta_k^m - \delta_i^m\delta_j^l\delta_k^n - \delta_i^l\delta_j^n\delta_k^m - \delta_i^n\delta_j^m\delta_k^l$;
3. $\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m$;
4. $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijn} = 2\delta_k^n$;
5. $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} = 6$.

Propriedade A.0.3. Para o caso $n = 4$, temos:

1. $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}$, onde $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$;
2. $\epsilon_{\mu\nu\alpha_1\alpha_2}\epsilon^{\mu\nu\beta_1\beta_2} = 2 \det[\delta^{\beta_i}_{\alpha_j}]_{2 \times 2}^{ij}$;
3. $\epsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\epsilon^{\mu\beta_1\beta_2\beta_3} = \det[\delta^{\beta_i}_{\alpha_j}]_{3 \times 3}^{ij}$;

Por fim, podemos também relacionar o símbolo de Levi-Civita com o produto vetorial: Sejam os 3-vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , obtemos

$$[a, b]^i = \epsilon^{ijk} a^j b^k. \quad (\text{A.5})$$

Rescrevendo o produto vetorial como um tensor dado por

$$[a, b]^{ij} = a^i b^j - a^j b^i, \quad (\text{A.6})$$

Podemos relacionar as fórmulas (A.5) e (A.6) nas seguintes identidades:

$$[a, b]^i = \frac{1}{2} [a, b]_{jk} \epsilon^{ijk} \quad \text{e} \quad [a, b]_{nm} = [a, b]^i \epsilon^{inm} \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B – Matriz de rotação dados vetores e eixo

A construção neste apêndice tem o intuito de auxiliar na interpretação da matriz R , obtida na seção (2.4), segundo vetores \vec{w}' e $-\vec{v}''$, dados pelas identidades (2.24) e (2.25). Assim, vamos construir matriz R que gira \vec{w}' em $-\vec{v}''$ através do eixo $[\vec{w}', -\vec{v}'']$. Definimos os seguintes vetores:

$$\mathbf{a} = \frac{\vec{w}'}{|\vec{w}'|}, \quad \mathbf{b} = \frac{-\vec{v}''}{|-\vec{v}''|}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{|\mathbf{b} - \mathbf{a}|} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são unitários, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são ortonormais e podem representados espacialmente da seguinte maneira:

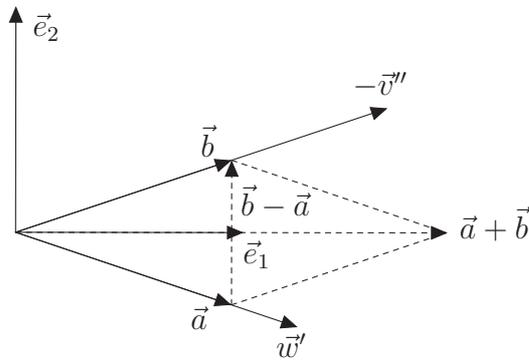


Figura 12 – Disposição de vetores definidos

Dado vetor $\vec{\pi}$, podemos decompor $R\vec{\pi}$ na forma:

$$R\vec{\pi} = \vec{\pi}_{\parallel} + G\vec{\pi}_{\perp}, \quad (\text{B.2})$$

onde G representa uma rotação por Ω no plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ em torno de \mathbf{m} . Para isso, basta observarmos que parte de $\vec{\pi}$ paralela a eixo de rotação \mathbf{m} é invariante a R . E rotação R se dá efetivamente na parcela ortogonal a \mathbf{m} , isto é, sobre plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Ou seja:

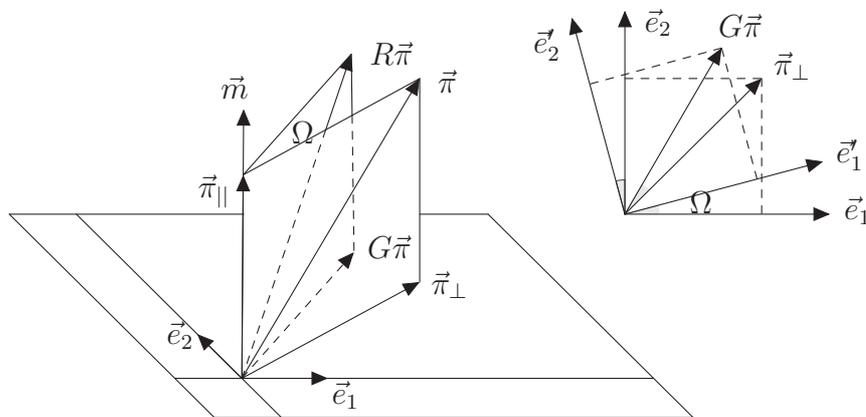


Figura 13 – (A) Disposição espacial; (B) Disposição no plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$

Onde \mathbf{e}'_1 e \mathbf{e}'_2 são dados por

$$\mathbf{e}'_1 = \cos(\Omega)\mathbf{e}_1 + \sin(\Omega)\mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}'_2 = -\sin(\Omega)\mathbf{e}_1 + \cos(\Omega)\mathbf{e}_2 \quad (\text{B.3})$$

Podemos rescrever (B.2) utilizando operadores de projeção ortogonal e paralela a \mathbf{m} , donde $\vec{\pi}_{\parallel} = P(\mathbf{m})\vec{\pi}$ e $\vec{\pi}_{\perp} = N(\mathbf{m})\vec{\pi}$. Além disso, como \mathbf{a} e \mathbf{b} são unitários, temos

$$\cos(\Omega) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \sin(\Omega) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{m}| \quad (\text{B.4})$$

Considerando $\vec{\pi}_{\perp} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = (\vec{\pi}_{\perp}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\vec{\pi}_{\perp}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$, podemos encontrar $G\vec{\pi}_{\perp}$, basta fazermos

$$\begin{aligned} G\vec{\pi}_{\perp} &= x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 = \\ &= x_1[\cos(\Omega)\mathbf{e}_1 + \sin(\Omega)\mathbf{e}_2] + x_2[-\sin(\Omega)\mathbf{e}_1 + \cos(\Omega)\mathbf{e}_2] = \\ &= [x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2]\cos(\Omega) - [x_2\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_2]\sin(\Omega) = \\ &= \vec{\pi}_{\perp}\cos(\Omega) - [(\vec{\pi}_{\perp}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 - (\vec{\pi}_{\perp}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2]\sin(\Omega) = \\ &= \vec{\pi}_{\perp}\cos(\Omega) - [\vec{\pi}_{\perp}, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]]\sin(\Omega) = \\ &= \vec{\pi}_{\perp}\cos(\Omega) + [[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \vec{\pi}_{\perp}]\sin(\Omega). \end{aligned}$$

Entretanto, $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ é vetor unitário na direção de \mathbf{m} e pela segunda identidade em (B.5), temos

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{\sin(\Omega)}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} R\vec{\pi} &= \vec{\pi}_{\parallel} + G\vec{\pi}_{\perp} \\ &= P(\mathbf{m})\vec{\pi} + N(\mathbf{m})\vec{\pi}\cos(\Omega) + \left[\frac{\mathbf{m}}{\sin(\Omega)}, N(\mathbf{m})\vec{\pi} \right] \sin(\Omega) = \\ &= P(\mathbf{m})\vec{\pi} + N(\mathbf{m})\vec{\pi}\cos(\Omega) + [\mathbf{m}, (1 - P(\mathbf{m}))\vec{\pi}] = \\ &= P(\mathbf{m})\vec{\pi} + N(\mathbf{m})\vec{\pi}\cos(\Omega) + [\mathbf{m}, \vec{\pi}], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (R\vec{\pi})^i &= \frac{m^i m^s}{m^2} \pi^s + \left(\delta_s^i - \frac{m^i m^s}{m^2} \right) \pi^s (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \epsilon^{irs} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^r \pi^s \\ &= \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \delta_s^i + (1 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})) \frac{m^i m^s}{m^2} + \epsilon^{irs} m^r \right\} \pi^s. \end{aligned}$$

Portanto

$$R^{ij} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \delta_j^i + (1 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})) \frac{m^i m^j}{m^2} - \epsilon^{kij} m^k. \quad (\text{B.5})$$