

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Mário Márcio Dias Júnior

Estudo sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para Termos que
violam as Simetrias CPT/Lorentz na Teoria de Dirac

Juiz de Fora

2018

Mário Márcio Dias Júnior

Estudo sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para Termos que violam as Simetrias CPT/Lorentz na Teoria de Dirac

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Bruno Gonçalves

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dias Júnior, Mário Márcio.

Estudo sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para Termos que violam as Simetrias CPT/Lorentz na Teoria de Dirac / Mário Márcio Dias Júnior. – 2018.

61 f.

Orientador: Ilya L. Shapiro

Coorientador: Bruno Gonçalves

Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

1. Transformação Foldy-Wouthuysen Exata. 2. Campo de Dirac. 3. Violação das Simetrias de CPT e de Lorentz. I. Shapiro, Ilya L., orient. II. Gonçalves, Bruno, coorient. III. Título.

Mário Márcio Dias Júnior

Estudo sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para Termos que violam as Simetrias CPT/Lorentz na Teoria de Dirac

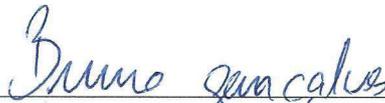
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Aprovada em 26 de fevereiro de 2018

BANCA EXAMINADORA



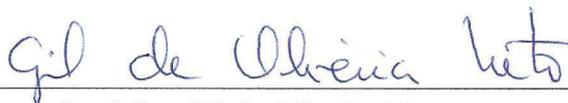
Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Bruno Gonçalves - Coorientador
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais



Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

À minha família...
À minha mãe, meu eterno exemplo de vida;
ao meu irmão, meu maior incentivador;
e à memória de meu pai.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, primeiramente, pelo dom da vida, pelas oportunidades criadas e sonhos que tenho realizado.
- À minha mãe pelo seu exemplo de força e determinação, além de me ensinar a ousar, questionar e acima de tudo ser curioso na busca do conhecimento.
- Ao meu irmão pelo apoio, incentivo e por sempre acreditar na minha capacidade.
- Ao professor Ilya L. Shapiro, pela orientação no período de meu mestrado, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelos ensinamentos, discussões e conselhos.
- Ao professor Bruno Gonçalves, pela confiança e por acreditar no meu potencial, além dos ensinamentos, conselhos e conversas durante a iniciação científica e o mestrado.
- Ao professor Baltazar J. Ribeiro, pela colaboração no desenvolvimento dos trabalhos e pelos ensinamentos.
- À professora Adriana Silva, por proporcionar o meu primeiro contato com a Física e toda a sua beleza.
- Aos professores do Departamento de Física da UFJF e IF Sudeste MG, por todo o conhecimento transmitido.
- Aos meus amigos Fátima Myris M. Santos, Sérgio L. França e José Francly C. Moraes, pelo incentivo, ajudas e companheirismo durante parte da caminhada.
- Aos amigos que fiz durante a graduação e o mestrado.
- À Capes, pelo apoio financeiro.

*Eu sou maior do que era antes
Estou melhor do que era ontem
Eu sou filho do mistério e do silêncio
Somente o tempo vai me revelar quem sou*
[...]

Dani Black & Milton Nascimento

Ao infinito e... além !

RESUMO

Neste trabalho, uma breve revisão de elementos e conceitos básicos relacionados à teoria quântica relativística e a representação de Dirac é realizada, e em seguida, as formulações dos campos de Klein-Gordon e Dirac são introduzidas. Posteriormente, considera-se o férmion de Dirac interagindo com diferentes campos externos que violam as simetrias fundamentais, inclusive de CPT e de Lorentz. Para extrair informações físicas do Hamiltoniano, é necessário realizar uma Transformação Foldy-Wouthuysen no mesmo. Além da Transformação Foldy-Wouthuysen perturbativa, existe a versão exata, que não é baseada em séries de potências no parâmetro $1/m$. O uso desta técnica é mostrado de forma didática, visto que a mesma permite trabalhar e investigar qualquer caso de interação de campos externos com o campo de Dirac. Uma nova abordagem é desenvolvida para estudar todos os casos para os quais a transformação exata não é permitida, através de uma generalização do método e o desenvolvimento de um novo operador involução. Apresenta-se também uma breve perspectiva sobre testes experimentais, considerando o cenário completo da TFWE, incluindo todos os casos possíveis que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação de Dirac.

Palavras-chave: Transformação Foldy-Wouthuysen Exata. Campo de Dirac. Violação das Simetrias de CPT e de Lorentz.

ABSTRACT

In this work, a brief review of basic elements and concepts related to relativistic quantum theory and Dirac representation is presented, and then, the formulations of the Klein-Gordon and Dirac fields are introduced. Subsequently, the Dirac fermion is considered interacting with different external fields that violate the fundamental symmetries, including CPT and Lorentz. A very efficient approach to extract physical information from the Hamiltonian is to perform a Foldy-Wouthuysen transformation on it. In addition to the perturbative Foldy-Wouthuysen Transformation, there is the exact version, which is not based on power series in the parameter $1/m$. The use of this technique is shown in a didactic form, since it allows to work and to investigate any case of interaction of external fields with the Dirac field. A new approach is developed to study all the cases for which the exact transformation is not allowed, through a generalization of the method and the development of a new involution operator. Furthermore, a brief perspective on experimental tests is also presented, considering the complete EFWT scenario, including all possible cases that violate the CPT and Lorentz symmetries in the Dirac equation.

Keywords: Exact Foldy-Wouthuysen Transformation. Dirac Field. Violation of CPT and Lorentz symmetries.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes de Interação	24
Tabela 2 – Antigos e Novos Coeficientes de Interação	46
Tabela 3 – Propriedades dos operadores C , P e T para a violação de Lorentz em EDQ	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CAMPOS DE KLEIN-GORDON E DE DIRAC	14
2.1	NOTAÇÕES	14
2.2	A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	16
2.3	A EQUAÇÃO DE DIRAC	18
2.4	LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO DA EQUAÇÃO DE DIRAC	19
2.4.1	Partícula livre	20
2.4.2	Equação de Pauli	20
3	O CAMPO DE DIRAC NO PANORAMA DE CPT	22
3.1	A EQUAÇÃO DE DIRAC COM TERMOS QUE VIOLAM CPT E LORENTZ	22
4	TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN	25
4.1	A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN	25
4.1.1	Transformação para uma Partícula Livre	26
4.1.2	Transformação para Interação com o Campo Eletromagnético	27
4.2	A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA	30
5	TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA PARA TERMOS QUE VIOLAM AS SIMETRIAS CPT/LORENTZ	34
5.1	A TFWE PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ - O CASO DO CAMPO DE TORÇÃO	34
5.1.1	TFWE para parte escalar da Torção	35
5.1.2	Equações de Movimento com a parte escalar da Torção	35
5.2	A TFWE PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ	36
5.2.1	TFWE para termos que violam as simetrias CPT/Lorentz	36
5.2.2	Equações de Movimento com termos que violam CPT/Lorentz	38
5.3	A TFWE PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ - O CASO DA TORÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO	39
5.3.1	Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata	40
5.3.2	A TFWE, uma Outra Proposta	42
5.3.3	Equações de Movimento com a Torção	43
5.4	A GENERALIZAÇÃO DA TFWE PARA A TEORIA DE DIRAC COM O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ	45
6	TESTES CPT, UMA PERSPECTIVA	50
7	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

Grandes esforços para formular uma mecânica quântica relativística começaram com as tentativas de usar o princípio da correspondência, a fim de obter uma equação de onda relativística destinada a substituir a equação de Schrödinger. A primeira equação desse tipo foi decorrente de Schrödinger (1926) (1), Gordon (1926) (2), e Klein (1927) (3). Esta equação de onda escalar de segunda ordem, que agora é conhecida como a equação de Klein-Gordon, foi inicialmente descartada, uma vez que levou a densidades de probabilidade negativas. No ano de 1928 foi publicada a equação de Dirac (4, 5), que se refere a partículas com spin-1/2 e é capaz de descrever muitas das propriedades de partículas de férmions.

A equação de Dirac, como a equação de Klein-Gordon, possui soluções com energia negativa, que, no quadro da mecânica ondulatória, leva a dificuldades. Para evitar transições de um elétron em estados inferiores de energia negativa, em 1930 foi postulado por Dirac que os estados de energia negativa deveriam estar todos ocupados (6). As partículas que faltam nesses estados ocupados de outra forma representam partículas com carga oposta (antipartículas). Isto conduz necessariamente a uma teoria de múltiplas partículas, ou a uma teoria do campo quântico. Ao reinterpretar a equação de Klein-Gordon como base de uma teoria de campo, Pauli e Weisskopf (7) mostraram que isso poderia descrever mésons com spin zero, por exemplo, mésons π . As teorias de campo baseadas nas equações de Dirac e Klein-Gordon correspondem às equações de Maxwell para o campo eletromagnético e à equação de d'Alembert para os quatro potenciais.

A equação de Schrödinger, bem como os outros axiomas da teoria quântica, permanecem inalterados. Somente o Hamiltoniano é alterado e então, representa um campo quantizado. As partículas elementares são excitações dos campos (mésons, elétrons, fótons, etc.), e formam assim, o *Modelo Padrão* (8). Vários estudos importantes estão sendo realizados na investigação dessas partículas e suas possíveis aplicações (9, 10, 11, 12).

O Modelo Padrão de Física de Partículas é a teoria que descreve três das quatro forças fundamentais conhecidas (as interações eletromagnética, fraca e forte, e sem incluir a força gravitacional) no universo, além de classificar todas as partículas elementares conhecidas. Foi desenvolvido em etapas ao longo da segunda metade do século 20, através do trabalho de muitos cientistas de todo o mundo, com a formulação atual finalizada em meados da década de 1970, após a confirmação experimental da existência de quarks. Desde então, a confirmação do top quark (1995) (13), do tau neutrino (2000) (14), e do Bóson de Higgs (2012) (15), adicionou credibilidade ao Modelo Padrão. O modelo explicou com sucesso quase todos os resultados experimentais e previu precisamente uma grande variedade de fenômenos.

Ao longo do tempo e através de muitas experiências, o Modelo Padrão tornou-se

estabelecido como uma teoria da física bem testada. Além disso, o Modelo Padrão é invariante nas transformações de Lorentz e de Carga, Paridade e Temporal (CPT). No entanto, a possibilidade de a natureza apresentar pequenas violações da simetria de Lorentz e CPT parece compatível com a teoria do campo quântico e com experiências existentes (16). Uma descrição geral dos efeitos associados pode ser formulada no nível da teoria do campo quântico como uma extensão do modelo padrão que viola Lorentz e CPT (17).

O estudo da possibilidade da violação das simetrias CPT/Lorentz tem recebido uma atenção significativa da comunidade científica nos últimos anos. Por exemplo, a violação de simetrias CPT/Lorentz causada por termos na ação de campos quânticos foi considerada em (18). Há também grandes esforços para estudar as simetrias CPT/Lorentz que são fracamente quebradas, não só no ponto de vista matemático. É possível ver que algumas consequências físicas podem surgir a partir do pressuposto de que essas simetrias podem de fato ser introduzidas na ação da teoria (19). Nesse contexto, esse assunto torna-se importante não só para a física teórica. Existe uma expectativa crescente de evidências experimentais de tal violação. Em (17), pode-se encontrar uma visão geral de todas as possibilidades de quebra das simetrias CPT/Lorentz. Há muitas outras obras recentes (ver (20, 21, 22)) que tratam a possibilidade de que a simetria CPT/Lorentz se quebre em um ponto de vista mais fenomenológico. Mas, de fato, a principal parte do estudo da comunidade científica permanece na busca da teoria correta que poderia dar a interpretação certa para esta quebra de simetria.

Os parâmetros para o cenário de verificação experimental estão completamente relacionados à consistência no nível quântico da teoria. Por esta razão, a estrutura de renormalização de teorias com simetrias quebradas é uma característica importante a ser analisada (veja, por exemplo, (23) para uma revisão breve e qualitativa das propriedades de renormalização de teorias de campos quânticos em espaço-tempo curvo na presença dos termos que violam CPT/Lorentz).

Uma possível conexão entre teorias com termos que violam CPT/Lorentz e Cosmologia (para considerações de bariogênese, veja (24)) que vale a pena analisar, especialmente no cenário notável de radiação cósmica de micro-ondas. Em (25), há uma visão geral sobre a possibilidade da manifestação de quebra de simetria de Lorentz. Um possível candidato para produzir a violação é o campo de torção. É muito interessante ver em (26, 27) que este campo pode ser gerado a partir da quebra de simetria. Estes trabalhos estão mostrando a conexão entre a violação de simetria matemática e alguma teoria física. Sabe-se também que o campo de torção, se realmente existe, é muito fraco. Mas o ponto principal aqui é conseguir uma interpretação para cada um dos termos de CPT/Lorentz, de tal forma que seja possível pesquisar algum resultado experimental para suportar esses resultados teóricos. A interação entre a torção espacial e o campo espinorial é descrita em (28, 29, 30, 31). Na verdade, não só a torção, mas todos os termos apropriados que violam CPT/Lorentz seriam um dos possíveis candidatos para desempenhar o papel

de descrever a anisotropia conhecida relacionada às perturbações cosmológicas. Outro exemplo é mostrado em (32) no qual a contribuição do fóton para as divergências e a anomalia conforme na teoria com termos violando CPT/Lorentz foi avaliada.

Nesta dissertação serão abordados diversos aspectos da equação de Dirac e o estudo para a descrição de férmions. Busca-se então, um formalismo que permita que a análise da equação seja a mais clara possível e, dessa forma, ao final, haja uma descrição precisa dos fenômenos que estejam englobados pela equação de Dirac. Um modo produtivo de investigar o campo de Dirac interagindo com alguns campos de fundo é a Transformação de Foldy-Wouthuysen (33) que permite a separação de componentes “grandes” e “pequenas” do bi-espinor de Dirac. É um dos métodos que permite extrair informações físicas do Hamiltoniano de Dirac (veja, por exemplo, (34, 35)), que não é diagonal desde o início. Pode-se diferenciar duas versões desta transformação: a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata (TFWE) (36), e a Transformação de Foldy-Wouthuysen usual (TFW), na qual a solução é obtida através de séries de potências no parâmetro $1/mc^2$. Para este caso, a solução aproximada não é complicada de se obter, mas existe um risco de serem perdidos termos relevantes à interpretação física final (37).

Aqui, trabalharemos com a TFWE, visto que o seu método é mais completo, econômico (na álgebra), interessante do ponto de vista matemático e a abordagem mais confiável para fornecer a informação em que se está interessado. O ponto principal para a utilização da TFWE ao invés da TFW é que a primeira transformação apresenta mais informações que a transformação usual (37). Outra vantagem que a TFWE tem é o fato de que permite usar algumas notações específicas que fazem todas as etapas, durante os cálculos, muito claras. Então, no final, as equações transformadas têm resultados que podem ser facilmente comparados aos conhecidos da literatura.

Sendo assim, este trabalho de dissertação tem a seguinte estrutura. O próximo capítulo é dedicado a uma breve revisão de elementos e conceitos básicos relacionados à teoria quântica relativística e a representação de Dirac, e depois, as formulações dos campos de Klein-Gordon e Dirac são introduzidas. No capítulo 2 é apresentado o campo de Dirac no panorama de CPT, em que o férmion de Dirac é considerado interagindo com diferentes campos externos que violam as simetrias fundamentais, inclusive CPT/Lorentz.

No capítulo 3, alguns resultados importantes para o uso da técnica da TFWE são mostrados. Além da diferenciação das duas versões existentes para a transformação considerada. O uso da transformação exata é mostrado de forma didática, visto que a mesma permite trabalhar e investigar qualquer caso de interação de campos externos com o campo de Dirac.

O capítulo 4 faz uso dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores para mostrar os principais resultados obtidos. A TFWE é realizada para a teoria de Dirac com o conjunto de termos que violam CPT/Lorentz (38, 39), bem como o desenvolvimento de

uma nova abordagem para estudar todos os casos para os quais a transformação exata não é permitida (40), através de uma generalização do método e o desenvolvimento de um novo operador involução. Além do mais, no capítulo 5, apresenta-se também uma breve perspectiva sobre testes experimentais, considerando o cenário da TFWE, incluindo todos os casos possíveis que violam as simetrias de CPT/Lorentz na equação de Dirac. Encerra-se o trabalho discutindo os principais resultados e propostas para trabalhos futuros.

2 CAMPOS DE KLEIN-GORDON E DE DIRAC

Os campos que aparecem quando se trata da mecânica quântica relativística serão apresentados aqui. Além disso, o formalismo desenvolvido para tratar das equações de Klein-Gordon e Dirac será o suporte de desenvolvimentos futuros. Isto justifica o estudo de alguns detalhes destas equações e as suas soluções.

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão de elementos e conceitos básicos relacionados à teoria quântica relativística e a representação de Dirac, e depois, as formulações dos campos de Klein-Gordon e Dirac serão introduzidas.

2.1 NOTAÇÕES

Inicialmente, é necessário definir notações antes de serem introduzidos conceitos importantes relacionados à teoria quântica relativística. Serão então definidas as grandezas básicas da teoria, entretanto sem explicações minuciosas sobre cada uma, pois este não é o objetivo deste trabalho. As notações a serem seguidas são as mesmas presentes em (41, 42).

A noção de distância entre dois pontos do espaço pode ser generalizada tal como o intervalo entre dois pontos no espaço-tempo, para que ele seja invariante perante as transformações de Lorentz. O intervalo é dado por

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (2.1)$$

onde

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (-ct, x, y, z) \quad (2.2)$$

e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Para os operadores diferenciais,

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) , \\ \partial^\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) , \quad \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta . \end{aligned} \quad (2.3)$$

O quadrivetor energia-momento de uma partícula é escrito da seguinte maneira

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) , \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right) . \quad (2.4)$$

A relação entre o momento e energia da partícula tem a forma (relação de dispersão)

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 . \quad (2.5)$$

Nas unidades em que $c = 1$,

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - p^2 = m^2 . \quad (2.6)$$

Já os observáveis físicos são representados por operadores hermitianos lineares que são

$$\begin{aligned} p_i &\longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} ; \\ E &\longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Agora, para a representação de Dirac,

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} ; \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} , \quad (2.8)$$

em que as matrizes 4×4 , α^i e β , são todas hermitianas e possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta^{ij} ; \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 ; \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = I . \end{aligned} \quad (2.9)$$

As matrizes σ_i são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (2.10)$$

Cada matriz de Pauli é hermitiana e, juntamente com a matriz identidade I , as mesmas (multiplicadas por coeficientes reais) formam uma base para o espaço vetorial de matrizes hermitianas 2×2 .

Tais matrizes possuem as seguintes propriedades também

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I . \quad (2.11)$$

As matrizes de Pauli obedecem às seguintes relações de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k ; \quad (2.12)$$

e anticomutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I ; \quad (2.13)$$

de modo que,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k . \quad (2.14)$$

Outra notação quadridimensional conveniente são as matrizes 4×4 , γ^μ , na representação de Dirac, que podem ser representadas da seguinte maneira

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} ; \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

As matrizes γ^μ não são hermitianas, mas obedecem à relação importante,

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (2.16)$$

É fácil ver que as relações apresentadas em (2.9) se escrevem em uma forma compacta em termos das matrizes γ , isto é,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} . \quad (2.17)$$

É útil também definir o produto das quatro matrizes gama da seguinte maneira

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.18)$$

2.2 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A mecânica quântica relativística é objeto de estudo de equações de ondas relativísticas para substituir a equação de Schrödinger não relativística. No contexto deste trabalho, as equações de onda que serão desenvolvidas para este caso são a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac. Agora que os objetos matemáticos foram revisados, os campos físicos serão estudados. Neste tópico, a equação de onda para uma partícula será descrita, no âmbito da equação de Klein-Gordon.

Começemos pela partícula livre. Em mecânica quântica não-relativística a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi . \quad (2.19)$$

Usando o Hamiltoniano da partícula livre não-relativística de massa m que é

$$H = \frac{p^2}{2m} , \quad (2.20)$$

e fazendo a substituição $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$, obtém-se então

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi . \quad (2.21)$$

A primeira ideia que surgiu para generalizar esta equação para uma partícula relativística foi utilizar o Hamiltoniano relativístico em substituição à equação (2.20). Para uma partícula livre o Hamiltoniano é a sua energia e deve-se ter

$$H = E . \quad (2.22)$$

Como a energia está relacionada com o momento linear através da relação (2.5), portanto, tem-se

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 . \quad (2.23)$$

Classicamente, exige-se que as energias sejam positivas e por isso, deveria haver no caso relativístico

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} . \quad (2.24)$$

Assim, imediatamente confronta-se com o problema de interpretar a raiz quadrada de um operador. Para evitar este problema, encontra-se uma equação para H^2 . Tal equação é obtida iterando a equação (2.19) e observando que $[i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, H] = 0$. Obtém-se então,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi , \quad (2.25)$$

ou ainda,

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 , \quad (2.26)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Não existem dificuldades em interpretar os operadores, mas é introduzido no problema as soluções de energia negativa que também são soluções da equação (2.26). Como é possível notar, as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativística e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas. A observação experimental de antipartículas veio a confirmar esta interpretação (43, 44, 45).

Não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da equação (2.26), chamada equação de Klein-Gordon (1, 3, 2, 45), como equação relativística para o elétron, mas outro problema anterior relacionado com a densidade de probabilidade. Partindo de (2.26) e da equação complexa conjugada, pode-se obter

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0 , \quad (2.27)$$

ou

$$0 = \psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = \partial_\mu \left(\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right) , \quad (2.28)$$

onde $\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi$. Então,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad ; \quad j^\mu = \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi . \quad (2.29)$$

Na identificação usual, $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, em que a densidade será

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) . \quad (2.30)$$

Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida como positiva. Desta forma, uma terceira razão fez abandonar a

equação de Klein-Gordon, o fato de que a mesma não conduz aos níveis de energia do átomo de hidrogênio.

Se esta última razão for excluída, a equação (2.26) foi abandonada pelas razões erradas. Na verdade, pode-se mostrar que ela é uma boa equação relativística para partículas de spin zero, razão pela qual não pode explicar os níveis do átomo de hidrogênio onde os efeitos do spin são importantes. As soluções de energia negativa serão compreendidas e a densidade ρ será re-interpretada não como uma densidade de *probabilidade*, mas antes como uma *densidade de carga* (45).

2.3 A EQUAÇÃO DE DIRAC

Com o propósito de tentar resolver os problemas de interpretação da equação de onda de Klein-Gordon apontados na seção anterior, Dirac propôs uma outra equação relativística para o elétron (4, 5, 41). Como na equação fundamental (2.19) observa-se que a derivada temporal é linear no tempo. Partindo desse princípio, é natural admitir num contexto relativístico que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em relação às coordenadas e portanto, é possível escrever

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2\right)\psi \equiv H\psi. \quad (2.31)$$

Pode-se ver que α^i e β não podem ser números, pois então, a relação entre energia e momento de uma partícula relativística não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^*\psi$ é para ser interpretada como a componente temporal de um quadrivetor de corrente. Assim, Dirac propôs que $\boldsymbol{\alpha}$ e β sejam matrizes hermitianas $N \times N$ (para que H seja hermitiano) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

A equação (2.31) é então interpretada como uma equação matricial e para que ela faça sentido deve-se satisfazer certas condições.

Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein-Gordon. Para isso itera-se a equação (2.31)

$$\begin{aligned} -\hbar\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi &= \left(-i\hbar c\alpha^i\nabla_i + \beta mc^2\right)i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \\ &= \left[-\hbar^2c^2\frac{\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i}{2}\nabla_i\nabla_j - i\hbar mc^2\left(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i\right)\nabla_i + \beta^2m^2c^4\right]\psi, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e usando as propriedades apresentadas em (2.9), obtemos a equação de Klein-Gordon.

Já em relação à questão da probabilidade de corrente, escreve-se a equação conjugada hermitiana de (2.31). Atentando que α^i e β são hermitianas, obtém-se

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger = \psi^\dagger \left(i\hbar c\alpha^i \overleftarrow{\partial}_i + \beta mc^2 \right) . \quad (2.34)$$

Multiplicando a equação (2.31) à esquerda por ψ^\dagger e a equação (2.34) à direita por ψ , e então, subtraindo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = -i\hbar c\nabla_i(\psi^\dagger\alpha^i\psi) , \quad (2.35)$$

ou ainda,

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) + \nabla \cdot (\psi^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\psi) = 0 \quad (2.36)$$

o que permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade, respectivamente,

$$\rho = \psi^\dagger\psi \quad ; \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\psi . \quad (2.37)$$

Integrando a equação (2.36) em todo o espaço

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger\psi = 0 , \quad (2.38)$$

o que está de acordo com o termo $\psi^\dagger\psi$ identificado como uma densidade de probabilidade definida positiva.

A notação das equações (2.36) e (2.37) antecipa o fato de \mathbf{j} ser um 3-vetor, em que $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ é um quadrivetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é covariante, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Agora, multiplicando a equação (2.31) por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzindo as matrizes apresentadas em (2.15), a equação de Dirac escreve-se

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 , \quad (2.39)$$

ou ainda,

$$(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} - mc)\psi = 0 , \quad (2.40)$$

onde $\rlap{-}\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$, introduzindo a notação de Feynman que abrevia a contração de matrizes $-\gamma$ com um quadrivetor.

2.4 LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Antes de prosseguir com a extensão da teoria de Dirac, é importante verificar se a equação de Dirac produz resultados fisicamente razoáveis no caso do limite não-relativístico.

2.4.1 Partícula livre

Para analisar qual o limite não-relativístico da equação de Dirac, é considerado inicialmente o caso da partícula livre. Considerando a seguinte definição

$$\psi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

onde $\hat{\varphi}$ e $\hat{\chi}$ são espinores de Pauli (duas componentes) e a representação de Dirac para $\boldsymbol{\alpha}$ e β é utilizada, o seguinte par de equações acopladas é obtido para os espinores $\hat{\varphi}$ e $\hat{\chi}$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi} = -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \hat{\chi} + m \hat{\varphi} . \\ i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\chi} = -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \hat{\varphi} - m \hat{\chi} . \end{cases} \quad (2.42)$$

No limite não-relativístico, $E - m \ll m$ ¹, em que é feita a substituição

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.42)

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \chi . \\ i \frac{\partial}{\partial t} \chi = -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi - 2m \chi . \end{cases} \quad (2.44)$$

Como χ varia devagar com o tempo, a segunda equação é resolvida, aproximadamente por,

$$\chi \simeq -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{2m} \varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \varphi \ll \psi . \quad (2.45)$$

Substituindo na primeira equação

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m} \varphi, \quad (2.46)$$

que é a equação de Schrödinger para a partícula livre. Assim, no limite não-relativístico, as grandes componentes φ obedecem à equação não relativística e as pequenas componentes são desprezadas. Nota-se que desprezar χ corresponde também a desprezar as soluções para energia negativa. Daí o fato de elas nunca terem surgido em mecânica quântica não-relativística.

2.4.2 Equação de Pauli

Considere agora que o elétron está sujeito a um campo eletromagnético externo descrito pelo quadrivetor $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$. Isso é facilmente (ver e.g. (46) para mais detalhes) obtido usando, $p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$. Assim, escreve-se mais explicitamente

$$\begin{cases} -i \nabla \rightarrow \boldsymbol{\pi} = -i \nabla - e \mathbf{A} . \\ i \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - e A^0 . \end{cases} \quad (2.47)$$

¹ A partir de agora, serão utilizadas unidades naturais, de tal forma que $\hbar = c = 1$.

Então, com a separação da equação (2.41) é obtido ao invés da equação (2.44)

$$\begin{cases} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\chi + eA^0\varphi ; \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}\varphi + eA^0\chi - 2m\chi ; \end{cases} \quad (2.48)$$

onde foi utilizada a equação (2.43). Admitindo que os campos eletrostáticos são fracos,

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2m}\varphi , \quad (2.49)$$

e portanto, para as grandes componentes

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m} + eA^0 \right] \varphi . \quad (2.50)$$

Para analisar o significado desta equação nota-se que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} . \quad (2.51)$$

Então,

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA^0 \right] \varphi , \quad (2.52)$$

que é reconhecida como a equação de Pauli para o elétron. A dedução da equação de Pauli como limite não-relativístico para a equação de Dirac é um fato notável, pois a mesma foi derivada de maneira diferente e independente. Essa equação foi obtida antes da equação de Dirac como uma generalização da equação de Schrödinger para o caso de uma partícula de spin-1/2 interagindo com campo eletromagnético externo. Assim, os postulados da mecânica quântica foram estendidos por Pauli para que a descrição de partícula com spin fosse englobada, e a equação acima foi escrita introduzindo a interação entre o campo magnético externo e o momento magnético de spin.

3 O CAMPO DE DIRAC NO PANORAMA DE CPT

Os estudos de fenômenos físicos com energia da ordem da escala de Planck através de abordagens como teoria de cordas e outras preveem a existência de diversos campos de natureza geométrica, tais como torção e dilatón, por exemplo. Em baixas energias, supõe-se que tais campos possuem um papel modesto, mas em princípio não é garantido que eles não possam ser observados. A existência de campos fracos deste tipo, em particular, gerou a possibilidade interessante de uma quebra muito fraca das simetrias fundamentais, inclusive de CPT e de Lorentz (47).

Neste capítulo será considerada a situação de um férmion interagindo com diferentes campos externos que violam as simetrias CPT/Lorentz. O objetivo é obter o Hamiltoniano que descreva totalmente tal situação.

3.1 A EQUAÇÃO DE DIRAC COM TERMOS QUE VIOLAM CPT E LORENTZ

Começando com a ação que descreve um férmion de Dirac, com os termos que violam as simetrias de CPT e Lorentz

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{i}{2} D_\mu^* \bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi - \bar{\Psi} M \Psi \right\}. \quad (3.1)$$

Os termos que violam as simetrias de CPT/Lorentz podem ser escritos da seguinte maneira (48)

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu; \quad D_\mu^* = \nabla_\mu + ieA_\mu; \quad \Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu; \quad M = m + M_1. \quad (3.2)$$

A ação inicial foi definida em espaço-tempo curvo apenas para que fosse representada de maneira geral, entretanto não existe interesse em analisar termos que violam CPT/Lorentz em um espaço-tempo curvo, pois as magnitudes destes termos são definitivamente pequenas e conseqüentemente, os termos correspondentes produzem efeitos muito fracos, que nunca se misturariam com os termos de espaço-tempo curvo.

Nas fórmulas acima, ∇_μ é operador de derivada covariante, $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, e os termos Γ_1^ν e M_1 podem ser escritos como

$$\Gamma_1^\nu = c^{\mu\nu} \gamma_\mu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu + e^\nu + i f^\nu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\mu} \quad (3.3)$$

e

$$M_1 = a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + i m_5 \gamma^5 + \frac{1}{2} H^{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

As grandezas a_μ , b_μ , m_5 , $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, e_μ , f_μ , $g_{\mu\nu\lambda}$ e $H_{\mu\nu}$ são os parâmetros que violam as simetrias CPT/Lorentz. Destes, a_μ , b_μ , e_μ , f_μ , $g_{\mu\nu\lambda}$ determinam a violação de CPT. Os coeficientes a_μ , b_μ , $H_{\mu\nu}$ possuem dimensão de massa, enquanto $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, e_μ , f_μ , $g_{\mu\nu\lambda}$

são adimensionais (16). A abordagem convencional para se estudar a possibilidade de quebra das simetrias CPT e Lorentz é considerar a forma mais geral para essas violações e depois, investigar as consequências fenomenológicas delas. O tipo mais promissor de experimento pertence à área de física atômica (49), mas há opções interessantes na área de altas energias e física do estado sólido (50), experimentos com neutrinos (51), gravitação (52) e cosmologia (53).

Uma discussão extensa da possibilidade da origem destes parâmetros, bem como as diversas implicações fenomenológicas deles podem ser encontradas em (47, 54). Esses aspectos não serão considerados aqui.

É possível reescrever (3.1) da seguinte maneira

$$S = \int d^4x \bar{\psi} \left\{ i\Gamma^\mu D_\mu + \frac{i}{2} (\nabla_\mu \Gamma^\mu) - M \right\} \psi . \quad (3.5)$$

Como resultado, as equações de movimento para ψ podem ser escritas como

$$i\Gamma^\mu D_\mu \psi = \left[M - \frac{i}{2} (\nabla_\mu \Gamma^\mu) \right] \psi . \quad (3.6)$$

E então, escrevendo a equação anterior na forma de Schrödinger, $i\partial_t \psi = H\psi$,

$$i\Gamma^0 \nabla_0 \psi = (M + P_\nu^* \Gamma^\nu) \psi . \quad (3.7)$$

Adotando a seguinte notação (55):

$$P_\nu^0 = (0, P_i) , \quad \bar{P}_\nu = P_\nu^0 - eA_\nu \quad e \quad P_\nu^* = \bar{P}_\nu - \frac{i}{2} \nabla_\nu . \quad (3.8)$$

É importante notar que tais notações permitem que os termos não constantes que violam CPT/Lorentz sejam considerados também. Na última equação, a representação padrão (41) para as matrizes de Dirac foi utilizada.

Denotando $\Gamma^0 = \gamma^0 + \Gamma_1^0$ e introduzindo $\bar{\Gamma}_1^0$ de tal forma $(\Gamma^0)^{-1} = \gamma^0 - \bar{\Gamma}_1^0$. Se supuser que a Hamiltoniana é linear nos termos que violam CPT/Lorentz presentes em Γ_1^0 , é possível mostrar que

$$\bar{\Gamma}_1^0 = \gamma^0 \Gamma_1^0 \gamma^0 . \quad (3.9)$$

Portanto, a equação (3.7) pode ser escrita na seguinte forma

$$i\nabla_0 \psi = \left\{ \gamma_0 - \gamma_0 (c^{\mu 0} \gamma_\mu + d^{\mu 0} \gamma_5 \gamma_\mu + e^0 + i f^0 \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda \mu 0} \sigma_{\lambda \mu}) \gamma_0 \right\} \times [M + (P_\nu^* \Gamma^\nu)] \psi . \quad (3.10)$$

No trabalho de (55), os autores apresentam uma tabela completa que contém 80 casos de termos que violam CPT/Lorentz na equação de Dirac modificada.

Tabela 1 – Coeficientes de Interação

	m $P_\nu^* e^\nu$	a_l $\frac{P_\nu^* c^{l\nu}}{\bar{P}_l}$	b_0 $P_\nu^* d^{0\nu}$	H^{lj} $P_\nu^* g^{lj\nu}$	m_5 $P_\nu^* f^\nu$	b_l $P_\nu^* d^{l\nu}$	a_0 $\frac{P_\nu^* c^{0\nu}}{\bar{P}_0}$	$H^{0\mu}$ $P_\nu^* g^{0\mu\nu}$
γ^0	1	γ^l	$-\gamma^0 \gamma^5$	$\frac{1}{2} \sigma^{lj}$				
c^{00}	$-\gamma^0$	$-\alpha^l$	γ^5	$-\frac{1}{2} \gamma^0 \sigma^{lj}$				
f^0	$i\gamma^5$	$i\gamma^5 \gamma^l$	$i\gamma^0$	$\frac{i}{2} \gamma^5 \sigma^{lj}$				
d^{i0}	$-i\gamma^i \gamma^5$	$-i\gamma^i \gamma^5 \gamma^l$	α^i	$-\frac{1}{2} \gamma^i \gamma^5 \sigma^{lj}$				
g^{i00}	$2\alpha^i$	$2\alpha^i \gamma^l$	$2\gamma^i \gamma^5$	$\alpha^i \sigma^{lj}$				
d^{00}					$i\gamma^0$	α^l	$-\gamma^5$	$\frac{1}{2} \sigma^{0\mu} \gamma^0 \gamma^5$
e^0					$-i\gamma^5$	$-\gamma^5 \gamma^l$	$-\gamma^0$	$\frac{1}{2} \sigma^{0\mu}$
c^{i0}					$-i\gamma^i \gamma^5$	$-i\gamma^i \gamma^5 \gamma^l$	$-\alpha^i$	$\frac{1}{2} \gamma^i \sigma^{0\mu}$
g^{ij0}					$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \gamma^5$	$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \gamma^5 \gamma^l$	$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \gamma^0$	$\frac{1}{4} \sigma^{ij} \sigma^{0\mu}$

Fonte: GONÇALVES; OBUKHOV; SHAPIRO, 2009, p. 3.

A forma correspondente a cada termo da tabela é obtida pela multiplicação dos termos de uma linha por uma coluna. Por exemplo, o coeficiente 1 apresentado na primeira célula da tabela significa que para γ^0 e m a Hamiltoniana contém o termo $\gamma^0 \times 1 \times m = \beta m$, que é o termo mais trivial possível e correspondente à equação de Dirac livre. Já os termos presentes na primeira linha devem ser considerados separadamente, como por exemplo, na segunda coluna há três termos diferentes – a_l , $P_\nu^* c^{l\nu}$ e \bar{P}_l .

No próximo capítulo será apresentada a técnica da TFW e seus tipos, usual e exata. Além disso, o uso desta técnica será mostrado de forma didática visto que a mesma permite trabalhar e investigar qualquer caso de interação de campos externos com o campo de Dirac.

4 TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN

As transformações canônicas em mecânica quântica são aquelas transformações de variáveis canônicas que preservam a forma das equações de Hamilton para novas coordenadas e momentos. Estas transformações permitem encontrar representações que simplifiquem as equações e a solução de problemas físicos.

A *Transformação de Foldy-Wouthuysen* (33) é uma transformação sobre o estado de uma partícula quântica relativística de spin-1/2. O objetivo inicial seria o de desacoplar as componentes do espinor, obtendo, assim, dois espinores independentes de duas componentes e que corresponderiam a estados de energia positiva e negativa, respectivamente.

Neste capítulo, será mostrada a Transformação de Foldy-Wouthuysen comum, abordando suas motivações e aplicações. Posteriormente, a transformação exata será trabalhada.

4.1 A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN

A transformação de Foldy e Wouthuysen (33) transforma a equação de Dirac em duas equações de duas componentes desacopladas. A equação para as duas primeiras componentes torna-se idêntica à equação de Pauli no limite não-relativístico; tal equação também contém termos adicionais que originam as correções relativísticas. As energias para essas componentes são positivas. Já a equação para as outras duas componentes descreve estados de energia negativos.

A transformação canônica (unitária) que consegue o desacoplamento necessário pode ser escrita na forma

$$\psi = e^{-iS}\psi' , \quad (4.1)$$

onde, em geral, S pode depender do tempo. Da equação de Dirac, segue então que

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi' = ie^{-iS}\frac{\partial}{\partial t}\psi' + i\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' \quad (4.2)$$

e, portanto, para a equação de movimento para ψ'

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \left[e^{iS} \left(H - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} \right] \psi' \equiv H'\psi' ; \quad (4.3)$$

com o Hamiltoniano transformado de Foldy-Wouthuysen

$$H' = e^{iS} \left(H - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} . \quad (4.4)$$

A derivada temporal contida no lado direito da equação anterior só atua no termo e^{-iS} . Um esforço para construir S tal que H' não contenha operadores ímpares. Dessa maneira, para o caso de uma partícula livre, pode-se encontrar uma transformação exata, mas

caso contrário, deve-se executar uma série de expansões em série de potência de $1/m$ e, sucessivas transformações, satisfazendo esta condição para cada ordem de $1/m$. De fato, cada potência de $1/m$ corresponde a um fator $\frac{p}{mc} \sim \frac{v}{c}$; no domínio atômico, isso é aproximadamente igual à constante α da estrutura fina de Sommerfeld, pois, da relação de incerteza de Heisenberg, tem-se $\frac{v}{c} \approx \frac{\hbar}{cm\Delta x} \approx \frac{\hbar}{cma} = \alpha$ (42).

Aqui é necessário, para o desenvolvimento da teoria, estabelecer a distinção entre operadores pares e ímpares. Na teoria de Dirac, operadores “ímpares” são aqueles que conectam as componentes grandes e pequenas da função de onda $(\alpha^i, \gamma^i, \gamma_5)$, e os “pares”, aqueles que não acoplam tais componentes (I, β, Σ) .

Uma condição necessária e suficiente que pode ser mostrada para uma matriz ser *par* (*ímpar*) é que ela *comute* (*anticomute*) com β . Assim, pode-se escrever para um operador M qualquer:

$$M = M^P + M^I , \quad (4.5)$$

onde M^P é a parte par e M^I , a parte ímpar; escritas como

$$M^P = \frac{1}{2} (M + \beta M \beta) \quad ; \quad M^I = \frac{1}{2} (M - \beta M \beta) . \quad (4.6)$$

As relações anteriores são simples de serem entendidas. Substituindo (4.6) em (4.5) obtém-se,

$$M = \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} (\beta M \beta) + \frac{1}{2} M - \frac{1}{2} (\beta M \beta) . \quad (4.7)$$

O que se pode pensar é na questão de que se o Hamiltoniano fosse um operador par, seria possível separar a equação de Dirac em duas, sem haver a mistura de componentes. Porém, existe uma maneira de se realizar isso, utilizando-se de sucessivas transformações canônicas.

O Hamiltoniano assumiria a seguinte forma

$$H = \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} , \quad (4.8)$$

onde ε são os operadores *pares* e \mathcal{O} , os *ímpares*.

4.1.1 Transformação para uma Partícula Livre

Para uma partícula livre, o Hamiltoniano de Dirac simplifica-se para

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m , \quad (4.9)$$

que não depende do tempo.

Deseja-se encontrar S de modo que H' não contenha operadores ímpares. Fazendo,

$$e^{iS} = e^{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \theta} = \cos \theta + \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \sin \theta , \quad (4.10)$$

onde $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$.

Então,

$$\begin{aligned}
 H' &= (\cos \theta + \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \sin \theta) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\cos \theta - \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \sin \theta) \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\cos \theta - \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \sin \theta)^2 \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \exp(-2\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \theta) \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \left(\cos 2\theta - \frac{m}{|\mathbf{p}|} \sin 2\theta \right) + \beta (m \cos 2\theta + |\mathbf{p}| \sin 2\theta) . \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

A condição de que o termos ímpar, ou seja, $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})$, desapareça é mediante a condição $\tan 2\theta = |\mathbf{p}|/m$, de onde segue que

$$\sin 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{(1 + \tan^2 2\theta)^{1/2}} = \frac{p}{(m^2 + p^2)^{1/2}} ; \quad \cos 2\theta = \frac{m}{(m^2 + p^2)^{1/2}} . \quad (4.12)$$

Substituindo as relações de (4.12) na equação (4.11) resulta que

$$H' = \beta m \left(\frac{m}{E} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{mE} \right) = \beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} . \quad (4.13)$$

Assim, H' foi diagonalizado. Mesmo agora, H' ainda contém o caráter da teoria de quatro componentes devido à sua dependência da matriz β , que é diferente para as componentes superior e inferior. Tal transformação exata só é viável para partículas livres.

4.1.2 Transformação para Interação com o Campo Eletromagnético

Primeiramente, o interesse é investigar o caso dos campos eletromagnéticos que não desaparecem. Assume-se assim, que os potenciais A e Φ são dados, de modo que o Hamiltoniano de Dirac fica

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi \quad (4.14)$$

$$= \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} . \quad (4.15)$$

Aqui, é introduzida uma decomposição em um termo proporcional a β , um termo par ε e um termo ímpar \mathcal{O} ,

$$\varepsilon = e\Phi \quad ; \quad \mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) . \quad (4.16)$$

Estes têm diferentes propriedades de comutação em relação a β ,

$$\beta \varepsilon = \varepsilon \beta \quad ; \quad \beta \mathcal{O} = -\mathcal{O} \beta . \quad (4.17)$$

A solução no caso anterior (4.10) implica que, para θ pequeno, isto é, no limite não-relativístico,

$$iS = \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \theta \sim \beta \boldsymbol{\alpha} \frac{\mathbf{p}}{2m} . \quad (4.18)$$

Espera-se assim, que sucessivas transformações desse tipo levem a uma expansão em $1/m$. Na estimativa de H' , é utilizada a identidade de Baker-Hausdorff ¹,

$$\begin{aligned} H' &= H + i[S, H] + \frac{i^2}{2}[S, [S, H]] + \frac{i^3}{6}[S, [S, [S, H]]] + \\ &+ \frac{i^4}{24}[S, [S, [S, [S, H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] - \frac{i^2}{6}[S, [S, \dot{S}]] , \end{aligned} \quad (4.19)$$

dado aqui apenas para a ordem exigida. Os termos ímpares são eliminados para a ordem m^{-2} , enquanto os pares são calculados até a ordem m^{-3} . Executa-se a expansão em potências de $1/m$, que é portanto, “pequeno” no limite relativístico, e o procedimento é repetido até que a ordem desejada seja alcançada.

Para a primeira ordem $[\mathcal{O}(1/m)]$,

$$H' = \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} + i[S, \beta] m . \quad (4.20)$$

Em analogia com o procedimento para a partícula livre, e de acordo com a observação que segue da equação (4.17), a escolha para S apresenta a seguinte forma

$$S = -\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m} . \quad (4.21)$$

Então, aplicando o parâmetro S apresentado em (4.21) na equação (4.20), obtém-se

$$\begin{aligned} H' &= \beta m + \beta \left(\frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3} \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \varepsilon]] - \frac{i}{8m^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] \\ &+ \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \varepsilon] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} \\ &\equiv \beta m + \varepsilon' + \mathcal{O}' . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aqui, ε e todas as potências pares de \mathcal{O} foram combinados em um novo termo par ε' , e as potências ímpares em um novo termo ímpar \mathcal{O}' . Os termos ímpares agora ocorrem apenas para ordens de pelo menos $1/m$. Para reduzi-los ainda mais, aplica-se outra Transformação de Foldy-Wouthuysen

$$S' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}' = -\frac{i\beta}{2m} \left(\frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \varepsilon] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} \right) . \quad (4.23)$$

Essa transformação produz

$$\begin{aligned} H'' &= e^{iS'} \left(H' - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS'} = \beta m + \varepsilon' + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}', \varepsilon'] + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}'}{2m} \\ &\equiv \beta m + \varepsilon'' + \mathcal{O}'' . \end{aligned} \quad (4.24)$$

¹ $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \dots + \frac{1}{n!} [A, [A, \dots, [A, B] \dots]] + \dots$

Uma vez que \mathcal{O}' é de ordem $1/m$, em \mathcal{O}'' agora existem apenas termos de ordem $1/m^2$. Essa transformação também gera mais termos pares, que, no entanto, são de ordem superior. Por meio da transformação

$$S'' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}'' , \quad (4.25)$$

o termo ímpar $\mathcal{O}'' \approx \mathcal{O}(1/m^2)$ também é eliminado. O resultado é o operador

$$\begin{aligned} H''' &= e^{iS''} \left(H'' - i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS''} = \beta m + \varepsilon' \\ &= \beta \left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^3}{8m^3} \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \varepsilon] + i\dot{\mathcal{O}}] . \end{aligned} \quad (4.26)$$

que agora só é composta por termos pares.

A fim de apresentar o Hamiltoniano H''' na sua forma final, deve-se substituir (4.16) na equação anterior e reescrever os termos individuais como se segue

$$\frac{\mathcal{O}^2}{2m} = \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2}{2m} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} ; \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{8m^2} ([\mathcal{O}, \varepsilon] + i\dot{\mathcal{O}}) = \frac{e}{8m^2} (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\Phi - i\boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{A}}) = \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} ; \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{O}, \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right] &= \frac{ie}{8m^2} \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right] \\ &= \frac{ie}{8m^2} \sum_{i,j} \alpha^i \alpha^j \left(-i\frac{\partial E^j}{\partial x^i} \right) + \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} \\ &= \frac{e}{8m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Então, o Hamiltoniano de (4.26) para a ordem desejada é

$$\begin{aligned} H''' &= \beta \left(m + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} \right) + e\Phi - \frac{e}{2m} \beta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \\ &\quad - \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} - \frac{e}{8m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

O hamiltoniano H''' não contém mais nenhum operador ímpar. Assim, não existe mais um acoplamento entre as componentes do espinor e o Hamiltoniano transformado é um bloco diagonal. Além disso, cada termo presente na equação (4.30) possui uma interpretação física direta. O primeiro termo entre parênteses é a expansão de

$$\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} \quad (4.31)$$

e $-\mathbf{p}^4/(8m^3)$ é a principal correção relativística para a energia cinética. Os dois termos

$$-\frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} \quad (4.32)$$

juntos são a energia da interação spin-órbita. Em um potencial estático esfericamente simétrico, eles assumem uma forma muito familiar. Neste caso, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$,

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L}, \quad (4.33)$$

e esse termo se reduz a

$$H_{\text{spin-órbita}} = \frac{e}{4m^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L}. \quad (4.34)$$

O último termo é conhecido como termo de Darwin. Em um potencial de Coulomb de um núcleo com carga $Z|e|$, ele toma a forma

$$-\frac{e}{8m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{e}{8m^2} Z|e| \delta^3(r) = \frac{Ze^2}{8m^2} \delta^3(r) = \frac{Z\alpha\pi}{2m^2} \delta^3(r). \quad (4.35)$$

O procedimento utilizado para a obtenção de informações físicas de um Hamiltoniano de uma partícula de Dirac com uma interação qualquer, através da Transformação de Foldy-Wouthuysen pode ser esquematizado da seguinte maneira:

1. Primeiro, identifica-se os termos “ímpares” e “pares” no Hamiltoniano.
2. Executa-se a primeira transformação e então, o resultado par em primeira ordem em $1/m$ é obtido.
3. Executa-se a segunda transformação para obter um resultado par de ordem $1/m^2$.
4. Executa-se a expansão em potências de $1/m$, e o procedimento é repetido até que a ordem desejada seja alcançada. Geralmente, utiliza-se até a terceira ordem.

4.2 A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA

Nesta seção, será apresentada uma breve revisão sobre a TFW (37, 36). Sabe-se que a TFW fornece, em geral, informações mais detalhadas em relação à aproximação não-relativística (33, 56, 57, 58). A solução aproximada não é muito complicada de se obter, mas neste caso existe um certo risco de serem perdidos termos relevantes (37).

As transformações *usual* e *exata* conduzem a diferentes representações. A TFW apresenta, essencialmente, uma expansão em série de potências em um pequeno parâmetro na teoria e funciona com qualquer parâmetro que possa ser justificado para executar a expansão. Por outro lado, a TFW funciona apenas com o parâmetro $1/m$. Vale ressaltar que a TFW e a versão exata não apresentam, necessariamente, o mesmo resultado analítico. Além disso, durante o procedimento de diagonalização do Hamiltoniano, os operadores podem ser diferentes em alguns aspectos. Um conjunto de exemplos desta diferença pode ser encontrado em (59) e em (60), onde uma análise mais detalhada é apresentada.

O espinor se transforma da seguinte maneira

$$\psi^{tr} = U\psi \quad , \quad \psi = U^*\psi^{tr} \quad , \quad (4.36)$$

onde U é um operador unitário e que se busca uma forma particular do mesmo que torne o Hamiltoniano par. Não serão discutidas todas as possíveis formas que U possa apresentar. Após substituir a última relação na equação (2.19), obtém-se

$$H^{tr} = UHU^* - iU\frac{\partial U^*}{\partial t} = UHU^* - iU\dot{U}^* \quad , \quad (4.37)$$

onde foi considerado que $i\frac{\partial \psi^{tr}}{\partial t} = H^{tr}\psi^{tr}$. Aqui serão abordados os casos em que os campos externos são independentes do tempo, então o último termo na equação (4.37) é nulo. Considerando a relação de comutação

$$[\beta, H^{tr}] = [\beta, UHU^*] = 0 \quad . \quad (4.38)$$

A última equação pode ser reescrita multiplicando pela esquerda por U^* e pela direita por U . A condição se torna,

$$[\beta, UHU^*] = [U^*\beta U, H] = 0 \quad . \quad (4.39)$$

Uma escolha possível para a quantidade $U^*\beta U$ é

$$U^*\beta U = \frac{H}{\sqrt{H^2}} \equiv \lambda \quad . \quad (4.40)$$

Neste caso, o termo $\sqrt{H^2}$ deve ser entendido como uma notação. O cálculo de H^2 é realizado na representação de coordenadas e, como próximo passo, é necessário escrever H^2 na representação de momentos para extrair sua raiz quadrada. Expandem-se o operador em série de potências em algum parâmetro que possa ser considerado pequeno na teoria que está sendo estudada. Em todas as etapas futuras que aparecerem raízes de operadores, tais grandezas devem ser entendidas dessa forma.

Na última equação, a quantidade λ é um operador hermitiano e unitário, $\lambda^2 = \lambda^\dagger\lambda = 1$. Assumindo que o Hamiltoniano está bem definido e não possui zero como autovalor (36, 61). É notável dizer que para realizar a TFWÉ, o Hamiltoniano deve obedecer a seguinte relação:

$$JH + HJ = 0 \quad , \quad (4.41)$$

onde J é um operador hermitiano e unitário, denominado *operador involução*. Outra informação útil sobre J é a relação $J\beta + \beta J = 0$. A TFWÉ é realizada se a relação $U = U_2 \times U_1$ for considerada, onde

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + J\lambda) \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta J) \quad . \quad (4.42)$$

Conseqüentemente,

$$U_1 \lambda U_1^\dagger = J \quad \text{e} \quad U_2 \lambda U_2^\dagger = \beta . \quad (4.43)$$

Não é difícil verificar que a equação (4.42) satisfaz a relação $U \lambda U^\dagger = \beta$. Da equação (4.40) é fácil ver que

$$\beta = U \lambda U^\star = \frac{H^{tr}}{\sqrt{(H^{tr})^2}} \quad (4.44)$$

e a quantidade H^{tr} é dada por $H^{tr} = \beta \sqrt{(H^{tr})^2}$ que é um Hamiltoniano par. Agora e assim por diante, assume-se que os termos com o índice “*tr*” são os termos transformados e esses pertencem ao Hamiltoniano transformado final.

No sentido prático, para realizar todas as etapas para obter H^{tr} é necessário conhecer o operador U como uma solução da equação (4.40). Considerando $U = \sqrt{\beta \lambda}$ como uma solução. O operador U possui a propriedade $U \beta = U^\star \beta$. Agora, da equação (4.41), tem-se $H^2 J = J H^2$. Então,

$$J \sqrt{H^2} = \sqrt{J^2} \sqrt{H^2} = \sqrt{J^2 H^2} = \sqrt{J H^2 J} = \sqrt{H^2 J^2} = \sqrt{H^2} \sqrt{J^2} = \sqrt{H^2} J \quad (4.45)$$

em que se obtém $J \sqrt{H^2} = \sqrt{H^2} J$. Fazendo a transformação

$$\begin{aligned} U_1 H U_1^\star &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + J \lambda) H \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - J \lambda) = \frac{1}{2} (H + J \lambda H) (1 - J \lambda) \\ &= \frac{1}{2} (H - H J \lambda + J \lambda H - J \lambda H J \lambda) = \frac{1}{2} (2 J \lambda H) \\ &= J \sqrt{H^2} . \end{aligned} \quad (4.46)$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} U_2 J \sqrt{H^2} U_2^\star &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \beta J) J \sqrt{H^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \beta J) = \frac{1}{2} (J \sqrt{H^2} + \beta \sqrt{H^2}) (1 - \beta J) \\ &= \frac{1}{2} (J \sqrt{H^2} - J \sqrt{H^2} \beta J + \beta \sqrt{H^2} - \beta \sqrt{H^2} \beta J) \\ &= J \frac{1}{2} (\sqrt{H^2} - \beta \sqrt{H^2} \beta) + \beta \frac{1}{2} (\sqrt{H^2} + \beta \sqrt{H^2} \beta) . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Portanto,

$$H^{tr} = U H U^\star = \beta \left[\sqrt{H^2} \right]_{(\text{PAR})} + J \left[\sqrt{H^2} \right]_{(\text{ÍMPAR})} . \quad (4.48)$$

onde os operadores pares e ímpares são definidos nas relações de (4.6). As quantidades $\sqrt{H^2}_{(\text{PAR})}$ e $\sqrt{H^2}_{(\text{ÍMPAR})}$ representam o Hamiltoniano ao quadrado *par* e *ímpar*, respectivamente. Se $[H^2, \beta] = 0$, o Hamiltoniano é par, e se $\{H^2, \beta\} = 0$, o mesmo é ímpar. A equação (4.48) representa a TFWWE.

O procedimento utilizado para a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata também pode ser esquematizado da seguinte maneira:

1. Primeiro, verifica-se a condição $\{J, H\}$.
2. Deve-se calcular H^2 .
3. Identificar corretamente os termos *pares* e *ímpares* e multiplicá-los por β ou J , respectivamente, ou seja, utilizar a equação (4.48)

Dessa forma, a operação para calcular $\sqrt{H^2}$ pode ser realizada em diferentes abordagens. Uma opção mais simples é escrever $H = H_0 + H_{int}$. As constantes de acoplamento dos termos de interação estão presentes em H_{int} . Essa é, de fato, a principal diferença entre a TFW usual e a TFWE. A liberdade na escolha do parâmetro de expansão pode dar resultados com uma forma analítica mais familiar para as expressões finais. Esse fato, em geral, facilita a realização da análise física. O Hamiltoniano livre é denotado por H_0 e a interação por H_{int} . Ambos os termos na equação (4.48) são termos pares e, por essa razão, a quantidade H^{tr} não mistura os componentes do espinor.

5 TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA PARA TERMOS QUE VIOLAM AS SIMETRIAS CPT/LORENTZ

Neste capítulo serão utilizados todos os conceitos que foram trabalhados até o momento. A finalidade é obter o Hamiltoniano para os diferentes casos que descrevem a interação do férmion de Dirac com os campos externos que violam CPT/Lorentz, e então, executar a TFWÉ. Ao final desse capítulo, será apresentada uma nova formulação para estudar todos os casos para os quais a transformação exata não é permitida, através de uma generalização do método e o desenvolvimento de um novo operador involução.

5.1 A TFWÉ PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ - O CASO DO CAMPO DE TORÇÃO

Nesta seção, será considerada detalhadamente a TFWÉ para um dos termos que está presente na tabela (1) (55) e que admite a transformação. Será desenvolvida a transformação exata apenas para o caso do campo de torção. O procedimento seguido aqui está presente em (38).

O Hamiltoniano correspondente é dado pela seguinte relação

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + \eta_1 \gamma_5 S_0 + mc^2 \beta. \quad (5.1)$$

Aqui são utilizadas as notações para os campos externos: $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$, para o campo eletromagnético, e $S_\mu = (S_0, \vec{S})$, para o campo de torção. Serão considerados os campos magnéticos e de torção que só podem variar com o tempo, mas não dependem das coordenadas espaciais. Como se pode verificar, o Hamiltoniano descrito por (5.1) obedece à relação $JH + HJ = 0$. Essa relação é uma condição para executar TFWÉ (36, 37, 61), apresentada em (4.41). O termo J , como já foi dito, é conhecido como o operador de involução. A forma explícita do operador involução é a utilizada em (55), onde

$$J = i\gamma^5 \beta. \quad (5.2)$$

Por uma questão de completeza, mencionamos que essa relação (5.1) não contém um termo do tipo $\eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5$ que representa a interação do campo de Dirac com a parte de torção vetorial. É possível notar que, com este termo adicional, o Hamiltoniano correspondente não obedeceria à relação de anticommutação acima mencionada.

Além disso, devido à fraqueza do campo de torção, o real interesse é na ordem linear da mesma, enquanto, o campo magnético deve ser tratado normalmente. Por esta razão, considera-se que S_0 é constante e é o único termo não nulo de S_μ .

5.1.1 TFWÉ para parte escalar da Torção

Agora, de acordo com a prescriçãõ padrão (36), o próximo passo é obter H^2 . Os cálculos diretos resultam em

$$H^2 = (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + m^2 c^4 + \hbar c e \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - 2(\eta_1)^2 (S_0)^2. \quad (5.3)$$

Para obter o Hamiltoniano transformado H^{tr} , H^2 é reescrito como $H^2 = A^2 + B$ em que A são agrupados os termos dependentes da massa em H^2 , e B , os que não dependem da massa. Nesse caso, $A = mc^2$. Então, procura-se um operador K na forma

$$K = A + \frac{1}{A} K_1 + K_1 \frac{1}{A} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{A^2}\right), \quad (5.4)$$

de tal forma que $K^2 = A^2$. Finalmente, usando as equações (4.48) e (5.3), obtém-se

$$H^{tr} = \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2} (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + \beta \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \beta \frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2. \quad (5.5)$$

O próximo passo é apresentar o férmion de Dirac na forma de um bi-espinor (descrito por φ e χ), conforme foi apresentado em (2.43) para a partícula livre e seguir com um procedimento parecido, para derivar o Hamiltoniano. Usando o fato de que o Hamiltoniano transformado seja uma função par, então,

$$H_\varphi^{tr} = \frac{1}{2m} (\vec{\Pi})^2 + B_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{Q},$$

onde

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{\eta_1}{c} S_0 \vec{\sigma}, \quad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2, \quad \vec{Q} = \frac{\hbar e}{2mc} \vec{B}. \quad (5.6)$$

As expressões acima são exatamente as mesmas derivadas em (62) e em (63) através da transformação perturbativa usual de Foldy-Wouthuysen.

5.1.2 Equações de Movimento com a parte escalar da Torção

Pode-se também realizar a quantização canônica da teoria de maneira semelhante a (62). Para fazer isso, são introduzidos os operadores de posição \hat{x}_i , momento \hat{p}_i e spin $\hat{\sigma}_i$, bem como as seguintes relações de comutação, que são satisfeitas para instantes de tempos iguais,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{\sigma}_j] = [\hat{p}_i, \hat{\sigma}_j] = 0, \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k. \quad (5.7)$$

O operador Hamiltoniano \hat{H} que corresponde à energia (5.6) é facilmente construído em termos dos operadores $\hat{x}_i, \hat{p}_i, \hat{\sigma}_i$, e então, esses operadores fornecem as equações de movimento

$$i\hbar \frac{d\hat{x}_i}{dt} = [\hat{x}_i, H], \quad i\hbar \frac{d\hat{p}_i}{dt} = [\hat{p}_i, H], \quad i\hbar \frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = [\hat{\sigma}_i, H]. \quad (5.8)$$

Os cálculos diretos levam às equações¹

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i S_0 \right) = v_i, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{m} \left(p^j - \frac{e}{c} A^j - \frac{\eta_1}{c} \sigma^j S_0 \right) \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \\ \frac{d\sigma_i}{dt} &= [\vec{R} \times \vec{\sigma}]_i, \quad \vec{R} = \frac{2\eta_1}{\hbar} \left[-\frac{1}{c} \vec{v} S_0 \right] + \frac{e}{mc} \vec{B}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Usando as duas primeiras equações de (5.9), é possível obter

$$m \frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i \frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\eta_1}{c} S_0 \frac{d\sigma_i}{dt}.\tag{5.10}$$

Esta equação é a correção para a expressão conhecida da força de Lorentz. Porém, não é mostrada uma interação explícita entre a torção e o campo eletromagnético (como para as ondas gravitacionais, por exemplo, (55)), os dois últimos termos no lado direito da equação mostram a possível interação da parte escalar do campo de torção com a partícula de Dirac.

5.2 A TFWÉ PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ

Agora, será desenvolvida a TFWÉ para toda a teoria apresentada no capítulo (3). O procedimento seguido aqui detalhadamente está presente em (39).

5.2.1 TFWÉ para termos que violam as simetrias CPT/Lorentz

Para realizar a TFWÉ, é necessário que o Hamiltoniano admita o operador involução (36, 37, 61, 64) e obedeça a relação (4.41). É importante notar que a forma explícita do operador involução é a utilizada em (55) para estabelecer os critérios para executar a TFWÉ para os termos que violam CPT/Lorentz, e foi apresentada em (5.2), onde $J = i\gamma^5\beta$.

A forma mais geral da equação (3.10) que admite o operador involução é apresentada em (55). Em tal trabalho, os autores apresentam a tabela completa (1) que contém os 80 casos de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação modificada de Dirac que admite TFWÉ. Seguindo o artigo (55), é considerado aqui o Hamiltoniano completo com tais termos que violam CPT/Lorentz e admitem a TFWÉ,

$$\begin{aligned}H &= m \left(\gamma^0 - \gamma^0 c_{00} + i\gamma^5 f_0 + \gamma^i \gamma^5 d_{i0} + \frac{i}{2} \alpha^i g_{i00} \right) + \bar{P}_l \left(\gamma^0 e^l + \alpha_i c^{il} - \gamma^5 d^{0l} + \alpha^l \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \gamma^0 \sigma^{ij} g_{ijl} - \alpha^l c^{00} + i\gamma^5 \gamma^l f_0 + \gamma^i \gamma^5 \gamma^l d_{i0} + \frac{i}{2} \alpha^i \gamma^l g_{i00} \right) \\ &+ \alpha^l a_l - \gamma^5 b_0 + \frac{1}{2} \gamma^0 \sigma^{ij} H_{ij}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

¹ Neste ponto, podem ser omitidos todos os termos que se anulam quando $\hbar \rightarrow 0$.

Os termos de interação de segunda ordem são muito pequenos e, por essa razão, podem ser negligenciados nesta última equação e assim por diante. Calcula-se o Hamiltoniano ao quadrado como um primeiro passo para se obter uma transformação exata e adota-se a quantidade \bar{H}^2 para representar esse Hamiltoniano. É conveniente escrever o \bar{H}^2 na seguinte forma

$$\bar{H}^2 = (1 + \bar{A})[(\delta_{ij} + B_{ij})\bar{P}^i + \bar{C}_j]^2 + \bar{D} + m^2, \quad (5.12)$$

onde são definidos os seguintes termos

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -4d_{i0}\gamma^5\alpha^i - 4if_0\gamma^0\gamma^5 + ig_{i00}\gamma^0\alpha^i, \\ \bar{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\left[-2c_{ij} - 2\gamma^5\alpha^id_{0j} - 2\gamma^5\alpha^id_{j0} - 2\gamma^0\gamma^5\epsilon^{lmi}g_{lmj} + 2i\gamma^0\gamma^5g_{tij}\Sigma^t + \frac{i}{3}g_{i00}\gamma^0\alpha_j\right], \\ \bar{C}_j &= \frac{1}{2}\left[2me_j + m\sigma^{lm}g_{lmj} - 2img_{j00} - 4m\gamma^0\gamma^5d_{j0} - 2a_j - 2\gamma^5\alpha^jb_0 - 2H_{lm}\epsilon^{lmj}\gamma^0\gamma^5 \right. \\ &\quad \left. - mg_{i00}\epsilon^{ijk}\Sigma_k - 2im\gamma^0\gamma^5d_{m0}\epsilon^{jmk}\Sigma_k + 2i\gamma^0\gamma^5H_{mj}\Sigma^m\right], \\ \bar{D} &= -2m^2c_{00} - 2m^2\gamma^5\alpha^id_{i0} + m\sigma^{ij}H_{ij} \\ &\quad + \left(1 - 2id_{i0}\gamma^5\alpha^i - 2if_0\gamma^0\gamma^5 + \frac{i}{3}g_{i00}\gamma^5\alpha^i\right)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Essas notações são utilizadas para simplificar a álgebra e facilitar a interpretação dos resultados. Nesta forma, é possível, por exemplo, identificar os termos que estão ligados à parte cinética do Hamiltoniano.

De acordo com a TFWE, deve-se tomar a raiz quadrada dos termos pares na equação (5.13) e multiplicá-los por β . Por outro lado, a raiz quadrada dos termos ímpares deve ser multiplicada pelo operador J apresentado em (5.2). Assim, um novo ponto de vista é apresentado para realizar a transformação exata. Observe que é possível mostrar que a equação (4.48) é completamente equivalente a relação

$$H^{tr} = J\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} - \beta\sqrt{H^2}\beta) + \beta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} + \beta\sqrt{H^2}\beta). \quad (5.14)$$

Esta última relação nos permite realizar a TFWE onde muitos termos ímpares estão presentes. De acordo com a equação (5.14), é possível tomar como primeiro passo, a raiz quadrada do hamiltoniano completo e como um segundo passo, identificar e separar termos pares e ímpares.

Para calcular a raiz quadrada, será considerado neste caso que $m^2 \gg \bar{H}^2$, na equação (5.12), assim como uma expansão. Essas considerações permitem afirmar que a seguinte equação

$$H^2 = m^2\left(1 + \frac{\bar{H}^2}{m^2}\right) \quad (5.15)$$

pode ser escrita como

$$\sqrt{H^2} = m\left(1 + \frac{\bar{H}^2}{2m^2}\right), \quad (5.16)$$

onde \bar{H}^2 é dado por relação (5.12). Após alguma álgebra, o Hamiltoniano pode ser apresentado da seguinte maneira

$$H^{tr} = \beta m + \frac{1}{2m} \left\{ (1 + A^{tr}) [(\delta_{ij} + B_{ij}^{tr}) \bar{P}^i + C_j^{tr}]^2 + D^{tr} \right\}, \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} A^{tr} &= -4\beta \Sigma^i d_{i0} + 4f_0 + \Sigma^i g_{i00}, \\ \bar{B}_{ij}^{tr} &= \frac{1}{2} \left[-2\beta c_{ij} + 2\beta \Sigma^i d_{0j} + 2\beta \Sigma^i d_{j0} - 2i\epsilon^{lmi} g_{lmj} - 2g_{tij} \Sigma^t + \frac{1}{3} g_{i00} \Sigma_j \right], \\ \bar{C}_j^{tr} &= \frac{1}{2} \left[2m\beta e_j + m\beta g_{lmj} \epsilon^{lmk} \Sigma_k - 4imd_{j0} - 2\beta a_j + 2\beta \Sigma^j b_0 - 2i\epsilon^{lmj} H_{lm} \right. \\ &\quad \left. - m\beta \epsilon^{ljk} \Sigma_k g_{l00} + 2m\epsilon^{jmk} \Sigma_k d_{m0} - 2im\beta g_{j00} - 2\Sigma^m H_{mj} \right], \\ \bar{D}^{tr} &= -2m^2 \beta c_{00} + 2m^2 \beta \Sigma^i d_{i0} + m\beta \epsilon^{ijk} \Sigma_k H_{ij} \\ &\quad + \left[\beta(1 + 2i\Sigma^i d_{i0}) + 2f_0 + \frac{1}{3} \Sigma^i g_{i00} \right] \frac{i\hbar e}{mc} \Sigma_k B^k. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A equação (5.17) apresenta uma estrutura conhecida. De acordo com esta equação, o primeiro termo corresponde à energia de repouso. O segundo representa o termo cinético. É um termo do tipo $(\mathbf{P} - e\mathbf{A})$ e pode-se imaginar a quantidade C_j^{tr} (na situação em que $B_{ij}^{tr} = 0$), como sendo um termo análogo de uma transformação de calibre para \bar{P}^i . A quantidade $(1 + A^{tr})$ pode ser vista como uma correção para a forma geral da energia cinética. O último termo na equação (5.17) corresponde a uma interação externa.

5.2.2 Equações de Movimento com termos que violam CPT/Lorentz

Os cálculos das equações de movimento serão executados a seguir. Começando, considerando o espinor em duas componentes, (2.43), e escrevendo a equação de Dirac na forma de Schrödinger, (2.19); após alguns cálculos, pode-se obter o seguinte Hamiltoniano para ϕ

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ (1 + A) [(\delta_{ij} + B_{ij}) \bar{P}^i + C_j]^2 + D \right\}, \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= -4\sigma^i d_{i0} + 4f_0 + \sigma^i g_{i00}, \\ B_{ij} &= -c_{ij} + \sigma^i d_{0j} + \sigma^i d_{j0} - i\epsilon^{lmi} g_{lmj} - g_{tij} \sigma^t + \frac{1}{3} g_{i00} \sigma_j, \\ C_j &= m e_j + \frac{1}{2} m g_{lmj} \epsilon^{lmk} \sigma_k - 2imd_{j0} - a_j + \sigma^j b_0 - i\epsilon^{lmj} H_{lm} \\ &\quad - \frac{1}{2} m \epsilon^{ljk} \sigma_k g_{l00} + m \epsilon^{jmk} \sigma_k d_{m0} - img_{j00} - \sigma^m H_{mj}, \\ D &= -2m^2 c_{00} + 2m^2 \sigma^i d_{i0} + m \epsilon^{ijk} \sigma_k H_{ij} \\ &\quad + \left[1 + 2i\sigma^i d_{i0} + 2f_0 + \frac{1}{3} \sigma^i g_{i00} \right] \frac{i\hbar e}{mc} \sigma_k B^k. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para quantizar o Hamiltoniano (5.19) e escrever as equações semi-clássicas de movimento, as relações (5.8) serão consideradas e então, obtém-se

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{1}{m}(1+A)[(\delta_{ij} + 2B_{[ij]})\bar{P}^j + C_i], \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_i}{dt} &= \frac{1}{2m} \left\{ -\frac{\partial A}{\partial x_i} [(\delta_{kj} + B_{kj})\bar{P}^k + C_j]^2 \right. \\ &\quad \left. - (1+A) \left[2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} [(\delta^{lj} + B^{lj})\bar{P}_l + C_j] \right) [(\delta_{kj} + B_{kj})\bar{P}^k + C_j] - \frac{\partial D}{\partial x^i} \right] \right\} \\ &= e v_j \frac{\partial A^j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (5.22)$$

e

$$i\hbar \frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} R_j \sigma_k + C_{ij} \sigma^j, \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} R_j &= (-4imd_{j0} + img_{j00})v^2 + \left(2imd_{0l}\delta_{jm} + 2imd_{l0}\delta_{jm} - 2img_{mlj} + \frac{2}{3}img_{l00}\delta_{jm} \right) v_l v_m \\ &\quad + (2ib_0\delta_{ij} + 2iH_{ij})v^i + 2imd_{j0} - \frac{\hbar e}{m^2 c}(1 + 2f_0)B_j \end{aligned} \quad (5.24)$$

e

$$C_{ij} = (2img_{kij} + img_{i00}\delta_{jk} + 2imd_{i0}\delta_{jk} - img_{k00}\delta_{ij} - 2imd_{k0}\delta_{ij})v^k + 2iH_{ij}. \quad (5.25)$$

Derivando a equação (5.21) em relação ao tempo, pode-se obter a força generalizada de Lorentz

$$m \frac{dv_i}{dt} = \frac{d\lambda_{ij}}{dt} m v^j + \frac{dC_i}{dt} + (\delta_{ij} + \lambda_{ij})[-e \vec{E} + e \vec{v} \times \vec{B}]^j, \quad (5.26)$$

onde

$$\lambda_{ij} = A \delta_{ij} + 2B_{[ij]} \quad (5.27)$$

e os termos A e B_{ij} são descritos pelas relações em (5.20). A equação (5.26) representa a força de Lorentz corrigida pelos termos que violam CPT/Lorentz. Vale ressaltar que, se as quantidades c_{00} , d_{i0} , c_{ij} , g_{lji} e g_{i00} forem nulas, pode-se obter a força de Lorentz como um caso particular de equação (5.26). O primeiro termo em tal equação representa um termo de arraste, uma vez que é proporcional à velocidade. O segundo está relacionado a uma força externa e o último é uma correção para o termo conhecido $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

5.3 A TFE PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ - O CASO DA TORÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Nesta seção, será considerada a ação combinada de torção e um forte campo magnético no campo de um espinor maciço e da partícula correspondente. Nesse caso, o

Hamiltoniano não admite a TFWÉ da maneira usual. Um método que permita a realização da TFWÉ será discutido, bem como a obtenção de alguns resultados físicos desta situação. Começa-se com a escolha correta do operador involução.

O método é usado com o campo de torção, mas pode ser generalizado de forma direta para outros termos. Enfatiza-se que o próprio método é o principal resultado aqui, no sentido de que abre a janela para a possibilidade de realizar a TFWÉ para alguns casos até agora, não contemplados pela literatura e extraídos de suas informações físicas. Além disso, serão seguidos os passos de (40) com todos os detalhes explicitados.

5.3.1 Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata

Apresenta-se aqui uma breve revisão sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata (TFWSE) (55, 65). Inicialmente, considerando uma partícula de spin-1/2 em campos externos de torção e eletromagnético. Os campos magnético e de torção só podem variar com o tempo, mas não dependem das coordenadas espaciais. O Hamiltoniano a ser trabalhado é escrito da seguinte forma

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5 + e\Phi + \eta_1 \gamma_5 S_0 + mc^2 \beta. \quad (5.28)$$

Aqui, serão adotadas as mesmas notações para o campo eletromagnético, $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$, e para o campo de torção, $S_\mu = (S_0, \vec{S})$. Em caso de campo magnético constante, pode-se definir $\Phi = 0$. Tais notações estão descritas em (41) para as matrizes de Dirac, em que a matriz γ^0 é β .

Somente àquelas teorias em que o Hamiltoniano obedece à relação (4.41), $JH + HJ = 0$, permitem executar a TFWÉ (36, 37, 61, 64). Sendo que J , o operador involução, possui a forma usual presente na literatura e apresentada em (5.2).

Analisando diretamente o Hamiltoniano (5.28), é possível perceber que o termo $\eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5$ é o único que não satisfaz a condição (4.41). Deste ponto de vista, uma conclusão natural é que não seria possível realizar a TFWÉ quando se leva em consideração o campo de torção no Hamiltoniano da teoria. No entanto, existe uma consideração possível que modifica esse cenário, em algum sentido (veja, por exemplo, (55) e referências citadas). Então, fazendo uma modificação *ad hoc* no termo comentado acima, que o mesmo deve ser multiplicado pela matriz β . Observa-se que tal modificação satisfaz a condição (4.41) e agora a TFWÉ é perfeitamente possível². A motivação para a realização do procedimento descrito anteriormente é que depois de desenvolver o Hamiltoniano final, o mesmo apresentará uma estrutura em blocos diagonal. O interesse é somente no bloco superior do Hamiltoniano que é par (após a transformação) para fazer a análise física. Pelo menos em primeira ordem em $1/m$, não importa se esse termo está multiplicado por β ou não, visto que esta matriz possui a forma (2.8) e o bloco superior da mesma é a

² Na ordem linear no campo de torção, um β extra não tem efeito.

matriz unitária. Com tal resultado chegamos ao que pode ser denominado como TFWSE, pois essa transformação é exata em parte dos campos externos e linear nos outros campos. Portanto, o Hamiltoniano possui a forma

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5 \beta + \eta_1 \gamma_5 S_0 + mc^2 \beta. \quad (5.29)$$

De acordo com a TFWSE padrão (36, 39), o próximo passo é a obtenção de H^2 . Os cálculos diretos dão o resultado

$$\begin{aligned} H^2 &= (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + m^2 c^4 + 2\eta_1 mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} \\ &- (\eta_1)^2 (\vec{S})^2 - \hbar ce \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - 2(\eta_1)^2 (S_0)^2 + i\eta_1 \gamma_5 \beta \vec{\Sigma} \cdot [\vec{S} \times (c\vec{p} - e\vec{A})] \end{aligned} \quad (5.30)$$

O último termo nesta equação se transforma (sob a paridade) de uma maneira diferente em comparação com os outros termos no Hamiltoniano. No entanto, não há argumentos físicos razoáveis que permitem supor que $\vec{\Sigma} \cdot [\vec{S} \times (c\vec{p} - e\vec{A})] = 0$. Assim, a presença dele parece, de certa forma natural, visto que foi utilizado o procedimento artificial em (5.28). Ao mesmo tempo, se tal termo não for considerado, o restante é exatamente o Hamiltoniano que vem da TFW perturbativa usual com torção (63). Uma vantagem óbvia do método presente é a grande simplicidade técnica comparada com a do método perturbativo.

A partir deste ponto, o próximo passo é realizar a transformação exata. Este procedimento não será descrito em detalhes aqui (o procedimento padrão é descrito em (37) e (55)). O Hamiltoniano transformado pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} H^{tr} &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2} (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + \beta \eta_1 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} \\ &- \beta \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \beta \frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2 + i\beta \eta_1 \gamma_5 \beta \vec{\Sigma} \cdot [\vec{S} \times (c\vec{p} - e\vec{A})]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Agora e assim por diante denota-se os termos com o índice “tr” como os transformados e esses termos pertencem ao Hamiltoniano transformado final. Considerando o bi-espinor (2.43) e escrevendo a equação de Dirac na forma de Schrödinger, o Hamiltoniano transformado para φ é

$$H_\varphi^{tr} = \frac{1}{2m} (\vec{\Pi})^2 + B_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{Q}, \quad (5.32)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{\eta_1}{c} S_0 \vec{\sigma}, \quad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2, \\ \vec{Q} &= \eta_1 \vec{S} - \frac{\hbar e}{2mc} \vec{B} + \frac{\eta_1}{mc} \vec{S} \times (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}). \end{aligned}$$

A quantização canônica de (5.32) fornece as equações de movimento (quasi)clássicas

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i S_0 \right) + \frac{\eta_1}{mc} \left[\vec{\sigma} \times \vec{S} \right]_i = v_i; \quad (5.33)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{m} \left(p^j - \frac{e}{c} A^j - \frac{\eta_1}{c} \sigma^j S_0 \right) \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \frac{\eta_1}{mc} \left[\vec{\sigma} \times \vec{S} \right]^j \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i}; \quad (5.34)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \left[\vec{R} \times \vec{\sigma} \right]_i, \quad R_j = \frac{2\eta_1}{\hbar} \left[S_j - \frac{1}{c} v_j S_0 + \left(S \times \frac{\vec{v}}{c} \right)_j + \frac{2\eta_1}{\hbar} S_0 \left(\vec{S} \times \vec{\sigma} \right)_j \right] + \frac{e}{mc} B_j. \quad (5.35)$$

Combinando esta última equação, a força de Lorentz é escrita como

$$m \frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \left[\vec{v} \times \vec{B} \right]_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i \frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\eta_1}{c} \frac{\partial (\vec{S} \times \vec{\sigma})_i}{\partial t}. \quad (5.36)$$

Com base no que foi explicado anteriormente, pode-se supor que a abordagem da TFWSE não é consistente. Por outro lado, a TFWSE é realizada em (65) para vários casos e os resultados estão de acordo com a TFE usual. Embora a abordagem em si pareça não ter inconsistências, ela falha, no sentido prático do caso aqui estudado. Para obter uma melhor perspectiva sobre esta situação, é apresentada na próxima seção uma nova proposta para realizar a transformação exata para o caso de torção espacial.

5.3.2 A TFE, uma Outra Proposta

Apresenta-se aqui uma abordagem que permite trabalhar com a TFE usual para o campo de torção. A ideia principal é considerar uma forma de operador involução mais geral e não a utilizada na seção anterior. Deve-se considerar a estrutura do operador de involução mais geral (61, 66)

$$J = M \times \hat{F}, \quad (5.37)$$

onde M e \hat{F} são operadores que atuam nos espaços de matrizes e funções (campos externos na ação, por exemplo), respectivamente. Com esta suposição, a forma geral do hamiltoniano (5.28) não é alterada. O operador involução com o qual será trabalhado tem a seguinte forma explícita

$$J = i\gamma^5 \beta \hat{T}, \quad (5.38)$$

onde \hat{T} é o operador de reversão temporal, e \hat{P} o operador de paridade.

Pode-se encontrar na introdução de (67) uma lista de referências ao teorema de CPT. É importante lembrar algumas relações básicas para a reflexão de paridade \hat{P} e reversão de tempo \hat{T} que são importantes neste trabalho para quadrivetores. O importante aqui é levar em consideração como os vetores e os pseudo-vetores respondem à ação desses operadores. O ponto principal é que, sob a transformação em T , apenas a componente de tempo do quadrivetor muda o sinal e para a transformação em P , a parte vetorial é afetada. Para um pseudo-vetor, como S_μ , a situação é que se $x'_i \rightarrow -x$ (paridade), a parte de S_0 muda de sinal, e se $t' \rightarrow -t$, a parte vetorial muda de sinal (68). Como deveria ser, uma vez que não há termos que violam a simetria C deste Hamiltoniano, para este caso, a transformação PT dará a covariância do Hamiltoniano.

Portanto, o que está sendo proposto aqui é que a nova abordagem considerada é um método para encontrar a forma correta do operador involução que permite que o método da TFWÉ seja aplicado em alguns casos que não seriam possíveis. Aqui, o operador involução (5.38), que tem a mesma forma, por exemplo, em (61), não restringe a forma do campo externo analisado, como foi feito para o vetor de potencial eletromagnético no trabalho citado. A ideia aqui é aplicada apenas para possíveis termos que violam as simetrias CPT e Lorentz. Deve-se saber, a partir da literatura, qual tipo de simetria que o termo estudado viola, antes dos cálculos. Neste caso, é a paridade e o tempo, para a torção, como exemplo. Então, o próximo passo é propor uma forma para o operador \hat{F} in (5.37) que é \hat{T} , para esse caso.

É possível observar agora que a relação de comutação (4.41) é obedecida, quando se considera a relação (5.38) e o Hamiltoniano do sistema apresentado em (5.28). Por esse motivo, a TFWÉ é completamente possível de ser realizada. Vale ressaltar que em um caso geral, se alguém quer realizar a transformação exata ou para qualquer termo externo, o que precisa ser feito é encontrar a forma explícita para o operador \hat{F} , que será feito para mostrar a consistência do método.

Neste ponto, é possível realizar a TFWÉ. O procedimento que se utiliza é o padrão, que está bem descrito em (37, 39, 55). O Hamiltoniano transformado, para o espinor de Dirac, é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} H^{tr} &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2} (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0 - \eta_1 \gamma_5 \vec{S})^2 + \beta \eta_1 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} \\ &- \beta \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \beta \frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2 + \beta \frac{(\eta_1)^2}{2mc^2} (\vec{S})^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Observa-se assim que esta última equação é completamente livre de termos que violam a invariância no tempo. No entanto, uma comparação entre as equações (5.31) e (5.39) mostra que o Hamiltoniano descrito por (5.39) apresenta uma contribuição do vetor de torção na parte cinética.

5.3.3 Equações de Movimento com a Torção

Considerando o bi-espinor e conforme explicado na seção (5.3.1), o próximo passo é escrever a equação de Dirac na forma de Schrödinger $i\hbar \partial_t \psi = H\psi$. a partir de cálculos diretos, pode-se escrever o Hamiltoniano para φ como

$$H_\varphi^{tr} = \frac{1}{2m} (\vec{\Pi})^2 + B_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{Q}, \quad (5.40)$$

onde

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{\eta_1}{c} S_0 \vec{\sigma} - \frac{\eta_1}{c} \sigma_5 \vec{S}, \quad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2} (S_0)^2 + \frac{(\eta_1)^2}{2mc^2} (\vec{S})^2, \quad ,$$

$$\vec{Q} = \eta_1 \vec{S} - \frac{\hbar e}{2mc} \vec{B}, \quad (5.41)$$

onde $\sigma_5 = (1/6) \varepsilon^{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k$ (37). As expressões acima não são exatamente as mesmas derivadas em (62) e (63) através da TFW perturbativa usual. A diferença básica é o termo $\sigma_5 \vec{S}$. A aparência deste novo termo baseia-se na vantagem de usar a TFWSE ao invés da TFW³.

É importante notar que a presença de termos do tipo $\vec{S} \cdot \vec{B}$ no Hamiltoniano transformado (5.40) está relacionada à possibilidade de considerar testes experimentais para o campo de torção usando ressonância magnética, como foi explicado em (62). No entanto, é a comparação direta entre as equações (5.32) e (5.40) que mostra duas diferenças entre a abordagem da TFWSE e o método aqui apresentado. O primeiro representa uma nova contribuição na parte cinética de (5.40) representada por um termo⁴ do tipo $\sigma_5 \vec{S}$. O segundo é a ausência, no Hamiltoniano (5.40), de um termo que viola o tempo.

Para quantizar o Hamiltoniano (5.41) e escrever as equações de movimento semi-clássicas (após o cálculo, faz $\hbar \rightarrow 0$). Considerando as relações de comutação (5.7), então,

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i S_0 - \frac{\eta_1}{c} \sigma_5 S_i \right) = v_i ; \quad (5.42)$$

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{\pi^j}{mc} \left(e \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \eta_1 S_0 \frac{\partial \sigma_j}{\partial x^i} + \eta_1 S_j \frac{\partial \sigma_5}{\partial x^i} \right) ; \quad (5.43)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = \left[\vec{R} \times \vec{\sigma} \right]_i , \quad (5.44)$$

onde

$$\pi^k = p^k - \frac{e}{c} A^k ; \quad R_j = 2 \frac{\eta_1}{\hbar} \left[S_j - \frac{1}{c} v_j S_0 \right] - \frac{e}{mc} B_j ; \quad (5.45)$$

e σ_5 é a matriz γ_5 na representação para o bi-espinor. E agora, derivando a equação (5.42),

$$m \frac{dv_i}{dt} = \left[\vec{v} \times \vec{C} \right]_i + \frac{d}{dt} (u_i) , \quad (5.46)$$

onde

$$C_k = -\frac{e}{c} B_k - \frac{\eta_1}{c} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} (S_0 \sigma^m + \sigma_5 S^m) \quad e \quad u_i = -\frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} (S_0 \sigma_i - \sigma_5 S_i) . \quad (5.47)$$

A última equação representa as correções para a força clássica de Lorentz que atua sobre a partícula de Dirac. Se considerar uma trajetória descrita por este férmio, é possível observar que os termos com S_μ podem oferecer correções para o caminho da partícula. Estes resultados estão de acordo com as equações de movimento conhecidas e apresentadas em (63).

Comparando os resultados para as equações de movimento, isto significa, neste caso, comparar a aproximação exata com a semi-exata, é possível ver algumas diferenças. Olhando um por um, é possível notar que os termos com S_i têm construção algébrica

³ Usando a transformação exata, o risco de eliminar alguns termos importantes é menor.

⁴ Observe que esse termo é novo com relação a TFW (63) e TFWSE (55).

diferente em (5.33) e (5.42). Mas, em ambas as equações eles têm o mesmo significado físico, uma vez que há matrizes de espinor em primeira ordem (o que importa para a abordagem fenomenológica). Considerações análogas podem ser realizadas para equações (5.34) e (5.43), em que a única diferença está nos termos com σ_i e S_i . Finalmente, as equações (5.35) e (5.44) não têm diferença se for verificado cuidadosamente. O termo de segunda ordem da torção em (5.35) foi considerado negligenciável em (5.44). O termo com o produto vetorial entre S_i e v_i é zero, pois se simplesmente for substituído v_i por (5.42) neste termo, pode-se ver que o termo com A_i tem o fator v/c^2 (está sendo trabalhado com o limite não-relativístico da teoria) e os outros contribuem apenas para a segunda ordem no campo de torção. O termo com a parte espacial pura do momento p_i não produzirá diferença física quando multiplicado pelos termos com torção, uma vez que cada um destes termos possui uma derivada de matrizes de spin em relação às coordenadas (não contribui para a trajetória da partícula, como pode ser visto nas equações (5.36) e (5.46)).

Outro ponto que deve ser enfatizado é a necessidade de extrair do Hamiltoniano exato transformado o *bound state* da teoria, a fim de propor possíveis testes experimentais. O *bound state* daria a possibilidade de usar o método apresentado na série de artigos (19, 47, 48, 50, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75) para encontrar outro possível teste experimental para o campo de torção usando esta teoria. Na próximo capítulo deste trabalho, serão apresentados alguns comentários e cálculos sobre esse assunto relevante.

5.4 A GENERALIZAÇÃO DA TFWÉ PARA A TEORIA DE DIRAC COM O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ

Nesta seção, será desenvolvida a TFWÉ para toda a teoria apresentada no capítulo (3), incluindo os termos que não estavam presentes na tabela (1), ou seja, para os blocos vazios que não permitiam a TFWÉ.

Como já foi mostrado, um dos critérios para se executar a TFWÉ é que os termos que violam CPT/Lorentz obedecem a relação (4.41). Analisando a tabela (1), é possível perceber que os blocos com células vazias são justamente aqueles termos que não admitem a TFWÉ e a forma do operador involução (5.2), até então, utilizado para a transformação. É, portanto, normal formular a seguinte questão: é possível mostrar que existe um operador involução para este caso na forma da equação (5.37)? O resultado deste procedimento é mostrado na tabela (2).

A tabela especifica todos os possíveis casos para os termos que violam CPT e Lorentz na equação de Dirac modificada que admitem a TFWÉ. O operador novo que foi construído deve apresentar a seguinte estrutura

$$J' = i\gamma^5 \beta CPT \quad ; \quad (5.48)$$

$$J'' = i\gamma^5 \beta \quad . \quad (5.49)$$

Tabela 2 – Antigos e Novos Coeficientes de Interação

	m	a_l	b_0	H^{lj}	m_5	b_l	a_0	$H^{0\mu}$
	$P_\nu^* e^\nu$	$P_\nu^* c^{l\nu}$	$P_\nu^* d^{0\nu}$	$P_\nu^* g^{lj\nu}$	$P_\nu^* f^\nu$	$P_\nu^* d^{l\nu}$	$P_\nu^* c^{0\nu}$	$P_\nu^* g^{0\mu\nu}$
		$\frac{P_l}{P_0}$					$\frac{P_0}{P_0}$	
γ^0	1	γ^l	$-\gamma^0\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{lj}$	$i\gamma_5$	$\gamma_5\gamma_l$	γ_0	$\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}$
c^{00}	$-\gamma^0$	$-\alpha^l$	γ^5	$-\frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{lj}$	$-i\gamma_0\gamma_5$	$\gamma_5\alpha_l$	-1	$-\frac{1}{2}\gamma_0\sigma^{0\mu}$
f^0	$i\gamma^5$	$i\gamma^5\gamma^l$	$i\gamma^0$	$\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{lj}$	-1	$i\gamma^l$	$i\gamma^5\gamma^0$	$\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{0\mu}$
d^{i0}	$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	α^i	$-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{lj}$	$i\gamma^i$	$\gamma^i\gamma^l$	$\gamma^5\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{0\mu}$
g^{i00}	$-\frac{i}{2}\alpha^i$	$-\frac{i}{2}\alpha^i\gamma^l$	$-\frac{i}{2}\gamma^i\gamma^5$	$-\frac{1}{4}\alpha^i\sigma^{lj}$	$\frac{1}{2}\alpha^i\gamma_5$	$-\frac{1}{2}\alpha^i\gamma_5\gamma_l$	$-\frac{i}{2}\alpha^i\gamma_0$	$-\frac{i}{4}\alpha^i\sigma^{0\mu}$
d^{00}	$-\gamma^0\gamma^5$	$\gamma^5\alpha^l$	-1	$\frac{1}{2}\gamma_5\gamma_0\sigma^{lj}$	$-i\gamma^0$	$-\alpha^l$	$-\gamma^5$	$-\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}\gamma^0\gamma^5$
e^0	-1	$-\gamma^l$	$-i\gamma^5\gamma^0$	$-\frac{1}{2}\sigma^{lj}$	$-i\gamma^5$	$-\gamma^5\gamma^l$	$-\gamma^0$	$-\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}$
c^{i0}	γ^i	$\gamma^i\gamma^l$	$\gamma^5\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{lj}$	$-i\gamma^i\gamma^5$	$i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	$-\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{0\mu}$
g^{ij0}	$-\frac{1}{2}\sigma^{ik}$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ik}\gamma^l$	$\frac{1}{2}\sigma^{ik}\gamma^0\gamma^5$	$-\frac{1}{4}\sigma^{ik}\sigma^{lj}$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5\gamma^l$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^0$	$-\frac{1}{4}\sigma^{ij}\sigma^{0\mu}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Então, o operador involução novo seria

$$J = J' \oplus J'' \quad . \quad (5.50)$$

Para se utilizar a tabela é necessário definir objetos matemáticos que são associados unicamente a esta tabela. Também é importante conhecer como cada um deles atua nesta tabela. Os novos objetos são \mathcal{O} , \mathcal{O}' , \mathcal{O}'' , \mathcal{O}''' , e os índices α e β são objetos usados apenas para localização de termos na tabela⁵.

O objetivo principal da tabela é mostrar que existe um operador involução para esse caso. Não importa o quão complexo ele seja, ele não terá influência na forma explícita das equações de movimento, já que ele não possui nenhuma interpretação física.

Definindo

$$J = i\gamma^5\beta\mathcal{O}^{\alpha\beta} \quad , \quad (5.51)$$

de tal forma que

$$\mathcal{O}^{\alpha\beta} = \left[C^{\mathcal{O}'_{ij}} P^{\mathcal{O}''_{ij}} T^{\mathcal{O}'''_{ij}} \right]^{\theta_{\alpha\beta}} \quad . \quad (5.52)$$

Na equação (5.51), o termo $\mathcal{O}^{\alpha\beta}$ define o operador a ser utilizado. Já o termo apresentado em (5.52), define cada componente do operador da equação anterior, onde \mathcal{O}'_{ij} , \mathcal{O}''_{ij} , \mathcal{O}'''_{ij} assumem apenas valores *zero* ou *um*, e são grandezas totalmente independentes entre si. Enquanto o termo $\theta_{\alpha\beta}$, estabelece em qual parte (região) da tabela o operador está atuando, sendo na parte antiga (aquela que já permitia a TFWE) ou na parte nova da tabela. Os índices α e β são utilizados para indicar a localização das células da tabela.

⁵ Não se deve confundir os índices α e β com índices de tensores. Eles podem assumir apenas os valores relacionados à quantidade de linhas (1 – 9) e colunas (1 – 8) presentes nesta tabela.

Observando a nova tabela percebe-se que existem *quatro* regiões diferentes contidas na mesma. Tais regiões são definidas pelas seguintes relações

$$\alpha = i - 5 \quad ; \quad \beta = j - 6 , \quad (5.53)$$

onde $i \neq 5$ e $j \neq 6$.

Desta maneira, o termo $\theta_{\alpha\beta}$ na equação (5.52) pode ser definido como

$$\theta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha \cdot \beta > 0 \quad . \\ 1 & , \text{ se } \alpha \cdot \beta < 0 \quad . \end{cases} \quad (5.54)$$

e o termo $\mathcal{O}^{\alpha\beta}$ na mesma equação é

$$\mathcal{O}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & , \text{ para } \theta_{\alpha\beta} = 0 \quad . \\ C^{\mathcal{O}'_{ij}} P^{\mathcal{O}''_{ij}} T^{\mathcal{O}'''_{ij}} & , \text{ para } \theta_{\alpha\beta} = 1 \quad . \end{cases} \quad (5.55)$$

Os termos contidos nas regiões *antigas* da tabela (2) são aqueles que a TFWÉ é permitida e foi realizada no trabalho (39). Já os termos nas regiões *novas* da mesma tabela, são novos e a construção do operador involução para a execução da TFWÉ segue a “*Tabela XVII*” em (16, 19) que identifica as propriedades dos operadores C , P e T para a violação de Lorentz em eletrodinâmica quântica (EDQ), conforme apresentado na tabela (3).

Tabela 3 – Propriedades dos operadores C , P e T para a violação de Lorentz em EDQ

<i>Coefficiente</i>	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, c_{jk}, (k_F)_{0j0k}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
a_0, e_0, f_j	-	+	+	-	-	+	-
H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}	-	+	-	-	+	-	+
H_{0j}, d_{00}, d_{jk}	-	-	+	+	-	-	+
a_j, e_j, f_0	-	-	-	+	+	+	-

Fonte: KOSTELECKY; LANE; 2011, p. 25.

A tabela (3) lista as propriedades em transformações de simetria discreta dos operadores que violam Lorentz na extensão mínima de EDQ (16). As sete transformações consideradas são a conjugação de carga C , a inversão de paridade P , a inversão temporal T e suas combinações CP , CT , PT e CPT . A primeira coluna especifica o operador indicando seu coeficiente correspondente. Cada uma das outras colunas diz respeito a uma das sete

transformações. Um operador *par* é indicado por um sinal *positivo* e um *ímpar* por um sinal *negativo*. A tabela contém oito linhas, uma para cada uma das oito combinações possíveis de sinais em C , P e T (16, 19). Os termos $(k_{AF})_\mu$ e $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ presentes na tabela são coeficientes para a violação de Lorentz no campo de fótons (16). A violação de CPT é determinada apenas por $(k_{AF})_\mu$, que tem dimensões de massa. E o coeficiente $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é adimensional, tem as propriedades de simetria do tensor de Riemann e é duplo-*traceless*.

Além disso, existem tabelas de dados para a violação de Lorentz e CPT (19) que são atualizadas frequentemente com resultados disponíveis na literatura, apresentado e compilando definições e propriedades. Tais tabelas compilam valores que são medidos e derivados de coeficientes para a violação de Lorentz e CPT na extensão de modelo padrão (*SME*), listando as sensibilidades máximas atingidas nos setores de matéria, fóton, neutrino e gravidade.

Em (19), são apresentadas 35 tabelas de dados reunidos da literatura existente até o presente momento. Alguns deles incluem resultados restritos à *SME* mínimo, outros limitam os coeficientes não-mínimos e alguns contêm dados envolvendo setores mínimos e não-mínimos. Cada uma dessas 35 tabelas de dados contém quatro colunas. A primeira coluna lista os coeficientes para a violação de CPT/Lorentz ou suas combinações relevantes. A segunda coluna contém as medidas e *bounds*, apresentados na mesma forma documentada na literatura. A terceira coluna contém um lembrete sucinto do contexto físico no qual o *bound* é extraído, enquanto a quarta coluna contém as citações de origem. O leitor é remetido para esta última para detalhes de procedimentos experimentais e teóricos, pressupostos subjacentes aos resultados, definições de notações não convencionais e outras informações relevantes. Os resultados deduzidos em bases teóricas são distinguidos daqueles obtidos através de medição experimental direta por um asterisco colocado após a citação.

Após essas considerações em relação ao novo operador involução, é possível realizar a TFWÉ para a tabela (2). O procedimento utilizado é o padrão que já foi descrito anteriormente, e pode ser verificado em (37, 39, 55). O Hamiltoniano completo com os termos que violam CPT/Lorentz e admitem a TFWÉ é

$$\begin{aligned}
H &= m\left(\gamma^0 - \gamma^0 c_{00} - e_0 - d_{j0}\gamma^5\gamma^j + \frac{1}{2}g_{ik0}\sigma^{ik}\right) \\
&+ P^k\left(-\alpha_k + 2d_{0k}\gamma^5 - c^{jk}\alpha^j + c_{00}\alpha_k + if_k\gamma^5\gamma^0 - 2g_{0jk}\gamma^0\sigma^{0j}\right. \\
&- 2c_{0k} + d_{jk}\gamma^5\alpha^j - d_{00}\gamma^5\alpha_k - e_k\gamma^0 + \frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{ij}g_{ijk} - ig_{i00}\gamma^k\alpha^i\left.)\right) \\
&+ a_j\alpha^j - b_0\gamma^5 + iH_{0j}\gamma^j + a_0 - b_j\gamma^5\alpha^j - \frac{1}{2}\gamma_0\sigma^{ij}H_{ij}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

O Hamiltoniano em (5.56) pode ser identificado na tabela (2) e está em concordância com o Hamiltoniano escrito em (76). Porém, este Hamiltoniano é um pouco mais geral, pois há um termo a mais.

Lembrando que os termos de interação de segunda ordem são muito pequenos e, por essa razão, podem ser negligenciados aqui também. Repetindo os passos executados na seção (5.2.1), e escrevendo o H^2 sob a forma de (5.12),

$$\bar{H}^2 = (1 + \bar{A})[(\delta_{ij} + B_{ij})\bar{P}^i + \bar{C}_j]^2 + \bar{D} + m^2,$$

onde são definidos os seguintes termos

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -2c_{00} - 2d_{00}\gamma^5 + 2ig_{i00}\gamma^0\alpha^i, \\ \bar{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\left[-8d_{0i}\gamma^5\alpha_j - 4c_{ij} + 8g_{0li}\gamma^0\epsilon^{jlm}\Sigma_m + 8c_{0i}\alpha_j + 4d_{ij}\gamma^5\right. \\ &\quad \left.+ 4g_{lmi}\epsilon^{lmj}\gamma^0\gamma^5 + 4ig_{ilj}\gamma^0\gamma^5\Sigma^l + 4ig_{i00}\gamma^0\alpha_j\right], \\ \bar{C}_j &= \frac{1}{2}\left[-8m\gamma^0c_{0j} + 4md_{ij}\gamma^0\gamma^5\alpha^i - 4md_{00}\gamma^0\gamma^5\alpha_j - 4me_j + 2mg_{klj}\sigma^{kl} - 4img_{j00}\right. \\ &\quad \left.- 4mg_{i00}\epsilon^{ijl}\Sigma_l + 4me_0\alpha_j + 4imd_{k0}\gamma^0\gamma^5\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 2mg_{i0}\epsilon^{ilj}\gamma^5 + 4a_j\right. \\ &\quad \left.+ 4b_0\gamma^5\alpha_j - 4H_{0k}\gamma^0\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 4a_0\alpha_j - 4b_j\gamma^5 - 4H_{kl}\epsilon^{klj}\gamma^0\gamma^5 + 4iH_{lj}\gamma^0\gamma^5\Sigma^l\right], \\ \bar{D} &= -2m^2c_{00} - 2m^2\gamma^0e_0 + 2m^2d_{j0} + m^2\gamma^0\sigma^{ik}g_{ik0} + 2m\gamma^0a_0 - 2m\gamma^0\gamma^5\alpha^jb_j - m\sigma^{ij}H_{ij} \\ &\quad + \left(1 + 2c_{00} - 2d_{00}\gamma^5 + 2ig_{i00}\gamma^0\alpha^i\right)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Após calcular a raiz quadrada através da equação (5.16), e alguma álgebra, o Hamiltoniano final transformado pode ser apresentado na forma de (5.17),

$$H^{tr} = \beta m + \frac{1}{2m} \left\{ (1 + A^{tr})[(\delta_{ij} + B_{ij}^{tr})\bar{P}^i + C_j^{tr}]^2 + D^{tr} \right\},$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}^{tr} &= -2\gamma^0c_{00} - 2i\gamma^0d_{00} + 2g_{i00}\Sigma^i, \\ \bar{B}_{ij}^{tr} &= \frac{1}{2}\left[8d_{0i}\gamma^0\Sigma_j - 4\gamma^0c_{ij} - 8g_{0li}\epsilon^{jlm}\Sigma_m - 8ic_{0i}\gamma^0\Sigma_j + 4i\gamma^0d_{ij}\right. \\ &\quad \left.+ 4ig_{lmi}\epsilon^{lmj} - 4g_{ilj}\Sigma^l + 4g_{i00}\Sigma^i\right], \\ \bar{C}_j^{tr} &= \frac{1}{2}\left[8mc_{0j} + 4md_{ij}\Sigma^i - 4md_{00}\Sigma_j - 4m\gamma^0e_j + 2mg_{klj}\gamma^0\epsilon^{klm}\Sigma_m - 4img_{j00}\gamma^0\right. \\ &\quad \left.- 4mg_{i00}\gamma^0\epsilon^{ijl}\Sigma_l - 4ime_0\gamma^0\Sigma_j - 4md_{k0}\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 2img_{i0}\epsilon^{ilj}\gamma^0 + 4\gamma^0a_j\right. \\ &\quad \left.- 4b_0\gamma^0\Sigma_j + 4H_{0k}\epsilon^{jkl}\Sigma_l + 4ia_0\gamma^0\Sigma_j - 4ib_j\gamma^0 - 4i\epsilon^{klj}H_{kl} - 4H_{lj}\Sigma^l\right], \\ \bar{D}^{tr} &= -2m^2\gamma^0c_{00} + 2m^2e_0 - 2m^2d_{j0}\gamma^0\Sigma^j - m^2g_{ik0}\epsilon^{ikl}\Sigma_l - 2ma_0 - 2mb_j\Sigma^j - m\gamma^0\epsilon^{ijl}H_{ij}\Sigma_l \\ &\quad + \gamma^0\left(1 + 2c_{00} + 2id_{00} + 2g_{i00}\gamma^0\Sigma^i\right)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k. \end{aligned} \quad (5.58)$$

A equação anterior foi escrita em uma estrutura conhecida. O primeiro termo desta equação corresponde à energia de repouso, e o segundo representa o termo cinético, em que há uma correção para a forma geral da energia cinética. Já o último termo nessa equação corresponde a uma interação externa.

6 TESTES CPT, UMA PERSPECTIVA

Apresenta-se neste capítulo uma breve perspectiva sobre testes experimentais, considerando o cenário completo da TFWE, incluindo todos os casos possíveis que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação de Dirac. Conforme explicado anteriormente, trabalha-se com o Hamiltoniano que é composto pela interação entre o espinor de Dirac e os campos externos.

Um quadro teórico consistente sobre os testes de violação de CPT/Lorentz (em sistemas atômico e de partículas) pode ser encontrado em (17, 70, 71, 72). Essa estrutura incorpora a violação de CPT/Lorentz usando a chamada extensão de modelo padrão (SME) (17) e a busca por novas assinaturas é possível. No entanto, este assunto é muito extenso e não seria possível abordar profundamente todo este tópico aqui.

Sabe-se que os sistemas da eletrodinâmica quântica são extremamente abundantes no âmbito dos testes de violação de CPT/Lorentz, uma vez que é sensível a energias muito baixas. Pode-se citar alguns exemplos de experimentos envolvendo experiências de física atômica como *Penning-Trap*, *Clock-Comparison*, *Pêndulo de Torção*, *Experiências com hidrogênio e anti-hidrogênio*, *Spin-Polarized Matter*, *Experimentos com Múon*, entre outros (ver as referências (69, 73, 74, 77, 78)). Cada um dos experimentos mencionados apresenta um *bound state* muito específico e a magnitude de tais limites possibilita determinar quais tipos de experimentos devem ser realizados (68).

Uma questão muito natural surge aqui. Existe um *bound state* associado à TFWE para uma teoria de Dirac relacionada aos termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz? Para responder a esta questão, será considerado o potencial de violação de Lorentz V , que obedece à seguinte relação (69)

$$V = -\tilde{b}_j \sigma_j, \quad (6.1)$$

onde σ representa as matrizes de spin. Após alguns cálculos, pode-se escrever o *bound* correspondente da seguinte maneira ¹

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2} \epsilon^{jlm} H_{lm} - md_{j0} - \left[1 + 2i\sigma^i d_{i0} + 2f_0 + \frac{1}{3} \sigma^i g_{i00} \right] \frac{i\hbar e}{2m^2 c} B_j. \quad (6.2)$$

O *bound* apresentado na última equação permite considerar a possibilidade de obter uma indicação de possíveis experiências atômicas (68). De fato, a magnitude do campo magnético desempenha um papel crucial na determinação de tais experimentos. No entanto, a análise direta da equação (6.2) para prever qual é a experiência mais apropriada não é direta.

¹ Note que o potencial de violação de Lorentz vem, naturalmente, da equação (5.20).

Como um exemplo deste procedimento, considera-se o seguinte Hamiltoniano obtido após a transformação de Foldy-Wouthuysen

$$H = m + \frac{p^2}{2m} + a_0 - mc_{00} + \left(-b_j + md_{j0} + \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}H_{kl} \right) \sigma^j + \left[-a_j + m(c_{0j} + c_{j0}) \right] \frac{p_j}{m}, \quad (6.3)$$

onde todos os termos na última equação foram definidos anteriormente. Este Hamiltoniano apresenta o *bound*

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}H_{kl} - m d_{j0}. \quad (6.4)$$

Esse *bound* é compatível com os experimentos do pêndulo de torção (79). Claramente, o resultado apresentado na equação (6.2) é mais geral que o apresentado na equação (6.4). Se for considerada a situação em que o campo magnético é nulo, é possível obter o *bound state* do experimento do pêndulo de torção, descrito por (6.4) como resultado particular. Observa-se também que o Hamiltoniano descrito pela equação (6.3) pode ser visto como um caso particular da equação (5.19).

Se a mesma abordagem for considerada, isto é, considerando os únicos termos de interação não nulos como sendo a_0 , c_{00} , b_j , d_{j0} , H_{kl} e c_{oj} , da equação (5.19), após algum cálculo, é possível obter a mesma estrutura que a observada na equação (6.3). Os termos a_0 e b_j não estarão presentes porque não foram considerados no Hamiltoniano inicial. A razão para isso foi a não aceitação desses termos para os critérios da TFW. No entanto, todos os outros termos estão presentes e têm uma forma mais geral. Neste sentido, é possível considerar a equação (5.19) como um caso mais completo, apesar do campo de torção (b_j) e a_j não estarem presentes.

Outro resultado que deve ser analisado vem da equação (5.26). Esta equação está relacionada à possibilidade de compreender o comportamento das partículas reais devido às interações com os campos externos. Como exemplo, podem ser citadas as interações misturando termos entre o campo magnético \mathbf{B} e os termos de CPT/Lorentz do tipo $\lambda_{ij}B$.

Já para os dois casos que envolvem o campo de torção, o ponto principal nos testes experimentais é a fraqueza deste campo externo. Uma questão natural surge aqui. É possível obter dados experimentais do campo de torção? Para obter alguma indicação sobre a possibilidade de tais dados experimentais, é necessário saber, antes de tudo, o *bound state* desta teoria (19), conforme mencionado anteriormente. Esse *bound* fornece uma indicação sobre qual experimento atômico deve ser realizado para obter possíveis medidas do campo de torção no espaço-tempo. Para calcular o *bound state*, os pontos de partida são os Hamiltonianos transformados destes casos, dados pelas equações (5.6) e (5.40). Assim, considerando (6.1), os *bound states* para cada caso, podem-se ser escritos das seguintes maneiras

$$\tilde{b}_j = b_j + \frac{e\hbar}{2mc} B_j - \frac{\eta_1 S_0}{mc} \left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right) \quad (6.5)$$

e

$$\tilde{b}_j = b_j - \eta_1 S_j + \frac{\hbar e}{2mc} B_j. \quad (6.6)$$

O *bound* na equação (6.5) permite considerar a possibilidade de obter uma indicação de possíveis experiências atômicas na tabela apresentada em (69).

Agora, na equação (6.6) pode-se observar a contribuição da torção. Essa contribuição é completamente nova e não foi contemplada no *bound state* associado à TFWÉ para a teoria de Dirac relacionada aos 80 casos de termos que violam CPT/Lorentz² (39). No entanto, embora a possibilidade de indicações de possíveis experiências atômicas (19, 75) esteja relacionada ao *bound state* (6.6), a magnitude do campo de torção é irrelevante quando comparada, por exemplo, com a magnitude do campo magnético. Por este motivo, uma proposta concisa sobre medidas experimentais do campo de torção não é direta.

Contudo, é possível imaginar o caso em que o módulo de \mathbf{B} é suficientemente grande para compensar a fraqueza das interações. A possibilidade de medir essas quantidades de forma indireta (por exemplo, usando física atômica e molecular (80)) é contemplada se for considerada a situação em que um gás de elétrons está presente. Em princípio, é possível fazer uma previsão do movimento gerado por esses novos termos.

² A razão é que, em (39), os critérios para executar a TFWÉ é uma relação de anticomutação entre o Hamiltoniano e $i\gamma^5\beta$.

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram obtidos os seguintes resultados originais:

1. A Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para o campo espinorial de Dirac no fundo de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz foi considerada. No trabalho (55), há um algoritmo que mostra como construir um Hamiltoniano geral descrevendo 80 novos casos de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação de Dirac que podem ser analisados com a TFWE. O foco foi precisamente o desenvolvimento da TFWE, considerando toda a situação apresentada no último trabalho mencionado, bem como o cálculo das equações de movimento. Nesta parte, a torção foi tratada como um caso particular das equações apresentadas aqui, bem como de cada um dos outros termos no Hamiltoniano completo. O objetivo foi obter o resultado mais geral que foi possível de ser escrito para realizar a análise física para os termos que violam CPT/Lorentz usando o método que acredita-se ser o mais completo para realizar esse tipo de estudo, ou seja, a TFWE. Também explorou-se a possibilidade de combinar tais equações para obter uma expressão para descrever a dinâmica da partícula. Tais resultados foram publicados em (39).
2. A possibilidade de se utilizar a TFWE para o espinor de Dirac com diferentes termos que violam as simetrias de CPT e Lorentz também foi discutida. Neste trabalho, foi considerado o caso da ação combinada com a torção e campo magnético para o campo espinorial. O propósito principal foi obter uma forma explícita para a equação de movimento que mostrasse as possíveis interações entre os campos externos e o espinor em um Hamiltoniano que fosse independente em cada componente. Considerou-se que S_0 era constante e o único termo não nulo de S'_μ , a fim de simplificar a álgebra, já que o ponto principal não era descrever o próprio campo de torção. Então, a TFWE foi realizada e foi apresentado um Hamiltoniano transformado que descreve um campo para uma partícula de spin-1/2 na presença de campos externos eletromagnéticos e de torção. Obteve-se assim, uma forma explícita para a equação de movimento, mostrando as possíveis interações entre os campos externos e o espinor. Tais resultados foram publicados em (38).
3. Outro ponto trabalhado foi o papel da TFWE para situações que a teoria não admite um operador involução. Nestes casos, a técnica da transformação exata é utilizada para se obter uma análise qualitativa do resultado perturbativo. Foi focada a atenção na inconsistência que aparece quando a Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata para o campo de Dirac interagindo com o campo de torção é realizada. Para resolver este problema, apresentou-se um novo operador involução que possibilita a realização da transformação exata quando o campo de torção está presente. Esse operador possui uma estrutura, conhecida na literatura, composta pelo produto

de um operador que atua no espaço das matrizes e outro que atua no espaço de funções. O método foi usado com o campo de torção, mas pode ser diretamente generalizado para outros termos. Deve ser enfatizado que o próprio método foi o principal resultado aqui, no sentido de que abre uma janela para a possibilidade de realizar a TFWE para alguns casos que até então, não eram contemplados pela literatura e excluídos de suas informações físicas. Estes resultados foram publicados em (40).

4. Breves considerações foram apresentadas a respeito do *bound state* relacionado ao campo de Dirac interagindo com os termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz. A perspectiva dos testes de violação do CPT/Lorentz tem vantagens consideráveis no contexto dos sistemas eletrodinâmicos quânticos. Foram citados alguns exemplos de experimentos envolvendo experiências de física atômica, como *Penning-Trap*, *Clock-Comparison*, *Pêndulo de Torção*, *Experiências com hidrogênio e anti-hidrogênio*, *Spin-Polarized Matter*, *Experimentos com Múon*, entre outros. Cada um dos experimentos mencionados apresenta um *bound state* muito específico e a magnitude de tais limites possibilita determinar qual tipo de experimentos devem ser realizados. Nesse sentido, é completamente relevante o cálculo do *bound state* das teorias que estão sendo analisadas. Estas considerações estão presentes nos trabalhos publicados em (38, 39, 40)
5. O estudo de um operador involução mais geral que contempla todos os possíveis campos externos mencionados anteriormente foi desenvolvido, bem como outro trabalho semelhante está sendo finalizado para os novos termos apresentados na tabela (2) que não cabiam no âmbito do operador involução habitual, porque não sabia se a natureza se opõe a este tipo de transformação exata ou era apenas um problema de inconsistência matemática. Assim, está sendo possível analisar os desafios e perspectivas para compreender de forma completa todos os possíveis campos externos que violam a simetria CPT e interagem com o campo de Dirac no contexto da TFWE.

REFERÊNCIAS

- 1 SCHRÖDINGER E. Quantisierung als Eigenwertproblem: Vierte Mitteilung. [Quantization as a Problem of Proper Values: Part IV.] **Annalen der Physik**, [s.l.], v. 81, n. 4, p. 109–139, 1926.
- 2 GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. [The Compton effect according to Schrödinger's Theory.] **Zeitschrift für Physik**, [s.l.], v. 40, n. 1-2, p. 117-133, 1926.
- 3 KLEIN, O. Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. [Electrodynamics and Wave Mechanics from the Point of View of the Correspondence Principle.] **Zeitschrift Für Physik A Hadrons And Nuclei**, [s.l.], v. 41, n. 6-7, p. 407-442, 1927.
- 4 DIRAC, P.A.M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [Londres], v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928.
- 5 DIRAC, P.A.M. The Quantum Theory of the Electron. Part II. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [Londres], v. 118, n. 779, p. 351–361, 1928.
- 6 DIRAC, P.A.M. A Theory of Electrons and Protons. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [Londres], v. 126, n. 801, p. 360–365, 1930.
- 7 PAULI, W.; WEISSKOPF, V.F. Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung. [On Quantization of the Scalar Relativistic Wave Equation.] **Helvetica Physica Acta**, [s.l.], v. 7, n. 27, p. 709-731, 1934.
- 8 WEINBERG, S. A Model of Leptons. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 19, n. 21, p. 1264-1266, 1967.
- 9 ATLAS COLLABORATION. A Particle Consistent with the Higgs Boson Observed with the ATLAS Detector at the Large Hadron Collider. **Science**, [Nova York], v. 338, n. 6114, p. 1576-1582, 2012.
- 10 AAIJ, R. et al. (LHCb COLLABORATION). Observation of $J/\Psi p$ Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\Psi K p$ Decays. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 115, n. 7, p. 072001(1-15), 2015.
- 11 DENNER, A.; WEIGLEIN, G.; DITTMAIER, S. Application of the background-field method to the electroweak standard model. **Nuclear Physics B**, [s.l.], v. 440, n. 1-2, p. 95-128, 1995.
- 12 ATLAS COLLABORATION. Measurement of differential cross sections of isolated-photon plus heavy-flavour jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV using the ATLAS detector. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 776, p. 295-317, 2018.
- 13 ABE, F. et al. (CDF COLLABORATION). Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 74, n. 14, p. 2626-2631, 1995.

- 14 KODAMA, K. et al. (DONUT COLLABORATION). Observation of tau neutrino interactions. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 504, n. 3, p. 218-224, 2001.
- 15 ATLAS COLLABORATION. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 716, n. 1, p. 1-29, 2012.
 CMS COLLABORATION. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 716, n. 1, p. 30-61, 2012.
- 16 KOSTELECKY, V.A.; LANE, C.D.; PICKERING, A.G.M. One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics. **Physical Review D**, [s.l.], v. 65, n. 5, p. 056006(1-12), 2002.
- 17 COLLADAY, D; KOSTELECKY, V.A. *CPT* violation and the standard model. **Physical Review D**, [s.l.], v. 55, n. 11, p. 6760-6774, 1997.
 COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V.A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, [s.l.], v. 58, n. 11, p. 116002(1-23), 1998.
- 18 KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. Data tables for Lorentz and *CPT* violation. **Reviews Of Modern Physics**, [s.l.], v. 83, n. 1, p. 11-31, 2011.
 KOSTELECKY, V.A.; TASSON, J.D. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. **Physical Review D**, [s.l.], v. 83, n. 1, p. 016013(1-59), 2011.
- 19 KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. Data tables for Lorentz and *CPT* violation. **Reviews Of Modern Physics**, [s.l.], v. 83, n. 1, p. 11-31, 2011.
- 20 KOSTELECKY, V.A.; MEWES, M. Astrophysical Tests of Lorentz and *CPT* Violation with Photons. **The Astrophysical Journal**, [s.l.], v. 689, n. 1, p. L1-L4, 2008.
- 21 SCARPELLI, A.P.B. QED with chiral nonminimal coupling: aspects of the Lorentz-violating quantum corrections. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, [s.l.], v. 39, n. 12, p. 125001(1-8), 2012.
- 22 CASANA, R.; FERREIRA, M.M.; MALUF, R.V.; DOS SANTOS, F.E.P. Effects of a *CPT*-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on electron-positron scattering. **Physical Review D**, [s.l.], v. 86, n. 12, p. 125033(1-6), 2012.
- 23 SHAPIRO, I.L. Renormalization in QED and QFT with a Lorentz- and *CPT*-violating background. *In: CPT and Lorentz Symmetry (CPT 13)*, 6, 2013, Bloomington. **Anais [...]**. Hackensack: World Scientific Publishing Co., 2014, p. 184-187.
- 24 BERTOLAMI, O.; COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V.A.; POTTING, R. *CPT* violation and baryogenesis. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 395, n. 3-4, p. 178-183, 1997.
- 25 RUSSELL, N. Testing Lorentz symmetry with atoms and light. **Physica Scripta**, [s.l.], v. 84, n. 3, p. 038101, 2011.
- 26 SHAPIRO, I.L. Physical aspects of the space-time torsion. **Physics Reports**, [s.l.], v. 357, n. 2, p. 113-213, 2002.
- 27 KOSTELECKY, V.A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Physical Review D**, [s.l.], v. 69, n. 10, p. 105009(1-20), 2004.

- 28 DATTA, B.K. Spinor fields in general relativity. **Il Nuovo Cimento B Series 11**, [s.l.], v. 6, n. 1, p. 16-28, 1971.
- 29 AUDRETSCH, J. Dirac electron in space-times with torsion: Spinor propagation, spin precession, and nongeodesic orbits. **Physical Review D**, [s.l.], v. 24, n. 6, p. 1470-1477, 1981.
- 30 HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. Gravity from Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. I: General Formulation. **Progress Of Theoretical Physics**, [s.l.], v. 64, n. 3, p. 866-882, 1980.
- 31 RUMPF, H. Creation of Dirac Particles in General Relativity with Torsion and Electromagnetism I: The General Formalism. **General Relativity And Gravitation**, [s.l.], v. 10, n. 6, p. 509-523, 1979a.
RUMPF, H. Creation of Dirac Particles in General Relativity with Torsion and Electromagnetism II: The Constant Electric Field — A “Pedagogical” Example. **General Relativity And Gravitation**, [s.l.], v. 10, n. 6, p. 525-533, 1979b.
RUMPF, H. Creation of Dirac Particles in General Relativity with Torsion and Electromagnetism III: Matter Production in a Model of Torsion. **General Relativity And Gravitation**, [s.l.], v. 10, n. 8, p. 647-658, 1979c.
RUMPF, H. Supersymmetric Dirac Particles in Riemann-Cartan Space-Time. **General Relativity And Gravitation**, [s.l.], v. 14, n. 9, p. 773-792, 1982.
- 32 NETTO, T.P.; SHAPIRO, I.L. Vacuum contribution of photons in the theory with Lorentz and *CPT*-violating terms. **Physical Review D**, [s.l.], v. 89, n. 10, p. 104037(1-9), 2014.
- 33 FOLDY, L.L.; WOUTHUYSEN, S.A. On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. **Physical Review**, [s.l.], v. 78, n. 1, p. 29-36, 1950.
- 34 JENTSCHURA, U.D.; NOBLE, J.H. Foldy–Wouthuysen transformation, scalar potentials and gravity. **Journal Of Physics A: Mathematical and Theoretical**, [s.l.], v. 47, n. 4, p. 045402(1-14), 2014.
- 35 OBUKHOV, Y.N.; SILENKO, A.J.; TERYAEV, O.V. Dirac Particle in Riemann – Cartan Spacetimes. **Physics Of Particles And Nuclei**, [s.l.], v. 49, n. 1, p. 9-10, 2018.
- 36 ERIKSEN, E.; KOLSRUD, M. Canonical transformations of Dirac’s Equation to Even Forms: Expansion in Terms of the External Fields. **Il Nuovo Cimento**, [s.l.], v. 18, n. 1, p. 1-39, 1960.
- 37 OBUKHOV, Y.N. Spin, Gravity, and Inertia. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 86, n. 2, p. 192-195, 2001.
- 38 GONÇALVES, B.; DIAS, M.M.; RIBEIRO, B.J. The exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac Theory with the complete set of *CPT*/LORENTZ Violating terms. *In: Frontiers of Fundamental Physics 14 (FFP14)*, 14, 2014, Marseille. **Anais [...]**. Trieste: Sissa Medialab, 2016, p. 1-4.
- 39 GONÇALVES, B.; DIAS JUNIOR, M.M.; RIBEIRO, B.J. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac theory with the complete set of *CPT*-Lorentz invariance violating terms. **Physical Review D**, [s.l.], v. 90, n. 8, p. 085026(1-8), 2014.

- 40 GONÇALVES, B.; RIBEIRO, B.J.; PEREIRA, D.D.; DIAS, M.M. The space–time torsion in the context of the exact Foldy–Wouthuysen transformation for a Dirac fermion. **International Journal of Modern Physics A**, [s.l.], v. 31, n. 13, p. 1650075(1-11), 2016.
- 41 BJORKEN, J.M.; DRELL, S.D. **Relativistic Quantum Mechanics**. Nova York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
- 42 SCHWABL, F. **Advanced Quantum Mechanics**. Berlim: Springer-Verlag, 2008.
- 43 SAKURAI, J.J. **Advanced Quantum Mechanics**. Nova Delhi: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- 44 SAKURAI, J.J.; TUAN, S.F. (Ed.). **Modern Quantum Mechanics**. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- 45 GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics**. Berlim: Springer-Verlag, 2000.
- 46 LANDAU, L.D.; LIFSHITS, E.M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.
- 47 KOSTELECKY, V.A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, [s.l.], v. 39, n. 2, p. 683-685, 1989.
KOSTELECKY, V.A.; POTTING, R. Analytical construction of a nonperturbative vacuum for the open bosonic string. **Physical Review D**, [s.l.], v. 63, n. 4, p. 046007(1-14), 2001.
- 48 COLLADAY, D; KOSTELECKY, V.A. *CPT* violation and the standard model. **Physical Review D**, [s.l.], v. 55, n. 11, p. 6760-6774, 1997.
- 49 KOSTELECKY, V.A. The Search for Relativity Violations. **Scientific American**, [s.l.], v. 291, n. 3, p. 92-101, 2004.
KOSTELECKY, V.A. Lorentz Violation and Gravity. *In: CPT and Lorentz Symmetry (CPT 03)*, 3, 2004, Bloomington. **Anais [...]**. Hackensack: World Scientific Publishing Co., 2005, p. 1-9.
MATTINGLY, D. Modern Tests of Lorentz Invariance. **Living Reviews in Relativity**, v. 8, n. 1, p. 1-84, 2005.
- 50 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A. Lorentz and *CPT* Tests with Spin-Polarized Solids. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 84, n. 7, p. 1381-1384, 2000.
BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; LANE, C.D. *CPT* and Lorentz Tests with Muons. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 84, n. 6, p. 1098-1101, 2000.
BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. *CPT* and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 82, n. 11, p. 2254-2257, 1999.
- 51 MURAYAMA, H.; YANAGIDA, T. *LSND*, *SN1987A*, and *CPT* violation. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 520, n. 3-4, p. 263-268, 2001.
BARENBOIM, G.; BORISSOV, L.; LYKKEN, J.; SMIRNOV, A.Y. Neutrinos as the messengers of *CPT* violation. **Journal Of High Energy Physics**, [s.l.], v. 2002, n. 10, p. 001-001, 2002.
KOSTELECKY, V.A.; MEWES, M. Lorentz and *CPT* violation in the neutrino sector. **Physical Review D**, [s.l.], v. 70, n. 3, p. 031902(1-4), 2004.

- 52 KOSTELECKY, V.A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Physical Review D**, [s.l.], v. 69, n. 10, p. 105009(1-20), 2004.
 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. **Physical Review D**, [s.l.], v. 71, n. 6, p. 065008(1-17), 2005.
- 53 BERTOLAMI, O.; COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V.A.; POTTING, R. *CPT* violation and baryogenesis. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 395, n. 3-4, p. 178-183, 1997.
 KOSTELECKY, V.A.; MEWES, M. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 87, n. 25, p. 251304(1-4), 2001.
 LEHNERT, R. Cosmology and Spacetime Symmetries. *In: New Worlds in Astroparticle Physics*, 5, 2005, Faro. **Anais [...]**. Singapura: World Scientific Publishing Co., 2006, p. 293-297.
 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. **Physical Review D**, [s.l.], v. 71, n. 6, p. 065008(1-17), 2005.
- 54 JACKIW, R.; KOSTELECKY, V.A. Radiatively Induced Lorentz and *CPT* Violation in Electrodynamics. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 82, n. 18, p. 3572-3575, 1999.
- 55 GONÇALVES, B.; OBUKHOV, Y.N.; SHAPIRO, I.L. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac spinor in torsion and other *CPT* and Lorentz violating backgrounds. **Physical Review D**, [s.l.], v. 80, n. 12, p. 125034(1-7), 2009.
- 56 COSTELLA, J.P.; MCKELLAR, B.H.J. The Foldy–Wouthuysen transformation. **American Journal Of Physics**, [s.l.], v. 63, n. 12, p. 1119-1121, 1995.
- 57 SILENKO, A.J. Foldy–Wouthuysen transformation for relativistic particles in external fields. **Journal Of Mathematical Physics**, [s.l.], v. 44, n. 7, p. 2952-2966, 2003.
- 58 SILENKO, A.J. Foldy-Wouthuysen transformation and semiclassical limit for relativistic particles in strong external fields. **Physical Review A**, [s.l.], v. 77, n. 1, p. 012116(1-7), 2008.
- 59 SILENKO, A.J.; TERYAEV, O.V. Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field. **Physical Review D**, [s.l.], v. 71, n. 6, p. 064016(1-8), 2005.
 SILENKO, A.J.; TERYAEV, O.V. Equivalence principle and experimental tests of gravitational spin effects. **Physical Review D**, [s.l.], v. 76, n. 6, p. 061101(1-5), 2007.
 OBUKHOV, Y.N.; SILENKO, A.J.; TERYAEV, O.V. Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and the equivalence principle. **Physical Review D**, v. 80, n. 6, p. 064044(1-10), 2009.
- 60 NEZNAMOV, V.P.; SILENKO, A.J. Foldy–Wouthuysen wave functions and conditions of transformation between Dirac and Foldy–Wouthuysen representations. **Journal Of Mathematical Physics**, [s.l.], v. 50, n. 12, p. 122302(1-15), 2009.
- 61 NIKITIN, A.G. On exact Foldy-Wouthuysen transformation. **Journal Of Physics A: Mathematical and General**, [s.l.], v. 31, n. 14, p. 3297-3300, 1998.
- 62 BAGROV, V.G.; BUCHBINDER, I.L.; SHAPIRO, I.L. On the possible experimental manifestations of the torsion field at low energies. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, [s.l.], v. 35, n. 5, p. 1-12, 1992.

- 63 RYDER, L.H; SHAPIRO, I.L. On the interaction of massive spinor particles with external electromagnetic and torsion fields. **Physics Letters A**, [s.l.], v. 247, n. 1-2, p. 21-26, 1998.
- 64 CASE, K.M. Some Generalizations of the Foldy-Wouthuysen Transformation. **Physical Review**, [s.l.], v. 95, n. 5, p. 1323-1328, 1954.
- 65 GONÇALVES, B. SOME ASPECTS OF THE EXACT FOLDY-WOUTHUYSEN TRANSFORMATION FOR A DIRAC FERMION. **International Journal Of Modern Physics A**, [s.l.], v. 24, n. 0809, p. 1717-1720, 2009.
- 66 TRETNYNYK, V. On Exact Foldy–Wouthuysen Transformation of Bozons in an Electromagnetic Field and Reduction of Kemmer–Duffin–Petiau Equation. *In: Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, 3, 1999, Kiev. **Anais [...]**. Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2000, p. 537–543.
- 67 KOSTELECKY, V.A. The Status of *CPT*. *In: Physics Beyond the Standard Model*, 5, 1998, Santa Fé. **Anais [...]**. Singapura: World Scientific Publishing Co., 1999, p. 588-600.
- 68 KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. Data tables for Lorentz and *CPT* violation. **Reviews Of Modern Physics**, [s.l.], v. 83, n. 1, p. 11-31, 2011.
- 69 KOSTELECKY, V.A.; LANE, C.D. Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments. **Physical Review D**, [s.l.], v. 60, n. 11, p. 116010(1-17), 1999.
- 70 KOSTELECKY, V.A.; SAMUEL, S. Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher-Dimensional Theories. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 63, n. 3, p. 224-227, 1989.
 KOSTELECKY, V.A.; SAMUEL, S. Photon and Graviton Masses in String Theories. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 66, n. 14, p. 1811-1814, 1991.
 KOSTELECKY, V.A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, [s.l.], v. 39, n. 2, p. 683-685, 1989.
 KOSTELECKY, V.A.; SAMUEL, S. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. **Physical Review D**, [s.l.], v. 40, n. 6, p. 1886-1903, 1989.
- 71 KOSTELECKY, V.A.; POTTING, R. *CPT* and strings. **Nuclear Physics B**, [s.l.], v. 359, n. 2-3, p. 545-570, 1991.
 KOSTELECKY, V.A.; POTTING, R. Expectation values, Lorentz invariance, and *CPT* in the open bosonic string. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 381, n. 1-3, p. 89-96, 1996.
- 72 KOSTELECKY, V.A.; PERRY, M.J.; POTTING, R. Off-Shell Structure of the String Sigma Model. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 84, n. 20, p. 4541-4544, 2000.
- 73 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. *CPT* and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 82, n. 11, p. 2254-2257, 1999.

- 74 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A. Lorentz and *CPT* Tests with Spin-Polarized Solids. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 84, n. 7, p. 1381-1384, 2000.
- 75 KOSTELECKY, V.A.; TASSON, J.D. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. **Physical Review D**, [s.l.], v. 83, n. 1, p. 016013(1-59), 2011.
- 76 KOSTELECKY, V.A.; LANE, C.D. Nonrelativistic quantum Hamiltonian for Lorentz violation. **Journal Of Mathematical Physics**, [s.l.], v. 40, n. 12, p. 6245-6253, 1999.
- 77 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. Testing *CPT* with Anomalous Magnetic Moments. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 79, n. 8, p. 1432-1435, 1997.
BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; RUSSELL, N. *CPT* and Lorentz tests in Penning traps. **Physical Review D**, [s.l.], v. 57, n. 7, p. 3932-3943, 1998.
- 78 BLUHM, R.; KOSTELECKY, V.A.; LANE, C.D. *CPT* and Lorentz Tests with Muons. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 84, n. 6, p. 1098-1101, 2000.
- 79 COLLADAY, D. Low energy tests of Lorentz and *CPT* violation. *In*: Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (*CIPANP* 2012), 11, 2012, São Petersburgo (Flórida). **Anais [...]**. College Park: AIP Conference Proceedings, 2013, p. 137-141.
- 80 TINO, G.M.; VETRANO, F. Is it possible to detect gravitational waves with atom interferometers? **Classical And Quantum Gravity**, [s.l.], v. 24, n. 9, p. 2167-2178, 2007.