

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Aruã Menezes de Aguiar

Quantização Canônica do Modelo de Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG)

Juiz de Fora
2021

Aruã Menezes de Aguiar

Quantização Canônica do Modelo de Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG)

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Física, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Menezes de Aguiar, Aruã.

Quantização Canônica do Modelo de Bagger-Lambert-Gustavsson
(BLG) / Aruã Menezes de Aguiar. – 2021.

60 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de
Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

1. Teoria das Cordas. 2. Teoria-M. 3. Modelo BLG. 4. Método de
Quantização de Dirac. I. Carlo Rodrigues Mendes, Albert, orient. II. Título.

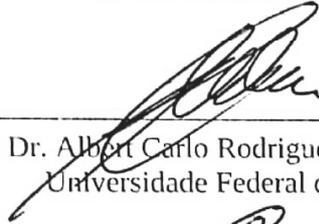
Aruã Menezes de Aguiar

"Quantização Canônica do Modelo de Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG)"

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em 16 de julho de 2021.

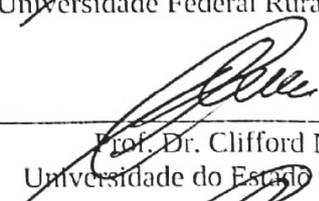
BANCA EXAMINADORA



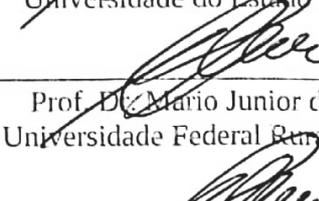
Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



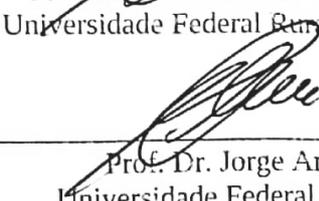
Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Clifford Neves Pinto
Universidade do Estado do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão Cauê por sempre estarem ao meu lado.

Pelo apoio, agradeço a minha avó Dilza, a minha tia Virginia, ao meu tio Alexandre e ao meu primo Gabriel.

Agradeço, em especial, aos meus amigos Fran e Thales, pois sem o apoio deles teria sido muito mais difícil concretizar este trabalho.

Agradeço também aos meus amigos Franciely, Jéssica, José César, Karen, Leatrice, Patrícia e Vanessa, pois sempre pude contar com eles.

Agradeço ao meu orientador Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes e ao meu co-orientador Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pelo auxílio e pela disponibilidade.

Por fim, agradeço à UFJF e a CAPES pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O entendimento das leis fundamentais da natureza somente estará completo quando a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral estiverem unificadas com sucesso. A Teoria das Cordas e a Teoria-M surgem como candidatas a essa unificação. Essa última relaciona todos os tipos de corda e é baseada na ideia de que existem objetos fundamentais na natureza chamados p-branas. Neste trabalho, estudou-se um modelo proposto por Bagger, Lambert e Gustavsson para um sistema de múltiplas M2-branas baseado em uma tri-álgebra conhecido como Modelo BLG. Efetuou-se a quantização canônica do Modelo BLG dimensionalmente reduzido utilizando o método de quantização de Dirac.

Palavras-chave: Teoria das Cordas. Teoria-M. Modelo BLG. Método de Quantização de Dirac.

ABSTRACT

Understanding the fundamental laws of nature will only be complete when Quantum Mechanics and General Relativity are successfully unified. String Theory and M-Theory emerge as candidates for this unification. The latter relates all types of string and it is based on the idea that there are fundamental objects in nature called p-branes. This work studied a model proposed by Bagger, Lambert and Gustavsson for a system of multiple M2-branes based on a tri-algebra known as BLG Model. The canonical quantization of the dimensionally reduced BLG Model was performed using the Dirac quantization method.

Keywords: String Theory. M-Theory. BLG Model. Dirac Quantization Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – (a) Representação de uma corda aberta; (b) Representação de uma corda fechada.	11
Figura 2 – Diferentes modos vibracionais de uma corda representando diferentes partículas.	12
Figura 3 – Representação esquemática de uma: (a) partícula movendo-se através do espaço-tempo; (b) corda fechada movendo-se através do espaço-tempo.	12
Figura 4 – Energia necessária para explorar alguns comprimentos característicos. .	13
Figura 5 – Algumas partículas e suas “superpartículas”.	14
Figura 6 – Foto do Grande Colisor de Hádrons (LHC - Large Hadrons Collider) ^[90] .	15
Figura 7 – Dependendo do ponto de vista, a superfície de um mesmo cilindro pode ser considerada bidimensional (a) ou unidimensional (b).	16
Figura 8 – Representação das dualidades entre os diferentes tipos de corda.	17
Figura 9 – Diagrama da rede de dualidades entre as várias Teorias das Supercordas, a Supergravidade e a Teoria-M.	22
Figura 10 – Representação de uma corda aberta fixada a uma Dp-brana.	23
Figura 11 – Corda aberta fixada a duas diferentes Dp-branas.	24
Figura 12 – Cronologia dos fatos que marcaram a Teoria das Cordas e a Teoria-M.	25
Figura 13 – Dimensões ocupadas pelas Dp-branas. O símbolo "×" indica por onde a brana estende-se e o símbolo "." por onde ela não se estende.	27
Figura 14 – Múltiplas D1-branas na direção 9 convergindo para uma única D3-brana nas direções 1, 2 e 3.	28
Figura 15 – Múltiplas D1-branas convergindo para uma única D3-brana formando um funil difuso.	29
Figura 16 – Dimensões ocupadas pelas Mp-branas. O símbolo "×" indica por onde a brana estende-se e o símbolo "." por onde ela não se estende.	29
Figura 17 – Múltiplas M2-branas convergindo para uma única M5-brana.	30
Figura 18 – Múltiplas M2-branas convergindo para uma única M5-brana formando um funil difuso.	31
Figura 19 – Tipos de partícula do Modelo Padrão.	43
Figura 20 – Exemplos de hádrons.	44
Figura 21 – Tipos de força do Modelo Padrão e suas respectivas partículas mediadoras.	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	TEORIA DAS CORDAS	11
2.1	Introdução	11
2.2	Características Gerais das Cordas	13
2.2.1	Tamanho das Cordas	13
2.2.2	Supersimetria	14
2.2.3	Dimensões Extras	15
2.2.4	Dualidades	16
2.3	Versões das Teorias das Supercordas	17
2.4	Ação Lagrangiana para Cordas	18
2.4.1	Ação para uma Partícula Pontual Relativística	18
2.4.2	Ação de Nambu-Goto	19
2.4.3	Ação de Polyakov	21
3	TEORIA-M	22
3.1	Introdução	22
3.2	p-Branas	22
3.2.1	Dp-Branas	23
3.2.2	Mp-Branas	24
3.3	Cronologia da Teoria das Cordas e da Teoria-M	25
4	MODELO BLG	27
4.1	Introdução	27
4.2	Equação de Nahm e Equação de Basu-Harvey	27
4.2.1	Equação de Nahm para um Sistema de D1-D3-Branas	27
4.2.2	Equação de Basu-Harvey para um Sistema de M2-M5-Branas	29
4.3	Tri-álgebra	31
4.4	Ação BLG	32
4.5	Redução Dimensional do Modelo BLG para Duas Dimensões	33
5	MÉTODO DE QUANTIZAÇÃO DE DIRAC APLICADO AO MODELO BLG	35
5.1	Introdução	35
5.2	Momentos Conjugados	35
5.3	Vínculos da Teoria	36
5.4	Parênteses de Dirac	37

6	CONCLUSÃO	41
6.1	Perspectivas Futuras	42
	APÊNDICE A – Introdução ao Modelo Padrão	43
	APÊNDICE B – Teoria das Cordas Bosônicas	46
	APÊNDICE C – Mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana Básica	47
C.1	Lagrangiana e Ação	47
C.2	Equações de Euler-Lagrange	47
C.3	Momento Conjugado e Hamiltoniana	48
C.4	Teoria de Campos Lagrangiana	48
	APÊNDICE D – Parênteses de Poisson	50
	APÊNDICE E – Formalismo de Dirac	52
E.1	Equações de Hamilton para Sistemas Vinculados	52
E.2	Parênteses de Dirac	52
E.3	Algoritmo de Dirac-Bergmann	53
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

A Física Teórica no século XX foi revolucionada por dois grandes avanços: a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. A Relatividade Geral é central para a compreensão atual da expansão em larga escala do Universo, enquanto a Mecânica Quântica é a ferramenta essencial para entender a Física Microscópica. Desta forma, o entendimento das leis fundamentais da natureza somente estará completo quando esses dois campos estiverem unificados com sucesso. Porém, a unificação desses dois ramos da Física apresenta muitos desafios, uma vez que os conceitos e tipos de cálculo que os caracterizam são muito diferentes e, além disso, os dois campos desenvolveram-se quase que de maneira independente um do outro até cerca de 1980.

Tendo em vista a importância de se obter uma "teoria do tudo" para que haja uma compreensão completa da Física de Partículas e da Cosmologia, surgiram algumas teorias. Dentre elas, é possível citar a Teoria das Cordas^[1–6] e, conseqüentemente, a Teoria-M^[7–12].

Enquanto em uma Teoria Quântica convencional os objetos fundamentais são pontos matemáticos no espaço-tempo que modelam as partículas pontuais elementares da natureza, na Teoria das Cordas as partículas pontuais são substituídas por objetos unidimensionais chamados cordas. Essa teoria descreve como essas cordas propagam-se pelo espaço e interagem umas com as outras e como os seus diferentes modos de vibração originam as diferentes partículas.

Já a Teoria-M é uma descrição não perturbativa da Teoria das Cordas. Ela oferece uma maneira de relacionar os diferentes tipos de corda e a Supergravidade^[26–28] em 11 dimensões por meio de uma rede de dualidades. Além disso, tal teoria destaca a importância da mentalidade reducionista no desenvolvimento da Física, já que a mesma é baseada na ideia de que existem objetos fundamentais na natureza. Na Teoria-M, esses objetos fundamentais são chamados de Mp-branas, onde o termo brana representa a extensão do conceito usual da palavra membrana. Mais especificamente, existem as M2-branas e as M5-branas.

Enquanto, pelo menos a nível clássico, a dinâmica de uma única Mp-brana é entendida, pouco se sabe sobre as múltiplas Mp-branas. Em tais circunstâncias, Bagger e Lambert e, independentemente, Gustavsson propuseram uma ação para um sistema de múltiplas M2-branas baseado em uma tri-álgebra conhecido como Modelo BLG^[13–17]. Esse modelo será alvo de estudo nesta tese.

O objetivo desta tese é efetuar a quantização canônica do Modelo BLG dimensionalmente reduzido.

Em resumo, a quantização canônica faz a transição do caso clássico para o caso quântico relacionando os parênteses Dirac aos seus respectivos comutadores. Diversos

métodos podem ser utilizados para a obtenção desses parênteses, nesta tese, o método de quantização de Dirac^[20–25] será o utilizado. Nesse método, utiliza-se o algoritmo de Dirac-Bergmann, que é um processo no qual se obtém todos os vínculos da teoria após um número finito de estágios. Uma vez obtidos os vínculos, torna-se possível encontrar todos os parênteses de Dirac e, conseqüentemente, efetuar a quantização canônica.

2 TEORIA DAS CORDAS

2.1 Introdução

Atualmente, sabe-se que as interações fundamentais podem ser descritas por quatro tipos de força: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte. O Modelo Padrão da Física de Partículas^[38–40] (*vide* Apêndice A) oferece uma descrição precisa dessas forças, com exceção da gravitacional. Para a gravidade, existe a Relatividade Geral^[33–37], que fornece uma descrição clássica em grandes escalas.

Busca-se uma “teoria do tudo”, ou seja, uma grande teoria que não apenas quantifique a gravidade, mas que também concilie a Relatividade Geral com os princípios da Mecânica Quântica.

A Teoria das Cordas^[1–6] e, conseqüentemente, a Teoria-M^[7–12] (que será vista no próximo capítulo) mostraram-se adequadas para tal descrição do universo.

Em uma Teoria Quântica convencional, os objetos fundamentais são pontos matemáticos no espaço-tempo que modelam as partículas pontuais elementares da natureza. A Teoria das Cordas é uma generalização um pouco mais radical da Teoria Quântica de Campos através da qual os objetos fundamentais são estendidos, unidimensionais e podem ser representados por cordas abertas ou fechadas (extremidades conectadas), conforme é mostrado na Figura 1.

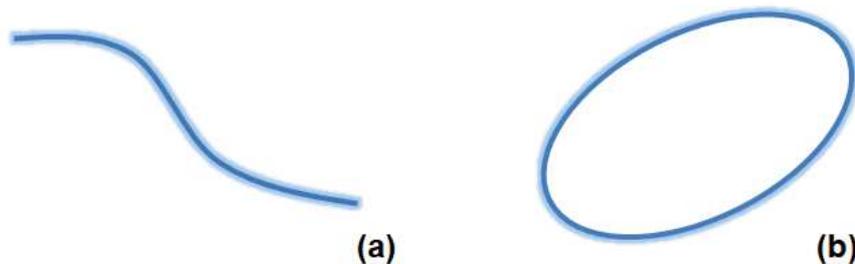


Figura 1 – (a) Representação de uma corda aberta; (b) Representação de uma corda fechada.

Se em uma teoria existem cordas abertas, automaticamente existirão cordas fechadas, pois as cordas possuem um comportamento dinâmico e uma corda aberta pode unir suas extremidades formando uma corda fechada.

As várias partículas elementares observadas na natureza correspondem aos diferentes modos vibracionais da corda (*vide* Figura 2). Por exemplo, enquanto um modo de vibração pode ser o elétron, outro pode ser um quark. A principal vantagem dessa descrição é que enquanto há várias partículas, há apenas uma corda. Isso indica que a Teoria das Cordas poderia servir como um bom ponto de partida para uma “teoria do tudo”.

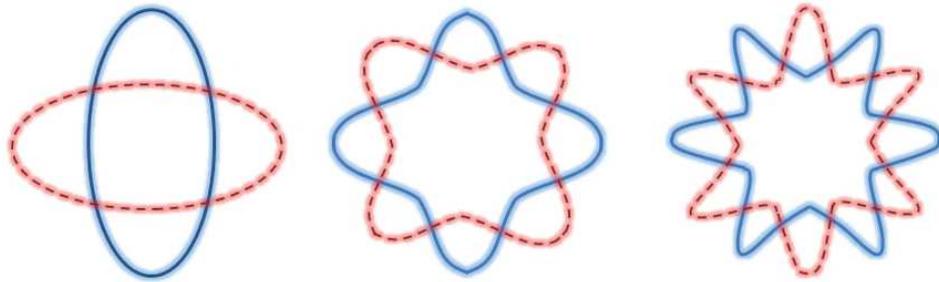


Figura 2 – Diferentes modos vibracionais de uma corda representando diferentes partículas.

Conforme uma partícula move-se através do espaço-tempo, ela traça uma linha de mundo, enquanto uma corda traça uma folha de mundo (uma superfície), como é possível ver na Figura 3.

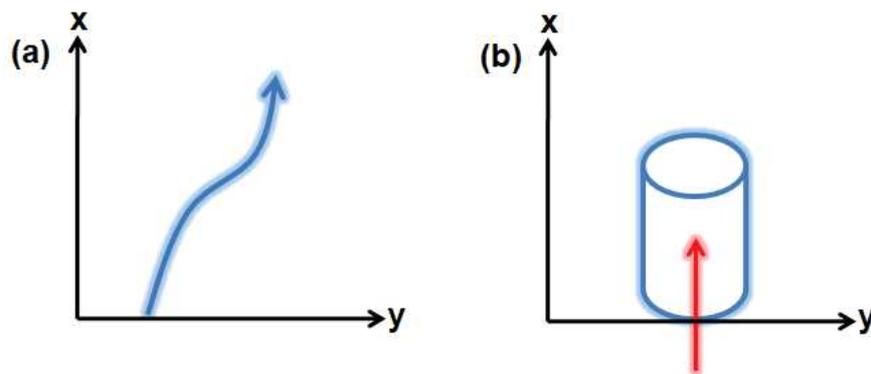


Figura 3 – Representação esquemática de uma: (a) partícula movendo-se através do espaço-tempo; (b) corda fechada movendo-se através do espaço-tempo.

Um fato importante sobre a Teoria das Cordas é que a Relatividade Geral está naturalmente incorporada a ela. A teoria é modificada à pequenas distâncias/grandes energias, mas para distâncias/energias usuais está presente exatamente da mesma forma que foi proposta por Einstein. Uma Teoria Quântica de Campos comum não permite a existência da gravidade, já a Teoria das Cordas requer que ela exista.

Outra característica interessante da Teoria das Cordas é que nela aparecem as chamadas teorias de calibre de Yang-Mills^[44–46] do mesmo formato que aparecem no Modelo Padrão. Além disso, a matéria pode aparecer em representações quirais complexas, o que é uma característica essencial do Modelo Padrão.

Na versão original da Teoria das Cordas, apenas os bósons eram descritos. Uma vez que não havia férmions, ela não poderia descrever um meio material, o que levou à substituição da Teoria das Cordas Bosônicas (*vide* apêndice B) pela Teoria das Supercordas, a qual descreve tanto bósons (spin inteiro) quanto férmions (spin semi-inteiro). Usa-se

a palavra "super", pois essa teoria carrega o princípio da supersimetria^[29–32], que será discutido mais a frente.

A Teoria das Supercordas possui cinco diferentes versões: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica $SO(32)$ e heterótica $E_8 \times E_8$.

Embora a Teoria das Supercordas ainda não esteja completamente formulada, é possível fornecer algumas características gerais da mesma, independentemente de qual possa ser sua formulação final. Na seção a seguir, algumas dessas características serão brevemente discutidas.

2.2 Características Gerais das Cordas

2.2.1 Tamanho das Cordas

Uma vez que a Teoria das Cordas é uma Teoria Quântica Relativística que inclui a gravidade, ela deve envolver as três correspondentes constantes fundamentais, isto é, a constante de Planck reduzida \hbar , a velocidade da luz c e a constante gravitacional newtoniana G . Essas três constantes podem ser combinadas dentro de uma única constante com dimensão de comprimento. Assim, a escala do comprimento das cordas deve ser da ordem do comprimento de Planck

$$l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-35} m. \quad (2.1)$$

Por comparação, a dimensão de um núcleo atômico típico é $l_n \sim 10^{-15} m$, sendo maior que o comprimento de Planck por um fator de 10^{20} . Isso significa que os efeitos gravitacionais quânticos podem ser esperados em escalas de distância muito pequenas. Para sondar essas pequenas escalas de distância, é necessário uma energia muito alta^[95], o que pode ser visto na Figura 4.

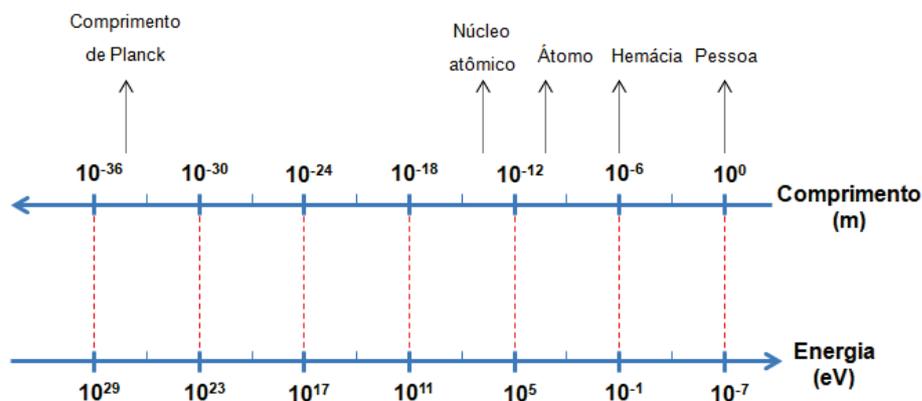


Figura 4 – Energia necessária para explorar alguns comprimentos característicos.

Conforme é possível notar na Figura 4, a escala de energia decresce conforme a escala de comprimento aumenta. Logo, é possível observar a razão pela qual as cordas não foram observadas na natureza até então, pois em escalas de distância muito grandes (comparadas ao comprimento de Planck) as cordas tornam-se indistinguíveis de partículas pontuais.

2.2.2 Supersimetria

As simetrias são de fundamental importância na descrição dos fenômenos físicos. Na Física de Partículas, acredita-se que as simetrias permitam, em última análise, uma classificação de todas as partículas observadas. Uma simetria fundamental da Física de Partículas, que foi firmemente estabelecida tanto teoricamente quanto experimentalmente, é a do grupo Poincaré^[41–43] (simetria de rotações e translações no espaço de Minkowski quadridimensional). Além dessa simetria fundamental, existem outras simetrias internas que também foram bem estabelecidas nas últimas décadas.

A supersimetria (SUSI) surge, assim, como uma simetria que combina bósons e férmions. Cada partícula teria associada a ela um “superparceiro” cujo spin diferiria por $\frac{1}{2}$, ou seja, para cada bóson existiria um “superparceiro” fermiônico e vice-versa. Assim, haveria igual número de estados bosônicos e fermiônicos na natureza. Idealmente, essas partículas “superparceiras” teriam a mesma massa. Assim como o pósitron é a antipartícula do elétron (com a mesma massa e carga oposta), haveria um selétron bosônico que teria a mesma massa que o elétron, mas spin inteiro. A Figura 5 exemplifica algumas partículas e suas postuladas “superpartículas”.

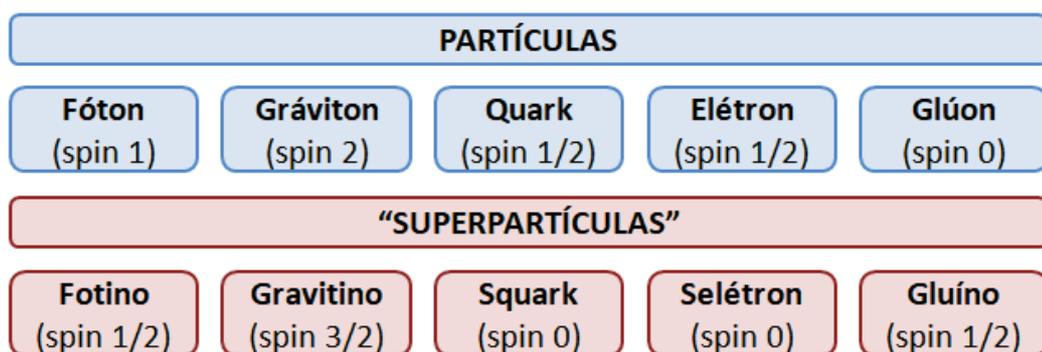


Figura 5 – Algumas partículas e suas “superpartículas”.

Ao estudar supersimetria, é importante conhecer o operador supercarga. Esse operador age transformando férmions em bósons e vice-versa. Uma teoria pode ser caracterizada pelo número de supercargas ($N = m$) que contém. Se há uma única supercarga, tem-se uma supersimetria $N = 1$; se há duas supercargas, tem-se uma supersimetria $N = 2$ e assim por diante.

É necessário ressaltar que, por enquanto, a supersimetria é um conceito puramente matemático. Entretanto, espera-se que o acelerador de partículas conhecido pela sigla LHC (*Large Hadron Collider*), apresentado na Figura 6, evidencie experimentalmente a supersimetria ou, alternativamente, que a supersimetria seja deixada de lado efetivamente.

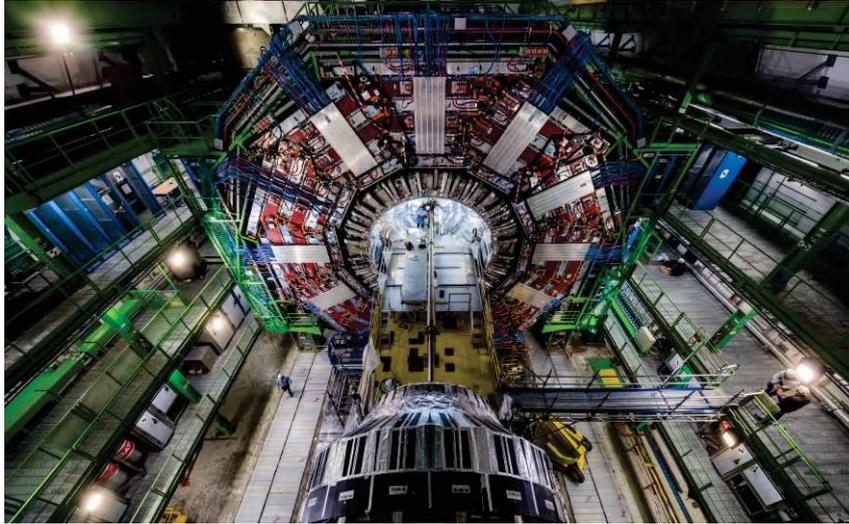


Figura 6 – Foto do Grande Colisor de Hádrõns (LHC - Large Hadrons Collider)^[90].

2.2.3 Dimensões Extras

Na Relatividade Geral, o espaço e o tempo não são modelados como entidades separadas, mas sim unificados a um espaço-tempo quadridimensional. Porém, em alguns casos, ao modelar o espaço-tempo em um número diferente de dimensões, uma teoria torna-se mais matematicamente tratável e é possível realizar cálculos com mais facilidade.

Os físicos Theodor Kaluza e Oskar Klein foram uns dos primeiros a apresentar uma teoria que possuía dimensões extras. A Teoria de Kaluza-Klein^[50–54] tinha por objetivo unificar as forças eletromagnética e gravitacional em uma teoria com cinco dimensões baseada na Relatividade Geral.

Assim como a Teoria de Kaluza-Klein, a Teoria das Cordas também exige dimensões extras do espaço-tempo para sua consistência matemática. Na Teoria das Cordas Bosônicas, o espaço-tempo possui 26 dimensões e na Teoria das Supercordas possui 10.

Com o intuito de descrever fenômenos físicos reais usando a Teoria das Supercordas, deve-se imaginar cenários em que seis dessas dimensões extras estejam compactadas, ou seja, elas devem ser extremamente pequenas, de modo que não sejam detectadas. Mesmo pequenas, deve-se, ainda, considerar que tais dimensões possam interferir nas interações que estejam ocorrendo.

A compactação pode ser ilustrada em termos dos cilindros apresentados na Figura 7. Na Figura 7-a, a superfície do cilindro é bidimensional. Se o raio do círculo for

extremamente pequeno, ou se ele for visto a partir de uma grande distância, parecerá unidimensional, como mostra a Figura 7-b. Então, pode-se imaginar que o cilindro é o espaço-tempo: a longas distâncias ou baixas energias as dimensões extras não podem ser vistas e o mundo parece efetivamente quadridimensional.



Figura 7 – Dependendo do ponto de vista, a superfície de um mesmo cilindro pode ser considerada bidimensional (a) ou unidimensional (b).

2.2.4 Dualidades

Uma vez que a Teoria das Supercordas pretendia conseguir uma descrição unificada de todas as interações, deveria haver apenas uma formulação consistente para a mesma e não cinco, o que acabou afetando sua credibilidade. Porém, o problema foi solucionado quando se descobriu que as cinco teorias eram relacionadas entre si por meio de dualidades^[5].

Geralmente, o termo dualidade é utilizado em uma situação na qual dois sistemas físicos aparentemente diferentes revelam-se equivalentes de maneira não trivial. Dois tipos de dualidade conectam essas teorias: a dualidade-T e a dualidade-S^[94].

Essencialmente, a dualidade-T relaciona pequenas distâncias em uma teoria a grandes distâncias em outra. Embora as duas teorias sejam aparentemente diferentes, elas são equivalentes, porém expressas de diferentes pontos de vista. As teorias do tipo IIA e IIB, assim como as teorias heteróticas $SO(32)$ e $E_8 \times E_8$, estão relacionadas por esse tipo de dualidade^[94].

Já a dualidade-S relaciona interações fortes em uma teoria a interações fracas em outra. Novamente, as duas teorias equivalem-se, porém apresentam diferentes constantes de acoplamento. Essa dualidade vincula as teorias do tipo I e heterótica $SO(32)$, assim como a teoria do tipo IIB a ela mesma^[94].

A Figura 8 representa como as dualidades relacionam os diferentes tipos de corda.

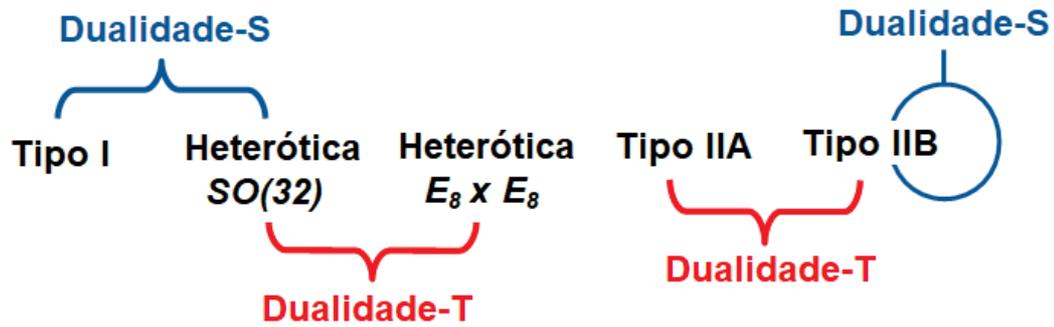


Figura 8 – Representação das dualidades entre os diferentes tipos de corda.

2.3 Versões das Teorias das Supercordas

Para caracterizar as cinco Teorias das Supercordas é necessário saber se elas incluem ou não cordas abertas e/ou fechadas, e se as mesmas possuem orientação ou não. Além disso, uma Teoria das Supercordas pode ser caracterizada pelo número de supercargas ($N = m$) que possui. Finalmente, caracteriza-se cada tipo de supercorda pela simetria de calibre que ela admite.

A seguir, apresentam-se, resumidamente, as características de cada tipo de supercorda.

i) Teoria Tipo I

A teoria do tipo I inclui cordas abertas e fechadas, sem orientação, com supersimetria $N = 1$ e grupo de calibre $SO(32)$.

ii) Teoria Tipo IIA

A teoria do tipo IIA descreve apenas cordas fechadas, orientadas, com supersimetria $N = 2$, simetria de calibre $U(1)$ e duas supercargas que possuem quiralidade oposta, isto é, cada férmion tem um parceiro com quiralidade oposta.

iii) Teoria Tipo IIB

A teoria do tipo IIB inclui apenas cordas fechadas, orientadas, com supersimetria $N = 2$, sem simetria de calibre e duas supercargas que possuem mesma quiralidade.

iv) Teoria Heterótica $SO(32)$

Uma teoria heterótica é uma espécie de fusão entre a Teoria das Cordas Bosônicas e a Teoria das Supercordas. Descrevem-se os modos que as cordas movem-se em uma direção utilizando a Teoria das Cordas Bosônicas e os modos que se movem na direção

oposta utilizando a supersimetria $N = 1$.

A teoria heterótica $SO(32)$ descreve cordas orientadas e fechadas. Evidentemente, seu grupo de calibre é o $SO(32)$.

v) Teoria Heterótica $E_8 \times E_8$

Essa teoria é similar a teoria heterótica $SO(32)$, mas possui grupo de calibre $E_8 \times E_8$.

2.4 Ação Lagrangiana para Cordas

Ao estudar Mecânica Clássica e Teoria Quântica de Campos, aprende-se o conceito de ação^[20–25] e como obter as equações de movimento a partir do princípio de Hamilton (*vide*apêndice C). Esse procedimento também pode ser feito para a Teoria das Cordas.

Nesta seção, serão apresentadas duas ações que são muito utilizadas para estudar a dinâmica de cordas bosônicas: a ação de Nambu-Goto e a ação de Polyakov. Porém, antes disso, será mostrada a ação para uma partícula pontual relativística e, então, essa ação será generalizada para o caso de duas dimensões.

É importante ressaltar que para uma descrição completa da dinâmica das cordas bosônicas, seria necessário obter as equações de movimento e, então, suas soluções. Porém, o objetivo aqui é apenas que haja uma familiarização com o formalismo matemático por trás da Teoria das Cordas. Também é necessário destacar o fato de que os casos aqui apresentados são os casos de maior simplicidade, tendo em vista que não incluem campos fermiônicos.

É possível encontrar na literatura^[1,2,5] uma descrição detalhada tanto da dinâmica das cordas bosônicas quanto das supercordas, assim como o procedimento necessário para quantizá-las e obter os estados de seu espectro.

2.4.1 Ação para uma Partícula Pontual Relativística

Inicialmente, imagina-se uma partícula pontual de massa m movendo-se em um espaço-tempo quadridimensional. O movimento da partícula é definido em relação às coordenadas do espaço-tempo X^μ , onde X^0 é a coordenada do tipo tempo ($X^0 = ct$) e X^i , com $i \neq 0$, são as coordenadas espaciais (x, y, z).

A linha de mundo descrita pela partícula é parametrizada pelo parâmetro real τ (tempo próprio), tal que

$$X^\mu = X^\mu(\tau). \quad (2.2)$$

No caso de três dimensões espaciais, a métrica de Minkowski é definida como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

ou mais compactamente por $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$.

Além disso, o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu. \quad (2.4)$$

Com as definições anteriores, é possível descrever a trajetória de uma partícula livre relativística como um problema variacional.

Sabe-se que a ação S deve ser proporcional ao comprimento invariante da trajetória da partícula. Então,

$$S = -\alpha \int ds, \quad (2.5)$$

tal que α é uma constante e $\hbar = c = 1$.

A ação deve ser adimensional e, para isso, é possível demonstrar que $\alpha = m^{[5]}$. Assim,

$$\begin{aligned} S &= -m \int ds \\ &= -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu} \\ &= -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde foi usada a seguinte notação:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}. \quad (2.7)$$

A equação (2.6) representa a ação de uma partícula pontual relativística.

2.4.2 Ação de Nambu-Goto

A ação (2.6) pode ser generalizada para o caso de uma corda bosônica varrendo uma folha de mundo bidimensional no espaço-tempo. Tendo em vista que a folha de

mundo possui duas dimensões, dois parâmetros serão necessários para parametrizá-la: $\xi^1 = \tau$ e $\xi^2 = \sigma$. O primeiro parâmetro é o tempo próprio e o segundo está relacionado ao comprimento ao longo da corda. Assim,

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (2.8)$$

Além disso, o elemento de linha é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \\ &= -g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &= -G_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que

$$G_{\alpha\beta} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \quad (2.10)$$

é a métrica induzida, que pode ser escrita matricialmente como

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} G_{\tau\tau} & G_{\tau\sigma} \\ G_{\sigma\tau} & G_{\sigma\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}X' \\ \dot{X}X' & X'^2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde a seguinte notação foi utilizada:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad (2.12)$$

$$X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (2.13)$$

Conforme foi visto anteriormente, a ação de uma partícula pontual é proporcional ao comprimento da linha de mundo por ela descrita. Generalizando para o caso de uma corda, espera-se que a ação seja proporcional à área da folha de mundo descrita pela corda. Assim,

$$S = -T \int dA, \quad (2.14)$$

tal que dA é um elemento diferencial de área da folha de mundo e T uma constante de proporcionalidade chamada de tensão da corda, que é dada por

$$T = \frac{1}{2\pi l_s^2}, \quad (2.15)$$

sendo l_s o comprimento da corda.

Sabe-se que em um dado espaço descrito por uma métrica $G_{\alpha\beta}$, o elemento de área pode ser escrito como

$$dA = \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})} d^2\xi. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.14), tem-se

$$\begin{aligned} S &= -T \int \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})} d^2\xi \\ &= -T \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-G} \\ &= -T \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $G = \det(G_{\alpha\beta})$ e a ação (2.17) é chamada de ação de Nambu-Goto.

2.4.3 Ação de Polyakov

A ação de Polyakov^[64,66] ou ação do modelo sigma é uma ação equivalente à ação de Nambu-Goto (leva às mesmas equações de movimento) e é dada por

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde $h_{\alpha\beta}$ é uma métrica da folha de mundo que atua como campo auxiliar, $h = \det(h_{\alpha\beta})$ e $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski.

3 TEORIA-M

3.1 Introdução

Tendo em vista que os diferentes tipos de corda são conectados por uma rede de dualidades, especula-se que exista uma teoria subjacente mais fundamental que a Teoria das Cordas chamada de Teoria-M^[7–12]. Essa letra “M” não possui nenhum significado acordado ou específico (talvez “mãe” de todas as teorias, matriz, membrana, mistério etc).

A Teoria-M é uma descrição não-perturbativa da Teoria das Cordas. Ela oferece uma maneira de relacionar as cinco Teorias das Supercordas e a Supergravidade^[26–28] 11-dimensional (SUGRA 11-D) através de uma complexa rede de dualidades, conforme é representado na Figura 9.

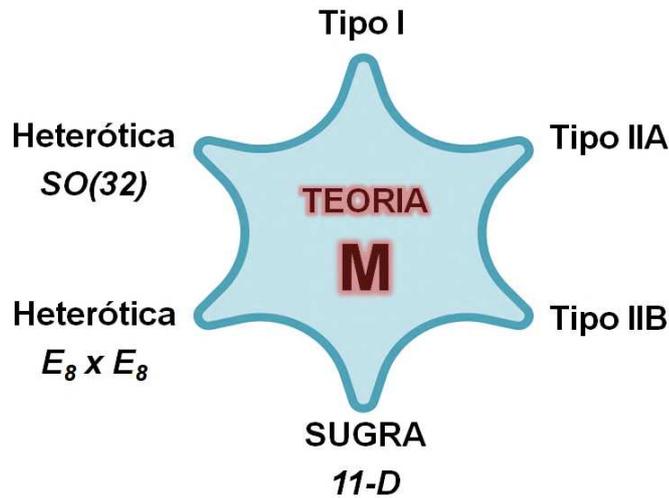


Figura 9 – Diagrama da rede de dualidades entre as várias Teorias das Supercordas, a Supergravidade e a Teoria-M.

De certo modo, a Teoria-M representa o objetivo final da unificação: a habilidade de existir uma única teoria capaz de descrever todos os fenômenos físicos. Até o momento, a Teoria-M não está completa e não possui comprovação experimental, porém, sua estrutura matemática já foi estabelecida e encontraram-se diversas aplicações, como o estudo das propriedades quânticas dos buracos negros, por exemplo.

3.2 p-Branas

A Teoria das Cordas e a Teoria-M incorporam objetos estendidos de dimensão superior chamados de branas. A palavra brana vem da palavra membrana, que é uma superfície bidimensional que separa duas regiões. A ideia de uma brana é generalizar esse conceito para considerar um objeto estendido p -dimensional que será chamado de p -brana. Uma partícula pontual é uma brana de dimensão $p = 0$; já uma corda é uma brana de

dimensão $p = 1$; uma membrana é uma brana de dimensão $p = 2$. Também existem branas de dimensão superior.

Assim como uma partícula varre uma linha de mundo unidimensional à medida que evolui no tempo e uma corda varre uma folha de mundo bidimensional, uma p -brana varre um volume de mundo d -dimensional, onde $d = p + 1$.

Se o número de dimensões espaciais da p -brana for igual ao número total de dimensões espaciais em todo o espaço-tempo, diz-se que a p -brana preenche completamente o espaço. Na Teoria das Cordas Bosônicas, por exemplo, existem 26 dimensões espaço-temporais e, portanto, para preencher completamente o espaço, seria necessária uma 25-brana.

As dimensões espaciais não associadas à brana são chamadas de *bulk*. O tempo flui tanto pela p -brana quanto pelo *bulk*. Um dos *insights* físicos mais interessantes que resultaram do estudo das p -branas é que as interações descritas pelo Modelo Padrão (eletromagnéticas, fortes e fracas) são restritas à brana, enquanto a força gravitacional está distribuída na brana e também nas demais dimensões, o que explicaria o porquê dessa força ser tão diferente das demais^[91].

A seguir, serão apresentados dois casos especiais de p -branas: as D_p -branas e as M_p -branas.

3.2.1 D_p -Branas

Um tipo recorrente de p -brana que aparece na Teoria das Cordas é a D_p -brana^[67–72]. Uma D_p -brana é um objeto estendido com p dimensões que recebe esse nome por estar associada às condições de contorno de Dirichlet. Na presença de uma D_p -brana, as extremidades de uma corda aberta fixam-se a essa brana (*vide* Figura 10).

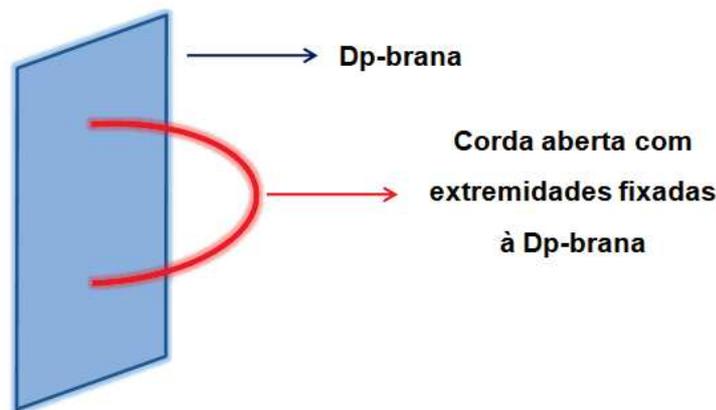


Figura 10 – Representação de uma corda aberta fixada a uma D_p -brana.

Na presença de múltiplas D_p -branas, a corda aberta tem duas opções: pode fixar

suas extremidades a uma mesma Dp-brana ou se esticar e fixar cada extremidade a uma diferente Dp-brana, conforme é apresentado na Figura 11.

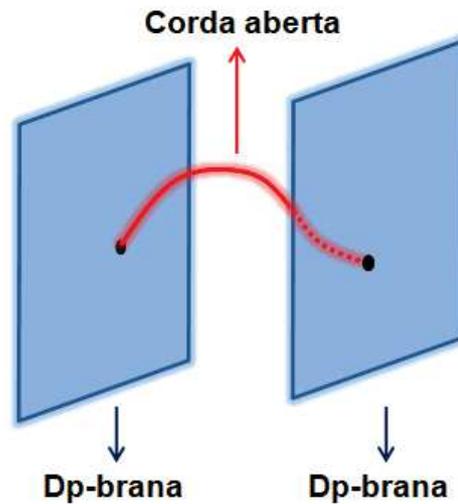


Figura 11 – Corda aberta fixada a duas diferentes Dp-branas.

A ação de Born-Infeld^[65,66], algumas vezes referida como ação de Dirac-Born-Infeld, embora originalmente utilizada na eletrodinâmica não-linear, pode ser aplicada para descrever a dinâmica de Dp-branas. Essa ação é dada por

$$S = -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})}, \quad (3.1)$$

em que $F_{\mu\nu}$ é a representação tensorial do campo de Maxwell na folha de mundo, $G_{\mu\nu}$ é a métrica induzida, $B_{\mu\nu}$ é um campo antissimétrico e T é a tensão da Dp-brana, dada por

$$T = \frac{1}{g_s} \frac{2\pi}{(2\pi l_s)^{p+1}}. \quad (3.2)$$

A quantização de cordas abertas na presença de diferentes tipos de Dp-brana é um assunto com importantes implicações para a construção de modelos físicos realistas que envolvam cordas e, além disso, o estudo das Dp-branas e dos campos gravitacionais que elas produzem tem levado a novas ideias naquilo que se refere a teorias de calibre que interagem fortemente.

3.2.2 Mp-Branas

Na Teoria-M, existem as Mp-branas (evidentemente, recebem esse nome pois fazem parte da teoria-M), mais especificamente, tem-se as M2-branas^[80–86] e as M5-branas^[92]. Embora a dinâmica de uma única Mp-brana seja bem entendida, pouco se sabe sobre as múltiplas Mp-branas. Apenas recentemente, esforços foram direcionados à descrição Lagrangiana do volume de mundo de múltiplas M2-branas. Esse trabalho começou com

Bagger e Lambert e, independentemente, Gustavsson. Eles propuseram uma teoria baseada em uma nova estrutura algébrica chamada tri-álgebra de Lie. Essa teoria é conhecida como Teoria BLG e será descrita no próximo capítulo.

3.3 Cronologia da Teoria das Cordas e da Teoria-M

Agora que os principais conceitos que envolvem a Teoria das Cordas e a Teoria-M foram discutidos, apresenta-se na Figura 12 um infográfico com os principais fatos que marcaram ambas teorias em ordem cronológica.

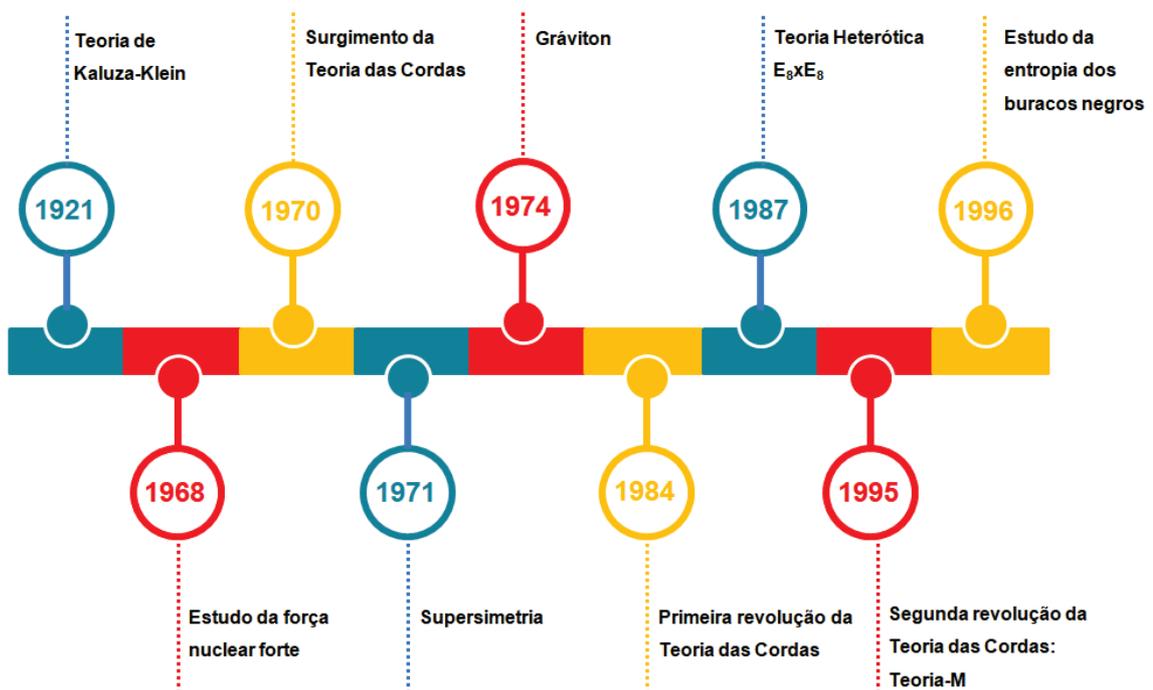


Figura 12 – Cronologia dos fatos que marcaram a Teoria das Cordas e a Teoria-M.

Em 1921, foi publicada a teoria conhecida como teoria de Kaluza-Klein^[50–54] (em homenagem aos físicos Theodor Kaluza e Oskar Klein). Essa teoria é baseada na Relatividade Geral e começou a ser desenvolvida com o objetivo de unificar as forças eletromagnética e gravitacional. Todas as Teorias das Cordas são teorias de Kaluza-Klein combinadas aos princípios de quantização.

Em 1968, ao estudar as propriedades da força nuclear forte, o físico Gabriele Veneziano^[55,56] percebeu que todas as partículas que experimentam essa interação poderiam ser descritas pela Função Beta de Euler (em homenagem ao matemático Leonhard Euler). A explicação do modelo de Gabriele Veneziano surgiu apenas dois anos após com o nascimento da Teoria das Cordas.

Em 1970, a Teoria das Cordas foi criada quando três físicos (Yoichiro Nambu, Holger Nielsen e Leonard Susskind)^[57,58] interpretaram o modelo de Gabriele Veneziano

mostrando que as partículas elementares eram formadas por cordas unidimensionais e vibrantes.

Em 1971, a supersimetria foi incorporada à Teoria das Cordas pelos físicos Pierre Ramond, John Schwarz e Andre Neveu^[59,60].

Em 1974, os físicos John Schwarz e Joel Scherk e, independentemente, Tamiaki Yoneya, estudaram os padrões de vibração de cordas e descobriram que suas propriedades correspondiam às do gráviton.

Em 1984, ocorreu a primeira revolução da Teoria das Cordas. John Schwarz e Michael Green descobriram que anomalias matemáticas da Teoria das Cordas eram convenientemente canceladas.

Em 1987, descobriu-se que a Teoria Heterótica $E_8 \times E_8$ poderia explicar a matéria escura^[61].

Em 1995, ocorreu a segunda revolução da Teoria das Cordas. Durante uma palestra, o físico Edward Witten propôs que houvesse dualidades envolvidas entre as cinco versões da Teoria das Cordas, de modo que todas pudessem ser consideradas como manifestações de uma única teoria, nomeada por ele de Teoria-M^[62].

Ainda por volta de 1995, o físico Joseph Polchinski^[93] investigou as ideias propostas por Witten e provou que as dualidades entre as cinco versões das Teorias das Cordas não existiriam, a menos que houvesse versões de cordas com dimensões superiores, como membranas. Ele generalizou as membranas bidimensionais e chamou as estruturas generalizadas de p-branas.

Em 1996, utilizando as conclusões de Polchinski, os físicos Andrew Strominger e Cumrun Vafa analisaram a termodinâmica dos buracos negros^[63].

De 1996 até os dias atuais, pesquisadores têm contribuído para o avanço da Teoria-M e vários trabalhos foram publicados nesse período. Podem ser citados como exemplos os trabalhos publicados entre os anos de 2007 e 2009 pelos físicos Bagger, Lambert e Gustavsson^[13–17] com o intuito de descrever a dinâmica de múltiplas M2-branas.

4 MODELO BLG

4.1 Introdução

O Modelo BLG^[13–17] faz parte de uma teoria efetiva de campo que descreve múltiplas M2-branas com supersimetria $N = 8$. Essa teoria, proposta por Bagger, Lambert e Gustavsson, é baseada em uma tri-álgebra de Lie^[75–79], que é definida pelo uso de um tri-comutador.

Embora a construção com a tri-álgebra de Lie não seja a única solução, o Modelo BLG é de grande valor, uma vez que foi o primeiro a descrever um sistema de múltiplas M2-branas.

A motivação para utilizar uma estrutura de tri-comutadores surge de uma equação proposta por Basu e Harvey. Essa equação, por sua vez, é uma extensão da equação de Nahm. Por essa razão, ambas equações serão apresentadas na próxima seção.

4.2 Equação de Nahm e Equação de Basu-Harvey

4.2.1 Equação de Nahm para um Sistema de D1-D3-Branas

A equação de Nahm^[73,74] é empregada no estudo de monopolos magnéticos, porém, também possui aplicação na Teoria das Cordas para descrever múltiplas D1-branas coincidentes convergindo para uma única D3-brana.

Aqui, toma-se o volume de mundo das D1-branas ao longo das direções 0 e 9, enquanto o volume de mundo da D3-brana estende-se ao longo das direções 0, 1, 2 e 3, conforme é mostrado no quadro da Figura 13.

Dimensão	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D1	x	x
D3	x	x	x	x

Figura 13 – Dimensões ocupadas pelas Dp-branas. O símbolo "x" indica por onde a brana estende-se e o símbolo "." por onde ela não se estende.

A situação esquemática que representa as D1-branas coincidentes convergindo para uma única D3-brana é representada na Figura 14. É possível ver que as direções espaciais 1, 2 e 3 ao longo do volume de mundo da D3-brana são transversais às D1-branas, cuja posição é codificada pelo campo escalar X^9 .

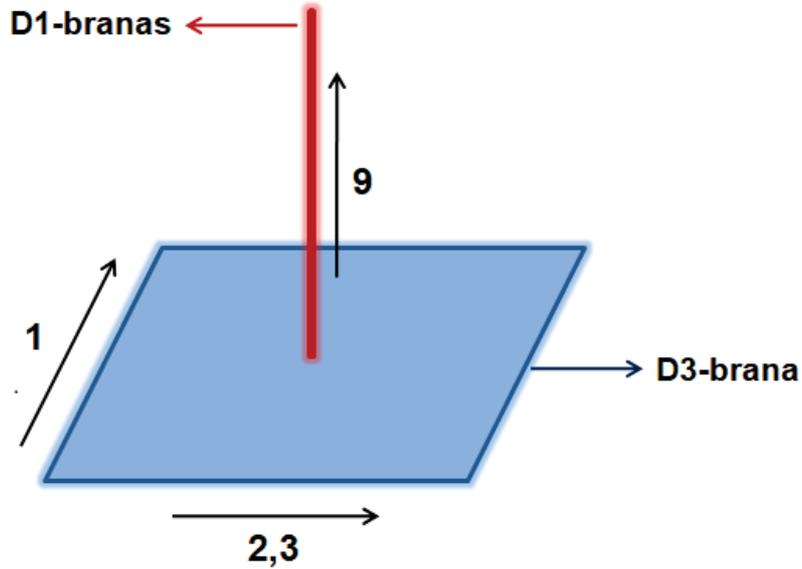


Figura 14 – Múltiplas D1-branas na direção 9 convergindo para uma única D3-brana nas direções 1, 2 e 3.

Sob a perspectiva das D1-branas, a equação de Nahm é dada por

$$\frac{\partial X^i}{\partial X^9} \pm \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} [X^j, X^k] = 0, \quad (4.1)$$

tal que ε^{ijk} é o tensor de Levi-Civita, sendo $i, j, k = 1, 2, 3$. A equação (4.1) possui a seguinte solução:

$$X^i = \pm \frac{1}{2X^9} \tau^i, \quad (4.2)$$

onde os τ^i 's são geradores da álgebra de Lie do $SU(2)$ que satisfazem a relação de comutação

$$[\tau^i, \tau^j] = 2i\varepsilon^{ijk} \tau^k. \quad (4.3)$$

Considerando que τ^i esteja na representação irredutível N -dimensional tal que seu Casimir quadrático é expresso por

$$C = \sum_{i=1,2,3} \tau^i \tau^i = N^2 - 1, \quad (4.4)$$

a solução (4.2), em X^9 , descreve um funil com raio R dado por

$$R = \sqrt{\sum_i (X^i)^2} = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{2X^9}, \quad (4.5)$$

conforme é apresentado na Figura 15.

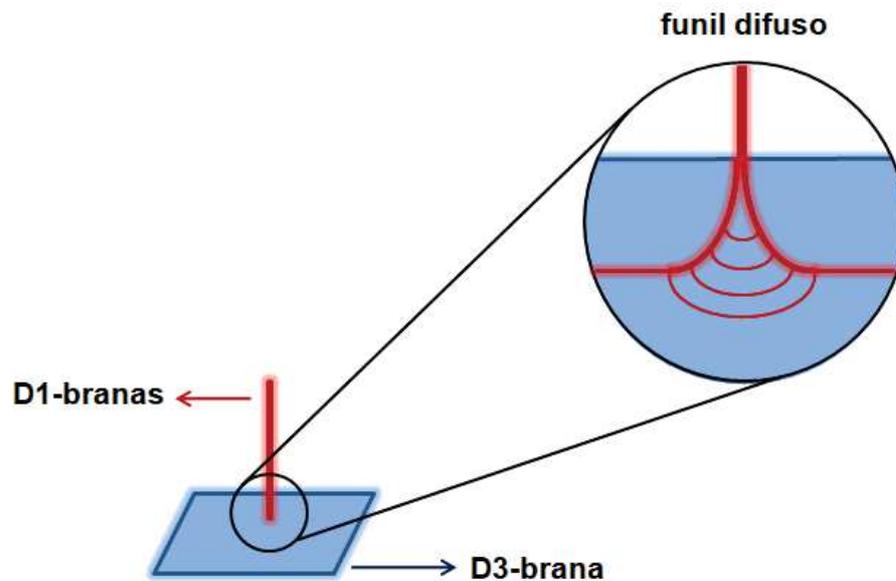


Figura 15 – Múltiplas D1-branas convergindo para uma única D3-brana formando um funil difuso.

4.2.2 Equação de Basu-Harvey para um Sistema de M2-M5-Branas

A equação de Basu-Harvey^[18,19] é uma extensão da equação de Nahm que descreve como múltiplas M2-branas coincidentes convergem para uma única M5-brana. Considere-se, agora, que o volume de mundo das M2-branas esteja ao longo das direções 0, 1 e 9, enquanto o volume de mundo da M5-brana estende-se ao longo das direções 0, 1, 2, 3, 4 e 5, conforme é apresentado no quadro da Figura 16.

Dimensão	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M2	x	x	x	.
M5	x	x	x	x	x	x

Figura 16 – Dimensões ocupadas pelas Mp-branas. O símbolo "x" indica por onde a brana estende-se e o símbolo "." por onde ela não se estende.

A Figura 17 mostra uma representação esquemática de como as M2-branas coincidentes convergem para uma única M5-brana. É possível observar que as direções espaciais 1, 2, 3, 4 e 5 ao longo do volume de mundo da M5-brana são transversais à direção 9 das M2-branas, enquanto a direção 1 é compartilhada por ambas.

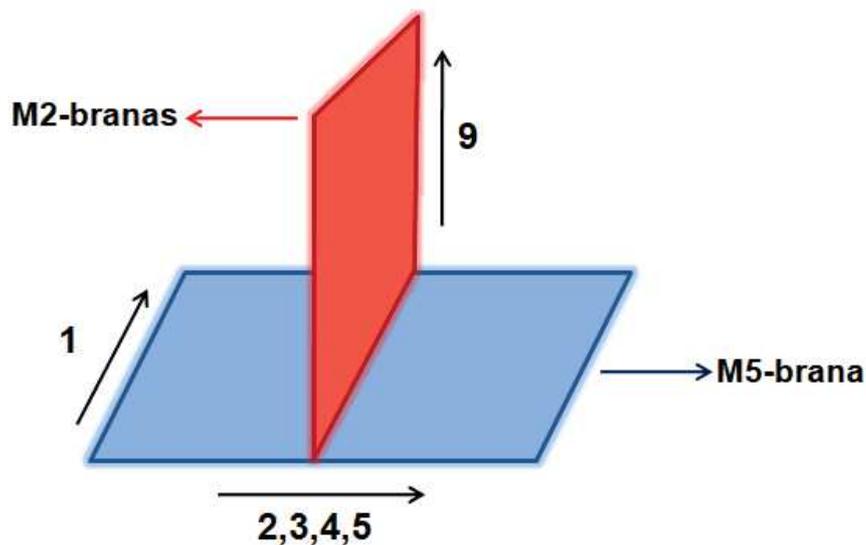


Figura 17 – Múltiplas M2-branas convergindo para uma única M5-brana.

Sob a perspectiva das M2-branas, a equação de Basu-Harvey é dada por:

$$\frac{\partial X^i}{\partial X^9} + \frac{\lambda M^3}{8\pi} \epsilon^{ijkl} [X^i, X^j, X^k] = 0, \quad (4.6)$$

em que M é a massa de Planck, λ é um parâmetro arbitrário e $i, j, k, l = 2, 3, 4, 5$. A equação (4.6) possui a seguinte solução:

$$X^i = \frac{G^i}{\sqrt{X^9}}, \quad (4.7)$$

onde os G^i 's são geradores do grupo $SO(4)$ que satisfazem a relação

$$[G^i, G^j, G^k] = \epsilon^{ijkl} G^l. \quad (4.8)$$

A solução (4.6) representa um funil difuso, conforme é apresentado na Figura 18.

Nas equações (4.6) e (4.8) percebe-se a presença dos tri-comutadores que motivaram a utilização de uma tri-álgebra na Teoria BLG. Na próxima seção, apresenta-se a definição desse tipo de álgebra.

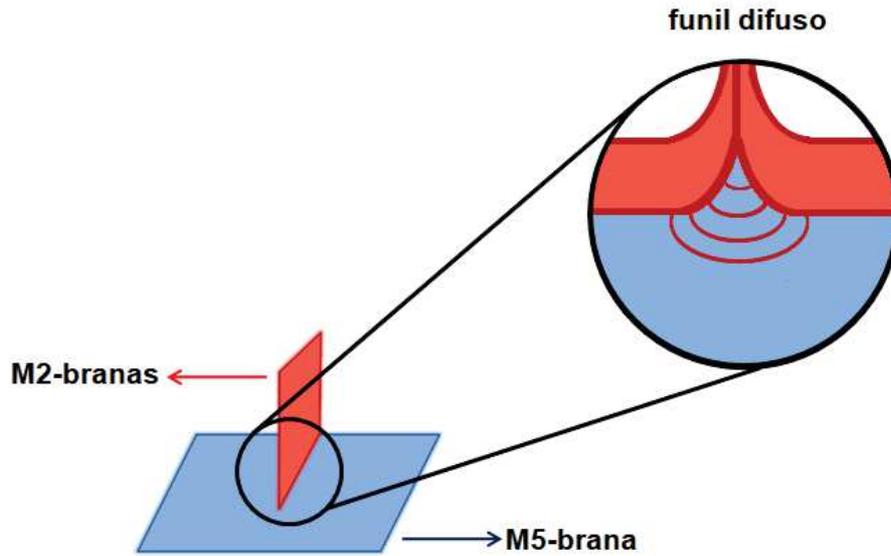


Figura 18 – Múltiplas M2-branas convergindo para uma única M5-brana formando um funil difuso.

4.3 Tri-álgebra

Uma tri-álgebra \mathcal{A} é um espaço vetorial com N dimensões dotado de um produto tri-linear $[A, B, C]$ definido como

$$[A, B, C] = \langle A, B, C \rangle + \langle B, C, A \rangle + \langle C, A, B \rangle - \langle A, C, B \rangle - \langle B, A, C \rangle - \langle C, B, A \rangle, \quad (4.9)$$

onde $\langle A, B, C \rangle = (A.B).C - A.(B.C)$ é o associador e o produto tri-linear $[A, B, C]$ satisfaz a seguinte identidade fundamental:

$$[A, B, [C, D, E]] = [[A, B, C], D, E] + [C, [A, B, D], E] + [C, D, [A, B, E]]. \quad (4.10)$$

A identidade anterior estende a familiar identidade de Jacobi da álgebra de Lie às tri-álgebras.

O operador traço da álgebra \mathcal{A} é um mapa bilinear ($Tr : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$) simétrico, invariante e que deve satisfazer às seguintes relações:

$$tr(A, B) = tr(B, A), \quad (4.11)$$

$$tr(A.B, C) = tr(A, B.C), \quad (4.12)$$

$$tr([A, B, C], D) = -tr(A, [B, C, D]). \quad (4.13)$$

Seja $\{T^a\}_{1 \leq a \leq N}$ uma base de \mathcal{A} , a tri-álgebra é especificada pelas constantes de estrutura f^{abc}_d de \mathcal{A} , isto é,

$$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}_d T^d. \quad (4.14)$$

Por meio da equação (4.13), vê-se que a constante de estrutura $f^{abc}{}_d$ deve ser completamente antissimétrica sob mudança de índices, ou seja, $f^{abcd} = -f^{dbca}$.

Utilizando (4.10) e (4.14), obtém-se a seguinte identidade fundamental:

$$f^{efg}{}_d f^{abc}{}_g = f^{efa}{}_g f^{bcg}{}_d + f^{efb}{}_g f^{cag}{}_d + f^{efc}{}_g f^{abg}{}_d. \quad (4.15)$$

Essa equação é chamada de identidade fundamental da tri-álgebra e é análoga à identidade de Bianchi para a álgebra de Lie.

4.4 Ação BLG

A ação supersimétrica para múltiplas M2-branas, proposta pelo Modelo BLG^[13–17], apresenta os campos sem massa X_a^I , Ψ_a e $A_{\mu ab}$. Essa ação é dada por

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{g_{BLG}^2} \int d^3x \left[-\frac{1}{2} D_\mu X^{aI} D^\mu X_a^I + \frac{i}{2} \bar{\Psi}_a \Gamma^\mu D_\mu \Psi_a + \frac{i}{4} \bar{\Psi}_b \Gamma_{IJ} X_c^I X_d^J \Psi_a f^{abcd} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (f^{abcd} A_{\mu ab} \partial_\nu A_{\lambda cd} + \frac{2}{3} f^{cda}{}_g f^{efgb} A_{\mu ab} A_{\nu cd} A_{\lambda ef}) - V(X) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $V(X)$ é o potencial dado por

$$V(X) = \frac{1}{12} f^{abcd} f^{efg}{}_d X_a^I X_b^J X_c^K X_e^I X_f^J X_g^K. \quad (4.17)$$

Abaixo, destacam-se os seguintes termos apresentados na ação (4.16):

- $X_a^I \rightarrow$ Campo escalar com $I = 1, 2, \dots, 8$.
- $\Psi_a \rightarrow$ Campo fermiônico. É um espinor de Majorana de 16 componentes que satisfaz a seguinte relação:

$$\Gamma^{012} \Psi^a = -\Psi^a, \quad (4.18)$$

onde

$$\Gamma^{012} \epsilon = \epsilon, \quad (4.19)$$

em que ϵ é um parâmetro de supersimetria.

- $A_{\mu ab} \rightarrow$ Campo de calibre com $\mu = 0, 1, 2$.
- $g_{BLG} \rightarrow$ Constante de acoplamento da teoria BLG.
- $\Gamma^I \rightarrow$ Matrizes de Dirac.

- $\Gamma^{IJ} \rightarrow \Gamma^{IJ} = \frac{1}{2}(\Gamma^I \Gamma^J - \Gamma^J \Gamma^I)$.
- $D_\mu \rightarrow$ Derivada covariante definida pela seguinte expressão:

$$D_\mu = \partial_\mu - \tilde{A}_\mu{}^b{}_a \quad (4.20)$$

tal que

$$\tilde{A}_\mu{}^b{}_a = f^{cda} A_{\mu cd}. \quad (4.21)$$

Vale destacar que os campos $A_{\mu ab}$ que aparecem no termo de Chern-Simons^[47-49] não são campos físicos.

A teoria BLG é invariante sob às seguintes transformações supersimétricas:

$$\delta X_a^I = i\bar{\epsilon} \Gamma^I \Psi_a, \quad (4.22)$$

$$\delta \Psi_a = D_\mu X_a^I \Gamma^\mu \Gamma^I \epsilon - \frac{1}{6} X_b^I X_c^J X_d^K f^{bcd}{}_a \Gamma^{IJK} \epsilon, \quad (4.23)$$

$$\delta \tilde{A}_\mu{}^b{}_a = i\bar{\epsilon} \Gamma_\mu \Gamma_I X_c^I \Psi_d f^{cdb}{}_a. \quad (4.24)$$

Além disso, apresenta as seguintes equações de movimento:

$$\Gamma^\mu D_\mu \Psi_a + \frac{1}{2} \Gamma_{IJ} X_c^I X_d^J \Psi_b f^{cdb}{}_a = 0, \quad (4.25)$$

$$D^2 X_a^I - \frac{i}{2} \bar{\Psi}_c \Gamma^I X_d^J \Psi_b f^{cdb}{}_a + \frac{1}{2} f^{bcd}{}_a f^{efg}{}_d X_b^J X_c^K X_e^I X_f^J X_g^K = 0, \quad (4.26)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}{}^a{}_b + \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left(X_c^I D^\lambda X_d^I + \frac{i}{2} \bar{\Psi}_c \Gamma^\lambda \Psi_d \right) f^{cdb}{}_a = 0, \quad (4.27)$$

sendo $D^2 = D_\mu D^\mu$ e $\tilde{F}_{\mu\nu}{}^a{}_b$ dado por

$$\tilde{F}_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\nu \tilde{A}_\mu{}^a{}_b - \partial_\mu \tilde{A}_\nu{}^a{}_b - \tilde{A}_\mu{}^a{}_c \tilde{A}_\nu{}^c{}_b + \tilde{A}_\nu{}^a{}_c \tilde{A}_\mu{}^c{}_b. \quad (4.28)$$

4.5 Redução Dimensional do Modelo BLG para Duas Dimensões

A compactação de uma teoria significa efetuar uma mudança em suas dimensões espaço-temporais. Uma teoria pode ser redefinida em um número de dimensões menor. Para tal propósito, é necessário assumir que as dimensões a serem compactadas tenham comprimento finito. No limite em que o tamanho da dimensão compactada tende a

zero, nenhum campo dependerá dessa dimensão extra e a teoria estará dimensionalmente reduzida^[81,84,86].

Nesta seção, apresenta-se a ação do Modelo BLG em duas dimensões. Para obter tal ação, faz-se uma redução dimensional ao longo de uma direção interna das M2-branas (que será denotada por y). Essa dimensão foi compactada em um círculo de comprimento $L = 2\pi R$. Além disso, os campos foram considerados periódicos com respeito à direção y , ou seja, para qualquer campo $f(x^\mu, y)$ tem-se que $f(x^\mu, y) = f(x^\mu, y + L)$. Desta forma, torna-se possível expandir os campos em série de Fourier.

Para obter uma teoria de campo sem massa em duas dimensões, toma-se o limite em que $R \rightarrow 0$. Após extensos cálculos^[87] e reescalando os campos por um fator $(2\pi R)^{1/2}$, obtém-se a seguinte ação:

$$\begin{aligned}
S_0 = \int d^2x \mathcal{L} = \frac{\pi R}{g^2} & \left[-D_\alpha X^{aI} D^\alpha X_a^I - \frac{1}{R^3} \Phi_{cd} f^{cdba} X_b^I \Phi_{lp} f^{lps}{}_a X_s^I + \right. \\
& + f^{abcd} \epsilon^{\alpha\beta} (A_{\alpha ab} \partial_\beta \Phi_{cd} + \Phi_{ab} \partial_\alpha A_{\beta cd}) + i \left(\bar{\Psi}^a \Gamma^\alpha D_\alpha \Psi_a - \frac{1}{R} \bar{\Psi}^a \Gamma^2 \Phi_{cd} f^{cdb}{}_a \Psi_b \right) + \\
& + \frac{i}{2} f^{abcd} \bar{\Psi}_b \Gamma_{IJ} X_c^I X_d^J \Psi_a - \frac{1}{6} f^{abcd} f^{efg}{}_d X_a^I X_b^J X_c^K X_d^I X_e^J X_f^K + \\
& \left. + \frac{2}{3} f^{abc}{}_g f^{defg} \epsilon^{\alpha\beta} (A_{\alpha ab} A_{\beta cd} \Phi_{ef} - A_{\alpha ab} \Phi_{ab} A_{\beta ef} + \Phi_{ab} A_{\alpha cd} A_{\beta ef}) \right]. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

A ação (4.29) descreve uma nova teoria de campo efetiva bidimensional onde $\alpha = 0, 1$ são os índices da folha de mundo bidimensional, $g = g_{BLG} R^{-\frac{1}{2}}$ é a nova constante de acoplamento e o campo de calibre $A_{\mu ab}$ foi dividido em um campo vetorial $A_{\alpha ab}$ e um campo escalar $A_{2ab} = \Phi_{ab}$.

5 MÉTODO DE QUANTIZAÇÃO DE DIRAC APLICADO AO MODELO BLG

5.1 Introdução

Neste capítulo, chega-se ao objetivo principal deste trabalho: aplicar o formalismo de quantização de Dirac para sistemas vinculados (vide Apêndices D e E) à Teoria BLG bidimensional descrita pela ação (4.29). Primeiramente, serão obtidos os momentos da teoria. Em seguida, todos os vínculos serão encontrados, o que possibilitará calcular os parênteses de Dirac e, conseqüentemente, efetuar a quantização do modelo.

5.2 Momentos Conjugados

Os momentos conjugados a X_n^M , A_{1nm} , A_{0nm} , Ψ_n , $\bar{\Psi}_n$ e Φ_{nm} foram obtidos, respectivamente, como mostrado a seguir:

i) **Momento conjugado a X_n^M :**

$$\pi^{nM} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_n^M} = \dot{X}^{nM} + X^{aM} \tilde{A}^{0n}_a. \quad (5.1)$$

ii) **Momento conjugado a A_{1nm} :**

$$p_1^{nm} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{1nm}} = -\frac{1}{2} f^{abnm} \Phi_{ab} = -\frac{1}{2} \tilde{\Phi}^{nm}. \quad (5.2)$$

iii) **Momento conjugado a A_{0nm} :**

$$p_0^{nm} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{0nm}} = X^{aI} f^{nmb}_a X_b^I. \quad (5.3)$$

iv) **Momento conjugado a Ψ_n :**

$$p_\Psi^n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_n} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}^n \Gamma^0. \quad (5.4)$$

v) **Momento conjugado a $\bar{\Psi}_n$:**

$$p_{\bar{\Psi}}^n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_n} = 0. \quad (5.5)$$

vi) **Momento conjugado a Φ_{nm} :**

$$p_{\Phi}^{nm} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_{nm}} = \frac{1}{2} f^{abnm} A_{1ab} = \frac{1}{2} \tilde{A}_1^{nm}. \quad (5.6)$$

Tomando os momentos dados pelas equações de (5.1) a (5.6), a ação (4.29) e a relação $\mathcal{H} = p_u \dot{\varphi} - \mathcal{L}$, obteve-se a seguinte densidade Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \pi^{aI} \pi_a^I + \pi_a^I \tilde{A}_0^{ba} X_b^I + \frac{1}{2} \partial_1 X^{aI} \partial^1 X_a^I - \partial^1 X_a^I \tilde{A}_1^{ba} X_b^I + \frac{1}{2} \tilde{A}_1^a{}_b X^{bI} \tilde{A}_1^a{}_b X_b^I + \\ & + \frac{1}{2R^3} \tilde{\Phi}^{ba} X_b^I \tilde{\Phi}^b{}_a X_b^I - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^a \Gamma^1 \partial_1 \Psi_a + \frac{i}{2} \bar{\Psi}^a \Gamma^\alpha \tilde{A}_\alpha{}^b{}_a \Psi_b + \frac{i}{2R} \bar{\Psi}^a \Gamma^2 \tilde{\Phi}^b{}_a \Psi_b + \\ & - \frac{i}{4} f^{abcd} \bar{\Psi}_b \Gamma_{IJ} X_c^I X_d^J \Psi_a + \frac{1}{2} (\tilde{A}_0^{cd} \partial_1 \Phi_{cd} - \tilde{\Phi}^{cd} \partial_1 A_{0cd}) + \\ & - \frac{1}{3} \epsilon^{\alpha\beta} (\tilde{A}_\alpha{}^c{}_g A_{\beta cd} \tilde{\Phi}^{gd} - \tilde{A}_\alpha{}^c{}_g \Phi_{cd} \tilde{A}_\beta{}^{gd} - \tilde{\Phi}^c{}_g A_{\alpha cd} \tilde{A}_\beta{}^{gd}) + \\ & - \frac{1}{6} f^{abcd} f^{efg} X_a^I X_b^J X_c^K X_e^I X_f^J X_g^K. \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.3 Vínculos da Teoria

Para sistemas singulares (sistemas em que o determinante da matriz hessiana é nulo), nem todas as equações definidoras dos momentos conjugados podem ser colocadas em função das velocidades (derivadas temporais dos campos), uma vez que não constituem um conjunto de equações independentes. Como consequência, surgem relações funcionais entre os campos e os momentos denominadas vínculos primários. As equações de (5.2) a (5.6) resultaram nos vínculos primários dados por

$$\chi_1^{nm} = p_1^{nm} + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^{nm} \approx 0, \quad (5.8)$$

$$\chi_2^{nm} = p_0^{nm} - X^{aI} f^{nmb}{}_a X_b^I \approx 0, \quad (5.9)$$

$$\chi_3^n = p_\Psi^n - \frac{i}{2} \bar{\Psi}^n \Gamma^0 \approx 0, \quad (5.10)$$

$$\chi_4^n = p_\Psi^n \approx 0, \quad (5.11)$$

$$\chi_5^{nm} = p_\Phi^{nm} - \frac{1}{2} \tilde{A}_1^{nm} \approx 0. \quad (5.12)$$

A densidade Hamiltoniana total \mathcal{H}_T pôde, então, ser escrita como

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \lambda^{(1)} \chi_1^{nm} + \lambda^{(2)} \chi_2^{nm} + \lambda^{(3)} \chi_3^n + \lambda^{(4)} \chi_4^n + \lambda^{(5)} \chi_5^{nm}, \quad (5.13)$$

onde os λ 's são os multiplicadores de Lagrange e \mathcal{H} é dado pela equação (5.7).

Obtidos os vínculos primários da teoria, procurou-se por vínculos secundários utilizando a relação de consistência que afirma que vínculos primários não evoluem no tempo, isto é,

$$\dot{\chi}^{nm} = \{\chi^{nm}, H_T\} \approx 0, \quad (5.14)$$

onde $H_T = \int d^2x \mathcal{H}_T$. Obteve-se, então, a partir do vínculo primário χ_2^{nm} , dado pela equação (5.9), o seguinte vínculo secundário:

$$\begin{aligned} \chi_6^{qv} &= \partial_1 \tilde{\Phi}^{qv} - \frac{i}{2} \bar{\Psi}^a \Gamma^0 f^{qvb} \Psi_b + f^{qvab} \pi_a^I X_b^I + 2f^{qvab} \tilde{A}_{0ag} X_b^I X^{gI} + \\ &- \frac{1}{3} \left(f^{qvc} {}_g A_{1cd} \tilde{\Phi}^{vg} - \tilde{A}_1{}^q {}_g \tilde{\Phi}^{vg} - f^{qvc} {}_g \Phi_{cd} \tilde{A}_1{}^{dg} + \tilde{A}_1{}^c {}_g f^{dqvg} \Phi_{cd} + \right. \\ &+ \left. \tilde{\Phi}^q {}_g \tilde{A}_1{}^{vg} - \tilde{\Phi}^c {}_g f^{dqvg} A_{1cd} \right) + \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Assim, acrescentou-se o novo vínculo χ_6^{qv} à densidade Hamiltoniana total, obtendo-se que

$$\mathcal{H}_T^{(1)} = \mathcal{H} + \lambda^{(1)} \chi_1^{nm} + \lambda^{(2)} \chi_2^{nm} + \lambda^{(3)} \chi_3^n + \lambda^{(4)} \chi_4^n + \lambda^{(5)} \chi_5^{nm} + \eta_{qv}^{(1)} \chi_6^{qv}, \quad (5.16)$$

onde os λ 's e o η são os multiplicadores de Lagrange, que se mantêm indeterminados.

Utilizando a relação de consistência dada por (5.14), verificou-se que o vínculo χ_6^{qv} não levava a novos vínculos. Obtiveram-se, desta forma, todos os vínculos da teoria.

Sabe-se que na terminologia de Dirac a classificação dos vínculos como de primeira e segunda classe é mais importante que a classificação como vínculos primários e secundários. Dentre os vínculos primários dados pelas equações de (5.8) a (5.12), apenas o vínculo dado por (5.9) era de primeira classe, sendo todos os demais de segunda classe. A partir do momento que se obteve o vínculo dado por (5.15), todos os vínculos tornaram-se de segunda classe.

5.4 Parênteses de Dirac

Agora que todos os vínculos da teoria foram obtidos, é possível calcular os parênteses de Dirac pela definição abaixo:

$$\begin{aligned} \{A(x, t), B(x, t)\}_D &= \{A(x, t), B(x, t)\} + \\ &- \int d^2x \{A(x, t), \chi_i(z, t)\} C_{ij}^{-1}(z, w) \{\chi_j(w, t), B(x, t)\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $C_{ij}^{-1}(z, w)$ é a matriz inversa de $C_{ij}(z, w) = \{\chi_i(z), \chi_j(w)\}$, que é expressa por

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f^{nmqv} & F^{nmqv} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{nmqv} \\ 0 & 0 & 0 & iB^{nm} & 0 & i\bar{D}^{nmq} \\ 0 & 0 & -iB^{nm} & 0 & 0 & -iD^{nmq} \\ -f^{nmqv} & 0 & 0 & 0 & 0 & E^{nmqv} \\ -F^{nmqv} & -J^{nmqv} & -i\bar{D}^{nmq} & -iD^{nmq} & -E^{nmqv} & L^{nmqv} \end{bmatrix} \delta^2(x - y).$$

em que

$$\begin{aligned} F^{nmqv} \delta^2(x - y) &= \{\chi_1^{nm}(x, t), \chi_6^{qv}(y, t)\} \\ &= -\frac{1}{3} \left(f^{qvn}{}_g f^{efgm} - f^{nmq}{}_g f^{efgv} - f^{qve}{}_g f^{nmgf} + f^{qv}{}_g f^{nme}{}_g + \right. \\ &\quad \left. + f^{nmqv}{}_g f^{efq}{}_g - f^{qvgm}{}_g f^{efn}{}_g \right) \Phi_{ef}(y) \delta^2(x - y), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$J^{nmqv} \delta^2(x - y) = \{\chi_2^{nm}(x, t), \chi_6^{qv}(y, t)\} = 2f^{qv}{}_a f^{nmac} X_b^I X_c^I \delta^2(x - y), \quad (5.19)$$

$$iB^{nm} \delta^2(x - y) = \{\chi_3^n(x, t), \chi_4^m(y, t)\} = \frac{i}{2} \Gamma^0 \delta^{nm} \delta^2(x - y), \quad (5.20)$$

$$i\bar{D}^{nmq} \delta^2(x - y) = \{\chi_3^n(x, t), \chi_6^{mq}(y, t)\} = \frac{i}{2} \Gamma^0 f^{nmq}{}_a \bar{\Psi}^a \delta^2(x - y), \quad (5.21)$$

$$-iD^{mq}{}_n \delta^2(x - y) = \{\chi_4^n(x, t), \chi_6^{mq}(y, t)\} = -\frac{i}{2} \Gamma^0 f^{mqb}{}_n \Psi^b \delta^2(x - y), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} E^{nmqv} \delta^2(x - y) &= \{\chi_5^{nm}(x, t), \chi_6^{qv}(y, t)\} = -\partial_1 \delta^2(x - y) - \frac{1}{3} \left(f^{qvn}{}_g f^{efgm} + \right. \\ &\quad - f^{nmq}{}_g f^{efgv} - f^{qve}{}_g f^{nmgf} + f^{qv}{}_g f^{nme}{}_g + \\ &\quad \left. + f^{nmqv}{}_g f^{efq}{}_g - f^{qvgm}{}_g f^{efn}{}_g \right) A_{1ef}(y) \delta^2(x - y), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} L^{nmqv} \delta^2(x - y) &= \{\chi_6^{nm}(x, t), \chi_6^{qv}(y, t)\} = (f^{nmab} f^{qvbd} - f^{qvab} f^{nmbd}) \pi_a^I X_d^I \delta^2(x - y) + \\ &\quad + 4f^{nmab} f^{qvbd} \tilde{A}_{0ac} X_b^I X_d^I + 2 \left(f^{nmab} f^{qvca} + \right. \\ &\quad \left. - f^{qvab} f^{nmc}{}_a \right) \tilde{A}_{0ae} X_b^I X_e^I \delta^2(x - y). \end{aligned} \quad (5.24)$$

A matriz C_{ij} não é singular, isto é, $\det(C_{ij}) \neq 0$. Então, é possível calcular a matriz inversa C_{ij}^{-1} pela relação

$$\int C_{ij}(x, z)C_{jk}^{-1}(z, y)d^2z = \delta_{ik}\delta^2(x - y), \quad (5.25)$$

que, após extensos cálculos, leva a

$$C_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & EJ^{-1}f^{-1} & 0 & 0 & -f^{-1} & 0 \\ -J^{-1}Ef^{-1} & J^{-1}LJ^1 & 0 & 0 & J^{-1}Ff^{-1} & -J^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & iB^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iB^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ f^{-1} & -FJ^{-1}f^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^2(x - y).$$

Utilizando a definição dada pela equação (5.17), chegam-se aos seguintes parênteses de Dirac, envolvendo as variáveis canônicas da teoria^[89]:

$$\{X_a^I(x, t), \pi^{bJ}(y, t)\}_D = \delta_a^b \delta^{IJ} \delta^2(x - y) + f^{nmc} {}_a X_c^I J_{nmqv} \Sigma^{qv, J} \delta^2(x - y), \quad (5.26)$$

$$\{A_{1ab}(x, t), p_1^{cd}(y, t)\}_D = \delta_a^c \delta_b^d \delta^2(x - y) - \frac{1}{2} f_{abef} f^{efcd} \delta^2(x - y), \quad (5.27)$$

$$\{\Phi_{ab}(x, t), p_\Phi^{cd}(y, t)\}_D = \delta_a^c \delta_b^d \delta^2(x - y) - \frac{1}{2} f_{abef} f^{efcd} \delta^2(x - y), \quad (5.28)$$

$$\{A_{0cd}(x, t), p_0^{cd}(y, t)\}_D = \delta_a^c \delta_b^d \delta^2(x - y) - J_{abqv} J^{qvcd} \delta^2(x - y), \quad (5.29)$$

$$\{\Psi_a(x, t), \bar{\Psi}_b(y, t)\}_D = -\frac{i}{2} \Gamma_0^{-1} \delta_{ab} \delta^2(x - y), \quad (5.30)$$

onde J_{nmqv} é dado pela equação (5.19) e $\Sigma^{qv, J}$ é dado por

$$\Sigma^{qv, J} = -f^{qvab} \pi_a^J + 2f^{qvac} \tilde{A}_{0a}{}^b X_c^J + 2f^{nmab} \tilde{A}_{0ad} X^{dJ}. \quad (5.31)$$

A quantização canônica é padrão e direta, ou seja,

$$\{A, B\}_D = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (5.32)$$

Considerando o formalismo de Dirac, o modelo BLG bidimensional é considerado um modelo de segunda classe, uma vez que todos os seus vínculos não comutam entre si quando se considera a álgebra dos parênteses de Poisson. Esse resultado expressa o fato desse modelo não ser invariante de calibre.

6 CONCLUSÃO

A incorporação da gravidade na formulação da Mecânica Quântica é um dos desafios que a Física Moderna enfrenta. Nesse cenário, espera-se que a Teoria das Cordas e a Teoria-M sejam capazes de solucionar esse mistério. Essas duas teorias são relativamente novas, ainda fazem parte de um trabalho em andamento e apresentam vários conceitos não usuais, como, por exemplo: o fato dos objetos serem compostos por cordas e p-branas vibrantes; os bósons e férmions serem relacionados pelo princípio da supersimetria; a existência de dimensões extras (geralmente não observáveis) etc. Dentro desse contexto, muito estudo foi desenvolvido para a descrição da dinâmica das cordas e p-branas. Nesta tese, voltou-se a atenção a um modelo que tem o intuito de entender a dinâmica de múltiplas M2-branas: o Modelo BLG.

O Modelo BLG é formulado em termos de uma tri-álgebra a partir dos campos sem massa X_a^I , Ψ_a e $A_{\mu ab}$. Para a descrição dessa teoria, utiliza-se uma estrutura de tri-comutadores. A ideia de tal estrutura veio da equação de Basu-Harvey, que é dada pela equação (4.6). Essa equação é uma generalização da equação de Nahm, expressa por (4.1). Desta forma, Bagger, Lambert e Gustavsson obtiveram uma ação que é descrita pela equação (4.16).

Apresentou-se, então, a ação do modelo BLG em duas dimensões. Essa ação é dada pela equação (4.29) e para obtê-la, fez-se uma redução dimensional ao longo de uma direção interna das M2-branas. Utilizando o formalismo de quantização de Dirac para sistemas vinculados, explorou-se à Teoria BLG bidimensional descrita anteriormente.

Durante a aplicação do método de quantização de Dirac, obtiveram-se, primeiramente, os momentos conjugados da teoria, expressos pelas equações de (5.1) a (5.6). Então, os vínculos primários da teoria foram obtidos e expressos pelas equações de (5.8) a (5.12). A partir da condição de consistência dada por (5.14), obteve-se um único vínculo secundário dado pela equação (5.15) e verificou-se que esse vínculo não gerava novos vínculos. Todos os vínculos da teoria tornaram-se de segunda classe (apresentam pelo menos um parêntese de Poisson não nulo com outro vínculo). Finalmente, por meio da equação (5.17), obtiveram-se os parênteses de Dirac representados pelas equações de (5.26) a (5.31) e a quantização canônica pôde ser efetuada relacionando os parênteses Dirac aos seus respectivos comutadores. Dentro do formalismo de Dirac, o modelo BLG foi considerado um modelo de segunda classe e esse resultado expressou o fato do modelo não ser invariante de calibre.

Acredita-se que ao direcionar estudos a uma teoria que ainda não possua uma formulação final e obter resultados matematicamente consistentes, como os apresentados nesta tese, contribuiu-se, de certa forma, para corroborar a credibilidade de tal teoria, pois tais resultados são um indicativo de que o modelo esteja seguindo por caminho correto.

6.1 Perspectivas Futuras

Como uma perspectiva futura, pretende-se converter os vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe para obter o modelo equivalente invariante de calibre junto com suas transformações de calibre e, com isso, discutir se suas propriedades foram preservadas.

APÊNDICE A – Introdução ao Modelo Padrão

A Teoria Quântica de Campos descreve as partículas fundamentais e suas interações utilizando o chamado Modelo Padrão.

O Modelo Padrão descreve dois tipos de partículas: os férmions e os bósons. Os férmions possuem spin semi-inteiro e obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, enquanto os bósons possuem spin inteiro e não obedecem a esse princípio. De maneira informal, pode-se dizer que os férmions são partículas que constituem a matéria e os bósons são as partículas que transmitem as forças.

Os férmions são divididos em dois grupos: léptons e quarks. Há seis léptons (elétron, elétron neutrino, múon, múon neutrino, tau, tau neutrino) e seis quarks (up, down, charm, strange, top, bottom).

Os bósons são divididos em bósons de calibre e bósons escalares. Os bósons de calibre são os fótons, glúons, bósons Z e bósons W; os bósons escalares são os bósons de Higgs.

A Figura 19 sumariza a classificação das partículas do modelo padrão.

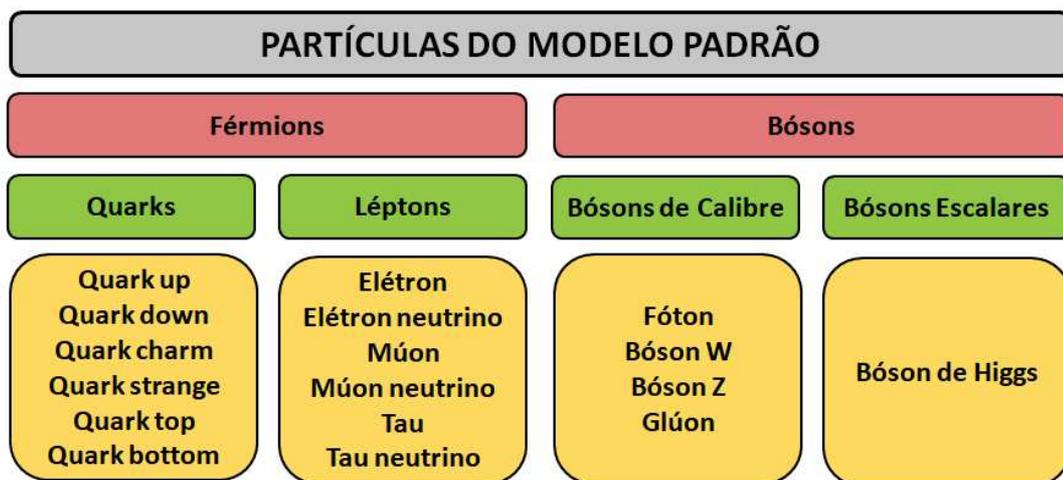


Figura 19 – Tipos de partícula do Modelo Padrão.

Para cada partícula apresentada na tabela anterior, existe uma anti-partícula com mesma massa, mas carga oposta. Por exemplo, a anti-partícula do elétron é o pósitron, enquanto o elétron possui carga elétrica negativa, o pósitron possui carga positiva.

Existem também os hádrons, que são partículas compostas feitas de dois ou mais quarks que ficam juntos devido a força forte (que será vista a seguir). Os hádrons são divididos em bárions e mésons. Os bárions são feitos de um número ímpar de quarks (geralmente três) e os mésons de um número par (geralmente um quark e outro anti-quark). A Figura 20 mostra exemplos de hádrons.

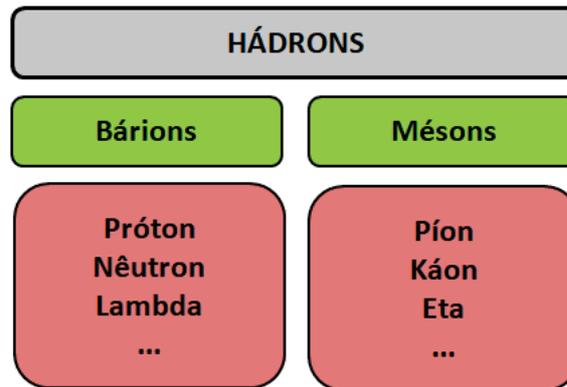


Figura 20 – Exemplos de hádrons.

Na natureza, há quatro tipos de forças fundamentais: eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. Cada uma delas ocorre devido a uma propriedade fundamental da matéria: carga elétrica (força eletromagnética), carga fraca (força fraca), cor (força forte) e massa (força gravitacional). Se as quatro propriedades forem chamadas de cargas, existirão quatro cargas: carga elétrica, carga fraca, carga cor e carga massa. Cabe ressaltar que todas as demais forças que parecem ser distintas (força elástica, força de atrito, força intermolecular etc) são casos particulares ou resultantes das quatro forças fundamentais.

Conforme já foi dito, os bósons são os responsáveis por transmitirem a força entre as partículas. No caso da força eletromagnética, tem-se os fótons; no caso da força fraca, tem-se os bósons W e Z (únicos que apresentam massa); no caso da força forte, tem-se os glúons e no caso da força gravitacional, tem-se os grávitons (ainda não detectados pelo Modelo Padrão). A Figura 21 apresenta as forças e suas respectivas partículas mediadoras.

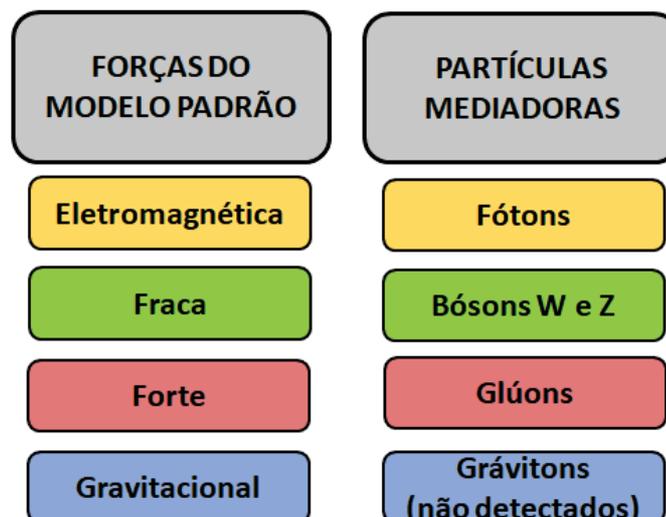


Figura 21 – Tipos de força do Modelo Padrão e suas respectivas partículas mediadoras.

Embora o Modelo Padrão seja uma ótimo ponto de partida para o estudo da

natureza das partículas elementares, ele está longe de ser uma teoria definitiva. Dentre os problemas enfrentados por esse modelo é possível citar os seguintes:

- No Universo há muito mais matéria que antimatéria e tal assimetria não é explicada por essa teoria.
- A maior parte do Universo é constituída da chamada matéria escura e energia escura, ambas não são formadas por partículas do Modelo Padrão.
- O gráviton nunca foi detectado e esse modelo não consegue incluir a interação gravitacional, uma vez que ela não tem a mesma estrutura das outras três interações.

APÊNDICE B – Teoria das Cordas Bosônicas

A Teoria das Cordas Bosônicas foi a primeira teoria a descrever partículas fundamentais a partir de cordas. Trata-se de uma teoria incapaz de descrever a realidade, pois não leva em consideração os férmions (partículas que constituem a matéria). No entanto, essa teoria fornece uma estrutura mais simplificada que pode ser usada para ilustrar as principais ideias e técnicas da Teoria das Cordas. Por essa razão, muitos físicos teóricos ocasionalmente fazem trabalho matemático com esse modelo para testar novos métodos e teorias antes de prosseguirem em modelos mais sofisticados.

Além da ausência de férmions, citam-se alguns aspectos chave dessa teoria a seguir:

- Para evitar estados com norma negativa, deve-se aceitar um espaço-tempo com 26 dimensões espaço-temporais.
- O estado fundamental, chamado de táquion, tem massa quadrática negativa. A presença de um táquion em uma teoria indica uma instabilidade no estado fundamental (ou vácuo), pois soluções que contêm táquions sempre decaem em outras soluções de menor energia. Ainda não se conseguiu eliminar os táquions dessa teoria.
- Inclui a gravidade. Isso é indicado pela presença de um estado com spin 2 chamado gráviton.
- Inclui um estado chamado dilaton, que é um campo escalar denotado por φ relacionado à constante de acoplamento.
- Na Teoria das Cordas Bosônicas, as cordas podem ser abertas ou fechadas e, ainda, orientadas ou não.

APÊNDICE C – Mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana Básica

C.1 Lagrangiana e Ação

Imagina-se uma situação geral na qual um sistema possua N coordenadas generalizadas $q_i(t)$ com $i = 1, \dots, N$. Esse sistema pode ser caracterizado pela função escalar L , expressa em termos das coordenadas e de suas primeiras derivadas, podendo também depender explicitamente do tempo. Compactamente, tem-se que

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (\text{C.1})$$

Essa função L é chamada de Lagrangiana do sistema e o ponto foi usado para denotar a diferenciação com respeito ao tempo, ou seja,

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}. \quad (\text{C.2})$$

Ao integrar a Lagrangiana em relação ao tempo, obtém-se uma nova quantidade chamada ação, que será denotada por S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (\text{C.3})$$

Considerando que o sistema evolua de um ponto inicial fixo $q_1(t_1)$ para um outro ponto final fixo $q_2(t_2)$, há um número infinito de caminhos para serem seguidos entre esses dois pontos. O princípio de Hamilton, também denominado de mínima ação, estabelece que a evolução do sistema da configuração 1 para a 2 é tal que a ação é mínima. Portanto,

$$\delta S = 0. \quad (\text{C.4})$$

C.2 Equações de Euler-Lagrange

Aqui, admite-se que o sistema mecânico é descrito por coordenadas independentes entre si, e essa independência é crucial para permitir a dedução das equações de Euler-Lagrange a partir do princípio de Hamilton.

Utilizando cálculo variacional, é possível demonstrar que as equações (C.3) e (C.4) levam a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Se a Lagrangiana de um dado sistema mecânico é conhecida, essa equação resulta nas equações de movimento do sistema, que coincidem com as equações decorrentes da Segunda Lei de Newton aplicada a sistemas mecânicos.

C.3 Momento Conjugado e Hamiltoniana

Define-se, agora, o momento conjugado p_i , que é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{C.6})$$

A equação anterior permite definir a função Hamiltoniana, que é dada em termos da Lagrangiana e do momento conjugado pela expressão

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (\text{C.7})$$

A partir da função Hamiltoniana, é possível obter as equações de Hamilton, que são dadas por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\text{C.8})$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (\text{C.9})$$

C.4 Teoria de Campos Lagrangiana

Agora que os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano básicos foram revistos, é possível generalizar tais técnicas e aplicá-las aos campos, isto é, a funções do espaço-tempo $\varphi(x, t)$. No caso contínuo, trabalha-se com a densidade Lagrangiana \mathcal{L} :

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (\text{C.10})$$

Tipicamente, as Lagrangianas encontradas na Teoria Quântica de Campos dependem apenas dos campos e de suas primeiras derivadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (\text{C.11})$$

e

$$L = L(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (\text{C.12})$$

A ação S é dada por

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x. \quad (\text{C.13})$$

Aplicando o princípio da mínima ação em (C.13), obtém-se as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = 0. \quad (\text{C.14})$$

A densidade de momento conjugado ao campo é dada por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (\text{C.15})$$

A densidade Hamiltoniana é definida como

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}, \quad (\text{C.16})$$

sendo a Hamiltoniana obtida da seguinte forma:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (\text{C.17})$$

APÊNDICE D – Parênteses de Poisson

É possível obter a evolução temporal da quantidade genérica $A(q_i, p_i, t)$, definida no espaço de fases, pela equação abaixo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (\text{D.1})$$

em que q_i representa as coordenadas generalizadas e p_i o momento conjugado.

Substituindo as equações de Hamilton (C.8 e C.9) na equação D.1, encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde $\{A, H\}$ é chamado de Parêntese de Poisson e é dado por

$$\{A, H\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (\text{D.3})$$

De uma forma geral, o Parêntese de Poisson entre duas quantidades genéricas A e B é definido por

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (\text{D.4})$$

As seguintes propriedades são satisfeitas pelos Parênteses de Poisson:

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (\text{D.5})$$

$$\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\} \quad (\text{D.6})$$

$$\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\} \quad (\text{D.7})$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 \quad (\text{D.8})$$

No caso particular das quantidades p_i e q_i , é válido que:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{D.9})$$

e

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (\text{D.10})$$

Esses Parênteses de Poisson especiais são os chamados Parênteses Fundamentais de Poisson.

Sob o ponto de vista clássico, a evolução temporal da quantidade A é dada pela equação (D.2). Sob o ponto de vista quântico, a quantidade A é transformada em um operador e sua evolução temporal é obtida através da equação de Heisenberg:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (\text{D.11})$$

Sugere-se a partir da semelhança entre as equações (D.2) e (D.11) que as relações quânticas devam ser obtidas das correspondentes clássicas por uma substituição do seguinte tipo:

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (\text{D.12})$$

Este processo, introduzido por Dirac, é chamado de quantização canônica.

Para sistemas não-singulares, ou seja, sistemas em que o determinante da matriz hessiana, definida por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (\text{D.13})$$

é diferente de zero, o método de quantização canônica opera de maneira satisfatória. Porém, em sistemas singulares (sistemas no qual o determinante da matriz hessiana seja zero), o processo de quantização anteriormente descrito leva à inconsistências e deve ser modificado. No Apêndice E, mostra-se uma alternativa para quantizar sistemas singulares.

APÊNDICE E – Formalismo de Dirac

E.1 Equações de Hamilton para Sistemas Vinculados

Considera-se um sistema discreto que seja descrito por uma Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$ que não possua dependência temporal explícita. Se a matriz hessiana desse sistema for singular, surgem relações funcionais entre as coordenadas e os momentos do tipo:

$$\phi_m(p_i, q_i) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{E.1})$$

Os momentos e as coordenadas são conectados pelas relações (E.1), que são denominadas vínculos primários, os quais são decorrentes da forma da Lagrangiana.

Qualquer combinação linear dos vínculos primários deve ser adicionada a Hamiltoniana total do sistema, obtendo-se, portanto

$$H_T = H + \lambda_m \phi_m, \quad (\text{E.2})$$

em que H é a Hamiltoniana definida da forma usual $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ e λ_m são os multiplicadores de Lagrange.

Obtém-se as equações de Hamilton do movimento para sistemas com vínculos primários utilizando o princípio da mínima ação. São elas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (\text{E.3})$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}. \quad (\text{E.4})$$

As equações (E.3) e (E.4) representam as equações de movimento de Hamilton com os vínculos de primeira ordem incorporados.

E.2 Parênteses de Dirac

Conforme já foi mostrado no Apêndice D, é possível obter a evolução temporal da quantidade genérica $A(q_i, p_i, t)$ pela equação

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (\text{E.5})$$

Ao substituir as equações de Hamilton dadas por (E.4) na equação anterior, é possível chegar a

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \{A, H\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H\}_D + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

onde $C_{m'm} = \{\phi_{m'}, \phi_m\}$ é uma matriz antissimétrica e

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} \quad (\text{E.7})$$

é o Parêntese de Dirac entre A e H .

De uma forma geral, o Parêntese de Dirac entre duas quantidades genéricas A e B é definido por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, B\}. \quad (\text{E.8})$$

Eles satisfazem as mesmas propriedades que os parênteses de Poisson, ou seja,

$$\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D, \quad (\text{E.9})$$

$$\{AB, C\}_D = \{A, C\}_D B + A \{B, C\}_D, \quad (\text{E.10})$$

$$\{A + B, C\}_D = \{A, C\}_D + \{B, C\}_D, \quad (\text{E.11})$$

$$\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D = 0 \quad . \quad (\text{E.12})$$

Ao comparar a equação (E.6) com a equação de Heisenberg dada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (\text{E.13})$$

é sugerido que

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (\text{E.14})$$

Logo, a equação (E.14) representa uma possibilidade para o processo de quantização canônica de sistemas singulares.

E.3 Algoritmo de Dirac-Bergmann

Tem-se a seguinte condição de consistência:

$$\{\phi_m, H\} + \lambda_m \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0, \quad (\text{E.15})$$

onde λ_m são os multiplicadores de Lagrange.

A partir dessa condição de consistência, existem três possibilidades:

- i) Se a condição de consistência é identicamente satisfeita ($0 = 0$), todos os vínculos da teoria são primários ϕ_m e os multiplicadores de Lagrange são inteiramente arbitrários.
- ii) Se a matriz $\|\{\phi_m, \phi_{m'}\}\|$ não é singular, as condições de consistência servem para determinar univocamente os multiplicadores de Lagrange.
- iii) Se as condições de consistência não se enquadrarem em nenhum dos dois casos anteriores, elas podem gerar vínculos secundários da seguinte forma:

$$\chi_s(q, p) = 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (\text{E.16})$$

Vínculos primários resultam da forma da Lagrangiana e da definição dos momentos, enquanto vínculos secundários exigem o emprego das equações de movimento. Impõe-se que

$$\dot{\chi}_s = \{\chi_s, H\} + \lambda_m \{\chi_s, \phi_m\} \approx 0. \quad (\text{E.17})$$

Se a equação (E.17) recair nos casos (i) ou (ii), o processo será encerrado neste estágio. Caso isto não aconteça, surgem novos vínculos secundários e o procedimento deve ser repetido. Este procedimento iterativo é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann. Após um número finito de estágios, o processo é finalizado e chega-se a um conjunto de vínculos secundários que serão denotados por

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K, \quad (\text{E.18})$$

no qual k representa o número total de vínculos secundários.

REFERÊNCIAS

- [1] POLCHINSKI, J. *String Theory - vol 1: An Introduction to the Bosonic String*. 1. ed. Cambridge University Press, 1998.
- [2] POLCHINSKI, J. *String Theory - vol 2: Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. . *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. 1. ed. Cambridge University Press, 2007.
- [4] ABDALLA, E. Teoria quântica da gravitação: cordas e teoria-M. *Revista Brasileira do Ensino de Física*, v. 27, n. 1, p. 147–155, 2009.
- [5] MCMAHON, D. *String Theory Demystified*. 1. ed. McGraw-Hill Education, 2009.
- [6] MORALES, H. La Teoria de Supercuerdas. 2014, p. arXiv:1412.5717.
- [7] DUFF, M. J. A Layman’s Guide to M-theory . 1998, p. arXiv:9805177.
- [8] BEDFORD, J. An Introduction to String Theory . 2012, p. arXiv:1107.3967.
- [9] OBERS, N. .; PIOLINE, B. U-duality and M-theory. *Physics Report*, v. 318, n. 4–5, p. 113–225, 1999.
- [10] TOWNSEND, P. K. Four Lectures on M-theory. 1997, p. arXiv:9612121.
- [11] TOWNSEND, P. K. M-theory from its superalgebra. 1998, p. arXiv:9712004.
- [12] BERMAN, D. . M-theory branes and their interaction. *Physics Report*, v. 456, n. 3, p. 89–126, 2008.
- [13] BAGGER, J.; LAMBERT, N. Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 77, n. 6, p. 1–15, 2008.
- [14] BAGGER, J.; LAMBERT, N. Modeling multiple M2-branes. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, v. 75, n. 4, p. 1–16, 2007.
- [15] BAGGER, J.; LAMBERT, N. Comments on multiple M2-branes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 2, p. 1–18, 2008.
- [16] GUSTAVSSON, A. Algebraic structures on parallel M2-branes. *Nuclear Physics B*, v. 811, n. 1–2, p. 66–76, 2009.
- [17] CEDERWALL, M. Superfield actions for N=8 and N=6 conformal theories in three dimensions. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–11, 2008.
- [18] BASU, A.; HARVEY, J. The M2-M5 brane system and a generalized Nahm’s equation. *Nuclear Physics B*, v. 713, n. 1–3, p. 136–150, 2005.
- [19] BERMAN, D. S.; COPLAND, N. A note on the M2-M5 brane system and fuzzy spheres. *Physics Letters B*, v. 638, n. 5, p. 553–559, 2006.
- [20] LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. 2. ed. Livraria da Física, 2007.

- [21] ROTHE, H.; ROTHE, K. *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*. 1. ed. World Scientific, 2010.
- [22] GOMES, M. O. *Teoria Quântica dos Campos*. 2. ed. Editora da Universidade de São Paulo, 2002.
- [23] NETO, J. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 1. ed. Livraria da Física, 2004.
- [24] SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics*. 1. ed. Springer-Verlag, 1982.
- [25] DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. 1. ed. Belfer Graduate School of Science, 1964.
- [26] WESS, J.; BAGGE, J. *Supersymmetry and Supergravity*. 2. ed. Princeton University Press, 1992.
- [27] H.P.NILLES. Supersymmetry, supergravity and particle physics. *Physics Reports*, v. 110, n. 1–2, p. 1–162, 1984.
- [28] ROY, P.; SINGH, V. *Supersymmetry and Supergravity Nonperturbative QCD*. 1. ed. [s.l.] Springer, 1984.
- [29] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, v. 251, n. 5–6, p. 267–385, 1995.
- [30] BINETRUY, P. M. . *Supersymmetry: teory, experiment and cosmology*. 1. ed. Oxford University Press, 2012.
- [31] FENG, J. Syper symmetry and cosmology. *Annals of Physics*, v. 315, n. 1, p. 2–51, 2005.
- [32] BAGCHI, B. K. *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*. 1. ed. Chapman & Hall, 2000.
- [33] FERRARO, R. *Einstein's space-time: an introduction to special and general relativity*. 1. ed. Springer, 2007.
- [34] RYDER, L. *Introduction to General Relativity*. 1. ed. Cambridge University Press, 2009.
- [35] CARMELI, M. *Group theory and general relativity: representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field*. 1. ed. McGraw-Hill Education, 1977.
- [36] BAUMANN, G. *Mathematica for Theoretical Physics: Electrodynamics, Quantum Mechanics, General Relativity and Fractals*. 2. ed. Springer, 2010.
- [37] CARROLL, S. M. Lecture Notes on General Relativity. 1997, p. arXiv:9712019.
- [38] NOVAES, S. F. Standard Model: An Introduction. 2000, p. arXiv:0001283.
- [39] COTTINGHAM, W. N.; GREENWOOD, D. A. *An introduction to the standard model of particle physics*. 2. ed. Cambridge University Press, 2007.

- [40] BURGESS, C.; MOORE, G. *The Standard Model: A Primer*. 1. ed. Cambridge University Press, 2012.
- [41] WIGNER, E. P.; NOZ, M. W.; KIM, Y. S. *Special Relativity and Quantum Theory: A Collection of Papers on the Poincaré Group*. 1. ed. Springer, 1988.
- [42] GRAY, J. J. *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincare*. 2. ed. Birkhäuser, 2008.
- [43] MIRMAN, R. *Massless Representations of the Poincare Group: Electromagnetism, Gravitation, Quantum Mechanics, Geometry*. 1. ed. Nova Science Publishers, 1995.
- [44] HOOFT, G. *50 years of Yang-Mills theory*. 1. ed. World Scientific Publishing Company, 2005.
- [45] ATIYAH, M. F. *Geometry of Yang-Mills field*. 1. ed. Edizioni della Normale, 2013.
- [46] SAVVIDY, G. Generalization of the Yang–Mills theory. *International Journal of Modern Physics A*, v. 31, n. 1, p. 1630003, 2016.
- [47] DUNNE, G. *Self-dual Chern-Simons theories*. 1. ed. Springer, 1995.
- [48] HU, S.; WITTEN, E. *Lecture notes on Chern-Simons-Witten theory*. 1. ed. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [49] ZAGERMANN, M. Generalized Chern-Simons Terms and Chiral Anomalies in N=1 Supersymmetry. 2008, p. arXiv:0801.1666.
- [50] OSKAR KLEIN. Quantentheorie und Fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926.
- [51] M.J.DUFF; NILSSON, B. E. W.; POPE, C. N. Kaluza-Klein supergravity. *Physics Reports*, v. 130, n. 1–2, p. 1–142, 1986.
- [52] KALUZA, T. On the Unification Problem in Physics. *International Journal of Modern Physics D*, v. 27, n. 14, p. 1870001, 2018.
- [53] BAILIN, D.; LOVE, A. Kaluza-Klein theories. *Reports on Progress in Physics*, v. 50, n. 9, p. 1087–1170, 1987.
- [54] WESSON, P. S. *Space-time-matter: modern Kaluza-Kein theory*. 1. ed. World Scientific Publishing Company, 1998.
- [55] GASPERINI, M.; MAHARANA, J. *String theory and fundamental interactions: Gabriele Veneziano and theoretical physics: historical and contemporary perspectives*. 1. ed. Springer, 2008.
- [56] VENEZIANO, G. Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Il Nuovo Cimento A*, v. 7, p. 190–197, 1968.
- [57] SUSSKIND, L.; LINDESAY, J. *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*. 1. ed. World Scientific Publishing Company, 2004.

- [58] NAGASHIMA, Y.; NAMBU, Y. *Elementary Particle Physics: Quantum Field Theory and Particles - vol 1*. 1. ed. Wiley-VCH, 2010.
- [59] NEVEU, A.; SCHWARZ, J. Tachyon-free dual model with a positive-intercept trajectory. *Physics Letters B*, v. 34, n. 6, p. 517–518, 1971.
- [60] RAMOND, P. Dual Theory for Free Fermions. *Physical Review D*, v. 3, n. 10, p. 2415–2418, 1971.
- [61] GROSS, D. J. et al. Heterotic String. *Physical Review Letters*, v. 54, n. 6, p. 502–505, 1985.
- [62] WITTEN, E. String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, v. 443, n. 1, p. 85–126, 1995.
- [63] STROMINGER, A.; VAFA, C. Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Physics Letters B*, v. 379, n. 1–4, p. 99–104, 1996.
- [64] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. 2. ed. Cambridge University Press, 2009.
- [65] BIELLEMAN, S. et al. The DBI action, higher-derivative supergravity, and flattening inflaton potentials. *Journal of High Energy Physics*, v. 2016, n. 95, p. 1–22, 2016.
- [66] KOGAN, I. I.; POLYAKOV, D. DBI Action from Closed Strings and D-brane second Quantization. *International Journal of Modern Physics A*, v. 18, n. 10, p. 1827–1842, 2003.
- [67] POLCHINSKI, J. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges. *Phys. Rev. Lett*, v. 75, n. 26, p. 4724–4727, 1995.
- [68] BACHAS, C. P. Lectures on D-branes. 1999, p. arXiv:9806199.
- [69] JOHNSON, C. *D-branes*. 1. ed. Cambridge University Press, 2002.
- [70] POLCHINSKI, J. TASI Lectures on D-Branes. . 1997, p. arXiv:9611050.
- [71] GIVEON, A.; KUTASON, D. Brane dynamics and gauge theory. *Rev. Mod. Phys*, v. 71, n. 4, p. 983–1084, 1999.
- [72] HASHIMOTO, K. *Superstrings and New Perspective of our World*. 1. ed. Springer, 2012.
- [73] NAHM, W. *Structural Elements in Particle Physics and Statistical Mechanics*. 1. ed. Springer, 1983.
- [74] DONALDSON, S. Nahm’s equations and the classification of monopoles. *Communications in Mathematical Physics*, v. 96, n. 3, p. 387–407, 1984.
- [75] FIGUEROA-O’FARRILL, J. Metric Lie n-algebras and double extensions. 2008, p. arXiv:0806.3534.
- [76] DE MEDEIROS, P.; FIGUEROA O’FARRILL, J.; MENDEZ ESCOBAR, E. Lorentzian Lie 3-algebras na their Bagger-Lamber moduli space. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 7, p. 1–27, 2008.

- [77] BOURBAKI, N. *Lie Groups and Lie Algebras*. 1. ed. Springer, 1989.
- [78] ERDMANN, K.; WILDON, M. *Introduction to Lie Algebras*. 1. ed. Springer, 2006.
- [79] HALL, B. C. *Lie groups, Lie algebras and representations: An elementary introduction*. 2. ed. Springer, 2015.
- [80] MAURI, A.; PETKOU, A. C. An N=1 Superfield Action for M2 brane. *Physics Letters B*, v. 666, n. 5, p. 527–532, 2008.
- [81] MUKHI, S.; PAPAGEORGAKIS, C. M2 to D2. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–14, 2008.
- [82] BERGSHOEFF, E. A. et al. Multiple membranes from gauged supergravity. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–21, 2008.
- [83] PASSERINI, F. M2-brane superalgebra from Bagger-Lambert Theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–16, 2008.
- [84] LI, T.; LIU, Y.; XIE, D. Multiple D2-Brane Action from M2-Brane. *International Journal of Modern Physics A*, v. 24, n. 16, p. 3039–3052, 2008.
- [85] FURUUCHI, K.; SHIH, S. Y. . M-Theory Superalgebra from Multiple Membranes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–17, 2008.
- [86] BLAU, M.; O’LOUGHLIN, M. Multiple M2-branes and plane waves. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, p. 1–12, 2008.
- [87] SANTOS, M. A.; VANCEA, I. V. New Two Dimensional Massless Field Theory from Bagger-Lambert-Gustavsson Model. *Modern Physics Letters A*, v. 24, n. 28, p. 2275–2284, 2009.
- [88] FRANCHE, P. Reduction of the N=8 BLG and N=6 BL Theories to 2D Effective Field Theories. . 2008, p. arXiv:0811.1443.
- [89] AGUIAR, A. M.; MENDES, A. C. R.; ABREU, E. M. C.; NETO, J. A. Bagger-Lambert-Gustavsson Membrane Model as a Constrained System and Dirac Quantization. *Acta Phys. Polon. B*, v. 51, n. 11, p. 2083-2096, 2020.
- [90] CMS images gallery. Disponível em: <<https://home.cern/resources/image/experiments/cms-images-gallery>>. Acesso em: 2 jul. 2020.
- [91] ARDALAM, F.; ARFAEI, H.; GAROUSI, M. R.; GHODSI, A. Gravity on Non-commutative D-branes. *International Journal of Modern Physics A*, v. 18, n. 07, p. 1051-1066, 2003.
- [92] KO, S. L.; SOROKIN, D.; VANICHCHAPONGJAROEN, P. The M5-Brane Action Revisited. *Journal of High Energy Physics*, v. 2, n. 11, p. 1308-2231 , 2013.
- [93] POLCHINSKI, J. Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges. *Journal of High Energy Physics*, v. 3, n. 75, p. 4724-4727 , 1995.
- [94] FORSTE, S.; LOUIS, J. Duality in String Theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 1, n. , p. 3-22 , 1996.

- [95] Energy Scales in Physics. Disponível em: <<https://phy.princeton.edu/research/high-energy-theory/gubser-group/outreach/energy-scales-in-physics>>. Acesso em: 14 jul. 2021.