

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**Teorias de campo efetivas
no espaço tempo curvo**

Tiago Garcia Ribeiro

3 DE AGOSTO DE 2021
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Teorias de campo efetivas
no espaço tempo curvo**

Autor: Tiago Garcia Ribeiro

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

3 DE AGOSTO DE 2021
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ribeiro, Tiago Garcia.

Teorias de campo efetivas no espaço tempo curvo /Tiago Garcia Ribeiro. -- 2021.
90 f.

Orientador: Prof Dr Ilya Lvovich Shapiro

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

1. Teorias efetivas. 2. fatores de forma. 3. gravitação semiclássica. 4. grupo de renormalização. 5. desacoplamento. I. Shapiro, Prof Dr Ilya Lvovich, orient. II. Título.

Tiago Garcia Ribeiro

"Teorias de campo efetivas no espaço tempo curvo".

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em 03 de agosto de 2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Gastão Inácio Krein
Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista



Prof. Dr. Tibério de Paula Netto
SUSTech - China



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Dedicatória

*Dedicado à minha família:
meus pais, João e Nilda,
e meu irmão, Filipe.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro, por todos os ensinamentos, experiências e ideias compartilhadas. Em especial, gostaria de agradecer ao Ilya pela paciência que teve comigo nos períodos finais do meu doutorado, nos quais tive que conciliar a pesquisa e o trabalho.

Agradeço aos meus pais, João e Nilda, e ao meu irmão Filipe por todo o incentivo que me deram para prosseguir nos estudos. Meus pais souberam cativar em mim a importância dos estudos e a valorizar o privilégio de poder frequentar as instituições de ensino que frequentei.

Agradeço à minha esposa Clarice que me acompanhou durante grande parte do doutorado. Agradeço pela paciência, o amor, o carinho, a fé que sempre teve em mim nos momentos que eu mesmo pretendia fraquejar. Concluir esse doutorado seria quase impossível sem você ao meu lado.

Agradeço de forma geral a todos os meus familiares e, em especial, à minha prima Elisa. Muito mais do que uma inspiração para mim, ela foi a pessoa que me falou pela primeira vez sobre vestibular, universidade, instituto federal, bolsa de pesquisa e muito mais. Isso para um adolescente na zona rural sem acesso à internet e a livros, é muito mais que valioso. É transformador.

Agradeço aos membros da minha banca Prof. Dr. Gastão Inácio Krein, Prof. Dr. Tibério de Paula Netto, Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto, Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pelas contribuições feitas ao meu trabalho. E também ao Prof. Dr.

Antônio Duarte Pereira Junior, que mesmo como suplente fez questão de contribuir com o meu trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Omar Zanusso, pela colaboração com meu trabalho durante o doutorado.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Física pelos ensinamentos, aulas e discussões.

Agradeço a todos os funcionários da UFJF, que dia após dia trabalham para manter essa grande instituição em funcionamento. Em especial, agradeço ao Sr. Domingos, secretário do Programa de Pós-Graduação em Física, pela sua eficiência, atenção e boa vontade em atender os alunos.

Agradeço a todos os colegas e companheiros de caminhada, que sempre estiveram comigo nos momentos bons e ruins. Em especial, ao Mateus, à Laysa, ao Juan e ao Eduardo.

Agradeço também a todos os amigos que fiz durante o mestrado na UNIFEI e que sempre me acompanharam durante o doutorado compartilhando experiências e informações.

Agradeço ao meu orientador de mestrado, Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior. O Edisom é um pai acadêmico para mim. Ele me acolheu quando o procurei no início do mestrado em Itajubá. Reconheceu minhas dificuldades, mas acreditou em mim e me incentivou a progredir cada vez mais.

Agradeço também a todos os meus companheiros de trabalho da Fundação CAEd-UFJF. Em especial, aos meus amigos da equipe de Ciências da Natureza: Alex, Cecília, Dayana, Juliana, Mariana, Priscila e Vinícius. Vocês tiveram um papel fundamental na minha caminhada.

E por último, mas não menos importante, agradeço a todas as agências de fomento à pesquisa, CAPES, FAPEMIG, CNPQ e outras mais, por todo o incentivo estudantil que recebi. É triste perceber que cada dia mais as agências de fomento, as universidades e a educação de modo geral são tratadas apenas como despesas. E que a cada dia o direito à educação volta a ser um privilégio de poucos. O Brasil precisa perceber que só será um país de igualdades quando a educação for levada a sério. A educação é a única revolução verdadeira! Viva a educação! Viva a universidade pública! Viva a pesquisa! Viva a ciência!

This is one of the great social functions of science - to free people from superstition.

Steven Weinberg

Resumo

Nesta tese aplicamos a abordagem efetiva a fim de derivar as contribuições quânticas para a gravitação induzidas pela quantização dos campos de matéria. Apresentamos um estudo dos fatores de forma em um modelo simplificado de gravitação em $2D$ para os campos escalar, espinorial e vetorial massivo por meio da solução da *heat kernel* apresentada por Codello & Zanusso. Nesse estudo, a simplicidade do modelo nos permite explorar com clareza o regime ultravioleta (UV) dos resultados, que nos levam à usual ação de Polyakov no caso conforme, ao mesmo tempo em que generalizamos a forma dessa ação para o caso de um campo escalar não mínimo. O limite infravermelho (IR) também é explorado, o que nos leva ao teorema do desacoplamento tanto a partir dos fatores de forma, assim como pelas funções beta. Por fim, estudamos em detalhes a construção de uma teoria efetiva de baixas energias para um modelo de campos escalares leves acoplados a um campo escalar de massa muito maior. Nosso principal interesse é mostrar que mesmo no espaço tempo curvo o campo pesado desacopla no IR, e os resultados para os diagramas com linhas internas mistas podem ser descritos por uma teoria efetiva que leva em consideração apenas os campos leves.

Palavras chaves: Teorias efetivas, fatores de forma, gravitação semiclássica, grupo de renormalização, desacoplamento.

Abstract

In this thesis we apply the effective approach in order to derive the quantum contributions to gravitation induced by the quantization of the fields of matter. We present a study of the form factors in a simplified gravity model in $2D$ for the scalar, spinor and massive vector fields using the heat kernel solution presented by Codello & Zanusso. In this study, the simplicity of the model allows us to clearly explore the ultraviolet (UV) regime of the results that lead us to the usual action of Polyakov in the conformal case, while generalizing the form of this action in the case of a non-minimal scalar field. The infrared (IR) limit is also explored, which leads us to the decoupling theorem both from form factors and beta functions. Finally, we explored in detail the construction of an effective theory of low energies for a model of light scalar fields coupled to a scalar field of much larger mass. Our main interest is to show that even in the curved space-time the heavy field decouples in the IR, and the results for the diagrams with mixed internal lines can be described by an effective theory that takes into account only the light fields.

Keywords: Effective theories, form factors, semi-classical gravitation, renormalization group, decoupling.

Lista de Figuras

1.1	<i>O diagrama de Feynman à esquerda representa o loop para o espalhamento fóton-fóton que deve ser computado a partir da QED. Enquanto isso, o que está à direita, é um diagrama em nível de árvore computado pela teoria efetiva de baixas energias de Euler e Heisenberg.</i>	4
2.1	<i>Representação em termos dos diagramas de Feynman da função de Green de três pontos, obtida pela fixação de três propagadores na função vértice. .</i>	15
5.1	<i>Representação da correspondência em nível de árvore em termos dos diagramas de Feynman. No lado esquerdo está o diagrama da teoria fundamental, onde os pontos se referem às diferentes permutações dos momentos. À direita, está o diagrama correspondente à teoria efetiva.</i>	68
5.2	<i>Diagramas de 1-loop relevantes para a função de dois pontos do campo ϕ^a na ordem g^2 dentro da teoria fundamental no espaço das coordenadas. . . .</i>	69
5.3	<i>Os diagramas para a função dois pontos no espaço dos momentos.</i>	70
5.4	<i>Representação da correspondência em 1-loop no regime IR entre a teoria fundamental (lado esquerdo da igualdade) e a teoria efetiva com interação quártica do campo escalar (lado direito da igualdade).</i>	73

Lista de publicações

- T. G. Ribeiro, I. L. Shapiro & O. Zanusso; *Gravitational form factors and decoupling in 2D*, Physics Letters B, **782** (2018) 324 - 331.
- T. G. Ribeiro & I. L. Shapiro; *Scalar model of effective field theory in curved space*, JHEP. **10** (2019) 163 .
- P. M. Teixeira, I. L. Shapiro & T. G. Ribeiro; *One-Loop Effective Action: Nonlocal Form Factors and Renormalization Group*, Gravit. Cosmol. **26** (2020) 185 - 199 .

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de publicações	viii
1 Introdução	1
2 Visão geral sobre Teoria Quântica de Campos	12
2.1 Funcional gerador das funções de Green	12
2.2 Ação efetiva	13
2.3 Regularização dimensional e fatores de forma	18
2.3.1 A ideia geral da regularização dimensional	18
2.3.2 Ferramentas matemáticas	20
2.3.3 Caso mais simples da integral de loop	24
2.3.4 Divergências UV e fator de forma não local	26
3 Ação efetiva a 1-loop e fatores de forma não locais no espaço curvo	31
3.1 Ação efetiva no espaço tempo curvo	31
3.2 Solução da heat kernel	34
3.3 Fatores de forma para o campo escalar massivo	38

3.3.1	Termo de ordem zero	38
3.3.2	Termo de primeira ordem	39
3.3.3	Termos de segunda ordem	40
4	Fatores de formas em $2D$	47
4.1	Ação efetiva em $2D$	48
4.1.1	Expansão não local da heat kernel	50
4.1.2	Setor de vácuo de uma teoria geral a 1-loop	51
4.2	Campo escalar massivo em gravidade $2D$	53
4.2.1	Derivação da ação efetiva e função β	54
4.2.2	Recuperando a ação de Polyakov no limite conforme	55
4.2.3	Os dois regimes para β_G^s	56
4.2.4	Sobre a não analiticidade da expressão (4.33)	57
4.3	Espinores de Dirac	58
4.4	Campos vetoriais com e sem massa	60
5	Modelo escalar de teoria de campos efetiva no espaço curvo	62
5.1	O modelo e sua renormalização	62
5.1.1	Ação clássica	62
5.1.2	Divergências UV	63
5.1.3	Funções β	64
5.1.4	Correspondência UV e IR em nível árvore	66
5.2	Cálculos a 1-loop e abordagem efetiva	68
5.2.1	Correções a 1-loop na teoria completa	68
5.2.2	Regularização dimensional	70
5.3	Comportamento assintótico	72
5.3.1	Correspondência com o IR em nível 1-loop	73
5.4	Desacoplamento em um campo gravitacional fraco	75
6	Conclusões e perspectivas	80
	Bibliografia	83

CAPÍTULO 1

Introdução

Na física a ideia de uma teoria efetiva está relacionada a uma descrição dos fenômenos que é restrita a alguma escala de energia. Isso significa que a teoria efetiva possui menos graus de liberdade que uma teoria mais fundamental, levando em conta apenas os parâmetros que são relevantes na escala de energia sob consideração. Na física clássica esse tipo de abordagem passa muitas das vezes por despercebido. Tomemos como exemplo a mecânica newtoniana e relatividade especial de Einstein para o movimento dos corpos. Se estamos tratando com o movimento de corpos em um regime de velocidades muito menores que a velocidade da luz, a descrição newtoniana é suficiente para nos fornecer o entendimento dos mais diversos problemas, sem levar em consideração nenhuma correção ou interpretação oriunda da teoria da relatividade especial de Einstein. Porém, quando a velocidade dos corpos é comparável à da luz, a visão newtoniana não é mais aplicável e a descrição satisfatória para os fenômenos nesse regime de velocidades é feita via relatividade de Einstein. Nesse sentido, a descrição newtoniana pode ser vista como uma teoria efetiva do movimento dos corpos no regime de baixas velocidades. Vale notar o quão diferente essas teorias são em suas interpretações.

O uso de teorias efetivas não se resume à física clássica, tendo lugar inclusive na descrição quântica do mundo microscópico. Dentro da teoria quântica de campos um longo caminho foi percorrido desde a eletrodinâmica quântica (QED, na sigla em inglês)[1], pro-

posta por Dirac no final dos anos vinte, até a primeira aparição formal de uma teoria de campo efetiva nos trabalhos de Weinberg no fim da década de setenta [2]. Todo esse caminho foi necessário para que se desenvolvessem métodos como a renormalização e o grupo de renormalização (para uma revisão histórica, veja [3]). Esses métodos somados ao teorema do desacoplamento [4] levariam à interpretação de que, assim como na física clássica a descrição newtoniana no regime de baixas velocidades não é afetada pela relatividade einsteiniana, na física quântica a descrição dos fenômenos nas baixas energias é blindada dos processos que se desenrolam nas altas energias. Isso impõe o desafio de que qualquer teoria quântica de campos que tenha resultados satisfatórios em uma certa escala de energia pode não ser suficiente para a descrição dos fenômenos quando energias cada vez maiores são levadas em conta. Dessa maneira ela é vista como uma teoria de campo efetiva, restrita a uma escala finita de energia. Por outro lado, a validade da abordagem efetiva no mundo quântico, permite que em cada escala de energia os fenômenos físicos possam ser estudados por meio de modelos com seus parâmetros e simetrias relevantes, sem que para isso seja necessário conhecer a teoria mais fundamental possível, válida em qualquer escala de energia (para referências introdutórias ao assunto, veja [5, 6, 7]).

Atualmente as teorias de campo efetivas têm grande aplicação em teorias quânticas de campo, assim como em outras áreas da física, tais como física nuclear e do estado sólido. A consolidação da abordagem efetiva possibilitou a compreensão de que teorias mais fundamentais podem ser alcançadas através da construção de modelos mais simplificados, que a partir de avanços teóricos e experimentais vão sendo modificados para incorporar cada vez mais informações da física em altas energias, até que uma teoria mais fundamental seja conhecida. É essa perspectiva que levou à construção do Modelo Padrão da Física de Partículas, que incorpora as interações eletromagnética, forte e fraca. Mas mesmo essa teoria mais fundamental é considerada uma teoria de campo efetiva. E é essa mesma perspectiva que norteia a tentativa de uma descrição consistente da Relatividade Geral de Einstein dentro do formalismo da física quântica. O ponto de partida é considerar a teoria de Einstein como uma teoria efetiva que descreve o espaço tempo no qual os campos de matéria são quantizados. A ideia é que a presença desses campos adicione termos à teoria inicial de Einstein, que correspondem às correções quânticas provenientes da física em altas energias.

Embora o desenvolvimento formal das teorias de campo efetivas tenha ocorrido a partir dos trabalhos de Weinberg, a ideia dessa abordagem já havia aparecido em outros trabalhos. Em 1936 Euler e Heisenberg aplicaram a eletrodinâmica quântica desenvolvida por Dirac para calcular o espalhamento fóton-fóton [8]. Esse espalhamento é um processo previsto pela eletrodinâmica quântica onde dois fótons se espalham e criam um par elétron-pósitron, que em seguida faz a transição inversa dando origem, novamente, a dois fótons, respeitando a conservação de momento e energia.

Como pode ser notado o espalhamento de dois fótons é um processo puramente quântico. Na física clássica as equações de Maxwell são lineares e o princípio da superposição é válido. Contudo, se na eletrodinâmica quântica os fótons interagem entre si, isso deve levar à adição de termos não lineares nas equações clássicas do eletromagnetismo. O método utilizado no trabalho de Euler e Heisenberg levou às primeiras correções para as equações de Maxwell, vindas a partir da quantização dos elétrons e pósitrons. Para isso eles consideraram apenas fótons com energias menores que a massa do elétron. Nesse regime de energias a criação de pares elétron-pósitron não é esperada, de forma que os graus de liberdade associados a esses pares de partículas virtuais não apareceriam explicitamente nos resultados.

Aplicando essa ideia, e levando em conta as simetrias relevantes, Euler e Heisenberg obtiveram a seguinte lagrangiana efetiva (para mais detalhe, considere [7, 9])

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{a}{m_e^4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 + \frac{b}{m_e^4}F^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}F^{\sigma\rho}F_{\rho\mu} + \mathcal{O}(F^6/m_e^8), \quad (1.1)$$

onde m_e é a massa do elétron e $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético, enquanto a e b são proporcionais à constante de estrutura fina $\alpha_0 = 1/137$,

$$a = -\frac{\alpha_0}{36} \quad \text{e} \quad b = \frac{7\alpha_0^2}{90}. \quad (1.2)$$

Como pode ser visto \mathcal{L}_{eff} depende apenas dos graus de liberdade associados aos fótons. O primeiro termo nessa lagrangiana representa o eletromagnetismo clássico, com fótons livres se propagando. Os demais termos caracterizam uma expansão em ordens de $1/m_e$ que adiciona correções quânticas às equações de Maxwell. Em especial, a não linearidade desses termos evidencia a violação do princípio da superposição.

As informações relevantes no regime de energia considerado por Euler e Heisenberg estão nas constantes a e b , as quais podem ser calculadas a partir da comparação entre

os resultados obtidos pela QED e pela lagrangiana efetiva, para um caso especial. Na linguagem atual dos diagrams de Feynman, que não era conhecida em 1936, o que Euler e Heisenberg fizeram pode ser representado conforme Fig. (1.1). Enquanto que os resultados obtidos por eles podem ser alcançados pela integração funcional dos graus de liberdade fermiônicos [7]

$$e^{i\Gamma_{eff}[A_\mu]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]}.$$
 (1.3)

Nessa expressão fica claro que a integração funcional leva em conta apenas os campos fermiônicos dando origem a uma ação efetiva $\Gamma_{eff}[A_\mu]$ que depende apenas dos fótons. De fato, essa expressão computa os efeitos da quantização dos férmions sobre um campo eletromagnético de fundo.

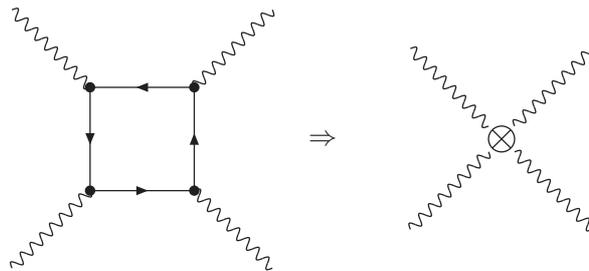


Figura 1.1: O diagrama de Feynman à esquerda representa o loop para o espalhamento fóton-fóton que deve ser computado a partir da QED. Enquanto isso, o que está à direita, é um diagrama em nível de árvore computado pela teoria efetiva de baixas energias de Euler e Heisenberg.

Atualmente, o resultado de Euler e Heisenberg é uma parte importante do conhecimento e entendimento que se tem acerca de QED e de QFT, de modo geral. À época, a lagrangiana efetiva obtida por eles apontava no sentido de melhorar o entendimento das consequências da QED. Além disso, a simplicidade matemática da lagrangiana efetiva, em comparação com a teoria completa, fez dela uma base para futuras aplicações em áreas como, por exemplo, a óptica quântica [10].

Outro exemplo da abordagem efetiva é a teoria proposta por Fermi em 1934 para explicar o decaimento beta [11]. Nessa teoria Fermi procura descrever o processo de decaimento de um nêutron em um próton, um elétron e um anti-nêutrino do elétron a partir de uma interação pontual, cuja lagrangiana é dada por um produto de operadores

que representam as partículas relevantes e uma constante de acoplamento. A proposta de Fermi permitiu explicar vários fenômenos à época. Atualmente, com o desenvolvimento da teoria eletrofraca, sabe-se que a interação entre os férmions é mediada pelo bóson W, e a teoria de Fermi é vista como uma teoria de campo efetiva para energias muito menores que massa desse bóson [7].

A eletrodinâmica quântica apresentada por Dirac no final da década de vinte é uma teoria que combina os princípios da Relatividade Especial e da Mecânica Quântica para dar uma consistente formulação da interação entre o campo eletromagnético quântico, cuja partícula associada é o fóton, e o campo quântico de Dirac, associado às partículas portadoras de carga elétrica, elétrons e pósitrons. Nessa teoria a interação entre duas cargas elétricas não se dá mais pela força coulombiana descrita por um potencial. Em vez disso, a interação corresponde à troca de fótons virtuais que se propagam pelo espaço com possíveis transições para pares de elétron-pósitron [3].

Esses processos permitidos pela QED levam a correções que dão origem a uma série de termos que caracterizam uma expansão perturbativa. O problema encontrado pelos primeiros físicos que tentaram fazer predições a partir da QED ainda na década de trinta, é que muitos dos termos dessa série são infinitos. Essas divergências são um problema visto que nessa teoria as correções podem ser expressas como uma série de potências na constante $\alpha_0 = 1/137$. E dessa forma pensava-se que um pequeno número de termos era suficiente para determinar a matriz de espalhamento com boa precisão. No entanto, no espalhamento Compton, por exemplo, a primeira aproximação leva a resultados finitos, contudo, na segunda ordem, a polarização do vácuo produz uma contribuição infinita, caracterizada pela integral sobre os possíveis valores do momento para as partículas virtuais [3].

Embora as divergências apontassem para a necessidade de uma reformulação das bases da teoria, o problema dos infinitos na QED foi resolvido no final dos anos quarenta (veja, por exemplo, [3, 12]). O que os físicos dessa época conseguiram mostrar é que as divergências podem ser agrupadas em um número finito de termos, dois no caso da QED, cuja estrutura é a mesma dos termos da lagrangiana original para a massa e constante de acoplamento. Os efeitos desses termos adicionais podem, então, ser incluídos na teoria original através de uma redefinição de seus parâmetros, por um processo que ficou conhecido como renormalização da massa e constante de acoplamento. Na QED, em especial,

um número finito de contratermos remove as divergências em todas as ordens na expansão perturbativa e a teoria é dita ser renormalizável (para detalhes, veja [9]).

O processo de renormalização permite a definição dos parâmetros renormalizados da teoria, cujos valores são associados àqueles medidos experimentalmente, em termos dos quais as quantidades físicas de interesse são calculadas. Essas expressões físicas são finitas e independentes da massa e constante de acoplamento nuas. Com o adequado processo de renormalização construído para a QED, a teoria levou a resultados que estavam em completo acordo com os valores experimentais, como são os casos do momento magnético anômalo do elétron e o desvio Lamb [3, 5].

O sucesso da QED fez da renormalizabilidade um critério para a construção de novas teorias quânticas de campo. Esse critério invalidou em grande parte a aceitação de teorias como as de Euler-Heisenberg e Fermi apresentadas anteriormente. Isso porque essas teorias acrescentam em cada ordem na teoria de perturbação novas estruturas à lagrangiana, fazendo delas teorias não renormalizáveis. Este cenário só veio a mudar com o desenvolvimento do grupo de renormalização e o teorema do desacoplamento.

A remoção das divergências na QED pelo processo de renormalização é feita a partir da redefinição dos seus parâmetros de massa e constante de acoplamento. Isso pode ser exemplificado da seguinte maneira. Se as integrais divergentes na QED são inicialmente calculadas até um fator de corte Λ_0 , com $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ no fim, como a teoria inicial pode ser modificada para levar a uma nova, cujo fator de corte seja $\Lambda < \Lambda_0$? A resposta para isso é que essa modificação exige simplesmente uma redefinição dos parâmetros da teoria, que é livre, uma vez que o fator de corte é arbitrário. Isso é consistente, desde que os parâmetros nus não são vistos como observáveis. O fato importante que se segue disso é que as expressões para as quantidades físicas mensuráveis permanecem invariantes frente a essa arbitrariedade dos parâmetros. É essa invariância que levou ao desenvolvimento da técnica do grupo de renormalização nos anos cinquenta [3].

Nesse novo cenário o fator de corte Λ deixa de ser um truque para a renormalização da teoria, e torna-se parte de uma interpretação real como sendo a escala de energia. Dessa maneira uma mudança na escala de energia é compensada por uma mudança nos parâmetros da teoria, os quais obedecem às equações do grupo de renormalização. A solução dessas equações permite mostrar como é a dependência desses parâmetros com

a escala de energia em que a teoria é considerada [5]. Foi essa construção que permitiu Bogoliubov e Shirkov chegarem em 1956 à expressão para a carga efetiva do elétron [13]. Isso explica, por exemplo, porque a constante de estrutura fina, obtida através da carga do elétron medida na escala da massa do bóson Z, é $1/128,9$, em vez do usual valor obtido por Milikan, ou seja, $1/137$.

A interpretação física do fator de corte como escala de energia leva a uma conclusão inevitável. Se o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ é tomado, não há razão pela qual esperar que a QED deva ser renormalizável. Isso porque nesse regime outras partículas se acoplarão aos elétrons e fótons. Assim, apenas uma teoria final, deveria ser finita. Por outro lado, não há justificativa para considerar teorias com um fator de corte finito como teorias inferiores. Esse fator reflete apenas o regime de energia em que a teoria é aplicável, a partir do qual novas partículas devem ser levadas em conta. Essa interpretação reabilita a construção das teorias de campo efetivas e, em especial, a técnica do grupo de renormalização pode ser estendida para essas teorias, mesmo que elas sejam não renormalizáveis. Inclui-se para aplicação no regime em que novas partículas aparecem [5].

Além da técnica do grupo de renormalização, outra descoberta foi de grande importância para a consolidação das teorias de campo efetivas; o teorema do desacoplamento apresentado por Appelquist e Carazzone em 1975 [4]. Segundo esse teorema, dada uma teoria renormalizável com partículas leves e pesadas, digamos $m_2 > m_1$, os efeitos da física em escala m_2 podem ser sempre incluídos de maneira efetiva na física em escala m_1 através de um processo de renormalização, que modifica os parâmetros da teoria ou por meio de correções proporcionais à potência negativa de m_2 [7]. Dessa maneira a física nas baixas energias se desacopla da física em altas energias e o teorema possibilita a existência de uma teoria de campo efetiva em escala m_1 , válida até que a escala de energia se aproxime de m_2 . As conclusões desse teorema são exemplificadas pela teoria de Euler-Heisenberg apresentada anteriormente. Nela o que se tem é o desacoplamento da física na escala de energia da massa do elétron, quando apenas fótons com energia $E_{fóton} \ll m_e$ são considerados.

Outra consequência do teorema do desacoplamento é que ele possibilita uma contundente interpretação das teorias não renormalizáveis. Novamente tomando como exemplo a teoria de Euler-Heisenberg é possível notar que os termos adicionais que tornam a teoria de

campo efetiva de baixas energias não renormalizável, são na verdade contribuições advindas da física em altas energias. Essas contribuições apontam para o fato de que as escalas de energia podem ser consideradas como regimes quase autônomos, cada um descrito por uma teoria de campo efetiva que leva em conta as partículas, interações e simetrias que são relevantes para a escala que está sob consideração.

Todo o desenvolvimento apresentado até aqui fez com que as teorias de campo efetivas se tornassem comum na física de partículas, principalmente com os trabalhos de Weinberg no final dos anos setenta. A partir daí o sucesso das teorias quânticas de campo se tornou cada vez maior, levando a descrições extremamente precisas dos fenômenos não gravitacionais. De outro lado a Relatividade Geral de Einstein produz resultados notáveis a respeito da descrição dos fenômenos e é atualmente aceita como a descrição mais completa da interação gravitacional. As dificuldades aparecem quando se busca uma quantização da gravidade para acomodar em uma mesma descrição essas teorias de sucesso.

É essa dificuldade de formular uma teoria quântica da gravitação que leva à consideração da abordagem efetiva dentro desse contexto. Se não conhecemos a teoria mais fundamental, talvez possamos pelo menos estimar as pequenas correções que a física quântica incorporará na gravidade. Nesse sentido a Relatividade Geral de Einstein passa a ser vista como uma teoria efetiva da gravidade em baixas energias, à qual novos termos que respeitam as simetrias relevantes devem ser adicionados para levar em conta os efeitos da física em altas energias [14, 15, 16, 17].

Aqui deve-se deixar claro que as abordagens aplicadas para derivar correções quânticas à Relatividade Geral podem diferir entre si. Em especial, na abordagem semiclássica, como apresentada neste trabalho, apenas os campos de matéria são quantizados e a gravitação é considerada como um campo clássico “de fundo”. Por outro lado, há também a abordagem efetiva de gravitação quântica na qual a métrica é quantizada, mas de tal forma que os graus de liberdade massivos são ignorados assumindo o desacoplamento [17](veja também [18] para uma discussão crítica desta abordagem). As duas abordagens são complementares, especialmente porque a escala de energia onde os modos massivos da gravitação tornam-se relevantes correspondem à escala de Planck, que é muito maior que as massas de todas as partículas elementares e, inclusive, maior do que a escala de teorias de grande unificação (GUT’s). O que do ponto de vista padrão significa dizer que os efeitos da gra-

vitação quântica devem ser importantes apenas na escala de Planck. A razão para isso é que sem os modos massivos esses efeitos são muito fracos [17, 18]. Vale a pena mencionar que uma parte das considerações apresentadas nesta tese [19], é motivada pelo interesse de estudar em detalhes o desacoplamento de modos massivos em gravitação quântica efetiva.

De maneira geral a ideia que se aplica à Relatividade Geral é muito similar àquela usada por Euler e Heisenberg em 1936 para adicionar correções quânticas às equações de Maxwell. Para eles o campo eletromagnético era um fundo clássico e a quantização das partículas carregadas levaria, nas baixas energias, à correções nas equações que descrevem esse fundo. Na gravitação, o fundo clássico é descrito pela Relatividade Geral de Einstein na qual o único grau de liberdade relevante é a própria métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço. Porém acoplado a esse espaço clássico estão os campos quânticos de matéria. Então o primeiro passo é realizar uma quantização desses campos no espaço tempo curvo, levando em conta a covariância geral. Uma vez feito isso, o próximo passo é procurar as correções para as equações de Einstein, que representam como os campos de matérias quânticos afetam o fundo clássico.

A tentativa de derivar as correções quânticas para as equações clássicas da gravidade a partir das considerações anteriores é conhecida como abordagem semiclássica [14, 15]. Nessa abordagem o termo de fonte nas equações de Einstein deixa de ser o usual tensor energia momento e passa a ser o valor esperado desse tensor para os campos de matéria quantizados em um espaço tempo curvo, na forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (1.4)$$

Lembrando que o valor esperado desse tensor levará em conta um esquema de renormalização.

Em termos técnicos o objetivo central da abordagem semiclássica é construir um ação efetiva do vácuo definida através da integral funcional

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi, g_{\mu\nu}]}. \quad (1.5)$$

Vale a pena notar a semelhança dessa definição com a equação (1.3). Inclusive ressaltar que a ação efetiva é um funcional apenas da métrica. Como deve ser esperado, $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ é expressa como uma soma, na forma [14]

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = S_{vac} + \bar{\Gamma}_{vac}, \quad (1.6)$$

onde S_{vac} é a ação clássica do vácuo e $\bar{\Gamma}_{vac}$ são as contribuições quânticas vindas da integração sobre os campos de matéria.

Como não se espera que a gravidade afete de forma significativa a dinâmica dos campos em experimentos laboratoriais, a ação efetiva se torna o principal objeto de interesse na abordagem semiclássica, contendo as contribuições quânticas para a dinâmica da própria gravidade. A expectativa é que essas contribuições quânticas para a ação gravitacional clássica desempenhe um importante papel em áreas como a cosmologia e a física de buracos negros [14, 15].

Desde os trabalhos iniciais (para referências, veja [20]) grandes avanços foram alcançados a partir da abordagem efetiva, o que se deve em grande parte ao desenvolvimento do método da *heat kernel* por Barvinsky e Vilkovisky [21] e Avramidi [22]. Como resultado desses trabalhos as expressões gerais para as não localidades no espaço curvo foram derivadas, e permitiu o cálculo dos fatores de forma não locais a 1-*loop* para diferentes campos [23, 24, 25, 26] e modelos [27].

Os avanços anteriores possibilitaram, inclusive, a confirmação do teorema do desacoplamento para a gravitação semiclássica até ordem quadrática na curvatura [23, 24]. Em ordens superiores o que se espera é que o teorema permaneça válido e os graus de liberdade associados aos campos pesados se desacoplem no limite infravermelho (IR). Contudo, a generalização do teorema nessa situação não é algo simples, uma vez que existem diagramas com campos pesados e leves em suas linhas internas, e o teorema do desacoplamento na sua versão original não funciona nesses casos. A pergunta que se faz, então, é: o que acontece com a parte finita desses diagramas quando a energia dos campos nas linhas externas do *loop* é muito menor que a massa do campo pesado no propagador interno? É na busca de uma resposta para essa pergunta que nesta tese refazemos uma parte do caminho seguido pela gravitação semiclássica até aqui [28], incorporando contribuições nesse tratamento a partir de um modelo simplificado de gravitação em duas dimensões [29]. E por fim aplicamos o método das coordenadas normais para trabalhar com *loops* mistos no espaço tempo curvo [19].

Esta tese é organizada da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos uma revisão geral sobre QFT. Iniciamos a partir da abordagem funcional para definirmos a ação efetiva (função vértice). Em seguida descrevemos os detalhes do método da regularização

dimensional, aplicando-o a fatores de formas não locais.

Já no capítulo 3, construímos a ação efetiva no espaço tempo curvo e apresentamos sua solução a partir da *heat kernel* até ordem quadrática na curvatura, para o caso de um campo escalar acoplado ao fundo gravitacional. As expressões derivadas dessa solução são tratadas via regularização dimensional com uma grande riqueza de detalhes, levando explicitamente aos fatores de formas não locais, que aparecem na segunda ordem da expansão nas curvaturas. Esses fatores nos permitem estudar o comportamento das expressões nos regimes UV e IR, inclusive, neste último, verificar o teorema do desacoplamento.

No capítulo 4, consideramos um modelo recente da expansão não local da *heat kernel*, no qual os fatores de formas não locais já aparecem em primeira ordem na curvatura [25]. Para testar as possibilidades advindas desse modelo consideramos por simplicidade o caso de um espaço 2-dimensional, no qual o resultado para o limite conforme já é conhecido ser a ação de Polyakov. Isso nos permite incorporar novos termos a essa ação através dos fatores não locais. O modelo também nos dá a possibilidade de derivar as funções beta para o grupo de renormalização através dos fatores de forma na primeira ordem da expansão. Funções essas que são exploradas nos regimes de energia UV e IR. A abordagem desse capítulo não se restringe apenas ao campo escalar, sendo aplicada também para o campos espinorial e vetoriais com e sem massa.

Por fim, no capítulo 5, apresentamos um modelo de N campos escalares leves acoplados a um campo escalar pesado e derivamos via técnica de Schwinger De-Witt as divergências e as respectivas funções beta para o modelo. Em seguida mostramos inicialmente que em nível dos diagramas de árvore o modelo em questão é similar nas baixas energias a uma teoria de N campos escalares com interação quártica, o que é válido inclusive no espaço curvo. A nível de *1-loop* no espaço plano os diagramas mistos são derivados e a correspondência entre a teoria fundamental, contendo os campos leves e pesados, e a teoria efetiva de baixas energias é obtida. Resultado este que pode ser encontrado na literatura [30]. Contudo, generalizamos esse resultado para o espaço curvo, considerando os campos acoplados à gravidade e realizando a expansão dos propagadores via coordenadas normais. Com essa abordagem conseguimos verificar o desacoplamento desses campos para um campo gravitacional fraco.

Visão geral sobre Teoria Quântica de Campos

2.1 Funcional gerador das funções de Green

Em teoria de campos um instrumento fundamental é o funcional gerador das funções de Green $Z[J]$, definido como [9, 31, 32]

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i\{S[\varphi] + \int d^4x \varphi(x)J(x)\}}, \quad (2.1)$$

onde $S[\varphi]$ é a ação clássica da teoria. Inicialmente estamos considerando $\hbar = 1$. A partir desse funcional as funções de Green de n-pontos são dadas como derivadas com respeito a fonte $J(x)$, da forma [32]

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.2)$$

Uma desvantagem de trabalhar com o funcional $Z[J]$ é que para $n \geq 2$ algumas funções de Green geradas por ele podem ser escritas como combinações de funções de ordem inferior. Uma solução para eliminar essas contribuições triviais é introduzir um novo funcional definido a partir de $Z[J]$, conhecido como funcional gerador das funções de Green conectadas, cuja definição é

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (2.3)$$

O funcional $W[J]$ dá origem às funções conectadas de Green, $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, definidas como

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.4)$$

Como um exemplo do quão vantajoso é a construção do funcional $W[J]$, pode-se considerar a função 4-pontos de uma teoria tipo $\lambda\phi^4$. A função 4-pontos gerada a partir da definição (2.2) pode ser escrita como

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G^{(2)}(x_1, x_2)G^{(2)}(x_3, x_4) + \quad (2.5)$$

$$+ G^{(2)}(x_1, x_3)G^{(2)}(x_2, x_4) + G^{(2)}(x_1, x_4)G^{(2)}(x_2, x_3). \quad (2.6)$$

Como pode ser notado na equação anterior, no lado direito da igualdade a única função 4-pontos relevante é a função conectada, que pode ser gerada diretamente a partir da definição (2.4), enquanto as demais são combinações triviais da função 2-pontos.

2.2 Ação efetiva

Apesar das vantagens de se trabalhar com o funcional gerador definido em (2.4), as funções conectadas podem ainda ser divididas em dois conjuntos de diagramas conectados. O primeiro é constituído por aqueles diagramas que podem ser separados em duas partes pelo “corte” de uma única linha interna; chamados diagramas redutíveis. Já o segundo conjunto, é constituído por aqueles diagramas que não podem ser divididos pela interrupção de uma linha interna. Esse último conjunto de diagramas é conhecido como *one-particle irreducible* (1PI). Os 1PI desempenham um papel importante na construção de uma teoria de perturbação, uma vez que todos os gráficos de ordem superior podem ser construídos a partir dos 1PI e do propagador livre.

Nesse sentido torna-se necessário a busca por um novo funcional gerador, a partir do qual as funções de n-pontos, constituídas da soma desses 1PI, possam ser obtidas. Para este fim, vamos primeiramente tomar a derivada do funcional $W[J]$ com respeito a fonte e definir uma nova variável $\Phi(x)$, da forma

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta iJ(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i \int d^4x' (\mathcal{L} + J\varphi)] \varphi(x)}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i \int d^4x' (\mathcal{L} + J\varphi)]} = \Phi(x|J) \equiv \Phi(x). \quad (2.7)$$

A variável $\Phi(x)$ é comumente chamada campo médio. Como podemos notar em (2.7), ela é uma função de x e um funcional da fonte J .

Vamos assumir que a relação entre J e $\Phi(x)$ possa ser invertida, de tal forma que J possa ser expresso como um funcional do campo médio, $J = J(x|\Phi)$. Então, por uma transformação de Legendre, podemos inserir $\Phi(x)$ como variável independente no lugar de J e definir o novo funcional gerador [9, 31, 32]

$$\Gamma[\Phi] = W[J] - \int d^4x J(x)\Phi(x). \quad (2.8)$$

Esse funcional tem uma dependência implícita de J , de forma que $\delta\Gamma[\Phi]/\delta J(x) = 0$.

Para chegar a algumas conclusões a respeito desse funcional, vamos primeiramente tomar sua derivada com respeito ao campo médio

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\Phi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\Phi(x)} \Phi(y) - J(x). \quad (2.9)$$

Usando (2.7) no primeiro termo do lado direito da igualdade nessa última equação, chegamos em

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = -J(x). \quad (2.10)$$

Esse resultado permite uma importante conexão com o caso de uma ação clássica da forma

$$S[\varphi]_J = S[\varphi] + \int d^4x \varphi(x)J(x). \quad (2.11)$$

Para que as equações de movimento sejam satisfeitas por essa teoria, deve-se ter

$$\frac{\delta S[\varphi]_J}{\delta\varphi(x)} = 0 \implies \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \quad (2.12)$$

Desde que $S[\varphi]$ é a ação para alguma teoria escalar, a comparação entre (2.12) e (2.10) permite concluir que em uma teoria quântica campos $\Gamma[\Phi]$ desempenha o mesmo papel que $S[\varphi]$ em uma teoria clássica. Por esse motivo nos referimos ao funcional $\Gamma[\Phi]$ como ação efetiva.

Podemos também retirar outra conclusão acerca desse funcional a partir de

$$\delta^4(x_1 - x_2) = \frac{\delta\Phi(x_1)}{\delta\Phi(x_2)} = \int d^4x \frac{\delta\Phi(x_1)}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta\Phi(x_2)} \quad (2.13)$$

$$= - \int d^4x \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(x_2)}. \quad (2.14)$$

Tomando $J = \Phi = 0$ nesse resultado e usando (2.4), podemos escrever

$$- \int d^4x G_c^{(2)}(x_1, x) \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(x_2)} \Big|_{\Phi=0} = \delta^4(x_1 - x_2), \quad (2.15)$$

o que nos leva a

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(x_2)} \Big|_{\Phi=0} = [G_c^{(2)}(x, x_2)]^{-1}. \quad (2.16)$$

Vamos agora definir uma nova função de n-pontos chamada função vértice, da forma

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(x_1) \dots \delta \Phi(x_n)} \Big|_{\Phi=0}. \quad (2.17)$$

Para compreender melhor a relação dessas novas funções com as funções conectadas, vamos avaliar $\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$. Isso pode ser feito tomando a derivada funcional de (2.14) com respeito a J . Depois de algumas manipulações matemáticas isso nos levará a

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= & (2.18) \\ &= \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x'_3 G^{(2)}(x_1, x'_1) G^{(2)}(x_2, x'_2) G^{(2)}(x_3, x'_3) \times \Gamma^{(3)}(x'_1, x'_2, x'_3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esse último resultado mostra que a função $G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$ é construída fixando-se propagadores à função vértice. Em termos dos diagramas isso pode ser representado por

$$G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \text{Diagrama: Um círculo contendo o símbolo } \Gamma \text{ com três linhas externas saindo de pontos equidistantes no perímetro.}$$

Figura 2.1: Representação em termos dos diagramas de Feynman da função de Green de três pontos, obtida pela fixação de três propagadores na função vértice.

Essa representação deixa claro que na situação inversa, a função vértice pode ser obtida “cortando” os propagadores externos na função conectada. Por esse motivo $\Gamma^{(n)}$ é também conhecida como função de Green amputada. Notemos que essa função amputada não contém a informação de como os campos evoluem de um ponto para outro da interação, o que deve ser feito fixando os propagadores. Esses propagadores levam em conta correções da auto-interação, mas não contém efeitos da interação com outras partículas. Então, a física de interesse em um processo de espalhamento está contida na função vértice de n-pontos.

Vamos procurar por uma expansão em *loop* desse formalismo funcional. A partir da definição do funcional gerador das funções de Green conectadas (2.3) e da definição de $Z[J]$ em (2.1), podemos escrever

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} \{S[\varphi] + \int d^4 x \varphi(x) J(x)\}} \quad (2.20)$$

onde a constante de Planck é reintroduzida.

O lado esquerdo da igualdade em (2.20) pode ser reescrito invertendo-se a transformada de Legendre em (2.8), para obter

$$W[J] = \Gamma[\Phi] + \int d^4x \Phi(x) J(x). \quad (2.21)$$

Lembrando que $J(x)$ e $\Phi(x)$ estão relacionados por

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = -J(x). \quad (2.22)$$

Introduzindo (2.21) em (2.20), chegamos em

$$e^{\frac{i}{\hbar}\{\Gamma[\Phi] + \int d^4x \Phi(x) J(x)\}} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}\{S[\varphi] + \int d^4x \varphi(x) J(x)\}}. \quad (2.23)$$

Notemos que no lado esquerdo dessa igualdade aparece o campo médio Φ , enquanto que no lado direito a integral funcional é tomada sobre o campo φ . Vamos então efetuar uma mudança na variável de integração, $\varphi = \Phi + \sqrt{\hbar}\phi$, e escrever a seguinte equação para a ação efetiva

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\Phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}\left\{S[\Phi + \sqrt{\hbar}\phi] - \sqrt{\hbar} \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)}\right\}} \quad (2.24)$$

onde usamos (2.22).

O funcional $S[\Phi + \sqrt{\hbar}\phi]$ na equação anterior, pode ser expandido em uma série da forma

$$S[\Phi + \sqrt{\hbar}\phi] = S[\Phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\hbar}^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n S_n(x_1, \dots, x_n | \Phi) \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (2.25)$$

onde $S_n(x_1, \dots, x_n | \Phi)$ é um funcional do campo médio dado por

$$S_n(x_1, \dots, x_n | \Phi) = \frac{\delta^n S[\Phi]}{\delta\Phi(x_1) \dots \delta\Phi(x_n)}. \quad (2.26)$$

Vamos introduzir notações simplificadas

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n S_n(x_1, \dots, x_n | \Phi) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = S_n[\Phi] \phi^n, \quad (2.27)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = \Gamma_1[\Phi] \quad \text{e} \quad \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = \varphi \Gamma_1[\Phi]. \quad (2.28)$$

Usando essas notações em (2.24), chegamos ao resultado

$$e^{\frac{i}{\hbar}\{\Gamma[\Phi] - S[\Phi]\}} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{2} S_2 \varphi^2 + i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} S_n \varphi^n - i \hbar^{-\frac{1}{2}} \varphi (\Gamma_1[\phi] - S_1[\Phi]) \right\}. \quad (2.29)$$

Notemos nesse resultado que a ação efetiva aparece na combinação $\Gamma[\Phi] - S[\Phi] = \bar{\Gamma}[\Phi]$. Esse novo funcional pode ser escrito como uma expansão em série em termos de \hbar ,

$$\bar{\Gamma}[\Phi] = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \bar{\Gamma}^{(k)}[\Phi], \quad (2.30)$$

e contém todas as correções quânticas para a ação clássica $S[\Phi]$.

Inserindo (2.30) em (2.29), obtemos

$$e^{i \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \bar{\Gamma}[\Phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{2} S_2 \varphi^2 + i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} S_n \varphi^n - i \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^{k-\frac{1}{2}} \varphi \bar{\Gamma}_1^{(k)}[\Phi] \right\}. \quad (2.31)$$

Este resultado permite a construção de uma teoria perturbativa em ordens de \hbar . De forma abreviada os termos dentro da exponencial no lado direito de (2.31) podem ser interpretados como segue. O primeiro, $\frac{i}{2} S_2 \varphi^2$, define o propagador da teoria em termos do campo médio; o segundo descreve a interação entre campos; enquanto o terceiro se encarrega de cancelar os diagramas redutíveis, de tal maneira que o resultado (2.31) contém apenas diagrama 1PI.

A expansão em potências de \hbar (2.31) é conhecida como expansão em *loops* da ação efetiva. Na verdade, cada termo dessa expansão contém os diagramas de Feynman com um número específico de *loops*.

Vamos considerar o caso de 1-*loop* no qual (2.31) nos dá

$$e^{i\bar{\Gamma}^{(1)}[\Phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{2} S_2[\Phi] \varphi^2} = [\text{Det}(S_2[\Phi])]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.32)$$

Isso nos leva a

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\Phi] = \frac{i}{2} \log \text{Det}(S_2[\Phi]) = \frac{i}{2} \text{Tr} \log(S_2[\Phi]). \quad (2.33)$$

Assim, a ação efetiva na aproximação de 1-*loop*, pode ser escrita como

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = S[\Phi] + \frac{i}{2} \text{Tr} \log(S_2[\Phi]). \quad (2.34)$$

Em geral $S_2[\Phi]$ aparecendo nas expressões anteriores é o núcleo de algum operador diferencial dependente do campo médio. Nesses casos, calcular a ação efetiva a 1-*loop* se reduz ao problema matemático de calcular o determinante de um operador diferencial.

2.3 Regularização dimensional e fatores de forma

As funções de Green e a ação efetiva apresentadas nas seções anteriores são avaliadas mediante o uso de teoria perturbativa. Nesse processo nos deparamos com a avaliação dos diagramas de Feynman, que resultam em integrais sobre o momento interno do diagrama. Em vários casos de interesse, a potência do momento aparecendo no denominador dessas integrais é menor que aquela no numerador. Nesses casos quando valores grandes de momento são considerados, conhecidos como limite UV, as potências do momento no numerador dominam e as integrais divergem.

Essa divergência das integrais no limite UV é algo comum quando se avalia as contribuições relevantes nos diagramas de Feynman para a expansão perturbativa de uma teoria. Tal comportamento reflete uma fragilidade na definição matemática das funções de Green e nos leva à seguinte pergunta: é possível extrair informação válida a partir dessas integrais divergentes? A resposta é sim. E isso pode ser feito em dois passos. O primeiro é implementar um processo de regularização que separa as contribuições finitas e infinitas vindas dessas integrais. O segundo é um processo de renormalização, que consiste na inserção de termos adicionais na lagrangiana da teoria, conhecidos como contra-termos, que removem as divergências da teoria original e tornam finitas as contribuições da nova lagrangiana renormalizada. Aqui vamos tratar em mais detalhes o primeiro desses passos.

O processo de regularização pode ser realizado através de diferentes esquemas como, por exemplo, regularização dimensional, regularização “cut-off”, Paulli-Villars, regularização-zeta, entre outros. Em especial, neste trabalho, vamos utilizar a regularização dimensional devido à sua grande utilização e a preservação da simetria de calibre, que é uma de suas vantagens [33].

2.3.1 A ideia geral da regularização dimensional

A motivação para o processo de regularização dimensional está em perceber que a potência do momento no numerador das integrais depende da dimensão do espaço. Assim, uma integral que é divergente no limite UV em quatro dimensões, pode ser finita se considerada em um espaço de duas dimensões, por exemplo. Portanto, a ideia geral desse esquema de regularização consiste em calcular as integrais provenientes dos diagramas de Feynman em um espaço n -dimensional e por fim tomar o limite $n \rightarrow 4$ [28].

Os resultados obtidos por esse processo são constituídos por uma parte divergente, representada por polos da forma $\frac{1}{(n-4)}$, ligados à divergência UV. E outra parte finita, na qual está presente um parâmetro sem significado físico, conhecido como parâmetro de regularização, que deve ser removido posteriormente para que os observáveis sejam independentes do mesmo. Esse parâmetro não físico é comum em um processo de regularização, e no caso da regularização dimensional ele é caracterizado pelo desvio a partir do valor inicial da dimensão do espaço.

Como dito anteriormente a ideia central da regularização dimensional consiste na avaliação das integrais em um espaço n -dimensional. Nesse contexto torna-se necessário um estudo da dimensão dos termos na lagrangiana. Vamos tomar como exemplo uma teoria escalar, cuja lagrangiana em n dimensões é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4. \quad (2.35)$$

Levando-se em conta a forma da ação em n dimensões e que para $\hbar = c = 1$ a ação S é adimensional, temos que

$$S = \int \mathcal{L} d^n x \implies [\mathcal{L}] = l^{-n}, \quad (2.36)$$

onde l é comprimento. A dimensão de \mathcal{L} expressa em (2.36) vale para todos os termos na lagrangiana. Desde que $[\partial_\mu] = l^{-1}$, somos levados à dimensão do campo, $[\varphi] = l^{1-\frac{n}{2}}$.

Termos na lagrangiana da forma $g\phi^k$ levam a

$$[g\varphi^k] = [g][\varphi]^k = [g]l^{k(1-\frac{n}{2})} = l^{-n}, \quad (2.37)$$

onde a igualdade final é feita a partir da dimensão da lagrangiana. A partir de (2.37) chegamos a

$$[g] = l^{-n-k(1-\frac{n}{2})}. \quad (2.38)$$

Tomando $k = 2$ em (2.38) temos $[g] = l^{-2}$. Nesse caso particular g representa o termo de massa $m^2\phi^2$, e é possível notar que a dimensão da massa é $[m] = l^{-1}$ para qualquer dimensão. Para o termo de interação, $k = 4$, e temos que $[g] = l^{n-4} = m^{4-n}$. Isso nos mostra que em quatro dimensões a constante de acoplamento da teoria $\lambda\varphi^4$ é adimensional.

A dimensão da constante de acoplamento e a renormalizabilidade de uma teoria estão intimamente ligadas. Se a dimensão de λ é uma potência positiva ou nula de massa a teoria

é renormalizável, possuindo um número finito de divergências. Dessa maneira torna-se interessante manter a dimensão da constante de acoplamento quando se considera a teoria em um espaço de n dimensões. Para essa finalidade introduzimos um parâmetro arbitrário com dimensão de massa, μ , e fazemos a seguinte substituição, no caso da teoria $\lambda\varphi^4$,

$$\lambda \rightarrow \lambda\mu^{4-n}. \quad (2.39)$$

Como pode ser notado, essa substituição mantém λ com a mesma dimensão do caso quadridimensional. Mais adiante ficará claro que a massa arbitrária introduzida aqui, μ , é o parâmetro de regularização. Por agora vamos introduzir algumas ferramentas matemáticas necessárias.

2.3.2 Ferramentas matemáticas

1. Continuação analítica.

Considere duas regiões D_1 e D_2 no plano complexo. O teorema da continuação analítica nos diz que, em alguns casos, pode-se estender a função analítica de algum conjunto de pontos para uma região maior, unicamente.

Considere as duas funções $F_1(z)$ e $F_2(z)$, definidas e analíticas em D_1 e D_2 , correspondentemente. Suponha que $D_1 \cap D_2 = D$. Além disso, assumimos que $F_1(z) = F_2(z)$ em um conjunto que pertence a D e tem pelo menos um ponto de acumulação. Então, $F_1(z) = F_2(z)$ no total D .

Nossa estratégia será definir tal continuação para as integrais mal definidas (em assinatura euclidiana) como, por exemplo,

$$I_4 = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)[(p - k)^2 + m^2]}. \quad (2.40)$$

Assumimos que essa integral seja definida no espaço quadridimensional euclidiano, mas nosso propósito é fazer uma continuação da dimensão quatro para uma dimensão complexa 2ω , $I_4 \rightarrow I_{2\omega}$, de modo que $I_{2\omega}$ é analítica no plano complexo, exceto no máximo número contável de pontos. Então, nas proximidades do ponto $\omega = 2$, temos

$$I_{2\omega} = \left(\text{divergente} \sim \frac{1}{2 - \omega} \text{ termo do polo} \right) + \text{termos finitos} + \text{termos} \sim O(2 - \omega).$$

Nosso primeiro propósito será estabelecer o primeiro termo divergente, com o polo em $\omega = 2$.

2. Integral gaussiana.

Está integral em 2ω dimensões é da forma

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{-xk^2+2kb} = \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \left(\frac{\pi}{x}\right)^\omega e^{\frac{b^2}{x}}. \quad (2.41)$$

Para um natural $2\omega = 1, 2, 3, 4, \dots$, essa integral pode ser facilmente derivada. Para valores complexos de ω , a Eq. (2.41) deve ser vista como uma definição ou como uma continuação analítica. Pode-se ver a revisão padrão [33] para uma explicação detalhada do procedimento de continuação $4 \rightarrow n \rightarrow 2\omega$.

Um exemplo de aplicação de (2.41) está relacionado à representação

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)}. \quad (2.42)$$

Considere a continuação da integral (2.40) para a dimensão $n = 2\omega$,

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega} (k^2 + m^2) [(k-p)^2 + m^2]} \\ &= \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\alpha_1(k^2+m^2) - \alpha_2[(k-p)^2+m^2]}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Efetuada uma mudança na ordem de integração, notamos que a integral sobre k é da forma (2.41), e chegamos em

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{-k^2(\alpha_1+\alpha_2)+2\alpha_2kp - (\alpha_1+\alpha_2)m^2 - \alpha_2p^2} \\ &= \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \left(\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^\omega e^{\frac{\alpha_2^2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \alpha_2(p^2 + m^2) - \alpha_1 m^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Essa representação é muito usual nos casos de interesse.

3. Propriedades da função gamma.

A função gama é definida como segue

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (2.45)$$

As principais propriedades que nos interessam são

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \implies \Gamma(n+1) = n!, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \implies \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots}{2^n} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Da última representação segue diretamente que $\Gamma(z)$ tem polos simples no zero e nos inteiros negativos, $z = 0, -1, -2, \dots$, e em nenhum outro lugar. Outra representação, na qual esse fato pode ser visto explicitamente, é a expansão da fração parcial de Weierstrass

$$\Gamma(z) = \Gamma_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (2.47)$$

Está claro que $\Gamma(z)$ é analítica em todo lugar exceto em $z = 0, -1, -2, \dots$.

Uma maneira de representar $\Gamma(1-\omega)$ pode ser obtida a partir de

$$\Gamma(2-\omega) = (1-\omega)\Gamma(1-\omega), \quad (2.48)$$

e da equação (2.46)

$$\Gamma(2-\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\omega, \quad \text{onde} \quad J_\omega = \frac{n! n^{2-\omega}}{(2-\omega)(3-\omega)\cdots(n+2-\omega)}. \quad (2.49)$$

A expressão sob o limite pode ser transformada como

$$J_\omega = \frac{n! e^{(2-\omega)\ln n}}{(2-\omega)(1+2-\omega)(2+2-\omega)\cdots(n+2-\omega)}.$$

Obviamente, a parte divergente de J_ω , no limite $\omega \rightarrow 2$, é

$$J_\omega^{(div)} = \frac{n! \cdot 1}{(2-\omega) \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{1}{2-\omega}.$$

A parte finita pode ser avaliada por meio das seguintes transformações

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\omega} e^{(2-\omega)\ln n} &= \frac{1}{2-\omega} \left[1 + (2-\omega)\ln n + \mathcal{O}((2-\omega)^2) \right] \\ &= \frac{1}{2-\omega} + \ln n + \mathcal{O}(2-\omega), \\ \frac{1}{k-\omega} &= \frac{1}{k-2+(2-\omega)} = \frac{1}{k-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2-\omega}{k-2}} = \frac{1}{k-2} \left(1 - \frac{2-\omega}{k-2} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_\omega = \frac{1}{2-\omega} + \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) + \mathcal{O}(2-\omega). \quad (2.50)$$

A soma dos termos finitos é

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right), \quad (2.51)$$

cujos resultados são $\gamma = 0,57721\dots$ (constante de Euler-Mascheroni, ou simplesmente constante de Euler).

Apesar de que devemos mantê-la, a contribuição finita não tem muita importância, porque é suprimida por um termo infinito $\frac{1}{2-\omega}$. A notação convencional é

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{(4\pi)^2(n-4)}, \quad n-4 = -2(2-\omega).$$

Finalmente, a partir de (2.48) e (2.49) segue

$$\Gamma(2-\omega) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{t^{1-\omega}} = \frac{1}{2-\omega} - \gamma + \mathcal{O}(2-\omega), \quad (2.52)$$

$$\Gamma(1-\omega) = \frac{\Gamma(2-\omega)}{1-\omega} = \frac{\Gamma(2-\omega)}{-1+(2-\omega)} = -\frac{1}{2-\omega} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(2-\omega), \quad (2.53)$$

$$\Gamma(-\omega) = \frac{1}{2(2-\omega)} + \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2} + \mathcal{O}(2-\omega). \quad (2.54)$$

4. Volume da esfera.

Por fim vamos calcular o raio da esfera m -dimensional, cujo raio é

$$R = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{1/2}.$$

A partir de argumentos dimensionais o volume dessa esfera pode se escrito como

$$V_m = C_m R^m, \quad (2.55)$$

sendo C_m o coeficiente que precisamos calcular. Para essa finalidade consideremos a integral Gaussiana

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_m e^{-a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \right]^m = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{m}{2}}. \quad (2.56)$$

Por outro lado temos que $dV_m = mC_m R^{m-1} dR$, e podemos escrever a integral na forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-aR^2} mC_m R^{m-1} dR.$$

Efetuada a seguinte mudança de variável $z = aR^2$, temos

$$dR = \frac{1}{2a} \left(\frac{a}{z} \right)^{\frac{1}{2}} dz, \quad R^{m-1} = \frac{z^{\frac{m-1}{2}}}{a}$$

assim

$$I = mC_m \int_0^\infty e^{-z} \left(\frac{z}{a} \right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2a} \left(\frac{a}{z} \right)^{\frac{1}{2}} dz = \frac{mC_m}{2a^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{m}{2}-1} dz = \frac{mC_m}{2a^{\frac{m}{2}}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \quad (2.57)$$

Desde que (2.56) e (2.57) são a mesma integral, concluímos que

$$C_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \implies V_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} R^m. \quad (2.58)$$

Este resultado é válido para m natural e também pode ser continuado para dimensões complexas 2ω .

2.3.3 Caso mais simples da integral de loop

Vamos agora realizar a regularização de algumas integrais de *loop*. Para isso vamos efetuar a seguinte continuação

$$I_4 \rightarrow I_{2\omega} = \int \frac{d^{2\omega}x}{(2\pi)^{2\omega}} \cdots, \quad (2.59)$$

de forma que $I_{2\omega}$ é definida em todo o plano complexo, exceto em alguns pontos, dentre eles $\omega = 2$. Em geral temos

$$I_{2\omega} = (\text{polo em } \omega = 2) + \text{termos finitos.}$$

Vamos considerar a teoria escalar dada pela ação

$$S = \int d^4z \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right\}. \quad (2.60)$$

Essa ação pode ser escrita no espaço euclidiano através da mudança de variável $z^0 = -iz^4$. De tal forma que

$$\begin{aligned} d^4z &= dz^0 d^3z = -idz^4 d^3z = -id^4z_E \\ \text{e} \quad (\partial\varphi)^2 &= (\partial_0\varphi)^2 - (\partial\varphi)^2 = -(\partial\varphi)_E^2. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Assim, a ação euclidiana tem a forma

$$S = -i \int d^4z_E \left\{ -\frac{1}{2}(\partial\varphi)_E^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right\}. \quad (2.62)$$

Vamos considerar como primeiro exemplo a correção para a função 2-pontos dessa teoria dada pelo diagrama

$$\frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{1}{2} I_{g^0} = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (2.63)$$

A título de comparação, vamos considerar primeiramente uma regularização cut-off desse diagrama, na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_{g^0} &= -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \int_0^\Omega \frac{4p^3 dp}{p^2 + m^2} = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \int_0^\Omega \frac{p^2 dp^2}{p^2 + m^2} \\ &= -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \int_0^\Omega dp^2 - m^2 \int_0^\Omega \frac{p^2 dp^2}{p^2 + m^2} \right\} = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \Omega^2 - m^2 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde os termos proporcionais a $O(\Omega^{-1})$ são considerados irrelevantes.

A regularização dimensional desse diagrama não exibe a mesma simplicidade. Iniciemos com

$$I_4 \longrightarrow I_{2\omega} = \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{2\omega \cdot \pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega} \Gamma(\omega + 1)} \int_0^\infty \frac{p^{2\omega-1} dp}{p^2 + m^2}. \quad (2.65)$$

Vamos lembrar que $\Gamma(\omega + 1) = \omega\Gamma(\omega)$, assim podemos escrever

$$I_{2\omega} = \frac{2\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^\infty \frac{p^{2\omega-1} dp}{p^2 + m^2}. \quad (2.66)$$

A última integral pode ser avaliada via função Beta, lançando mão do seguinte resultado

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^\infty dt t^{x-1}(1+t)^{-x-y}. \quad (2.67)$$

Para ver como isso pode se feito vamos tomar $p^2 = tm^2$ em (2.66), tal que

$$p^{2\omega-1} dp = \frac{1}{2} m^{2\omega} t^{\omega-1} dt, \quad p^2 + m^2 = m^2(1+t).$$

O que nos leva a

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{\pi^\omega (m^2)^{\omega-1}}{(4\pi^2)^\omega \Gamma(\omega)} \int_0^\infty dt t^{\omega-1} (1+t)^{-1} = \frac{1}{(4\pi)^\omega} \frac{(m^2)^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)} \cdot B(\omega, 1-\omega) \\ &= \frac{(m^2)^{\omega-1}}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)\Gamma(1)} = \frac{(m^2)^{\omega-1}}{(4\pi)^\omega} \Gamma(1-\omega), \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde temos identificado $x-1 = \omega-1$ e $-x-y = -1$, como os argumentos de (2.67).

Fazendo uso da equação (2.53) podemos reescrever o resultado (2.68) como segue

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{(m^2)^{\omega-1}}{(4\pi)^\omega} \left(-\frac{1}{2-\omega} + \gamma - 1 \right) \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^2} (\mu^2)^{\omega-2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \left(-\frac{1}{2-\omega} + \gamma - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nesse resultado, μ é o parâmetro de renormalização com dimensão de massa, $[\mu] = [m]$, mencionado no início desta seção. Somado a isso consideramos também

$$\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} = e^{(\omega-2) \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)} = 1 + (2-\omega) \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \dots, \quad (2.70)$$

e finalmente chegamos em

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{m^2}{(4\pi)^2} (\mu^2)^{\omega-2} \left[-\frac{1}{2-\omega} + \gamma - 1 - \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \\ &= m^2 (\mu^2)^{\omega-2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{(4\pi)^2} - \frac{1}{(4\pi)^2} - \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde temos definido $\varepsilon = (4\pi)^2(n - 4)$. Esse resultado nos leva a

$$\frac{1}{2} I_{go} = -\lambda m^2 (\mu^2)^{\omega-2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{2(4\pi)^2} - \frac{1}{2(4\pi)^2} - \frac{1}{2(4\pi)^2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (2.72)$$

O comparação entre (2.72) e (2.64) mostra que as divergências quadráticas $\mathcal{O}(\Omega^2)$ da regularização cut-off não aparecem na regularização dimensional. Contudo, observa-se uma relação direta entre o termo logarítmico $\ln \frac{\Omega}{m}$ e o termo $\frac{1}{\varepsilon}$. Tal relação é dada por

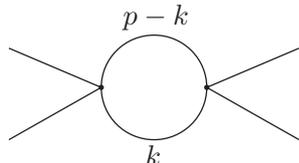
$$\ln \frac{\Omega^2}{m^2} \longleftrightarrow -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon}, \quad (2.73)$$

a qual permanece válida para todos os diagramas com divergência logarítmica. Esse é apenas um caso particular de uma regra geral. Os termos logarítmicos que são relevantes serão os mesmos em todos os esquemas de regularização [34].

É importante ressaltar que o resultado (2.72) não depende do momento externo, e portanto não contribui para a parte não local. No que segue vamos considerar um caso onde essa dependência existe.

2.3.4 Divergências UV e fator de forma não local

Vamos considerar a correção à função 4-pontos dada pelo diagrama



The diagram shows a central circle (loop) with two external lines on the left and two on the right. The top-left external line is labeled $p-k$ and the bottom-right external line is labeled k .

$$= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2]}. \quad (2.74)$$

Primeiramente vamos considerar as divergências de (2.74) a partir de uma regularização cut-off. Vamos iniciar com a seguinte transformação

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2]} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \left[\frac{1}{[(p-k)^2 + m^2]} - \frac{1}{p^2 + m^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Em quatro dimensões $d^4 p = \pi^2 p^2 dp^2$ e pode ser notado que a primeira integral diverge de forma logarítmica, enquanto a segunda é finita. Daí somos levados a

$$I_4^{div} = \int_0^{\Omega} \frac{p^2 dp^2}{(4\pi)^2 (p^2 + m^2)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Omega^2}{m^2} + (\text{termos finitos}).$$

Como a outra parte é finita, (2.74) resulta em

$$\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Omega^2}{m^2} + (\text{termos finitos}). \quad (2.76)$$

Vamos agora proceder com a regularização dimensional do diagrama considerado. Para isso temos que definir

$$I_{2\omega} = \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{1}{(p^2 + m^2)[(p - k)^2 + m^2]}. \quad (2.77)$$

Está claro que para $\omega = 2$ a integral $I_{2\omega}$ coincide com I_4 . Além disso, $I_{2\omega}$ é analítica sobre um plano complexo na vizinhança de $\omega = 2$, onde ela possui um polo.

Podemos usar a fórmula de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[a\alpha + b(1 - \alpha)]^2}, \quad (2.78)$$

para escrever (2.77) na forma

$$I_{2\omega} = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[(p - \alpha k)^2 + a^2]^2}, \quad (2.79)$$

onde $a^2 = m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2$.

Agora, vamos realizar a seguinte mudança de variáveis, $p_\mu \rightarrow p_\mu - \alpha k_\mu$. Isso nos dá como resultado,

$$I_{2\omega} = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}. \quad (2.80)$$

Como pode ser visto a integral (2.80) não depende do ângulo. Isso nos permite usar os mesmos passos que nos levaram de (2.65) a (2.66). Após efetuarmos a mudança de variável $p^2 = a^2 t$, chegamos em

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \int_0^1 d\alpha \int \frac{2\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}\Gamma(\omega)} dp p^{2\omega-1} (p^2 + a^2)^{-2} \\ &= \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi)^\omega \Gamma(\omega)} a^{2\omega-4} t^{\omega-1} (1+t)^{-2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Comparando este resultado com (2.67), identificamos $x = \omega$ e $y = 2 - \omega$. Logo,

$$I_{2\omega} = \frac{1}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 d\alpha \frac{\Gamma(\omega)\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(\omega)\Gamma(2)} a^{2\omega-4}.$$

Vamos relembrar que $\Gamma(2) = 1$ e $a^2 = m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2$, enquanto $\Gamma(2 - \omega) = \frac{1}{2-\omega} - \gamma$.

Isso nos dá

$$I_{2\omega} = \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left(\frac{1}{2-\omega} - \gamma \right) \int_0^1 d\alpha [m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2]^{\omega-2}. \quad (2.82)$$

Vamos denotar $\tau = \frac{k^2}{m^2}$ e considerar

$$\begin{aligned} [m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2]^{\omega-2} &= (m^2)^{\omega-2} e^{(\omega-2) \ln [1 + \alpha(1 - \alpha)\tau]} \\ &= (m^2)^{\omega-2} [1 - (2 - \omega) \ln \{1 + \alpha(1 - \alpha)\tau\} + O(\omega - 2)^2]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Substituindo essa expressão em (2.82), temos que

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega} \left(\frac{1}{2 - \omega} - \gamma \right) (m^2)^{\omega-2} \left[1 - (2 - \omega) \int_0^1 d\alpha \ln [1 + \alpha(1 - \alpha)\tau] \right] \\ &= \frac{(m^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{1}{2 - \omega} - \gamma - \int_0^1 d\alpha \ln \{1 + \alpha(1 - \alpha)\tau\} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nessa última fórmula o primeiro termo é a divergência e a integral sobre α representa o fator de forma não local, que é o resultado físico esperado. Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{(m^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^\omega} &= \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} = \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} e^{(2-\omega) \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)} \\ &= \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} \left[1 + (2 - \omega) \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + O(2 - \omega)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

A integral em (2.84) pode ser realizada para obtermos

$$\int_0^1 d\alpha \ln \{1 + \alpha(1 - \alpha)\tau\} = -2Y, \quad (2.86)$$

onde

$$a^2 = \frac{4\tau}{\tau + 4} = \frac{4k^2}{k^2 + 4m^2} \quad \text{e} \quad Y = 1 - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{2 + a}{2 - a} \right|. \quad (2.87)$$

Substituindo (2.85) e (2.86) em (2.84), chegamos em

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2 - \omega} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2Y \right] \\ &= (\mu^2)^{\omega-2} \left[-\frac{2}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{(4\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2Y}{(4\pi)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Por fim, vamos explorar o fator de forma Y em seus dois extremos, que são os limites de altas e baixas energias, dados por

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{UV,} \quad k^2 \gg m^2, \quad \text{que implica} \quad \tau \gg 1, \\ 2) \quad \text{IR,} \quad k^2 \ll m^2, \quad \text{que implica} \quad \tau \ll 1. \end{aligned} \quad (2.89)$$

1) Vamos considerar o limite UV, no qual $k^2 \gg m^2$ e $\tau \gg 1$. Isso nos leva a

$$a^2 = \frac{4k^2}{k^2 + 4m^2} = \frac{4}{1 + \frac{4m^2}{k^2}} = 4 \left(1 - \frac{4m^2}{k^2} + \dots \right),$$

tal que $a \approx 2 - \frac{4m^2}{k^2}$. Temos assim, $2 + a \approx 4 - \frac{4m^2}{k^2}$ e $2 - a \approx \frac{4m^2}{k^2}$, de tal forma que

$$Y \cong 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right). \quad (2.90)$$

Nesse caso, $I_{2\omega}$ em (2.88) é dada pela combinação

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2 - \gamma - \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right] \\ &= \frac{(\mu^2)^{\omega-2}}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{n-4} + \ln \left(\frac{\mu^2}{k^2} \right) + \text{constante} \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

A importância do resultado anterior reside em nos permitir chegar a duas conclusões. Em primeiro lugar, podemos notar que o limite de k^2 muito grande significa também μ^2 muito grande, e vice-versa. Isso evidencia que para conhecer o comportamento do sistema quântico em altas energias, dado pelo limite UV, é suficiente estabelecer o limite de μ muito grande via um esquema de renormalização por subtrações mínimas (*MS*). Vale lembrar que a maneira de explorar esse limite via grupo de renormalização é conhecida, inclusive no espaço tempo curvo [32, 35, 36].

Em segundo lugar (2.91) nos mostra que é possível restaurar o limite de μ^2 muito grande a partir do coeficiente do termo divergente com o fator $\frac{1}{\epsilon}$. Por outro lado também há uma correspondência com o limite de Ω^2 muito grande em (2.76). Em suma, podemos dizer que o limite de UV é muito bem controlado pelas principais divergências logarítmicas, que podem ser derivadas facilmente pelo método da *heat kernel*, mesmo sem o uso de diagramas de Feynman.

2) Já no limite IR, temos que $k^2 \ll m^2$ e $\tau \ll 1$. Dessa forma

$$a^2 \sim \frac{k^2}{m^2} \ll 1,$$

e assim $a \sim \frac{k}{m}$. Como uma consequência disso,

$$\ln \frac{2+a}{2-a} \approx \ln \frac{2+\frac{k}{m}}{2-\frac{k}{m}} \approx \ln \left(1 + \frac{k}{m} \right) \approx \frac{k}{m},$$

de forma que

$$Y = 1 - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{2+a}{2-a} \right| \approx 1 - \frac{m}{k} \frac{k}{m} \approx 0. \quad (2.92)$$

Como pode ser visto, em ordem zero o fator de forma não local desaparece no limite IR. Isso significa que não existe correspondência entre $\ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right)$ e a divergência $\frac{1}{\epsilon}$, ou $\ln \Omega$. As

próximas ordens na expansão são

$$Y = -\frac{1}{12} \frac{k^2}{m^2} + \frac{1}{120} \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^2 + \dots \quad (2.93)$$

O primeiro termo é a evidência de que o desacoplamento é quadrático nesse caso. No geral, essa dependência quadrática ocorre em todos os casos que se pode checar. Como pode ser notado, no limite IR as divergências e a dependência do momento não estão correlacionadas. Esse comportamento é conhecido como desacoplamento e foi descoberto na QED em 1975 por Appelquist e Corrazone [4].

Por fim, como pode ser visto, no diagrama em (2.72) não há fator de forma não local. Neste caso podemos pensar que a divergência no limite UV é artificial, o que não é exatamente correto, porque no geral o fator de forma logarítmico corresponde a uma soma sobre todas as contribuições divergentes, inclusive aquelas vindas de diagramas como o que está em (2.72). Esse tipo de argumento é necessário para o cálculo correto no espaço tempo curvo [23], desde que apenas levando em conta esse tipo de contribuição é possível estabelecer a relação correta entre os logaritmos do momento no limite UV e a dependência de μ . Isso pode ser melhor entendido olhando para o resultado (2.72) e notando que a dependência em μ aparece junta, e não separada, do termo divergente.

Ação efetiva a 1-loop e fatores de forma não locais no espaço curvo

3.1 Ação efetiva no espaço tempo curvo

Como vimos na seção 2.1 o funcional gerador das funções de Green é o objeto central da construção de uma teoria quântica de campos. É ele que vai nos permitir explorar a teoria de perturbação para campos interagentes. Para o caso de uma teoria semiclássica no espaço tempo curvo vamos iniciar a construção desse funcional a partir da versão mais completa da teoria dada pela ação [37]

$$S[g, \Phi] = S_g[g] + S_m[\Phi, g], \quad (3.1)$$

que descreve os campos de matéria Φ acoplados ao campo gravitacional quântico. O primeiro termo no lado direito da igualdade em (3.1) é a ação que descreve apenas o campo gravitacional, enquanto $S_m[\Phi, g]$ é a ação para os campos de matéria no espaço tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$. Mesmo para os casos em que a teoria descrita pela ação (3.1) apresente simetria de calibre, a quantização pode ser realizada e o funcional gerador das funções de Green é dado por,

$$Z[J, I] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\Phi e^{i(S_g[g] + S_m[\Phi, g] + I g + J \phi)}. \quad (3.2)$$

Nesse funcional, I é a fonte para a métrica quântica $g_{\mu\nu}$ e J é a fonte para o campo quântico Φ . Assumimos também a notação,

$$\Phi J = \int d^4x \sqrt{-g} \Phi(x) J(x), \quad (3.3)$$

que leva em conta a soma sobre todos os índices e a integração covariante sobre as variáveis contínuas do espaço tempo. Os elementos de integração funcional $\mathcal{D}g$ e $\mathcal{D}\Phi$ levam em conta os campos de calibre e os campos fantasmas. E a constante de normalização é dada por

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\Phi e^{i(S_g[g] + S_m[\Phi, g])}. \quad (3.4)$$

Vamos reescrever o funcional gerador em (3.2) na forma

$$Z[J, I] = \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}} \int \mathcal{D}g e^{igI} Z[J, g_{\mu\nu}], \quad (3.5)$$

na qual é possível perceber que

$$Z[J, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\mathcal{N}_0} \int \mathcal{D}\Phi e^{i(S_{vac}[g] + S_m[\Phi, g] + \Phi J)}. \quad (3.6)$$

Nesse último funcional temos renomeado $S_g[g]$ como $S_{vac}[g]$ e também é possível notar que $\tilde{\mathcal{N}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_0}$, sendo que a constante de normalização para $Z[J, g_{\mu\nu}]$ é dada por

$$\mathcal{N}_0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi, g]} \Big|_{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}} \quad (3.7)$$

O funcional em (3.6) é o funcional gerador das funções de Green para os campos de matéria no espaço tempo curvo, que não leva em conta a integração funcional sobre a métrica. Ele representa o objeto central para o desenvolvimento de uma gravidade semiclássica.

Como pode ser notado, o funcional em (3.6) depende da fonte J para os campos de matéria e da métrica $g_{\mu\nu}$, que entra como um parâmetro externo. A ação que aparece nesse funcional é composta por duas partes

$$S[\Phi, g_{\mu\nu}] = S_{vac}[g] + S_m[\Phi, g], \quad (3.8)$$

onde $S_{vac}[g]$ é a ação para o vácuo clássico, dependente apenas da métrica. Enquanto $S_m[\Phi, g]$ é ação para os campos de matéria, que supostamente desaparece quando os mesmos não estão presentes. Essa divisão da ação em duas partes nos permite retirar a parte do vácuo de dentro da integral funcional, e reescrever (3.6) na forma

$$Z[J, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\mathcal{N}_0} e^{iS_{vac}[g]} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS_m[\Phi, g_{\mu\nu}] + i\Phi J}. \quad (3.9)$$

A partir daqui seguimos da mesma maneira que fizemos no espaço plano. Primeiramente definimos o funcional gerador para as funções de Green conectadas na presença de um campo gravitacional externo,

$$e^{iW[J, g_{\mu\nu}]} = Z[J, g_{\mu\nu}]. \quad (3.10)$$

Lembrando que tanto as funções de Green $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, como as funções de Green conectadas $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, são definidas da mesma maneira que no caso do espaço plano; através das derivadas

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{i\delta J(x_1)\dots i\delta J(x_n)} Z[J, g_{\mu\nu}] \Big|_{J=0} \quad (3.11)$$

e

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{i\delta J(x_1)\dots i\delta J(x_n)} W[J, g_{\mu\nu}] \Big|_{J=0}. \quad (3.12)$$

Está claro que essas funções dependem da métrica, que entra na integral funcional como um parâmetro externo e não como uma quantidade quantizada.

Da mesma maneira que fizemos na seção 2.2, vamos construir uma ação efetiva no espaço tempo curvo iniciando com a definição do campo médio,

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta W[J, g_{\mu\nu}]}{i\delta J(x)}. \quad (3.13)$$

Em seguida temos que assumir que essa relação possa ser invertida para encontrarmos $J = J(\bar{\Phi}, g_{\mu\nu})$. Por fim introduzimos a ação efetiva como um funcional do campo médio e da métrica,

$$\Gamma[\bar{\Phi}, g_{\mu\nu}] = W[J, g_{\mu\nu}] - J\bar{\Phi}. \quad (3.14)$$

Lembrando que apesar das relações apresentadas na seção 2.2 serem preservadas, as operações aqui devem ser covariantes do ponto de vista do espaço tempo curvo.

As semelhanças com o caso do espaço plano permanecem para a expansão em *loops* e, em particular, podemos escrever a ação efetiva como uma soma da ação clássica e a expansão em *loops*,

$$\Gamma = S + \bar{\Gamma}, \quad \bar{\Gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}. \quad (3.15)$$

Em especial, a correção a 1-*loop* no espaço tempo curvo é dada por

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\bar{\Phi}] = \pm \frac{i}{2} \log \text{Det} S_2[\bar{\Phi}] = \pm \frac{i}{2} \text{Tr} \log S_2[\bar{\Phi}], \quad (3.16)$$

onde $S_2[\bar{\Phi}]$ é a forma bilinear da ação clássica tomada em $\bar{\Phi} = \Phi$, e os sinais + e - correspondem aos casos de bósons e férmions, respectivamente.

Um fato importante a respeito da ação efetiva definida em (3.14), é que essa ação possui uma parte que depende apenas da métrica externa $g_{\mu\nu}$, conhecida como ação efetiva do vácuo. Essa ação não leva em conta os campos de matéria e para modelos mais simples (sem quebra espontânea de simetria ou parte induzida) pode ser construída como parte de (3.14), ou pela eliminação da fonte para os campos de matéria em (3.6) como segue,

$$Z_{vac}[g_{\mu\nu}] = e^{i\Gamma_{vac}[g_{\mu\nu}]} = \frac{1}{\mathcal{N}_0} e^{iS_{vac}[g_{\mu\nu}]} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS_m[\Phi, g_{\mu\nu}]}. \quad (3.17)$$

Nesta expressão $\Gamma_{vac}[g_{\mu\nu}]$ é a ação efetiva do vácuo.

A partir de (3.17) é possível justificar a condição $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ na definição do fator de normalização em (3.7). Sem essa condição a ação efetiva do vácuo seria cancelada. O que significa em última análise, que as correções quânticas para a ação clássica da gravidade seriam perdidas.

A expressão (3.17) nos permite escrever $\Gamma_{vac}[g_{\mu\nu}]$ como uma soma da ação clássica e as correções quânticas

$$\Gamma_{vac}[g_{\mu\nu}] = S_{vac} + \bar{\Gamma}_{vac}, \quad (3.18)$$

onde $\bar{\Gamma}_{vac}$ vem da integração sobre os campos de matéria Φ . Vamos notar que a importância de Γ_{vac} reside no fato de que as demais correções quânticas estão relacionadas aos efeitos da gravidade sobre a dinâmica e a interação dos campos de matéria. No entanto, não espera-se que esses efeitos sejam importantes para experimentos laboratoriais em aceleradores, por exemplo. Dessa forma a ação efetiva do vácuo Γ_{vac} é o objeto de estudo de nosso interesse contendo as contribuições quânticas para a dinâmica da própria gravidade.

3.2 Solução da heat kernel

O principal método para calcular as correções de *loop* quântico em Teoria Quântica de Campos, é baseado na integração dos diagramas de Feynman na representação dos momentos. Ao mesmo tempo, para trabalhar no espaço curvo (espaço tempo), é preciso ir

além dessa técnica, pois a transformação global de Fourier no espaço curvo é impossível. Como solução para isso existem três abordagens principais diferentes para cálculos no espaço curvo. A primeira é baseada na expansão da métrica externa sobre um espaço de fundo plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e realização dos cálculos no espaço plano, tratando $h_{\mu\nu}$ como um campo externo no espaço plano. A covariância e a localidade das divergências tornam tal abordagem possível e, em muitos casos, útil [38, 39]. O que também se aplica à derivação da parte não local finita dos diagramas [23, 25].

Outra abordagem para os cálculos no espaço curvo é baseada no uso de coordenadas normais e representação local do momento [40]. Uma das vantagens desse método é uma covariância explícita. Em alguns casos ele fornece benefícios técnicos valiosos, por exemplo, para derivar o potencial efetivo nos esquemas de renormalização dependentes de massa [41, 42]. Ao mesmo tempo, uma vez que a representação local do momento é essencialmente baseada na expansão na vizinhança de um único ponto do espaço tempo, esse método não é adequado para as contribuições não locais.

Finalmente, a técnica de Schwinger-De Witt [43, 44] é a maneira mais eficiente de derivar as divergências de 1-*loop* em um espaço de fundo curvo. Cerca de 25 anos atrás, houve um progresso significativo no desenvolvimento dos métodos da *heat kernel* por Avramidi [22], Barvinsky e Vilkovisky [21]. Como resultado, as expressões gerais para as não localidades no espaço curvo foram derivadas, e isso abriu o caminho para o cálculo dos fatores de forma não locais a 1-*loop* para diferentes campos [23, 24, 25, 26] e modelos (ver, por exemplo, [27]).

Do ponto de vista das aplicações físicas, as semelhanças e principais diferenças entre a técnica padrão de Schwinger-De Witt e os novos métodos da *heat kernel* são as seguintes. Em ambos os casos, trata-se dos primeiros termos na expansão da ação efetiva covariante em “curvaturas”. No caso da gravidade, devido à covariância, essa expansão tem a forma de uma série de potências no tensor de curvatura e suas contrações (curvaturas). Além disso, para o operador da forma padrão,

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\alpha\nabla_\alpha + \hat{\Pi}, \quad (3.19)$$

as expressões tais como,

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_\alpha\hat{h}^\alpha - \hat{h}_\alpha\hat{h}^\alpha \quad (3.20)$$

e

$$\hat{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} = [\nabla_{\beta}, \nabla_{\alpha}] \hat{1} + \nabla_{\beta} \hat{h}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \hat{h}_{\beta} + \hat{h}_{\beta} \hat{h}_{\alpha} - \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta}, \quad (3.21)$$

também são incluídas na lista de curvaturas.

Muitas aplicações físicas são baseadas em termos que são quadráticos e no máximo cúbicos em curvaturas. A principal diferença é que a técnica padrão de Schwinger-De Witt lida com o limite de altas energias (ou seja, está relacionado ao limite $s \rightarrow 0$ na representação do tempo próprio). Os termos correspondentes são divergentes no regime UV e, portanto, locais. Como resultado, eles geralmente são irrelevantes no limite IR. Claro, para campos sem massa, há uma certa dualidade entre UV e IR. Portanto, pode-se sempre restaurar a parte mais importante dos termos não locais, relevantes no regime IR, por exemplo, integrando a anomalia conforme [23]. Porém, no caso do campo massivo tal integração não pode ser utilizada ou possui um sentido físico muito restrito [45, 46], devido ao desacoplamento IR na gravidade. Em geral, o desacoplamento é importante, pois permite separar os graus de liberdade relevantes e irrelevantes em baixas energias (no IR) e, portanto, representa um dos principais ingredientes da abordagem de teoria de campo efetiva.

Pelo menos um dos primeiros trabalhos sobre o desacoplamento gravitacional foi [39], onde mostrou-se que nos limites $k^2 \ll m^2$ e $|R_{\dots}| \ll m^2$, a expressão para $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ renormalizado de um campo escalar massivo no espaço tempo curvo torna-se local. Os termos correspondentes têm dependência de massa $\sim m^{-2}$ e nenhuma dependência de μ , uma vez que não há relação direta com as divergências UV. As expressões explícitas para os fatores de forma não locais permitem explorar os detalhes do limite IR para os campos massivos e, portanto, pode-se observar e explorar um fenômeno como o desacoplamento nas baixas energias.

A seguir, apresentamos os detalhes da derivação dos fatores de forma gravitacionais, que levam ao análogo gravitacional do teorema do desacoplamento de Appelquist e Carazzone [4]. Para esse fim, consideramos em detalhes a derivação dos fatores de forma usando a solução da *heat kernel* dada em [21].

A contribuição a 1-loop para a ação efetiva euclidiana de um campo massivo é definida como o traço do limite de coincidência do logaritmo do determinante da forma bilinear da

ação. Ou, equivalentemente, como uma integral da *heat kernel* sobre o tempo próprio s ,

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(-\hat{1}\square + m^2 - \hat{P} + \frac{\hat{1}}{6} R \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s). \quad (3.22)$$

Esta fórmula é válida para campos de bósons no espaço tempo euclidiano, enquanto que para férmions o sinal geral da equação (3.22) é modificado. $K(s)$ é a *heat kernel* da forma bilinear da ação clássica da teoria, $\square = \nabla^2$ é a forma covariante do laplaciano, e

$$\begin{aligned} \text{Tr} K(s) = & \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \{ \hat{1} + s\hat{P} + s^2 [\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(\tau) R^{\mu\nu} \\ & + \hat{1} R f_2(\tau) R + \hat{P} f_3(\tau) R + \hat{P} f_4(\tau) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(\tau) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}] \}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nessa expressão $\tau = -s\square$ e usamos a notação $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ de [44]. Vamos notar que usamos $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ mesmo no espaço euclidiano. Na equação (3.23) os termos entre chaves são matrizes nos espaço dos campos (escalar, vetor ou férmion). O termo de ordem zero, proporcional a $\text{tr} \hat{1}$, corresponde às divergências quárticas, ou ao coeficiente a_0 na expansão de Schwinger-DeWitt [28]. O termo com $s \text{tr} \hat{P}$ corresponde às divergências quadráticas, ou ao coeficiente a_1 , e todo o restante corresponde à divergências logarítmicas e está relacionado ao coeficiente a_2 , mais termos finitos. Os termos de terceira ordem e de ordens superiores nas curvaturas são omitidos nessa fórmula.

Como já mencionamos ao tratar da abordagem baseada em diagramas, os termos a_0 e a_1 podem ser eliminados pela escolha do esquema de regularização. Na verdade, existem termos de superfície finitos e não locais relacionados a a_1 que são independentes do esquema de regularização. Termos desse tipo vão aparecer na expansão da *heat kernel* que usaremos no Cap. 4 e também nos trabalhos [25, 26]. Por enquanto nosso foco principal está sobre a parte correspondente a a_2 e termos relacionados. As funções $f_{1..5}$ têm a forma [21]

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{\tau^2}, & f_2(\tau) &= \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau) - 1}{24\tau} - \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{8\tau^2}, \\ f_3(\tau) &= \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau) - 1}{2\tau}, & f_4(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2}, & f_5(\tau) &= \frac{1 - f(\tau)}{2\tau}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$f(\tau) = \int_0^1 d\alpha e^{-\alpha(1-\alpha)\tau} \quad \text{e} \quad \tau = -s\square. \quad (3.25)$$

A diante vamos descrever a derivação da integral (3.22) para o caso particular de um campo escalar massivo.

3.3 Fatores de forma para o campo escalar massivo

A ação para uma teoria escalar, acoplada de forma não mínima ao escalar de curvatura, é

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) \varphi^2 \right\}. \quad (3.26)$$

De onde temos que

$$\hat{P} = - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.27)$$

No caso sob consideração $\hat{1} = 1$ e vale notar que m^2 não está incluído em \hat{P} como acontece com $\hat{\mathcal{P}}$ em (3.20).

Em acordo com (3.22) e (3.23), a parte bilinear na curvatura da ação efetiva pode ser dada por meio da integral do tempo próprio da *heat kernel*, da forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} = & \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \left\{ 1 + s\hat{P} + s^2 [R_{\mu\nu} f_1(-s\nabla^2) R^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + R f_2(-s\nabla^2) R + \hat{P} f_3(-s\nabla^2) R + \hat{P} f_4(-s\nabla^2) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(-s\nabla^2) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A seguir vamos computar essas integrais do tempo próprio na Eq. (3.28).

3.3.1 Termo de ordem zero

Começando pelo caso mais simples, consideremos em (3.28) o termo que corresponde ao coeficiente a_0 na expressão para as divergências,

$$\bar{\Gamma}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2}. \quad (3.29)$$

Aqui é usual introduzirmos uma mudança de variáveis como segue,

$$s = \frac{t}{m^2}, \quad ds = \frac{dt}{m^2}, \quad \frac{ds}{s^{1+\omega}} = \frac{dt m^{2\omega}}{t^{1+\omega}}. \quad (3.30)$$

Dessa maneira a integral torna-se

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_0^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2\omega} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\omega}} e^{-t} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \left[\frac{1}{(2-\omega)} + \frac{3}{2} + O(2-\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \frac{m^4}{2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para chegarmos ao resultado anterior usamos as relações (2.54) e (2.70) apresentadas no capítulo 2. Por questões práticas vamos introduzir aqui a notação

$$\frac{1}{\varepsilon_{\omega,\mu}} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\omega-2} - \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Assim, a contribuição a 1-loop para o termo da constante cosmológica (3.31), torna-se

$$\bar{\Gamma}_0^{(1)} = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{\varepsilon_{\omega,\mu}} + \frac{3}{4(4\pi)^2} \right] \frac{m^4}{2}. \quad (3.33)$$

Podemos observar que essa expressão consiste da divergência UV, devido ao termo $\ln\mu$ contido em $1/\varepsilon_{\omega,\mu}$, e do termo constante, o qual é irrelevante, visto que ele pode ser absorvido em $1/\varepsilon_{\omega,\mu}$ por uma mudança do parâmetro μ . Podemos notar também, que na expressão (3.33) não existe fator de forma não local. Isso é um resultado natural desde que o fator de forma é construído a partir de \square , que dá zero quando atua sobre m^4 .

3.3.2 Termo de primeira ordem

Na primeira ordem em s o termo correspondente é

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr}(s\hat{P}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^\omega} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(\omega-1)} \int d^4x \sqrt{g} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \Gamma(1-\omega) R \\ &= \left[-\frac{1}{\varepsilon_{\omega,\mu}} + \frac{1}{2(4\pi)^2} \right] \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \int d^4x \sqrt{g} m^2 R. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Onde usamos a expansão (2.70), a definição (3.32) e a relação

$$\text{tr} \hat{P} = -\left(\xi - \frac{1}{6} \right) R. \quad (3.35)$$

Assim, sem levar em conta termos de superfície [26], a ação efetiva é local e a dependência logarítmica do parâmetro de renormalização μ é completamente controlada pelo polo $\frac{1}{2-\omega}$. Os resultados (3.33) e (3.34) nos permitem construir as equações do grupo de renormalização baseado no esquema de subtrações mínimas para a constante cosmológica e a para a constante de Newton. No entanto eles não nos fornecem os termos não locais contidos no grupo de renormalização.

3.3.3 Termos de segunda ordem

Nesta seção vamos calcular os termos de segunda ordem, um por um, para encontrar os coeficientes $l_{1\dots 5}^*$ e $l_{1\dots 5}$ que definem os fatores de forma finais dos termos $R_{\mu\nu} \cdot R^{\mu\nu}$ e $R \cdot R$. A partir desses coeficientes a expressão geral em segunda ordem na curvatura pode ser escrita de maneira condensada, na forma

$$\bar{\Gamma}_2^{(1)} = \bar{\Gamma}_{R_{\mu\nu}^2} + \bar{\Gamma}_{R^2} = \sum_{k=1}^5 \bar{\Gamma}_k.$$

Por fim, lembrando que $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} = 0$ para a teoria de campo escalar, temos que avaliar

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + R \left[f_2(-s\Box) - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) f_3(-s\Box) + \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 f_4(-s\Box) \right] R \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.24) e (3.25) em (3.36) e, mais uma vez, $-s\Box$ por τ , chegamos em

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} \left[\frac{f(\tau)}{\tau^2} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{6\tau} \right] R^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + R \left[\left(\frac{1}{288} - \frac{\tilde{\xi}}{12} + \frac{\tilde{\xi}^2}{2} \right) f(\tau) + \left(\frac{1}{24} - \frac{\tilde{\xi}}{2} \right) \frac{f(\tau)}{\tau} - \frac{f(\tau)}{8\tau^2} + \left(\frac{\tilde{\xi}}{2} - \frac{1}{16} \right) \frac{1}{\tau} + \frac{1}{8\tau^2} \right] R \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Onde usamos uma notação condensada $\tilde{\xi} = \xi - 1/6$.

Nesse momento é oportuno introduzir um conjunto de coeficientes definidos a partir dos termos que acompanham as combinações de $f(\tau)$ e $1/\tau$ na expressão anterior, como segue

$$\begin{aligned} l_1^* &= 0, & l_2^* &= 0, & l_3^* &= 1, & l_4^* &= \frac{1}{6}, & l_5^* &= -1 \quad \text{e} \\ l_1 &= \frac{1}{288} - \frac{1}{12} \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^2, & l_2 &= \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \tilde{\xi}, & l_3 &= -\frac{1}{8} = -l_5, & l_4 &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Somado a isso, vamos denotar as integrais em cada termo (3.37) como (lembrando que $\tau = -s\Box$)

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2s} s^{1-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{1-\omega} f(tu), \\ M_2 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2s} s^{-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^\omega}, \\ M_3 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2s} s^{-1-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+\omega}}, \\ M_4 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2s} s^{-\omega} = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^\omega}, \\ M_5 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2s} s^{-1-\omega} = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+\omega}}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde já realizamos a mudança de variável (3.30) e também denotamos

$$u = -\frac{m^2}{\square}. \quad (3.40)$$

Uma observação relevante aqui é que todas as características individuais da teoria em questão (como a teoria escalar aqui estudada) estão contidas nos coeficientes (3.38). Enquanto as integrais (3.39) são universais no sentido de que elas são as mesmas para qualquer teoria que nos forneça um operador da forma (3.19), pelo menos para $\hat{h}^\alpha = 0$. Assim, a computação do mesmo conjunto de integrais (3.39) nos permite derivar os fatores de forma para muitos casos de interesse.

Por meio das novas notações introduzidas em (3.38) e (3.39), a parte de segunda ordem da ação efetiva em 1-loop pode ser escrita na forma

$$\bar{\Gamma}_2^{(1)} = \bar{\Gamma}_{R_{\mu\nu}^2}^{(1)} + \bar{\Gamma}_{R^2}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \sum_{k=1}^5 \left\{ R_{\mu\nu} l_k^* M_k R^{\mu\nu} + R l_k M_k R \right\}. \quad (3.41)$$

Vamos agora calcular as integrais em (3.39). Para este fim vamos fazer uso da expansão (2.70) e das fórmulas (2.52), (2.54) para a função gama. Levando essas fórmulas em conta, os resultados para M_4 e M_5 podem ser dados como segue

$$M_4 = -\frac{1}{(4\pi)^2 u} \left\{ 1 + \frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\} \quad (3.42)$$

$$M_5 = \frac{1}{(4\pi)^2 2u^2} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (3.43)$$

Para calcularmos as três integrais restantes é conveniente introduzirmos uma nova notação

$$a^2 = \frac{4u}{u+4} = \frac{4\square}{\square - 4m^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4}, \quad (3.44)$$

que é exatamente a imagem de Fourier da primeira expressão em (2.87) no espaço euclidiano, com

$$a^2 = \frac{4k^2}{k^2 + 4m^2} \geq 0, \quad \text{e também} \quad a^2 \leq 4. \quad (3.45)$$

Podemos assumir, pela definição anterior, que a vai de $a = 0$ no regime IR a $a = 2$ no regime UV.

Além disso, precisamos do resultado para a seguinte integral

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \ln [1 + \alpha(1-\alpha)u] = 1 - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{2+a}{2-a} \right|, \quad (3.46)$$

que é a mesma integral Y aparecendo na Eq. (2.86) no espaço das coordenadas.

Feitas as definições anteriores, a três primeiras integrais que restam podem ser calculadas e os resultados em termos de a e A , são

$$M_1 = -\frac{2}{\varepsilon_{\omega,\mu}} + \frac{2A}{(4\pi)^2}, \quad (3.47)$$

$$M_2 = \left[-\frac{2}{\varepsilon_{\omega,\mu}} + \frac{1}{(4\pi)^2} \right] \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{18} - \frac{4A}{3a^2} \right\} \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{18} \right\}, \quad (3.49)$$

$$M_3 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{2a^4} - \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{160} \right] + \frac{8A}{15a^4} - \frac{7}{180a^2} + \frac{1}{400} \right\}. \quad (3.50)$$

Agora podemos construir uma combinação usual desses resultados para o caso escalar, da forma

$$\begin{aligned} M_{R^2_{\mu\nu}} &= l_3^* M_3 + l_4^* M_4 + l_5^* M_5 = M_3 + \frac{1}{6} M_4 - M_5 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2-\omega} \left(\frac{1}{60} \right) + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \left(\frac{1}{60} \right) + \frac{8A}{15a^4} + \frac{2}{45a^2} + \frac{1}{150} \right\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

e também

$$\begin{aligned} M_{R^2} &= l_1 M_1 + l_2 M_2 + l_3 M_3 + l_4 M_4 + l_5 M_5 \\ &= \left(\frac{1}{288} - \frac{1}{12} \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^2 \right) M_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} - \tilde{\xi} \right) M_2 - \frac{1}{8} M_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \tilde{\xi} \right) M_4 + \frac{1}{8} M_5 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \tilde{\xi}^2 - \frac{1}{180} \right) + A \tilde{\xi}^2 + \frac{2A}{3a^2} \tilde{\xi} - \frac{A}{6} \tilde{\xi} - \frac{A}{18a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{144} - \frac{A}{15a^4} - \frac{59}{10800} - \frac{1}{180a^2} + \frac{1}{18} \tilde{\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Com essas combinações anteriores podemos finalmente escrever

$$\bar{\Gamma}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} M_{R^2_{\mu\nu}} R^{\mu\nu} + R M_{R^2} R \right\}. \quad (3.53)$$

Notemos que existe um terceiro termo relacionado com o quadrado do tensor de Riemann. No entanto para qualquer inteiro N podemos provar, utilizando a identidade de Bianchi e a integração parcial, que (veja por exemplo [47])

$$E_{4,N} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^N R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu} + R \square^N R = \mathcal{O}(R^3_{\dots}) + \text{derivadas totais}. \quad (3.54)$$

Isso significa que na aproximação bilinear na curvatura, tal como discutimos aqui, podemos usar a fórmula de redução relacionada com o termo de Gauss-Bonnet

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} f(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu} f(\square) R^{\mu\nu} - R f(\square) R. \quad (3.55)$$

Como um resultado, na aproximação quadrática em curvatura, não existe maneira de perceber as não localidades associadas à combinação de Gauss-Bonnet. Como consequência disso podemos usar como base os termos $R_{\mu\nu}^2$ e R^2 , ou alguma outra base equivalente. Para várias aplicações uma base usual é o quadrado do tensor de Weyl, em vez do quadrado do tensor de Ricci. A mudança entre essas bases pode ser feita através das fórmulas

$$C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3}R^2 = E_4 + 2W, \quad (3.56)$$

onde $W = R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3}R^2$, E_4 é irrelevante, e

$$\tilde{M}_{R^2} = M_{R^2} + \frac{1}{3}M_{R_{\mu\nu}^2}. \quad (3.57)$$

Agora, introduzindo os fatores de forma k_W e k_R ,

$$k_W = k_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{8A}{15a^4} + \frac{2}{45a^2} + \frac{1}{150}, \quad (3.58)$$

$$k_R = A\tilde{\xi}^2 + \left(\frac{2A}{3a^2} + \frac{1}{18} - \frac{A}{6}\right)\tilde{\xi} - \frac{A}{18a^2} + \frac{A}{144} + \frac{A}{9a^4} - \frac{7}{2160} - \frac{1}{108a^2}. \quad (3.59)$$

Considerando todos os termos até segunda ordem na curvatura temos como resultado a ação efetiva

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{scalar}^{(1)} &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{m^4}{2} \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \frac{3}{2} \right] \right. \\ &+ \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^2 R \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + 1 \right] \\ &+ \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{60(2-\omega)} + \frac{1}{60} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &+ \left. R \left[\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{2-\omega} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right) + k_R \right] R \right\}. \quad (3.60) \end{aligned}$$

Vamos fazer algumas observações a respeito do resultado final para a ação efetiva do vácuo para o campo escalar (3.60), com os fatores de forma (3.58) e (3.59). Em primeiro lugar, deve-se ressaltar que essa ação é essencialmente não local no setor de altas derivadas. O resultado é exato nas derivadas do tensor de curvatura, mas é apenas de segunda ordem nas próprias curvaturas. Por outro lado, os termos de derivadas inferiores,

ou seja, correções quânticas à constante cosmológica e ao termo linear em curvatura, não têm partes não locais.

As não localidades derivadas a partir da *heat kernel* e dos diagramas de Feynman em regularização são as mesmas. Isso é confirmado pela correspondência entre Y e A em nossas duas considerações, e também pelos resultados originais de [23] e [25] para os fatores de forma gravitacionais.

Para o limite sem massa (ou UV, para campo massivo), assumimos $-\square/m^2 \gg 1$, no mesmo sentido de $k^2/m^2 \gg 1$ para o momento euclidiano k . Em seguida os fatores de forma k_W e k_R podem ser construídos seguindo o método da Eq. (2.91). De acordo com (3.44) nesse limite $a \rightarrow 2$. Então,

$$k_W \sim -\frac{1}{120} \ln\left(\frac{-\square}{\mu^2}\right) + \text{termos constantes e negligenciáveis.} \quad (3.61)$$

$$k_R \sim -\frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 \ln\left(\frac{-\square}{\mu^2}\right) + \text{termos constantes e negligenciáveis.} \quad (3.62)$$

Essas relações mostram que no limite UV pode-se restaurar os termos não locais a partir das divergências logarítmicas. Por outro lado, para modelos massivos fora do limite UV, os termos não locais possuem estrutura complexa e não existe maneira de restaurá-los a partir das divergências.

Podemos dizer que as divergências logarítmicas no regime UV controlam o esquema de subtração mínima baseado no grupo de renormalização, coberto pela dependência em μ , e também concorda com o comportamento físico da teoria no regime UV, que significa a dependência logarítmica do momento p no limite quando $(p/m) \rightarrow \infty$. A observação final sobre o fator de forma (3.58) é que a expressão (3.61) nos permite encontrar a parte quadrática no tensor de Weyl da anomalia conforme no limite sem massa. Para esse fim temos que usar a parametrização conforme da métrica $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} \exp\{2\sigma(x)\}$ e notar que

$$\square = e^{-2\sigma(x)} [\square' + \mathcal{O}(\sigma)]. \quad (3.63)$$

Agora, derivando a anomalia pela prescrição

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta \Gamma[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Bigg|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0} \quad (3.64)$$

podemos recuperar a partir de (3.63) a parte dependente de C^2 da anomalia com o correto coeficiente, idêntico ao da divergência correspondente [14].

Vamos fazer mais uma observação a respeito do fator de forma para o termo quadrático no tensor de Weyl. Os cálculos acima foram feitos na assinatura euclidiana da métrica. No entanto, se realizássemos a derivação dos resultados na assinatura de Minkowski e com a prescrição $\square = \square_E \rightarrow \square + i\varepsilon$, o fator de forma UV (3.61) ganharia uma adição imaginária. O termo imaginário é conhecido por descrever a criação de partículas sem massa pelo campo gravitacional, como discutido na ref. [48] (veja também [49] para mais detalhes). Esse resultado mostra a relação entre a anomalia conforme e a taxa de criação de partículas, que é (na primeira aproximação) proporcional aos termos de Weyl ao quadrado e R ao quadrado, na ação efetiva não local. Seria interessante estender esse resultado para a criação de partículas massivas no Universo inicial usando o análogo pseudoeuclidiano dos fatores de forma ((3.58) e (3.59), que também pode ser facilmente generalizado para os férmions e vetores massivos [24] . Deixamos esta investigação para um possível trabalho futuro.

A derivação semelhante para a parte de Gauss-Bonnet da anomalia é impossível, exatamente porque o fator de forma correspondente é de terceira ordem em curvatura e, portanto, está além do escopo da presente consideração. O cálculo desse termo na teoria estritamente sem massa foi feito em [50] e [51]. Ao mesmo tempo, os fatores de forma são muito úteis para entender melhor o problema da ambiguidade da anomalia conforme, relacionada ao termo R^2 local na ação induzida pela anomalia e ao termo R na divergência de UV [52]. Em particular, usando a regularização covariante de Pauli-Villars pode-se mostrar que esta ambiguidade aparece não apenas na regularização dimensional [53, 54], mas também em outras regularizações. Além disso, se o limite conforme é alcançado tomando o limite sem massa ($\xi \rightarrow 1/6$ e $m \rightarrow 0$) no modelo não conforme, o termo R^2 permanece não local até que o limite seja obtido e, então, não há descontinuidade ou ambiguidade no resultado induzido pela anomalia para a contribuição do *loop* .

No limite IR, quando $k^2 \ll m^2$, podemos observar uma situação muito diferente. A comportamento assintótico de A e k_W neste caso é da forma

$$A = -\frac{1}{12} \frac{k^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{10} \frac{k^2}{m^2}\right) + \dots \quad (3.65)$$

$$k_W = -\frac{1}{840} \frac{k^2}{m^2} \left(1 + \frac{1}{18} \frac{k^2}{m^2}\right) + \dots \quad (3.66)$$

Podemos ver que não há *running* logarítmico no regime IR e, portanto, não há relação direta entre a dependência de momentos e μ nessa região. Este é o desacoplamento gra-

vitacional, que também pode ser visto nas funções β [23]. Em outras palavras, no regime IR, os termos não locais desaparecem, enquanto as divergências permanecem as mesmas. Assim, vemos que as divergências logarítmicas fornecem pistas importantes do comportamento da teoria no regime UV, mas no regime IR elas não trazem nenhuma informação.

CAPÍTULO 4

Fatores de formas em $2D$

A seguir vamos considerar as contribuições quânticas advindas dos *loops* dos campos de matéria para um modelo mais simples de gravidade em $2D$. Uma característica particular das contribuições gravitacionais dos campos de matéria nesse modelo é que aquelas oriundas dos campos conformes sem massa são conhecidas a partir da integração do traço da anomalia [55, 56], sendo a ação covariante não local de Polyakov [57]. Nesse sentido, a integração dos campos não conformes e, em particular, massivos, dá uma nova perspectiva para esses resultados clássicos sobre a anomalia [54]. Ao mesmo tempo em que complementa a derivação da ação de Polyakov via método do grupo de renormalização funcional[58], que efetivamente trata todos os campos como massivos por meio do uso de um termo regulador.

A seguir vamos apresentar a derivação dos fatores de forma não locais no setor do vácuo gravitacional dos campos de matéria com massa em $2D$. Embora exista uma simplicidade maior em comparação com a derivação desses fatores de forma para o vácuo em $4D$, veremos que os resultados em duas dimensões são interessantes. Eles nos permitem explorar questões gerais como a relação entre o limite de massa nula e a ação efetiva induzida por anomalia no regime de altas energias UV, além do desacoplamento dos graus de liberdade massivos no outro extremo da escala de energia, dada pelo limite IR.

4.1 Ação efetiva em $2D$

Em duas dimensões os tensores de Riemann e Ricci podem ser expressos em termos do escalar de Ricci, na forma

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}), \quad R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Como consequência o tensor de Einstein é identicamente zero, o que significa que a parte clássica da ação que leva às equações de Einstein para o tensor métrico é nula. Além disso, há menos divergências em duas dimensões. Esses aspectos fazem o modelo de gravidade em $2D$ mais simples de ser explorado, em comparação com o caso $4D$ [59, 60], e produzem resultados compatíveis com aqueles da teoria de campos conforme [61, 62]. Lembrando que todos esses trabalhos foram desenvolvidos para a quantização de uma ação não local de Polyakov ou suas equivalentes.

Vamos agora considerar uma abordagem semiclássica, na qual apenas os campos de matéria são quantizados de forma que seus efeitos quânticos produzem a ação efetiva para a métrica. No limite UV tal ação efetiva pode ser calculada através da integração da anomalia conforme [63]. Contudo, para descrever os fenômenos em diferentes escalas de energias é necessário levar em conta a massa dos campos quânticos. Consideremos um campo de matéria livre Φ de massa m , caracterizado pela ação quadrática

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{g} \Phi (\mathcal{O} + m^2) \Phi, \quad (4.2)$$

na qual \mathcal{O} é um operador diferencial covariante de segunda ordem, conhecido como um operador do tipo Laplace.

Podemos usar a expansão da *heat kernel* para computar a ação efetiva para o vácuo a 1-loop integrando sobre o tempo da *heat kernel* na assinatura euclidiana,

$$\Gamma[g] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sm^2} \mathcal{H}(s). \quad (4.3)$$

Na qual introduzimos a solução da *heat kernel* $\mathcal{H}(s)$, que formalmente é um bi-escalar $\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(s; x, x')$ cuja forma explícita é mostrada na Sec. 4.1.1, seguindo os passos em [25, 21]. Na expressão (4.3) o traço funcional leva em conta o limite de coincidência $x' \rightarrow x$ e o elemento de integração covariante $\int d^D x \sqrt{g}$. Além disso, o parâmetro s é dual a uma escala de energia, de maneira que a integral sobre s estende-se do regime UV em $s = 0$

ao regime IR em $s = \infty$. Enquanto o limite IR converge devido à presença da massa $m^2 > 0$, o limite UV possivelmente vai requerer uma regularização, o que induzirá um *running* nos acoplamentos gravitacionais para a ação efetiva $\Gamma[g]$ através do processo de renormalização.

De fato, além de uma parte finita não local, a ação efetiva incluirá divergências. Na regularização dimensional essas divergências aparecerão por meio de integrais da forma [44],

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{n+1}} e^{-sm^2} \sim \frac{1}{2n} + \text{finite}. \quad (4.4)$$

A partir da forma da expansão da *heat kernel* e considerando apenas os limites assintóticos de s pequeno, observamos que para $D = 2 - \epsilon$ as potências divergências podem aparecer como polos $1/\epsilon$ até a primeira ordem na expansão em curvatura, quando $n = D/2 - 1$. Por outro lado, se $D = 4 - \epsilon$ as divergências poderiam aparecer até a segunda ordem na expansão de curvatura quando $n = D/2 - 2$.

Com a finalidade de cancelar as divergências é necessário introduzir os chamados contra-termos $\Delta S[g; \mu]$ e então a ação efetiva a *1-loop* renormalizada torna-se

$$\Gamma_{\text{ren}}[g] = \Gamma[g] + \Delta S[g; \mu]. \quad (4.5)$$

Sendo μ a escala de massa introduzida por razões dimensionais, na qual a subtração das divergências ocorre. Desde que estejamos tratando com campos livres os contra-termos dependem apenas da métrica e, portanto, apenas os parâmetros da ação do vácuo possuem *running* com a escala.

No esquema de renormalização por subtração mínima ($\overline{\text{MS}}$) os contra-termos apenas removem os pólos $1/\epsilon$ (exceto por uma parte finita local). Nesse esquema, a subtração é feita em uma escala μ arbitrariamente alta e o efeito da massa no *running* dos parâmetros efetivos é perdido. Se por outro lado a subtração é feita em uma escala de energia física, digamos q^2 , então os efeitos da massa no comportamento IR torna-se visível no *running* dos parâmetros do vácuo. Os dois regimes de interesse são o limite UV , $q^2/m^2 \gg 1$, e o limite IR , $q^2/m^2 \ll 1$, no qual as flutuações congelam abaixo de um limiar definido pela massa do campo quântico.

Os trabalhos em $4D$ [23, 24] mostram que para uma escala de energia física, o *running* concorda com as expectativas baseadas no teorema de Appelquist-Carazzone [4]. Isto

é, a função beta β para qualquer parâmetro do vácuo apresenta os dois limites

$$\begin{aligned}\beta_{\text{UV}} &= \beta_{\overline{\text{MS}}} && \text{for } q^2/m^2 \gg 1 \\ \beta_{\text{IR}} &\propto \frac{q^2}{m^2} && \text{for } q^2/m^2 \ll 1.\end{aligned}\quad (4.6)$$

A seguir, vamos estender a afirmação desse teorema para o caso $2D$.

4.1.1 Expansão não local da heat kernel

Nesta seção vamos apresentar alguns detalhes sobre a forma da expansão não local da *heat kernel* que foi originalmente desenvolvida em [21, 64]. Para este fim vamos utilizar a notação de [25]. Consideremos um operador do tipo Laplace,

$$\mathcal{O} = -\Delta_g + E, \quad (4.7)$$

atuando sobre uma estrutura vetorial geral equipada com uma conexão e definida sobre uma variedade riemanniana com métrica $g_{\mu\nu}$. Esse operador é a soma da laplaciano $\Delta_g = \nabla^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ e de um endomorfismo sobre a estrutura vetorial. Em geral, a conexão tem curvatura $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ e pode, inclusive, conter uma contribuição de Levi-Civita se parte da estrutura vetorial é obtida como um produto tensorial de estruturas tangentes e cotangentes.

A *heat kernel* $\mathcal{H}(s; x, x')$ é definida como uma solução do seguinte problema de Cauchy com respeito ao tempo próprio s ,

$$\begin{aligned}(\partial_s + \mathcal{O}_x) \mathcal{H}(s; x, x') &= 0 \\ \mathcal{H}(s; x, x') &= \delta(x, x'),\end{aligned}\quad (4.8)$$

onde $\delta(x, x')$ é a delta de Dirac sobre uma variedade [65].

O traço do limite de coincidência da *heat kernel* $\mathcal{H}(s; x, x)$ admite uma expansão em termos da curvatura de Riemann, da curvatura da conexão e do endomorfismo. A expansão pode ser computada sem ambiguidade em variedades assintoticamente planas [25, 21, 66]. Até segunda ordem na curvatura essa expansão tem a forma,

$$\begin{aligned}\text{tr } \mathcal{H}(s, x, x) &= \frac{1}{(4\pi s)^{D/2}} \int d^D x \sqrt{g} \text{tr} \left\{ \mathbf{1} + s [G_E(-s\Delta_g)E + G_R(-s\Delta_g)R] \right. \\ &\quad + s^2 \left[R F_R(-s\Delta_g)R + R^{\mu\nu} F_{\text{Ric}}(-s\Delta_g)R_{\mu\nu} + E F_E(-s\Delta_g)E \right. \\ &\quad \left. \left. + E F_{RE}(-s\Delta_g)R + \Omega^{\mu\nu} F_\Omega(-s\Delta_g)\Omega_{\mu\nu} \right] \right\} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3),\end{aligned}\quad (4.9)$$

na qual $\mathcal{O}(\mathcal{R}^3)$ representa uma expansão não local em terceira ordem na curvatura, como bem explicado em [21]. A fórmula anterior é dada sem especificar as condições de contorno no infinito para a primeira ordem na curvatura, enquanto a integração por partes é usada na segunda ordem. Para mais detalhes dessa derivação, veja [25, 67].

As funções não locais de Δ_g aparecendo na expansão, são conhecidas como fatores de forma da *heat kernel*. Elas são dadas por

$$G_E(x) = -f(x), \quad (4.10)$$

$$G_R(x) = \frac{f(x)}{4} + \frac{f(x) - 1}{2x}, \quad (4.11)$$

para os termos lineares na curvatura, e

$$F_{Ric}(x) = \frac{1}{6x} + \frac{f(x) - 1}{x^2}, \quad (4.12)$$

$$F_R(x) = -\frac{7}{48x} + \frac{f(x)}{32} + \frac{f(x)}{8x} - \frac{f(x) - 1}{8x^2}, \quad (4.13)$$

$$F_{RE}(x) = -\frac{f(x)}{4} - \frac{f(x) - 1}{2x}, \quad (4.14)$$

$$F_E(x) = \frac{f(x)}{2}, \quad (4.15)$$

$$F_\Omega(x) = -\frac{f(x) - 1}{2x}, \quad (4.16)$$

para os termos quadráticos na curvatura. Todos esses fatores de forma são expressos em termos de um fator de forma básico

$$f(x) = \int_0^1 d\alpha e^{-\alpha(1-\alpha)x}. \quad (4.17)$$

Os fatores de forma apresentados acima admitem expansões bem definidas, tanto para grandes como para pequenos valores do parâmetro s e serão usados ao longo deste capítulo para obtermos a estruturas não locais, que aparecem na ação efetiva do vácuo para os campos de matéria.

4.1.2 Setor de vácuo de uma teoria geral a 1-loop

Vamos relembrar a ideia de um modelo geral de campos de matéria em interação. A 1-loop o fator de forma do vácuo não depende das interações e é dado pela soma algébrica das contribuições dos campos com *spin* 0, 1/2, 1, com diferentes massas. Vamos considerar os fatores de forma do vácuo na teoria com n_s campos escalares, minimamente ou não

minimamente acoplados, n_f espinores de Dirac minimamente acoplados e n_p campos de Proca minimamente acoplados em um espaço de fundo $2D$, com métrica $g_{\mu\nu}$. Em vez de campos de Proca massivos, poderíamos considerar vetores sem massa. Contudo, adiante veremos a diferença entre este caso e o limite de massa nula de um modelo de Proca.

Por uma questão de simplicidade, vamos considerar que todos os campos de matéria para cada valor de *spin* têm a mesma massa. Então, a ação efetiva é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \Gamma[g] &= \frac{n_s}{2} \text{Tr}_s \ln (-\Delta_g + \xi R + m_s^2) - n_f \text{Tr}_f \ln (\not{D} + m_f) \\ &\quad + \frac{n_p}{2} \text{Tr}_v \ln (-\Delta_g + m_v^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nessa fórmula denotamos $\Delta_g = \nabla^2$, independentemente do conjunto de campos (escalar, espinorial ou vetorial) e assumimos que o traço funcional deve ser tomado da mesma forma. O primeiro termo em (4.18) inclui as contribuições dos campos escalares e, para o que desenvolvemos a seguir, mais nenhuma manipulação desse termo é necessária. Caso este, que não se aplica aos outros dois termos.

O operador de Dirac \not{D} dentro do traço pode ser levado a uma forma quadrática,

$$\text{Tr}_f \ln (\not{D} + m_f) = \frac{1}{2} \text{Tr}_f \ln \left(-\Delta_g + \frac{R}{4} + m_f^2 \right), \quad (4.19)$$

na qual usamos uma forma explícita da conexão de *spin*. Esta também é usada para avaliar o comutador das derivadas covariantes sobre o conjunto de campos de *spin*

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \Omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (4.20)$$

O traço constituindo a contribuição dos campos de Proca para o vácuo pode ser escrito como uma diferença entre um traço para campos vetoriais e um traço para campos escalares. Os detalhes da derivação dessa propriedade podem ser encontrados em [44] e [68], e como ela não depende explicitamente do número de dimensões do espaço tempo, vamos nos ater a apresentar o resultado final aqui,

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_v \ln (-\Delta_g + m_v^2) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (-g_{\mu\nu} \Delta_g + R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m_v^2) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (-\Delta_g + m_v^2). \quad (4.21)$$

Como pode ser visto o segundo termo é equivalente ao caso de um campo escalar minimamente acoplado, dado por $\xi = 0$.

Levando todos esses resultados anteriores em (4.18) chegamos a

$$\begin{aligned} \Gamma[g] &= \frac{n_s}{2} \text{Tr}_s \ln (-\Delta_g + \xi R + m_s^2) - \frac{n_f}{2} \text{Tr}_f \ln \left(-\Delta_g + \frac{R}{4} + m_f^2 \right) \\ &\quad + \frac{n_p}{2} \text{Tr}_v \ln (-\Delta_g + \text{Ric} + m_v^2) - \frac{n_p}{2} \text{Tr}_s \ln (-\Delta_g + m_v^2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

De posse dessa forma para a ação efetiva do vácuo, as contribuições de cada um dos campos para essa ação podem ser obtidas por meio do método mencionado na seção anterior, com a devida substituição das massas. Na seção seguinte vamos obter essas contribuições e desde já adiantamos a notação β_G^s , β_G^f , β_G^p e β_G^g para as contribuições ao *running* do inverso da constante de Newton, induzidas pelos graus de liberdade escalar, fermiônico, Proca e vetores de calibre sem massa, respectivamente.

4.2 Campo escalar massivo em gravidade $2D$

Iniciamos nosso cálculo da ação efetiva do vácuo considerando os efeitos induzidos por um campo escalar massivo não acoplado minimamente. Consideramos esse exemplo essencial e por esse motivo o usamos para explorar os detalhes do método. Consideremos um campo escalar φ com ação clássica

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \varphi (-\Delta_g + \xi R + m^2) \varphi. \quad (4.23)$$

Em geral esta ação não é invariante por uma transformação conforme. No entanto, classicamente esta invariância pode ser recuperada tomando simultaneamente os limites $m^2 \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$. De forma mais geral, nesse limite pode-se avaliar a ação efetiva $\Gamma[g]$ integrando a anomalia conforme, porque nenhuma estrutura invariante conforme pode ser esperada em $2D$. O resultado desse processo é o termo de Polyakov, que é uma ação não local quadrática no escalar de Ricci. Por outro lado, fora do limite conforme pode-se esperar todas as potências do escalar de Ricci e estruturas não locais mais complicadas. Contudo, para fins práticos consideraremos apenas termos até segunda ordem na curvatura da ação efetiva não local.

Além das considerações anteriores temos que introduzir uma ação do vácuo, que deve ser local, covariante e suficiente para renormalizar todas as possíveis divergências. Em $2D$ tal ação euclidiana inclui apenas o termo de Einstein-Hilbert e a constante cosmológica

$$S_{\text{vac}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{g} (2\Lambda - R). \quad (4.24)$$

Na verdade a ação do vácuo acima é suficiente para todos os tipos de campos de matéria. Então a renormalização do vácuo se reduz à renormalização da constante de Newton G_N e da constante cosmológica Λ .

4.2.1 Derivação da ação efetiva e função β

A ação efetiva regularizada é definida como uma versão modificada da expressão geral (4.3),

$$\Gamma[g] = -\frac{1}{2} (4\pi\mu^2)^{\epsilon/2} \text{Tr} \int \frac{ds}{s} e^{-sm^2} \mathcal{H}(s). \quad (4.25)$$

Nessa expressão μ é o parâmetro de renormalização utilizado para preservar a dimensão em $D = 2 - \epsilon$ dimensões do espaço tempo.

Agora temos que avaliar a *heat kernel* $\mathcal{H}(s)$ usando os métodos da seção 4.1.1. Desde que estamos interessados no limite $\epsilon \rightarrow 0$ usamos a relação (4.1) para a avaliação da ação efetiva. Neste caso o traço da *heat kernel* é simplificado de forma considerável e podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathcal{H}(s) &= \frac{1}{(4\pi s)^{D/2}} \int d^2x \sqrt{g} \left\{ 1 + s \left[G_R(-s\Delta_g) + \xi G_E(-s\Delta_g) \right] R \right. \\ &\quad + s^2 R \left[F_R(-s\Delta_g) + \frac{1}{2} F_{Ric}(-s\Delta_g) + \xi F_{RE}(-s\Delta_g) \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi^2 F_E(-s\Delta_g) \right] R \right\} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sendo as funções G_R , G_E , F_R , F_{Ric} , F_{RE} e F_E dadas na seção 4.1.1. Vamos novamente ressaltar que esta última fórmula é essencialmente mais simples que sua contraparte no caso $4D$, em função do uso da relação (4.1) e do fato de o comutador das derivadas covariantes ser nulo, $\Omega_{\mu\nu} = 0$, quando atua sobre campos escalares. Ao mesmo tempo, a dimensão geral D aparece na fórmula (4.26) indicando o uso da regularização dimensional.

Neste ponto é conveniente introduzir uma notação condensada que simplifica as partes divergentes e finitas da ação efetiva. Definimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\epsilon}} &= \frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - \gamma, \\ z &= -\frac{\Delta_g}{m^2}, \quad a = \sqrt{\frac{4z}{4+z}}, \quad Y = 1 - \frac{1}{a} \log \left| \frac{1+a/2}{1-a/2} \right|, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Realizando a integral sobre o tempo próprio s , depois de algumas manipulações obtemos o resultado para a ação efetiva até segunda ordem no escalar de curvatura,

$$\Gamma_s[g] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} \left\{ \frac{m^2}{2\bar{\epsilon}} + \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2\bar{\epsilon}} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{B(z)}{2} R + \frac{1}{24} R \frac{C(z)}{\Delta_g} R \right\}. \quad (4.28)$$

Na qual definimos as funções

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{18} + 2\left(\xi - \frac{1}{4}\right)Y + \frac{2Y}{3a^2}, \\ C(z) &= -\frac{1}{2} - \frac{6Y}{a^2} + 3(1 - 4\xi)Y + \frac{3}{8}a^2(1 - 4\xi)^2(1 - Y). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por fim, subtraindo as divergências na escala definida pelo momento euclidiano q , podemos obter a função beta para o inverso da constante de Newton. A função beta física pode ser computada atuando com a derivada $d/d \ln(q/q_0)$ sobre o coeficiente do escalar de Ricci na parte finita da ação efetiva. Seguindo a estratégia descrita em [23, 24] podemos realizar essa computação diretamente no espaço das coordenadas pela substituição, $z = q^2 \leftrightarrow -\Delta_g$, na expressão final. Dessa forma obtemos,

$$\beta_G^s = \frac{1}{4\pi} z B'(z) = \frac{1}{8\pi} \left[-\frac{1}{6} + (1 - 2\xi)Y - \frac{2Y}{a^2} + \frac{1}{8}(1 - 4\xi)a^2(1 - Y) \right]. \quad (4.30)$$

Neste ponto cabe uma observação. Contrariamente ao caso $4D$ explorado em [23, 24], aqui estabelecemos a função beta para o inverso da constante de Newton. A razão para isso não é a mudança da dimensão, mas sim, o fato de que usamos os termos de superfície para a *heat kernel* na forma $G_R(-s\Delta_g)R$. Mais detalhes de como obter os termos de superfície podem ser encontrados em [25, 66], enquanto aplicações não triviais aparecem em [67]. No que segue apresentaremos uma breve discussão das propriedades dos resultados (4.28) e (4.30).

4.2.2 Recuperando a ação de Polyakov no limite conforme

Vamos agora explorar o comportamento da ação efetiva (4.28) quando o limite conforme, dado por $\xi \rightarrow 0$ e $m^2 \rightarrow 0$, é considerado. Nessa ação efetiva sob consideração o termo quadrático na curvatura pode ser entendido como uma generalização da ação de Polyakov [57]. Dessa forma ela pode ser vista como um modelo simplificado do que pode ser esperado para o caso mais realista de um campo escalar não conforme em $4D$.

Vamos considerar inicialmente o caso mais simples com $\xi = 0$ e massa diferente de zero. Para essas considerações a ação de Polyakov deve ser recuperada no limite $z \rightarrow \infty$. Limite este que representa o regime UV, desde que z diverge para $m^2 \rightarrow 0$ com o momento q^2 fixo, ou de forma similar, para $q^2 \rightarrow \infty$ com m^2 fixo. Considerando esse limite na função $C(z)$, temos

$$C(z) \rightarrow 1, \quad \text{para} \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.31)$$

Como é esperado a partir da invariância conforme local, nesse limite a ação de Polyakov é recuperada

$$\Gamma_s[g] \longrightarrow \frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \frac{1}{\Delta_g} R = \Gamma_P[g], \quad (4.32)$$

onde temos considerado apenas o termo quadrático em R .

No geral, para uma massa diferente de zero a ação efetiva leva em conta termos que dependem de ordens superiores de R . Contudo, a correspondência com a ação de Polyakov (4.32) requer que todos esses termos desapareçam no limite conforme. Porém, a prova deste fato está fora do escopo deste trabalho, que trata apenas com os fatores de forma até segunda ordem. Vale notar, entretanto, que a prova pode constituir um passo relevante, particularmente devido à interessante discussão sobre o papel da expansão nas componentes do tensor de curvatura em 4D que aparece em [69, 70].

Podemos ainda considerar o caso de uma teoria com um valor arbitrário de ξ . Tomando o limite UV na expressão geral (4.28), podemos apenas expandir para um pequeno, mas não nulo, valor de m^2 e chegamos a uma correção logarítmica para a ação de Polyakov

$$\Gamma_s[g] \longrightarrow \Gamma_P[g] - \frac{\xi}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \left[\frac{1}{\Delta_g} - \xi \frac{\ln(-\Delta_g/m^2)}{\Delta_g} \right] R. \quad (4.33)$$

Deve-se notar que o limite de massa nula do segundo termo dentro da integral é singular para $\xi \neq 0$. Portanto a presença de um valor não conforme para ξ proíbe o limite de massa nula. Ao mesmo tempo que no caso conforme, $\xi = 0$, o resultado anterior recupera a ação de Polyakov, conforme esperado a partir de (4.32). Retomaremos essa discussão da singularidade no regime IR para $\xi \neq 0$ na seção 4.2.4.

4.2.3 Os dois regimes para β_G^s

A função beta β_G^s é uma expressão geral, válida em todas as escalas de energia. Contudo, é relevante considerar o comportamento dessa função no regime UV, dado por $z \gg 1$, ou equivalentemente, $q^2 \gg m^2$; e no regime IR, dado por $z \ll 1$, ou de forma análogo, $q^2 \ll m^2$. Nesses limites a função beta do vácuo comporta-se como em (4.6)

$$\beta_{G,\text{UV}}^s = -\frac{1}{4\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{q^2} \left[1 - 2\xi \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) \right] + \dots \quad (4.34)$$

$$\beta_{G,\text{IR}}^s = -\frac{1}{24\pi} \left(\xi - \frac{1}{5} \right) \frac{q^2}{m^2} + \dots \quad (4.35)$$

Na primeira dessas expressões o termo de ordem zero na expansão UV recupera o resultado padrão obtido pelo processo de renormalização $\overline{\text{MS}}$ no caso $2D$ (como pode se visto em [54]),

$$\beta_{G, \overline{\text{MS}}}^s = -\frac{1}{4\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right). \quad (4.36)$$

Ao mesmo tempo, no limite IR observamos que para q^2 suficientemente pequeno o *running* do parâmetro do vácuo é interrompido com um desacoplamento quadrático, como já esperado a partir do teorema de Appelquist e Carazzone [4]. Ressalta-se que esse resultado foi obtido para a função beta do termo linear na curvatura, o que deve ser considerado como um resultado não trivial [23].

4.2.4 Sobre a não analiticidade da expressão (4.33)

Nesta seção vamos abordar em mais detalhes as razões pelas quais o integrando em (4.33) é singular no limite de massa nula. Para isso seguimos os passos das referências [21, 64], nas quais é mostrado que a ação efetiva em duas dimensões é analítica apenas no caso de um campo escalar conforme.

A analiticidade da ação efetiva está relacionada com a convergência da integral (4.3) no limite superior. Nesse limite o comportamento de (4.26) é determinado pela expansão dos fatores de forma para valores muito grandes do parâmetro s . A partir das expressões (4.10) - (4.15) podemos obter os seguintes comportamentos dos fatores de forma

$$G_E(x) = -\frac{2}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.37)$$

$$G_R(x) = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.38)$$

e

$$F_{Ric}(x) = \frac{1}{6x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.39)$$

$$F_R(x) = -\frac{1}{12x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.40)$$

$$F_{RE}(x) = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.41)$$

$$F_E(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (4.42)$$

Combinando esses resultados, o comportamento de $\mathcal{H}(s)$ para $s \rightarrow \infty$ é

$$\mathcal{H}(s) = s^{-\frac{D}{2}}(\mathcal{R})^0 + s^{-\frac{D}{2}}(\mathcal{R})^1 + s^{-\frac{D}{2}+1}(\mathcal{R})^2 + \mathcal{O}(\mathcal{R})^3, \quad (4.43)$$

onde \mathcal{R} simbolicamente representa todos os tipos de curvatura e os índices 0, 1, 2 determinam a ordem da expansão.

Comparando a expressão anterior para $\mathcal{H}(s)$ com a Eq. (2.16) na Ref. [21], notamos que a presença do fator de forma na parte linear na curvatura muda o comportamento de $\mathcal{H}(s)$ em s muito grande. No cálculo de $\Gamma[g]$ o coeficiente do termo linear na curvatura é determinado pela integral do tipo

$$\int^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{1}{(4\pi s)^{D/2}} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \right\}, \quad (4.44)$$

enquanto que, para o termo quadrático, temos

$$\int^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{s}{(4\pi s)^{D/2}} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \right\}, \quad (4.45)$$

quando consideramos $m = 0$. Para $D = 2$ a ação efetiva é analítica até a primeira ordem na curvatura. Por outro lado, na segunda ordem na curvatura a analiticidade de $\Gamma[g]$ é quebrada pela presença do termo $1/s$ no integrando. É esse tipo de singularidade que aparece no segundo termo da integral (4.33).

A partir dessa perspectiva a ação de Polyakov pode ser vista como um caso muito especial, já que ela é analítica em segunda ordem na curvatura. A razão para isso é que os fatores de forma combinam-se de tal maneira que os termos que exibem um comportamento do tipo $1/s$ se cancelam e o primeiro termo da expansão para valores grandes de s torna-se $1/s^2$, fazendo $\Gamma[g]$ finita no regime IR. A partir de $\mathcal{H}(s)$ e da expansão dos fatores de forma para valores grandes de s , podemos ver que o cancelamento dos termos do tipo $1/s$ ocorre apenas quando $\xi = 0$. Apenas nesse caso a ação efetiva com $m = 0$ é analítica para $D = 2$. De forma contrária, a presença do termo com $1/s$ no caso de $\xi \neq 0$ leva a uma função $\Gamma(1 - D/2)$, que tem um polo em $D = 2$. Esse polo corresponde à divergência IR relacionada à singularidade da ação efetiva em $2D$ [21, 65].

4.3 Espinores de Dirac

Nesta seção vamos calcular as contribuições dos espinores de Dirac para a ação efetiva do vácuo. Para esse fim, vamos denotar a dimensão da álgebra de Clifford $d_f = \text{tr } \hat{1}$ e lembrar que em geral para um número de dimensões D par, temos $d_f = 2^{D/2}$. O que pode ser visto ao se considerar os férmions no espaço tempo curvo como, por exemplo,

em [71, 72]. Além disso, em $D = 2$ o traço do quadrado do comutador das derivadas covariantes vale

$$\text{tr } \Omega_{\mu\nu}^2 = -\frac{d_f}{8} R^2. \quad (4.46)$$

Usando esses resultados na solução geral para a *heat kernel*, chegamos à contribuição dos férmions para a ação efetiva na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_f[g] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_f \ln \left(-\Delta_g + \frac{1}{4}R + m^2 \right) \\ &= \frac{d_f}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2\bar{\epsilon}} \left(-m^2 - \frac{1}{12}R \right) - \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2} B_f(z)R + \frac{1}{24} R \frac{C_f(z)}{\Delta_g} R \right\}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde

$$B_f(z) = -\frac{1}{18} - \frac{2Y}{3a^2} \quad \text{e} \quad C_f(z) = \frac{1}{2}(1 - 3Y) + \frac{6Y}{a^2}. \quad (4.48)$$

De maneira similar ao caso escalar da seção anterior, no qual o fator de forma $C(z) \rightarrow 1$ para $z \rightarrow \infty$. Aqui, no limite UV onde $m \rightarrow 0$, o fator de forma $C_f(z) \rightarrow 1/2$, representando a contribuição de um único grau de liberdade para férmions. No entanto, para o caso de férmions não há um *running* similar àquele que aparece na Eq.(4.33), porque neste caso não existe acoplamento não mínimo com a métrica externa análogo a ξ . E, portanto, não existe violação da invariância de escala global além da massa. Esse comportamento também será similar para o caso de vetores, como veremos adiante.

A única função beta do vácuo é dada pela expressão

$$\beta_G^f = \frac{d_f}{8\pi} \left\{ \frac{1 - 3Y}{6} + \frac{2Y}{a^2} \right\}. \quad (4.49)$$

Nos regimes UV ($q^2 \gg m^2$) e IR ($q^2 \ll m^2$) a função beta será dada por

$$\beta_{G,\text{UV}}^f = \beta_{G,\overline{\text{MS}}}^f + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right), \quad \text{com} \quad \beta_{G,\overline{\text{MS}}}^f = \frac{d_f}{48\pi}, \quad (4.50)$$

$$\beta_{G,\text{IR}}^f = \frac{d_f}{480\pi} \frac{q^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m^2}\right). \quad (4.51)$$

Como já era esperado, em especial, pela analogia com o caso $4D$ [24], o regime de altas energias concorda muito bem com a função beta obtida pela renormalização a partir do esquema de subtrações mínimas $\overline{\text{MS}}$. Da mesma forma, em baixas energias, obtemos para a gravitação $2D$ uma nova versão do teorema do desacoplamento [4]. Novamente, o restante do *running* no regime IR está relacionado a termos não locais que são de segunda

ordem na curvatura, enquanto a divergência é uma expressão local em primeira ordem na curvatura, acordando com o teorema de Weinberg [73, 74] e a contagem de potências (*power counting*). Este resultado é notável, assim como o caso escalar, uma vez algo similar não tinha sido alcançado em $4D$ [23].

4.4 Campos vetoriais com e sem massa

Para o campo vetorial de Proca massivo podemos usar a expressão geral (4.21) e basicamente repetir os cálculos descritos nas seções anteriores. Encontramos para o caso em questão,

$$\begin{aligned}\Gamma_p[g] &= \frac{1}{2} \text{Tr}_v \ln (-\Delta_g + \text{Ric} + m^2) - \frac{1}{2} \text{Tr}_s \ln (-\Delta_g + m^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2\bar{\epsilon}} \left(m^2 + \frac{5}{6} R \right) + \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2} B_p(z) R + \frac{1}{24} R \frac{C_p(z)}{\Delta_g} R \right\},\end{aligned}\quad (4.52)$$

onde os fatores de forma para o campo de Proca são definidos como

$$\begin{aligned}B_p(z) &= \frac{1}{18} + \frac{3}{2} Y + \frac{2Y}{3a^2} \\ C_p(z) &= -\frac{1}{2} + 3Y - \frac{3}{8} a^2 (Y - 1) - \frac{6Y}{a^2}.\end{aligned}\quad (4.53)$$

No regime UV $C_p(z) \rightarrow 1$, como pode ser esperado para o grau de liberdade de um campo de Proca.

A função beta é derivada a partir do termo não local que está na parte da ação que é linear no escalar de curvatura, de forma similar a (4.30). Para o caso em questão, a função beta é

$$\beta_G^p = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{6} - Y + \frac{3}{8} a^2 (Y - 1) - \frac{2Y}{a^2} \right\}.\quad (4.54)$$

Expressão essa que é válida em todas as escalas de energia. Nos regimes UV ($q^2 \gg m^2$) e IR ($q^2 \ll m^2$) essa função beta se comporta de maneira mais simples, a partir dos resultados

$$\beta_{G,\text{UV}}^p = \beta_{G,\overline{\text{MS}}}^p + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right), \quad \text{com} \quad \beta_{G,\overline{\text{MS}}}^p = -\frac{5}{24\pi} \quad \text{e} \quad (4.55)$$

$$\beta_{G,\text{IR}}^p = -\frac{1}{30\pi} \frac{q^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{m^2}\right).\quad (4.56)$$

Essa última fórmula inclui o campo de Proca massivo na versão em gravitação $2D$ para o teorema de Appelquist e Carazzone [4]

O limite UV em (4.55) apresenta uma diferença em relação ao resultado bem conhecido para o campo vetorial de *gauge* sem massa

$$\beta_{G,\overline{\text{MS}}}^g = -\frac{1}{4\pi}. \quad (4.57)$$

Essa diferença nada mais é do que a descontinuidade no limite sem massa da contribuição quântica do campo de Proca, que já tem sido discutida em $4D$ [24, 68] e agora observamos no caso $2D$. A origem dessa diferença está no fato de que o campo de Proca massivo requer apenas um grau de liberdade escalar como “compensação”, enquanto o campo de *gauge* sem massa requer dois, que são conhecidos como fantasmas de Faddeev-Popov.

Modelo escalar de teoria de campos efetiva no espaço curvo

5.1 O modelo e sua renormalização

5.1.1 Ação clássica

Consideremos o modelo de dois escalares no espaço tempo curvo definido pela ação

$$\begin{aligned}
 S[\chi, \phi^a] = & \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{2} \xi_1 R \phi^a \phi^a \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\nabla \chi)^2 - \frac{1}{2} M^2 \chi^2 + \frac{1}{2} \xi_2 R \chi^2 - \frac{g}{2} \chi \phi^a \phi^a \right\}. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Aqui ϕ^a é um campo escalar com N componentes ($a = 1, 2, \dots, N$) todas com massa m , enquanto χ é um simples campo escalar real com uma massa M . Temos também, $(\nabla \phi^a)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi^a \nabla_\nu \phi^a$, $(\nabla \chi)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi$. Além disso, $\xi_{1,2}$ são parâmetros não mínimos da interação entre os campos escalares e o escalar de curvatura R . Mais tarde veremos que os argumentos quânticos requerem uma complementação da ação (5.1) com termos lineares (5.7). Com respeito a isso a situação é similar a de um campo escalar “estéril” acoplado a férmions [75], mas no caso considerado aqui o papel dos férmions é desempenhado pelo segundo escalar.

Vale ressaltar que o modelo aqui considerado é proposto afim de estudarmos o regime de energias muito menores que a massa M do campo χ . Nesse regime espera-se que os

loops do campo χ sejam pequenas correções, e dessa forma podemos desconsiderar termos de autointeração cúbica deste campo na lagrangiana (5.1).

5.1.2 Divergências UV

Em nível quântico a ação (5.1) leva a uma teoria com simples estrutura de divergências UV. Consideremos primeiro o esquema de subtração mínima (MS, na sigla em inglês). Pela contagem das potências é possível perceber que a teoria é superrenormalizável, de forma que as divergências UV podem ser encontradas apenas no primeiro *loop* e apenas nos termos cinético e de massa.

Vamos usar a notação condensada $\int d^n x \sqrt{-g} \equiv \int_x$, com $n = 4$. Para derivarmos as divergências a 1-*loop* vamos escrever os campos em termos das contrapartes de fundo e quânticas

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \sigma^a, \quad \chi \longrightarrow \chi + \eta. \quad (5.2)$$

O cálculo a 1-*loop* pode ser feito por meio do método da *heat kernel*, que requer a parte da ação que é bilinear nos campos quânticos,

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int_x \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^a \square \sigma^a - \frac{1}{2} \eta \square \eta - \frac{1}{2} m^2 \sigma^a \sigma^a - \frac{1}{2} M^2 \eta^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \xi_1 R \sigma^a \sigma^a + \frac{1}{2} \xi_2 R \eta^2 - \frac{g}{2} \chi \sigma^a \sigma^a - g \eta \sigma^a \phi^a \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_x \begin{pmatrix} \sigma^a & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{ab} (\square + m^2 - \xi_1 R + g\chi) & \vdots & +g\phi^a \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ +g\phi^b & \vdots & \square + M^2 - \xi_2 R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^b \\ \dots \\ \eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Temos que definir agora as matrizes

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} (m^2 - \xi_1 R + g\chi) & \vdots & +g\phi^a \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ +g\phi^b & \vdots & M^2 - \xi_2 R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R. \quad (5.4)$$

Notemos que os termos do vácuo (dependentes apenas da métrica) podem ser obtidos pela soma das contribuições dos dois campos escalares livres φ^a e χ , o que em geral nos interessa. Porém, como estamos interessados nas contribuições para os próprios campos, desconsideramos esses termos e obtemos a expressão geral para as divergências a 1-*loop*

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \mu^{n-4} \int_x \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P} \right\}. \quad (5.5)$$

Com algumas manipulações algébricas chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = & -\frac{1}{\epsilon} \mu^{n-4} \int_x \left\{ g^2 \phi^a \phi^a + \frac{Ng^2}{2} \chi^2 + Ngm^2 \chi - Ng \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \chi R \right. \\ & \left. + \text{termos de derivas totais} \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde introduzimos uma notação compacta $\epsilon = (4\pi)^2(n-4)$. Está claro que para alcançarmos uma teoria renormalizável temos que implementar mais dois termos na ação (5.1),

$$\Delta S_{lin} = \int_x (\alpha \chi + \xi_3 R \chi). \quad (5.7)$$

Desde que esses termos são lineares no campo escalar pesado, eles não afetam as divergências (5.6) definida pelos termos bilineares da ação.

5.1.3 Funções β

Usando as divergências podemos definir os contra-termos $\Delta S = -\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$ e em seguida escrever a ação renormalizada,

$$\begin{aligned} S_R = & S + \Delta S \\ = & \int_x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi^a)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \chi)^2 + \frac{1}{2} \xi_1 R \phi^a \phi^a + \frac{1}{2} \xi_2 R \chi^2 - \frac{g}{2} \chi \phi^a \phi^a - \phi^a \phi^a \left(\frac{1}{2} m^2 - \frac{g^2}{\epsilon} \right) \right. \\ & \left. - \chi^2 \left(\frac{1}{2} M^2 - \frac{Ng^2}{2} \right) + \chi \left(\alpha + \frac{Ngm^2}{\epsilon} \right) + \chi R \left[\xi_3 - \frac{Ng}{\epsilon} \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

e impomos que ela seja igual a ação *bare* em dimensões $n = 4$. Esta condição se resume ao conjunto de relações de renormalização para os campos e uma das massas

$$\phi_0^a = \mu^{\frac{n-4}{2}} \phi^a, \quad \chi_0 = \mu^{\frac{n-4}{2}} \chi, \quad m^2 - \frac{2g^2}{\epsilon} = m_0^2. \quad (5.9)$$

A partir deste ponto podemos prosseguir com a derivação das funções β . Primeiramente encontramos a relação de renormalização

$$0 = \mu \frac{dm_0^2}{d\mu} = \mu \frac{dm^2}{d\mu} - \frac{2}{\epsilon} \mu \frac{dg^2}{d\mu} \implies \mu \frac{dm^2}{d\mu} = \frac{2}{\epsilon} \mu \frac{dg^2}{d\mu}. \quad (5.10)$$

Por outro lado,

$$-\frac{g}{2} \mu^{n-4} \chi \phi^a \phi^a = -\frac{g_0}{2} \chi_0 \phi_0^a \phi_0^a \quad (5.11)$$

e usando (5.9) obtemos

$$g_0 = g\mu^{\frac{4-n}{2}}. \quad (5.12)$$

Assim,

$$\mu \frac{dg_0}{d\mu} = 0 = \mu^{\frac{4-n}{2}} \mu \frac{dg}{d\mu} + \frac{4-n}{2} g \mu^{\frac{4-n}{2}} \implies \mu \frac{dg^2}{d\mu} = (n-4)g^2. \quad (5.13)$$

Agora, a partir de (5.13) e (5.10) chegamos em

$$\mu \frac{dm^2}{d\mu} = \frac{2g^2}{(4\pi)^2}. \quad (5.14)$$

e similarmente a

$$\mu \frac{dM^2}{d\mu} = \frac{Ng^2}{(4\pi)^2}. \quad (5.15)$$

Além disso, a relação de renormalização

$$\chi\left(\alpha + \frac{Ngm^2}{2}\right)\mu^{n-4} = \chi_0\alpha_0 \quad (5.16)$$

leva a

$$0 = \mu^{\frac{n-4}{2}} \left[\frac{n-4}{2} \left(\alpha + \frac{Ngm^2}{\epsilon} \right) + \mu \frac{d\alpha}{d\mu} + \frac{N}{\epsilon} g \mu \frac{dm^2}{d\mu} + \frac{N}{\epsilon} \mu \frac{dg}{d\mu} m^2 \right]. \quad (5.17)$$

Como o fator $\frac{dm^2}{d\mu}$ em (5.14) é uma função da constante de acoplamento, quando substituído em (5.17) leva a termos de ordens superiores da expansão em *loop* podendo, dessa forma, ser desconsiderado. Assim,

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = -\frac{n-4}{2}\alpha - \frac{Ngm^2}{2(4\pi)^2} - \frac{Nm^2}{\epsilon} \frac{n-4}{2}g \implies \beta_\alpha = -\frac{Ngm^2}{(4\pi)^2}, \quad (5.18)$$

onde o limite $n \rightarrow 4$ foi tomado. De maneira similar obtemos no mesmo limite

$$\beta_{\xi_3} = \frac{Ng}{(4\pi)^2} \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \quad (5.19)$$

para o novo parâmetro não mínimo introduzido em (5.7). Vamos enfatizar que todas as outras funções β desaparecem e aquelas que derivamos são exatas no modelo fundamental (5.1).

Pensando na correspondência entre as funções β e os fatores de forma não locais na parte finita da ação efetiva, está claro que tais fatores de forma são possíveis apenas para os termos massivos m^2 e M^2 , mas não para os termos lineares com α e ξ_3 . As correspondentes funções β são, portanto, puramente baseadas no esquema \overline{MS} , exceto se considerarmos termos de superfície não locais (um exemplo desse tipo pode ser visto em [26, 76]).

5.1.4 Correspondência UV e IR em nível árvore

Nosso principal interesse é explorar em detalhes o desacoplamento em *loops* mistos. No entanto, vale a pena comentar sobre a consistência do modelo aqui considerado.

Na teoria (5.1), o potencial dos campos escalares não é limitado por baixo. Isso representa uma crítica desvantagem em nível árvore, porém existem duas possibilidades para resolver essa questão. Em primeiro lugar, essa teoria pode ser o setor de baixas energias de um modelo mais geral não conhecido, onde o potencial é bem comportado e/ou os dois campos escalares podem ser compostos de alguns férmions fundamentais, por exemplo. Em segundo lugar, pode-se esperar que mesmo tratando o modelo como fundamental, as correções quânticas mudam a forma do potencial escalar e o potencial efetivo da teoria tem um estado de vácuo bem definido. Vamos iniciar explorando como esse problema é resolvido no IR.

Assumimos a hierarquia $m \ll M$, tal que χ é um campo pesado enquanto ϕ^a é um conjunto de campos leves com massas iguais. A ideia é elaborar a teoria na escala de energia IR de ordem m e estabelecer uma teoria efetiva IR nessa escala, quando apenas os campos leves ϕ^a estão se propagando. Quando a escala de energia é muito menor que M , as oscilações de χ são suprimidas e podemos esperar que a ação de baixas energias tem a forma

$$\Gamma_{eff}[\phi^a, g_{\mu\nu}] = S[\bar{\chi}, \phi^a, g_{\mu\nu}], \quad (5.20)$$

onde $\bar{\chi}$ é uma particular configuração do campo pesado.

Como ressaltado inicialmente, os *loops* de χ são considerados pequenas correções, e podemos desconsiderar o termo com autointeração cúbica desse campo na lagrangiana (5.1). Então a condição *on-shell* pode ser considerada em nível árvore na forma

$$\left. \frac{\delta S[\chi, \phi^a, g_{\mu\nu}]}{\delta \chi} \right|_{\text{classical}} = (\square + M^2 - \xi_2 R)\chi + \frac{g}{2}\phi^a\phi^a = 0. \quad (5.21)$$

Dessa forma, na configuração clássica temos como uma aproximação

$$\chi = - \frac{g/2}{\square + M^2 - \xi_2 R} \phi^a\phi^a. \quad (5.22)$$

Substituindo esta solução na ação (5.1) obtemos a ação efetiva de baixas energias para o

campo leve

$$S_{eff}[\phi^a, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{2} \xi_1 R \phi^a \phi^a + \frac{g^2}{8} \phi^a \phi^a \frac{1}{\square + M^2 - \xi_2 R} \phi^b \phi^b \right\}. \quad (5.23)$$

A ação (5.23) é não local e se assemelha àquela que encontramos no setor de vácuo ao considerarmos quebra espontânea de simetria (SSB, na sigla em inglês) no espaço tempo curvo [77]. Ao mesmo tempo, essa expressão se torna local se fizermos outras suposições físicas.¹

Considerando uma escala de energia que é muito menor que a massa M podemos assumir que esta massa domina sobre a derivadas do campo escalar, $|\nabla \phi^a| \ll |M \phi^a|$ e também sobre a curvatura $M^2 \gg |R|$. Nesse caso podemos expandir as funções de Green em uma série de potências

$$\frac{1}{\square + M^2 - \xi_2 R} = \frac{1}{M^2} \left[1 - \frac{\square - \xi_2 R}{M^2} + \frac{(\square - \xi_2 R)^2}{M^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^6}\right) \right], \quad (5.24)$$

assim, até a ordem $1/M^6$ a ação da teoria efetiva de baixas energias é dada por

$$S_{eff}[\phi^a, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{2} \xi_1 R \phi^a \phi^a + \frac{g^2}{8M^2} \phi^a \phi^a \left[1 - \frac{\square - \xi_2 R}{M^2} + \frac{(\square - \xi_2 R)^2}{M^4} + \dots \right] \phi^b \phi^b \right\}. \quad (5.25)$$

Levando em conta apenas o primeiro termo da expansão, essa ação se resume à ação padrão do campo escalar leve com auto-interação quártica, sendo o lagrangiano efetivo em nível árvore dado por

$$\mathcal{L}_{eff}[\phi^a, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\nabla \phi^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{2} \xi_1 R \phi^a \phi^a - \frac{\lambda}{4!} (\phi^a \phi^a)^2, \quad (5.26)$$

o que leva a uma correspondência dos acoplamentos em nível árvore da forma

$$\lambda = -\frac{3g^2}{M^2}. \quad (5.27)$$

Em termos dos diagramas de Feynman a condição de correspondência significa que a propagação do campo pesado é substituída nas baixas energias por um ponto de interação como mostra a figura 5.1 . Isso já deveria ser esperado a partir da expansão do propagador do campo χ em um série de operadores locais em (5.24).

¹Discussão qualitativamente similar foi dada recentemente em [78].

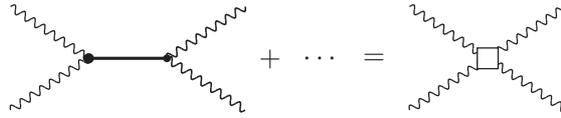


Figura 5.1: *Representação da correspondência em nível de árvore em termos dos diagramas de Feynman. No lado esquerdo está o diagrama da teoria fundamental, onde os pontos se referem às diferentes permutações dos momentos. À direita, está o diagrama correspondente à teoria efetiva.*

Vamos notar a principal diferença com a correspondência IR no modelo padrão da física de partículas, onde os diagramas com bósons W e Z intermediários tornam-se interações de quatro férmions no limite IR, dentro do modelo de Fermi. Em nosso caso, depois do primeiro termo na expansão (5.25) encontramos termos adicionais dependentes da curvatura, que não aparecem no modelo de Fermi das interações fracas. Essa diferença mostra que para escalares no espaço tempo curvo é necessário introduzir uma condição extra $M^2 \gg |R|$, a fim de chegarmos a uma teoria efetiva no IR.

5.2 Cálculos a 1-loop e abordagem efetiva

Vamos explorar a correspondência entre a teoria fundamental (5.1) e sua remanescente efetiva no regime IR (5.26) em nível de 1-loop. Para iniciar, vamos considerar o cálculo mais simples e analisar o problema no espaço tempo plano. Então a lagrangiana da teoria completa toma a forma

$$\mathcal{L}[\chi, \phi^a] = \frac{1}{2}(\partial\phi^a)^2 - \frac{1}{2}\phi^a\phi^a + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}M^2\chi^2 - \frac{g}{2}\chi\phi^a\phi^a. \quad (5.28)$$

E em nível árvore a condição de correspondência permanece dada por (5.27). Nossa primeira proposta é generalizar esta condição para aproximações a 1-loop.

5.2.1 Correções a 1-loop na teoria completa

Para analisar o desacoplamento IR dos graus de liberdade massivos na teoria (5.28) vamos considerar os diagramas que produzem as divergências UV e são responsáveis pelas funções β do esquema de subtrações mínimas. Assim, na teoria fundamental as correções de

interesse são aquelas para a função 2-pontos, que são de segunda ordem na constante de acoplamento g , como mostra a figura 5.2.

$$G^{(2)ab}(y_1, y_2) = \delta^{ab} \left[4 \text{diagrama} + 2 \text{diagrama} \right]$$

Figura 5.2: Diagramas de 1-loop relevantes para a função de dois pontos do campo ϕ^a na ordem g^2 dentro da teoria fundamental no espaço das coordenadas.

Esse diagrama tem a seguinte representação analítica

$$\begin{aligned} G^{(2)ab}(y_1, y_2) &= \\ &= \left(\frac{-ig}{2}\right)^2 \delta^{ab} \int d^4x_1 d^4x_2 \left[4i\Delta_F^N(y_2 - x_2) i\Delta_F^N(x_2 - x_1) i\Delta_F(x_2 - x_1) i\Delta_F^N(x_1 - y_1) \right. \\ &\quad \left. + 2i\Delta_F^N(y_2 - x_1) i\Delta_F^N(x_2 - x_2) i\Delta_F(x_2 - x_1) i\Delta_F^N(x_1 - y_1) \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1 - x_2)}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (5.30)$$

e

$$\Delta_F^N(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.31)$$

definem os propagadores de Feynman para os campos χ e ϕ^a , respectivamente.

No espaço dos momentos a expressão (5.29) torna-se

$$\begin{aligned} G^{(2)ab}(p, -p) &= \\ &= \frac{i\delta^{ab}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \left\{ (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{i}{(q^2 - M^2 + i\epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-ig)^2}{2} \frac{i}{(-M^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \right\} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

E sua representação nesse espaço é dada pela figura 5.3

É usual definir a partir de (5.32) as quantidades

$$\Sigma^1 = (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{i}{(q^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (5.33)$$

$$G^{(2)ab}(p, -p) = \delta^{ab} \left[\text{diagram 1} + \frac{1}{2} \text{diagram 2} \right]$$

Figura 5.3: Os diagramas para a função dois pontos no espaço dos momentos.

e

$$\Sigma^2 = \frac{(-ig)^2}{2} \frac{i}{(-M^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (5.34)$$

de forma que a correção para a função 2-pontos é dada pela expressão

$$G^{(2)ab}(p, -p) = \frac{i \delta^{ab}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} (\Sigma^1 + \Sigma^2) \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (5.35)$$

É fácil ver que a primeira dessas quantidades tem divergência logarítmica e depende do momento externo de uma maneira essencial. Nosso objetivo é verificar como essa expressão se comporta entre os regimes IR e UV e o que resta de sua parte finita quando $M \rightarrow \infty$. Por outro lado, o segundo diagrama (*tadpole*) é quadraticamente divergente, mas a dependência sobre o momento externo é trivial.

5.2.2 Regularização dimensional

Usando a regularização dimensional desenvolvida na seção 2.3 (veja também [33]), generalizamos as expressões divergentes na eq. (5.32) para integrais no espaço euclidiano de dimensão 2ω

$$\Sigma_{2\omega}^1 = ig^2(\mu^2)^{2-\omega} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[(q-p)^2 + m^2](q^2 + M^2)}. \quad (5.36)$$

lembrando que μ é o parâmetro de renormalização dimensional.

Para resolver $\Sigma_{2\omega}^1$ usamos a representação

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}$$

e realizamos uma mudança de variável $q' = q - p(1-z)$, com $dq' = dq$. Dessa forma $\Sigma_{2\omega}^1$ torna-se

$$\Sigma_{2\omega}^1 = ig^2(\mu^2)^{2-\omega} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 \frac{dz}{[q^2 + p^2z(1-z) + (M^2 - m^2)z + m^2]^2}, \quad (5.37)$$

onde q' foi substituído por q , para simplificar a notação. A integral sobre q pode ser efetuada em uma maneira padrão usando coordenadas esféricas no espaço de momento 2ω -dimensional. O resultado é

$$\Sigma_{2\omega}^1 = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dz \left[\frac{4\pi\mu^2}{(p^2z(1-z) + (M^2 - m^2)z + m^2)} \right]^{2-\omega}. \quad (5.38)$$

Tomando o limite $\omega \rightarrow 2$ podemos usar as expansões

$$\Gamma(t) = \frac{1}{t} - \gamma + \mathcal{O}(t) \quad \text{e} \quad x^t = e^{t \ln x} \simeq 1 + t \ln x, \quad (5.39)$$

onde $\gamma \approx 0,577$ é a constante de Euler-Mascheroni. Assim, chegamos no seguinte resultado

$$\Sigma^1 = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{(2-\omega)} - \gamma - \int_0^1 dz \ln \left[\frac{p^2z(1-z) + (M^2 - m^2)z + m^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\}. \quad (5.40)$$

A integral na última expressão pode ser resolvida na forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \ln \left[1 + \frac{4x(1-x)}{a} + 4bx \right] &= -2 + \frac{(1-ab)}{2} \log(1+4b) \\ &+ \frac{A}{2} \log \left[\frac{(A+1)^2 - a^2b^2}{(A-1)^2 - a^2b^2} \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

com as restrições e notação

$$a > 0, \quad b > -1/4 \quad \text{e} \quad A = \sqrt{(1+ab)^2 + a}.$$

A fim de usar o resultado (5.41), definimos

$$a = \frac{4m^2}{p^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{M^2 - m^2}{4m^2}. \quad (5.42)$$

Finalmente, a primeira parte da contribuição a 1-loop para a função 2-pontos é

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + 2 + \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{1-ab}{2} \log \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right. \\ &\left. - \frac{A}{2} \log \left[\frac{(A+1)^2 - a^2b^2}{(A-1)^2 - a^2b^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2-\omega} - \gamma + \log 4\pi. \quad (5.44)$$

No limite $\omega \rightarrow 2$ o resultado para Σ^1 tem partes divergente e finita. É simples checar que a parte divergente corresponde ao resultado (5.6) no setor $\phi^a \phi^a$. Ao mesmo tempo, a

dependência sobre o momento externo na parte finita é mais complicada e indica uma não localidade da ação efetiva.

A segunda integral em (5.32) é mais simples de ser avaliada e leva ao resultado

$$\begin{aligned}\Sigma^2 &= \frac{ig^2 (\mu^2)^{2-\omega}}{2 M^2} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2 + m^2} = \frac{ig^2 m^2}{2(4\pi)^2 M^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2-\omega} \Gamma(1-\omega). \\ &= -\frac{ig^2 m^2}{2(4\pi)^2 M^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right],\end{aligned}\quad (5.45)$$

onde termos $\mathcal{O}(2-\omega)$ são desconsiderados. Esse resultado é uma contribuição local, como deve ser esperado a partir do *tadpole*.

5.3 Comportamento assintótico

Agora estamos em posição de explorar tanto o regime de baixas quanto o de altas energias na função de dois pontos. Vamos tomar o limite UV ($p^2 \rightarrow \infty$) na expressão (5.43). As relações $p^2 \gg m^2$ e $p^2 \gg M^2$ resultam em

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{UV}}^1(p^2 \rightarrow \infty) &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \log\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) - \frac{m^2}{p^2} \left[1 + \log\left(\frac{p^2}{m^2}\right)\right] - \frac{M^2}{p^2} \left[1 + \log\left(\frac{p^2}{M^2}\right)\right] \right\},\end{aligned}\quad (5.46)$$

onde todos os termos de ordem inferior são omitidos. Os termos logarítmicos no fator de forma são proporcionais à divergência, como deve ser no UV. Além disso, é fácil checar que o termo divergente exatamente corresponde ao resultado na equação (5.6). Esta correspondência tem uma consequência relevante. Vamos lembrar que a teoria é super-renormalizável e que a equação (5.6) fornece todas as divergências UV que podemos encontrar em todas as ordens de *loop*. Isso significa que as correções de *loop* mais altas para (5.46) são também finitas e, além disso, não têm correções logarítmicas de ordem superior. Assim, a equação (5.46) é a principal contribuição não apenas em nível 1-*loop*, mas também de forma não perturbativa.

No regime IR assumimos $p^2 \ll M^2$ na expressão (5.43). Na principal ordem em p^2 isso produz

$$\Sigma_{\text{IR}}^1(M^2 \gg p^2) = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \frac{m^2}{M^2} \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{p^2}{M^2} \right\}.\quad (5.47)$$

É fácil ver que não existe parte não local com um fator de forma logarítmico. Assim, o diagrama com linhas internas mistas (campos leve e pesado) se resume, no limite IR, a uma contribuição do tipo *tadpole*.

5.3.1 Correspondência com o IR em nível 1-loop

Uma vez que conhecemos o comportamento a 1-loop da teoria fundamental no limite IR, é possível estabelecer a correspondência entre este resultado e aquele obtido a partir de uma teoria efetiva, levando em conta apenas a interação quártica do campo ϕ^a a 1-loop. Em um primeiro momento, desconsideraremos a correção (5.45) para a teoria fundamental desde que essa contribuição é independente do momento. A representação gráfica da correspondência a 1-loop é ilustrada pela figura 5.4.

Figura 5.4: Representação da correspondência em 1-loop no regime IR entre a teoria fundamental (lado esquerdo da igualdade) e a teoria efetiva com interação quártica do campo escalar (lado direito da igualdade).

No lado esquerdo dessa figura, Σ_{IR}^1 é a correção para o propagador do campo ϕ^a na teoria fundamental no limite IR (5.47). Já no lado direito, Σ_{eff}^1 é a correção a 1-loop para o propagador na teoria efetiva, enquanto Σ_{eff}^2 é um termo adicional (estabelecido abaixo) representando a diferença entre a correção a 1-loop da teoria fundamental nas baixas energias e a correção a 1-loop na teoria efetiva de baixas energias.

A teoria efetiva no IR, em nível árvore, corresponde a uma interação quártica de N campos escalares (5.26) no espaço plano,

$$\mathcal{L}_{eff}[\phi^a] = \frac{1}{2}(\partial\phi^a)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^a\phi^a - \frac{\lambda}{4!}(\phi^a\phi^a)^2, \quad (5.48)$$

onde $\lambda = -\frac{3g^2}{M^2}$. A contribuição a 1-loop nesta teoria efetiva pode facilmente ser calculada levando a

$$\Sigma_{eff}^1 = -\frac{3ig^2m^2}{2(4\pi)^2M^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right], \quad (5.49)$$

com $\frac{1}{\varepsilon}$ definido em (5.44).

O termo adicional Σ_{eff}^2 é obtido pela inserção de novos coeficientes na lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{eff}[\phi^a] = \frac{1}{2}(1 + C_\phi)(\partial\phi^a)^2 - \frac{1}{2}(m^2 + C_{m^2})\phi^a\phi^a - \frac{\lambda}{4!}(\phi^a\phi^a)^2, \quad (5.50)$$

fornecendo os vértices

$$\Sigma_{eff}^2 = -iC_{m^2} + ip^2 C_\phi. \quad (5.51)$$

Esses coeficientes não devem ser confundidos com contratermos. Seu papel não é remover divergências da teoria, mas garantir que nas baixas energias tanto a teoria fundamental quanto a efetiva levem a resultados idênticos, como mostraremos abaixo.

As divergências em (5.47) e (5.49) podem ser removidas por uma sutil renormalização. Uma vez que a escala de renormalização é arbitrária, estamos interessados apenas na parte finita dessas correções. A correspondência a 1-loop é alcançada por

$$\Sigma_{\text{IR}}^1 = \Sigma_{eff}^1 + \Sigma_{eff}^2, \quad (5.52)$$

relembrando que estamos interessados no regime de baixas energias da teoria fundamental.

A igualdade (5.52) leva aos seguintes valores

$$C_{m^2} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left[\left(1 + \frac{m^2}{M^2}\right) \left(1 + \log \frac{\mu^2}{M^2}\right) + \frac{m^2}{2M^2} \left(1 + \log \frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \quad (5.53)$$

e

$$C_\phi = -\frac{g^2}{2(4\pi)^2 M^2}. \quad (5.54)$$

Esse resultados para C_{m^2} e C_ϕ mostram como a teoria efetiva difere da teoria fundamental nas baixas energias. É importante notar que esses dois termos são independentes do momento, e portanto podem ser compensados por uma mudança na condição de renormalização.

É fácil ver a partir da expressão do *tadpole* (5.45), que se Σ^2 é adicionado no lado esquerdo de (5.52) o último termo de C_{m^2} cancela e chegamos em

$$C_{m^2} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{m^2}{M^2}\right) \left(1 + \log \frac{\mu^2}{M^2}\right). \quad (5.55)$$

Quando $M^2 \rightarrow \infty$ os resultados para C_{m^2} e C_ϕ confirmam o teorema do desacoplamento. No IR, a diferença entre a teoria fundamental e a teoria efetiva é reduzida pela renormalização das divergências UV em contratermos locais irrelevantes e em termos proporcionais ao inverso do quadrado da massa do campo pesado.

A partir de (5.50) e dos resultados obtidos pela correspondência IR é possível notar que a teoria efetiva pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}C_1(\partial\phi^a)^2 - \frac{1}{2}C_2\phi^a\phi^a - \frac{1}{4!}C_3(\phi^a\phi^a)^2, \quad (5.56)$$

onde os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 dependem dos parâmetros da teoria fundamental válida em qualquer escala de energia. Em geral, esses coeficientes podem ser construídos ordem por ordem na expansão em *loop*, garantindo que os resultados das duas teorias são equivalentes nas baixas energias.

5.4 Desacoplamento em um campo gravitacional fraco

Nesta seção generalizaremos as considerações anteriores para a mesma teoria em um espaço curvo. Como de costume, a derivação dos fatores de forma não locais requer que a métrica corresponda à geometria quase plana. Então, a métrica externa pode ser tratada como uma pequena perturbação. Alternativamente, pode-se fazer uma expansão da função 2-pontos em coordenadas normais [79] e chegar diretamente ao resultado formalmente covariante para o fator de forma. Nesta seção seguiremos esta abordagem e usaremos a expansão em ordem linear nas componentes do tensor de curvatura.

Iniciando a partir do primeiro termos de (5.29), escrevemos a função 2-pontos na forma

$$G^{(2)ab}(y_1, y_2) = \delta^{ab} \int d^4x_2 \sqrt{-g(x_2)} \int d^4x_1 \sqrt{-g(x_1)} \\ \times G^N(y_2, x_2) \left[(-ig)^2 G^N(x_2, x_1) G(x_2, x_1) \right] G^N(x_1, y_1) \quad (5.57)$$

onde $G^N(x, y) = i\Delta_F^N(x - y)$ e $G(x, y) = i\Delta_F(x - y)$ são as funções de Green do espaço plano para os campos leve e pesado, respectivamente.

Depois da rotação de Wick para o espaço euclidiano, esta função 2-pontos pode ser escrita como

$$G^{(2)ab}(y_1, y_2) = -i\delta^{ab} \int_{x_2} \int_{x_1} G^N(y_2, x_2) \Sigma^{1,R} G^N(x_1, y_1), \quad (5.58)$$

onde

$$\Sigma^{1,R} = ig^2 G^N(x_2, x_1) G(x_2, x_1). \quad (5.59)$$

Vamos notar que $\Sigma^{1,R}$ inclui o produto de dois propagadores que aparecem no *loop*. Esses propagadores podem ser expandidos em termos das coordenadas normais em um espaço curvo conforme o resultado bem conhecido de [79], que em 2ω dimensões fornece

$$\Sigma^{1,R} = ig^2 \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iq(x_2-x_1)} G(q, m) \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} e^{ip(x_2-x_1)} G(p, M), \quad (5.60)$$

onde $\Sigma^{1,R} = \Sigma^{1,R}(k)$, $q + p = k$,

$$G(q) = \frac{1}{q^2 + m^2} + \frac{\tilde{\xi}_1 R}{(q^2 + m^2)^2} - \frac{2}{3} \frac{R_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta}{(q^2 + m^2)^3} + \mathcal{O}(q^{-5}) \quad (5.61)$$

é a expansão padrão do propagador [79], e estamos usando as notações

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{1}{3} - \xi_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}_2 = \frac{1}{3} - \xi_2. \quad (5.62)$$

Vamos notar que a expansão dos vértices nas coordenadas normais na equação (5.60) não é necessária, como explicaremos abaixo.

Consideremos a regularização dimensional das integrais na equação (5.60), usando as transformações para integrais com simetria vetorial descrita nos livros [30, 9]. Nossa proposta final é avaliar essas integrais no limite IR com $m^2 \ll M^2$ and $p^2 \ll M^2$. Escolhendo $x_2 - x_1 = y$, obtemos depois de algumas manipulações matemáticas

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iky} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[(p-k)^2 + m^2](p^2 + M^2)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iky} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \frac{m^2}{M^2} \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{M^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Esta é a mesma expressão que (5.47), o que significa que para $R = 0$ recuperamos o resultado para o espaço plano. Para as demais integrais correspondendo à dependência da curvatura, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \tilde{\xi}_1 R \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iky} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[(q-k)^2 + M^2](q^2 + m^2)^2} \\ &= \frac{\tilde{\xi}_1 R}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{iky}}{M^2} \left[-1 - \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right] \\ I_3 &= -\frac{2}{3} R^{\alpha\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iky} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\alpha q_\beta}{(q^2 + m^2)^3 [(q-k)^2 + M^2]} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{R}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{iky}}{M^2} \left[-\frac{3}{2} - \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right] \\ I_4 &= \tilde{\xi}_2 R \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iky} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)[(q-k)^2 + M^2]^2} \\ &= \frac{\tilde{\xi}_2 R}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iky} \frac{1}{M^2} \\ I_5 &= -\frac{2}{3} R^{\alpha\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} e^{iky} \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k_\alpha - q_\alpha)(k_\beta - q_\beta)}{(q^2 + m^2)[(q-k)^2 + M^2]^3} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{R}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iky} \frac{1}{2M^2}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde temos considerado $\omega = 2$, uma vez que não existe divergências.

Agora, desconsiderando termos proporcionais a k^2 em (5.63), a combinação dessas integrais dá

$$\begin{aligned} \Sigma_{IR}^{1,R} &= \delta(y) \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log\left(\frac{1}{M^2}\right) + \frac{m^2}{M^2} \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{M^2} \left[\left(\xi_1 - \frac{1}{6}\right) \log\left(\frac{m^2}{M^2}\right) + \xi_1 - \xi_2 + \frac{1}{6} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Uma observação importante é feita aqui. A expressão (5.60) não inclui a expansão do vértice em coordenadas normais. A razão para isso é que a expansão do vértice vem dos fatores \sqrt{g} nos termos de interação. Em um dos pontos (por exemplo, x_1) a métrica é plana, tal que $\sqrt{g(x_1)} = 1$, e em outro ponto a expansão se reduz ao fator de \sqrt{g} na expressão final para $\Sigma_{IR}^{1,R}$ na equação (5.65), visto que esta é uma expressão local que tem um fator extra de $\delta_c(x_2 - x_1)$. Esta deve ser uma função delta covariante em coordenadas normais, absorvendo todo o fator de \sqrt{g} , que vem do segundo vértice. A função delta deleta uma das integrais na equação (5.58), de modo que o resultado torna-se uma expressão local.

No limite IR, a função 2-pontos em (5.58) pode ser escrita na forma

$$G^{(2)ab}(y_1, y_2) = -i\delta^{ab} \int d^4x \sqrt{g(x)} G^N(y_2, x) \Sigma_{IR}^{1,R} G^N(x, y_1). \quad (5.66)$$

onde $\Sigma_{IR}^{1,R}$ não é mais proporcional à função delta. É fácil ver que a expressão (5.66) tem divergências UV apenas no setor do espaço plano, enquanto os termos com o escalar de curvatura são finitos. Esta conclusão está em perfeita correspondência com o cálculo covariante na seção 5.1.

A fim de comparar as duas abordagens na descrição do regime IR, vamos considerar uma teoria efetiva com interação quártica no espaço curvo. Tal teoria do campo ϕ^a em uma contribuição a 1-loop da forma

$$G_{eff}^{(2)ab}(y_1, y_2) = -i\delta^{ab} \int d^4x \sqrt{g(x)} G^N(y_2, x) \left[-\frac{i\lambda}{2} G^N(x, x) \right] G^N(x, y_1). \quad (5.67)$$

Esta expressão pode ser diretamente comparada a (5.66), para mostrar que ambas têm a mesma estrutura em termos dos propagadores. Esta comparação é possível pelo fato de que nas baixas energias a teoria fundamental tem apenas um vértice.

A correspondência em nível de 1-loop pode ser feita no espaço curvo praticamente da mesma maneira que no espaço plano,

$$\Sigma_{IR}^{1,R} = \Sigma_{eff} - iC_{m^2} + iC_R \quad (5.68)$$

Aqui Σ_{eff} é definido a partir de (5.67) como

$$\Sigma_{eff} = -\frac{i\lambda}{2} G^N(x', x'). \quad (5.69)$$

Usando a expansão em coordenadas normais, obtemos

$$\Sigma_{eff} = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\tilde{\xi}_1 R}{(p^2 + m^2)^2} - \frac{2}{3} \frac{R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta}{(p^2 + m^2)^3} + \mathcal{O}(p^{-5}) \right\}, \quad (5.70)$$

que leva ao resultado

$$\Sigma_{eff} = \frac{i\lambda}{2(4\pi)^2} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) R \left[\frac{1}{\varepsilon} + \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \quad (5.71)$$

Notemos que de acordo com a equação (5.27), mesmo no espaço curvo temos $\lambda = -\frac{3g^2}{M^2}$. Assim, a parte plana da condição de correspondência no IR em (5.68) é satisfeita com C_m de (5.53). Por outro lado, existe uma condição de correspondência adicional na primeira ordem na curvatura

$$C_R = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{R}{M^2} \left[\left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \log \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \left(\xi_1 - \xi_2 \right) + \frac{1}{6} \right]. \quad (5.72)$$

Assim como no espaço plano, podemos considerar a correção do *tadpole* para a teoria fundamental, dada pelo segundo termo de (5.29) no espaço curvo. No espaço euclidiano essa correção é

$$G_{tadpole}^{(2)ab}(y_1, y_2) = -i\delta^{ab} \int_{x_2} \int_{x_1} G^N(y_2, x_1) \left[\Sigma^{2,R} \right] G^N(x_1, y_1). \quad (5.73)$$

com

$$\begin{aligned} \Sigma^{2,R} &= \frac{ig^2}{2} G(x_2, x_1) G^N(x_2, x_2) \\ &= \frac{ig^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip \cdot (x_2 - x_1)}}{M^2} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{p^2}{M^2} \right) \right] G^N(x_2, x_2) \\ &= \frac{ig^2}{2M^2} \delta_c(y) \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^\omega} \left[\frac{1}{q^2 + m^2} + \frac{\tilde{\xi}_1 R}{(q^2 + m^2)^2} - \frac{2}{3} \frac{R_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta}{(q^2 + m^2)^3} + \mathcal{O}(q^{-5}) \right]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Nesta expressão a função delta covariante emerge no limite de baixas energias quando expandimos o propagador do campo pesado em potências de $\frac{p^2}{M^2}$ e desconsideramos ordens superiores na expansão.

A parte do *tadpole* tem como contribuição,

$$\Sigma^{2,R} = -\frac{g^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \frac{m^2}{M^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \frac{R}{M^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \log \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \quad (5.75)$$

Adicionando este resultado ao lado esquerdo de (5.68), a parte plana da correspondência em nível de 1-*loop* leva à expressão (5.55), enquanto a parte dependente da curvatura dá

$$C_R = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{R}{M^2} \left[\left(\xi_1 - \frac{1}{6} \right) \log \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) + (\xi_1 - \xi_2) + \frac{1}{6} \right]. \quad (5.76)$$

Conclusões e perspectivas

Nesta tese, foram obtidos os seguintes resultados originais: no capítulo 4 derivamos os fatores de forma não locais para a ação efetiva do vácuo até segunda ordem na curvatura devido a vários tipos de campo no espaço-tempo $2D$. Os resultados foram obtidos por meio da solução da *heat kernel* apresentada no trabalho de Codello & Zanusso [25] que possui termo não local já na primeira ordem na curvatura.

Os fatores de forma não se tornam logarítmicos no limite de UV (ou sem massa), porque as divergências aparecem na primeira ordem no escalar de Ricci. No entanto, pode-se recuperar o limite de UV com sucesso, porque os termos de segunda ordem na curvatura se reduzem à ação de Polyakov no caso de $m \rightarrow 0$ para férmions e vetores, enquanto para o campo escalar tal limite é alcançado apenas para o acoplamento mínimo, com $\xi = 0$, que é visto ser o caso conforme.

No limite de massa zero do escalar não mínimo, encontramos uma versão modificada da ação de Polyakov, que inclui um fator de forma logarítmico qualitativamente novo. O novo fator de forma pode ser interpretado de maneira especulativa como um tipo de *running* do grupo de renormalização no IR que não tem uma relação direta com as divergências UV.

No esquema de renormalização \overline{MS} , funções β relacionadas às divergências que aparecem na parte linear da curvatura são reproduzidas como o limite de UV de expressões mais gerais correspondentes ao esquema de subtração de momento. No extremo oposto

da escala de energia, no IR, encontramos uma versão $2D$ do teorema do desacoplamento gravitacional muito semelhante à contraparte $4D$ [23, 24]. A principal diferença entre os resultados em $4D$ e $2D$ é que, no último caso, o limite de UV reproduz a ação induzida pela anomalia e o limite de IR mostra desacoplamento nas funções beta sem a correlação usual entre divergências e fatores de forma logarítmicos.

Acreditamos que nossos resultados são instrutivos para uma melhor compreensão de como se pode explorar o *running* das constantes de Newton e cosmológica, incluindo os casos em que os fatores de forma são formalmente irrelevantes [23]. Vamos lembrar ao leitor que a questão de saber se há um *running* IR remanescente desses parâmetros ou não tem aplicações cosmológicas potencialmente interessantes [14, 80] e pode ser relevante na astrofísica também (ver, por exemplo, [81, 82]). Por essas razões, o presente trabalho pode ser visto como um pequeno passo na compreensão de como a informação relativa à parte da ação efetiva do vácuo que é linear na curvatura pode ser usada para interpolar entre a física UV e IR através de um grupo de renormalização baseado em uma escala física.

Em seguida, no capítulo 5 usando um modelo simples com dois campos escalares, exploramos o comportamento dos diagramas com linhas internas mistas. Até certo ponto os resultados não são novos (ver, por exemplo, [30]), mas fizemos os cálculos mantendo em foco a abordagem de ação efetiva, o problema relevante de desacoplamento de derivadas superiores na gravidade quântica [18] e considerado em todos os detalhes a correspondência entre UV e IR, inclusive no campo gravitacional externo fraco.

O principal resultado de nossa investigação é que a contribuição do tipo de auto-energia, diagrama de *1-loop* com uma linha interna do campo leve e outra do campo com massa muito maior, no IR se resume à contribuição do *tadpole*, que não produz um fator de forma não local. No modelo em consideração, isso significa que o diagrama de auto-energia no modelo “fundamental” com dois tipos de escalares produz um fator de forma não local padrão com o comportamento logarítmico assintótico no UV, mas no IR não existe fator de forma relevante e os resultados são essencialmente a mesma contribuição do tipo *tadpole* que se pode obter no modelo efetivo de baixas energias com um único tipo de campo escalar leve. A mesma situação qualitativa ocorre em um campo gravitacional fraco. De fato, devido à natureza superrenormalizável do modelo fundamental, o comportamento logarítmico assintótico no UV não é possível para os termos dependentes

da curvatura. Porém, no IR observamos uma correspondência perfeita entre os modelos efetivos e fundamentais, o que confirma os principais resultados do nosso trabalho.

Do ponto de vista gravitacional, os campos massivos são fantasmas e táquions que estão presentes nas versões com derivadas superiores da gravidade quântica. A este respeito, a questão importante é se a teoria efetiva de IR é sempre a relatividade geral quântica, ou pode ser algum outro, por exemplo, modelo não local, como foi discutido em [18]. Fazendo uma “continuação” do nosso presente resultado implica que se pode esperar que os diagramas com linhas internas mistas se tornem irrelevantes no IR. Então, o momento transferido é o único regulador IR e isso significa que a relatividade geral quântica é esperada ser um modelo universal de gravidade quântica IR, como era esperado nos artigos de Donoghue [17, 83] e muitos trabalhos que seguiram daí (ver, por exemplo, as revisões [20, 84]). Na verdade, esse tipo de conclusão deve ser visto como uma conjectura a partir de boas motivações, e sua verificação seria um trabalho interessante a ser feito.

Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, *Quantum theory of emission and absorption of radiation*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **114** (1927) 243.
- [2] S. Weinberg, *Phenomenological Lagrangians*, Phys. A **96** (1979) 327-340.
- [3] D. Shirkov, *Fifty years of the renormalization group*, CERN Cour. **41N7** (2001) 19-22.
- [4] T. Appelquist e J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. **D11** (1975) 2856.
- [5] S. Hartmann, *Effective field theories, reductionism and scientific explanation*, Stud. Hist. Phil. Sci. B **32** (2001) 267-304.
- [6] A. V. Manohar, *Introduction to Effective Field Theories*, Les Houches Lect. Notes **108** (2020).
- [7] A. Dobado, A. G. Nicola, A. L. Maroto e J. R. Pelaez, *Effective Lagrangians for the Standard Model*, (Springer, New York, 1997)
- [8] W. Heisenberg e H. Euler, *Consequences of Dirac's theory of positrons*, Z. Phys. **98**, no.11-12, (1936) 714-732.
- [9] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, (Cambridge U. Press, New York, 2014).

- [10] W. Becker, J. McIver e R. Schlicher, *Testing the Photon-Photon-Sector of Quantum Electrodynamics With Free-Electron Lasers* Journal of the Optical Society of America **6** (1989) 1083.
- [11] E. Fermi, *An attempt of a theory of beta radiation. 1.*, Z. Phys. **88** (1934) 161-177.
- [12] Bassalo e Caruso, *Dirac*, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013).
- [13] N. N. Bogolyubov e D. V. Shirkov, *Charge renormalization group in quantum field theory*, Nuovo Cim. **3** (1956) 845-863.
- [14] I.L. Shapiro, *Effective action of vacuum: semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001.
- [15] L. H. Ford, *Spacetime in semiclassical gravity*, 100 Years Of Relativity : space-time structure: Einstein and beyond (2005) 293-310.
- [16] C. P. Burgess, *Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory*, Living Rev. Rel. **7** (2004) 5-56.
- [17] J. F. Donoghue, *General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*, Phys. Rev. D **50** (1994) 3874-3888.
- [18] I. L. Shapiro, *Polemic Notes On IR Perturbative Quantum Gravity*, Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 1557-1564.
- [19] T. G. Ribeiro e I. L. Shapiro, *Scalar model of effective field theory in curved space*, JHEP **10**, (2019) 163.
- [20] J. F. Donoghue, M. M. Ivanov e A. Shkerin, *EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory*, [arXiv:1702.00319 [hep-th]].
- [21] A.O. Barvinsky e G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 2: Second order in the curvature. General algorithms*, Nucl. Phys. **333B** (1990) 471.
- [22] I.G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity*, (PhD thesis,

- Moscow University, 1986); *Covariant studies of nonlocal structure of effective action*, Sov. J. Nucl. Phys. **49** (1989) 735 [Yad. Fiz. **49** (1989) 1185 , in Russian]; *Heat kernel and quantum gravity*, (Springer-Verlag, 2000).
- [23] E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP **02** (2003) 021.
- [24] E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space: II. The Standard Model and Beyond*, JHEP **06** (2003) 004.
- [25] A. Codello e O. Zanusso, *On the non-local heat kernel expansion*, J. Math. Phys. **54** (2013) 013513.
- [26] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro e O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity*, Phys. Lett. **B790** (2019) 229.
- [27] G. de Berredo-Peixoto, E.V. Gorbar, I.L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281.
- [28] P. M. Teixeira, I. L. Shapiro e T. G. Ribeiro; *One-Loop Effective Action: Nonlocal Form Factors and Renormalization Group*, Gravit. Cosmol. **26** (2020) 185 - 199.
- [29] T. G. Ribeiro, I. L. Shapiro e O. Zanusso, *Gravitational form factors and decoupling in 2D*, Phys. Lett. B **782** (2018) 324-331
- [30] V. Ilisie, *Concepts in Quantum Field Theory. A Practitioner's Toolkit*, (Springer, 2016).
- [31] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, (Springer Science & Business Media, New York, 1996)
- [32] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Effective action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [33] G. Leibbrandt, *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Mod. Phys. Rep. **47** (1975) 849.

- [34] A. Salam, *Divergent Integrals in Renormalizable Field Theories*, Phys. Rev. **84** (1951) 426.
- [35] B.L. Nelson e P. Panangaden, *Scaling Behavior Of Interacting Quantum Fields In Curved Space-Time*, Phys.Rev. **D25** (1982) 1019.
- [36] I.L. Buchbinder, *On Renormalization group equations in curved space-time*, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 393.
- [37] I. L. Buchbinder e I. L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*, (Oxford University Press, 2021).
- [38] R. Utiyama e B.S. DeWitt, *Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
- [39] Ya.B. Zeldovich e A.A. Starobinsky, *Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 1159 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 2161].
- [40] T.S. Bunch e L. Parker, *Feynman Propagator in Curved Space-Time: A Momentum Space Representation*. Phys. Rev. **D20** (1979) 2499.
- [41] F. Sobreira, B.J. Ribeiro, e I.L. Shapiro, *Effective Potential in Curved Space and Cut-Off Regularizations*. Phys. Lett. **B705** (2011) 273,
- [42] I.L. Buchbinder, A. Rairis Rodrigues, E.A. dos Reis e I.L. Shapiro, *Quantum aspects of Yukawa model with scalar and axial scalar fields in curved spacetime*, Eur. Phys. J. **C79** (2019) 1002.
- [43] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, 1965).
- [44] A.O. Barvinsky e G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119** (1985) 1.
- [45] I.L. Shapiro, J. Solà, *Massive fields temper anomaly-induced inflation*, Phys. Lett. **B530** (2002) 10.
- [46] A.M. Pelinson, I.L. Shapiro e F.I. Takakura, *On the stability of the anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. **B648** (2003) 417.

- [47] M. Asorey, J.L. López, e I.L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity*, Int. Journ. Mod. Phys. **A12** (1997) 5711.
- [48] Ya. B. Zeldovich e A. A. Starobinsky, *Rate of particle production in gravitational fields*, JETP Lett. **26** (1977) 252.
- [49] A. Dobado e A.L. Maroto, *Particle production from nonlocal gravitational effective action*, Phys. Rev. **D60** (1999) 104045.
- [50] A.O. Barvinsky e G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 3: Spectral representations of the third order form-factors*, Nucl. Phys. **B333** (1990) 512.
- [51] A.O. Barvinsky, Yu.V. Gusev, G.A. Vilkovisky e V.V. Zhitnikov, *The One loop effective action and trace anomaly in four-dimensions*, Nucl.Phys. **B439** (1995) 561.
- [52] M. Asorey, E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Universality and Ambiguities of the Conformal Anomaly*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 163.
- [53] M.J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387.
- [54] N.D. Birell e P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [55] S. Deser, M. J. Duff e C. J. Isham, *Nonlocal Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. B **111** (1976) 45 .
- [56] M. J. Duff, *Observations on Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. B **125** (1977) 334.
- [57] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, Phys. Lett. **103B** (1981) 207.
- [58] A. Codello, *Polyakov Effective Action from Functional Renormalization Group Equation*, Annals Phys. **325** (2010) 1727.
- [59] S. Ichinose, *Renormalization of Polyakov's Two-dimensional Quantum Gravity*, Phys. Lett. B **251** (1990) 49.
- [60] S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *One loop renormalization of two-dimensional induced quantum gravity*, Phys. Lett. B **263** (1991) 183 ;

- S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Perturbative finiteness of 2-d induced quantum gravity*, Mod. Phys. Lett. A **7** (1992) 437 [Sov. J. Nucl. Phys. **55** (1992) 1265] [Yad. Fiz. **55** (1992) 2280];
- S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Perturbative analysis of two-dimensional quantum gravity: Renormalization, gauge dependence and finiteness*, Int. J. Mod. Phys. D **1** (1992) 571 .
- [61] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov e A. B. Zamolodchikov, *Fractal Structure of 2D Quantum Gravity*, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 819.
- [62] J. Distler e H. Kawai, *Conformal Field Theory and 2D Quantum Gravity*, Nucl. Phys. B **321** (1989) 509.
- [63] E. Mottola, *Functional integration over geometries*, J. Math. Phys. **36** (1995) 2470.
- [64] A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky, *Beyond the Schwinger-Dewitt Technique: Converting Loops Into Trees and In-In Currents*, Nucl. Phys. B **282** (1987) 163.
- [65] I. G. Avramidi, *Heat kernel and quantum gravity*, Lect. Notes Phys. Monogr. **64** (2000) 1.
- [66] I. G. Avramidi, Yad. Fiz. (Sov. Journ. Nucl. Phys.) **49** (1989) 1185;
 I. G. Avramidi e G. Esposito, *Gauge theories on manifolds with boundary*, Commun. Math. Phys. **200** (1999) 495
 I. G. Avramidi, *Analytic and geometric methods for heat kernel applications in finance*, (NMT-REPORT,-SOCORRO).
- [67] B. K. El-Menoufi, *Quantum gravity of Kerr-Schild spacetimes and the logarithmic correction to Schwarzschild black hole entropy*, JHEP **1605** (2016) 035.
- [68] I. L. Buchbinder, G. de Berredo-Peixoto e I. L. Shapiro, *Quantum effects in softly broken gauge theories in curved space-times*, Phys. Lett. B **649** (2007) 454.
- [69] S. Deser e A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, Phys. Lett. B **309** (1993) 279.
- [70] S. Deser, *Closed form effective conformal anomaly actions in $D \geq 4$* , Phys. Lett. B **479** (2000) 315.

- [71] L. Parker, e D. J. Toms, *Quantum Field Theory in curved spacetime*, (Cambridge University Press, 2009).
- [72] I. L. Shapiro, *Covariant derivative of fermions and all that*, Academy of Sciences of Roraima **11** (2016) 1-17.
- [73] S. Weinberg, *High-energy behavior in quantum field theory*, Phys. Rev. **118** (1960) 838 .
- [74] J. C. Collins, *Renormalization. An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, (Cambridge University Press, 1984)
- [75] V. Fernandes Barra, I.L. Buchbinder, J.G. Joaquim, A.R. Rodrigues e I.L. Shapiro, *Renormalization of Yukawa model with sterile scalar in curved spacetime*, Eur. Phys. J. **C79** (2019) 458.
- [76] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto e O. Zanusso, *Vacuum effective actions and mass-dependent renormalization in curved space*, Universe **5** (2019) 67.
- [77] E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Renormalization Group and Decoupling in Curved Space: III. The Case of Spontaneous Symmetry Breaking*, JHEP **02** (2004) 060.
- [78] L. Nakonieczny, *Curved spacetime effective field theory (cEFT) - construction with the heat kernel method*, JHEP **1901** (2019) 034.
- [79] T.S. Bunch e L. Parker, *Feynman Propagator in Curved Space-Time: A Momentum Space Representation*, Phys. Rev. **D20** (1979) 2499.
- [80] I. L. Shapiro e J. Sola, *On the possible running of the cosmological 'constant'*, Phys. Lett. B **682** (2009) 105-113.
- [81] D. C. Rodrigues, P. S. Letelier e I. L. Shapiro, *Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections*, JCAP **04** (2010) 020.
- [82] D. C. Rodrigues, *Elliptical galaxies kinematics within general relativity with renormalization group effects*, JCAP **09** (2012) 031.

- [83] J.F. Donoghue, *Leading quantum correction to the Newtonian potential*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2996.
- [84] J. Donoghue, *Quantum gravity as a low energy effective field theory*, Published in Scholarpedia 12 (2017) 32997.