

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Eduarda Marques Ferreira

**Análise de modelos computacionais para avaliação do comportamento
mecânico do concreto fissurado**

Juiz de Fora

2021

Eduarda Marques Ferreira

**Análise de modelos computacionais para avaliação do comportamento
mecânico do concreto fissurado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Mecânica das Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Prof. Dr. George Oliveira Ainsworth Junior

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ferreira, Eduarda Marques.

Análise de modelos computacionais para avaliação do comportamento
mecânico do concreto fissurado / Eduarda Marques Ferreira. – 2021.

83 f. : il.

Orientador: Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: George Oliveira Ainsworth Junior

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade
de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.

1. Método dos elementos finitos. 2. Modelo de fissuração distribuída.
3. Modelo de fissuração discreta. I. Barbosa, Flávio de Souza, orient. II.
Ainsworth Junior, George Oliveira, coorient. III. Título.

Eduarda Marques Ferreira

Análise de modelos computacionais para avaliação do comportamento mecânico do concreto fissurado

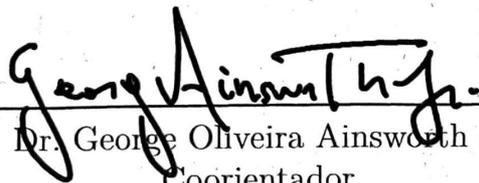
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Mecânica das Estruturas

Aprovada em 28 de maio de 2021

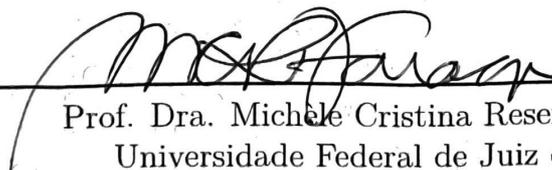
BANCA EXAMINADORA



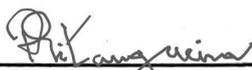
Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. George Oliveira Ainsworth Junior -
Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dra. Michele Cristina Resende Farage
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
Universidade Federal de Minas Gerais

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre guiar e abençoar minha vida.

Aos meus pais por serem exemplo de força, dedicação e respeito e sempre colocarem a minha felicidade em primeiro plano. À minha irmã por todo carinho e alegria compartilhadas.

Ao Matheus pelo incentivo e companheirismo ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador e professor Flávio que, mais uma vez, me orientou com dedicação e seriedade. Agradeço imensamente a oportunidade de trabalharmos juntos nesses últimos anos e por todos os ensinamentos transmitidos.

Ao meu coorientador e professor George pela atenção e colaboração no trabalho, por estar disponível em todos os momentos e não medir esforços para ajudar no desenvolvimento dessa pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora (PEC/UFJF), todos os professores e funcionários pela excelência e qualidade de ensino e pesquisa.

À Universidade Federal de Juiz de Fora pela seriedade e comprometimento com a aprendizagem e formação de seus alunos e pelo suporte financeiro.

A todos que fizeram parte da minha formação, o meu sincero agradecimento.

RESUMO

A utilização de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, permite o desenvolvimento de modelos capazes de simular o comportamento mecânico do concreto levando-se em conta seu comportamento fisicamente não linear, permitindo análises mais realistas acerca do material. Um dos principais fenômenos responsáveis pela não linearidade física do concreto é a fissuração, que ocorre mesmo em baixos níveis de carregamento, devido à sua baixa resistência à tração quando comparada à compressão. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo apresentar e avaliar dois modelos computacionais para simular o comportamento estático de estruturas de concreto durante o processo de fissuração e realizar uma comparação entre eles. O primeiro modelo analisado considera a fissuração distribuída e é baseado no monitoramento da deterioração das propriedades físicas do material. O processo de fissuração é descrito pela degradação das tensões com o aumento das deformações, por meio de diferentes relações tensão-deformação extraídas da literatura que representam o comportamento geral do concreto em tração ou compressão. A formulação do modelo é baseada na inversão da flexibilidade com o emprego de uma matriz constitutiva secante local que leva em conta o módulo de elasticidade do material sem dano e danificado. O segundo modelo avaliado considera a fissuração descrita de forma discreta e baseia-se no emprego de elementos de interface inseridos na malha quando o nível de tensões nos elementos contínuos atinge um limite preestabelecido. Ambos os modelos analisados foram implementados usando-se elementos isoparamétricos para elasticidade plana e uma subrotina incremental-iterativa com métodos de controle de carga e deslocamentos. Os modelos de fissuração implementados foram validados através da comparação dos resultados calculados com aqueles obtidos por outros modelos da literatura, mostrando boa concordância.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos. Modelo de fissuração distribuída. Modelo de fissuração discreta.

ABSTRACT

The use of numerical methods, such as the finite element method, allows the development of models capable of simulating the mechanical behavior of concrete taking into account its physically non-linear behavior, allowing for more realistic analyzes of the material. One of the main phenomena responsible for the physical nonlinearity of concrete is cracking, which occurs even at low loading levels, due to its low tensile strength when compared to the compressive one. In this context, the present work aims to to present and evaluate two computational models to simulate the static behavior of concrete structures during the cracking process and to make a comparison between them. The first model analyzed considers smeared cracking and it is based on monitoring the deterioration of the material's physical properties. The cracking process is described by the decay of stresses with increased strains, through different stress-strain relationships extracted from the literature that represents the overall behavior of concrete in tension or compression. The model formulation is based on the inversion of flexibility with the use of a local secant constitutive matrix, which takes into account the damaged and the undamaged secant Young's modulus of the material. The second model evaluated considers the crack described discretely and it is based on the use of interface elements inserted in the mesh when the stress level in the continuous elements reaches a pre-established limit. Both models analyzed were implemented using an isoparametric element for plane elasticity and an incremental-iterative subroutine with load and displacement control methods. The implemented cracking models were validated by comparing the calculated results with the ones obtained by other models from literature, showing good agreement.

Keywords: Finite element method. Smeared crack model. Discrete crack model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	- Modos de abertura das fissuras	13
Figura 2	- Características gerais de uma trajetória de equilíbrio	26
Figura 3	- Processo incremental-iterativo com controle de carga	30
Figura 4	- Processo incremental-iterativo com controle de deslocamento	32
Figura 5	- Característica do GSP	34
Figura 6	- Composição do elemento IE5	36
Figura 7	- Rotação do elemento IE5	38
Figura 8	- Esquema de inserção do elemento de interface	43
Figura 9	- Elementos afetados pela inserção da interface	44
Figura 10	- Sistemas de coordenadas global e local	45
Figura 11	- Lei de Carreira e Chu (1985) para compressão	50
Figura 12	- Lei de Carreira e Chu (1986) para tração	50
Figura 13	- Lei de Boone e Ingraffea (1987) para tração	51
Figura 14	- Lei de Kaklauskas (1998) para compressão	53
Figura 15	- Geometria do painel em “L”	59
Figura 16	- Modelo de fissuração distribuída em duas malhas distintas	61
Figura 17	- Malhas empregadas na análise do painel em “L”	61
Figura 18	- Comparação dos métodos de controle	62
Figura 19	- Curvas de equilíbrio do modelo de fissuração distribuída	63
Figura 20	- Comparação dos modelos de fissuração	64
Figura 21	- Inclusão das interfaces no modelo discreto	65
Figura 22	- Validação dos resultados obtidos	66
Figura 23	- Deformação do painel (deslocamentos ampliados em 100x)	68
Figura 24	- Resultados encontrados por Winkler <i>et al.</i> (2004)	68
Figura 25	- Geometria da viga submetida a flexão em três pontos	69
Figura 26	- Malha 1 empregada na análise da viga	70
Figura 27	- Detalhe da Malha 2 empregada na análise da viga	70
Figura 28	- Curvas de equilíbrio do modelo de fissuração distribuída	71
Figura 29	- Comparação dos modelos de fissuração discreta e distribuída	71
Figura 30	- Inclusão das interfaces no modelo discreto	72
Figura 31	- Validação dos resultados obtidos	73
Figura 32	- Deformação da viga no modelo distribuído (deslocamentos ampliados em 100x)	75
Figura 33	- Deformação da viga no modelo discreto (deslocamentos ampliados em 100x)	75
Figura 34	- Detalhe das fissuras (deslocamentos ampliados em 100x)	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Padrão proposto para a variação do parâmetro α	41
Tabela 2 – Definição das variáveis do modelo de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986)	49
Tabela 3 – Definição das variáveis do modelo de Boone e Ingraffea (1987)	51
Tabela 4 – Definição das variáveis do modelo de Kaklauskas (1998)	52
Tabela 5 – Parâmetros das leis tensão-deformação para painel em “L”	60
Tabela 6 – Características do modelo de fissuração distribuída (Painel em “L”)	66
Tabela 7 – Características do modelo de fissuração distribuída para diferentes leis tensão-deformação (Painel em “L”)	67
Tabela 8 – Características do modelo de fissuração discreta (Painel em “L”)	67
Tabela 9 – Parâmetros das leis tensão-deformação para viga	69
Tabela 10 – Características do modelo de fissuração distribuída (Viga)	74
Tabela 11 – Características do modelo de fissuração distribuída para diferentes leis tensão-deformação (Viga)	74
Tabela 12 – Características do modelo de fissuração discreta (Viga)	74

LISTA DE SÍMBOLOS

$[\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez global da estrutura
$\{\mathbf{U}\}$	Vetor de deslocamentos da estrutura
$\{\mathbf{P}\}$	Vetor de cargas externas ou vetor de cargas de referência
i	Contador de passos incrementais
j	Contador de iterações
$\{\delta\mathbf{U}\}$	Vetor de deslocamentos incrementais
$\delta\lambda$	Incremento do fator de cargas
$\{\mathbf{Q}\}$	Vetor de forças residuais
λ	Fator de cargas
$\{\delta\mathbf{U}^P\}$	Vetor de deslocamentos associado à carga de referência
$\{\delta\mathbf{U}^Q\}$	Vetor de deslocamentos associado à carga de residual
$\{\mathbf{F}\}$	Vetor de forças internas
V_e	Volume do elemento finito
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	Vetor de tensões
$\{\mathbf{C}\}$	Vetor constante da equação de restrição dos métodos de controle
k	Constante da equação de restrição dos métodos de controle
H	Parâmetro incremental de controle
c	Grau de liberdade de controle
GSP	Parâmetro de rigidez generalizado
L_1	Comprimento da face inferior do elemento de interface
L_2	Comprimento da face superior do elemento de interface
$L_{médio}$	Comprimento médio do elemento de interface
$C1, C2, C4$	Coefficientes de rigidez das molas do elemento de interface
G	Módulo de elasticidade transversal
G_{12}	Módulo de elasticidade transversal definido para as direções principais
E	Módulo de elasticidade ou Módulo de Young
E_0	Módulo de elasticidade inicial
E_1	Módulo de elasticidade para a direção principal 1
E_2	Módulo de elasticidade para a direção principal 2
σ_1, σ_2	Tensões principais
ϵ_1, ϵ_2	Deformações principais
ν	Coefficiente de Poisson
h	Altura/abertura do elemento de interface
$[\mathbf{D}]$	Matriz constitutiva
$[\mathbf{C}]$	Matriz de flexibilidade
α	Fator de penalidade do elemento de interface
$f_{ct,m}$	Valor médio da resistência à tração direta do concreto
f_{ck}	Resistência característica do concreto à compressão
$f_{ctk,inf}$	Resistência característica inferior do concreto à tração
$f_{ctk,sup}$	Resistência característica superior do concreto à tração

u	Deslocamento horizontal nodal
v	Deslocamento vertical nodal
f_t	Tensão relativa ao limite de resistência à tração
f_c	Tensão relativa ao limite de resistência à compressão
ϵ_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração
ϵ_c	Deformação relativa ao limite elástico na compressão
h_c	Comprimento característico
G_f	Energia de fratura por comprimento de trinca

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	15
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	15
2	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO	17
3	ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE ESTRUTURAS	25
3.1	MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS	27
3.1.1	Controle de Carga	29
3.1.2	Controle Direto de Deslocamento	30
3.1.3	Controle de Deslocamento Generalizado	31
4	MODELOS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO	35
4.1	MODELO DE FISSURAÇÃO DISCRETA	35
4.1.1	Elemento de interface	35
4.1.2	Esquema de inserção dos elementos de interface	41
4.2	MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA	44
4.2.1	Modelo de fissuração	45
4.2.2	Relações tensão-deformação	48
4.2.2.1	<i>Relação tensão-deformação proposta por Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986)</i>	<i>48</i>
4.2.2.2	<i>Relação tensão-deformação proposta por Boone e Ingraffea (1987)</i>	<i>51</i>
4.2.2.3	<i>Relação tensão-deformação proposta por Kaklauskas (1998)</i>	<i>52</i>
5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	54
6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO	59
6.1	PAINEL EM “L” SUBMETIDO A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO	59
6.2	VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A FLEXÃO EM 3 PONTOS . .	67
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
7.1	TRABALHOS FUTUROS	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material composto que consiste em um meio contínuo aglomerante onde estão inseridas partículas de agregados. O aglomerante comumente empregado no Brasil é o cimento Portland, enquanto que os agregados podem ser divididos em dois grupos: os agregados graúdos, como a brita, e os agregados miúdos, como a areia. Dependendo da finalidade do concreto ainda é possível adicionar à mistura aditivos que têm como função melhorar as características do material, podendo trazer benefícios relacionados a trabalhabilidade, resistência e durabilidade.

Mehta e Monteiro (2008) apontam que o uso extensivo do concreto na construção civil se deve a três razões principais: a alta resistência do concreto à água, ao contrário de materiais como madeira e aço, o que permite seu emprego em estruturas para controlar, armazenar ou transportar água; sua facilidade em ser moldado no estado fresco, o que permite a fabricação de peças de concreto em diversos formatos e tamanhos; e o custo dos seus componentes, que é relativamente baixo, além de serem ainda disponíveis em grande parte do mundo. Tais vantagens fazem do concreto o material construtivo mais consumido no mundo, o que justifica o interesse de pesquisadores na busca de modelos constitutivos que descrevam de maneira adequada o seu comportamento.

De uma maneira geral, as estruturas de concreto exigem modelos constitutivos elaborados para seu estudo. De fato, por se tratar de um material heterogêneo, com comportamento fisicamente não linear, modelos analíticos para o concreto se tornam, muitas vezes, de difícil formulação e solução. Nesse contexto, o emprego de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, possibilitam uma modelagem do comportamento mecânico do concreto de forma mais realista, ampliando as possibilidades de estudo.

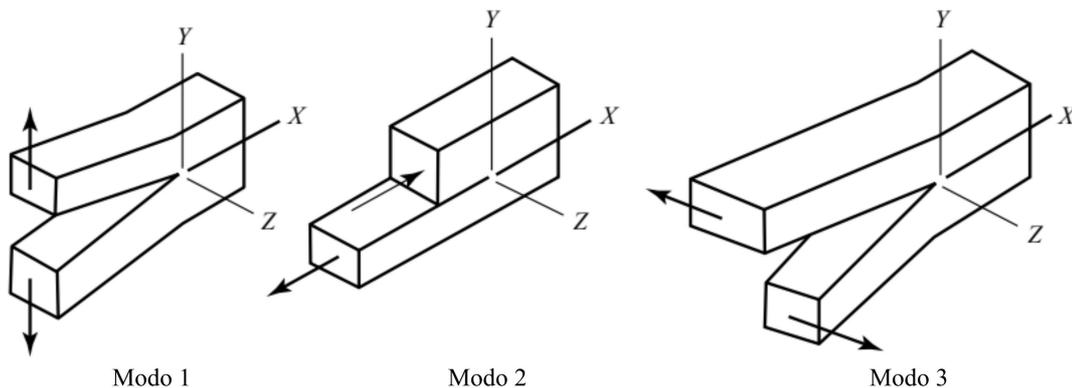
De acordo com Álvares (1993), o processo de deterioração em estruturas de concreto se inicia com o surgimento de microfissuras que modificam a distribuição dos esforços internos, trazendo efeitos no comportamento mecânico macroscópico da estrutura, sendo os mais relevantes a queda na resistência e a alteração das propriedades do material, como seu módulo de elasticidade. Sendo assim, o estudo do processo de fissuração é importante para a análise da segurança estrutural dos elementos de concreto.

Avanços no estudo da microestrutura do concreto apontam que a zona de transição na interface, localizada próxima dos agregados graúdos, está suscetível à fissuração antes mesmo do carregamento da peça estrutural. Tal fenômeno é devido à ocorrência de tensões de tração na secagem e resfriamento do concreto após sua hidratação, e pode ser agravado com a presença de cargas de impacto ou de alta intensidade e retração por secagem. Baixos níveis de tensão são necessários para a evolução dessas microfissuras, enquanto a fissuração na matriz cimentícia só se inicia quando as tensões atingem cerca de 70 % da resistência última do concreto. Com a evolução do carregamento, estas fissuras unem-se às primárias

até formarem um sistema contínuo, culminando no rompimento do material (Mehta e Monteiro (2008)).

Em geral, os estudos do processo de fissuração seguem duas correntes: a mecânica da fratura ou a mecânica do dano. De acordo com Medina (2014), a mecânica da fratura trata de fissuras macroscópicas e da resistência do material à propagação destas, sendo o meio ao seu redor assumido como intacto. A mecânica da fratura apresenta uma classificação dos modos básicos de carregamento envolvendo diferentes deslocamentos da superfície de fissura conforme apresentado na Figura 1. O modo 1 é um modo de tração ou de abertura e a fissura se desenvolve em um plano perpendicular ao de carregamento. O modo 2 é um modo de deslizamento ou de cisalhamento no plano, consistindo no escorregamento tangencial entre as superfícies da fissura. O modo 3 é um modo de rasgamento e o escorregamento entre as superfícies da fissura ocorre devido a um esforço cisalhante perpendicular à direção da fissura.

Figura 1 - Modos de abertura das fissuras



Fonte: Adaptada de Hertzberg *et al.* (2013).

A mecânica do dano busca descrever macroscopicamente o efeito do surgimento e desenvolvimento da microfissuração nos materiais e tem como trabalho pioneiro o de Kachanov (1958) que introduz o conceito de dano para estudar ruptura frágil associada à deformação lenta em metais. Os modelos de dano podem ser divididos em duas vertentes: modelos de dano isotrópico e anisotrópico. O primeiro considera que a degradação do material não acarreta na mudança da condição inicial de isotropia, permitindo que a variável dano seja representada por um escalar. Enquanto que o segundo admite que a danificação leve a uma anisotropia do material, devendo a variável dano ser representada por um tensor.

O concreto tem como propriedade mais marcante para definição do seu comportamento estrutural, a sua baixa resistência à tração quando comparada à sua resistência à compressão, o que faz com que as fissuras sejam notadas ainda para baixos níveis de carga.

De acordo com Menin *et al.* (2009), na simulação numérica de estruturas de concreto fissuradas pelo método dos elementos finitos, três modelos são utilizados para representar as fissuras: discreta, distribuída e incorporada.

Nos modelos de fissuração discreta a estrutura é considerada íntegra, sendo necessária redefinição da malha quando ocorre a formação de fissuras. As fissuras são inseridas ao longo das arestas dos elementos da malha original, gerando descontinuidades no campo de deslocamentos. Os principais aspectos negativos desses modelos estão relacionados à necessidade de redefinição da malha a cada surgimento de nova fissura ou evolução de uma fissura já existente, e à limitação da direção de propagação da fissuração nas arestas dos elementos. Devido a tais deficiências, a aplicação desses modelos fica normalmente restrita aos casos de progressão de poucas fissuras.

Quando as fissuras estão dispersas ao longo da estrutura, os modelos de fissuração distribuída são, em princípio, mais adequados. Nessa vertente, o material fissurado é tratado como contínuo e o processo de fissuração provoca mudanças nas relações constitutivas dos elementos da malha. Um defeito que pode ser destacado nesses modelos é a sua dificuldade em representar casos de fissuração localizada que ocorre, principalmente, em estruturas de concreto simples. Além disso, os modelos de fissura distribuída apresentam resultados sensíveis à malha de elementos finitos utilizada.

Recentemente, surgiram os modelos de fissuração incorporada. Eles são empregados na simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado e se baseiam na inserção de descontinuidades no elemento finito padrão. Esses modelos surgiram como uma alternativa para a eliminação dos principais problemas dos dois modelos anteriores e podem ser divididos em três grupos: os que utilizam elementos híbridos, os que os elementos possuem descontinuidades no campo de deformações e os que os elementos possuem descontinuidades no campo de deslocamentos.

Existem diversos trabalhos na literatura que abordam cada uma das três classes de modelos de fissuração já citadas. Entretanto, observa-se que, de uma maneira geral, a grande maioria desses trabalhos tem como foco um tipo específico de modelo, o que pode dificultar comparações diretas para a determinação objetiva da estratégia mais adequada em um dado problema. Nesse sentido, o presente trabalho visa contribuir para a análise e a avaliação de modelos de fissuração aplicados a estruturas de concreto, comparando-se, para cada caso estudado, os resultados obtidos através de estratégias de modelagem discreta e distribuída. Observa-se que os modelos de fissuração apresentados nesse trabalho, apesar de serem baseados em modelos conhecidos da literatura, possuem contribuições originais que serão detalhadas no capítulo 4.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal desta dissertação é apresentar e analisar dois modelos computacionais, um de fissura discreta e outro de fissura distribuída, baseados no método dos elementos finitos que simulam o comportamento estático de estruturas de concreto durante o processo de fissuração. Foram implementados dois modelos distintos com a finalidade de fazer uma análise comparativa dos aspectos positivos e negativos de cada um deles, bem como uma comparação de seus resultados.

O modelo de fissuração distribuída adotado depende diretamente de leis tensão-deformação representativas do comportamento do concreto, capazes de computar a degradação das propriedades físicas do material. Foram usadas as relações propostas por Boone e Ingraffea (1987), Carreira e Chu (1985), Carreira e Chu (1986) e Kaklauskas (1998) que captam a integridade do módulo de elasticidade secante e uma matriz constitutiva secante local, onde os eixos locais são determinados pelas direções principais de deformação.

O modelo de fissuração discreta proposto é baseado no emprego do elemento de interface com cinco molas proposto por Coutinho *et al.* (2003) para representação das descontinuidades geométricas geradas pelas fissuras, sempre que a tensão em um dado elemento supera um limite preestabelecido.

Também foi implementada uma subrotina incremental-iterativa para solução do sistema de equações não lineares, necessária para obtenção da curva de equilíbrio das estruturas estudadas. Foram empregados os métodos clássicos de controle de carga, de controle direto de deslocamento e de controle de deslocamentos generalizados.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação é organizada em 6 capítulos, inclusive o presente, onde foi realizada uma breve introdução do tema abordado e a relevância de seu estudo. Apresentou-se, também, o objetivo que se busca alcançar com o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica com modelos constitutivos para o concreto propostos por diversos autores, englobando modelos que se enquadram nas classificações de fissuração distribuída, discreta e incorporada.

No terceiro capítulo é discutida a análise fisicamente não linear de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos.

No capítulo 4 é apresentada a metodologia empregada. Neste capítulo é apresentado o elemento de interface adotado no modelo de fissuração discreta, a formulação do modelo de fissuração distribuída, bem como as relações tensão-deformação nele empregadas, e uma descrição dos métodos de controle usados na análise não linear.

O capítulo 5 trata da implementação computacional. Nele é mostrada a estrutura do

código de elementos finitos implementado no trabalho, com uma descrição mais detalhada dos algoritmos relacionados ao método incremental-iterativo, aos métodos de controle e redefinição da malha necessária no modelo de fissura discreta.

No sexto capítulo são realizadas simulações numéricas de problemas fisicamente não lineares. Os resultados entre os dois modelos são comparados entre si e também validados com resultados obtidos por outros autores presentes na literatura.

A análise dos resultados encontrados permite a apresentação das considerações finais do trabalho apresentado no capítulo 7. Nesse momento também são apontadas sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Um modelo constitutivo pode ser definido como uma lei que simula matematicamente o comportamento físico de um material. Em geral, as leis constitutivas são elaboradas buscando representar características ou fenômenos específicos do material, sendo praticamente inviável a elaboração de uma única lei que descreva seu comportamento para qualquer tipo de solicitação.

O concreto é um material com comportamento mecânico complexo marcado pela ocorrência de fenômenos como fissuração, esmagamento, fluência e retração que dificultam o desenvolvimento de um modelo analítico para seu estudo. Nesse contexto, a evolução dos métodos numéricos e computacionais permitiu um avanço das pesquisas na área com o objetivo de propor modelos cada vez mais realistas para o concreto. Na literatura existem diversos trabalhos relacionados ao estudo e propostas de modelos constitutivos para o concreto e alguns deles serão mencionados a seguir, com ênfase nos modelos de elementos finitos existentes para representar a fissuração no material.

Um dos primeiros trabalhos na área, foi o de Ngo e Scordelis (1967) que apresentaram um modelo discreto para concreto armado onde as fissuras eram inseridas na malha de acordo com padrões empíricos e era admitido um escorregamento da armadura em relação ao concreto. As fissuras eram representadas a partir da duplicação dos nós dos elementos entre os quais elas estão localizadas, permitindo que eles se separem. Os materiais eram modelados com relações tensão-deformação elástico-lineares.

O trabalho de Nilson (1968) também trouxe um estudo da propagação de fissuras discretas em vigas de concreto armado, entretanto já considera o comportamento não linear do material. O modelo considera um carregamento incremental que se interrompe sempre que o critério adotado para início da fissuração é atingido. Nesse momento é realizada uma redefinição manual da malha com a duplicação dos nós no local de inserção da fissura. A estrutura fissurada é novamente carregada até que o critério de fissuração seja novamente atingido e uma nova malha precise ser definida.

Rashid (1968) apresentou um modelo simplificado que já aplica características dos modelos atuais de fissuração distribuída como a alteração das propriedades mecânicas do material em regiões degradadas. O autor estuda estruturas de concreto protendido e propõe relações tensão-deformação para os elementos fissurados na malha que se baseiam em eliminar a rigidez desses elementos na direção normal à superfície de fissuração.

Até este momento, os trabalhos consideravam que a ruptura do concreto acontecia de forma frágil. Posteriormente percebeu-se que os resultados se aproximavam melhor do comportamento real do concreto quando se adotava uma perda de rigidez do material após atingida sua tensão limite. Um exemplo é o modelo apresentado por Suidan e Schnobrich (1973) que mantém uma rigidez residual transversal minorando o módulo de elasticidade

transversal inicial através de um fator de retenção ao cisalhamento em contraponto a modelos anteriores que assumiam uma incapacidade do material fissurado em transmitir esforços. Nessa época, parâmetros da mecânica da fratura também começaram a ser usados na modelagem do concreto, como é o caso do trabalho de Hillerborg *et al.* (1976). Neste, as zonas de fissuração são descritas por curvas não lineares "tensão x abertura de fissura" que dependem da energia de fratura do material.

Bazant (1976) estudou a perda de estabilidade da estrutura quando seu comportamento passa a ser definido pelo ramo descendente da curva tensão-deformação, ou seja, quando o módulo de elasticidade tangente do material se torna negativo. O autor aponta que a falha na estrutura ocorre por uma localização instável de deformação em que a energia de deformação acumulada é transferida para uma pequena região, onde o material sofre a redução de rigidez.

Darwin e Pecknold (1977) desenvolveram uma lei tensão-deformação para concreto simples submetido a cargas biaxiais e a incorporaram em um programa de elementos finitos para análise de painéis de concreto onde são aplicadas carregamentos cíclicos. A relação constitutiva empregada considera as alterações de resistência e ductilidade do material devido às tensões biaxiais e também a degradação da sua rigidez causada por esforços de tração e compressão.

Cedolin e Dei Poli (1977) também apresentaram um modelo com representação biaxial não linear para o concreto baseado em resultados de testes biaxiais. No estudo de vigas de concreto armado os autores levam em consideração o processo de fissuração impedindo que os elementos suportem tensões perpendiculares à fissura, mas são capazes de transmitir esforços paralelos à esta. Posteriormente, Bazant e Gambarova (1980) estudaram um modelo de fissuração com superfície rugosa considerando o efeito do intertravamento dos agregados nos deslocamentos da abertura e deslizamento entre elementos.

Grootenboer *et al.* (1981) desenvolveram um modelo numérico de fissura incorporada para análise de estruturas de concreto armado em estado plano de tensão. O trabalho é baseado em um tipo especial de elemento que permite a ocorrência de fissuras discretas em seu interior em qualquer direção, o que pode ser interessante no estudo de ruptura frágil, quando poucas fissuras determinam o comportamento da estrutura. É considerada apenas a não linearidade física do concreto através de uma lei tensão-deformação não linear, não sendo aplicado para problemas com não linearidade geométrica. Além disso é adotado um critério de fissuração e um de esmagamento por compressão para o concreto.

Bazant e Oh (1983) consagraram um modelo de fissuração distribuída com o surgimento de bandas de fissuração e o emprego de relações tensão-deformação triaxiais que admitem um amolecimento gradual do material devido ao processo de microfissuração. Os autores empregaram conceitos da mecânica da fratura, considerando apenas o modo I de carregamento ou modo de abertura, e as propriedades do material fissurado são

determinadas por três parâmetros, sendo eles: energia de fratura, resistência limite uniaxial e largura da banda de fissuração.

Com a popularização dos modelos de fissuração distribuída muitos autores se dedicaram ao estudo e comparação dos modelos de fissuração fixa e rotacional e suas aplicações. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Milford e Schnobrich (1985), de Borst e Nauta (1985), Rots *et al.* (1985) e Rots e de Borst (1987). Milford e Schnobrich (1985) apontaram que no modelo de fissura fixa a direção das fissuras é mantida constante durante toda a análise, sendo determinada pela orientação da fissura primária, o que nem sempre coincide com o observado experimentalmente. No modelo de fissura rotacional é assumido que a direção média das fissuras é sempre normal à direção principal de deformação atual.

No âmbito dos modelos de fissura discreta, Ingraffea *et al.* (1984) utilizaram a mecânica da fratura para propor um novo método de análise não linear do processo de fissuração em estruturas de concreto armado. Os autores focam no efeito das fissuras secundárias radiais na ligação entre aço e concreto e empregam elementos de interface que são inseridos nas extremidades das fissuras fictícias.

Ortiz *et al.* (1987) apresentaram uma metodologia que se enquadra nos modelos incorporados e pode ser aplicada para problemas bi e tridimensionais envolvendo a localização do processo de falha. O campo de deslocamentos é modificado de forma a representar descontinuidades fracas, o que é feito através da adição de funções de forma que reproduzem os padrões de deformação localizados. Esse modelo foi aprimorado por Belytschko *et al.* (1988) que sugeriram a inserção das zonas de localização de deformações nos elementos quadrilaterais estudados. Nesse caso, o modelo não pode ser empregado quando as larguras das bandas de fissuração extrapolam as dimensões dos elementos da malha.

Rots e Blaauwendraad (1989) fizeram um análise comparativa entre modelos de fissura discreta e distribuída, com o objetivo de apontar os principais pontos positivos e negativos de cada modelo. O trabalho ressalta ainda as possibilidades do modelo distribuído, que apresenta as classes de fissuras fixas, rotacionais e multi-direcionais. O modelo de fissuração fixa distribuída multi-direcional pode ser considerado uma opção intermediária entre os demais possibilitando a abertura de várias fissuras em um mesmo ponto. Através da análise de exemplos, os autores chegam a conclusão que, da maneira como foi implementado, o modelo de fissura distribuída fixa traz resultados mais rígidos que o esperado devido a uma rotação excessiva das tensões após a fissuração, o que não ocorre no modelo de fissura rotacional. Uma deficiência notada para todos os modelos de fissura distribuída foi o travamento de força cortante (do inglês *shear locking*) o que não foi percebido no modelo de fissura discreta.

No mesmo ano, Oliver (1989) propôs o cálculo da largura da banda de fissuração

para modelos de fissuração distribuída. Esse parâmetro é denominado largura característica e é definido pela razão entre energia de fratura e energia específica de um ponto. O objetivo do autor é assegurar a correta dissipação energética, garantindo a convergência do método com o refinamento da malha.

O modelo proposto por Dahlblom e Ottosen (1990) tem como base os principais conceitos do modelo de fissura fictícia de Hillerborg *et al.* (1976) combinados ao modelo de banda de fissuração de Bazant e Oh (1983). As equações constitutivas apresentadas levam em consideração a largura característica, que fornece medidas das regiões onde os deslocamentos das fissuras estão distribuídos, obtendo objetividade em relação à malha para carregamento normais e tangenciais em relação ao plano da fissura. Além disso, o modelo admite a possibilidade de ocorrer fechamento e posterior reabertura das fissuras em um cenário de descarregamento e recarregamento da estrutura.

Um estudo numérico comparativo para cinco modelos diferentes de dilatação da fissura foi feito por Feenstra *et al.* (1991). Foi empregado um modelo de fissura discreta com elementos de interface que possuem relações constitutivas que englobam o estado pré fissuração, de comportamento elástico linear, estado pós fissuração, com o desenvolvimento gradual da fissura e o amolecimento do material, e estado final com a fissura aberta. É constatada a necessidade de aplicação de passos de carregamento muito pequenos para que não ocorram problemas de estabilidade no modelo, devido à ocorrência de autovalores negativos na matriz de rigidez tangencial.

Ainda nos modelos de fissura discreta, Gerstle e Xie (1992) utilizaram uma extensão do modelo de fissura fictícia de Hillerborg *et al.* (1976) combinado com elementos de interface. Na proposta, a ponta da fissura fictícia se propaga perpendicularmente à direção da tensão principal de tração quando a resistência de tração do material é ultrapassada. Tal fissura é representada por elementos de interface com deslocamentos que variam linearmente, porém as forças de superfície possuem variações de ordem superior.

Feenstra e de Borst (1995) apresentaram um modelo constitutivo para concreto armado baseado na ideia de que as tensões em cada elemento de concreto armado podem ser decompostas nas contribuições individuais do concreto simples, armadura e a interação entre esses materiais. O comportamento do concreto é governado pela energia de fratura, o da armadura é definido por um modelo elasto-plástico e as interações devido à ligação entre eles é regida por uma lei trilinear proposta pelos autores. A aplicação do modelo trouxe bons resultados na simulação do comportamento de falha do concreto armado para os exemplos estudados.

Concomitantemente ao estudo dos modelos de fissuração descritos, diversos pesquisadores também estudavam a modelagem de materiais a partir de conceitos da mecânica do dano. Lemaitre e Dufailly (1987) estudaram diversos métodos de medição do dano e suas possíveis aplicações em problemas da mecânica dos sólidos envolvendo tensões,

deformações e o processo de falha do material. Os autores concluem que nenhum dos métodos produz os melhores resultados para todo tipo de problema, devendo ser analisada a definição adequada de dano e a sua escala.

Na linha de estudo da mecânica do dano foram desenvolvidos muitos modelos de dano. Dentre eles destaca-se o modelo de Mazars (1984), um modelo simples e eficiente para descrever o fenômeno de microfissuração, onde o dano é considerado uma variável escalar calculada a partir das deformações principais positivas e assume valores entre 0 e 1, sendo que sua evolução só se inicia quando atingido um valor limite de deformação que é parâmetro do modelo. Posteriormente, o modelo de Brekelmans *et al.* (1992) para materiais frágeis utiliza um critério de dano para descrever diferentes comportamentos em tração e em compressão, o que é possível graças a uma formulação apropriada para a deformação equivalente de dano que depende das resistências do material a esforços de tração e compressão. Pituba (2003) apresentou um modelo constitutivo para o concreto assumindo a equivalência de energia entre o meio danificado real e o meio contínuo equivalente. Inicialmente o material é considerado um meio elástico isotrópico passando a ter um comportamento anisotrópico devido à evolução do dano.

A anisotropia do concreto também havia sido estudada por Bazant e Oh (1985) através de um modelo de microplanos no qual as propriedades constitutivas do material são caracterizadas por uma relação tensão-deformação atuando em um plano de qualquer orientação dentro do material. As deformações nos microplanos correspondem à aplicação de restrições cinemáticas ou estáticas ao tensor macroscópico de deformações e as tensões normais nos microplanos irão depender apenas das deformações normais no respectivo microplano.

Um grupo à parte são os modelos seguindo a teoria da plasticidade, onde são adotados critérios de resistência dos materiais permitindo uma boa representação da fase antes e depois do pico de tensão. Um trabalho clássico a respeito do assunto é o de Chen (1982) que discute a plasticidade do concreto com aplicações na análise de elementos finitos para estruturas de concreto simples e armado. A teoria da plasticidade também foi tema central do trabalho de Pramono e Willam (1989). Os autores desenvolveram um modelo para estudo do comportamento triaxial do concreto simples empregando a teoria da plasticidade com endurecimento no regime pré-pico e com amolecimento baseado na energia da fratura no regime pós-pico. As relações constitutivas do modelo elasto-plástico proposto se mostraram eficientes na reprodução do comportamento não linear do concreto bem como do processo de fissuração no material. Einsfeld (1997) também utilizou um modelo plástico em sua pesquisa que envolve a proposta de um modelo que combina fissuras distribuídas e discretas. A transição de um modelo para o outro se dá com a concentração das fissuras distribuídas em uma certa região da estrutura, o que permite a simulação de fissuras discretas em tal região.

Dentro dos modelos de fissura incorporada, Dvorkin *et al.* (1990) propuseram a formulação de um elemento finito com forte descontinuidade para problemas envolvendo a localização de deformações. Quando constatadas descontinuidades no campo de deslocamentos, são incorporadas linhas de localização que separam o elemento em subdomínios, sendo usadas, nessas regiões, relações constitutivas tensão-deslocamento locais que garantem, no caso de fissuras, uma correta dissipação de energia. Posteriormente, Jirásek e Zimmermann (2001) descreveram um elemento triangular com uma descontinuidade de deslocamentos incorporada que representa as fissuras. O modelo constitutivo é formulado baseado nos princípios da teoria do dano, levando em conta a recuperação da rigidez devido ao fechamento da fissura e o atrito nas faces delas.

Ao longo dos anos, diversos outros trabalhos foram publicados propondo melhorias nos modelos, diferentes formulações para problemas específicos e a comparação entre os modelos já consagrados. Podem ser citados:

- d’Avila (2003) que apresenta um estudo sobre dois modelos de fissuração, um distribuído com o uso de um diagrama tensão-deformação multilinear, e outro incorporado com descontinuidades no campo de deslocamento do elemento finito.
- Menin *et al.* (2009) que comparam diferentes estratégias de implementação computacional de modelos de fissuração distribuída através dos programas DIANA e VecTor2.
- Penna (2011) que propõe uma formulação teórica e computacional capaz de contemplar diversos modelos constitutivos para tratar problemas de degradação elástica, além de propor um novo modelo de dano com múltiplas funções de carregamento.
- Manzoli (2011) que apresenta um estudo a respeito da qualidade e objetividade das soluções obtidas com diferentes formulações de elementos com forte descontinuidade incorporadas. O autor também analisa um modelo contínuo elasto-plástico para representação da formação de descontinuidades em sólidos.
- Wolenski *et al.* (2014) que implementam um modelo de microplanos com deformação equivalente e analisam os resultados para diferentes medidas de deformação equivalente combinadas com distintas leis de evolução de dano.
- Manzoli *et al.* (2016) que apresentam uma técnica de fragmentação de malha e introdução de elementos de interface sólidos com alta razão de aspecto entre os elementos regulares da malha. Uma descrição da formulação de tal elemento de interface também faz parte do trabalho.
- Malekan *et al.* (2018) que empregam o método dos elementos finitos generalizado/estendido para simular nucleação e propagação de fissuras em materiais com

comportamento linear e não linear e estudam diferentes funções de enriquecimento do espaço da solução polinomial para uma melhor modelagem das descontinuidades decorrentes da fissuração e para obtenção de um caminho de propagação da trinca mais preciso.

- Monteiro (2019) que propõe uma estratégia baseada na abordagem global-local do método dos elementos finitos generalizado para descrever o processo de deterioração de meios parcialmente frágeis, como é o caso do concreto, no contexto da mecânica do dano contínuo. A técnica global-local é empregada no trabalho de forma a simular a evolução de fenômenos de deterioração material e sua influência no comportamento global das estruturas.
- Wolff *et al.* (2020) que formulam um modelo de propagação de fissuras baseado no método dos elementos finitos generalizado/extendido que emprega o método de correlação de deslocamento para extração dos fatores de intensidade de tensões, que são parâmetros comumente utilizados na previsão da direção de propagação da fissura. O modelo proposto apresentou resultados satisfatórios de trajetória de fissuras mesmo com o uso de malhas pouco refinadas.
- Faron e Rombach (2020) que faz emprego do método dos elementos finitos extendido para executar análises não lineares de propagação de fissuras por flexão e cisalhamento em vigas de concreto armado.

Cabe ressaltar que no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PEC-UFJF) a modelagem de estruturas de concreto já foi foco de estudo de dois outros trabalhos: Assis (2019) que simula o comportamento termomecânico do concreto quando submetido a altos gradientes de temperatura; e Freitas (2019) que propõe um modelo capaz de simular o comportamento estático e dinâmico de lajes de concreto armado fissuradas. Ambos os trabalhos utilizam o modelo de dano escalar de Mazars (1984).

Face à grande variedade de modelos constitutivos para o concreto disponíveis na literatura, cada um com seus aspectos positivos e negativos, foram observados diversos fatores para a escolha dos modelos a serem analisados no presente trabalho, com foco para o comportamento mecânico do concreto fissurado, dentre eles: recomendações de autores recentes; bons resultados obtidos com o modelo; facilidade para implementação computacional; aplicação do modelo em diferentes problemas. Assim, optou-se pelo estudo e implementação de dois modelos de fissuração: um discreto e outro distribuído. O modelo de fissuração discreta é baseado na inserção, na malha de elementos finitos, de elementos de interface denominados IE5 e propostos por Coutinho *et al.* (2003), que permitem a separação de elementos adjacentes e reproduzem a queda de rigidez da região fissurada. Foi proposta uma modificação na maneira de calcular a abertura desse elemento de interface e também um padrão de inserção para quando as tensões principais nos elementos contínuos

superassem um determinado valor. O modelo de fissuração distribuída é baseado na inversão da flexibilidade com o emprego de uma matriz constitutiva secante local conforme dedução exposta no trabalho de Penna (2011). Nesse modelo é fundamental a utilização de relações tensão-deformação que representem o comportamento do concreto no regime pré e pós crítico, para esforços de tração e compressão.

Por motivos didáticos e tendo em vista a necessidade de se compreender conceitos fundamentais relativos à análise não linear de estruturas para um melhor entendimento dessa dissertação, faz-se a seguir um resumo sobre esses conceitos, que serão importantes independentemente do modelo de fissuração adotado.

3 ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE ESTRUTURAS

Uma análise linear via elementos finitos só estará adequada para o estudo de um problema da Mecânica dos Sólidos ou Mecânica das Estruturas se forem atendidas as seguintes premissas:

- são verificados pequenos deslocamentos, deformações e rotações dos elementos finitos se comparados com as dimensões originais do problema, permitindo que as condições de equilíbrio possam ser estabelecidas com base na configuração indeformada da estrutura;
- o material deve ter comportamento elástico linear;
- as condições de contorno devem permanecer as mesmas durante a aplicação do carregamento.

Nesse caso, as equações de equilíbrio para uma análise estática podem ser escritas, de forma matricial, de acordo com a Equação (3.1).

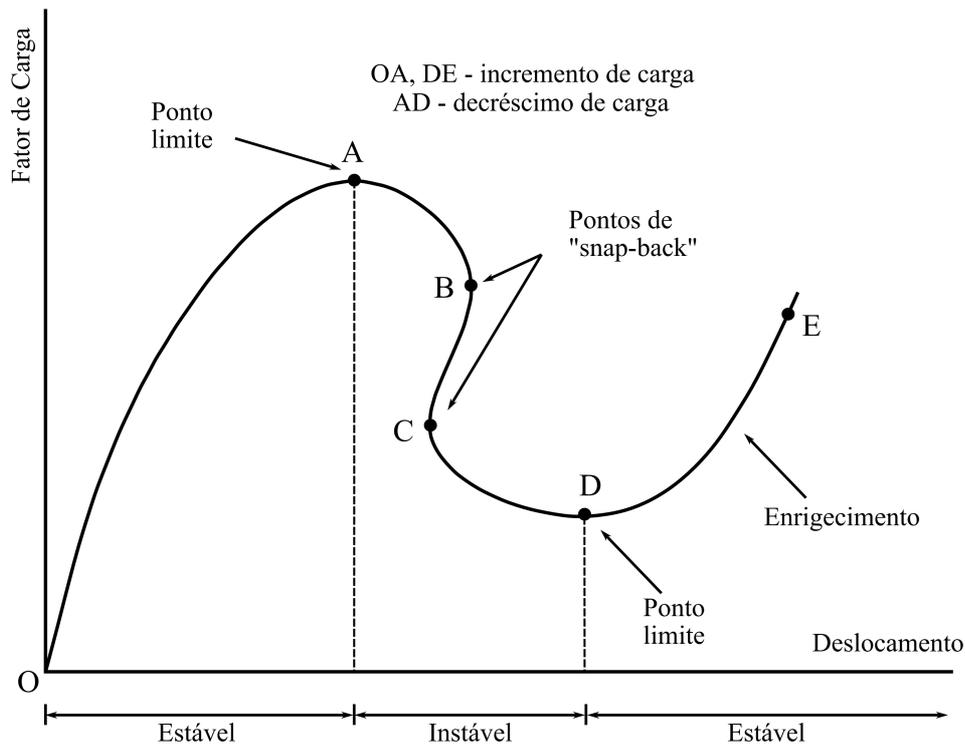
$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{P}\}, \quad (3.1)$$

onde $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $\{\mathbf{U}\}$ é o vetor de deslocamentos e $\{\mathbf{P}\}$ o vetor de cargas externas. Pode-se perceber que o vetor de deslocamentos $\{\mathbf{U}\}$ é diretamente proporcional ao vetor de cargas externas $\{\mathbf{P}\}$, ou seja, caso o carregamento seja alterado para $\lambda\{\mathbf{P}\}$, onde λ é uma constante, os deslocamentos correspondentes serão dados pelo vetor $\lambda\{\mathbf{U}\}$. Quando essa relação não for verdadeira, será necessário realizar uma análise não linear.

Em mecânica estrutural, um problema é dito não linear se a rigidez depende dos deslocamentos da estrutura. O comportamento não linear das estruturas geralmente é classificado como geometricamente não linear ou fisicamente não linear. Uma análise geometricamente não linear ocorre quando a rigidez do problema é afetada por um estado excessivo de deformação, de modo que as equações de equilíbrio com base na geometria inicial se tornam inadequadas, devendo ser formuladas novas equações de equilíbrio para a configuração deformada da estrutura. Uma análise fisicamente não linear ocorre quando a resposta do material depende do estado de deformação a que ele está submetido e essa resposta é regida por uma lei não linear, como é o caso das relações tensão-deformação do concreto. No presente trabalho, serão estudados problemas fisicamente não lineares, não sendo abordada a não linearidade geométrica.

O método dos elementos finitos é uma ferramenta essencial na modelagem de problemas não lineares, tanto físicos quanto geométricos, permitindo a resolução do sistema de equações não lineares através de métodos de obtenção das trajetórias de equilíbrio. Um exemplo de trajetória de equilíbrio de um problema não linear é apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Características gerais de uma trajetória de equilíbrio



Fonte: Penna (2011).

Na figura 2 pode-se notar a presença de trechos com diminuição e outros com aumento da rigidez durante o processo de carregamento. Os pontos A e D são chamados de pontos limites de carga, enquanto os pontos B e C são chamados de pontos limites de deslocamentos e definem uma região com ocorrência do fenômeno de *snap-back*, onde são registrados decréscimos de deslocamentos com decréscimo do fator de carga. Os trechos OA e DE apresentam incrementos no fator de carga e são regiões estáveis. Já o trecho AD é marcado por um decréscimo do fator de carga, sendo uma região de instabilidade.

Fuina (2004) aponta que existem diversos procedimentos propostos na literatura para obtenção da solução de um problemas não lineares que atenda aos requisitos impostos pelas relações cinemáticas, as condições de equilíbrio e o modelo do material. Tais procedimentos permitem a construção da curva de equilíbrio dos graus de liberdade de interesse e, de modo geral, envolvem um processo incremental-iterativo que permite controlar uma variável ou um grupo de variáveis do problema.

Yang e Shieh (1990) destaca, ainda, que os métodos de solução de problemas não

lineares devem ser capazes de atender a três critérios básicos: mudar, de forma automática, o sinal do incremento de carga quando verificados pontos limites; manter a estabilidade numérica em todas as regiões, inclusive aquelas próximas aos pontos críticos; ajustar adequadamente o tamanho do passo incremental de forma a refletir o enrijecimento ou amolecimento da estrutura.

Nesse contexto, existem diferentes métodos incrementais-iterativos para a resolução do problema de análise não linear de estruturas, sendo de responsabilidade do analista escolher o mais adequado à situação estudada. Neste trabalho foram implementados os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamento e de controle de deslocamento generalizado, de forma que todos os problemas estudados puderam ser avaliados por pelo menos um deles sem a ocorrência de instabilidades numéricas. A seguir serão apresentados os conceitos fundamentais e formulação dos métodos de controle estudados com base no exposto no trabalho de Fuina (2004).

3.1 MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS

Na análise não linear com métodos de controle, o sistema de equações a ser resolvido conta com $(n+1)$ equações, dadas pelas n equações de equilíbrio e 1 equação de restrição do método de controle adotado, e $(n+1)$ incógnitas, sendo elas n deslocamentos incrementais e 1 incremento no fator de carga. Para obter a solução de tal sistema faz-se necessária a utilização de um método incremental-iterativo. Nesse caso, a expressão de equilíbrio incremental correspondente à iteração j do passo i é dada pela Equação (3.2).

$$[\mathbf{K}]_{j-1}^i \{\delta \mathbf{U}\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i, \quad (3.2)$$

onde $[\mathbf{K}]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j-1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{\mathbf{U}\}_j^i$; $\{\delta \mathbf{U}\}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais na iteração j do passo i ; $\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i calculado a partir da equação de restrição do método de controle adotado; $\{\mathbf{P}\}$ é o vetor de cargas de referência; e $\{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j-1$ do passo i .

Definido o método de controle, determina-se um valor para $\delta \lambda_j^i$, necessário para o cálculo de $\{\delta \mathbf{U}\}_j^i$ que pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência $\{\delta \mathbf{U}^P\}_j^i$ e à carga residual $\{\delta \mathbf{U}^Q\}_j^i$. As Equações (3.3), (3.4) e (3.5) trazem os detalhes dessa decomposição.

$$\{\delta \mathbf{U}\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\delta \mathbf{U}^P\}_j^i + \{\delta \mathbf{U}^Q\}_j^i, \quad (3.3)$$

$$[\mathbf{K}]_{j-1}^i \{\delta \mathbf{U}^P\}_j^i = \{\mathbf{P}\}, \text{ e} \quad (3.4)$$

$$[\mathbf{K}]_{j-1}^i \{\delta \mathbf{U}^Q\}_j^i = \{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i. \quad (3.5)$$

A atualização das variáveis referentes ao fator de carga λ_j^i e ao vetor de deslocamentos $\{\mathbf{U}\}_j^i$ é feita através das expressões apresentadas nas Equações (3.6) e (3.7).

$$\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i, \text{ e} \quad (3.6)$$

$$\{\mathbf{U}\}_j^i = \{\mathbf{U}\}_{j-1}^i + \{\delta \mathbf{U}\}_j^i. \quad (3.7)$$

Calculados os deslocamentos e, conseqüentemente, as deformações e tensões no interior dos elementos da malha, é possível determinar o vetor de forças internas $\{\mathbf{F}\}_j^i$ montado a partir das contribuições de cada elemento finito conforme a Equação (3.8).

$$\{\mathbf{F}\}_j^i = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV_e, \quad (3.8)$$

onde V_e é o volume do elemento, $[\mathbf{B}]$ é a matriz dada pelas derivadas parciais das funções de forma dos elementos e $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ é o vetor de tensões.

A integral da Equação (3.8) é calculada numericamente utilizando-se a integração numérica de Gauss. Com o vetor de forças internas, determina-se o vetor de cargas residuais da iteração j do passo i , dado pela Equação (3.9).

$$\{\mathbf{Q}\}_j^i = \lambda_j^i \{\mathbf{P}\} - \{\mathbf{F}\}_j^i. \quad (3.9)$$

Cabe ressaltar, que na primeira iteração de cada passo incremental, o vetor de cargas residuais $\{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i$ é nulo.

Ao final de cada iteração, verifica-se a convergência por meio da magnitude do vetor de forças residuais $\{\mathbf{Q}\}_j^i$, conforme Equação (3.10), ou por meio da magnitude do vetor de deslocamentos incrementais $\{\delta \mathbf{U}\}_j^i$, conforme Equação (3.11).

$$\frac{\|\{\mathbf{Q}\}_j^i\|}{\|\lambda_j^i\{\mathbf{P}\}\|} < \text{tolerância, ou} \quad (3.10)$$

$$\frac{\|\{\delta\mathbf{U}\}_j^i\|}{\|\{\mathbf{U}\}_j^i\|} < \text{tolerância.} \quad (3.11)$$

O procedimento iterativo continua até que o critério de convergência seja satisfeito, passando-se para o próximo passo incremental.

A formulação acima descrita se aplica para diversos métodos de controle sendo necessário apenas que se obedeça a equação de restrição do método para o cálculo do incremento do fator de carga $\delta\lambda_j^i$. Uma forma geral para a equação de restrição é apresentada na Equação (3.12).

$$\{\mathbf{C}\}^T \{\delta\mathbf{U}\}_j^i + k\lambda_j^i = H_j^i, \quad (3.12)$$

onde $\{\mathbf{C}\}$ e k são constantes da equação de restrição e H_j^i é o parâmetro incremental de controle da iteração j do passo i . A escolha dessas constantes e parâmetro são fundamentais para a confiabilidade e eficiência do esquema de solução não linear. A seguir serão descritos os métodos de controle empregados nesse trabalho.

3.1.1 Controle de Carga

No método de controle de carga as iterações são executadas a uma carga constante. Para tal, a carga externa é incrementada de um valor constante somente na primeira iteração de cada passo ($j = 1$). Nas demais iterações ($j > 1$), o incremento de carga é igual a zero. Essas condições são equivalentes a atribuir na Equação (3.12) os seguintes valores: $\{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\}$, $k = 1$ e H_1^i é o incremento de carga prescrito, sendo $H_j^i = 0$ quando $j > 1$.

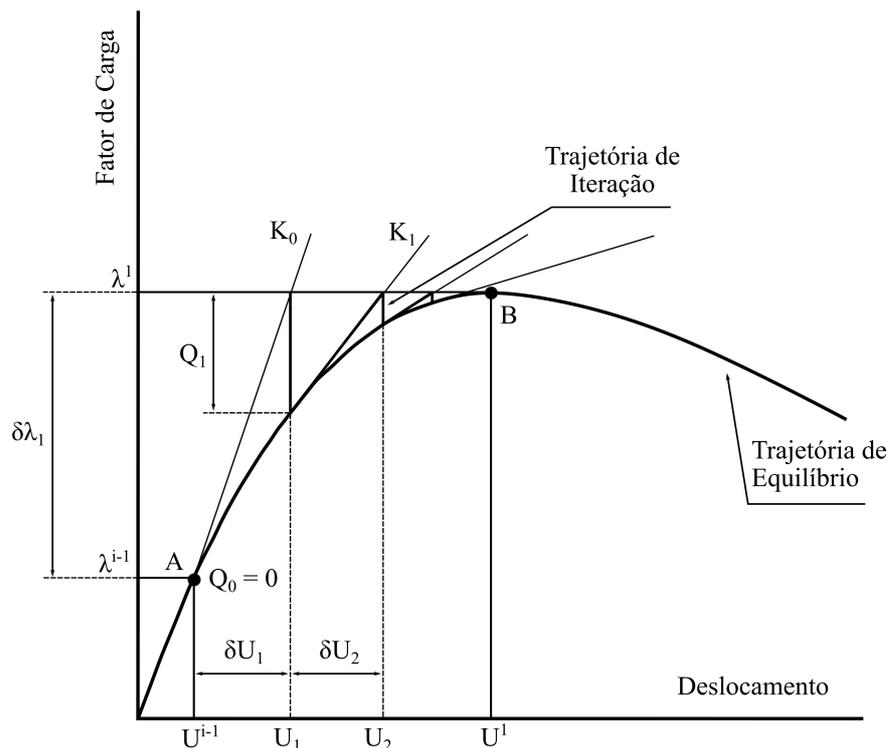
De maneira geral, o valor de $\delta\lambda_j^i$ pode ser definido pela Equação (3.13).

$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \text{incremento de carga prescrito,} & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Fuina (2004) traz um esquema do processo incremental-iterativo com controle de carga que é apresentado na Figura 3. Nela pode-se perceber que, após atingida a carga máxima representada pelo ponto B, a trajetória de iteração não mais cruzará a

trajetória de equilíbrio. Como o carregamento externo é mantido constante, este método não permite uma troca do sinal do fator de carga. Ou seja, a partir do ponto limite de carga, ele não será mais eficiente na obtenção da trajetória de equilíbrio do problema. O método de controle de carga, portanto, não é adequado para aplicação em problemas com pontos limites, devido à ocorrência de instabilidades numéricas em regiões próximas a estes, quando a matriz tangente se aproximará da singularidade.

Figura 3 - Processo incremental-iterativo com controle de carga



Fonte: Fuina (2004).

3.1.2 Controle Direto de Deslocamento

O método de controle de deslocamento foi proposto por Batoz e Dhett (1979) como uma alternativa para resolução dos problemas que não eram possíveis de serem estudados com o método de controle de carga. Nele as iterações são executadas a um deslocamento constante. Uma componente de deslocamento (c), localizada na c -ésima posição do vetor de deslocamentos, é adotada como parâmetro de controle. As variáveis da Equação (3.12) assumem os valores: $\{\mathbf{C}\}^T = \{\mathbf{0} \dots \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}\}^T$, onde todas as componentes do vetor $\{\mathbf{C}\}$ são nulas, exceto a sua c -ésima componente, $k = 0$ e H_1^i é o incremento de deslocamento prescrito, sendo $H_j^i = 0$ quando $j > 1$. O incremento de deslocamento $\{\delta \mathbf{U}^k\}_j^i$ dessa componente c é dado pela Equação (3.14).

$$\delta U_j^c = \begin{cases} \text{incremento de deslocamento prescrito,} & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Tomando como base a equação (3.3) e substituindo o vetor de deslocamentos incrementais por sua componente c , obtém-se que o incremento do fator de carga $\delta\lambda_j^i$ deve atender à Equação (3.15).

$$\delta\lambda_j = \frac{\delta U_j^c - \delta U_j^{Qc}}{\delta U_j^{Pc}}, \quad (3.15)$$

Como na primeira iteração de cada passo incremental, o vetor de cargas residuais $\{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i$ é nulo, os deslocamentos associados a ele também serão nulos, o que significa que $\delta U_1^{Qc} = 0$. E, para as demais iterações $\delta U_j^c = 0$, conforme mostrado na Equação (3.14). Sendo assim, o fator de incremento de carga será dado pela Equação (3.16).

$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \frac{\delta U_j^c}{\delta U_j^{Pc}}, & \text{para } j = 1 \\ \frac{-\delta U_j^{Qc}}{\delta U_j^{Pc}}, & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

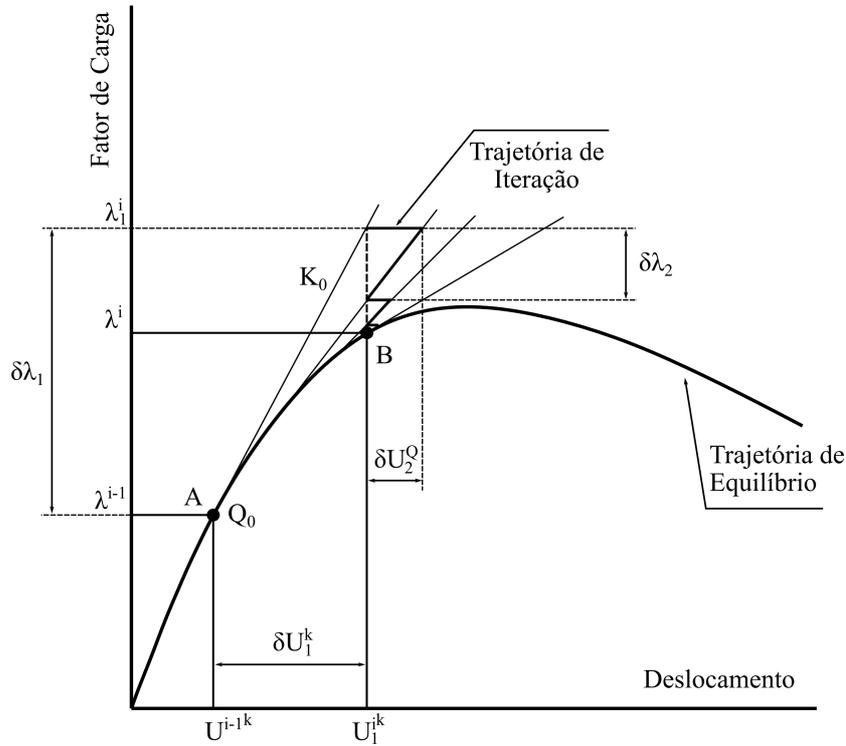
Como o método exige a determinação de um grau de liberdade para o controle do seu deslocamento, é necessário um estudo prévio do problema a ser analisado para uma escolha adequada. Além disso, a experiência do usuário será importante nesse momento. Fuina (2004) traz um esquema do processo incremental-iterativo com controle de deslocamentos que é apresentado na Figura 4.

Ao contrário do método de controle de carga, o controle de deslocamento funciona bem nas proximidades dos pontos limites de carga. No entanto, ao se aproximar de pontos limites de deslocamento, δU^{Pc} tenderá a zero, fazendo com que $\delta\lambda$ tenda ao infinito, o que pode ser notado pela Equação (3.16). Sendo assim, instabilidades numéricas irão ocorrer com o uso do método de controle de deslocamento próximo a pontos de *snap-back*.

3.1.3 Controle de Deslocamento Generalizado

Tendo em vista os problemas apontados dos métodos de controle de carga e deslocamento nas proximidades dos pontos críticos da curva de equilíbrio, Yang e Shieh (1990) propôs o método de controle de deslocamento generalizado, que se mostrou eficaz até mesmo em problemas com diversos pontos limites e pontos de *snap-back*. O seu objetivo é automatizar o ajuste do tamanho do passo incremental, o que é feito a partir

Figura 4 - Processo incremental-iterativo com controle de deslocamento



Fonte: Fuina (2004).

do acompanhamento da variação da rigidez e da troca de sinal do incremento de carga quando verificados pontos críticos.

A proposta do método é relacionar deslocamentos incrementais em dois passos sucessivos, adotando como parâmetros da equação de restrição (3.12) os valores: $k = 0$, $\{\mathbf{C}\} = \delta\lambda_1^i \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T}$ e H_j^i é um deslocamento generalizado que assume um valor preestabelecido na primeira iteração ($j = 1$) e é nulo nas demais ($j > 1$). Assim, obtém-se a expressão mostrada na Equação (3.17) para o incremento do fator de carga.

$$\delta\lambda_j^i = \frac{H_j^i - \lambda_1^i \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i}{\lambda_1^i \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i}, \quad (3.17)$$

onde $\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1}$ é o incremento de deslocamento resultante da primeira iteração do último passo incremental.

Uma vez que $\{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i = \{\mathbf{0}\}$ para $j = 1$, o incremento do fator de carga na primeira iteração assume a forma da Equação (3.18).

$$\delta\lambda_1^i = \left(\frac{H_1^i}{\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i} \right)^{0.5}. \quad (3.18)$$

E, para as demais iterações, como $H_j^i = 0$ para $(j > 1)$, tal incremento pode ser calculado pela Equação (3.19).

$$\delta\lambda_j^i = \frac{-\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i}{\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i}, \quad \text{para } j > 1. \quad (3.19)$$

Para $i = 1$ será adotado que $\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^0 = \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^1$. Assim, da Equação (3.18) obtém-se a Equação (3.20).

$$H_1^i = (\delta\lambda_1^1)^2 \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^1, \quad (3.20)$$

que pode ser substituído novamente na Equação (3.18) levando à Equação (3.21).

$$\delta\lambda_1^i = \delta\lambda_1^1 \left(\frac{\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^1}{\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_1^i} \right)^{0.5}, \quad \text{para } j = 1. \quad (3.21)$$

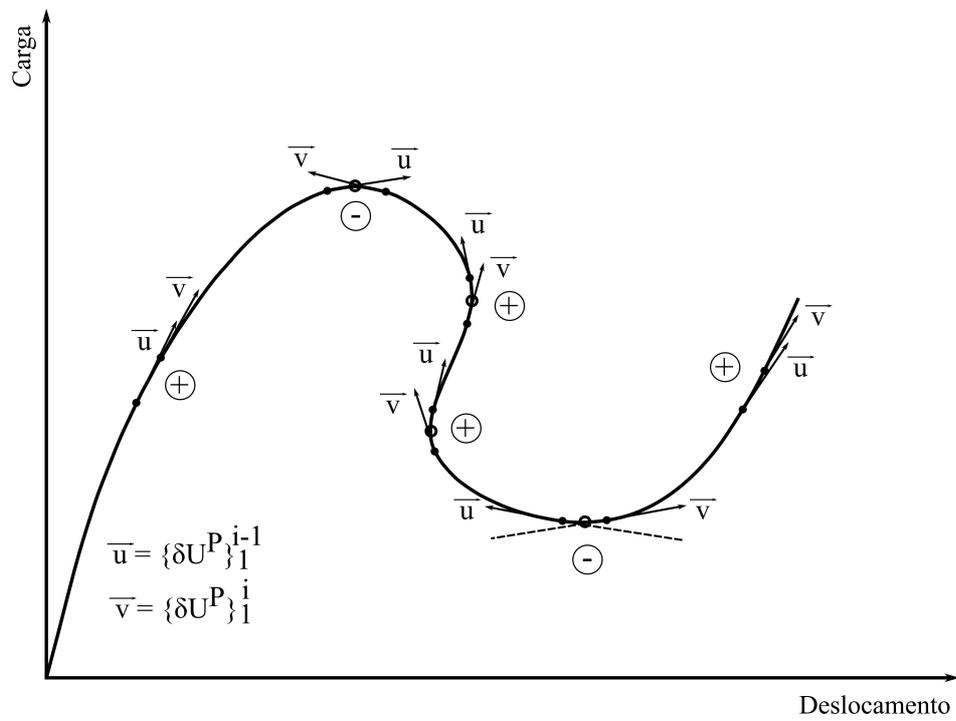
Agora, atribuindo ao termo entre parênteses na Equação (3.21) o nome de parâmetro de rigidez generalizado ou *GSP* (do inglês, *generalized stiffness parameter*), será possível definir o incremento do fator de carga, para a primeira iteração de qualquer passo incremental, da forma mostrada na Equação (3.22).

$$\delta\lambda_1^i = \pm \delta\lambda_1^1 \|GSP\|^{0.5}, \quad (3.22)$$

onde o sinal de $\delta\lambda_1^i$ deve ser o mesmo do *GSP*.

Da maneira como foi definido, o numerador do *GSP* representa os deslocamentos no primeiro passo incremental e o seu denominador representa, aproximadamente, os deslocamentos no passo atual, fazendo com que tal parâmetro seja representativo da variação da rigidez da estrutura. Além disso, ele é capaz de fornecer a mudança no sinal do incremento de carga, por assumir valores negativos somente próximo aos pontos limites, o que pode ser notado no esquema da Figura 5.

Figura 5 - Característica do GSP



Fonte: Adaptada de Yang e Shieh (1990).

4 MODELOS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

No presente capítulo serão descritos os modelos computacionais adotados para a análise das estruturas de concreto. O trabalho é baseado no desenvolvimento de dois modelos, um de fissuração discreta e outro de fissuração distribuída como será detalhado a seguir.

4.1 MODELO DE FISSURAÇÃO DISCRETA

Os modelos de fissuração discreta consideram uma estrutura íntegra até atingida a resistência última do material que determina a formação e propagação das fissuras. Em um modelo de elementos finitos, a representação das trincas é feita a partir da associação de elementos contínuos com elementos de ligação ou elementos de interface, sendo preciso redefinir a malha para acompanhar a formação e evolução das fissuras. Geralmente são apontados como pontos negativos desse modelo a necessidade de reestruturação da malha, o que gera um custo computacional à análise, e o fato de que as fissuras ficam restritas às arestas dos elementos, limitando sua direção de propagação.

O modelo discreto adotado neste trabalho é baseado em malhas que, inicialmente, são formadas apenas por elementos isoparamétricos triangulares contínuos. A cada iteração são verificados os valores das tensões principais em cada um desses elementos e, se constatadas tensões superiores à resistência à tração do material, são inseridas interfaces nas faces desses elementos localizadas perpendicularmente (ou à face mais próxima à perpendicularidade) à direção de tais tensões.

4.1.1 Elemento de interface

Elementos de interface são empregados com o objetivo de permitir o deslocamento relativo entre superfícies em contato ou separadas por uma fina camada e simular o comportamento dessa região. Diferentes tipos de elementos de interface podem ser formulados para sua adequação à natureza do problema estudado. As relações constitutivas podem incluir escorregamento ou não entre elementos, sua separação e possível reconexão. Para representar o processo de fissuração em estruturas, o elemento de interface deve ser capaz de permitir a separação de elementos adjacentes da malha de acordo com as propriedades do material e os esforços atuantes na região.

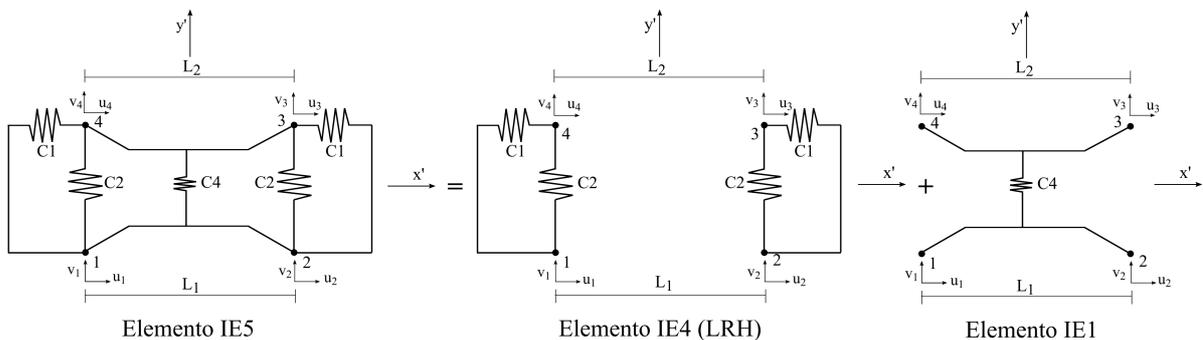
O primeiro trabalho que registra a inserção de elementos de interface na malha de elementos finitos é o de Goodman *et al.* (1968). Neste, os autores percebem como tais elementos influenciam na distribuição de tensões, deslocamentos e padrões de falha a partir de um estudo em blocos de rochas. Hoje em dia, os elementos de interface são importantes ferramentas na representação de descontinuidades geométricas e problemas de contato.

As aplicações são amplas, abrangendo processo de fissuração, interação solo-estrutura, evolução de dano em estruturas e pavimentos, previsão do comportamento de dois corpos em contato, entre outras.

O elemento de interface adotado no presente trabalho foi o IE5 (do inglês, *Interface Element with five springs*), proposto por Coutinho *et al.* (2003), que é obtido a partir da adição de uma mola vertical no centro do elemento de interface apresentado por Herrmann (1978), aqui denominado LRH. A escolha do IE5 foi devido ao fato se tratar de um elemento de fácil implementação, com a matriz de rigidez determinada diretamente, sem a necessidade de integração numérica, o que reduz o custo computacional. Além disso, o trabalho original apresenta resultados cinematicamente consistentes com o uso de tal elemento de maneira isolada e sua aplicação com sucesso em um problema em que ele é inserido entre barras e um meio contínuo para simular o comportamento de aderência da barra em um ensaio de *pull-out*. Porém, salvo melhor juízo, até o momento o IE5 não foi usado em problemas de fissuração de estruturas de concreto, o que acarreta uma série de ajustes que serão aqui detalhados.

Um esquema da composição do elemento IE5 pode ser visualizado na Figura 6. Na imagem, o elemento central é o LRH que possui quatro molas conectando suas faces superior e inferior. Ele é combinado a um elemento com apenas uma mola central, chamado de IE1 (do inglês, *Interface Element with one spring*), originando o elemento IE5, representado na esquerda da imagem.

Figura 6 - Composição do elemento IE5



Fonte: Adaptada de Coutinho *et al.* (2003).

Na Figura 6, as variáveis u_n e v_n , com $n = 1, 2, 3, 4$, referem-se aos deslocamentos dos nós 1, 2, 3 e 4 nas direções x' e y' , respectivamente; C_1 , C_2 e C_4 são os coeficientes de rigidez das molas que compõem o elemento; L_1 é a distância entre os nós 1 e 2; e L_2 é a distância entre os nós 3 e 4. O vetor de deslocamentos do elemento de interface fica definido pela Equação (4.1).

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Os comprimentos das faces inferior e superior do elemento, L_1 e L_2 respectivamente, são obtidos com a aplicação das Equações (4.2) e (4.3).

$$L_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ e} \quad (4.2)$$

$$L_2 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \quad (4.3)$$

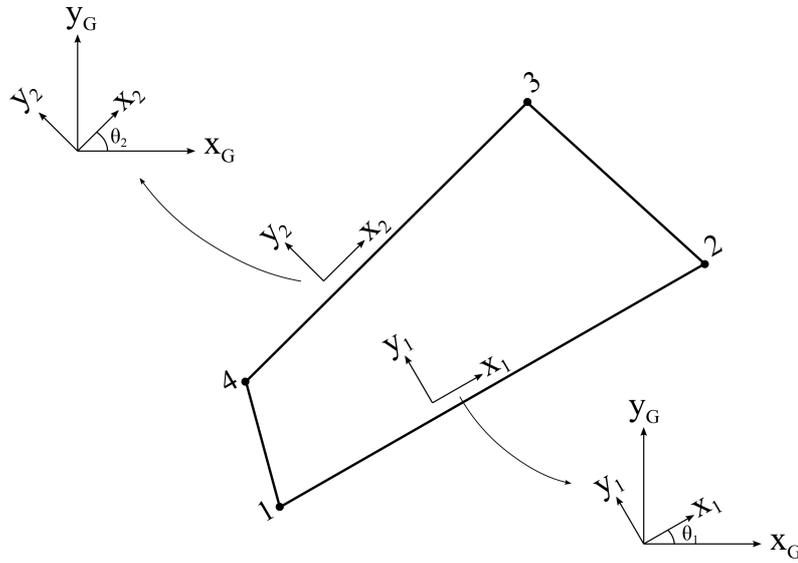
A matriz de rigidez do elemento IE5 resulta da soma direta das matrizes de rigidez dos dois elementos com os quais ele é formado e é dada em termos dos coeficientes de rigidez das molas nele presentes. Ela é definida conforme apresentado na Equação (4.4), para os eixos locais $x'y'$ mostrados na Figura 6.

$$[\mathbf{K}_L] = \begin{bmatrix} C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & C2 + C4/4 & 0 & C4/4 & 0 & -C4/4 & 0 & -(C2 + C4/4) \\ 0 & 0 & C1 & 0 & -C1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C4/4 & 0 & C2 + C4/4 & 0 & -(C2 + C4/4) & 0 & -C4/4 \\ 0 & 0 & -C1 & 0 & C1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C4/4 & 0 & -(C2 + C4/4) & 0 & C2 + C4/4 & 0 & C4/4 \\ -C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C1 & 0 \\ 0 & -(C2 + C4/4) & 0 & -C4/4 & 0 & C4/4 & 0 & C2 + C4/4 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Deve-se considerar a possibilidade de rotação do elemento de interface, o que é comum na simulação das fissuras. Essa rotação pode ocorrer já no momento da inserção da interface na malha e, nesse caso, ambas as faces do elemento terão a mesma inclinação, ou a rotação pode ocorrer devido a deslocamentos diferenciais dos nós, fazendo com que as faces do elemento possuam inclinações diferentes, como é o caso apresentado na Figura 7.

Na Figura 7, x_G e y_G representam os eixos coordenados globais, x_1 e y_1 são os eixos locais da face 1 da interface formada pelo segmento que conecta o nó 1 ao nó 2, x_2 e y_2

Figura 7 - Rotação do elemento IE5



Fonte: Elaborada pela autora.

são os eixos locais da face 2 da interface formada pelo segmento que liga os nós 4 e 3, e θ_1 e θ_2 são os ângulos formados entre as faces 1 e 2 do elemento de interface com os eixos globais, respectivamente.

O cálculo da matriz de rotação do elemento é realizado conforme a Equação (4.5).

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & \text{sen}(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde os valores de senos e cossenos podem ser calculados diretamente a partir das coordenadas dos nós do elemento como apresentado nas Equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9).

$$\cos(\theta_1) = \frac{x_2 - x_1}{L_1}, \quad (4.6)$$

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{y_2 - y_1}{L_1}, \quad (4.7)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x_3 - x_4}{L_2}, \text{ e} \quad (4.8)$$

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{y_3 - y_4}{L_2}. \quad (4.9)$$

E a matriz de rigidez no referencial global será dada pela Equação (4.10).

$$[\mathbf{K}_G] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_L] [\mathbf{R}]. \quad (4.10)$$

Para garantir consistência dos deslocamentos obtidos com o elemento IE5 e os elementos IE1 e LRH é necessário que os coeficientes $C1$, $C2$ e $C4$ atendam às relações exibidas nas Equações (4.11), (4.12) e (4.13).

$$C1 = \frac{D_{11} L_{\text{médio}}}{2}, \quad (4.11)$$

$$C2 = \frac{D_{22} L_{\text{médio}}}{6}, \text{ e} \quad (4.12)$$

$$C1 = 4C2, \quad (4.13)$$

onde $L_{\text{médio}}$ refere-se à média aritmética simples entre as medidas L_1 e L_2 mostrados na Figura 6 e D_{11} e D_{22} são valores da matriz constitutiva do elemento de interface que é apresentada na Equação (4.14).

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} G/h & 0 \\ 0 & E/h \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material, E é o seu módulo de elasticidade, ou módulo de Young e h é a espessura do elemento alterada por uma penalização. No presente trabalho, propõe-se que o cálculo do valor de h seja realizado da forma mostrada na Equação (4.15).

$$h = \frac{L_{m\u00e9dio}}{\alpha}, \quad (4.15)$$

onde α \u00e9 um fator de penalidade que deve variar de acordo com a tens\u00e3o no elemento de interface. Percebe-se que, para valores elevados de α , tem-se valores baixos de h e, conseq\u00fcentemente, os termos da matriz constitutiva $[\mathbf{D}]$ e da matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ do elemento s\u00e3o elevados. O oposto ocorre quando s\u00e3o considerados valores baixos para o par\u00e2metro α . Dessa forma, o par\u00e2metro de penalidade funciona de maneira a simular a degrada\u00e7\u00e3o no material sob o efeitos de esfor\u00e7os de tra\u00e7\u00e3o.

Diante do exposto, adotou-se um padr\u00e3o emp\u00edrico de varia\u00e7\u00e3o de α de acordo com valores m\u00e9dios e caracter\u00edsticos de resist\u00eancia \u00e0 tra\u00e7\u00e3o para concretos de classe at\u00e9 C50, dados pela norma brasileira ABNT NBR 6118 (2014). Tais valores podem ser calculados utilizando-se as Equa\u00e7\u00f5es (4.16), (4.17) e (4.18).

$$f_{ct,m} = 0.3f_{ck}^{2/3}, \quad (4.16)$$

$$f_{ctk,inf} = 0.7f_{ct,m}, \text{ e} \quad (4.17)$$

$$f_{ctk,sup} = 1.3f_{ct,m}, \quad (4.18)$$

onde $f_{ct,m}$ \u00e9 o valor m\u00e9dio da resist\u00eancia \u00e0 tra\u00e7\u00e3o direta do concreto, f_{ck} \u00e9 a resist\u00eancia caracter\u00edstica \u00e0 compress\u00e3o do concreto, $f_{ctk,inf}$ \u00e9 a resist\u00eancia caracter\u00edstica inferior do concreto \u00e0 tra\u00e7\u00e3o e $f_{ctk,sup}$ \u00e9 a resist\u00eancia caracter\u00edstica superior do concreto \u00e0 tra\u00e7\u00e3o.

Atrav\u00e9s da compara\u00e7\u00e3o da tens\u00e3o normal no elemento de interface com estes valores \u00e9 definido o valor apropriado para α , conforme definido na Tabela 1. Todos os elementos de interface s\u00e3o inicializados com o maior α , simulando uma estrutura \u00edntegra. Com os incrementos de carga e conseq\u00fcentemente o desenvolvimento das tens\u00f5es, \u00e9 avaliado em que intervalo estas tens\u00f5es se enquadram e atribu\u00eddo o respectivo valor ao par\u00e2metro de penalidade.

Cabe ressaltar que as tens\u00f5es no interior do elemento de interface s\u00e3o calculadas em fun\u00e7\u00e3o dos deslocamentos nodais $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)$, conforme deduzido por Coutinho *et al.* (2003) e exposto nas Equa\u00e7\u00f5es (4.19) e (4.20). O eixo $x'y'$ refere-se ao eixo local apresentado na Figura 6. A componente de tens\u00e3o normal $\sigma_{x'}$ \u00e9 considerada nula e as tens\u00f5es s\u00e3o assumidas constantes ao longo do elemento.

Tabela 1 – Padrão proposto para a variação do parâmetro α

Tensão normal $\sigma_{y'}$ no elemento de interface (MPa)	Valor de α
≤ 0	10^6
> 0 e $\leq f_{ctk,inf}$	10^6
$> f_{ctk,inf}$ e $\leq f_{ct,m}$	10^4
$> f_{ct,m}$ e $\leq f_{ctk,sup}$	10^2
$> f_{ctk,sup}$	1

Fonte: Elaborada pela autora.

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{L_{m\u00e9dio}} \left(C2 + \frac{C4}{4} \right) (v_3 + v_4 - v_1 - v_2), \text{ e} \quad (4.19)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{L_{m\u00e9dio}} C1 (u_3 + u_4 - u_1 - u_2). \quad (4.20)$$

4.1.2 Esquema de inser\u00e7\u00e3o dos elementos de interface

No modelo de fissura\u00e7\u00e3o discreta a malha empregada no in\u00edcio da simula\u00e7\u00e3o \u00e9 formada apenas por elementos triangulares isoparam\u00e9tricos, sendo os elementos de interface inseridos ao longo das itera\u00e7\u00f5es quando verificados n\u00edveis de tens\u00e3o superiores \u00e0 resist\u00eancia \u00e0 tra\u00e7\u00e3o do concreto. Os elementos cont\u00ednuos triangulares foram escolhidos para que fosse poss\u00edvel a representa\u00e7\u00e3o de fissuras inclinadas e n\u00e3o apenas de fissuras horizontais ou verticais, o que aconteceria caso os elementos da malha fossem retangulares ou quadrados, por exemplo.

Foi adotado como crit\u00e9rio para redefini\u00e7\u00e3o da malha de elementos finitos e inser\u00e7\u00e3o das interface o crit\u00e9rio da m\u00e1xima tens\u00e3o principal. Ou seja, quando a tens\u00e3o principal m\u00e1xima no elemento atinge a tens\u00e3o normal m\u00e1xima que o material pode suportar \u00e9 adicionado um elemento de interface para permitir um deslocamento relativo entre esse elemento e seu adjacente.

A cada itera\u00e7\u00e3o do m\u00e9todo incremental-iterativo adotado na an\u00e1lise n\u00e3o linear s\u00e3o calculadas as tens\u00f5es normais e tangenciais correntes nos elementos da malha. Cada elemento triangular est\u00e1 associado a um campo de tens\u00f5es no ponto de Gauss empregado no momento da integra\u00e7\u00e3o num\u00e9rica. A partir de cada tensor de tens\u00f5es s\u00e3o obtidas as tens\u00f5es principais atuantes no elemento e suas respectivas dire\u00e7\u00f5es. No momento em que \u00e9 verificada, em algum elemento triangular, uma tens\u00e3o principal superior ao valor predefinido de resist\u00eancia do concreto \u00e0 tra\u00e7\u00e3o, o c\u00f3digo de an\u00e1lise n\u00e3o linear \u00e9 interrompido para que seja feita uma redefini\u00e7\u00e3o da malha de elementos finitos.

A incorpora\u00e7\u00e3o da interface na malha baseia-se na premissa de que as fissuras surgir\u00e3o em uma dire\u00e7\u00e3o normal \u00e0 dire\u00e7\u00e3o da tens\u00e3o que superou a resist\u00eancia do material.

Sendo assim, o primeiro passo é determinar em qual ou em quais arestas do elemento triangular se dará a duplicação de nós para receber o elemento de interface. Para tal, é calculado o vetor diretor de cada uma das três arestas do elemento e o ângulo formado entre eles e a direção da tensão principal. Aqui foi adotada uma tolerância de $\pm 15^\circ$, ou seja, qualquer aresta que forme um ângulo de 75° a 105° com a direção principal será selecionada. No caso de nenhuma aresta ser selecionada por este critério, é automaticamente selecionada a aresta com ângulo mais próximo de 90° com a direção principal, independente do seu valor.

Para cada aresta que foi selecionada, é feita uma verificação se já existe elemento de interface nela. Essa verificação é necessária já que uma mesma aresta pode pertencer a mais de um elemento e, também, pode ser que determinada aresta de um dado elemento seja selecionada mais de uma vez em diferentes iterações.

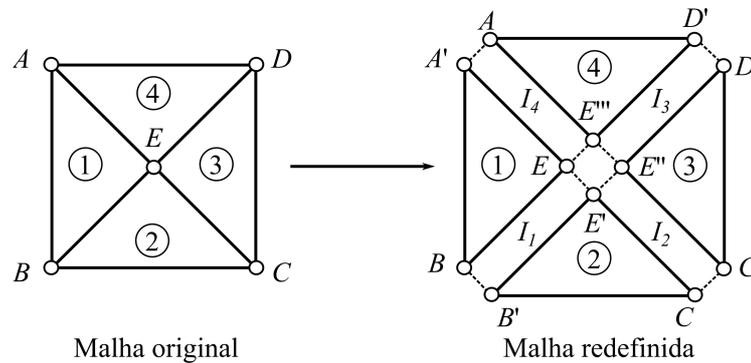
Não sendo verificada a existência de interface na aresta selecionada, é possível passar para o próximo passo que é a inserção do elemento de interface propriamente dito. Como o elemento de interface IE5 adotado no trabalho possui quatro nós, sendo que, inicialmente, eles estão sobrepostos dois a dois, é necessário que os dois nós que compõem a aresta sejam duplicados. Os dois novos nós recebem as coordenadas desses nós da malha original, apenas com numeração diferente. E a conectividade do elemento de interface é definida com os dois nós da aresta do elemento triangular e os dois nós recém-criados organizados em sentido anti-horário, conforme esquema mostrado na Figura 6.

Como os nós devem ser duplicados sempre que houver acréscimo de interface na malha, para que se possibilite a separação de elementos contínuos, e como cada nó da malha pertence a pelo menos dois elementos distintos, é possível ter, após a redefinição da malha, diversos nós de mesma coordenada. A Figura 8 apresenta a forma como foi pensada a inclusão dos elementos IE5 na malha entre elementos vizinhos. Cabe ressaltar que a separação dos lados da interface na imagem é apenas para facilitar a visualização do elemento que, inicialmente pode ser considerado unidimensional, com espessura tendendo a zero.

Na Figura 8, os elementos contínuos estão representados pelas notações ①, ②, ③ e ④; as siglas I_1 , I_2 , I_3 e I_4 representam os elementos de interfaces; e A , B , C , D e E são os nós da malha original e os nós que se originaram destes foram nomeados com a mesma letra do nó primário sobrescrita de um sinal ', " ou "' marcando o seu número de duplicações.

O padrão adotado é de que a interface é inserida no exterior do elemento triangular em que foi identificada a tensão que supera a resistência limite do material, sendo assim, as conectividades deste elemento se mantêm as mesmas. Porém, os elementos localizados acima ou abaixo dele, e que compartilham os nós da aresta original que foram duplicados, após a inserção da interface estarão conectados à malha através dos novos nós, para

Figura 8 - Esquema de inserção do elemento de interface



Fonte: Elaborada pela autora.

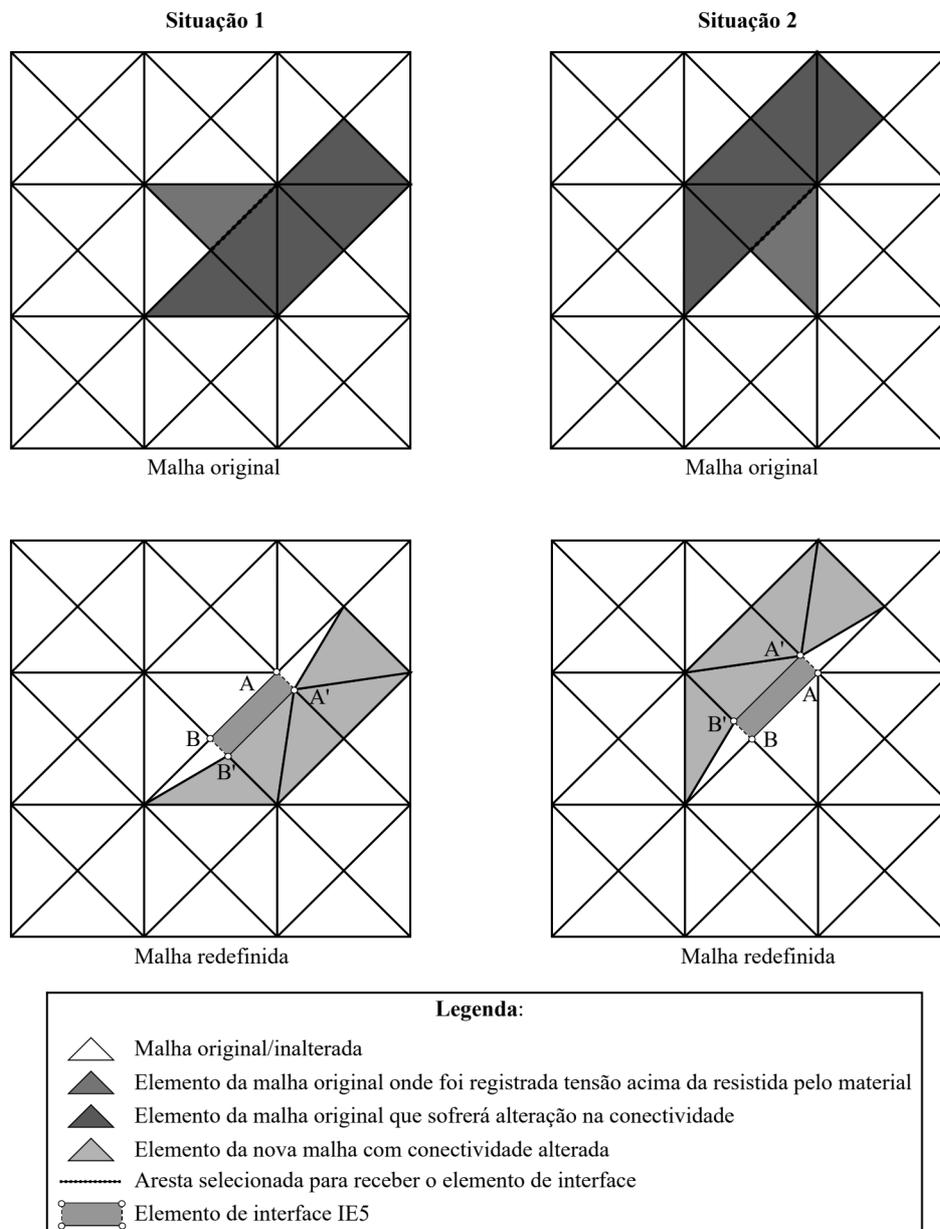
permitir a separação entre os elementos e a abertura da fissura. A Figura 9 mostra um trecho da malha original e como ficará a sua configuração após a inserção de interfaces na mesma aresta, devido ao elevado valor da tensão em dois elementos distintos.

Após a redefinição da malha são calculados os seus números totais de nós, elementos e graus de liberdade para fins de cálculo. Então, os nós criados recebem as mesmas coordenadas dos nós bases da malha original, bem como seus deslocamentos acumulados $\{\mathbf{U}\}$, suas condições de contorno e cargas residuais $\{\mathbf{Q}\}$. Adotou-se uma restrição à inserção de elementos de interfaces em locais com carga externas aplicadas. Assim a carga de referência $\{\mathbf{P}\}$ nos graus de liberdade dos novos nós sempre receberá valores nulos. Não há alteração no vetor de forças internas $\{\mathbf{F}\}$ devido à interface, porque foi considerado que as forças internas atuantes na mesma são nulas. Como $\{\mathbf{F}\}$ é calculado de forma independente a cada iteração, na próxima iteração ele será montado de acordo com as tensões no elementos contínuos triangulares, que abrangem todos os graus de liberdade do problema, sendo desprezada qualquer contribuição dos elementos de interface.

Assim, definidos os deslocamentos para todos os nós que compõem o elemento de interface inserido e inicializando o seu parâmetro de penalidade α em seu maior valor, é possível calcular as tensões iniciais atuando na interface. De acordo com o nível de tensões obtido pode já ser necessária uma atualização do valor de α de acordo com a variação proposta na Tabela 1.

Com todas as alterações feitas, retorna-se ao código de análise não linear que segue as iterações e passos incrementais até que seja verificada novamente alguma tensão superior à resistida pelo material e o programa recaia no código de inserção dos elementos de interface para nova redefinição da malha de elementos finitos.

Figura 9 - Elementos afetados pela inserção da interface



Fonte: Elaborada pela autora.

4.2 MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

Os modelos de fissuração distribuída consideram que a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é distribuída ao longo do elemento. Para tanto, eles se baseiam em relações tensão-deformação que consideram a queda de rigidez do material a partir de determinado nível de deformação, o que impacta diretamente nas suas propriedades físicas e, portanto, em sua rigidez. Uma deficiência desse modelo é sua dificuldade em representar problemas de fissuras localizadas.

O modelo distribuído adotado neste trabalho baseia-se em uma matriz constitutiva secante local obtida a partir da inversão da matriz de flexibilidade simétrica para problemas em estado plano de tensão. Além disso, o modelo depende da adoção de leis tensão-deformação representativas do comportamento do material, capazes de computar a degradação das suas propriedades físicas. Para tal, foram usadas as relações propostas por Boone e Ingraffea (1987), Carreira e Chu (1985), Carreira e Chu (1986) e Kaklauskas (1998).

4.2.1 Modelo de fissuração

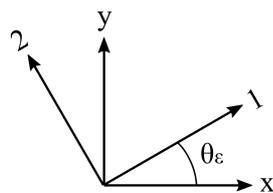
O modelo de fissuração distribuída empregado depende da utilização de uma matriz constitutiva secante local que leva em conta o módulo de elasticidade inicial do material, seu módulo de elasticidade em cada uma das direções principais no estado de deformação corrente, o valor do coeficiente de Poisson que é mantido constante durante toda a análise e seu módulo de elasticidade transversal que é escrito em função das demais propriedades citadas. O desenvolvimento dessa matriz será descrito a seguir, tomando como base o exposto no trabalho de Penna (2011).

Primeiramente deve-se considerar a relação apresentada na Equação (4.21) que associa as tensões $\{\sigma_l\}$ e deformações $\{\epsilon_l\}$ em um sistema de coordenadas local, aqui orientado nas direções principais de deformação, em termos da matriz de flexibilidade $[C_l^s]$.

$$\{\epsilon_l\} = [C_l^s]\{\sigma_l\}. \quad (4.21)$$

A direção da deformação principal ϵ_1 foi denominada 1 e a direção da deformação principal ϵ_2 foi denominada 2 e o ângulo formado entre o sistema de coordenadas local 12 e o de coordenadas global xy é o θ_ϵ , conforme esquema da Figura 10.

Figura 10 - Sistemas de coordenadas global e local



Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando o material ortotrópico, ou seja, suas propriedades mecânicas dependem das direções em que são observadas, a matriz de flexibilidade $[\mathbf{C}_l^s]$ para um problema em estado plano de tensão é dada pela Equação (4.22).

$$[\mathbf{C}_l^s] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Invertendo essa matriz $[\mathbf{C}_l^s]$, tem-se o tensor constitutivo secante local $[\mathbf{D}_l^s]$ mostrado na Equação (4.23).

$$[\mathbf{D}_l^s] = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 & 0 \\ \nu_{21}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Como os módulos de elasticidade nas direções locais E_1 e E_2 são calculados de forma independente e de acordo com o estado de deformação corrente, o modelo mostrado permite considerar a danificação do material devido à esforços de tração e compressão.

Pode ser constatado que a matriz apresentada na Equação (4.23) é assimétrica, devendo ser aplicado a ela um processo de simetrização. Tal processo consiste na consideração de um coeficiente de Poisson único ν para todas as direções do material que se relaciona com os coeficientes ν_{12} e ν_{21} da forma mostrada na Equação (4.24).

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu}{E_0}, \quad (4.24)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade do material sem dano.

A adoção dessa relação faz com que a matriz de flexibilidade $[\mathbf{C}_l^s]$ seja escrita da forma mostrada na Equação (4.25).

$$[\mathbf{C}_l^s] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu}{E_0} & 0 \\ -\frac{\nu}{E_0} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Invertendo a matriz de flexibilidade tem-se a matriz constitutiva secante local $[\mathbf{D}_l^s]$ apresentada na Equação (4.26), que considera uma rigidez transversal residual devido à rugosidade entre as faces da fissura.

$$[\mathbf{D}_l^s] = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2\right) G_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde G_{12} é o módulo de elasticidade transversal que, de acordo com a hipótese de simetria, tem seu valor calculado pela expressão da Equação (4.27).

$$G_{12} = \frac{E_0 E_1 E_2}{E_0 E_1 + E_0 E_2 + 2\nu E_1 E_2}, \quad (4.27)$$

e seu valor mínimo é obtido em função do módulo de elasticidade transversal original G_0 conforme Equação (4.28).

$$G_{12} = \beta G_0, \quad (4.28)$$

onde β é um valor entre 0 e 1 e G_0 é calculado pela Equação (4.29).

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu)}. \quad (4.29)$$

A matriz constitutiva da Equação (4.26) precisa ser rotacionada para o sistema de coordenadas globais o que é feito através da sua multiplicação pela matriz de rotação $[\mathbf{R}_\epsilon]$ conforme Equação (4.30). A matriz constitutiva $[\mathbf{D}_g^s]$ é usada para a determinação da matriz de rigidez da estrutura $[\mathbf{K}]$.

$$[\mathbf{D}_g^s] = [\mathbf{R}_\epsilon]^T [\mathbf{D}_l^s] [\mathbf{R}_\epsilon], \quad (4.30)$$

onde $[\mathbf{R}_\epsilon]$ é dada pela Equação (4.31).

$$[\mathbf{R}_\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_\epsilon) & \sin^2(\theta_\epsilon) & \cos(\theta_\epsilon)\sin(\theta_\epsilon) \\ \sin^2(\theta_\epsilon) & \cos^2(\theta_\epsilon) & -\cos(\theta_\epsilon)\sin(\theta_\epsilon) \\ -2\cos(\theta_\epsilon)\sin(\theta_\epsilon) & 2\cos(\theta_\epsilon)\sin(\theta_\epsilon) & \cos^2(\theta_\epsilon) - \sin^2(\theta_\epsilon) \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde o ângulo θ_ϵ está representado na Figura 10.

Os módulos de elasticidade secantes nas direções principais E_1 e E_2 são calculados de acordo com a Equação (4.32).

$$E_n = \frac{\sigma_n}{\epsilon_n}, \quad \text{para } n = [1, 2], \quad (4.32)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são os autovalores do tensor de deformações nos pontos de Gauss da malha e σ_1 e σ_2 são as tensões correntes obtidas a partir da aplicação dos valores de ϵ_1 e ϵ_2 em relações tensão-deformação propostas na literatura e que consideram o comportamento não linear do concreto. As relações adotadas no presente trabalho serão discutidas a seguir.

4.2.2 Relações tensão-deformação

Com o desenvolvimento e evolução dos modelos de fissuração distribuída na segunda metade do século XX e sua ampla utilização para problemas envolvendo a modelagem de estruturas de concreto, muitos trabalhos também foram publicados com propostas de relações tensão-deformação que descrevem o comportamento do material. Essas relações são propostas a partir de aproximações de equações matemáticas à resultados obtidos experimentalmente e são fundamentais para aplicação dos modelos distribuídos.

No presente trabalho foram empregadas as leis tensão-deformação para o concreto propostas por Carreira e Chu (1986) e Boone e Ingraffea (1987) para esforços de tração e Carreira e Chu (1985) e Kaklauskas (1998) para esforços de compressão.

4.2.2.1 Relação tensão-deformação proposta por Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986)

Carreira e Chu (1985) apresentaram uma equação polinomial para representar o comportamento tensão-deformação do concreto simples submetido a esforços de compressão. A lei é definida por parâmetros fisicamente significativos como os limites de tensão e deformação do material e tanto o ramo ascendente quanto o descendente se adequam a dados obtidos a partir de diferentes condições experimentais.

Posteriormente, Carreira e Chu (1986) propuseram o emprego da mesma equação polinomial para representar o concreto armado tracionado. Os autores destacam que experimentos mostram a existência de um diagrama não linear completo relacionando

tensão e deformação em concreto simples e armado sob tração e não apenas um diagrama linear com ruptura frágil do material. Sendo assim, a equação proposta também será empregada no presente trabalho para simular o comportamento do concreto sem armadura.

A relação proposta, aplicada tanto para tração quanto para compressão, é dada pela Equação (4.33).

$$\sigma_i = f_i \frac{k \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_i} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_i} \right)^k}, \quad \text{com } k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_i}{\epsilon_i E_0} \right)}, \quad \text{e } i = t, c, \quad (4.33)$$

onde as variáveis são definidas na Tabela 2.

Tabela 2 – Definição das variáveis do modelo de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986)

σ_i	tensão principal de tração ou compressão
f_i	tensão relativa ao limite de resistência à tração ou compressão
ϵ_i	deformação relativa ao limite elástico na tração ou compressão
$i = t$	esforços de tração
$i = c$	esforços de compressão
E_0	módulo de elasticidade referente no domínio elástico
ϵ	deformação principal corrente

Fonte: Elaborada pela autora.

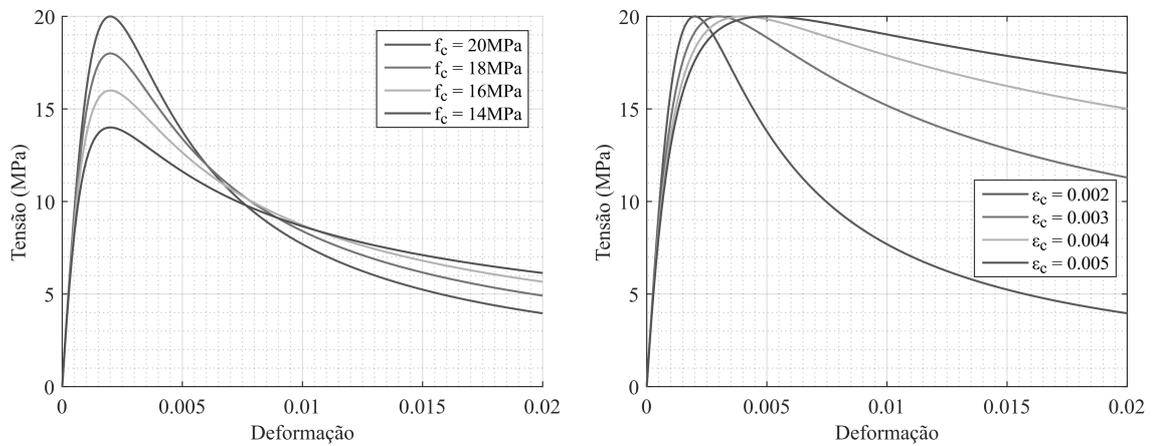
Cabe ressaltar que o parâmetro k da Equação (4.33) admite a seguinte relação:

$$\epsilon_i > \frac{f_i}{E_0}. \quad (4.34)$$

A Equação (4.33) apresenta os limites de um material perfeitamente elástico quando o parâmetro $k \rightarrow \infty$, ou seja, $E_0 \approx f_i/\epsilon_i$, e de um material perfeitamente plástico quando $k = 1$. Assim, quando o parâmetro k obedece a Equação (4.34), a Equação (4.33) proporciona uma transição não linear entre os dois casos extremos, representando materiais de comportamento elastoplástico.

A Figura 11 traz representações da curva tensão-deformação para esforços de compressão. As curvas da esquerda consideram diversos valores de tensão máxima na compressão, mantendo-se constante as demais variáveis: $E_0 = 20000 \text{ MPa}$ e $\epsilon_c = 0.002$. As curvas da direita consideram diversos valores de deformação relativa ao limite elástico na compressão, mantendo-se constante as demais variáveis: $E_0 = 20000 \text{ MPa}$ e $f_c = 20 \text{ MPa}$.

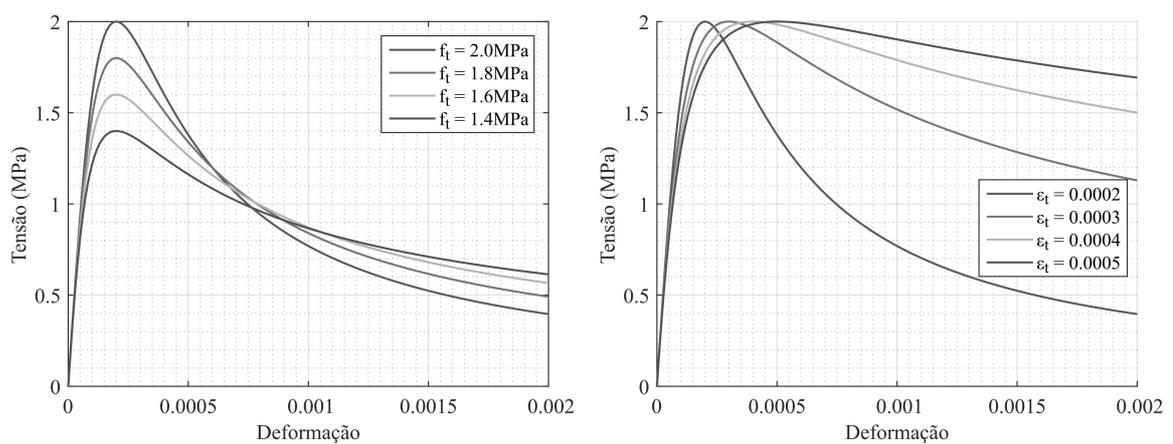
Figura 11 - Lei de Carreira e Chu (1985) para compressão



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 12 traz representações da curva tensão-deformação para esforços de tração. As curvas da esquerda consideram diversos valores de tensão máxima na tração, mantendo-se constante as demais variáveis: $E_0 = 20000\text{ MPa}$ e $\epsilon_t = 0.0002$. As curvas da direita consideram diversos valores de deformação relativa ao limite elástico na tração, mantendo-se constante as demais variáveis: $E_0 = 20000\text{ MPa}$ e $f_t = 2\text{ MPa}$.

Figura 12 - Lei de Carreira e Chu (1986) para tração



Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.2.2 Relação tensão-deformação proposta por Boone e Ingraffea (1987)

Boone e Ingraffea (1987) propuseram uma lei tensão-deformação representativa do comportamento do concreto apenas para esforços de tração. A fórmula, baseada na energia de fratura e nos limites de tensão e deformação é dada pela Equação (4.35).

$$\sigma_t = f_t e^{-k(\epsilon - \epsilon_t)}, \quad \text{com } k = \frac{h_c f_t}{G_f}, \quad (4.35)$$

onde as variáveis estão definidas na Tabela 3.

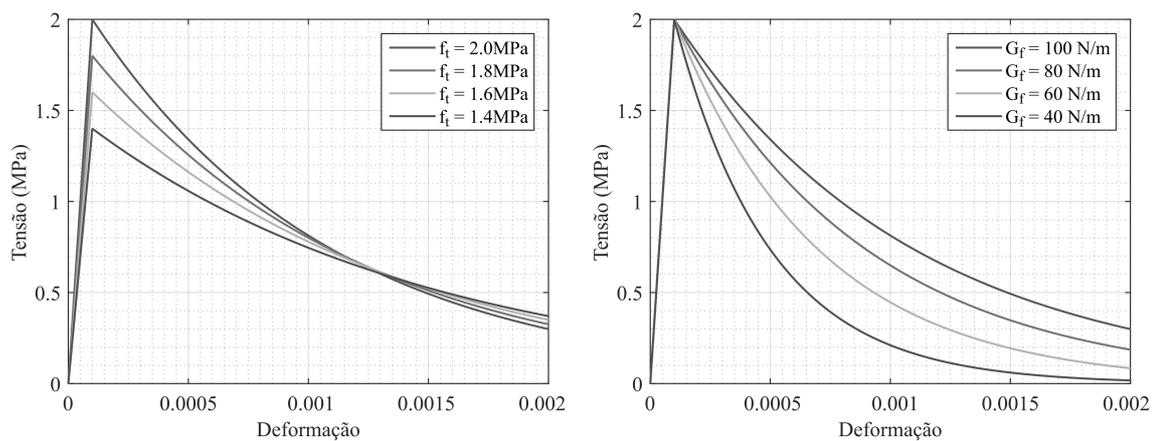
Tabela 3 – Definição das variáveis do modelo de Boone e Ingraffea (1987)

σ_t	tensão principal de tração
f_t	tensão relativa ao limite de resistência à tração
ϵ_t	deformação relativa ao limite elástico na tração
h_c	comprimento característico
G_f	energia de fratura por comprimento de trinca
ϵ	deformação principal corrente

Fonte: Elaborada pela autora.

A fórmula apresentada na Equação (4.35) é válida na descrição do ramo descendente da curva tensão-deformação do material, sendo a parte ascendente considerada linear, conforme pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 - Lei de Boone e Ingraffea (1987) para tração



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 13 mostra com detalhe a parte ascendente e descendente da curva tensão-deformação de acordo com a relação proposta por Boone e Ingraffea (1987). O primeiro

gráfico traz ainda o efeito da variação da resistência à tração do material, sendo mantida constante a deformação relativa ao limite elástico $\epsilon_t = 0.0001$, e também os parâmetros: $G_f = 100 \text{ N/m}$ e $h_c = 0.05 \text{ m}$. O gráfico da direita mostra o efeito da diminuição da variável G_f que representa a energia de fratura por comprimento de trinca, sendo as demais variáveis definidas por: $f_t = 2 \text{ MPa}$, $\epsilon_t = 0.0001$ e $h_c = 0.05 \text{ m}$.

Como a relação apresentada por Boone e Ingraffea (1987) é válida apenas para concreto tracionado, ela será usada em conjunto com leis para o material comprimido, como Carreira e Chu (1985) e Kaklauskas (1998) que será descrita agora.

4.2.2.3 Relação tensão-deformação proposta por Kaklauskas (1998)

Kaklauskas (1998) apresenta uma relação para concretos sujeitos a esforços de compressão baseada em ensaios realizados em vigas e lajes. Tal relação é apresentada na Equação (4.36).

$$\sigma_c = f_c \left[2 \frac{\epsilon}{\epsilon_c} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^2 \right], \quad \text{com } \epsilon_c = \frac{2f_c}{E_c}, \quad (4.36)$$

onde as variáveis são definidas na Tabela 4.

Tabela 4 – Definição das variáveis do modelo de Kaklauskas (1998)

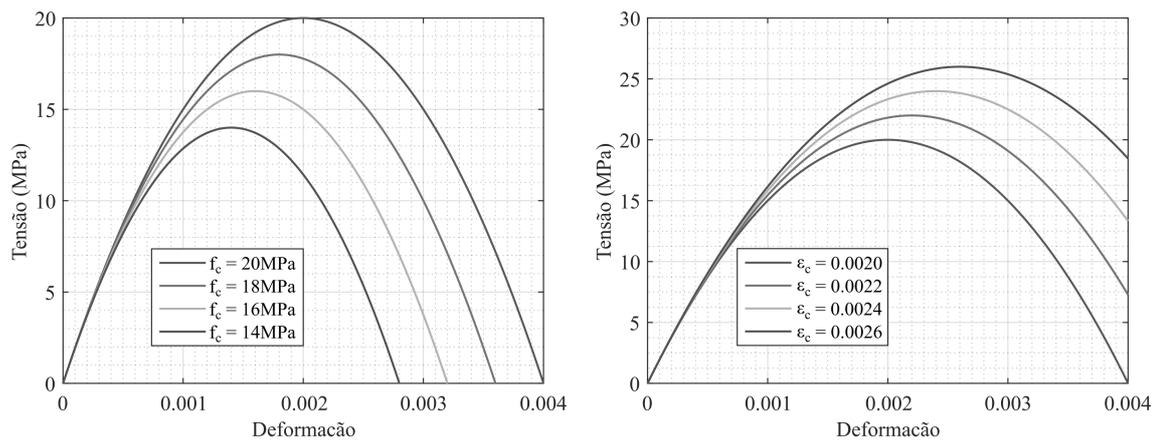
σ_c	tensão principal de compressão
f_c	tensão máxima de compressão
ϵ	deformação principal corrente de compressão
ϵ_c	deformação referente à tensão máxima de compressão
E_c	módulo de elasticidade do material

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 14 mostra diferentes curvas produzidas a partir da aplicação da Equação (4.36) variando-se os valores de entrada. Os gráficos da esquerda e da direita possuem valor fixo de $E_c = 20000 \text{ MPa}$.

Como a relação apresentada por Kaklauskas (1998) é válida apenas para esforços de compressão, ela será usada em conjunto com leis que simulam o comportamento do concreto tracionado, como Carreira e Chu (1986) e Boone e Ingraffea (1987).

Figura 14 - Lei de Kaklauskas (1998) para compressão



Fonte: Elaborada pela autora.

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O código utilizado no presente trabalho para simulação do comportamento não linear de estruturas de concreto foi desenvolvido na plataforma *MatLab*, que possui linguagem própria derivada do C/C++ e é voltado para o cálculo numérico. As malhas de elementos finitos foram geradas no *software GMSH*. A seguir serão apresentados resumos dos algoritmos usados em cada um dos modelos de fissuração propostos.

O modelo de fissuração distribuída baseia-se no emprego da matriz constitutiva secante local apresentada na Equação (4.26) e de relações tensão-deformação representativas do comportamento do concreto. Este modelo foi implementado juntamente a um algoritmo incremental-iterativo para resolução do sistema de equações não lineares.

Um resumo dos principais passos executados no modelo de fissuração distribuída é apresentado no Algoritmo 1, que depende do Algoritmo 2 que trata do cálculo do incremento do fator de cargas $\delta\lambda_j^i$ de acordo com o método de controle escolhido, e do Algoritmo 3 que mostra como são empregadas as relações tensão-deformação e o cálculo da matriz constitutiva secante necessária para a determinação da rigidez da estrutura.

O modelo de fissuração discreta emprega malhas onde elementos de interface IE5 são inseridos de acordo com a constatação de tensões principais maiores que uma tensão limite preestabelecida. Este modelo também deve ser implementado juntamente a um algoritmo incremental-iterativo para resolução do sistema de equações não lineares. Um esboço dos principais passos executados é apresentado no Algoritmo 4, que depende do Algoritmo 2 que trata do cálculo do incremento do fator de cargas $\delta\lambda_j^i$ de acordo com o método de controle escolhido, e do Algoritmo 5 que executa a redefinição da malha de elementos finitos com a inserção das interfaces.

Os Algoritmos 1, 2 e 4, no que se referem aos passos incrementais-iterativos e métodos de controle, foram baseados em um diagrama de atividades de algoritmo genérico para métodos de controle apresentado por Fuina (2004), sendo inseridas modificações relacionadas aos modelos de fissuração propostos neste trabalho.

Para o modelo de fissuração distribuída utiliza-se o Algoritmo 3, que foi elaborado tendo-se em vista os passos necessários para a determinação da matriz constitutiva secante local e global com a aplicação das relações tensão-deformação estudadas. Para o modelo de fissura discreta, com o emprego dos elementos de interface IE5, foi implementado o Algoritmo 5 que apresenta as principais atividades a serem realizadas para a redefinição da malha de elementos finitos, conforme proposto no item **4.1.2** deste trabalho.

Algoritmo 1: Método incremental-iterativo no modelo de fissuração distribuída

- 1 Montagem do vetor de cargas de referência $\{\mathbf{P}\}$
- 2 Inicialização do contador de iterações $j = 0$
- 3 Inicialização da carga residual nula para primeira iteração $\{\mathbf{Q}_0^i\} = \{0\}$
- 4 Cálculo da matriz constitutiva secante inicial $[\mathbf{D}_g^s]$ usando apenas o módulo de elasticidade do material sem danos E_0
- 5 **para** $i = 1$ **até** $i = \text{número máximo de incrementos}$ **faça**
- 6 **enquanto** *tolerância não for atingida* **faça**
- 7 $j = j + 1$
- 8 Cálculo da matriz de rigidez $[\mathbf{K}]_{j-1}^i$ com matriz $[\mathbf{D}_g^s]$ atualizada do Algoritmo 3
- 9 Cálculo dos deslocamentos incrementais associados à carga de referência $\{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i$
- 10 Cálculo dos deslocamentos incrementais associados à carga residual $\{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i$
- 11 Determinação do incremento do fator de cargas $\delta\lambda_j^i$ (Algoritmo 2)
- 12 Cálculo do vetor de deslocamentos incrementais $\{\delta\mathbf{U}\}_j^i$
- 13 Atualização do fator de cargas λ_j^i
- 14 Atualização do vetor de deslocamentos $\{\mathbf{U}_j^i\}$
- 15 Cálculo do vetor de deformações em cada ponto de Gauss
- 16 Cálculo do vetor de tensões para cada ponto de Gauss (Algoritmo 3)
- 17 Cálculo do vetor de forças internas $\{\mathbf{F}_j^i\}$
- 18 Cálculo do vetor de forças residuais $\{\mathbf{Q}_j^i\}$
- 19 **fim**
- 20 Salvar vetor de deslocamentos $\{\mathbf{U}_j^i\}$ e vetor de forças externas $\lambda_j^i\{\mathbf{P}\}$ do passo incremental
- 21 **fim**
- 22 Plotagem da curva de equilíbrio de interesse

Algoritmo 2: Métodos de controle

Resultado: Incremento do fator de cargas

```

1 se método de controle de carga então
2   se  $j = 1$  então
3      $\delta\lambda_1^i =$  incremento de carga prescrito
4   senão
5      $\delta\lambda_j^i = 0$ 
6   fim
7 fim
8 se método de controle de deslocamento então
9   se  $j = 1$  então
10     $\delta\lambda_1^i = \frac{\delta U_1^c}{\delta U_1^{Pc}}$ 
11  senão
12     $\delta\lambda_j^i = \frac{-\delta U_j^{Qc}}{\delta U_j^{Pc}}$ 
13  fim
14 fim
15 se método de controle de deslocamento generalizado então
16   se  $j = 1$  então
17     Cálculo do parâmetro GSP
18      $\delta\lambda_1^i = \pm\delta\lambda_1^1 ||GSP||^{0.5}$ 
19   senão
20      $\delta\lambda_j^i = \frac{-\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i}{\{\delta\mathbf{U}^P\}_1^{i-1T} \{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i}$ 
21   fim
22 fim

```

Algoritmo 3: Cálculo das tensões de acordo com leis tensão-deformação

Dados: Deformações nos pontos de Gauss, módulo de elasticidade inicial, coeficiente de Poisson, parâmetros da lei tensão-deformação

Resultado: Tensões nos pontos de Gauss e matriz constitutiva secante global $[\mathbf{D}_g^s]$

```

1 para  $n = 1$  até  $n =$  número de elementos faça
2   para  $x = 1$  até  $x =$  pontos de Gauss por elemento faça
3     Determinação das deformações e direções principais
4     Cálculo das tensões correntes aplicando as deformações principais nas relações tensão-deformação
5     Cálculo dos módulos de elasticidade secantes locais  $E_1$  e  $E_2$ 
6     Determinação da matriz constitutiva secante local  $[\mathbf{D}_l^s]$ 
7     Determinação da matriz de rotação  $[\mathbf{R}_c]$ 
8     Determinação da matriz constitutiva secante global  $[\mathbf{D}_g^s]$ 
9     Determinação das tensões no referencial global
10   fim
11 fim

```

Algoritmo 4: Método incremental-iterativo no modelo de fissuração discreta

```

1 Montagem do vetor de cargas de referência  $\{\mathbf{P}\}$ 
2 Inicialização do contador de iterações  $j = 0$ 
3 Inicialização da carga residual nula para primeira iteração  $\{\mathbf{Q}_0^i\} = \{0\}$ 
4 para  $i = 1$  até  $i = \text{número máximo de incrementos}$  faça
5   enquanto tolerância não for atingida faça
6      $j = j + 1$ 
7     se número de elementos de interface  $> 0$  então
8       | Cálculo da matriz de rigidez das interfaces
9     fim
10    Cálculo da matriz de rigidez global da malha  $[\mathbf{K}]_{j-1}^i$ 
11    Cálculo dos deslocamentos incrementais associados à carga de referência
         $\{\delta\mathbf{U}^P\}_j^i$ 
12    Cálculo dos deslocamentos incrementais associados à carga residual
         $\{\delta\mathbf{U}^Q\}_j^i$ 
13    Determinação do incremento do fator de cargas  $\delta\lambda_j^i$  (Algoritmo 2)
14    Cálculo do vetor de deslocamentos incrementais  $\{\delta\mathbf{U}\}_j^i$ 
15    Atualização do fator de cargas  $\lambda_j^i$ 
16    Atualização do vetor de deslocamentos  $\{\mathbf{U}_j^i\}$ 
17    Cálculo do vetor de deformações em cada ponto de Gauss dos elementos
        contínuos
18    Cálculo do vetor de tensões para cada ponto de Gauss dos elementos
        contínuos
19    se número de elementos de interface  $> 0$  então
20      | Cálculo das tensões nos elementos de interface
21      | Atualização do parâmetro de penalidade  $\alpha$  dos elementos de
        interface
22    fim
23    Cálculo do vetor de forças internas  $\{\mathbf{F}_j^i\}$ 
24    Cálculo do vetor de forças residuais  $\{\mathbf{Q}_j^i\}$ 
25    Cálculo das tensões principais para cada ponto de Gauss dos elementos
        contínuos
26    se tensão principal  $>$  tensão máxima do limite elástico então
27      | Inserção dos elementos de interface (Algoritmo 5)
28      | Cálculo das tensões nos elementos de interface inseridos
29      | Atualização do parâmetro de penalidade  $\alpha$  dos elementos de
        interface
30    fim
31  fim
32  Salvar vetor de deslocamentos  $\{\mathbf{U}_j^i\}$  e vetor de forças externas  $\lambda_j^i\{\mathbf{P}\}$  do
        passo incremental
33 fim
34 Plotagem da curva de equilíbrio de interesse

```

Algoritmo 5: Redefinição da malha de elementos finitos

Resultado: Dados da nova malha de elementos finitos

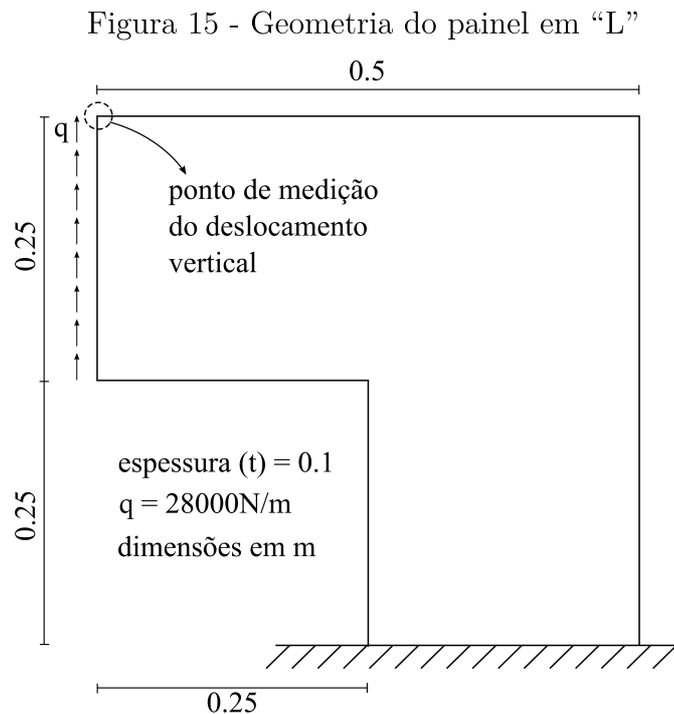
- 1 **para** $y = 1$ **até** $y = \text{pontos de Gauss com tensões superiores ao limite}$ **faça**
- 2 Cálculo do vetor diretor de cada aresta do elemento a que pertence o ponto de Gauss
- 3 Determinação dos ângulos entre os vetores diretores das arestas e a direção principal
- 4 Seleção da(s) aresta(s) com ângulo entre 75° e 105° com a direção principal
- 5 **se nenhuma aresta selecionada então**
- 6 Seleção da aresta com ângulo mais próximo de 90° com a direção principal
- 7 **fim**
- 8 **para** $a = 1$ **até** $a = \text{número de arestas selecionadas}$ **faça**
- 9 **se já existe elemento de interface na aresta selecionada então**
- 10 Passar para próxima aresta
- 11 **fim**
- 12 Criação de dois novos nós na malha a partir da duplicação dos nós da aresta selecionada
- 13 Definição das conectividades do elemento de interface
- 14 Ajuste nas conectividades dos elementos afetados pela duplicação dos nós
- 15 **fim**
- 16 Atualização do número de nós e elementos da malha
- 17 **fim**
- 18 Atualização do vetor de deslocamentos $\{\mathbf{U}_j^i\}$
- 19 Atualização do vetor de cargas residuais $\{\mathbf{Q}_j^i\}$
- 20 Atualização do vetor de carga de referência $\{\mathbf{P}_j^i\}$
- 21 Atualização do vetor de forças internas $\{\mathbf{F}_j^i\}$

6 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados dois exemplos de aplicação dos modelos implementados de fissuração discreta e distribuída em estruturas de concreto simples. Tratam-se de exemplos comuns na engenharia civil, e que possibilitam ilustrar cada modelo e ressaltar suas características individuais, bem como compará-los.

6.1 PAINEL EM “L” SUBMETIDO A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO

O primeiro exemplo a ser analisado trata de um painel de concreto em forma de “L” engastado em sua base. A estrutura é submetida a um carregamento distribuído vertical q ao longo de sua extremidade esquerda. Detalhes da geometria do painel podem ser visualizados na Figura 15.



Fonte: Adaptada de Penna (2011).

Tanto no modelo de fissuração distribuída quanto no de fissuração discreta, as seguintes propriedades foram consideradas: módulo de elasticidade inicial $E_0 = 25850$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.18$. A carga de referência é $q = 28$ N/mm e a tolerância para a convergência do método iterativo é de 10^{-4} . Para cada lei tensão-deformação aplicada no modelo de fissura distribuída foram usadas as propriedades apresentadas na Tabela 5. Cabe ressaltar que os parâmetros ϵ_t usados nas leis de Carreira e Chu (1986) e Boone e Ingraffea (1987) são diferentes para manter o mesmo módulo de elasticidade íntegro E_0

definido anteriormente, já que a proposta de Carreira e Chu (1986) admite a relação da Equação (4.34), o que não é verdade para a proposta de Boone e Ingraffea (1987).

Tabela 5 – Parâmetros das leis tensão-deformação para painel em “L”

Proposta de Carreira e Chu (1985)	
f_c	31 MPa
ϵ_c	0.0022
Proposta de Carreira e Chu (1986)	
f_t	2.7 MPa
ϵ_t	0.0001925
Proposta de Boone e Ingraffea (1987)	
f_t	2.7 MPa
ϵ_t	0.00010445
h_c	28 mm
G_f	0.065 N/mm
Proposta de Kaklauskas (1998)	
f_c	31 MPa
ϵ_c	0.0022

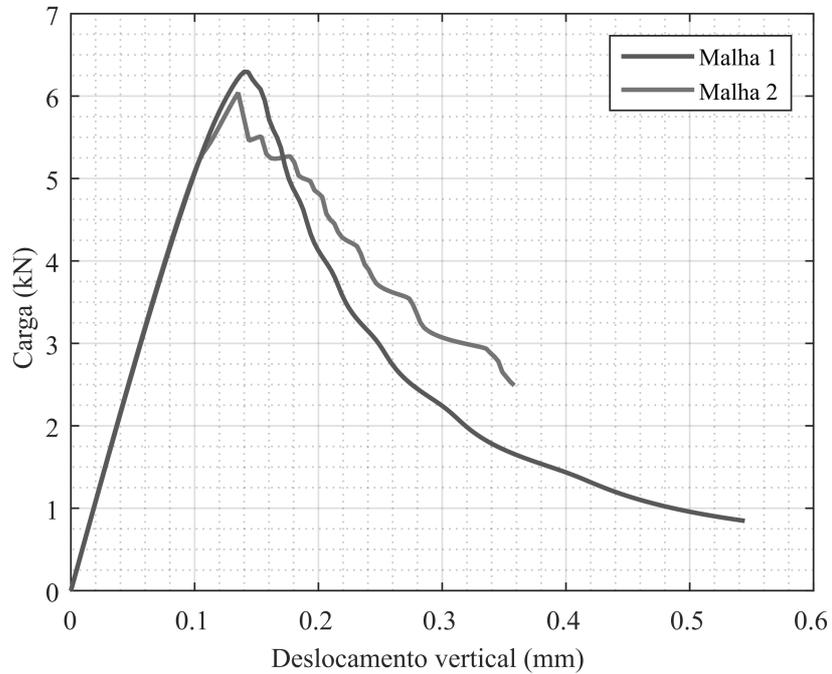
Fonte: Elaborada pela autora.

Para o modelo de fissuração distribuída foi realizada uma análise a respeito da adoção de uma malha de elementos quadriláteros ou elementos triangulares. Uma malha, denominada de malha 1, é formada por 300 elementos quadriláteros de quatro nós e dimensão inicial igual a (0.025 x 0.025) m. Uma segunda malha, chamada de malha 2, é formada por 1200 elementos triangulares resultantes da divisão de cada quadrilátero da malha anterior em quatro triângulos. Os resultados encontrados para ambas as malha empregando a lei tensão-deformação propostas por Carreira e Chu (1985) para compressão e Carreira e Chu (1986) para tração são apresentados na Figura 16.

É notável que a curva de equilíbrio para a malha de elementos quadriláteros possui o trecho descendente mais suave do que quando utilizada a malha de elementos triangulares. Além disso, percebeu-se que o tempo de análise computacional para a malha 1 foi relativamente menor que para a malha 2. Assim, a malha 1 será empregada nas análises do modelo de fissuração distribuída e a malha 2 será empregada nas análises do modelo de fissuração discreta, uma vez que os elementos triangulares permitem a inserção de elementos de interfaces em um maior número de direções, o que proporciona uma melhor representação das fissuras. As malhas 1 e 2 estão mostradas na Figura 17.

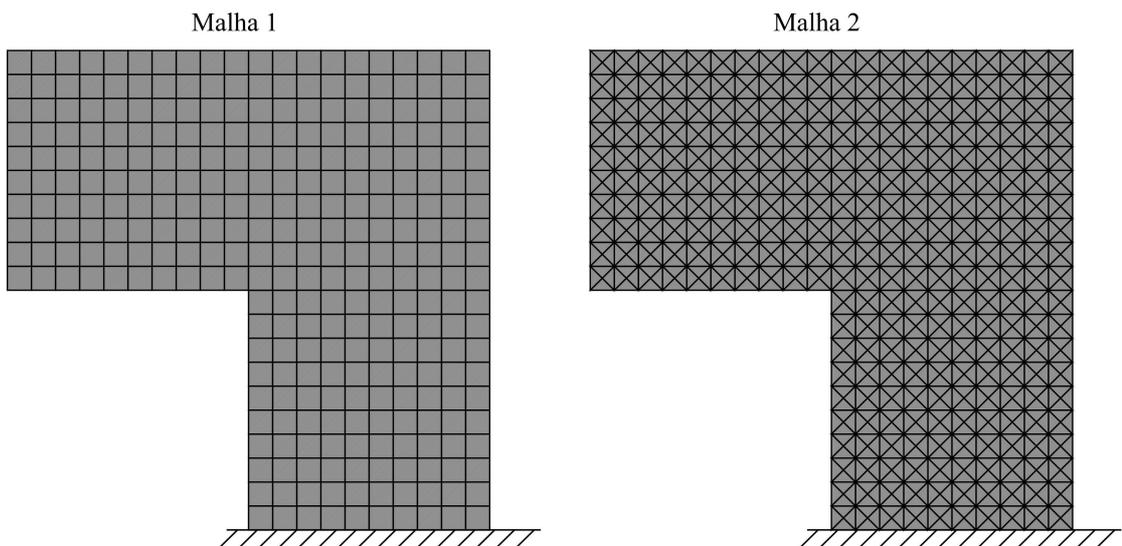
Para a escolha do método de controle, realizou-se análises com o modelo de fissuração distribuída aplicando as leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986), com controle de carga, controle direto de deslocamento e controle de deslocamentos generalizado. As curvas de equilíbrio encontradas para os métodos de controle de deslocamentos estão exibidas na Figura 18. Conforme esperado, o método de

Figura 16 - Modelo de fissuração distribuída em duas malhas distintas



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 17 - Malhas empregadas na análise do painel em “L”

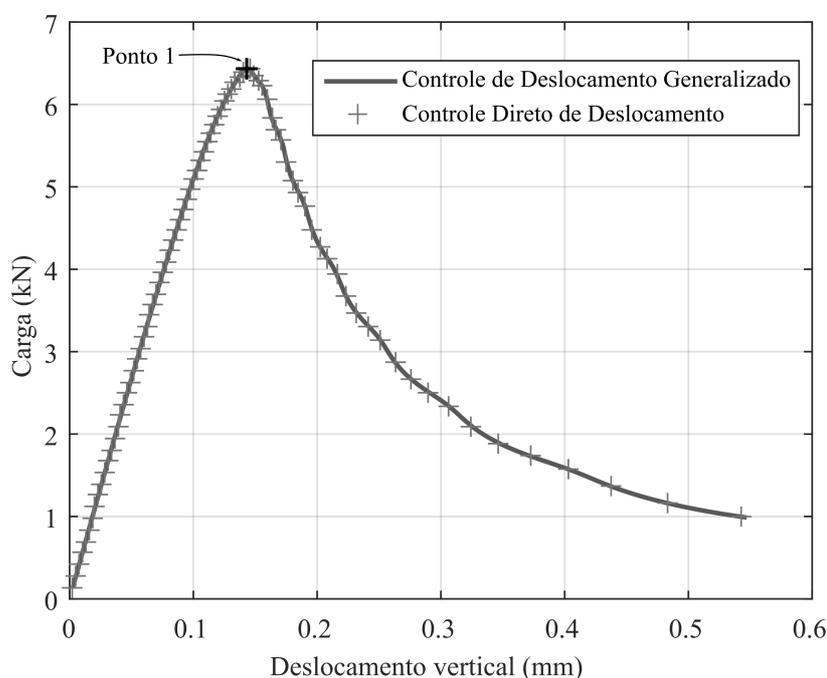


Fonte: Elaborada pela autora.

controle de carga não foi adequado para a análise não linear realizada, por não se mostrar eficiente na passagem por pontos limites. Desta forma, visando não poluir visualmente as

respostas apresentadas na Figura 18, os resultados obtidos para o controle de carga foram omitidos, uma vez que eles são praticamente coincidentes aos demais já apresentados para o trecho ascendente da curva, e somente convergem para valores de carga até o ponto 1 assinalado na figura. Ambos os métodos de controle de deslocamento, direto e generalizado, apresentaram resultados muito similares, representando com sucesso o comportamento da estrutura. Diante dos resultados apresentados, foi escolhido como método de controle das simulações seguintes o método de controle de deslocamento generalizado por não exigir do analista conhecimento prévio na determinação do grau de liberdade de controle e não apresentar problemas na passagem por pontos limites de carga nem de deslocamento.

Figura 18 - Comparação dos métodos de controle



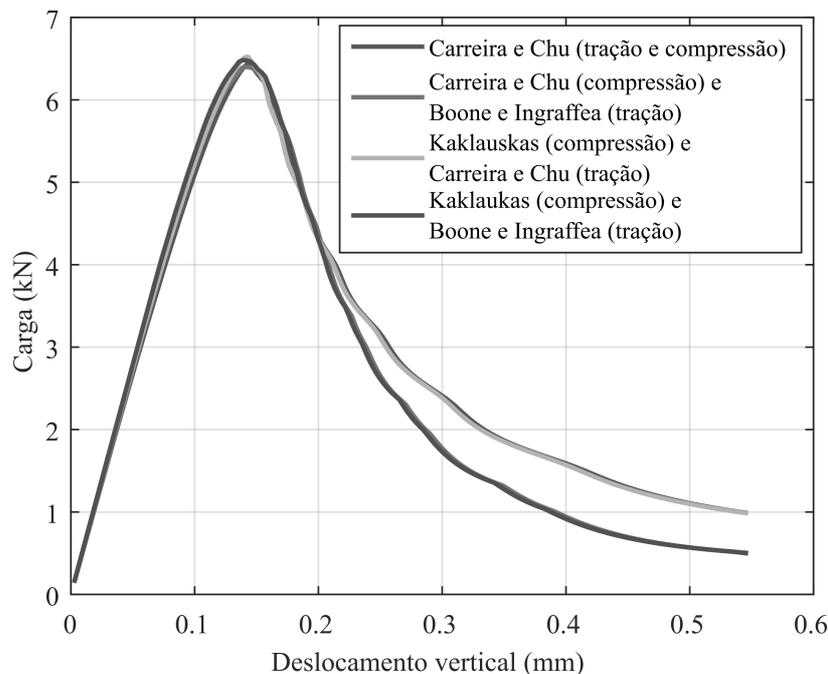
Fonte: Elaborada pela autora.

Em relação ao modelo de fissuração distribuída foram consideradas as seguintes curvas tensão-deformação nas análises: Carreira e Chu (1985) para compressão e Carreira e Chu (1986) para tração; Carreira e Chu (1985) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração; Kaklauskas (1998) para compressão e Carreira e Chu (1986) para tração; e Kaklauskas (1998) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração. Os parâmetros adotados para cada relação estão elencados na Tabela 5. Os resultados de deslocamento vertical do ponto sinalizado na Figura 15 em relação à carga aplicada na estrutura estão apresentados na Figura 19.

Através da Figura 19 é possível perceber um comportamento das curvas de equilíbrio conforme esperado, com a parte ascendente quase linear e uma parte descendente depois

de atingida a carga máxima suportada pela estrutura. As curvas obtidas para cada uma das relações tensão-deformação adotadas são bem similares com diferenças mais visíveis no regime pós-crítico do material. Pode-se notar que as duas curvas em que são empregadas a lei de Boone e Ingraffea (1987) para tração estão praticamente sobrepostas e um pouco afastadas das duas demais curvas em que essa lei não é utilizada. Tal diferença pode ser justificada pelo fato de que a relação proposta por Boone e Ingraffea (1987) além de considerar os limites de tensão e deformação do material, como as demais leis adotadas nesse trabalho, considera também a energia de fratura por comprimento de trinca G_f . Esse parâmetro torna difícil fazer uma correspondência exata da relação tensão-deformação de Boone e Ingraffea (1987) com a de Carreira e Chu (1986).

Figura 19 - Curvas de equilíbrio do modelo de fissuração distribuída

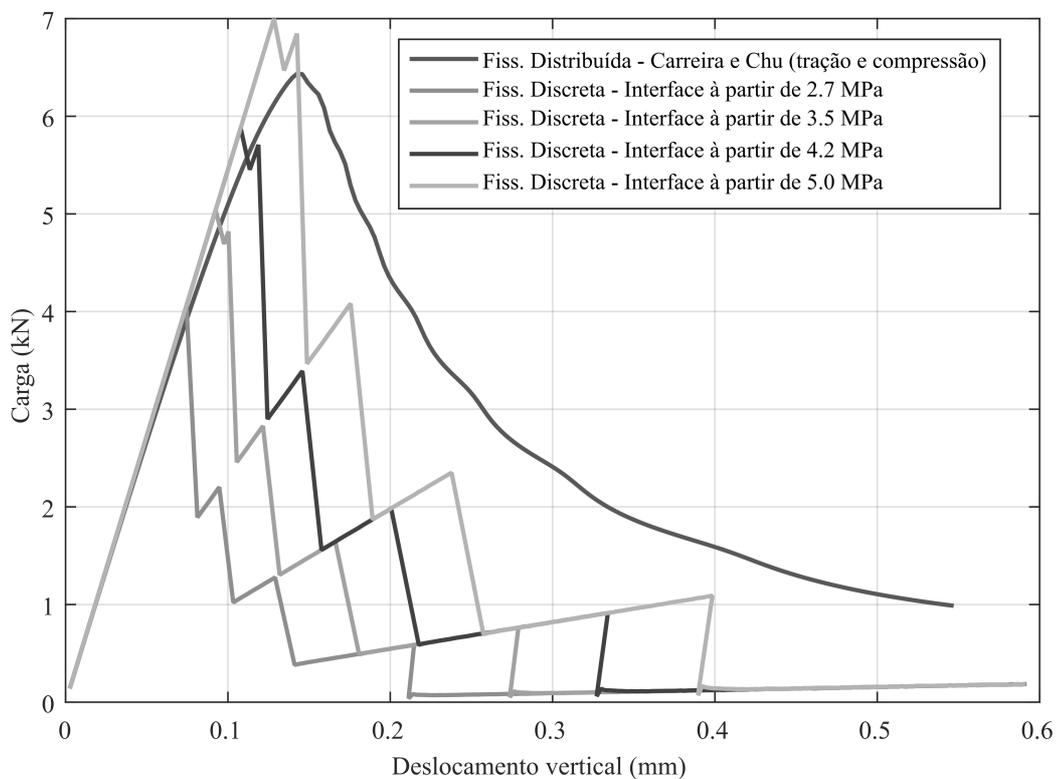


Fonte: Elaborada pela autora.

Para o modelo de fissuração discreta foram feitos diversos testes com diferentes valores de tensão para o início da inserção dos elementos de interface IE5 na malha. Os resultados obtidos estão plotados na Figura 20 juntamente com um resultado do modelo de fissuração distribuída com o emprego da lei tensão-deformação de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986). Percebe-se que o comportamento pós-crítico do modelo de fissuração discreta não é suave como o do modelo distribuído, apresentando um comportamento serrilhado com descontinuidades nas regiões onde a malha é redefinida e são inseridas as interfaces. Como os elementos de interface possuem rigidez inicial superior à rigidez

dos demais elementos da malha, sua inserção provoca uma brusca alteração da rigidez global da estrutura nos graus de liberdade afetados pela interface, o que justifica os saltos percebidos nas curvas de equilíbrio obtidas com esse modelo. Além disso, é preciso elevar a tensão de inserção das interfaces para valores superiores ao da resistência à tração do concreto adotada para o problema para que sejam atingidas cargas similares à obtida para o modelo de fissuração distribuída. O modelo de fissura discreta apresenta um ruptura mais frágil e parece precisar de um modelo de plasticidade associado para representar melhor o regime pós-crítico da estrutura.

Figura 20 - Comparação dos modelos de fissuração

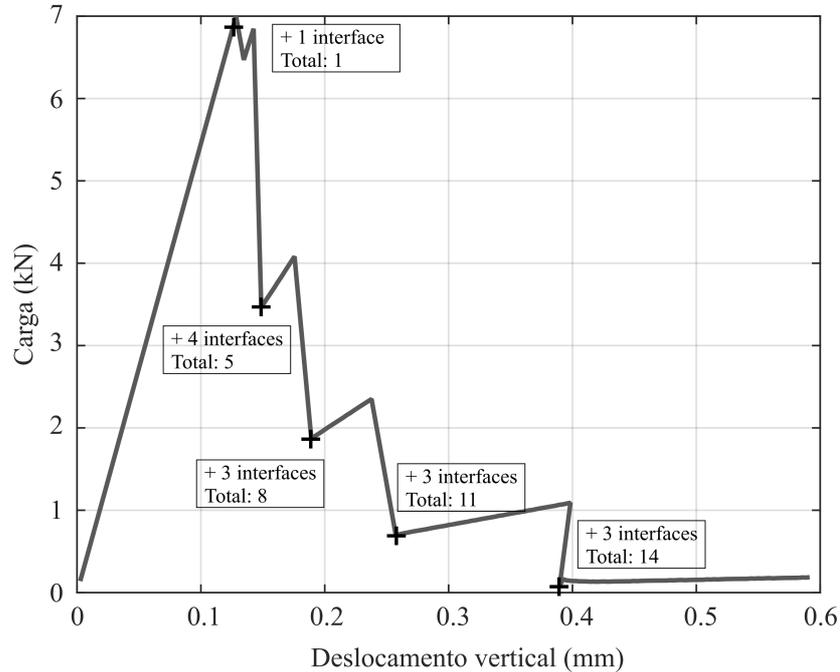


Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 21 mostra, através dos pontos destacados na curva de equilíbrio, os momentos de inclusão das interfaces na malha de elementos finitos para o modelo de fissuração discreta considerando uma inserção para tensões superiores a 5,0 MPa. Também é pontuado o número de elementos de interfaces total em cada momento em que o código de análise é interrompido para redefinição da malha.

Esta estrutura de concreto com o formato de “L” também foi estudada por Winkler *et al.* (2004) que realizaram ensaios experimentais e também simulações numéricas com base em um modelo de fissuração distribuída no âmbito da teoria da plasticidade. Análises numéricas da estrutura também foram realizadas por Penna (2011) de acordo com sua

Figura 21 - Inclusão das interfaces no modelo discreto



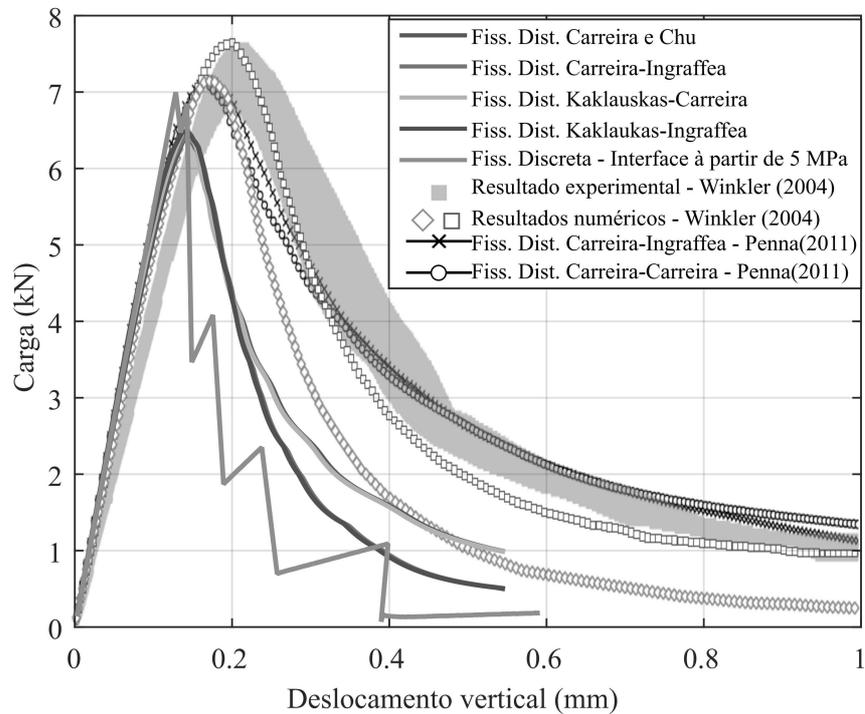
Fonte: Elaborada pela autora.

proposta de estrutura teórica unificada, empregando modelos de fissuração distribuídas com leis tensão-deformação propostas por Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986), e Boone e Ingraffea (1987) combinado com o comportamento à compressão de Carreira e Chu (1985). Os resultados encontrados por esses autores foram comparados com os obtidos a partir dos modelos propostos no trabalho conforme mostrado na Figura 22.

Observa-se que o formato das curvas encontradas com o modelo de fissuração distribuída proposto é muito parecido com os formatos obtidos experimentalmente e numericamente por outros autores. Tanto o modelo de fissuração distribuída quando o modelo de fissuração discreta foram capazes de representar o comportamento do painel, apesar de apresentarem diferenças se comparados com resultados presentes na literatura, principalmente no regime pós-crítico. Além disso, as diferenças encontradas são maiores no modelo de fissura distribuída quando comparado com os demais resultados analisados, principalmente no que diz respeito à suavidade da curva de equilíbrio.

As Tabelas 6 e 7 apresentam um resumo com os parâmetros empregados e as características das análises computacionais executadas para o modelo de fissuração distribuída considerando quatro variações de curvas tensão-deformação. A Tabela 8 mostra tais valores para o modelo de fissuração discreta quando as interfaces são inseridas para tensões principais maiores que 5,0 MPa, que é quando são verificados resultados mais próximos ao encontrado com o outro modelo. É possível notar que, para esse exemplo, o

Figura 22 - Validação dos resultados obtidos



Fonte: Elaborada pela autora.

tempo de processamento do modelo discreto é um pouco menor que no modelo distribuído, mesmo sendo necessária a redefinição da malha. Além disso, o número de iterações e os valores mínimos de módulo de elasticidade para as duas direções principais (E_1 e E_2) nas duas simulações em que são usadas a lei de Boone e Ingraffea (1987) para tração são bem próximos entre si, sendo diferentes dos valores desses parâmetros observados nas análises em que o comportamento à tração do concreto é modelado pela lei de Carreira e Chu (1986).

Tabela 6 – Características do modelo de fissuração distribuída (Painel em “L”)

E_0	25850 MPa
ν	0.18
tolerância	10^{-4}
passos incrementais	200
n° de elementos	300
n° de nós	341

Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, na Figura 23 são apresentadas as malhas deformadas no final da análise para cada um dos modelos. A imagem da esquerda mostra o resultado do modelo de

Tabela 7 – Características do modelo de fissuração distribuída para diferentes leis tensão-deformação (Painel em “L”)

Parâmetro	Carreira e Chu	Carreira- Ingraffea	Kaklauskas- Carreira	Kaklauskas- Ingraffea
tempo de processamento (s)	1105	1009	1099	981
n° máximo de iterações	155	73	136	72
n° médio de iterações	29.970	26.465	29.625	26.315
E_1 mínimo (MPa)	5.511	0.002318	5.4833	0.002255
E_2 mínimo (MPa)	24960	25735	24963	25850

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 8 – Características do modelo de fissuração discreta (Painel em “L”)

E_0	25850 MPa
ν	0.18
tolerância	10^{-4}
passos incrementais	200
tempo de processamento (s)	901
n° de elementos contínuos	1200
n° de elementos de interface	14
n° de nós (início da análise)	641
n° de nós (final da análise)	669
n° máximo de iterações	193
n° médio de iterações	18.065

Fonte: Elaborada pela autora.

fissura distribuída com aplicação da lei tensão-deformação de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986). A imagem da direita traz o resultado do modelo de fissura discreta com interfaces sendo inseridas para valores de tensão principais superiores à 5.0 MPa.

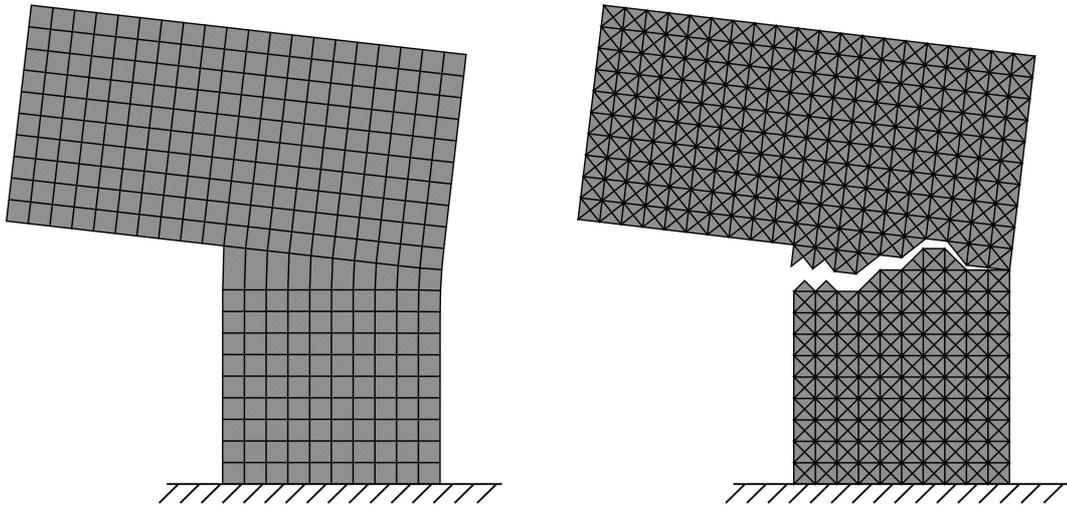
Percebe-se uma similaridade dos resultados obtidos, em termos de localização da fissura e sua direção de propagação, quando comparados com o padrão de fissuração observado experimentalmente por Winkler *et al.* (2004) e com a distribuição do dano por tensão calculada numericamente pelos mesmos autores, ambos exibidos na Figura 24.

6.2 VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A FLEXÃO EM 3 PONTOS

O segundo exemplo estudado trata de uma viga de concreto biapoada submetida a uma carregamento concentrado P em seu eixo de simetria vertical, onde esta possui uma descontinuidade geométrica da base até metade de sua altura. Nesta região é esperada uma concentração de tensões e deformações. Um esquema da geometria da viga, bem como suas medidas, é apresentado na Figura 25.

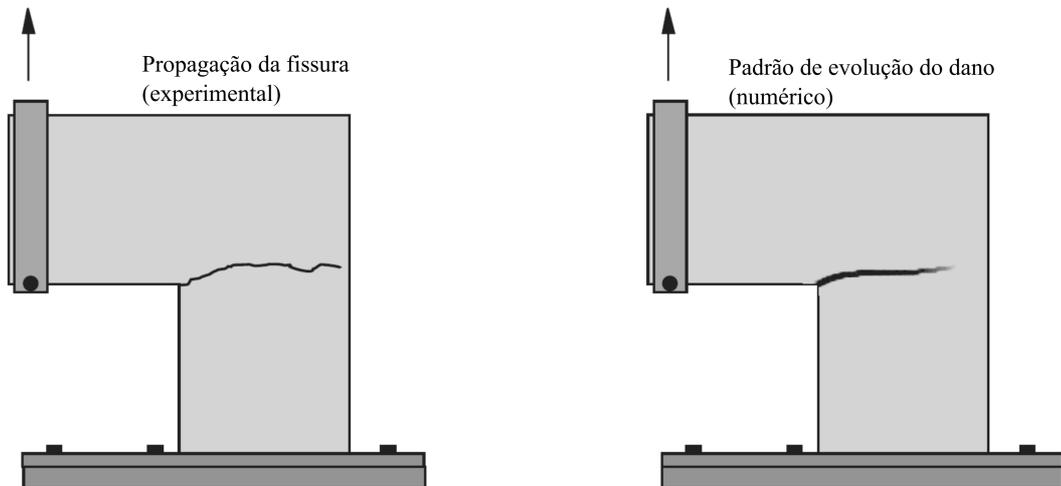
Tanto no modelo de fissuração distribuída quanto no de fissuração discreta, as

Figura 23 - Deformação do painel (deslocamentos ampliados em 100x)



Fonte: Elaborada pela autora.

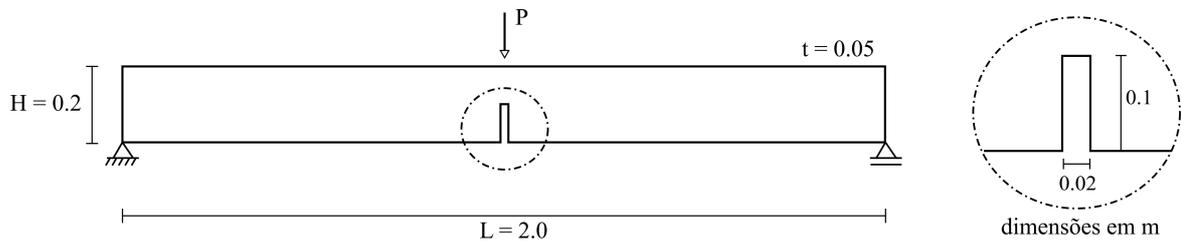
Figura 24 - Resultados encontrados por Winkler *et al.* (2004)



Fonte: Adaptada de Winkler *et al.* (2004).

seguintes propriedades foram consideradas: módulo de elasticidade inicial $E_0 = 30000$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$. A carga de referência é $P = 800$ N e a tolerância para a convergência do método iterativo é de 10^{-4} . Para cada lei tensão-deformação aplicada no modelo de fissura distribuída foram usadas as propriedades apresentadas na Tabela 9. Novamente, os parâmetros ϵ_t usados nas leis de Carreira e Chu (1986) e Boone e Ingraffea (1987) são diferentes para manter o mesmo módulo de elasticidade inicial E_0 definido anteriormente.

Figura 25 - Geometria da viga submetida a flexão em três pontos



Fonte: Adaptada de Penna (2011).

Tabela 9 – Parâmetros das leis tensão-deformação para viga

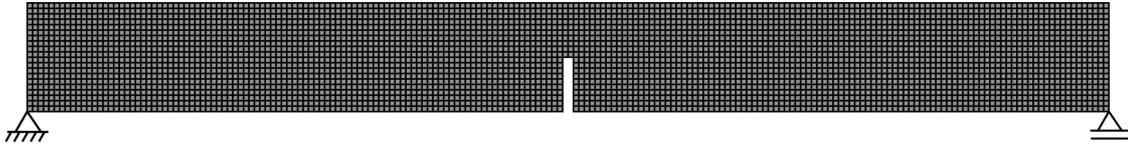
Proposta de Carreira e Chu (1985)	
f_c	33.3 MPa
ϵ_c	0.002
Proposta de Carreira e Chu (1986)	
f_t	3.3 MPa
ϵ_t	0.00022
Proposta de Boone e Ingraffea (1987)	
f_t	3.3 MPa
ϵ_t	0.00011
h_c	40 mm
G_f	0.124 N/mm
Proposta de Kaklauskas (1998)	
f_c	33.3 MPa
ϵ_c	0.002

Fonte: Elaborada pela autora.

Da mesma maneira como foram realizadas as análises para o painel em formato de “L”, o método de controle utilizado nas simulações da viga sob flexão foi o controle de deslocamento generalizado. Também foi empregada uma malha de elementos quadriláteros, Malha 1, quando da aplicação do modelo de fissuração distribuída e uma malha de elementos triangulares, Malha 2, quando da aplicação do modelo de fissuração discreta. A Malha 1 é formada por elementos quadriláteros de dimensão inicial igual a (0.01 x 0.01) m e sua representação está exibida na Figura 26. A Malha 2 resulta da divisão de cada quadrilátero da Malha 1 em quatro triângulos e, devido à sua grande discretização, não ficaria bem representada se exibida na estrutura inteira, sendo adotada a apresentação apenas da parte central da geometria, conforme pode ser visto na Figura 27.

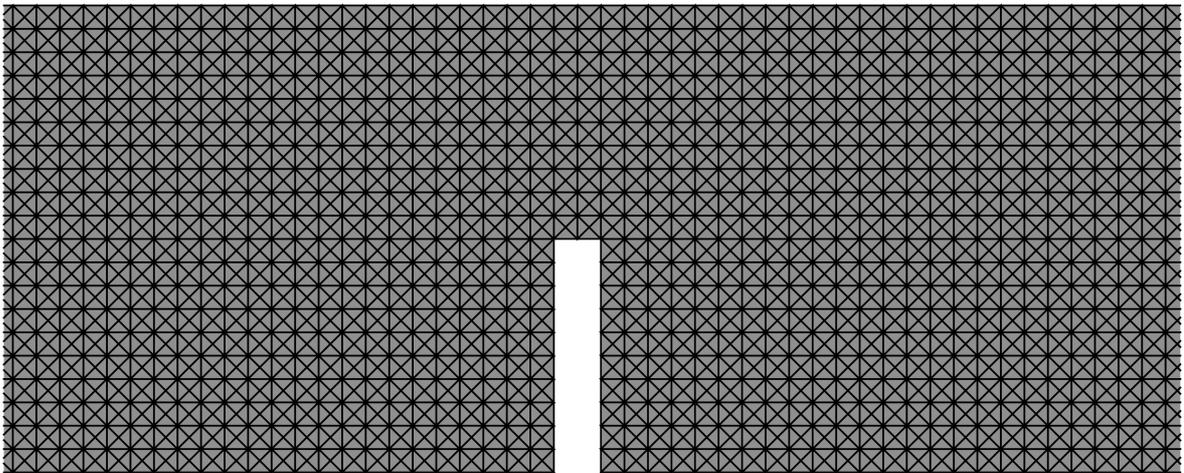
Em relação ao modelo de fissuração distribuída foram consideradas as mesmas combinações de curvas tensão-deformação do exemplo anterior, sendo elas: Carreira e Chu (1985) para compressão e Carreira e Chu (1986) para tração; Carreira e Chu (1985) para

Figura 26 - Malha 1 empregada na análise da viga



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 27 - Detalhe da Malha 2 empregada na análise da viga

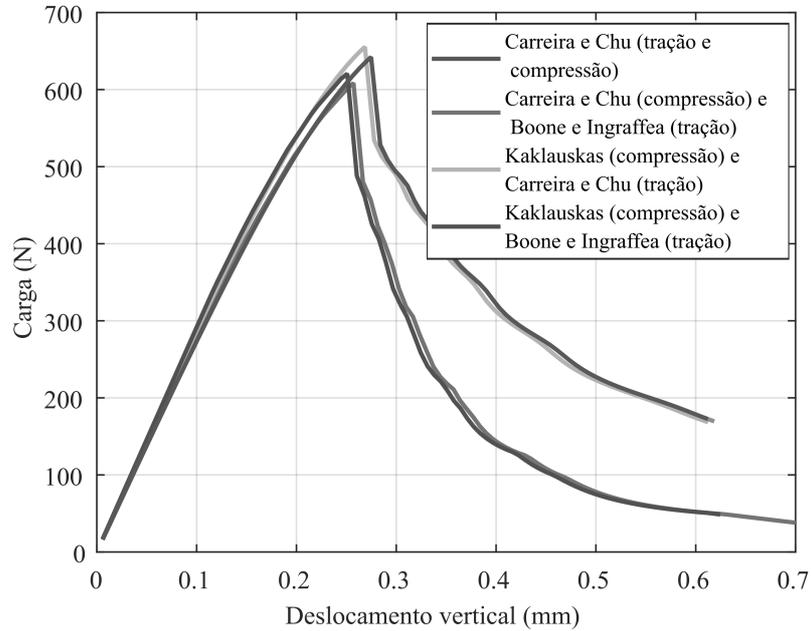


Fonte: Elaborada pela autora.

compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração; Kaklauskas (1998) para compressão e Carreira e Chu (1986) para tração; e Kaklauskas (1998) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração. Os parâmetros adotados para cada relação estão elencados na Tabela 5. Os resultados de deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga concentrada em relação ao valor da carga aplicada na estrutura estão apresentados na Figura 28. Novamente percebe-se um agrupamento das curvas em que o comportamento à tração é simulado pela relação proposta por Boone e Ingraffea (1987) e das curvas em que tal comportamento é governado pela lei de Carreira e Chu (1986), o que reforça a ideia de que as diferenças notadas no regime pós-crítico são devidas a diferença dos parâmetros empregados em cada uma das relações.

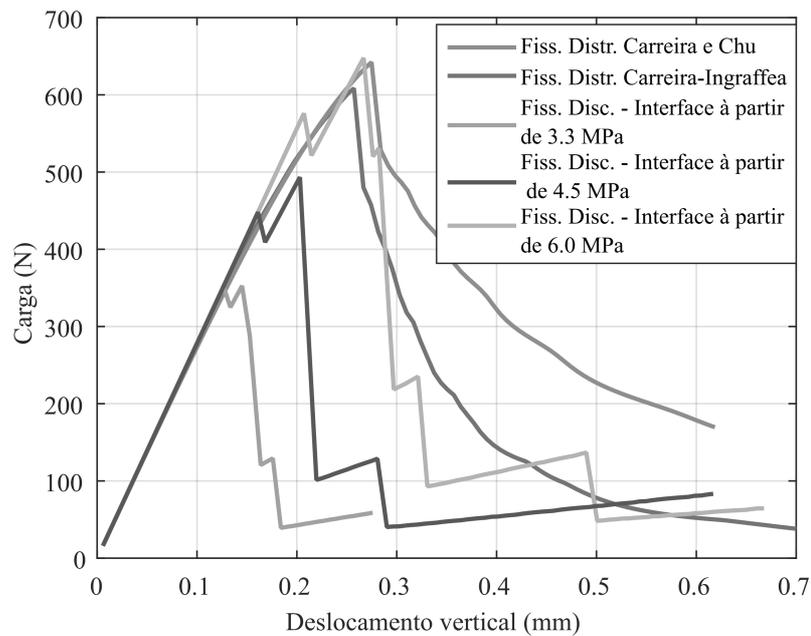
No modelo de fissuração discreta, assim como no estudo do painel de concreto, estabelecendo como limite de tensão para inserção das interfaces o valor de $f_t = 3.3 \text{ MPa}$, não é atingido o nível de carregamento esperado para a estrutura. Uma comparação dos resultados encontrados no modelo discreto quando as interfaces são inseridas para valores de tensões acima de 3.3 MPa, 4.5 MPa e 6.0 MPa, com o modelo distribuído aplicando-se duas combinações para as leis tensão-deformação, é mostrada na Figura 29.

Figura 28 - Curvas de equilíbrio do modelo de fissuração distribuída



Fonte: Elaborada pela autora.

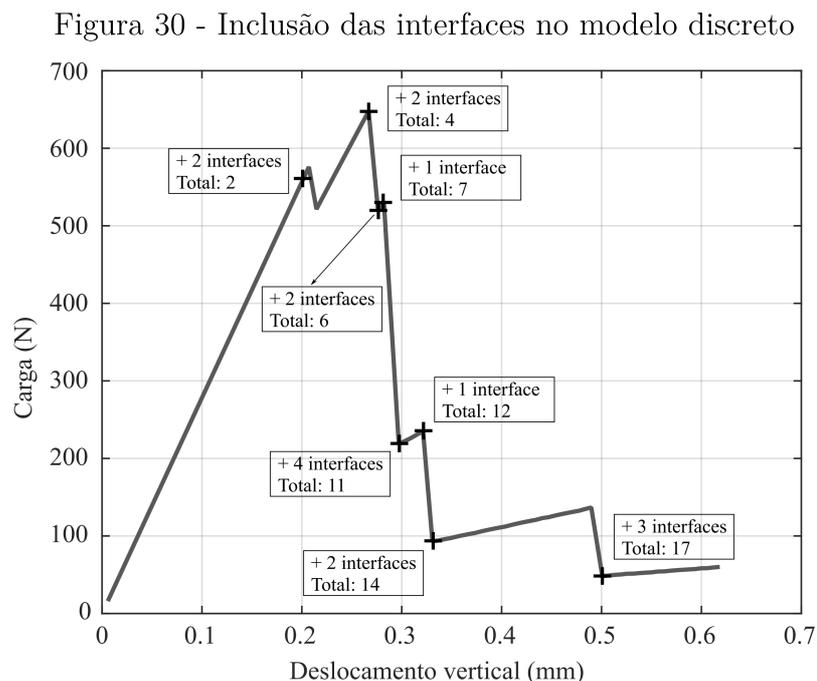
Figura 29 - Comparação dos modelos de fissuração discreta e distribuída



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma análise da Figura 29 permite observar que o resultado obtido para o modelo de fissuração discreta, com interfaces inseridas quando a tensão principal ultrapassa 6.0 MPa, se aproxima mais da curva do modelo de fissura distribuída com emprego da lei de Boone e Ingraffea (1987) para tração no regime pós-crítico, enquanto a curva em que foi utilizada a lei de Carreira e Chu (1986) para tração apresenta valores superiores de carga para o mesmo nível de deslocamentos. Para esse caso, o valor empregado para a energia de fratura G_f , que é um parâmetro de entrada da relação proposta por Boone e Ingraffea (1987), parece provocar uma correspondência entre os modelos discreto e distribuído.

A Figura 30 mostra, através dos pontos destacados na curva de equilíbrio, os momentos de inclusão das interfaces na malha de elementos finitos para o modelo de fissuração discreta considerando uma inserção para tensões superiores a 6.0 MPa. Também é pontuado o número de elementos de interfaces total em cada momento em que o código de análise é interrompido para redefinição da malha.

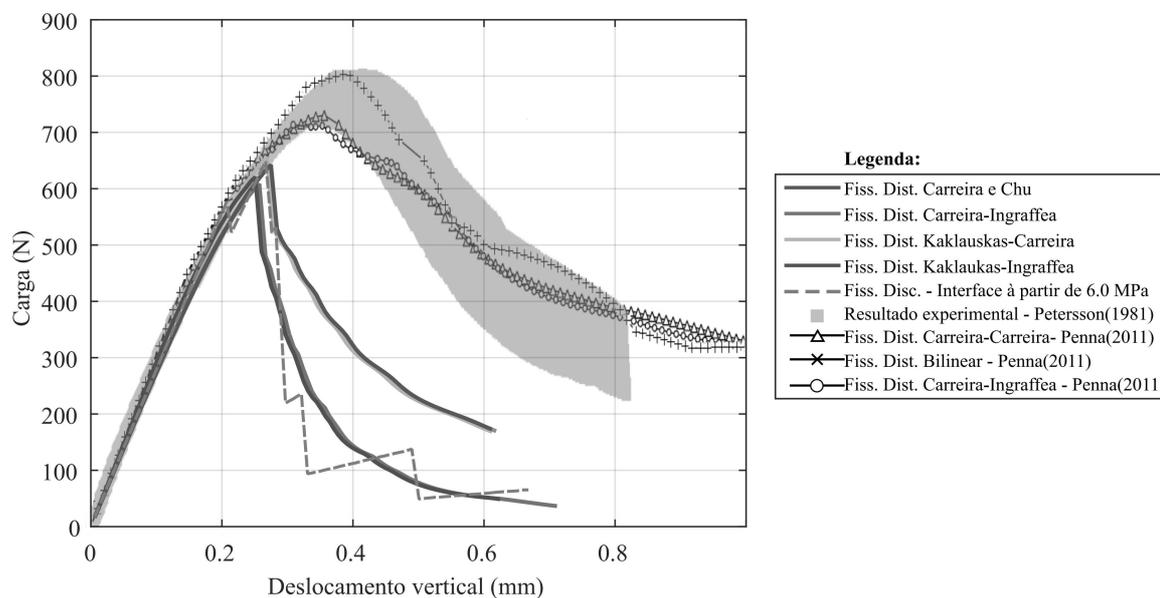


Fonte: Elaborada pela autora.

Esta viga de concreto submetida à flexão em três pontos foi estudada experimentalmente por Petersson (1981). Análises numéricas da estrutura também foram realizadas por Penna (2011) de acordo com sua proposta de estrutura teórica unificada, empregando modelos de fissuração distribuídas com leis tensão-deformação propostas por Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986), e Boone e Ingraffea (1987) combinado com o comportamento à compressão de Carreira e Chu (1985), além de uma proposta de lei bilinear. Os resultados encontrados por esses autores foram comparados com os obtidos a

partir dos modelos propostos no trabalho conforme mostrado na Figura 31.

Figura 31 - Validação dos resultados obtidos



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 31 são visíveis diferenças nos níveis de carga encontrados nos resultados extraídos da literatura e nos obtidos a partir dos modelos implementados neste trabalho, principalmente no regime pós-crítico, onde os modelos dos outros autores atingem valores mais elevados de carregamento. Pode-se notar, também, que as duas curvas onde são empregadas a lei de Boone e Ingrassia (1987) para tração trazem resultados mais próximos dos obtidos com o modelo discreto, para o ramo descendente da curva de equilíbrio, do que quando adotada a lei de Carreira e Chu (1986) para tração.

As Tabelas 10 e 11 apresentam um resumo com os parâmetros empregados e as características das análises computacionais executadas para o modelo de fissuração distribuída considerando quatro variações de curvas tensão-deformação. A Tabela 12 mostra tais valores para o modelo de fissuração discreta quando as interfaces são inseridas para tensões principais maiores que 6.0 MPa. Para esse exemplo, o tempo de processamento do modelo de fissuração discreta é consideravelmente superior ao do modelo distribuído, independente da relação tensão-deformação adotada.

Por fim, na Figura 32 é apresentada a malha deformada no final da análise para cada um do modelo de fissura distribuída com aplicação da lei tensão-deformação de Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986). Na Figura 33 tem-se a imagem da malha deformada obtida com a aplicação do modelo de fissuração discreta e inserção de interfaces para valores de tensão principais superiores à 6.0 MPa.

Para a estrutura da viga notou-se diferenças nas fissuras encontradas para o modelo

Tabela 10 – Características do modelo de fissuração distribuída (Viga)

E_0	30000 MPa
ν	0.2
tolerância	10^{-4}
passos incrementais	100
n° de elementos	3980
n° de nós	4211

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 11 – Características do modelo de fissuração distribuída para diferentes leis tensão-deformação (Viga)

Parâmetro	Carreira e Chu	Carreira- Ingraffea	Kaklauskas- Carreira	Kaklauskas- Ingraffea
tempo de processamento (s)	9935	9614	10429	9521
n° máximo de iterações	166	144	179	133
n° médio de iterações	30.15	29.25	30.04	28.44
E_1 mínimo (MPa)	14.966	0.002726	14.562	0.002515
E_2 mínimo (MPa)	27723	29818	27984	30000

Fonte: Elaborada pela autora.

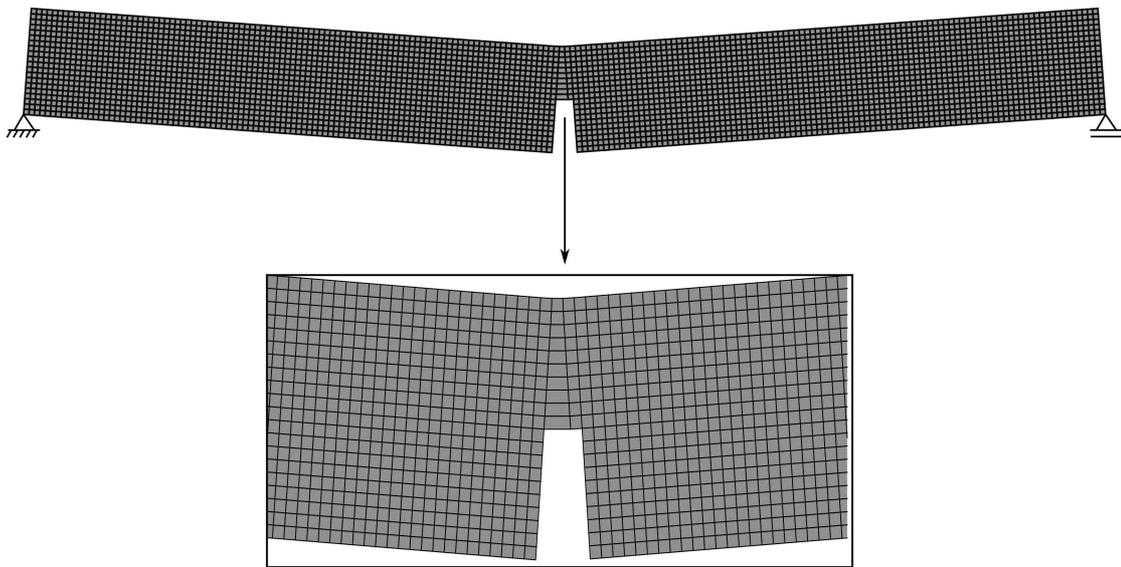
Tabela 12 – Características do modelo de fissuração discreta (Viga)

E_0	30000 MPa
ν	0.2
tolerância	10^{-4}
passos incrementais	100
tempo de processamento (s)	23013
n° de elementos contínuos	15920
n° de elementos de interface	17
n° de nós (início da análise)	8191
n° de nós (final da análise)	8225
n° máximo de iterações	182
n° médio de iterações	13.37

Fonte: Elaborada pela autora.

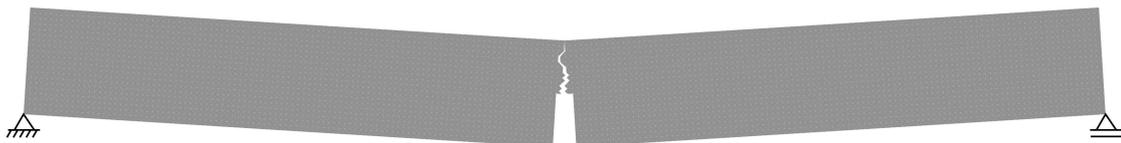
discreto quando as interfaces são inseridas para valores mais baixos ou mais altos de tensões principais. A Figura 34 traz os detalhes da região central da viga para cada valor de tensão estudado. Nela é possível ver com clareza o caminho percorrido pela fissura em cada caso.

Figura 32 - Deformação da viga no modelo distribuído (deslocamentos ampliados em 100x)



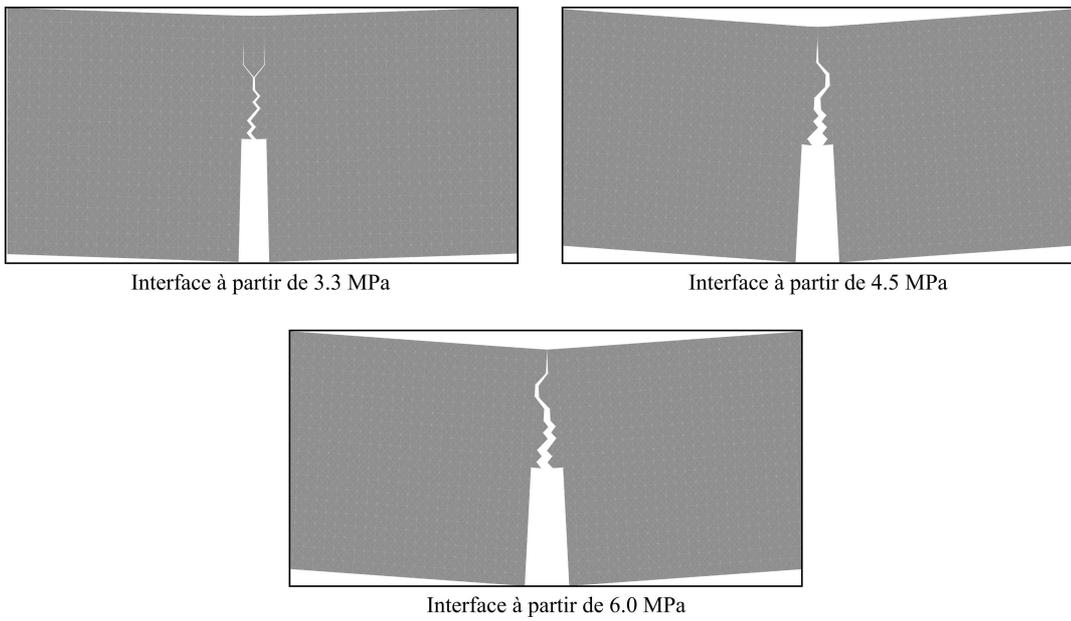
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 33 - Deformação da viga no modelo discreto (deslocamentos ampliados em 100x)



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 34 - Detalhe da fissura (deslocamentos ampliados em 100x)



Fonte: Elaborada pela autora.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou dois modelos computacionais para análise de estruturas de concreto, um de fissuração discreta e outro de fissuração distribuída. O modelo de fissuração distribuída depende de relações tensão-deformação extraídas da literatura que captam a degradação das propriedades do material, que são aplicadas a uma matriz constitutiva secante local. O modelo de fissuração discreta é baseado na redefinição da malha de elementos finitos através da inserção de elementos de interface quando verificados altos níveis de tensão de tração. Nesse momento foi proposta uma adaptação na formulação do elemento de interface IE5, proposto por Coutinho *et al.* (2003), através da definição da sua abertura não pela diferença das coordenadas, mas pela penalização da sua largura através de um parâmetro que varia de acordo com a tensão no interior do mesmo.

Considerando os resultados obtidos pode-se afirmar que o modelo de fissuração distribuída proposto é capaz de simular de maneira bastante correta o comportamento de estruturas de concreto. Comparando-se tais resultados com os obtidos por outros autores, tanto através de análises numéricas quanto através de ensaios experimentais, verifica-se boa concordância. A principal diferença notada refere-se ao valor da carga máxima, que é relativamente menor no modelo proposto do que a carga observada pelos demais autores. No entanto, o comportamento da curva de equilíbrio é similar às demais e a forma da estrutura deformada se apresenta conforme esperado. As diferenças podem ser justificadas pela simplicidade do modelo proposto que não está associado a nenhum modelo de plasticidade, que poderia representar melhor o comportamento pós-crítico do material.

O modelo de fissuração discreta apresentou resultados mais frágeis, com sua curva de equilíbrio formada por diversos trechos retos ao invés de uma curva suave. Além disso, a região descendente é marcada por trechos serrilhados que ocorrem quando são inseridos novos elementos de interface na malha, o que afeta sua rigidez naquele instante, produzindo oscilações no gráfico. Percebeu-se que, da maneira como está formulado o modelo, a redefinição da malha deve ser feita para valores de tensão superiores ao da resistência à tração do concreto, para que sejam atingidas cargas similares ao do modelo distribuído proposto no trabalho e dos modelos de outros autores. Este fato pode ser devido à adoção de um critério simples para determinar a inserção das interfaces, considerando apenas o valor das tensões principais, sem considerar critérios clássicos de falha ou ruptura.

Apesar dos resultados para o modelo de fissuração distribuída terem ficado mais próximos do esperado, com um ajuste da tensão limite para inserção das interfaces, foi possível encontrar resultados satisfatórios também para o modelo de fissuração discreta.

Finalmente, cabe ressaltar que a representação da fissura na malha de elementos finitos é feita de maneira mais expressiva e característica no modelo de fissuração discreta,

onde é possível visualizar a abertura da fissura propriamente dita, seu formato e direção de propagação. Esta representação marcante ocorre principalmente devido à forma dos problemas estudados, que possuem quinas ou descontinuidades no campo das derivadas das funções que definem a geometria do problema, onde são esperadas concentração de tensões e deformações e, conseqüentemente, a abertura de fissuras discretas ou uma concentração maior de fissuras em regiões específicas da malha.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, sugere-se:

- Implementação de um modelo de plasticidade que reproduza de maneira mais precisa os resultados esperados para o regime pós-crítico do concreto.
- Ajuste do parâmetro de inserção das interfaces para o modelo de fissuração discreta.
- Estudo do parâmetro de penalidade α proposto, sua variação e possível calibração através de dados experimentais.
- Implementação de um modelo de fissuração incorporada para comparação com os modelos discreto e distribuído, permitindo ressaltar os aspectos positivos e negativos de cada um, bem como as melhores aplicações de cada modelo.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto: Procedimento**. Rio de Janeiro, 238 p., 2014

ÁLVARES, Manoel da Silva. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o método dos elementos finitos**. 1993. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

ASSIS, Lahis Souza de. **Avaliação da influência da temperatura no dano do concreto via modelagem computacional**. 2019. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262-1267, 1979.

BAZANT, Z. P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 102, n. 2, p. 331-344, 1976.

BAZANT, Z. P.; GAMBAROVA, P. Rough Cracks in Reinforced Concrete. **Journal of the Structural Division**, v. 106, n. 4, p. 819-842, 1980.

BAZANT, Z. P.; OH, B. Crack band theory for fracture of concrete. **Matériaux et Construction**, v. 16, n. 3, p. 155-177, 1983.

BAZANT, Z. P.; OH, B. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 111, n. 4, p. 559-582, 1985.

BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B. E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 70, p. 59-89, 1988.

BOONE, T.; INGRAFFEA, A. R. Simulation of the fracture process at rock interface. *In: Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics*, p. 519-531, 1987.

BREKELMANS, W. A. M.; SCHREURS, P. J. G.; de VREE, J. H. P. Continuum damage mechanics for softening of brittle materials. **Acta Mechanica**, v. 93, p. 133-143, 1992.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. H. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. **American Concrete Institute Journal**, v. 82, n. 6, p. 797-804, 1985.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. H. Stress-strain relationship for plain concrete in tension. **American Concrete Institute Journal**, v. 83, n. 1, p. 21-28, 1986.

CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. Finite Element Studies of Shear-Critical R/C Beams. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 103, n. 3, p. 395-410, 1977.

CHEN, Wai-Fah. **Plasticity in Reinforced Concrete**. McGraw-Hill Book Company Limited, England, 1982.

COUTINHO, A. L. G. A.; MARTINS, M. A. D.; SYDENSTRICKER, R. M.; ALVES, J. L. D.; LANDAU, L. Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. **Computers and Geotechnics**, v. 30, n. 5, p. 347-374, 2003.

DAHLBLOM, O; OTTOSEN, N. S. Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 116, n. 1, p. 55-76, 1990.

d'Avila, Virgínia Maria Rosito. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via Método dos Elementos Finitos**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Analysis of cyclic loading of plane R/C structures. **Computers and Structures**, v. 7, n. 1, p. 137-147, 1977.

de Borst, R.; NAUTA, P. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. **Engineering Computations**, v. 2, p. 35-46, 1985.

DVORKIN, E. N.; CUITIÑO, A. M.; GIOIA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 541-564, 1990.

EINSFELD, Ricardo Amorim. **Simulação Numérica de Fraturamento em Estruturas de Concreto Combinando os Processos Discreto e Distribuído**. 1997. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO, Rio de Janeiro, Brasil.

FARON, A.; ROMBACH, G. A. Simulation of crack growth in reinforced concrete beams using extended finite element method. **Engineering Failure Analysis**, v. 116, 12 p., 2020.

FEENSTRA, P. H.; de Borst, R. Constitutive model for reinforced concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 121, n. 5, p. 587-595, 1995.

FEENSTRA, P. H.; de Borst, R.; ROTS, J. G. Numerical study on crack dilatancy. I: Models and stability analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 117, n. 4, p. 733-753, 1991.

FREITAS, Marcelo Lúcio de. **Um modelo computacional para simulação do comportamento mecânico de lajes fissuradas**. 2019. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

FUINA, Jamile Salim. **Método de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas**. 2004. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas - Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

GERSTLE, W. H.; XIE, M. FEM Modeling of Fictitious Crack Propagation in Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 118, n. 2, p. 416-434, 1992.

- GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. **Journal of Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 94, n. 3, p. 637-659, 1968.
- GROOTENBOER, H. J.; LEIJTEN, S. F. C. H.; BLAAUNWENDRAAD, J. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress. **HERON - Delft University of Technology**, v. 26, n. 1c, p. 1-83, 1981.
- HERRMANN, L. R. Finite element analysis of contact problems. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v. 104, n. 5, p. 1043-1057, 1978.
- HERTZBERG, Richard, W.; VINCI, Richard, P.; HERTZBERG, Jason, L. **Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials**. Wiley, Nova Iorque, 2013.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773-782, 1976.
- INGRAFFEA, A. R.; GERSTLE, W. H.; GERGELY, P.; SAOUMA, V. Fracture Mechanics of Bond in Reinforced Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 110, n. 4, p. 871-890, 1984.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMAN, T. Embedded crack model: I. Basic formulation **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, p. 1269-1290, 2001.
- KACHANOV, L. Time of the Rupture Process under Creep Conditions. **Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk**, v. 8, p. 26-31, 1958.
- KAKLAUSKAS, G. Average stress-strain relations for concrete from experimental moment-strain diagrams of beams and slabs. **Journal of Civil Engineering and Management**, v. 4, n. 2, p. 92-100, 1998.
- LEMAITRE, J.; DUFAILLY, J. Damage measurements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, n. 5-6, p. 643-661, 1987.
- MALEKAN, M.; SILVA, L. L.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S.; PENNA, S. S. Two-dimensional fracture modeling with the generalized/extended finite element method: An object-oriented programming approach. **Advances in Engineering Software**, v. 115, p. 168-193, 2018.
- MANZOLI, O. L. Prediction of crack propagation via local constitutive models with a scheme to track the discontinuity path. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 27, n. 3, p. 180-188, 2011.
- MANZOLI, O. L.; MAEDO, M. A.; BITENCOURT Jr., L. A. G.; RODRIGUES, E. A. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 153, p. 151-170, 2016.
- MAZARS, Jacky. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Tese (Doutorado) - Université Paris, Paris, França.

- MEDINA, Jorge Arturo Hinostraza. **Avaliação de Previsões de Fratura Elastoplástica**. 2014. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO, Rio de Janeiro, Brasil.
- MEHTA, P.,Kumar; MONTEIRO, Paulo, J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. Editora IBRACON - Instituto Brasileiro de Concreto, São Paulo, 2008.
- MENIN, R. C. G.; TRAUTWEIN, L. M.; BITTENCOURT, T. N. Modelos de fissuração distribuída em vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 2, n. 2, p. 166-200, 2009. ISSN 1983-4195.
- MILFORD, R. V.; SCHNOBRICH, W. C. The application of the rotating crack model to the analysis of reinforced concrete shells. **Computers and Structures**, v. 20, n. 1-3, p. 225-234, 1985.
- MONTEIRO, Anelize Borges. **Análise não linear de meios parcialmente frágeis via abordagem global-local do método dos elementos finitos generalizados**. 2019. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. **American Concrete Institute Journal**, v. 67, p. 152-163, 1967.
- NILSON, A. H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. **Journal of American Concrete Institute**, v. 65, n. 9, p. 757-766, 1968.
- OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 461-474, 1989.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized fracture analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 61, p. 189-214, 1987.
- PENNA, Samuel Silva. **Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagens de estruturas de concreto**. 2011. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas - Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- PETERSSON, P. E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. **Division of Building Materials, Lund Institute of Technology**, Report TVBM-1006, type 28, Lund, Suécia, 1981.
- PITUBA, José Júlio de Cerqueira. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. 2003. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- PRAMONO, E.; WILLAM, K. Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 6, p. 1183-1204, 1989.
- RASHID, Y. R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear Engineering and Design**, v. 7, n. 4, p. 334-344, 1968.

- ROTS, J. G.; BLAAUNWENDRAAD, J. Crack Models for Concrete, Discrete or Smeared? Fixed, Multi-Directional or Rotating? **HERON - Delft University of Technology**, v. 34, n. 1, p. 1-59, 1989.
- ROTS, J. G.; de BORST, R. Analysis of mixed-mode fracture in concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 113, n. 11, p. 1739-1758, 1987.
- ROTS, J. G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G. M. A.; BLAAUNWENDRAAD, J. Smeared crack approach and fracture localization in concrete. **HERON**, v. 30, n. 1, p. 1-48, 1985.
- SUIDAN, M.; SCHNOBRICH, W.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. **Journal of the Structural Division**, v. 99, n. 10, p. 2109-2121, 1973.
- WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; LEHAR, H. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 28, n. 7-8, p. 797-819, 2004.
- WOLENSKI, A. R. V.; MONTEIRO, A. B.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. S. Análise fisicamente não linear usando um modelo de microplanos e diferentes medidas de deformação equivalente. *In: XI Simpósio de Mecânica Computacional - II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional*, 2014.
- WOLFF, K. P.; PITANGUEIRA, R. L. S.; PEIXOTO, R. G. A displacement-based and explicit non-planar 3D crack propagation model in the generalized/extended finite element method. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 108, 102647, 2020.
- YANG, Y. B.; Shieh, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.