

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Noemi Zeraick Monteiro

Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia

Juiz de Fora

2021



Noemi Zeraick Monteiro

Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Monteiro, Noemi Zeraick.

Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia / Noemi Zeraick Monteiro. – 2021.

166 f. : il.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática. Mestrado Acadêmico em Matemática, 2021.

1. Cálculo Fracionário. 2. Modelo SIR. 3. Funções de Mittag-Leffler. 4. Análise numérica. I. Mazorche, Sandro Rodrigues, orient. II. Título.

**Noemi Zeraick Monteiro**

**Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia**

Dissertação  
apresentada ao  
Programa de Pós-  
graduação em  
Matemática  
da Universidade  
Federal de Juiz de  
Fora como requisito  
parcial à obtenção do  
título de Mestre em  
Matemática. Área de  
concentração:  
Matemática Aplicada

Aprovada em 02 de dezembro de 2021.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche** - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira**  
UNICAMP

**Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo**  
UNESP

Juiz de Fora, 18/11/2021.



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Rodrigues Mazorche**,  
**Professor(a)**, em 08/12/2021, às 09:43, conforme horário oficial de Brasília, com

fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Edmundo Capelas de Oliveira, Usuário Externo**, em 08/12/2021, às 10:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Rubens de Figueiredo Camargo, Usuário Externo**, em 09/12/2021, às 13:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0582141** e o código CRC **85640BB7**.

---

Ao meus fantásticos papai e mamãe, Jorge e Laila, ao meu irmão herói, Thiago, e à Abigail, princesa da titia.



## AGRADECIMENTOS

Procurei evitar me estender demais e citar muitos nomes, para que não acabasse sendo injusta com alguém. Mas o coração fala mais alto: se você ler este agradecimento com o coração, é porque muito provavelmente está incluído nele!

Primeiramente, agradeço aos meus pais, por serem minha principal fonte de apoio e auxílio, nas horas boas, nem tão boas, e mesmo nas mais terríveis! Ao meu irmão, por acreditar em mim muito mais do que eu mesma. Seu apoio incondicional é um porto seguro! À minha sobrinha, por fazer meus dias repletos de esperança (e de beijos!). As figuras coloridas deste trabalho da titia são dedicadas a você!

Aos meus avós e a todos os demais familiares que, no passado ou no presente, de longe ou de perto, me ofereceram orações, ajudas e palavras de incentivo.

Aos irmãos em Cristo e a todos os amigos que Deus me concedeu nessa caminhada. Em especial, às “amigas irmãs” de todo dia, por não se cansarem de me animar a continuar, me oferecendo orações, brincadeiras, sorrisos e muito amor!

Aos professores do ensino básico, da graduação, do mestrado e de todos os cursos que já realizei. Sua profissão é maravilhosa: que Deus prospere sempre esse dom! Também agradeço aos alunos que já tive, inclusive às meninas da aulinha musical da Congregação Cristã no Brasil. Vocês me mostram que Cora Coralina estava correta ao dizer que é feliz aquele que [tenta] aprender o que se está a ensinar.

A todos os envolvidos na OBMEP, através da qual Deus me deu amigos e oportunidades inimagináveis. Em particular, à equipe dos Clubes de Matemática, pela ajuda, incentivo e até orações (né, Francimar?). Tio Rob, acho que valeu sua paciência em repetir inúmeras vezes: “não desista do mestrado; seja feliz em Deus”.

Um agradecimento especial aos professores e colegas do Departamento de Matemática da UFJF. Incluindo, e com honras, nosso querido professor Olímpio H. Miyagaki, que não deveria ter ido para UFSCAR (rsrs). Extensivo às Secretarias ligadas ao Departamento, ao pessoal do técnico, da limpeza e a todos os que se empenham para que o Departamento funcione, presencial ou remotamente. Todos vocês foram e são uma bênção para mim. Escrevendo como aprendi com Yvonne: *Eres una bendición!*

Aos membros da banca, por aceitarem participar do meu crescimento neste momento tão importante para mim. A todos os autores citados nas referências, gigantes sobre os quais nos apoiamos, como bem ensinou Newton. À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a IC Jr., a IC e o Mestrado Acadêmico.

Finalizo agradecendo ao meu orientador, o professor Sandro Rodrigues Mazorche. O senhor foi meu orientador não apenas no mestrado, mas, no sentido real da palavra, é meu orientador desde que ingressou como coordenador regional da OBMEP. São mais de 11 anos de orientação! Agradeço a Deus por ter o melhor orientador do mundo.

“Ao único Deus, sábio, seja dada glória por Jesus Cristo para todo o sempre. Amém.”  
Romanos 16:27



*“E tudo o que fizerdes, seja em palavra, seja em ação,  
fazei-o em nome do Senhor Jesus, dando por Ele graças  
a Deus Pai.” Colossenses 3:17*



## RESUMO

O Cálculo de ordem arbitrária, conhecido como Cálculo Fracionário, possui aplicações em inúmeras áreas, como engenharia, física e biologia. Ao contrário do Cálculo de ordem inteira, que é local, os operadores que estudamos no Cálculo de ordem não inteira são não locais. Assim, incluem a possibilidade de considerar a memória do fenômeno estudado, isto é, a dependência de estágios anteriores. Porém, sua imensa aplicabilidade coexiste com a dificuldade de uma teoria unificada e coerente. Neste trabalho, estudamos aplicações do Cálculo de ordem arbitrária a modelos tipo SIR. Procuramos estabelecer algumas bases, tanto de Cálculo Fracionário quanto do modelo SIR tal qual foi originalmente construído e, assim, discutimos as principais dificuldades na utilização de um modelo SIR de ordem arbitrária. Também revisamos a construção de um modelo não usual, onde as derivadas de ordem arbitrária surgem de maneira epidemiologicamente significativa a partir da dependência do tempo desde a infecção na infectividade e na remoção, aliada à utilização das funções de Mittag-Leffler. Em ambos os casos, estudamos pontos de equilíbrio, positividade e outras questões de relevância, como o significado dos parâmetros. Alguns desses estudos foram realizados de maneira original. Os modelos apresentados foram também analisados de forma numérica, através de implementação no MATLAB. Finalmente, propomos extensões do modelo construído, no que diz respeito à possibilidade de representação de ondas: infectividade oscilatória, compartimento de quarentena e dinâmica da imitação (comportamento humano). As extensões foram propostas de forma que o significado da construção fosse mantido, sendo também analisadas numericamente e comparadas, ainda, a alguns dados reais da pandemia de COVID-19.

Palavras-Chave: Cálculo Fracionário. Modelo SIR. Funções de Mittag-Leffler. Análise Numérica.



## ABSTRACT

The arbitrary order Calculus, known as Fractional Calculus, has applications in numerous areas, such as engineering, physics, and biology. In contrast to the integer-order Calculus, which is local, the operators we are studying in the non-integer Calculus are non-local. So, they include the possibility of considering the memory of the studied phenomenon, which means, the dependence on previous stages. However, its immense applicability coexists with the difficulty of a unified and coherent theory. In this work, we studied applications of arbitrary order Calculus to SIR-type models. We aimed to establish some bases, both for Fractional Calculus and for the SIR model as it was originally built and, also, we discussed the main difficulties in using an arbitrary order SIR model. Moreover, we reviewed the construction of an unusual model, in which arbitrary order derivatives arise in an epidemiological significant way from the dependence of time since infection on infectivity and removal, allied to the use of Mittag-Leffler functions. In both cases, we studied equilibrium points, positivity, and other questions of relevance, such as the meaning of the parameters. Some of these studies were carried out in an original way. The models presented were also analyzed numerically, by MATLAB implementation. Finally, we proposed extensions of the built model, with regard to the possibility of waves representation: oscillatory infectivity, quarantine compartment, and imitation dynamic (human behavior). The extensions were proposed in such a way that the meaning of the construction is maintained and were also analyzed numerically, compared, furthermore, to some real data from the COVID-19 pandemic.

Key-words: Fractional Calculus. SIR model. Mittag-Leffler Functions. Numerical Analysis.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Gráfico de $y(t)$ . . . . .	45
Figura 2.2 – Derivadas de $y(t)$ . . . . .	45
Figura 2.3 – Solução (2.60). . . . .	46
Figura 2.4 – Solução (2.61). . . . .	46
Figura 2.5 – Inicialização - $\alpha = 0.6$ . . . . .	48
Figura 2.6 – Inicialização (RL) - $\alpha = 0.6$ . . . . .	48
Figura 2.7 – Diagrama de fluxo do modelo SIR sem dinâmica vital. . . . .	49
Figura 2.8 – Willian O. Kermack e Anderson G. McKendrick [1]. . . . .	49
Figura 2.9 – Modelagem para as mortes por praga na ilha Bombay (mais detalhes no artigo original [2]). . . . .	49
Figura 2.10–Fluxo SEIR [3]. . . . .	53
Figura 2.11–Fluxo SITR [3]. . . . .	53
Figura 2.12–Fluxo SEQIJR [3]. . . . .	53
Figura 5.1 – Modelo SIR Clássico. . . . .	91
Figura 5.2 – População crescendo. . . . .	91
Figura 5.3 – População oscilando. . . . .	92
Figura 5.4 – População decrescendo. . . . .	92
Figura 5.5 – Parâmetros elevados a $\alpha_i$ . . . . .	92
Figura 5.6 – Multiplicação por $\tau^{1-\alpha_i}$ . . . . .	92
Figura 5.7 – Pop. constante se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . . . . .	92
Figura 5.8 – RL não mantém pop. constante. . . . .	92
Figura 5.9 – Não monotonicidade. . . . .	93
Figura 5.10–Trajetórias para $I(0) = 1$ . . . . .	93
Figura 5.11–Autocruzamento. . . . .	94
Figura 5.12–C.I. $(0.2, 0.5, 0.3)N$ . . . . .	94
Figura 5.13–Modelo com din. vital. . . . .	94
Figura 5.14–Trajetórias com din. vital. . . . .	94
Figura 5.15–Zoom $EE$ . . . . .	95
Figura 5.16–Trajetória com $\mathfrak{R}_0 < 1$ . . . . .	95
Figura 5.17–Mudança de solução. . . . .	95
Figura 5.18–Mudança na trajetória. . . . .	95
Figura 5.19–Efeito de $\alpha_1$ em $I$ . . . . .	97
Figura 5.20–Efeito de $\alpha_1$ em $S$ . . . . .	97
Figura 5.21–Efeito de $\alpha_1$ em $R$ . . . . .	97
Figura 5.22–Efeito de $\alpha_1$ em $N$ . . . . .	97
Figura 5.23–Efeito de $\alpha_2$ em $I$ . . . . .	98
Figura 5.24–Efeito de $\alpha_2$ em $S$ . . . . .	98

Figura 5.25–Efeito de $\alpha_2$ em $R$ . . . . .	98
Figura 5.26–Efeito de $\alpha_2$ em $N$ . . . . .	98
Figura 5.27–Efeito de $\alpha_3$ em $I$ . . . . .	98
Figura 5.28–Efeito de $\alpha_3$ em $S$ . . . . .	98
Figura 5.29–Efeito de $\alpha_3$ em $R$ . . . . .	99
Figura 5.30–Efeito de $\alpha_3$ em $N$ . . . . .	99
Figura 5.31–Efeito de $\alpha$ em $I$ . . . . .	100
Figura 5.32–Efeito de $\alpha$ em $S$ . . . . .	100
Figura 5.33–Efeito de $\alpha$ em $R$ . . . . .	100
Figura 5.34–Efeito de $\alpha$ - $(S, I)$ . . . . .	100
Figura 5.35–Efeito de $\beta$ em $I$ . . . . .	101
Figura 5.36–Efeito de $\beta$ em $S$ . . . . .	101
Figura 5.37–Efeito de $\beta$ em $R$ . . . . .	101
Figura 5.38–Efeito de $\beta$ - $(S, I)$ . . . . .	101
Figura 5.39–Efeito de $\gamma$ em $I$ . . . . .	102
Figura 5.40–Efeito de $\gamma$ em $S$ . . . . .	102
Figura 5.41–Efeito de $\gamma$ em $R$ . . . . .	102
Figura 5.42–Efeito de $\gamma$ - $(S, I)$ . . . . .	102
Figura 5.43–Efeito de $\mu$ em $I$ . . . . .	103
Figura 5.44–Efeito de $\mu$ em $S$ . . . . .	103
Figura 5.45–Efeito de $\mu$ em $R$ . . . . .	103
Figura 5.46–Efeito de $\mu$ - $(S, I)$ . . . . .	103
Figura 5.47–Efeito de $\alpha \leq 1$ em $E_\alpha(-z)$ . . . . .	104
Figura 5.48–Efeito de $\alpha \geq 1$ em $E_\alpha(-z)$ . . . . .	104
Figura 5.49–Efeito de $\alpha \geq 2$ em $E_\alpha(-z)$ . . . . .	104
Figura 5.50–Efeito de $\alpha$ em $E_\alpha(z)$ . . . . .	104
Figura 5.51–Efeito de $\beta$ em $E_{\alpha,\beta}(-z)$ . . . . .	105
Figura 5.52–Efeito de $\beta$ em $E_{\alpha,\beta}(z)$ . . . . .	105
Figura 5.53–Efeito de $\rho$ em $E_{\alpha,\beta}^\rho(-z)$ . . . . .	105
Figura 5.54– $E_{1,2}(z) = (e^z - 1)/z$ . . . . .	105
Figura 5.55– $E_2(-z^2) = \cos(z)$ . . . . .	105
Figura 5.56– $E_2(z^2) = \cosh(z)$ . . . . .	105
Figura 5.57– $zE_{2,2}(-z^2) = \text{sen}(z)$ . . . . .	106
Figura 5.58– $zE_{2,2}(z^2) = \text{senh}(z)$ . . . . .	106
Figura 5.59–Modelo SIR Clássico. . . . .	107
Figura 5.60–População ct. para $\alpha \neq \beta$ . . . . .	107
Figura 5.61–Monotonicidade de $S$ e $R$ . . . . .	107
Figura 5.62–Modelo com $\alpha = \beta$ . . . . .	107
Figura 5.63–Trajetórias para $\alpha = \beta$ . . . . .	108

Figura 5.64–Trajetórias para $\gamma \equiv 0$ .	108
Figura 5.65–C.I.: $(N - 1, 1, 0)$ .	108
Figura 5.66–C.I.: $(0.5, 0.1, 0.4)N$ .	108
Figura 5.67–Trajetórias $\mathfrak{R}_0 > 1$ .	109
Figura 5.68–Trajetórias $\mathfrak{R}_0 < 1$ .	109
Figura 5.69–Caso $\omega^* = 0$ .	109
Figura 5.70–Trajetória com $\omega^* = 0$ .	109
Figura 5.71–Mudança na solução.	110
Figura 5.72–Mudança na trajetória.	110
Figura 5.73– $I$ (terminal inferior)	110
Figura 5.74–ZOOM terminal inferior.	110
Figura 5.75–Efeito de $\alpha$ em $\phi$ .	111
Figura 5.76–Efeito de $\alpha$ em $\rho$ .	111
Figura 5.77–Efeito de $\alpha$ em $I$ .	112
Figura 5.78–Efeito de $\alpha$ em $S$ .	112
Figura 5.79–Efeito de $\alpha$ em $R$ .	112
Figura 5.80–Efeito de $\alpha$ - $(S, I)$ .	112
Figura 5.81–Efeito de $\beta$ em $\rho$ .	113
Figura 5.82–Efeito de $\beta$ em $I$ .	113
Figura 5.83–Efeito de $\beta$ em $S$ .	113
Figura 5.84–Efeito de $\beta$ em $R$ .	113
Figura 5.85–Efeito de $\beta$ - $(S, I)$ .	114
Figura 5.86– $(S, I)$ (ZOOM).	114
Figura 5.87–Efeito de $\omega$ em $I$ .	114
Figura 5.88–Efeito de $\omega$ em $S$ .	114
Figura 5.89–Efeito de $\omega$ em $R$ .	115
Figura 5.90–Efeito de $\omega$ - $(S, I)$ .	115
Figura 5.91–Efeito de $\tau$ em $\phi$ .	115
Figura 5.92–Efeito de $\tau$ em $\rho$ .	115
Figura 5.93–Efeito de $\tau$ em $I$ .	116
Figura 5.94–Efeito de $\tau$ em $S$ .	116
Figura 5.95–Efeito de $\tau$ em $R$ .	116
Figura 5.96–Efeito de $\tau$ - $(S, I)$ .	116
Figura 5.97–Efeito de $\gamma$ em $I$ .	117
Figura 5.98–Efeito de $\gamma$ em $S$ .	117
Figura 5.99–Efeito de $\gamma$ em $R$ .	117
Figura 5.100–Efeito de $\gamma$ - $(S, I)$ .	117
Figura 5.101–Efeito de $a$ em $I$ .	118
Figura 5.102–Efeito de $a$ em $S$ .	118

Figura 5.103	Efeito de $a$ em $R$ .	118
Figura 5.104	Efeito de $a$ - $(S, I)$ .	118
Figura 5.105	Efeito de $b$ em $I$ .	119
Figura 5.106	Efeito de $b$ em $S$ .	119
Figura 5.107	Efeito de $b$ em $R$ .	119
Figura 5.108	Efeito de $b$ - $(S, I)$ .	119
Figura 5.109	Decaimento oscilatório (1).	120
Figura 5.110	Decaimento oscilatório (2).	120
Figura 5.111	Decaimento osc. $(S - I)$ .	120
Figura 5.112	Decaimento osc. (2) $(S - I)$ .	120
Figura 5.113	Caso $\Re(p) < 1$ .	121
Figura 5.114	Caso $\Re(p) > 1$ .	121
Figura 5.115	Modificando o ponto inicial.	122
Figura 5.116	$\Re_0$ e $\Re_0^S$ .	122
Figura 5.117	$\Theta$ equilíbrio permanece o mesmo.	122
Figura 5.118	$\Re_0 > 1$ não necessariamente indica a ocorrência de uma epidemia.	123
Figura 6.1	– Descrição do FDIPA.	132
Figura 6.2	– Modelo X Dados.	134
Figura 6.3	– Projeção.	134
Figura 6.4	– Modelo X Dados.	134
Figura 6.5	– Projeção.	134
Figura 6.6	– Tocantins.	135
Figura 6.7	– Paraíba.	135
Figura 6.8	– Tocantins.	135
Figura 6.9	– Paraíba.	135
Figura 6.10	– Primeira onda COVID-19.	136
Figura 6.11	– Órbita relativa à primeira onda.	136
Figura 6.12	– Otimização para a curva $I$ .	137
Figura 6.13	– Curvas $I$ e $R$ .	137
Figura 6.14	– Modelo X Dados.	137
Figura 6.15	– Projeção.	137
Figura 6.16	– Modelo X Dados.	138
Figura 6.17	– Projeção.	138
Figura 6.18	– Modelo X Dados.	139
Figura 6.19	– Extrapolação	139
Figura 6.20	– Modelo X Dados.	140
Figura 6.21	– Extrapolação	140
Figura 6.22	– Modelo X Dados ( $c = 0.01$ ).	140
Figura 6.23	– Extrapolação ( $c = 0.01$ ).	140

Figura 6.24—Curva de contágio COVID-19 [4]. . . . .	140
Figura 6.25—Primeira onda COVID-19. . . . .	141
Figura 6.26—Órbita relativa à primeira onda. . . . .	141
Figura 6.27—Acre. . . . .	142
Figura 6.28—Pará. . . . .	142
Figura 6.29—Piauí. . . . .	142
Figura 6.30—Ceará. . . . .	142
Figura 6.31—Rio Grande do Norte. . . . .	142
Figura 6.32—Minas Gerais. . . . .	142
Figura 6.33—Espírito Santo. . . . .	143
Figura 6.34—São Paulo. . . . .	143
Figura 6.35—Paraná. . . . .	143
Figura 6.36—Rio Grande do Sul. . . . .	143
Figura 6.37—Mato Grosso. . . . .	143
Figura 6.38—Goiás. . . . .	143
Figura 6.39—Fluxo SQIR. . . . .	146
Figura 6.40—SQIR frac.-Exemplo 1. . . . .	147
Figura 6.41—SQIR frac.-Exemplo 2. . . . .	147
Figura 6.42—SQIR frac.-Exemplo 3. . . . .	147
Figura 6.43—SQIR frac.-Exemplo 4. . . . .	147
Figura 6.44—SQIR frac.-Exemplo 5. . . . .	147
Figura 6.45—SQIR frac.-Exemplo 6. . . . .	147
Figura 6.46—SQIR frac.-Exemplo 7. . . . .	148
Figura 6.47—SQIR frac.-Exemplo 8. . . . .	148
Figura 6.48—SQIR frac.-Exemplo 9. . . . .	148
Figura 6.49—SQIR frac.-Exemplo 10. . . . .	148
Figura 6.50—Exemplo 9 (ZOOM). . . . .	149
Figura 6.51—Exemplo 10 (ZOOM). . . . .	149
Figura 6.52—Funções de fluxo - $\beta_1 = 1$ . . . . .	149
Figura 6.53—Funções de fluxo - $\beta_1 = 0.8$ . . . . .	149
Figura 6.54—Funções de fluxo - $\beta_1 = 0.2$ . . . . .	150
Figura 6.55—Funções de fluxo - $\beta_1 = 0$ . . . . .	150
Figura 6.56—Modelo X Dados. . . . .	150
Figura 6.57—Modelo X Dados ( $I$ ). . . . .	150
Figura 6.58—Modelo Comport. (Ex. 1) . . . . .	153
Figura 6.59—Variação da proporção $x$ (1). . . . .	153
Figura 6.60—Modelo Comport. (Ex. 2) . . . . .	153
Figura 6.61—Variação da proporção $x$ (2). . . . .	153
Figura 6.62—Modelo Comport. (Ex. 3) . . . . .	153

Figura 6.63–Variação da proporção $x$ (3).	153
Figura 6.64–Modelo Comport. (Ex. 4)	154
Figura 6.65–Variação da proporção $x$ (4).	154
Figura 6.66–Modelo Comport (BR).	154
Figura 6.67–Variação da proporção $x$ (BR).	154

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – $\mathfrak{R}_0$ de algumas doenças infecciosas [5]. . . . .	54
Tabela 5.1 – $\mathfrak{R}_0$ ultrapassa 1 antes da infecção começar a subir. . . . .	124
Tabela 5.2 – Interpretação biológica parece favorecer o uso de $\mathfrak{R}_0^S$ em vez de $\mathfrak{R}_0$ . . . . .	124
Tabela 5.3 – Pico e números de reprodução para $\alpha = 0.3 : 0.1 : 0.9$ . . . . .	125
Tabela 5.4 – Pico e números de reprodução para $\beta = 0.5 : 0.1 : 1$ . . . . .	125
Tabela 5.5 – Pico e números de reprodução para $\omega = 1.5 : 0.5 : 4.5$ . . . . .	126
Tabela 5.6 – Pico e números de reprodução para $\tau = 7 : 1 : 13$ . . . . .	126
Tabela 5.7 – Pico e números de reprodução para $\gamma = 0.004 : 0.003 : 0.022$ . . . . .	126
Tabela 5.8 – Pico e números de reprodução para $a = 0 : 0.002 : 0.01$ . . . . .	127
Tabela 5.9 – Pico e números de reprodução para $b = 0 : 0.01 : 0.03$ . . . . .	127
Tabela 6.1 – Parâmetros otimizados para cada estado do Brasil. . . . .	144



## SUMÁRIO

	<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>27</b>
2.1	A MODELAGEM MATEMÁTICA E OS MÉTODOS NUMÉRICOS . . . . .	27
2.1.1	<b>Discretizações . . . . .</b>	27
2.2	INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .	29
2.2.1	<b>Breve Histórico . . . . .</b>	30
2.2.1.1	<i>No Brasil . . . . .</i>	34
2.2.2	<b>Integrais e derivadas de ordem arbitrária . . . . .</b>	35
2.2.3	<b>Resultados iniciais . . . . .</b>	39
2.2.4	<b>Atenção às dificuldades do Cálculo Fracionário . . . . .</b>	42
2.3	MODELOS COMPARTIMENTAIS NA EPIDEMIOLOGIA . . . . .	48
2.3.1	<b>O modelo SIR . . . . .</b>	48
2.3.1.1	<i>Teoria Geral . . . . .</i>	49
2.3.1.2	<i>Taxas constantes . . . . .</i>	52
2.3.2	<b>Extensões e modificações do modelo SIR . . . . .</b>	52
2.3.3	<b>O número de reprodução . . . . .</b>	53
<b>3</b>	<b>MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS FRACIONÁRIOS . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1	MONOTONICIDADE E NÃO NEGATIVIDADE . . . . .	59
3.2	QUANDO COMEÇAR? . . . . .	60
3.3	OS PONTOS DE EQUILÍBRIO, O NÚMERO DE REPRODUÇÃO E O PONTO DE PICO . . . . .	60
<b>4</b>	<b>CONSTRUÇÃO DE UM MODELO SIR DE ORDEM ARBITRÁRIA . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1	DESCRIÇÃO DO MODELO . . . . .	67
4.2	NÃO NEGATIVIDADE E MONOTONICIDADE NO CASO LIMITE . . . . .	73
4.3	OS NÚMEROS DE REPRODUÇÃO . . . . .	74
4.4	PONTOS DE EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE . . . . .	77
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>87</b>
5.1	DISCRETIZAÇÃO DAS DERIVADAS DE ORDEM ARBITRÁRIA . . . . .	87
5.2	EXEMPLOS DO CAPÍTULO 3 . . . . .	90
5.2.1	<b>Ordens distintas . . . . .</b>	90
5.2.2	<b>Ordens iguais, sem dinâmica vital . . . . .</b>	92
5.2.3	<b>Modelo completo, com dinâmica vital . . . . .</b>	93
5.2.4	<b>Não localidade . . . . .</b>	95
5.3	ANÁLISE DE PARÂMETROS DO MODELO DISCUTIDO NO CAPÍTULO 3 . . . . .	96

5.3.1	<b>Ordens distintas</b> . . . . .	96
5.3.2	<b>Ordens iguais</b> . . . . .	99
5.4	<b>EXEMPLOS DO CAPÍTULO 4</b> . . . . .	103
5.4.1	<b>Exemplos da função de Mittag-Leffler de 1, 2 e 3 parâmetros</b> .	103
5.4.2	<b>Exemplos do modelo do Capítulo 4</b> . . . . .	106
5.4.2.1	<i>Caso limite sem dinâmica vital</i> . . . . .	106
5.4.2.2	<i>Modelo com dinâmica vital</i> . . . . .	108
5.4.2.3	<i>Comportamentos incomuns</i> . . . . .	109
5.5	<b>ANÁLISE DE PARÂMETROS DO MODELO DISCUTIDO NO CAPÍ-</b>	
	<b>TULO 4</b> . . . . .	111
5.5.1	<b>Infectividade extrínseca variável</b> . . . . .	117
5.5.2	<b>O número de reprodução</b> . . . . .	120
5.5.2.1	<i>Efeito dos parâmetros nos números de reprodução</i> . . . . .	125
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>129</b>
6.1	<b>O ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO</b> . . . . .	131
6.2	<b>PRIMEIRAS APLICAÇÕES À COVID-19</b> . . . . .	133
6.2.1	<b>Valor constante <math>\omega(t) = \omega</math></b> . . . . .	133
6.2.2	<b>Infectividade extrínseca variável</b> . . . . .	137
6.3	<b>EXTENSÕES PARA A INFECTIVIDADE EXTRÍNSECA VARIÁVEL</b>	138
6.3.1	<b>Estados brasileiros</b> . . . . .	141
6.4	<b>MODELO COM QUARENTENA</b> . . . . .	145
6.5	<b>MODELO COM DEPENDÊNCIA DE COMPORTAMENTO</b> . . . . .	150
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>155</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>159</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática é considerada o novo microscópio da biologia, só que melhor; enquanto a biologia é a nova física da matemática, só que melhor [6]. Essa citação retrata o atual desenvolvimento da biologia matemática, uma vertente que capta a atenção de diversos pesquisadores e tem estado em pauta todos os dias durante a atual pandemia de COVID-19. A ampla utilização de modelos matemáticos em situações ligadas à biologia não exaure o seu estudo. Ao contrário, algumas ferramentas matemáticas podem necessitar de uma revisão para que sejam utilizadas de maneira significativa e coerente tanto do ponto de vista biológico quanto do ponto de vista matemático.

Uma das ferramentas matemáticas utilizadas na modelagem de problemas do mundo real é o Cálculo de ordem arbitrária. O Cálculo de ordem arbitrária possui diversos nomes: Cálculo Fracionário, Cálculo Fracional, Cálculo de ordem não inteira etc. Também possui diversas definições para o mesmo objeto: por exemplo, as derivadas de ordem arbitrária podem ser no sentido de Riemann-Liouville, de Caputo, de Grünwald-Letnikov, entre muitas outras. Talvez a maior diferença do Cálculo de ordem inteira para o Cálculo de ordem não inteira seja que, nas definições mais utilizadas, este inclui a possibilidade de considerar a memória do fenômeno estudado, isto é, a dependência de estágios anteriores, sendo, portanto, não local.

Nesse sentido, possui aplicações em inúmeras áreas, como engenharia, física e biologia. Porém, sua imensa aplicabilidade coexiste com a dificuldade de uma teoria unificada e coerente. De fato, embora sua origem remonte ao século XVII, apenas nas últimas décadas o número de pesquisadores interessados apresentou crescimento considerável [7]. Neste trabalho, estudamos aplicações do Cálculo de ordem arbitrária a modelos epidemiológicos tipo SIR, procurando discutir e embasar o significado dessa utilização, de maneira a evitar erros na teoria matemática e dificuldades de interpretação.

Assim, no Capítulo 2, estabelecemos algumas bases tanto de Cálculo Fracionário quanto do modelo SIR tal qual foi originalmente construído em 1927, por Kermack e McKendrick [2]. Ressaltamos também alguns comportamentos incomuns do Cálculo Fracionário, como o fato do sinal da derivada fracionária de uma função não indicar um comportamento monótono. Esse Capítulo traz exemplos interessantes e situações de atenção, representando nossa proposta de uma coletânea de resultados importantes para um estudo inicial crítico do Cálculo Fracionário aplicado à modelagem.

Em seguida, no Capítulo 3, discutimos as principais dificuldades na utilização de um modelo SIR de ordem arbitrária. Tais dificuldades surgiram ao longo da nossa tentativa de manter propriedades como monotonicidade na ausência de dinâmica vital e, sobretudo, manter o significado epidemiológico da construção de Kermack e McKendrick. Foram ainda discutidos pontos de equilíbrio, o número básico de reprodução e outras questões

inerentes ao modelo. Cada parte desse Capítulo é baseada em discussões de trabalhos que elencamos ao longo da pesquisa, nos quais autores utilizam diversas ideias para o estudo do modelo SIR fracionário: ordens diferentes, correção artificial das unidades, Lema de Barbalat fracionário, entre outras. Também nos baseamos em autores que chamam a atenção para certas dificuldades de utilização do Cálculo Fracionário na modelagem. Propomos, portanto, uma síntese do “estado da arte” em modelos SIR fracionários e suas dificuldades.

Já no Capítulo 4, seguindo os passos de Angstmann, Henry e McGann [8], apresentamos a construção de um modelo recente e não usual, utilizando a linguagem probabilística dos Passeios Aleatórios de Tempo Contínuo (PATC). O tempo de remoção do indivíduo do compartimento infeccioso segue uma distribuição de Mittag-Leffler e a lei da função de infectividade também é construída de forma dependente do tempo desde a infecção, fazendo com que a derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville surja ao longo da construção. Como proposta de contribuição a esse estudo, estendemos a análise dos pontos de equilíbrio, positividade e outras questões de relevância. Em particular, propomos uma nova definição para o número de reprodução e o número básico de reprodução.

No Capítulo 5, construímos uma discretização para o modelo e exibimos resultados numéricos que verificam a teoria apresentada nos Capítulos 3 e 4, através de implementação no MATLAB. Na sequência, é realizada uma análise de parâmetros nos dois modelos. O Capítulo também ressalta nossa proposta de um número de reprodução  $S$ -variável, além de reforçar o entendimento do significado epidemiológico das ordens arbitrárias do modelo do Capítulo 4. Ao que sabemos, o modelo ainda não possuía um estudo numérico dessa amplitude. Porém, em [9], os autores haviam realizado um exemplo numérico muito interessante, utilizando o modelo SIR de recuperação fracionária com tempo discreto.

Finalmente, da mesma forma que o modelo SIR clássico possui diversas extensões que se adequam a cada tipo de doença, no Capítulo 6 propomos aplicações e extensões do modelo apresentado no Capítulo 4, que, no alcance de nosso conhecimento, ainda não possuía aplicações a uma doença real. Consideramos dados da COVID-19 e analisamos algumas opções de extensão, como infectividade oscilatória, compartimento de quarentena e dinâmica de imitação (comportamento humano), todas possibilitando a ocorrência de diversas ondas. As extensões são propostas de forma que o significado da construção fosse mantido e são também analisadas numericamente.

O último Capítulo contém nossas conclusões e ressalta os pontos principais. Chamamos ainda a atenção para ricas possibilidades futuras, como um estudo mais aprofundado dos modelos apresentados no Capítulo 6.

## 2 PRELIMINARES

Neste Capítulo, apresentamos as principais definições, teorias e resultados utilizados no trabalho, além de importantes exemplos e observações.

### 2.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA E OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Muitas teorias matemáticas são fomentadas por seu envolvimento com outras ciências, assim como o desenvolvimento destas depende de bases matemáticas cada vez mais amplas. Particularmente, a biologia matemática está em rápido crescimento, o que é inevitável à medida que a biologia se torna mais quantitativa. Para um matemático, a biologia abre excitantes horizontes de aplicação, enquanto, para um biólogo, a matemática oferece ferramentas de pesquisa a nível de poderosos laboratórios, desde que usada de forma correta, reconhecendo suas limitações [10].

Nesse contexto, a modelagem matemática e computacional pode lidar com a simulação de sistemas biológicos, buscando entender e manipular os principais mecanismos que regem esses fenômenos. Por um lado, temos a realidade física, fornecendo dados. Por outro, a abstração e a elaboração de hipóteses e teorias que buscam organizar a realidade através de leis matemáticas: é a construção de um modelo. O modelo criado, então, é estudado matematicamente e computacionalmente, após o que necessita ser confrontado com os dados para sua validação. Assim, a teoria matemática e a realidade se retroalimentam de maneira contínua: enquanto muitas teorias matemáticas de caráter puro encontram sua aplicação na modelagem de maneira inesperada e surpreendente, teorias criadas com interesse prático propiciam ricos campos de investigação matemática.

Entretanto, muitos modelos e equações surgidos na ciência não possuem uma solução analítica acessível. A solução de equações matemáticas de modelos próximos à realidade tornou-se possível através dos métodos da análise numérica. O advento da computação revolucionou este campo [11] e atualmente há programas eficientes para a obtenção de soluções numéricas, como, por exemplo, o MATLAB. Segundo seu site oficial, o MATLAB combina um ambiente ajustado para análise iterativa e processos de design com uma linguagem de programação que expressa matrizes matemáticas diretamente [12].

#### 2.1.1 Discretizações

Consideramos, como exemplo, um problema de Cauchy onde pede-se  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $I = [t_0, T]$ ,  $T < \infty$ , é um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua dada. É resultado clássico de Análise que, se  $f$  é lipschitziana na segunda variável, então a solução do problema (2.1) para  $t \in I$  existe e é única (ver, por exemplo, [13]). Esse tipo de problema e seus derivados modelam a evolução de muitos fenômenos mas, infelizmente, como já citado, só se conhecem soluções explícitas para casos especiais. Assim, soluções numéricas ou aproximadas desempenham um grande papel na modelagem.

O princípio comum aos métodos numéricos de diferenças finitas consiste em subdividir o intervalo  $I$  a partir de  $N + 1$  pontos  $t_n$  ( $0 \leq n \leq N$ ), com  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Comumente, são considerados pontos uniformemente espaçados, e  $h = (T - t_0)/N$  chama-se o passo da discretização. Em cada um dos pontos  $t_n$ , chamados nós, procura-se o valor desconhecido  $u_n$  que aproxima  $y_n = y(t_n)$ . O conjunto dos valores numéricos  $\{u_0 = y_0, u_1, \dots, u_N\}$  é a solução numérica.

Um método clássico para obtenção de soluções numéricas é o método de Euler, que aproxima a derivada pelo incremento. É um método de passo único, no sentido de que só se precisa conhecer a solução no tempo anterior. Há duas versões do método de Euler: a progressiva e a regressiva. Escrevendo  $f_n = f(t_n, u_n)$ , a solução é construída de uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hf_n & , \quad n = 0, 1, \dots, N-1 & \quad (\text{Euler progressivo}), \\ u_{n+1} &= u_n + hf_{n+1} & , \quad n = 0, 1, \dots, N-1 & \quad (\text{Euler regressivo}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Enquanto o método progressivo só depende de  $u_n$  e de  $t_n$ , sendo um método explícito, o regressivo também depende de  $u_{n+1}$  pela dependência de  $f_{n+1}$ , sendo dito método implícito. Métodos implícitos são mais custosos computacionalmente, porém costumam ser mais estáveis. Os métodos numéricos estendem-se naturalmente para sistemas de equações se os escrevemos na forma vetorial  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$ .

É importante salientar a conveniência de que o método numérico utilizado seja convergente, nas seguintes condições [14]:

**Convergência:** Um método é dito convergente se, para todo  $n = 0, \dots, N$ , tem-se  $|y_n - u_n| \leq C(h)$ , onde  $\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = 0$ . Se  $C(h) = O(h^p)$  para algum inteiro  $p > 0$ , diz-se que a ordem de convergência do método é  $p$ . Particularmente, os métodos de Euler progressivo e regressivo convergem com ordem 1.

Uma condição necessária para a convergência é a consistência:

**Consistência:** Seja  $u_n^*$  a solução numérica que se obteria no tempo  $t_n$  partindo-se da solução exata em  $t_{n-1}$ . A quantidade  $\tau_n(h) = (y_n - u_n^*)/h$  é chamada erro de truncatura local, enquanto  $\tau(h) = \max_{n=0,1,\dots,N} |\tau_n(h)|$  é dito erro de truncatura global. Um método é dito consistente se  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ . Além disso, se  $\tau(h) = O(h^p)$  para algum inteiro  $p > 0$ , diz-se que a ordem de consistência do método é  $p$ .

É também importante o conceito de zero-estabilidade, pois pequenas perturbações

devem conduzir a perturbações limitadas:

**Zero-Estabilidade:** Um método numérico é zero-estável se existirem  $\epsilon > 0$ ,  $h_0 > 0$ ,  $C > 0$  tais que  $\forall h \in (0, h_0]$ , se  $|\rho_n| < \epsilon$ , então  $|z_n - u_n| \leq \epsilon C$  para  $0 \leq n \leq N$ . Nessa definição,  $\rho_n$  é a perturbação introduzida no  $n$ -ésimo passo,  $\epsilon$  é a perturbação máxima e  $z_n$  é a solução que se iria obter ao aplicar o método ao problema perturbado. A constante  $C$  pode depender do intervalo  $I$ , mas independe de  $h$ .

Ao longo da história, foram desenvolvidos diversos outros métodos numéricos, na tentativa de melhorar a convergência, diminuir erros e aumentar a estabilidade. São métodos multipassos, métodos de ordens superiores, passos de tamanho variável etc. Em particular, um método numérico multipasso linear pode ser escrito de forma geral como

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}. \quad (2.3)$$

Se  $b_{-1} = 0$ , o método é explícito. Com exceção de  $u_0$ , que é igual a  $y_0$ , os valores  $u_1, \dots, u_p$  podem ser obtidos por outros métodos.

Além disso, as mesmas ideias podem ser aplicadas em malhas de dimensões maiores, por exemplo, uma malha  $(x, t)$  para problemas diferenciais parciais tempo-espaciais. O objetivo comum é o de otimizar a acurácia dentro de um tempo computacional hábil. Foge do escopo deste trabalho o aprofundamento nesses temas. Para uma abordagem inicial em cálculos numéricos no MATLAB ou em programas similares, sugerimos, por exemplo, a referência [14].

## 2.2 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Esta Seção versa sobre o Cálculo de ordem arbitrária, comumente conhecido como Cálculo Fracional ou Cálculo Fracionário, nomenclatura que será utilizada sempre que não haja confusões de interpretação. Com efeito, embora Cálculo de ordem arbitrária seja tecnicamente o termo mais correto, o nome Cálculo Fracionário é o mais utilizado no Brasil, mesmo que não se esteja trabalhando com frações.

O Cálculo Fracionário tem se mostrado uma ferramenta muito útil na captura da dinâmica do processo físico de diversos objetos científicos, sendo, em geral, relacionado ao “efeito memória”. De fato, os operadores mais utilizados na modelagem de ordem arbitrária permitem capturar a dependência de estágios anteriores em materiais ou processos e, nesse contexto, torna mais próximos da realidade fenômenos biológicos, reológicos, sistemas mecânicos, elétricos, entre outros [15]. Alguns modelos fracionários, inclusive, parecem recuperar efeitos desconsiderados na modelagem de ordem inteira, como é o caso do amortecimento no problema do oscilador harmônico [7]. Aqui, revisitamos um pouco da teoria matemática a fim de melhorar a compreensão dos modelos fracionários.

### 2.2.1 Breve Histórico

Segundo a maior parte dos estudiosos, em 1695 Leibniz endereçou a l'Hôpital uma carta na qual formulava uma questão envolvendo uma possível generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem, a princípio, arbitrária. Então, l'Hôpital questionou Leibniz sobre a possibilidade e o significado de uma derivada de ordem  $1/2$ . Em sua resposta, Leibniz escreveu: “Assim, segue-se que  $d^{1/2}x$  será igual a  $x\sqrt{dx} : x$ , um aparente paradoxo, do qual um dia importantes consequências são traçadas”. Em outra carta, dirigida a J. Bernoulli, Leibniz mencionou o termo derivada de “ordem geral” [16]. Esse contexto pode ser considerado o nascimento do Cálculo Fracionário. Para uma cronologia de resultados e publicações no período de 1695 a 2019, sugerimos o Capítulo 1 da mesma referência [16] e os pôsteres “History of Fractional Calculus” [17] e “Recent History of Fractional Calculus” [18], elaborados por J. Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova e Francesco Mainardi. Abaixo, oferecemos uma versão resumida da linha do tempo acessível em [16]:

→ 1812. Usando integrais, P. S. Laplace escreveu expressões para uma derivada de ordem não inteira.

→ 1819. Em um tratado sobre cálculo diferencial e integral, S. F. Lacroix obteve formalmente a derivada de ordem  $1/2$ , chegando à expressão  $(d^{1/2}/dx^{1/2})x = 2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$ .

→ 1822. J. B. J. Fourier publicou a clássica “Teoria Analítica do Calor” e obteve uma fórmula integral para a derivada de ordem  $u$  (positiva ou negativa). Em 1835, Liouville sugeriu uma maneira mais adequada de obter o resultado de Fourier.

→ 1823. H. N. Abel estudou o problema da tautócrona usando integrais definidas. Este resultado é considerado a primeira aplicação do Cálculo Fracionário.

→ 1832. J. Liouville publicou o primeiro grande estudo sobre Cálculo Fracionário. Em 1835, ele sugeriu uma expressão para a derivada de ordem arbitrária através de séries infinitas. Em 1855, propôs uma série de definições para a derivada de ordem arbitrária. Já em 1873, ele discutiu a integração de equações diferenciais com derivadas de ordem arbitrária. Vale a pena mencionar que Liouville trabalhou por mais de quarenta anos ininterruptos no Cálculo Fracionário, pelo que alguns pesquisadores o consideram o pai do Cálculo Fracionário.

→ 1847. B. Riemann introduziu uma expressão para a integral de ordem arbitrária que, com pequenas mudanças, passa a ser exatamente a expressão usada ainda hoje. A publicação dos resultados importantes de Riemann ocorreu postumamente, em 1892.

→ 1867. A. K. Grünwald discutiu a inversão de uma equação integral.

→ 1868. A. V. Letnikov propôs a soma das ordens no produto de derivadas de ordem arbitrária e discutiu trabalhos anteriores. Em 1872, ele discutiu a generalização da fórmula integral de Cauchy e usou derivadas fracionárias para abordar equações diferenciais.

→ 1903. G. Mittag-Leffler introduziu a função que leva seu nome e é de importância fundamental no Cálculo Fracionário.

→ 1924. H. T. Davis discutiu a aplicação de operadores fracionários a uma classe de equações integrais do tipo Volterra. Em 1936, publicou o livro “The Theory of Linear Operators”.

→ 1941. D. V. Widder relacionou a transformada de Laplace e as integrais fracionárias.

→ 1949. G. W. Scott Blair publicou o livro “Survey of General and Applied Rheology”, onde a modelagem fracionária é apresentada.

→ 1969. M. Caputo publicou “Elasticità e Dissipazione”, em italiano. Neste texto, é introduzida a derivada de ordem arbitrária que leva seu nome.

→ 1971. E. R. Love apresentou a derivada de ordem imaginária.

→ 1972. T. R. Prabhakar discutiu equações integrais contendo funções hipergeométricas com duas variáveis independentes através de integração fracionária. A função de Mittag-Leffler com três parâmetros foi introduzida.

→ 1974. K. Oldham e J. Spanier publicaram o primeiro livro dedicado exclusivamente ao Cálculo Fracionário, “The Fractional Calculus” ([19]), agora um clássico. Esse também foi o ano da primeira conferência internacional dedicada exclusivamente ao Cálculo Fracionário, ocorrida em New Haven.

→ 1975. B. Ross editou “Fractional Calculus and its Applications”, os anais da Conferência Internacional sobre Cálculo Fracionário e Aplicações.

Após a conferência de 1974, o número de pesquisadores envolvidos com essa área experimentou grande crescimento, sendo inclusive propostas novas formulações de operadores fracionários. Entre 1975 e 2000, aproximadamente 600 artigos foram publicados [7]. Nesse período, destaca-se também o crescimento das metodologias envolvendo procedimentos numéricos e computacionais, visando a solução de equações diferenciais fracionárias (ordinárias e parciais). Citamos alguns grandes feitos entre 1974 e 2019:

→ 1978. B. Ross e F. Northover usaram a derivada de ordem complexa no Cálculo Fracionário.

→ 1979. A. C. McBride publicou um livro sobre Cálculo Fracionário e transformadas integrais de funções generalizadas.

→ 1979. R. L. Bagley, orientado por P. J. Torvik, apresentou o que normalmente é considerada a primeira tese de doutorado em Cálculo Fracionário, “Applications of Generalized Derivative to Viscoelasticity”. Ressalta-se, porém, que, em 1971, F. Mainardi, orientado por M. Caputo, também defendeu uma tese de doutorado sobre o mesmo assunto. Mais ainda, em 1970, Yu A. Rossikhin, na Rússia, defendeu sua tese de doutorado usando ferramentas do Cálculo Fracionário, de acordo com [20].

- 1979. M. Stiassnie publicou uma aplicação do Cálculo Fracionário para a formulação de modelos viscoelásticos.
- 1984. K. Nishimoto publicou o primeiro volume de seu “Fractional Calculus”. O segundo volume apareceu em 1987, o terceiro em 1989 e o quarto em 1991.
- 1987. S. Samko, O. Marichev e A. Kilbas publicaram o livro clássico “Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications”, em russo.
- 1992. Primeira revista especializada: Journal of Fractional Calculus. Editor: K. Nishimoto.
- 1993. K. Miller e B. Ross publicaram o livro “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations”.
- 1994. V. S. Kiryakova publicou o livro “Generalized Fractional Calculus and Applications”.
- 1996. M. Caputo publicou a função de Green da difusão de fluidos em meios porosos com memória.
- 1997. A. Carpinteri e F. Mainardi editaram o livro “Fractal and Fractional Calculus in Continuous Mechanics”.
- 1998. Lançamento da revista especializada Fractional Calculus and Applied Analysis. Editora: V. S. Kiryakova.
- 1998. C. F. Lorenzo e T. T. Hartley discutiram o interessante problema de inicialização, relacionado ao limite inferior da integral fracionária.
- 1999. I. Podlubny publicou o livro “Fractional Differential Equations”[15].
- 2000. R. Hilfer editou o livro “Applications of Fractional Calculus in Physics”. A definição da derivada fracionária de Hilfer contém, como casos particulares, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo.
- 2000. Foi lançado o site FRACALMO. O nome é um acrônimo para Fractional Calculus Modelling.
- 2002. I. Podlubny forneceu uma possível interpretação, geométrica e física, de integrais e derivadas fracionárias.
- 2003. E. K. Lenzi, R. S. Mendes, L. C. Malacarne e I. T. Pedron discutem difusão anômala usando uma equação diferencial não linear fracionária.
- 2004. K. Diethelm publicou o livro “The Analysis of Fractional Differential Equations”[21].
- 2006. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo publicaram o livro “Theory and Applications of Fractional Differential Equations”.
- 2006. R. L. Magin publicou o livro “Fractional Calculus in Bioengineering”.
- 2007. J. Sabatier, O. P. Agrawal e J. A. Tenreiro Machado editaram o livro “Advan-

ces in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering”.

→ 2009. J. A. Tenreiro Machado sugeriu uma interpretação da derivada fracionária por meio do conceito de probabilidade.

→ 2010. J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova e F. Mainardi publicaram dois pôsteres, disponíveis para download em <http://www.math.bas.bg/~fcaa/>, onde listam os destaques da história antiga e da história recente do Cálculo Fracionário.

→ 2011. U. N. Katugampola introduziu uma nova integral fracionária.

→ 2011. M. D. Ortigueira publicou o livro “Fractional Calculus for Scientists and Engineers”.

→ 2011. E. Capelas de Oliveira e J. Vaz Jr. publicaram “Tunneling in Fractional Quantum Mechanics”.

→ 2011. M. M. Meerschaert e A. Sikorskii publicaram o livro “Stochastic Models for Fractional Calculus”.

→ 2012. D. Baleanu, K. Diethelm, E. Salas e J. J. Trujillo publicaram o livro “Fractional Calculus, Models and Numerical Methods”.

→ 2013. V. Daftardar-Gejji editou o livro “Fractional Calculus Theory and Applications”.

→ 2014. R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi e S. V. Rogosin publicaram o livro “Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications”[22].

→ 2014. E. Capelas de Oliveira e J. A. Tenreiro Machado publicaram um artigo reunindo as várias definições de derivada fracionária.

→ 2014. H. M. Srivastava, R. K. Raina e Xiao-Jun Yang publicaram o livro “Special Functions in Fractional Calculus and Related Fractional Differintegral Equations”.

→ 2015. M. Caputo e M. Fabrizio publicaram um artigo onde introduziram uma nova derivada fracionária, com núcleo não singular.

→ 2015. M. Ortigueira e J. A. Tenreiro Machado propuseram um critério, mais restritivo do que o proposto por Ross (1974), para determinar se uma dada derivada pode ser considerada uma derivada fracionária [23].

→ 2015. R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira publicaram o livro “Cálculo Fracionário” [7], o primeiro livro escrito em português sobre o assunto.

→ 2016. V. E. Tarasov publicou um artigo em que justifica a afirmação “Para que uma derivada seja considerada fracionária, a regra de Leibniz não deve se aplicar”.

→ 2016. A. Atangana e D. Baleanu introduziram uma derivada fracionária com um núcleo não local e não singular.

→ 2017. R. Almeida propôs uma derivada fracionária em relação a uma função.

→ 2017. J. A. Tenreiro Machado e V. Kiryakova publicaram um interessante levantamento histórico do Cálculo Fracionário.

→ 2017. D. Zhao e M. Luo introduziram uma derivada fracionária conforme geral e sua interpretação física.

→ 2017. Conforme tornamos a comentar na próxima Subseção, D. S. Oliveira e E. Capelas de Oliveira propuseram uma generalização da derivada de Hadamard via integral de Katugampola e, em 2018, a derivada fracionária  $(k, \rho)$ .

→ 2017. Y. Yan, Z.-Zhong Sun e J. Zhang propuseram um método numérico rápido para discutir equações diferenciais de segunda ordem com derivadas do tipo Caputo.

→ 2018. Como comentamos novamente na próxima Subseção, J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas de Oliveira propuseram a derivada  $\psi$ -Hilfer.

→ 2018. X. Liang, F. Gao, C-B. Zhou, Z. Wang e X.-J. Yang propuseram um modelo de difusão anômala com base nas funções de Mittag-Leffler e Wiman.

→ 2018. L. R. Evangelista e E. K. Lenzi publicaram o livro “Fractional Diffusion Equations and Anomalous Diffusion”.

→ 2018. H. G. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen e Y. Q. Chen apresentaram um coleção de aplicações do Cálculo Fracionário ao mundo real.

→ 2019. E. Capelas de Oliveira, S. Jarosz e J. Vaz Jr. publicaram “Fractional calculus via Laplace transform and its application in relaxation processes”.

→ 2019. G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado e E. Capelas de Oliveira publicaram “A review of definitions of fractional derivatives and other operators”.

Congressos e simpósios têm ocorrido com mais frequência e regularidade, tendo sido realizada em dezembro de 2020, durante a pandemia da COVID-19, a *Primeira Conferência Online sobre Cálculo Fracionário Moderno e suas Aplicações - First Online Conference on Modern Fractional Calculus and Its Applications (OCMFCA-2020)*.

#### 2.2.1.1 No Brasil

Provavelmente, o primeiro a mencionar as derivadas de ordem arbitrária no Brasil foi Aguinaldo Ricieri, em “Derivada de ordem arbitrária, Transformada de Laplace e Outros Bichos” (1993). Também no final do século XX, no Paraná, um grupo de físicos liderado por Lenzi estudava equações associadas à difusão anômala. Em 2004, o então estudante da USP Vinícius Alegreti Meza publica em congresso da UNICAMP um trabalho intitulado “Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville aplicado ao problema da tautócrona”.

A partir de 2005, enquanto o grupo de físicos citado continuava com ativa participação em diversos estados, sobretudo no Paraná, em Santa Catarina e no Rio de Janeiro, em Campinas emerge o primeiro estudo sobre a função Mittag-Leffler. De 2007 em diante,

surtem artigos de Edmundo Capelas de Oliveira e coautores, enquanto seu orientando Castro Rosendo publica em 2008 uma dissertação quase que exclusiva sobre Cálculo Fracionário, provavelmente a primeira em língua portuguesa apresentada no Brasil [24]. Em 2009, Rubens de Figueiredo Camargo, também coautor e orientando de Capelas de Oliveira, publica sua tese, coorientada por Ary Chiacchio, o primeiro texto em português a fazer um estudo completo em Cálculo Fracionário. Desde então, diversos trabalhos importantes vêm sendo desenvolvidos por pesquisadores brasileiros, com atenção especial à primeira obra formal em língua portuguesa, o “Cálculo Fracionário” [7], publicada em 2015 por Figueiredo Camargo e Capelas de Oliveira, conforme consta na linha do tempo.

Vale destacar que o Brasil é vanguarda nas generalizações dos operadores fracionários. Atenção seja dada, como citado na linha do tempo, à contribuição de Daniela Oliveira e Edmundo Capelas de Oliveira quando propuseram, em 2017, uma generalização da derivada de Hadamard via integral de Katugampola [25]. Em 2018, os mesmos propuseram a derivada fracionária  $(k, \rho)$ , dependendo de dois parâmetros [26]. Ainda em 2018, J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas de Oliveira apresentaram a  $\psi$ -Hilfer, derivada que contém, como casos particulares, mais de vinte formulações distintas de derivadas fracionárias [27].

### 2.2.2 Integrais e derivadas de ordem arbitrária

Seguimos aqui a ordenação de [7], onde primeiro apresentamos o conceito de integração e, em seguida, o de derivação. É importante reiterar que a palavra “fracionária”, nesse contexto, não diz respeito necessariamente a fração. Assim, muitas vezes utilizamos o termo “ordem arbitrária”. Antes de introduzir a integral de ordem arbitrária, relembramos o conceito de integral de ordem inteira, por vezes chamada integral múltipla ou iterada:

**Definição 2.1** (Integral iterada de ordem inteira). *Define-se a integral de ordem  $n \in \mathbb{N}$  a partir da expressão*

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1. \quad (2.4)$$

Por definição,  $I^0 f(t) = f(t)$ .

O próximo resultado, utilizando a convolução de Laplace, é ponto de partida para a generalização do conceito de integral de ordem  $n$ . Para tanto, definimos:

**Definição 2.2** (Função de Gel’fand-Shilov). *Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Define-se a função de Gel’fand-Shilov como*

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Se  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\Gamma$  representa a função gama. Observamos que  $\mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\} = s^{-\alpha}$  por aplicação direta da Transformada de Laplace.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < t < \infty$  e  $f(t)$  uma função integrável. Então,*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) \star f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

onde  $\star$  indica convolução [7].

Assim, é de se esperar que a definição de uma integral de ordem  $\alpha$  arbitrária seja dada por  $I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) \star f(t)$ . Abaixo consideramos  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo finito,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , e  $0 \leq n-1 < \text{Re}(\alpha) < n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.3** (Integral de Riemann-Liouville em intervalos finitos). *A integral de Riemann-Liouville (à esquerda) de ordem arbitrária  $\alpha$  é definida para  $t \in [a, b]$  por:*

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta. \quad (2.8)$$

A definição à direita, entre outras, pode ser consultada em [7]. A integral de um polinômio é dada pela aplicação do seguinte resultado:

**Proposição 2.1.** *Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0$ , então [7]:*

$$(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}. \quad (2.9)$$

A seguinte observação diz respeito à existência da integral de Riemann-Liouville para  $\alpha$  real positivo:

**Observação 2.1.** *A integral de ordem arbitrária dada pela Definição 2.3 existe em quase todos os pontos para toda função  $f \in L^1[a, b]$ . Além disso,  $I_{a+}^\alpha f(t) \in L^1[a, b]$  [21].*

Após introduzir a integral de ordem arbitrária, torna-se natural buscar a definição da derivada.

**Definição 2.4** (Derivada de Riemann-Liouville em intervalos finitos). *A derivada de Riemann-Liouville (à esquerda) de ordem arbitrária  $\alpha$  é definida para  $t \in [a, b]$  por*

$$D_{a+}^\alpha f(t) = D^n [I_{a+}^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d^n}{dt^n} \right) \int_a^t (t-\theta)^{n-\alpha-1} f(\theta) d\theta, \quad (2.10)$$

com  $D^n$  representando a derivada de ordem inteira.

A observação 2.2 diz respeito à existência da derivada de Riemann-Liouville. Porém, antes apresentamos a definição de um espaço que será ocasionalmente citado neste trabalho:

**Definição 2.5.** Por  $AC^n[a, b]$ , denotamos o espaço das funções com  $n - 1$  derivadas absolutamente contínuas em  $[a, b]$ , isto é, as funções  $f$  para as quais existe em quase todo ponto uma função  $g \in L^1[a, b]$  tal que

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(t)d(t). \quad (2.11)$$

Neste caso, chamamos  $g$  a  $n$ -derivada generalizada de  $f$  [21].

**Observação 2.2.** A derivada de ordem arbitrária dada pela Definição 2.4 existe em quase todos os pontos para toda função  $f \in AC^n[a, b]$ [7].

Verifica-se diretamente que:

**Proposição 2.2.** Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  com  $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ , então [7]:

$$(D_{a+}^\alpha (t - a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.12)$$

Uma observação importante é que a derivada de Riemann-Liouville de uma constante não nula não é zero. Com efeito, vale o seguinte resultado:

**Lema 2.1.** A igualdade  $D_{a+}^\alpha f(t) = 0$  é válida se, e somente se,

$$f(t) = \sum_{j=1}^n c_j (t - a)^{\alpha-j}, \quad (2.13)$$

onde  $c_j \in \mathbb{R}$ , com  $j = 1, \dots, n$ , são constantes arbitrárias [7].

Finalmente, apresentamos a definição da derivada de ordem arbitrária de Caputo, para a qual, entre outras características, a derivada de uma constante é zero:

**Definição 2.6** (Derivada de Caputo em intervalos finitos). A derivada de Caputo com ordem arbitrária  $\alpha$  é definida para  $t \in [a, b]$  por

$${}^C D_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^{n-\alpha} [D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \theta)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) d\theta. \quad (2.14)$$

**Observação 2.3.** A integral de Riemann-Liouville e as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo de ordem arbitrária são operadores lineares.

Se  $f \in AC^n[a, b]$ , apresentamos ainda a seguinte propriedade:

**Proposição 2.3.** As derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville e Caputo obedecem à seguinte relação [7]:

$${}^C D_{a+}^\alpha f(t) = D_{a+}^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \right] = D_{a+}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}. \quad (2.15)$$

**Observação 2.4.** Nas referências [7] e [21], a primeira igualdade da Equação (2.15) é dada como definição da derivada de Caputo. Porém, como ressaltado em [7], a Definição 2.6 foi a definição dada por Michele Caputo. Já Diethelm, em [21], definiu a derivada de Caputo como na Equação (2.15) para funções tais que  $D_{a+}^{\alpha} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \right]$  existe. Para tanto, é suficiente termos  $f \in AC^n[a, b]$ , como na Observação 2.2.

**Observação 2.5.** A partir de agora, consideramos  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a menos que seja mencionado o contrário. Essa hipótese facilita a obtenção e a demonstração de resultados, além de ser suficiente para os propósitos do trabalho.

Uma característica da Definição 2.6 evitada na definição dada pela Equação (2.15) é que ela não permite que escrevamos  ${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{m-\alpha} [D^m f(t)]$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > \alpha$ . Precisamos exigir  $m = n = \lceil \alpha \rceil$ . Por exemplo, se consideramos  $m = 2$  para  $\alpha = 1/2$ , chegamos à conclusão equivocada de que  ${}^C D_{0+}^{1/2} t = I_{0+}^{3/2} D^2 t = 0$ . Já na Definição 2.4, é possível trocar  $n$  por qualquer  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > \alpha$  [21].

Para a derivada de Caputo, vale a seguinte proposição:

**Proposição 2.4.** Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  com  $Re(\alpha) > 0$  e  $Re(\beta) > n$ , então [7]:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.16)$$

Se  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , então

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^k)(x) = 0. \quad (2.17)$$

Quanto ao limite para a ordem inteira, as derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville e Caputo possuem compatibilidade reversa [23], isto é,

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} D_{a+}^{\alpha} f(t) = D^n f(t). \quad (2.18)$$

Entretanto, enquanto  $\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D_{a+}^{\alpha} f(t) = D^{n-1} f(t)$  por verificação imediata, temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^t \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) d\theta = D^{n-1} f(t) - D^{n-1} f(a). \quad (2.19)$$

Se  $f$  é bem comportada, a integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville é o inverso à direita tanto da derivada de Riemann-Liouville quanto da derivada de Caputo. Mais especificamente, valem os seguintes lemas:

**Lema 2.2.** Se  $f \in L_p(a, b)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , então [7]:

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t). \quad (2.20)$$

**Lema 2.3.** *Se  $f \in L_\infty(a, b)$ , então [7]:*

$${}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.21)$$

As condições impostas sobre  $f$  são importantes, como exemplificado abaixo.

**Exemplo 2.1.** *Seja  $f(t) = -1/\sqrt{\pi t} + 2\sqrt{t}/\sqrt{\pi}$ . Observe que  $f \in L^1(0, 1)$ , mas  $f \notin L_\infty(0, 1)$ . Assim,  $f$  está nas condições do Lema 2.2, mas não do Lema 2.3. Com efeito, vale o Lema 2.2, mas nesse caso não é válido o Lema 2.3.*

*Considerando a derivada de Riemann-Liouville e lembrando que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  e  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ , temos*

$$D_{0+}^{1/2} I_{0+}^{1/2} f(t) = D_{0+}^{1/2}(t - 1) = \frac{-1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} = f(t). \quad (2.22)$$

*Porém, considerando a derivada de Caputo, temos*

$${}^C D_{0+}^{1/2} I_{0+}^{1/2} f(t) = {}^C D_{0+}^{1/2}(t - 1) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \neq f(t). \quad (2.23)$$

◁

### 2.2.3 Resultados iniciais

Agora, tratamos das funções de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros. A clássica função de Mittag-Leffler com um parâmetro pode ser considerada uma generalização da função exponencial. Devido à sua importância e abrangência na solução de várias equações diferenciais fracionárias, recebeu a alcunha de **rainha das funções especiais** do Cálculo Fracionário, sendo as funções relacionadas tidas como sua corte [22]. Sua importância para o Cálculo Fracionário se assemelha à importância da função exponencial para o Cálculo clássico. Realmente, a derivada fracionária segundo Caputo da função de Mittag-Leffler é também múltipla da própria função, ou seja, a principal propriedade do Cálculo é mantida (ver, por exemplo, [28]). Apresentamos a seguinte definição [16]:

**Definição 2.7** (Função de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros). *Sejam  $z \in \mathbb{C}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{R}$  três parâmetros tais que  $\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0, \rho > 0$ . Definimos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros através da série de potências*

$$E_{\alpha, \beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.24)$$

onde  $(\rho)_k$  é o símbolo de Pochhammer. Particularmente, quando  $\rho = 1$ , temos a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada simplesmente por  $E_{\alpha, \beta}^1(t) = E_{\alpha, \beta}(t)$ . Já quando  $\rho = \beta = 1$ , obtemos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por  $E_{\alpha, 1}^1(t) = E_{\alpha, 1}(t) = E_\alpha(t)$ .

**Observação 2.6.** Dado um número real  $\rho$  que não seja inteiro negativo e  $n > 0$  um inteiro, o símbolo de Pochhammer é definido por

$$(\rho)_n = \frac{\Gamma(\rho + n)}{\Gamma(\rho)}. \quad (2.25)$$

Particularmente,  $(1)_n = n!$ .

**Observação 2.7.** A partir de agora, consideramos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , a menos que seja mencionado o contrário. Essa hipótese facilita a obtenção e a demonstração de resultados, além de ser suficiente para os fins do trabalho.

**Observação 2.8.** A função de Mittag-Leffler definida pela Equação (2.24) generaliza algumas funções conhecidas, que podem ser obtidas como casos particulares. Quando  $\alpha = \beta = \rho = 1$ , obtemos a função exponencial  $E_1(z) = \exp(z)$ . Também é possível obter as funções cosseno e seno, conforme segue:

$$E_2(-z^2) = \cos(z) ; \quad zE_{2,2}(-z^2) = \text{sen}(z). \quad (2.26)$$

Além disso, as funções seno e cosseno hiperbólicos também são casos particulares da função de Mittag-Leffler:

$$E_2(z^2) = \cosh(z) ; \quad zE_{2,2}(z^2) = \text{senh}(z). \quad (2.27)$$

Na referência [7], são exibidas outras relações da função de Mittag-Leffler com funções especiais, como a função hipergeométrica confluyente.

No Capítulo 5, ilustramos a função de Mittag-Leffler utilizando um código MATLAB proposto em [29]. Apresentamos sua derivada na proposição abaixo:

**Proposição 2.5** (Derivada da função de Mittag-Leffler com três parâmetros). *É válida a seguinte identidade:*

$$\frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha,\beta}^\rho(z) = (\rho)_k E_{\alpha,\beta+\alpha k}^{\rho+k}(z). \quad (2.28)$$

A demonstração da proposição pode ser consultada em [16]. As funções de Mittag-Leffler possuem a importante propriedade da monotonicidade completa sob algumas hipóteses. Definimos:

**Definição 2.8** (Monotonicidade completa). *Uma função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada completamente monotônica se possui derivadas  $f^{(n)}(t)$  de qualquer ordem  $n = 0, 1, \dots$ , e as derivadas alternam o sinal, isto é,*

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0, \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (2.29)$$

A propriedade acima equivale à existência de uma representação da função  $f$  na forma de uma integral de Laplace-Stieltjes

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\theta} d\mu(\theta), \quad (2.30)$$

onde  $\mu(\theta)$  é não decrescente e a integral converge para  $0 < t < \infty$  [30]. Em particular:

**Teorema 2.2.** *A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros com argumento real negativo  $E_{\alpha,\beta}(-t)$  é completamente monotônica para  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $\alpha \leq \beta$  [22].*

Abaixo, apresentamos uma versão modificada do Teorema que fornece a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler. Na maior parte dos casos, ela é fornecida de maneira mais geral, porém para uma região de convergência menor. Optamos por esta modificação dada a necessidade de utilização no presente trabalho.

**Proposição 2.6.** *[Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler de variável real - Versão Modificada] Para  $s$  real positivo e  $\lambda > 0$ , a transformada de Laplace da função  $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$ , com  $t \in [0, \infty]$  e  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , é dada por*

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)](s) = \frac{1}{s^{\beta-\alpha}(s^\alpha + \lambda)}. \quad (2.31)$$

*Demonstração.* Nessas condições,  $E_{\alpha,\beta}(-\lambda t)$  é completamente monotônica e, portanto,  $0 \leq t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, para  $s > 0$ , para todo  $T \in [0, \infty]$ , temos

$$\int_0^T e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t) dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}. \quad (2.32)$$

Além disso, como  $e^{-st}$  e  $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t)$  são positivos, a função

$$g(T) = \int_0^T e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t) dt \quad (2.33)$$

é monótona crescente. Como toda função monótona limitada converge para um limite finito, a transformada de Laplace existe.

Se  $s > \lambda^{1/\alpha}$ , então (ver, por exemplo, [16]),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta-\alpha}(s^\alpha + \lambda)}\right\} = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t). \quad (2.34)$$

Pelo Teorema da Identidade [31], como as funções analíticas  $g(T)$  e  $1/(s^{\beta-\alpha}(s^\alpha + \lambda))$  estão definidas também no aberto  $(0, \infty)$ , temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta-\alpha}(s^\alpha + \lambda)}\right\} = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t), \quad (2.35)$$

para  $s > 0$ . □

Abaixo, apresentamos a integral de ordem arbitrária da Função de Mittag-Leffler com três parâmetros [16]:

**Proposição 2.7.** *Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos a seguinte identidade:*

$$I_{0+}^{\nu}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\lambda t^{\alpha})) = t^{\nu+\beta-1}E_{\alpha,\nu+\beta}^{\rho}(\lambda t^{\alpha}). \quad (2.36)$$

Uma das propriedades mais importantes da função de Mittag-Leffler no Cálculo Fracionário é dada pela seguinte proposição [16]:

**Proposição 2.8.** *A função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$  é solução da equação diferencial fracionária  ${}^C D_{0+}^{\alpha} f(t) = \lambda f(t)$ .*

É interessante observar que, na Proposição 2.8, para  $\alpha = 1$  obtemos o resultado clássico com respeito à exponencial. Abaixo, apresentamos as transformadas de Laplace das derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville e Caputo [16]:

**Proposição 2.9** (Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville). *A transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville de ordem arbitrária  $\alpha$  é dada por*

$$\mathcal{L}[D_{0+}^{\alpha} f(t)](s) = s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0), \quad (2.37)$$

onde  $g(t) = I_{0+}^{n-\alpha} f(t)$ .

**Proposição 2.10** (Transformada de Laplace da derivada de Caputo). *A transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem arbitrária  $\alpha$  é dada por*

$$\mathcal{L}[{}^C D_{0+}^{\alpha} f(t)](s) = s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0). \quad (2.38)$$

**Observação 2.9.** *Se vale a relação (2.15), então, da relação (2.38), obtemos*

$$\mathcal{L}[D_{0+}^{\alpha} f(t)](s) = s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)](s). \quad (2.39)$$

*Portanto, se  $f$  é suficientemente suave, em particular, se  $f \in AC^n$ , temos  $g^{(k)}(0) = 0$  para  $k = 0, \dots, n-1$ .*

Na próxima Subseção, vamos estudar algumas situações que, em geral, causam dificuldades na utilização do Cálculo Fracionário.

#### 2.2.4 Atenção às dificuldades do Cálculo Fracionário

Aqui, vemos algumas situações que podem causar dificuldades no uso do Cálculo Fracionário, como a não localidade e a não obtenção da monotonicidade pelo sinal da derivada.

Inicialmente, apresentamos Teoremas do Valor Médio generalizados, estudados, por exemplo, em [32]. Abaixo, enunciamos e provamos os resultados para as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Para as demonstrações, fazemos uso dos seguintes Lemas, apresentados em [21]:

**Lema 2.4.** *Se  $I_{a+}^\alpha f \in AC^n[a, b]$ , então*

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{k-\alpha+1} f)(a)}{\Gamma(\alpha - k)} (t - a)^{\alpha-k-1}. \quad (2.40)$$

**Lema 2.5.** *Se  $f \in AC^n[a, b]$ , então*

$$I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k. \quad (2.41)$$

Agora, apresentamos e demonstramos os Teoremas:

**Teorema 2.3** (TVM para a derivada de Riemann-Liouville de ordem arbitrária). *Se  $I_{a+}^\alpha f \in AC^n[a, b]$  e  $D_{a+}^\alpha f \in C[a, b]$ , então, dado  $x \in (a, b]$ , existe  $\xi \in [a, x]$  tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{k-\alpha+1} f)(a)}{\Gamma(\alpha - k)} (x - a)^{\alpha-k-1} + \frac{(D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha. \quad (2.42)$$

*Demonstração.* Como  $D_{a+}^\alpha f$  é contínua, do clássico TVM para integrais segue que existe  $\xi \in [a, x]$  tal que

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \theta)^{\alpha-1} (D_{a+}^\alpha f)(\theta) d\theta, \quad (2.43)$$

$$= \frac{(D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \theta)^{\alpha-1} d\theta, \quad (2.44)$$

$$= \frac{(D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha. \quad (2.45)$$

Logo, do Lema 2.4,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{k-\alpha+1} f)(a)}{\Gamma(\alpha - k)} (x - a)^{\alpha-k-1} + (I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x), \quad (2.46)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{k-\alpha+1} f)(a)}{\Gamma(\alpha - k)} (x - a)^{\alpha-k-1} + \frac{(D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha, \quad (2.47)$$

completando a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.4** (TVM para a derivada de Caputo de ordem arbitrária). *Se  $f \in AC^n[a, b]$  e  ${}^C D_{a+}^\alpha f \in C[a, b]$ , então, dado  $x \in (a, b]$ , existe  $\xi \in [a, x]$  tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{({}^C D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha. \quad (2.48)$$

*Demonstração.* Como anteriormente,  ${}^C D_{a+}^\alpha f(t)$  é contínua e do TVM para integrais segue que existe  $\xi \in [a, x]$  tal que

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \theta)^{\alpha-1} ({}^C D_{a+}^\alpha f)(\theta) d\theta, \quad (2.49)$$

$$= \frac{({}^C D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \theta)^{\alpha-1} d\theta, \quad (2.50)$$

$$= \frac{({}^C D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha. \quad (2.51)$$

Logo, do Lema 2.5,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha f)(x), \quad (2.52)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{({}^C D_{a+}^\alpha f)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} (x-a)^\alpha, \quad (2.53)$$

completando a demonstração.  $\square$

Nesse contexto, é importante ressaltar que os enunciados são formulados com base no ponto  $a$ , ou seja, são não locais. Assim, resultados sobre monotonicidade de funções com derivadas de ordem arbitrária positivas ou negativas não são triviais como no caso inteiro. Muitos autores (exemplos em [33];[34];[35]), sobretudo no caso da derivada de ordem arbitrária de Caputo, utilizam o seguinte resultado, tido como corolário do Teorema do Valor Médio:

*Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e suponha  $f(t), {}^C D_{a+}^\alpha f(t) \in C[a, b]$ . Segue do Teorema do Valor Médio que, se  ${}^C D_{a+}^\alpha f(t) \geq 0$  no intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  é não decrescente em  $[a, b]$ . Analogamente, se  ${}^C D_{a+}^\alpha f(t) \leq 0$  no intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  é não crescente nesse intervalo.*

Porém, sem outras hipóteses esse resultado não é válido. O próximo exemplo é baseado em [36] e, no Capítulo 3, vemos a implicação da falibilidade dessa asserção no modelo SIR.

**Exemplo 2.2.** *Considere a função  $y(t) = t^3 - 1.5t^2 + 0.5t$ . Temos  $y'(t) = 3t^2 - 3t + 0.5$ . Dado  $\alpha \in (0, 1)$  qualquer, a derivada de ordem arbitrária no sentido de Caputo de  $y(t)$  é dada por*

$${}^C D_{0+}^\alpha y(t) = \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} - \frac{3}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} + \frac{0.5}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}, \quad (2.54)$$

$$= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} (6t^2 - 3(3-\alpha)t + 0.5(3-\alpha)(2-\alpha)). \quad (2.55)$$

Assim,  ${}^C D_{0+}^\alpha y(t) = 0$  se, e somente se,  $t = 0$  ou  $t = \frac{3(3-\alpha) \pm \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)}}{12}$ .

Como  $3(3-\alpha) - \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)} > 0$ , segue que  ${}^C D_{0+}^\alpha y(t)$  não possui variação de sinal no intervalo  $\left[0, \frac{3(3-\alpha) - \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)}}{12}\right]$ .

Agora, notamos que

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{3(3-\alpha) - \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)}}{12} \right] = \frac{1}{12} \left[ -\frac{\sqrt{3}(1-\alpha)}{\sqrt{(1+\alpha)(3-\alpha)}} - 3 \right] < 0, \quad (2.56)$$

donde  $\frac{3(3-\alpha) - \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)}}{12}$  é decrescente em  $(0, 1)$ . Assim,

$$\frac{3(3-\alpha) - \sqrt{3(1+\alpha)(3-\alpha)}}{12} > \frac{3(3-1) - \sqrt{3(1+1)(3-1)}}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}. \quad (2.57)$$

Segue que, para qualquer  $\alpha \in (0, 1)$ ,  ${}^C D_{0+}^\alpha y(t)$  não possui variação de sinal no intervalo  $T_\alpha = \left[ 0, \frac{3-\sqrt{3}}{6} + \epsilon_\alpha \right]$  para algum  $\epsilon_\alpha > 0$ , como ilustrado na Figura 2.2.

Porém,  $y(t)$  possui um máximo local em  $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ , como podemos ver na Figura 2.1. Então, a despeito de termos  ${}^C D_{0+}^\alpha y(t) \geq 0$  para todo  $t \in T_\alpha$ , a função  $y(t)$  não é monótona em  $T_\alpha$ .  $\triangleleft$

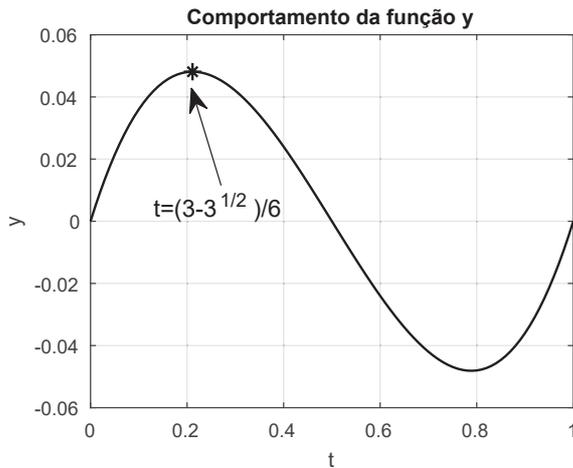


Figura 2.1 – Gráfico de  $y(t)$ .

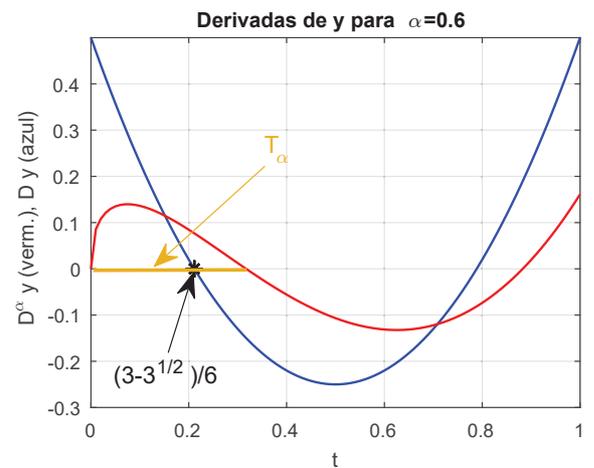


Figura 2.2 – Derivadas de  $y(t)$ .

A referência [37] possui outros exemplos, corroborando que o sinal da derivada fracionária não é suficiente para determinar o comportamento monótono da função.

Os pontos extremos também possuem tratamento diferente, como explicitado pelo seguinte Teorema:

**Teorema 2.5.** *Se uma função  $f \in C^1[a, b]$  admite um máximo (mínimo) global em  $t^* \in (a, b)$ , então  $({}^C D_{a+}^\alpha f)(t^*) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), para todo  $\alpha \in (0, 1)$  [36].*

De forma semelhante, a não negatividade da solução não necessariamente é preservada nos modelos fracionários. Abaixo, construímos um contraexemplo.

**Exemplo 2.3.** *Consideramos o seguinte PVI ordinário e seu correspondente fracionário de ordem 1/2:*

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{6t^{2.5} - 7.5t^{1.5} + 1.875t^{0.5}}{\Gamma(3.5)}, \\ y(0) = 0.02. \end{cases} \quad (2.58) \quad \begin{cases} {}^C D_{0+}^{1/2} y(t) = \frac{6t^{2.5} - 7.5t^{1.5} + 1.875t^{0.5}}{\Gamma(3.5)}, \\ y(0) = 0.02. \end{cases} \quad (2.59)$$

A solução do PVI ordinário (2.58) é dada por

$$y(t) = \frac{6t^{3.5}}{\Gamma(4.5)} - \frac{3t^{2.5}}{\Gamma(3.5)} + \frac{1.25t^{1.5}}{\Gamma(3.5)} + 0.02, \quad (2.60)$$

enquanto a solução do PVI fracionário (2.59) é dada por

$$y(t) = t^3 - 1.5t^2 + 0.5t + 0.02. \quad (2.61)$$

Embora a solução (2.60) seja positiva para todo  $t \geq 0$ , o mesmo não ocorre com a solução (2.61), como ilustrado nas Figuras 2.3-2.4.

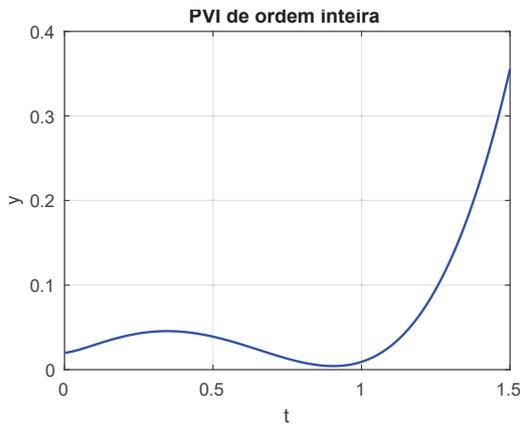


Figura 2.3 – Solução (2.60).

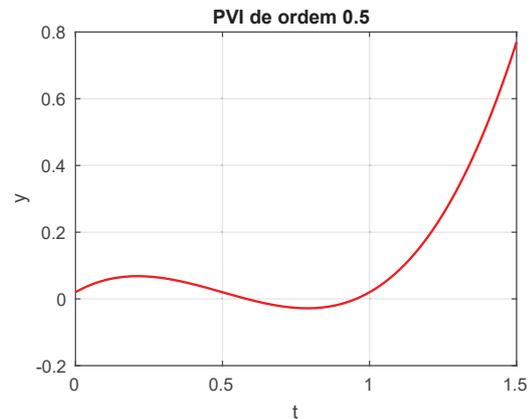


Figura 2.4 – Solução (2.61).

Finalizamos esta breve introdução ao Cálculo Fracionário lembrando que, de maneira geral, os PVI's fracionários possuem condições iniciais como nos sistemas (2.62) (Caputo) e (2.63) (Riemann-Liouville), onde  $n - 1 < \alpha < n$ :

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ y^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 0, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (2.62) \quad \begin{cases} D_{a+}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ (I_{a+}^{k-\alpha} y)(a) = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.63)$$

Em [21], temos o Teorema de Existência e Unicidade para o caso da derivada de Caputo, se  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável. O respectivo Teorema para o caso da derivada de Riemann-Liouville também pode ser consultado em [21]. Todavia, o mesmo autor ressalta em 2019 [38] que a separação das soluções, para o caso de dimensão maior do que 1, pode não ser válida.

Além disso, mesmo de posse de um resultado de unicidade, uma dificuldade para a modelagem fracionária é que a informação inicial em  $t = a$  pode ser insuficiente para prever o futuro do modelo, ou seja: duas equações com mesmas condições em  $t = a$  e passados diferentes conduzem a resultados diferentes no futuro. O Teorema da Unicidade considera o caso onde o passado anterior ao ponto inicial é desconsiderado. Assim, na modelagem fracionária, todo o passado deve ser levado em consideração, como verificamos no próximo exemplo, baseado em [39].

**Exemplo 2.4.** Sendo  $\alpha \in (0, 1]$ , consideramos o sistema

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha y(t) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Sua solução é dada por  $y(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ . Temos  $y(5) = \frac{5^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ . Agora, simulamos o sistema

$$\begin{cases} {}^C D_{5+}^\alpha y(t) = 1, \\ y(5) = \frac{5^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{cases} \quad (2.65)$$

A solução, exibida na Figura 2.5, é dada por  $y(t) = \frac{(t - 5)^\alpha + 5^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \neq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$  para  $\alpha \neq 1$ .

A derivada de Riemann-Liouville também não fornece uma saída para essa peculiaridade:

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha y(t) = 1, \\ (I_{0+}^{1-\alpha} y)(0) = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

A solução do PVI fracionário (2.66) também é dada por  $y(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ . Agora, simulamos o sistema

$$\begin{cases} D_{5+}^\alpha y(t) = 1, \\ (I_{5+}^{1-\alpha} y)(5) = \gamma. \end{cases} \quad (2.67)$$

Agora, a solução para  $t > 5$  é dada por  $y(t) = \frac{(t-5)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma(t-5)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \neq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$  e depende de  $\gamma$ . Na Figura 2.6, exibimos as soluções para  $\gamma = 0$  e  $\gamma = \frac{5^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ . Se  $\gamma = \frac{5^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$  e  $\alpha = 1$ , obteríamos a mesma solução, mas isso não ocorre em geral.  $\triangleleft$

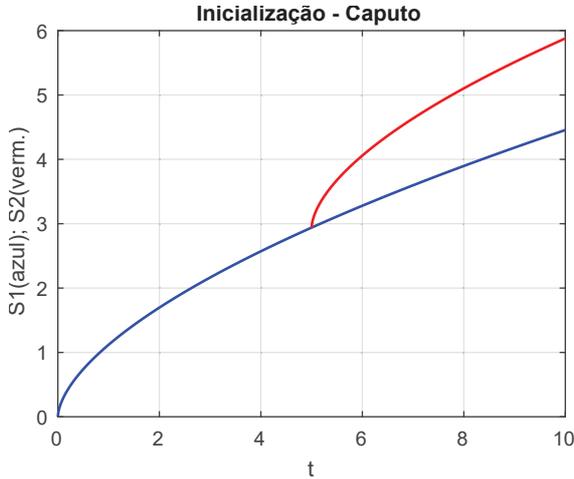


Figura 2.5 – Inicialização -  $\alpha = 0.6$ .

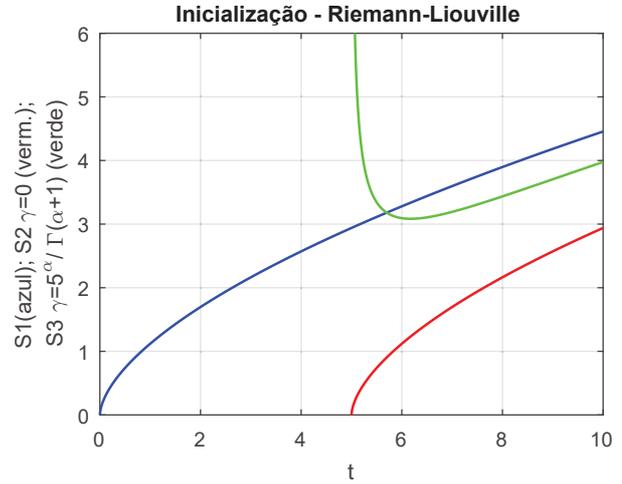


Figura 2.6 – Inicialização (RL) -  $\alpha = 0.6$ .

Essa particularidade dos modelos de ordem arbitrária dificulta a boa colocação de condições iniciais, pois nem sempre há informações anteriores ao ponto inicial.

Finalizamos esta breve introdução ao Cálculo Fracionário ao ressaltar alguns de seus comportamentos incomuns e principais resultados. Na próxima Seção, introduzimos o modelo epidemiológico ao qual essa teoria será aplicada.

## 2.3 MODELOS COMPARTIMENTAIS NA EPIDEMIOLOGIA

Após introduzirmos o Cálculo Fracionário, voltamos nossa atenção ao modelo compartimental que utilizamos na aplicação. Através da história, epidemias devastaram grande porcentagem da humanidade. Perguntas importantes podem ser trabalhadas através da modelagem matemática: os matemáticos estudam sua evolução e tentam elucidar questões essenciais, como, por exemplo, quando se espera o pico da doença e quantas pessoas são infectadas no total.

### 2.3.1 O modelo SIR

Em 1927, o modelo SIR (Suscetíveis-Infeciosos-Removidos) foi introduzido de maneira notável em um trabalho proposto por Kermack e McKendrick [2]. O formalismo matemático que embasou cuidadosamente a construção desse modelo epidemiológico é, infelizmente, pouco difundido, sendo apresentada, em geral, a versão “lapidada” do modelo, sintetizada na Figura 2.7.



Figura 2.7 – Diagrama de fluxo do modelo SIR sem dinâmica vital.

Os autores concluíram que, ainda que o agente causador não perca sua infectividade e a população não seja inteiramente infectada, o fim de uma epidemia pode resultar de uma relação especial entre a densidade populacional, a infectividade e as taxas de recuperação e morte.

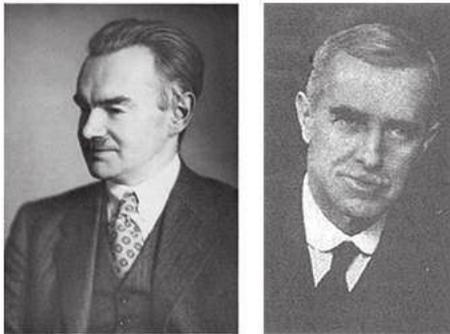


Figura 2.8 – Willian O. Kermack e Anderson G. McKendrick [1].

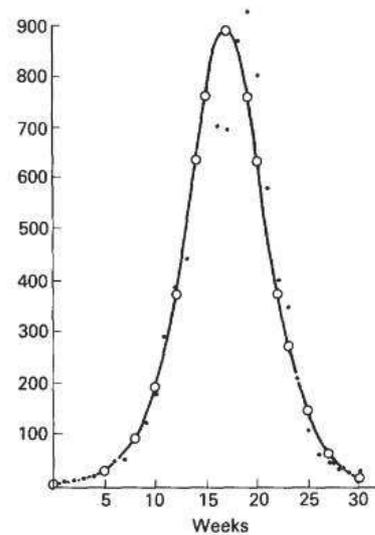


Figura 2.9 – Modelagem para as mortes por praga na ilha Bombay (mais detalhes no artigo original [2]).

Apresentamos a seguir uma breve adaptação desse trabalho.

### 2.3.1.1 Teoria Geral

Iniciamos discretizando uniformemente o tempo com passo  $\Delta T$ , considerado no trabalho [2] como unidade de tempo, e supondo que as pessoas são infectadas somente na passagem de um intervalo a outro, não no intervalo em si. Denotamos o número de infecciosos no tempo  $t$  que estão infecciosos ao longo de  $\theta$  intervalos por  $v_{t,\theta}$ . O número total de infecciosos no tempo  $t$  é, portanto,  $I_t = \sum_{\theta=0}^t v_{t,\theta}$ . Também é utilizada a notação  $v_t$  para indicar a taxa de novas infecções no tempo  $t$ . Em geral,  $v_t = v_{t,0}/\Delta T$ , exceto na origem, quando uma população de infecciosos  $I_0$ , independente do modelo a ser desenvolvido, é inserida na população total. Assim,  $v_{0,0} = v_0\Delta T + I_0$ .

Se  $\psi(\theta) = \psi_\theta$  denota a taxa de remoção do compartimento infeccioso na idade de infecção  $\theta$  (isto é, a soma das taxas de recuperação e morte), então o número removido de cada  $\theta$ -grupo é dado por  $\psi_\theta v_{t,\theta} = (v_{t,\theta} - v_{t+1,\theta+1})/\Delta T$ . Portanto, segue que  $v_{t,\theta} =$

$v_{t-1,\theta-1}(1 - \psi_{\theta-1}\Delta T)$ . Prosseguindo, obtemos

$$v_{t,\theta} = v_{t-\theta,0}B_\theta, \quad (2.68)$$

onde  $B_\theta = (1 - \psi_{\theta-1}\Delta T)(1 - \psi_{\theta-2}\Delta T) \cdots (1 - \psi_0\Delta T)$ . É importante observar que, para não sobrecarregar a notação, escrevemos tempo  $t + 1$ ,  $\theta - 2$  etc., em lugar de  $t + \Delta T$ ,  $\theta - 2\Delta T$  e assim por diante.

Agora, se  $\phi(\theta) = \phi_\theta$  denota a taxa de infectividade de uma pessoa infectada há  $\theta$  estágios, a taxa de novos infecciosos  $v_t$  deve ser igual a  $S_t \sum_0^t \phi_\theta v_{t,\theta}$ , onde  $S_t$  denota o número de pessoas ainda não infectadas/imunizadas no tempo  $t$ . Claramente,

$$S_t = N - \sum_0^t v_t \Delta T - I_0, \quad (2.69)$$

onde  $N$  é a população inicial. Seguimos a notação de [2] para  $\sum_0^t v_t$ , embora o índice seja igual ao limite da soma. Contudo, o significado é a soma de  $v_s$  para  $s$  de 0 a  $t$ .

Se  $R_t$  denota o número de removidos (por recuperação ou morte), então, desconsiderando processos de dinâmica vital,

$$S_t + I_t + R_t = N. \quad (2.70)$$

Temos

$$I_t = \sum_{\theta=0}^t v_{t,\theta} = \sum_{\theta=0}^t B_\theta v_{t-\theta} \Delta T + B_t I_0. \quad (2.71)$$

Observe ainda que, da Equação (2.68),

$$v_t = S_t \sum_{\theta=1}^t \phi_\theta v_{t,\theta} = S_t \left( \sum_{\theta=1}^t A_\theta v_{t-\theta} \Delta T + A_t I_0 \right), \quad (2.72)$$

onde definimos  $A_\theta = \phi_\theta B_\theta$  e assumimos  $\phi_0 = 0$ , isto é, uma pessoa não é infecciosa no momento da infecção.

Por outro lado, para  $t > 0$ , temos  $v_t = (S_t - S_{t+1})/\Delta T$ . Logo, segue da Equação (2.72) que

$$\frac{S_t - S_{t+1}}{\Delta T} = S_t \left( \sum_{\theta=1}^t A_\theta v_{t-\theta} \Delta T + A_t I_0 \right). \quad (2.73)$$

Finalmente, observamos que

$$\frac{R_{t+1} - R_t}{\Delta T} = \left( \sum_{\theta=1}^t C_\theta v_{t-\theta} \Delta T + C_t I_0 \right), \quad (2.74)$$

onde definimos  $C_\theta = \psi_\theta B_\theta$ .

Permitindo que  $\Delta T \rightarrow 0$ , as Equações (2.71)-(2.74) conduzem à relação  $v_t = -d(S_t)/dt$  e às três equações que definem o modelo SIR:

$$\frac{dS_t}{dt} = -S_t \left( \int_0^t A_\theta v_{t-\theta} d\theta + A_t I_0 \right), \quad (2.75)$$

$$I_t = \int_0^t B_\theta v_{t-\theta} d\theta + B_t I_0, \quad (2.76)$$

$$\frac{dR_t}{dt} = \int_0^t C_\theta v_{t-\theta} d\theta + C_t I_0, \quad (2.77)$$

onde obtemos, pela propriedade da integral produto [40],  $B_\theta = \exp\left(-\int_0^\theta \psi(a) da\right)$ . Observa-se que o limite superior  $\theta$  deve ser dividido pela unidade de tempo considerada, tornando-se escalar.

Verificamos que  $d(S_t + I_t + R_t)/dt = 0$ , o que significa que a população é mantida constante, independentemente da escolha das funções  $\psi$  e  $\phi$ . Realmente, derivando a Equação (2.76) pela regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dI_t}{dt} &= B_0 v_t + \int_0^t v_\theta (dB_{t-\theta}/dt) d\theta + I_0 (dB_t/dt) = \\ &= v_t - \int_0^t v_\theta C_{t-\theta} d\theta - I_0 C_t = \\ &= S_t \left( \int_0^t A_\theta v_{t-\theta} d\theta + A_t I_0 \right) - \int_0^t C_\theta v_{t-\theta} d\theta - C_t I_0 = \\ &= -\frac{dS_t}{dt} - \frac{dR_t}{dt}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Com relação à porcentagem da população que será infectada, após algum algebrismo e uma integração com respeito a  $t$ , da Equação (2.75) obtemos

$$-\int_0^\infty \frac{d \log S_t}{dt} dt = \int_0^\infty \int_0^t A_\theta v_{t-\theta} d\theta dt + I_0 \int_0^\infty A_t dt, \quad (2.79)$$

de onde segue

$$\log \frac{S_0}{S_\infty} = \int_0^\infty A_\theta d\theta \int_0^\infty v_t dt + I_0 \int_0^\infty A_t dt. \quad (2.80)$$

Escrevendo  $A = \int_0^\infty A_\theta d\theta$  e  $p = (N - S_\infty)/N$  sendo a proporção total de infecciosos, podemos utilizar a relação  $\int_0^\infty v_t dt = -\int_0^\infty \frac{dS_t}{dt} dt = S_0 - S_\infty$ , obtendo

$$-\log \frac{1-p}{1-\frac{I_0}{N}} = ANp. \quad (2.81)$$

Essa equação determina o tamanho da epidemia em termos de  $A$ ,  $N$  e  $I_0$ .

### 2.3.1.2 Taxas constantes

A análise do caso onde as taxas  $\phi$  e  $\psi$  são constantes iguais a  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente, é a mais conhecida e oferece ótimas intuições para um entendimento mais imediato das epidemias. Nesse caso, o sistema (2.75)-(2.77) torna-se, omitindo o índice  $t$  por simplicidade:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (2.82)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2.83)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (2.84)$$

Além disso,  $dS/dR = -(\beta/\gamma)S$ , uma equação separável que conduz ao resultado  $\log(S_0/S) = (\beta/\gamma)R$ . Portanto,  $S = S_0 \exp(-(\beta/\gamma)R)$ , e, como  $dR/dt = \gamma(N - S - R)$ , segue que

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(N - S_0 \exp(-(\beta/\gamma)R) - R). \quad (2.85)$$

Da Equação (2.85), podemos obter a quantidade total de infecciosos durante todo o curso da doença supondo  $dR_\infty/dt = 0$ , o que equivale a  $N - S_0 \exp(-(\beta/\gamma)R_\infty) - R_\infty = 0$ . Considerando  $S_0 \neq 0$ , obtemos

$$R_\infty = N + \frac{\gamma}{\beta} W_0 \left( \frac{-S_0 \beta e^{-N\beta/\gamma}}{\gamma} \right), \quad (2.86)$$

onde  $W_0$  representa o ramo principal da função  $W$  de Lambert [41], não utilizada pelos autores clássicos. Observamos que, se a doença está no início, podemos considerar  $S_0 \approx N$ . Nesse caso, a epidemia não ocorre se  $N \leq \gamma/\beta$ , isto é, se  $N\beta/\gamma \leq 1$ . Com efeito, nesse caso,  $-N\beta/\gamma \geq -1$ , e temos

$$W_0 \left( \frac{-S_0 \beta e^{-N\beta/\gamma}}{\gamma} \right) \approx W_0 \left( \frac{-N\beta}{\gamma} e^{-N\beta/\gamma} \right) = -\frac{N\beta}{\gamma}, \quad (2.87)$$

o que, substituindo em (2.86), fornece  $R_\infty \approx 0$ . A constante  $N\beta/\gamma$  equivale, nesse modelo, ao chamado número básico de reprodução, a ser apresentado na Subseção 2.3.3. É possível obter outros resultados interessantes, que não são de nosso interesse aqui, mas foram estudados na referência principal [2].

### 2.3.2 Extensões e modificações do modelo SIR

Ao longo do desenvolvimento da epidemiologia matemática, os modelos compartimentais sofreram extensões de modo que sua estrutura se adequasse a diferentes tipos de doenças. Por exemplo, doenças que conferem imunidade têm uma estrutura compartimental diferente das doenças sem imunidade. Além disso, há doenças transmitidas por vetores, como a dengue.

Podemos citar como algumas modificações do modelo SIR:

- o modelo SIS (Suscetíveis-Infeciosos-Suscetíveis), que não considera imunidade,
- os modelos SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infeciosos-Removidos) e SEIS (Suscetíveis-Expostos-Infeciosos-Suscetíveis) que, com ou sem imunidade, respectivamente, consideram um período de exposição entre ser infectado e tornar-se infeccioso (Figura 2.10),
- o modelo SITR (Suscetíveis-Infeciosos-em Tratamento-Removidos), que considera um compartimento de tratamento (Figura 2.11),
- o modelo SEQIJR (Suscetíveis-Expostos-em Quarentena-Infeciosos-Isolados-Removidos) de quarentena-isolamento (Figura 2.12),

entre outros.

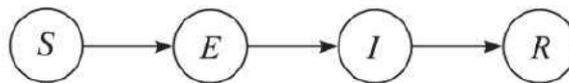


Figura 2.10 – Fluxo SEIR [3].

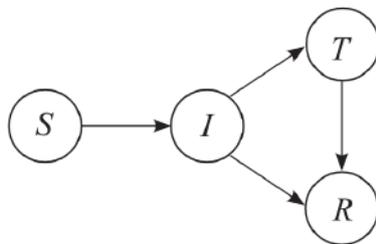


Figura 2.11 – Fluxo SITR [3].

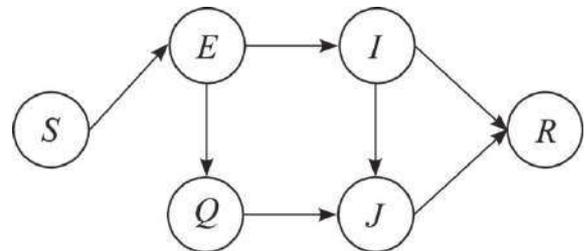


Figura 2.12 – Fluxo SEQIJR [3].

Além disso, cada modelo pode ser tratado com diferentes hipóteses, como a consideração ou não da dinâmica vital, a possibilidade de vacinação etc. Sugerimos a referência [3] e outros trabalhos dos autores, assim como as demais referências, para um estudo mais aprofundado nesse tipo de modelagem.

### 2.3.3 O número de reprodução

O número de reprodução  $\mathfrak{R}$  reflete o quão infecciosa é uma doença em um dado contexto. Essa constante é frequentemente confundida com o número básico de reprodução,  $\mathfrak{R}_0$ , que representa o número de infecções secundárias que um único infectado pode gerar ao ser inserido em uma população completamente suscetível, quando não há imunidade nem intervenção deliberada na transmissão da doença.

Por outro lado, o  $\mathfrak{R}$  se modifica tanto pela diminuição da parcela suscetível quanto pela implementação de intervenções, por exemplo. Em condições de homogeneidade da população,  $\mathfrak{R}$  é definido como o número médio de infecções que um único indivíduo pode gerar durante seu período infeccioso [42]. O  $\mathfrak{R}_0$  representa este número no início da infecção, ou seja, quando da inserção do agente causador da doença na população.

É importante ter em mente que o  $\mathfrak{R}_0$  de uma infecção depende da população analisada, porque as taxas de contato entre as pessoas podem variar devido a diferenças na densidade populacional e na cultura. Obviamente, o  $\mathfrak{R}$  em certo tempo também varia de local para local, uma vez que as comunidades podem diferir em seus níveis de imunidade e intervenção.

Doença	Transmissão	$\mathfrak{R}_0$
Sarampo	Aerossol	12-18
Catapora	Aerossol	10-12
Caxumba	Gotículas respiratórias	10-12
Rubéola	Gotículas respiratórias	6-7
Coqueluche	Gotículas respiratórias	5.5
Variola	Gotículas respiratórias	3.5-6
HIV/ AIDS	Fluidos corporais	2-5
Resfriado comum	Gotículas respiratórias	2-3
SARS 2002-2004	Gotículas respiratórias	2-4
Difteria	Saliva	1.7-4.3
Ebola (Surto de 2014)	Fluidos corporais	1.4-1.8
Gripe (Cepa pandêmica de 2009)	Gotículas respiratórias	1.3-2

Tabela 2.1 –  $\mathfrak{R}_0$  de algumas doenças infecciosas [5].

Em modelos tradicionais, as epidemias de uma infecção não podem ocorrer quando o  $\mathfrak{R}_0$  é inferior a 1 e surtos estabelecidos desaparecerão se as intervenções ou o esgotamento da parte suscetível da população forem suficientes para manterem  $\mathfrak{R}$  abaixo de 1. Nos modelos simples, como no SIR clássico, temos  $\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}_0 S(t)/N$ . Assim, nesses modelos, o comportamento da infecção é quase completamente determinado pelo  $\mathfrak{R}_0$ , cujo valor determina não apenas a mudança da estabilidade local do equilíbrio livre, mas também quando o equilíbrio endêmico torna-se viável [42]. Apresentamos na Tabela 2.3.3 o número básico de reprodução de algumas doenças infecciosas conhecidas.

Finalizamos este Capítulo tendo apresentado uma breve introdução à modelagem matemática e aos métodos numéricos, além de um pequeno histórico e as principais definições utilizadas no Cálculo de ordem arbitrária. Além disso, chamamos a atenção para situações nas quais sua utilização não segue as propriedades do Cálculo de ordem inteira. Por fim, apresentamos a construção do modelo SIR e conceitos simples da modelagem epidemiológica. Assim, estamos prontos para estudar, no próximo Capítulo, a modelagem de ordem arbitrária do modelo SIR tal qual é realizada usualmente.

### 3 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS FRACIONÁRIOS

Após a apresentação dos preliminares, estudamos alguns modelos nos quais autores generalizam as EDO's clássicas de primeira ordem substituindo a derivada inteira, em geral, do lado esquerdo, por derivadas de ordem arbitrária, geralmente a de Caputo, uma vez que sua derivada de uma constante é igual a 0 e costuma-se considerar condições iniciais convencionais. Verificamos que esses modelos podem produzir estimativas muito boas, assim como equações muito interessantes do ponto de vista matemático. Inclusive, sugerimos a leitura de [43] para um estudo inovador, através de uma abordagem estatística, do efeito memória tratado pelo Cálculo Fracionário.

Entretanto, nos interessamos pela seguinte questão: a mudança na ordem das derivadas estabelece automaticamente modelos consistentes, no que diz respeito à definição de parâmetros, significado físico, conservação e balanceamento de unidades? O que dizer sobre não negatividade, monotonicidade (quando houver), entre outras questões? Precisamos ter cuidado com a persistência de propriedades na transição *ad hoc* de modelos de derivada inteira para modelos de derivada de ordem arbitrária. No que segue, analisamos o balanceamento das unidades, o cuidado com a conservação da população total, a impossibilidade de utilizar a derivada de Riemann-Liouville, cuidados ao analisar não negatividade e monotonicidade, a boa colocação das condições iniciais e, finalmente, os pontos de equilíbrio, o  $\mathcal{R}_0$  e o ponto de pico.

Na verdade, é natural que novos modelos não herdem todas as características do original. Porém, é preciso estarmos atentos ao que mudou, pois, é interessante não apenas aproximar bem as curvas reais, mas entender do ponto de vista físico/biológico o que está acontecendo com as taxas e parâmetros. Até o presente, não conseguimos uma construção física que permita trocar as ordens das derivadas clássicas, ainda que as unidades sejam corrigidas e que as novas ordens sejam iguais em todos os compartimentos. Ainda, não há garantia de monotonicidade, pois, em particular, o sinal da derivada fracionária deixa de valer como indicativo do comportamento monótono da função em dado intervalo.

Inicialmente, analisamos a persistência da população total. O artigo [44] demonstra, em um sistema simples de dois compartimentos, que a utilização de ordens fracionárias diferentes sem os devidos cuidados leva à violação do equilíbrio de massa. Os autores defendem, também em um artigo do mesmo ano [45], a argumentação de que, tanto no contexto da farmacocinética então considerado quanto em sistemas compartimentais análogos, um fluxo de massa de saída definido como uma taxa de ordem arbitrária não pode aparecer como um fluxo de entrada em outro compartimento, com uma ordem arbitrária diferente, sem violar o balanço de massa.

Procurando realizar esse tipo de análise para o modelo SIR com a derivada de Caputo de ordem arbitrária à esquerda, tomamos ordens distintas em cada compartimento

(ex.: [46], [47], [48]) e analisamos a relação entre essas ordens e a população total  $N = S + I + R$  do modelo SIR fracionário, onde  $N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ .

$${}^C D_{0+}^{\alpha_1} S(t) = -\frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N_0}, \quad (3.1)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_2} I(t) = \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{N_0} - \gamma_2 I(t), \quad (3.2)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_3} R(t) = \gamma_3 I(t). \quad (3.3)$$

Consideramos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (0, 1]$ . Aplicando a Transformada de Laplace conforme Equação (2.38), temos

$$s^{\alpha_1} \mathcal{L}\{S\} - s^{\alpha_1-1} S_0 = -\frac{\beta_1}{N_0} \mathcal{L}\{SI\}, \quad (3.4)$$

$$s^{\alpha_2} \mathcal{L}\{I\} - s^{\alpha_2-1} I_0 = \frac{\beta_2}{N_0} \mathcal{L}\{SI\} - \gamma_2 \mathcal{L}\{I\}, \quad (3.5)$$

$$s^{\alpha_3} \mathcal{L}\{R\} - s^{\alpha_3-1} R_0 = \gamma_3 \mathcal{L}\{I\}. \quad (3.6)$$

Prosseguimos obtendo

$$\mathcal{L}\{S\} = \frac{S_0}{s} - \frac{\beta_1}{N_0 s^{\alpha_1}} \mathcal{L}\{SI\}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}\{I\} = \frac{I_0}{s} + \frac{\beta_2}{N_0 s^{\alpha_2}} \mathcal{L}\{SI\} - \frac{\gamma_2}{s^{\alpha_2}} \mathcal{L}\{I\}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}\{R\} = \frac{R_0}{s} + \frac{\gamma_3}{s^{\alpha_3}} \mathcal{L}\{I\}. \quad (3.9)$$

Aqui, utilizando convoluções, podemos obter uma formulação integral para o modelo

$$S(t) = S_0 - \int_0^t \frac{\beta_1 (t-\theta)^{\alpha_1-1}}{N_0 \Gamma(\alpha_1)} S(\theta) I(\theta) d\theta, \quad (3.10)$$

$$I(t) = I_0 + \int_0^t \frac{\beta_2 (t-\theta)^{\alpha_2-1}}{N_0 \Gamma(\alpha_2)} S(\theta) I(\theta) d\theta - \int_0^t \frac{\gamma_2 (t-\theta)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} I(\theta) d\theta, \quad (3.11)$$

$$R(t) = R_0 + \int_0^t \frac{\gamma_3 (t-\theta)^{\alpha_3-1}}{\Gamma(\alpha_3)} I(\theta) d\theta. \quad (3.12)$$

Escreve-se finalmente

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 + \int_0^t \left[ \frac{\beta_2 (t-\theta)^{\alpha_2-1}}{N_0 \Gamma(\alpha_2)} - \frac{\beta_1 (t-\theta)^{\alpha_1-1}}{N_0 \Gamma(\alpha_1)} \right] S(\theta) I(\theta) d\theta \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{\gamma_3 (t-\theta)^{\alpha_3-1}}{\Gamma(\alpha_3)} - \frac{\gamma_2 (t-\theta)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} \right] I(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim, para que  $N$  seja constante, devemos ter  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  e os parâmetros devem satisfazer  $\beta_1 = \beta_2$  e  $\gamma_2 = \gamma_3$ , independentemente da maneira na qual eles foram definidos, como exemplificado no Capítulo 5. O grande problema não é modificar a população, o que pode ocorrer por dinâmica vital, migração etc., mas justificar a mudança. Nesse caso, sem migração ou dinâmica vital, as pessoas não poderiam sumir ou aparecer.

Aqui, é importante notar que não poderíamos utilizar a definição de Riemann-Liouville sequer mantendo as mesmas ordens em cada compartimento. Com efeito, teríamos  $D_{0+}^\alpha N(t) = 0$ , mas a derivada de Riemann-Liouville de uma constante não nula não é zero, ou seja, novamente haveria problemas com a população total, que deveria seguir a condição do Lema 2.1. Além disso, as condições iniciais para a derivada de Riemann-Liouville não são facilmente interpretadas. Assim, daqui em diante mantemos a utilização da derivada de Caputo e de ordens iguais em cada equação, passando a analisar o balanceamento das unidades. As condições iniciais consideradas são as mesmas do caso de ordem inteira.

Partindo do modelo (2.82)-(2.84) ou de suas diversas extensões, alguns autores (ex.: [49], [50], [51]) substituem a derivada do lado esquerdo pela derivada de ordem arbitrária  $\alpha$ , mantendo os mesmos parâmetros do modelo com derivada inteira. Por exemplo, para o modelo SIR, considera-se:

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \quad (3.14)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \quad (3.15)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma I(t), \quad (3.16)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes positivas definidas como no sistema (2.82) - (2.84).

Observamos que o lado esquerdo das Equações (3.14)-(3.16) tem unidade [tempo] $^{-\alpha}$ . Porém, o lado direito foi mantido com unidade [tempo] $^{-1}$ . Apenas abolir as unidades não resolve o problema. Segundo [44], as unidades, na verdade, ajudam a revelar a questão: uma taxa de ordem 1, por exemplo, é um tipo diferente de taxa daquela de ordem 1/2, da mesma maneira que, na física clássica, a taxa de ordem 1, velocidade, é diferente daquela correspondente à ordem 2, a aceleração.

Outros autores (ex.: [52], [53], [54]) corrigem a dimensão elevando os parâmetros a  $\alpha$  ou multiplicando os operadores das derivadas por constantes de tempo  $\tau$  elevadas ao expoente  $\alpha - 1$  (ex.: [55], [56]). Assim, o modelo SIR fracionário seria escrito de uma das seguintes formas:

As unidades estão balanceadas, mas ainda não conseguimos enunciar um significado epidemiológico preciso para os parâmetros elevados a potências ou multiplicados por constantes de tempo. Há também que se notar que, quanto a elevar os parâmetros a  $\alpha$ , se  $\alpha$  é próximo de 0, todos os parâmetros são próximos de 1. Já quando multiplicamos os

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = -\frac{\beta^\alpha S(t)I(t)}{N}, \quad (3.17) \quad \tau^{\alpha-1} {}^C D_{0+}^\alpha S(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}, \quad (3.20)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta^\alpha S(t)I(t)}{N} - \gamma^\alpha I(t), \quad (3.18) \quad \tau^{\alpha-1} {}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \quad (3.21)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma^\alpha I(t). \quad (3.19) \quad \tau^{\alpha-1} {}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma I(t). \quad (3.22)$$

parâmetros por constantes de tempo da forma  $\tau^{1-\alpha}$ , fazer  $\alpha$  próximo de 0 faz com que um parâmetro  $p$  se aproxime de  $\tau p$ . Qual escolha teria um significado físico mais adequado?

Até o final deste Capítulo, consideramos os parâmetros escolhidos de maneira que as unidades estejam balanceadas, como elevados a  $\alpha$  ou multiplicados por constantes de tempo. É importante lembrar que, nesse caso, não possuem o significado físico do modelo SIR original. Para facilitar a notação e as generalizações, eles são escritos simplesmente como  $\gamma$ ,  $\mu$  e  $\beta$ , onde  $\mu \geq 0$ , se  $\alpha = 1$ , indica a dinâmica vital (mesma taxa de nascimento e morte). A população  $N$  se mantém constante e escrevemos o sistema como

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = \mu N - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t), \quad (3.23)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t), \quad (3.24)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (3.25)$$

Abaixo, apresentamos a formulação integral do modelo, análoga àquelas das Equações (3.10)-(3.12):

$$S(t) = S_0 + \frac{\mu N t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \int_0^t \frac{\beta(t-\theta)^{\alpha-1}}{N\Gamma(\alpha)} S(\theta)I(\theta)d\theta - \int_0^t \frac{\mu(t-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(\theta)d\theta, \quad (3.26)$$

$$I(t) = I_0 + \int_0^t \frac{\beta(t-\theta)^{\alpha-1}}{N\Gamma(\alpha)} S(\theta)I(\theta)d\theta - \int_0^t \frac{(\gamma + \mu)(t-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_2)} I(\theta)d\theta, \quad (3.27)$$

$$R(t) = R_0 + \int_0^t \frac{\gamma(t-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I(\theta)d\theta - \int_0^t \frac{\mu(t-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(\theta)d\theta. \quad (3.28)$$

Dada uma condição inicial  $(S(0), I(0), R(0))$ , o Teorema da Existência e Unicidade [21] garante a solução única em  $[0, t]$  para qualquer tempo  $t$  finito. A seguir, analisamos as questões de não negatividade e monotonicidade, sendo esta esperada para o caso sem dinâmica vital, uma vez que o fluxo deveria estar bem determinado de  $S$  para  $I$  e de  $I$  para  $R$ .

### 3.1 MONOTONICIDADE E NÃO NEGATIVIDADE

É esperado que a solução do modelo SIR fracionário seja não negativa para todo  $t \in [0, \infty)$ . Além disso, para um sistema sem dinâmica vital, é esperado que os compartimentos  $S$  e  $R$  sejam monótonos não crescente e não decrescente, respectivamente. Com o objetivo de provar alguma dessas afirmações ou ambas, muitos autores (ex.: [33], [35], [57], [58],) utilizam o resultado de que o sinal da derivada de ordem arbitrária indica comportamento monótono, tido como corolário do Teorema do Valor Médio (2.4). Porém, como visto na Seção 2.2.2, sem outras hipóteses esse resultado não é válido. Realmente, embora não tenhamos obtido uma formulação matemática para a não monotonicidade, as simulações numéricas, exibidas no Capítulo 5, indicam que, mesmo sem dinâmica vital, os compartimentos  $S$  e  $R$  podem oscilar.

Quanto à positividade, algumas demonstrações na modelagem de ordem inteira utilizam o fato de que duas soluções do sistema não se cruzam. A demonstração da separação de soluções para o caso de dimensão 1 pode ser consultada em [21], porém, para dimensões maiores existem contraexemplos [59], o que nos manteve em alerta para a utilização desses resultados sem hipóteses adicionais. Assim, abaixo, seguimos as ideias de [60].

Suponhamos, por contradição, que exista um tempo finito  $T^*$  tal que  $S(T^*) = 0$ . No intervalo finito  $[0, T]$ , onde  $T > T^*$ , a função contínua  $I(t)$  assume um valor máximo  $M$ . Assim, para  $t \in [0, T]$ , temos

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = \mu N - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t) > -AS(t), \quad (3.29)$$

onde  $A = \beta M/N + \mu$ .

Logo, existe uma função contínua positiva  $q(t)$  tal que

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = -AS(t) + q(t). \quad (3.30)$$

Utilizando a transformada de Laplace, obtemos

$$s^\alpha \mathcal{L}\{S\} - s^{\alpha-1} S_0 = -A \mathcal{L}\{S\} + \mathcal{L}\{q\}, \quad (3.31)$$

de onde segue que

$$\mathcal{L}\{S\} = \frac{s^{\alpha-1} S_0 + \mathcal{L}\{q\}}{s^\alpha + A}. \quad (3.32)$$

Aplicando a transformada inversa, temos

$$S(t) = S_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + A} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{q\}}{s^\alpha + A} \right\}, \quad (3.33)$$

$$= S_0 E_\alpha(-At^\alpha) + q(t) \star (t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-At^\alpha)), \quad (3.34)$$

onde utilizamos a Proposição 2.6.

Como  $\alpha \in (0, 1)$ , então  $q(t) \star (t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-At^\alpha))$  é uma função positiva e

$$S(t) \geq S_0 E_\alpha(-At^\alpha) > 0, \quad (3.35)$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Inclusive,  $S(T^*) > 0$ , contradição.

A não negatividade dos compartimentos  $I$  e  $R$  segue de maneira inteiramente análoga.

### 3.2 QUANDO COMEÇAR?

No modelo SIR clássico, os parâmetros epidemiológicos definem a epidemia de maneira independente do tempo. Definidos seus parâmetros epidemiológicos,  $\beta$  e  $\gamma$ , e uma condição inicial  $(S(0), I(0), R(0))$ , seja  $(S_1(t), I_1(t), R_1(t))$  a solução do modelo SIR clássico e  $t^* > 0$  um certo tempo: se começarmos a modelagem no tempo  $t^*$ , com condição inicial  $(S_1(t^*), I_1(t^*), R_1(t^*))$ , a solução continuará a ser  $(S_1(t), I_1(t), R_1(t))$  para  $t > t^*$ . Essa é uma característica dos sistemas dinâmicos: por qualquer ponto escolhido de uma órbita, existe uma única trajetória [61]. Porém, isso não é válido para o modelo fracionário, pois, como foi discutido na Seção 2.2.2, todo o passado deve ser levado em consideração. Essa observação também foi verificada na Proposição 2 do artigo [62].

Isso dificulta a boa colocação de condições iniciais: o que dizer do passado anterior ao ponto inicial considerado? Além disso, aqui cabe outra questão: se, na modelagem fracionária, os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  dependessem somente da doença, era de se esperar que, como não variam, o comportamento de uma infecção fosse o mesmo começando em qualquer ponto, mas isso não ocorre. No caso fracionário, para se ajustarem à infecção, eles dependem da série temporal anterior ao ponto inicial. Os resultados numéricos específicos podem ser verificados no Capítulo 5.

### 3.3 OS PONTOS DE EQUILÍBRIO, O NÚMERO DE REPRODUÇÃO E O PONTO DE PICO

Como vimos, o número básico de reprodução é o número médio de infecções secundárias que ocorrem quando um infeccioso é introduzido em uma população completamente suscetível. Porém, como não temos definições precisas para os parâmetros (nem mesmo para ordem  $\alpha$  única), não construímos o  $\mathfrak{R}_0$  com esse embasamento teórico. Por outro lado, o construímos como um valor que determina a viabilidade do equilíbrio endêmico e a mudança de estabilidade do equilíbrio livre de doença, como costuma ocorrer nos modelos clássicos [42].

A estabilidade local dos equilíbrios, em geral, é analisada através do resultado de que o sistema autônomo  ${}^C D_{0+}^\alpha x(t) = Ax(t)$ , com  $x(0) = x_0$ , é assintoticamente estável se, e somente se,  $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha\pi/2$  [63]. Para tanto, precisa-se do Teorema da

Linearização para o caso fracionário [64]. O procedimento para a análise da estabilidade local pode ser verificado, por exemplo, em [52].

Já para a análise da estabilidade global dos equilíbrios, alguns autores utilizam a generalização da teoria de Lyapunov. Uma das ferramentas para tanto é o Lema de Barbalat, segundo o qual, dada uma função não negativa  $f$  uniformemente contínua, se, para todo  $t \geq a$ ,  $I_{a+}^{\alpha} f(t) < C$ , com  $C$  uma constante positiva, então  $f$  converge para zero [65]. Contudo, como pode ser verificado em [66], existem contraexemplos que demonstram a falibilidade do Lema para  $0 < \alpha < 1$ . Notamos que esse contraexemplo faz com que o passo máximo da sequência  $(t_n)$  construída na prova fornecida em [65] tenda ao infinito, dificultando a finalização da demonstração.

O resultado para  $0 < \alpha < 1$ , demonstrado em [66], não provê a convergência de  $f$  para zero, mas sim seu limite inferior, conforme a seguinte proposição:

**Proposição 3.1** (Lema de Barbalat para  $0 < \alpha < 1$ ). *Dada uma função não negativa  $f$  uniformemente contínua, se, para todo  $t \geq a$ ,  $I_{a+}^{\alpha} f(t) < C$ , com  $C$  uma constante positiva, então  $\liminf_{t \rightarrow \infty} f = 0$ .*

Os autores de [62] relembram que a teoria básica de Lyapunov requer para o funcional  $L(x(t), t)$  a monotonicidade com respeito ao tempo. Uma ferramenta fundamental para provar sua monotonicidade é o sinal de sua derivada. Mais do que isso, se  $L(t) = L(x(t), t)$  é monótona decrescente e limitada, então converge. Contudo, a generalização para o cálculo de ordem arbitrária não possui um correspondente simples, como chamamos a atenção na Seção 2.2, onde demonstramos através de um contraexemplo que o sinal da derivada de ordem arbitrária não é indicativo de monotonicidade. Em [62], há outro contraexemplo interessante. Os mesmos autores garantem o resultado que utilizamos. O enunciado considera que a origem é o equilíbrio:

**Proposição 3.2.** *Dado o sistema  $D^{\alpha} x(t) = f(x, t)$ , seja  $L$  uma função continuamente diferenciável e definida positiva. Seja ainda  $w(x)$  uma função contínua positiva definida tal que, em uma bola  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  em torno de  $x = 0$ , com  $x_0 \in B$ , temos*

$$D^{\alpha} L(x, t) \leq -w(x) \leq 0. \quad (3.36)$$

*Então,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \|x\| = 0$  e  $x = 0$  é estável em  $t = 0$ . Em particular,  $x = 0 \in \bigcap_{x \in B} \Omega(x)$ , onde  $\Omega$  é o conjunto ômega-limite.*

*Além disso, não pode existir uma sequência divergente  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $|t_{n+1} - t_n| < \xi$  para todo  $\xi > 0$  tal que  $\|x(t_n)\| > \epsilon$  para qualquer  $\epsilon > 0$ .*

Não é o objetivo deste trabalho aprofundar nessa questão, mas imaginamos ser uma área de pesquisa interessante. Particularmente, pode ser possível combinar esse resultado com a estabilidade local, como fazemos a seguir.

Utilizamos os seguintes Lemas:

**Lema 3.1.** *Sejam  $y(t) \in \mathbb{R}^+$  uma função contínua,  $\alpha \in (0, 1)$  e  $y^* \in \mathbb{R}^+$ . Então [67]:*

$${}^C D_{a+}^{\alpha} \left( y(t) - y^* - y^* \ln \frac{y(t)}{y^*} \right) \leq \left( 1 - \frac{y^*}{y(t)} \right) {}^C D_{a+}^{\alpha} y(t). \quad (3.37)$$

**Lema 3.2.** *Sejam  $y(t) \in \mathbb{R}$  uma função contínua e diferenciável e  $\alpha \in (0, 1)$ . Então [68]:*

$$\frac{1}{2} {}^C D_{a+}^{\alpha} y^2(t) \leq y(t) {}^C D_{a+}^{\alpha} y(t). \quad (3.38)$$

Para o sistema (3.23)-(3.25) com  $\mu > 0$ , definamos  $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$ . Apresentamos os seguintes Teoremas:

**Teorema 3.1.** *O equilíbrio livre de doença  $EF = (N, 0, 0)$  é o único equilíbrio viável do sistema (3.23)-(3.25) e é globalmente assintoticamente estável se  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , temos  $\beta - (\gamma + \mu) < 0$ . Definimos

$$L(t) = \left( S(t) - N - N \ln \frac{S(t)}{N} \right) + I(t). \quad (3.39)$$

Observamos que

$$L(t) \geq S(t) - N + I(t) \geq -N. \quad (3.40)$$

Pelo Lema 3.1, temos

$${}^C D_{0+}^{\alpha} L \leq \left( 1 - \frac{N}{S} \right) {}^C D_{0+}^{\alpha} S + {}^C D_{0+}^{\alpha} I, \quad (3.41)$$

$$= \left( 1 - \frac{N}{S} \right) \left( \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \right) + \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu) I, \quad (3.42)$$

$$= \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - \frac{\mu N^2}{S} + \beta I + \mu N + \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu) I, \quad (3.43)$$

$$= -\mu \left( \frac{(S - N)^2}{S} \right) + (\beta - (\gamma + \mu)) I \leq 0. \quad (3.44)$$

Então, da Proposição 3.2, temos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (S, I, R) = (S^*, I^*, R^*). \quad (3.45)$$

Isso significa que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um tempo  $T$  onde

$$\|(S(T), I(T), R(T)) - (S^*, I^*, R^*)\| < \epsilon. \quad (3.46)$$

Pela estabilidade local, provamos o enunciado.

□

**Teorema 3.2.** *O equilíbrio endêmico  $EE = \left( \frac{(\gamma + \mu)N}{\beta}, \frac{\mu N}{\gamma + \mu} - \frac{\mu N}{\beta}, \frac{\gamma N}{\gamma + \mu} - \frac{\gamma N}{\beta} \right)$  é viável se  $\mathfrak{R}_0 > 1$  e é globalmente assintoticamente estável se  $I_0 > 0$ .*

*Demonstração.* Supomos que  $\mathfrak{R}_0 > 1$  e  $I_0 > 0$ . Pelo resultado da não negatividade, sabemos que  $S(t), I(t), R(t) > 0$  para todo  $t$ . Sejam  $S^* = (\gamma + \mu)N/\beta$  e  $I^* = \mu N/(\gamma + \mu) - \mu N/\beta$ . Definimos  $U(t) = S(t)/S^* - 1$  e  $V(t) = I(t)/I^* - 1$ . Definimos também

$$L(t) = \frac{U^2(t)}{2} + \frac{\beta I^*}{(\gamma + \mu)N} [V(t) - \ln(1 + V(t))] \quad (3.47)$$

$$= \frac{(S(t) - S^*)^2}{2(S^*)^2} + \frac{\beta}{(\gamma + \mu)N} \left[ I(t) - I^* - I^* \ln \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) \right]. \quad (3.48)$$

Observamos que

$$L(t) \geq \frac{-\beta I^*}{(\gamma + \mu)N} \left[ 1 + \ln \left( \frac{N}{I^*} \right) \right], \quad (3.49)$$

Note que o logaritmo só está definido se  $1 + V(t) > 0$ , daí a necessidade de termos  $I_0 > 0$  e, conseqüentemente,  $I(t) > 0$  para todo  $t$ . Pelos Lemas 3.1-3.2, temos

$${}^c D_{0+}^\alpha L \leq \left( \frac{S - S^*}{S^*} \right) {}^c D_{0+}^\alpha \left( \frac{S - S^*}{S^*} \right) + \frac{\beta}{(\gamma + \mu)N} \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) {}^c D_{0+}^\alpha I, \quad (3.50)$$

$$= \left( \frac{S - S^*}{S^*} \right) \left( \frac{\mu N}{S^*} - \frac{\beta SI}{NS^*} - \frac{\mu S}{S^*} \right) + \frac{1}{S^*} \left( 1 - \frac{I^*}{I} \right) \left( \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I \right), \quad (3.51)$$

$$= \left( \frac{S - S^*}{S^*} \right) \left( \mu + \frac{\beta I^*}{N} - \frac{\beta SI}{NS^*} - \frac{\mu S}{S^*} \right) + \frac{1}{S^*} (I - I^*) \left( \frac{\beta S}{N} - \frac{\beta S^*}{N} \right), \quad (3.52)$$

$$= \left( \frac{S - S^*}{S^*} \right) \left[ \mu \left( 1 - \frac{S}{S^*} \right) + \frac{\beta I^*}{N} - \frac{\beta SI}{NS^*} \right] + \frac{\beta}{NS^*} (I - I^*) (S - S^*), \quad (3.53)$$

$$= -\mu U^2 + U \left( \frac{\beta I^*}{N} - \frac{\beta SI}{NS^*} \right) + \frac{\beta}{N} U (I - I^*), \quad (3.54)$$

$$= -\mu U^2 + \frac{U \beta I^*}{N} - \frac{U \beta SI}{NS^*} + \frac{\beta UI}{N} - \frac{\beta UI^*}{N}, \quad (3.55)$$

$$= -\mu U^2 + \frac{U \beta I}{N} \left( 1 - \frac{S}{S^*} \right), \quad (3.56)$$

$$= -\mu U^2 - \frac{\beta}{N} U^2 I \leq 0. \quad (3.57)$$

Logo, segue da Proposição 3.2 que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (S, I, R) = (S^*, I^*, R^*). \quad (3.58)$$

Isso significa que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um tempo  $T$  onde

$$\|(S(T), I(T), R(T)) - (S^*, I^*, R^*)\| < \epsilon. \quad (3.59)$$

Pela estabilidade local, provamos o enunciado.  $\square$

Se  $\mu = 0$ , todos os pontos do conjunto  $\{(S, 0, R), S, R \geq 0, S + R = N\}$  são equilíbrios do sistema (3.23)-(3.25). O equilíbrio estável  $(S, I, R)_\infty$  para o caso  $\alpha = 1$  e  $I(0) > 0$  é calculado como na Seção 2.3.1.2. Porém, as passagens entre as Equações (2.85)-(2.86) não são válidas para derivadas de ordem arbitrária. O que obtemos segundo as simulações é uma mudança na região de estabilidade dos equilíbrios. Em uma grande porção do plano  $(S, I)$ , notamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \gamma N / \beta$ , ou seja, o equilíbrio endêmico é tal como no Teorema 3.2, com  $\mu = 0$ . Porém, conseguimos provar somente o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.** *Para o sistema (3.23)-(3.25) com  $\mu = 0$ , temos*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0. \quad (3.60)$$

*Demonstração.* Reescrevemos a equação integral (3.28) da seguinte forma:

$$I_{0+}^\alpha(\gamma I(t)) = R(t) - R(0). \quad (3.61)$$

Como  $S$ ,  $I$  e  $R$  são limitados, da Equação (3.61) segue, pela Proposição 3.1, que  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .  $\square$

Quanto ao ponto de máximo, no modelo SIR original o pico da infecção ocorre quando  $S(t) = (\gamma + \mu)N/\beta$  ou, equivalentemente, quando  $\mathfrak{R}(t) = 1$ . Já no modelo fracionário, isso não é verdade, como observado no Lema 2.5 da Seção 2.2.2 e corroborado nos resultados numéricos do Capítulo 5. Do ponto de vista da modelagem, como já citado, o  $\mathfrak{R}(t)$ , número de reprodução no tempo  $t$ , indica a quantidade de infecções secundárias que um indivíduo infeccioso desde  $t$  pode causar. Em modelos epidemiológicos clássicos, esse valor é  $\mathfrak{R}_0 S(t)/N$ , ou seja, basta fazermos uma transição no tempo.

Por isso, em modelos clássicos, o pico ocorre quando  $\mathfrak{R}(t) = 1$ , uma vez que  $\mathfrak{R}_0 S(t)/N = 1$  é o limiar que determina se a curva dos infecciosos em  $t$  vai aumentar ou diminuir. Assim,  $\mathfrak{R}(t) = 1$  exatamente no pico, pois, se fizermos uma translação no tempo e começarmos a modelagem da epidemia naquele ponto, o  $\mathfrak{R}_0 S(t)/N$  será 1 e diminuirá, fazendo com que a doença decline. Porém, modelos de ordem arbitrária são não locais e não seguem as propriedades comuns de sistemas dinâmicos, como a unicidade da trajetória, o que quebra o sentido de termos  $\mathfrak{R}(t) = 1$  exatamente no pico. Tradicionalmente,  $\mathfrak{R}(t) = 1$  no ponto onde, se iniciarmos ali a modelagem da epidemia, ela vai decrescer. No caso não local, esse ponto não coincide com o ponto de pico de uma epidemia iniciada em outro tempo.

Do ponto de vista das EDO's, no modelo de ordem inteira, a derivada de  $I$  é positiva se  $\mathfrak{R}_0 > 1$ , ou seja, a doença começa crescendo, o que pode ser traduzido como a ocorrência da epidemia a partir daquela condição inicial. Isso também é verificado no modelo de ordem arbitrária:

**Proposição 3.3.** *Para o sistema (3.23)-(3.25), se  $\mathfrak{R}_0 > 1$ , então  $I(t) > I(0)$  para  $t$  suficientemente pequeno, ou seja,  $\mathfrak{R}_0 > 1$  implica a ocorrência da epidemia. Por outro lado, se  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , então  $I(t) < I(0)$  para  $t$  suficientemente pequeno.*

*Demonstração.* Se  $\mathfrak{R}_0 > 1$ , existe um intervalo  $[0, \epsilon]$  tal que, se  $\xi \in [0, \epsilon]$ , então  $({}^C D_{0+}^\alpha I)(\xi) > 0$ . Segue diretamente do TVM 2.4 que, se  $t \in [0, \epsilon]$ , então existe  $\xi \in [0, t]$  tal que

$$I(t) = I(0) + \frac{({}^C D_{0+}^\alpha I)(\xi)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha > I(0). \quad (3.62)$$

A demonstração para  $\mathfrak{R}_0 < 1$  é análoga. □

Concluimos o Capítulo enfatizando que o presente trabalho não pretende invalidar os diversos modelos de ordem arbitrária desenvolvidos nos últimos anos. Como dito anteriormente, é natural que extensões não herdem todas as características de um modelo original. No entanto, precisamos estar atentos ao que mudou, porque não só a aproximação das curvas reais é interessante, mas também entendermos do ponto de vista físico/biológico o que acontece com as taxas e os parâmetros. Assim, no próximo Capítulo, apresentamos a modelagem de um sistema, com formalismo semelhante ao dos “pais” Kermack e McKendrick, de maneira que o surgimento de derivadas de ordem arbitrária decorra de leis potenciais nas funções de infectividade e remoção.



## 4 CONSTRUÇÃO DE UM MODELO SIR DE ORDEM ARBITRÁRIA

No Capítulo anterior, apresentamos modelos fracionários comumente utilizados por autores da área e realizamos algumas considerações. Ressaltamos que não foi possível, até então, encontrarmos uma estrutura epidemiológica que altere a ordem das derivadas clássicas, mesmo que as unidades sejam ajustadas e que o equilíbrio da população seja mantido. Ainda, não há garantia de monotonicidade na ausência de dinâmica vital, pois, em particular, o sinal da derivada fracionária deixa de valer como indicativo do comportamento monótono da função em dado intervalo. Não obtivemos justificativas precisas, mesmo que tenhamos verificado, através de trabalhos publicados e de simulações que realizamos, que esses modelos são capazes de representar a realidade com bom grau de precisão.

Porém, acreditamos que é possível modelar um sistema fisicamente, com formalismo semelhante ao dos “pais” Kermack e McKendrick, de maneira que o surgimento de derivadas de ordem arbitrária decorra de leis potenciais nas funções de infectividade e remoção. A seguir, apresentamos uma derivação física de um modelo fracionário semelhante àquela realizada pioneiramente por Kermack e McKendrick. Aqui, seguimos os passos de Angstromann, Henry e McGann [8], onde utilizam a linguagem probabilística dos Passeios Aleatórios de Tempo Contínuo (PATC).

### 4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

Considere um indivíduo infeccioso desde o tempo  $t'$ . Se há  $S(t)$  suscetíveis no tempo  $t$ , esse infeccioso tem uma probabilidade  $S(t)/N$  de que uma pessoa com a qual encontre seja suscetível, considerando a população homogênea. Portanto, no intervalo de  $t$  a  $t + \Delta T$ , o número esperado de novas infecções por indivíduo infectado é dado por  $\sigma(t, t')S(t)\Delta T/N$ . A taxa de transmissão por indivíduo infectado  $\sigma(t, t')$  depende tanto da idade da infecção,  $t - t'$ , quanto do tempo presente,  $t$ , que, entre outros, tem influência na quantidade de contatos do infeccioso.

A probabilidade de um indivíduo infectado no momento  $t'$  ainda estar infectado no momento  $t$  é dada pela função de sobrevivência  $\Phi(t, t')$ . Portanto, o fluxo de indivíduos para o compartimento  $I$  dos infecciosos em um tempo  $t$  é recursivamente dado por:

$$q^+(I, t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') q^+(I, t') dt'. \quad (4.1)$$

A condição inicial é obtida através do número de indivíduos infecciosos no momento 0 e da consideração do tempo onde cada indivíduo foi infectado. Isso é dado pela função  $i(-t', 0)$  que representa o número de indivíduos que ainda estão infecciosos no tempo 0 e que foram originalmente infecciosos em algum momento anterior  $t' < 0$ . Então,  $q^+(I, t) = i(-t', 0)/\Phi(0, t')$  para  $t' < 0$ . Por simplicidade, consideramos  $i(-t, 0) = i_0 \delta(-t)$ ,

onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac. Assim,

$$q^+(I, t) = \int_0^t \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') q^+(I, t') dt' + i_0 \sigma(t, 0) \frac{S(t)}{N} \Phi(t, 0). \quad (4.2)$$

Observamos, portanto, que o modelo pressupõe que não havia doença antes do tempo 0 e que, nesse ponto, um impulso fez com que a doença tivesse início. O histórico é considerado completamente, evitando dubiedades quanto ao ponto inicial. Porém, o modelo é singular no ponto 0.

Como dito, assume-se que a taxa de infecção  $\sigma(t, t')$  é uma função tanto do tempo corrente (devido, por exemplo, às medidas de contenção), possuindo uma infectividade extrínseca  $\omega$ , quanto da idade de infecção  $t - t'$ , possuindo uma infectividade intrínseca  $\rho$ . Logo, podemos escrever

$$\sigma(t, t') = \omega(t) \rho(t - t'). \quad (4.3)$$

Assumindo que a morte natural e a remoção de um indivíduo infeccioso sejam processos independentes, podemos escrever a função de permanência no compartimento infeccioso como

$$\Phi(t, t') = \phi(t - t') \theta(t, t'), \quad (4.4)$$

onde  $\phi(t - t')$  é a probabilidade de um indivíduo infectado desde  $t'$  ainda não ter se recuperado ou sido morto pela doença no tempo  $t$ . Ainda,  $\theta(t, t')$  é a probabilidade de um indivíduo infectado desde  $t'$  ainda não ter falecido de morte natural (isto é, independente da doença) até o tempo  $t$ . A função  $\theta$  é construída de maneira semelhante à função  $B$  da Seção 2.1, sendo dada por

$$\theta(t, t') = e^{-\int_{t'}^t \gamma(u) du}, \quad (4.5)$$

onde  $\gamma$  é a taxa de mortalidade. Observe que

$$\theta(t, t') = \theta(t, u) \theta(u, t'), \quad \forall t' < u < t. \quad (4.6)$$

Indivíduos que estão no compartimento  $I$  no tempo  $t$  devem ter entrado nesse compartimento em algum tempo anterior e permanecido nele até  $t$ . Logo, podemos expressar a quantidade de indivíduos infecciosos da seguinte forma:

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \Phi(t, t') q^+(I, t') dt'. \quad (4.7)$$

A função  $I_0(t)$  fornece o número de indivíduos que estavam infecciosos em 0 e permanecem infecciosos em  $t$ . Essa função pode ser escrita como segue:

$$I_0(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\Phi(t, t')}{\Phi(0, t')} i(-t', 0) dt' = \frac{\Phi(t, 0)}{\Phi(0, 0)} i_0 = \Phi(t, 0) i_0. \quad (4.8)$$

Com essas informações, podemos construir as equações principais do modelo. Começamos derivando a Equação (4.7) pela regra de Leibniz, obtendo

$$\frac{dI(t)}{dt} = q^+(I, t) - \int_0^t \psi(t-t') \theta(t, t') q^+(I, t') dt' - \gamma(t) \int_0^t \phi(t-t') \theta(t, t') q^+(I, t') dt' + \frac{dI_0(t)}{dt}, \quad (4.9)$$

onde  $\psi(t) = -d\phi(t)/dt$ . Esta  $\psi$  tem relação importante com a variável aleatória contínua  $X$  que fornece o tempo de remoção do indivíduo do compartimento infeccioso. A distribuição acumulada de  $X$ , a saber,  $F$  definida por  $F(t) = P(X \leq t)$ , é tal que  $F(t) = 1 - \phi(t)$ . Portanto, a função densidade de probabilidade de  $X$  é  $\psi(t) = -d\phi(t)/dt$ .

Utilizando as Equações (4.2)-(4.7), a Equação (4.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \omega(t) \frac{S(t)}{N} \left( \int_0^t \rho(t-t') \Phi(t, t') q^+(I, t') dt' + \rho(t) \Phi(t, 0) i_0 \right) \\ &\quad - \int_0^t \psi(t-t') \theta(t, t') q^+(I, t') dt' - \psi(t) \theta(t, 0) i_0 - \gamma(t) I(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

No que se segue, vamos remover a dependência de  $q^+(I, t')$  da Equação (4.10) definindo núcleos de memória de infectividade e remoção. Podemos reescrever a Equação (4.7) como

$$\frac{I(t)}{\theta(t, 0)} - \phi(t) i_0 = \int_0^t \phi(t-t') \frac{q^+(I, t')}{\theta(t', 0)} dt'. \quad (4.11)$$

O lado direito está agora em forma de convolução. Tomando a transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} - \phi(t) i_0 \right\} = \mathcal{L} \{ \phi(t) \} \mathcal{L} \left\{ \frac{q^+(I, t)}{\theta(t, 0)} \right\}. \quad (4.12)$$

A primeira integral da Equação (4.10) é produto de  $\theta(t, 0)$  com uma integral que pode ser reescrita usando transformada de Laplace na forma  $\mathcal{L} \{ \rho(t) \phi(t) \} \mathcal{L} \left\{ \frac{q^+(I, t)}{\theta(t, 0)} \right\}$ . Podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \rho(t) \phi(t) \} \mathcal{L} \left\{ \frac{q^+(I, t)}{\theta(t, 0)} \right\} &= \frac{\mathcal{L} \{ \rho(t) \phi(t) \}}{\mathcal{L} \{ \phi(t) \}} \mathcal{L} \left\{ \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} - \phi(t) i_0 \right\} = \\ &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t K_I(t-t') \left( \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} \right) dt' - \rho(t) \phi(t) i_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde definimos o núcleo de memória da infectividade por

$$K_I(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L} \{ \rho(t) \phi(t) \}}{\mathcal{L} \{ \phi(t) \}} \right\}. \quad (4.14)$$

Similarmente, a segunda integral da Equação (4.10) é o produto de  $\theta(t, 0)$  com uma integral que pode ser reescrita usando transformada de Laplace na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \psi(t) \} \mathcal{L} \left\{ \frac{q^+(I, t)}{\theta(t, 0)} \right\} &= \frac{\mathcal{L} \{ \psi(t) \}}{\mathcal{L} \{ \phi(t) \}} \mathcal{L} \left\{ \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} - \phi(t) i_0 \right\} = \\ &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t K_R(t-t') \left( \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} \right) dt' - \psi(t) i_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde definimos o núcleo de memória da remoção por

$$K_R(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L} \{ \psi(t) \}}{\mathcal{L} \{ \phi(t) \}} \right\}. \quad (4.16)$$

Substituindo as Equações (4.13) e (4.15) na Equação (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \omega(t) \frac{S(t)}{N} \left( \theta(t, 0) \int_0^t K_I(t-t') \left( \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} \right) dt' - \theta(t, 0) \rho(t) \phi(t) i_0 + \rho(t) \Phi(t, 0) i_0 \right) \\ &\quad - \theta(t, 0) \int_0^t K_R(t-t') \left( \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} \right) dt' + \theta(t, 0) \psi(t) i_0 - \psi(t) \theta(t, 0) i_0 - \gamma(t) I(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente, simplificamos o conjunto de equações do modelo SIR:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t) N - \omega(t) \frac{S(t)}{N} \theta(t, 0) \int_0^t K_I(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' - \gamma(t) S(t), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \omega(t) \frac{S(t)}{N} \theta(t, 0) \int_0^t K_I(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' \\ &\quad - \theta(t, 0) \int_0^t K_R(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' - \gamma(t) I(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \theta(t, 0) \int_0^t K_R(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' - \gamma(t) R(t), \quad (4.20)$$

onde consideramos a mesma taxa  $\gamma(t)$  de mortalidade natural em cada compartimento, sendo a taxa de nascimento igual à de mortalidade. Particularmente, nesse caso a população permanece constante.

Escolhemos  $\psi(t)$  com lei potencial e  $\rho(t)$  relacionada à escolha de  $\psi(t)$ . Em particular, utilizamos a função de Mittag-Leffler, segundo Definição 2.7, de maneira a generalizar a distribuição exponencial  $F$  da distribuição acumulada da variável aleatória  $X$ , que, como dito, fornece o tempo de remoção do indivíduo do compartimento infeccioso. Como vemos, essa escolha está relacionada ao surgimento de derivadas de ordem arbitrária no modelo. Assim, fazemos

$$\psi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\tau^\alpha} E_{\alpha, \alpha} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right), \quad (4.21)$$

para  $0 < \alpha \leq 1$ , onde  $\tau$  é um parâmetro de escala. A expansão assintótica da função de Mittag-Leffler [69] permite afirmar que  $\psi(t) = O(t^{-1-\alpha})$  para  $t \rightarrow \infty$  e  $0 < \alpha < 1$ .

Para obtermos a função  $\phi$  a partir de  $\psi$ , observamos a seguinte relação entre as funções de Mittag-Leffler de dois e três parâmetros:

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \alpha}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \alpha) k!}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \frac{z^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(k+1)!}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \frac{z^k}{k!} = \alpha E_{\alpha, 1+\alpha}^2(z). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim, pela Equação (2.28), a função de permanência (independente da morte natural) correspondente é

$$\phi(t) = E_{\alpha, 1} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right). \quad (4.23)$$

**Observação 4.1.** *Pela Equação (4.8),*

$$I_0(t) = \Phi(t, 0)i_0 = i_0 e^{-\int_0^t \gamma(u) du} E_{\alpha, 1} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right), \quad (4.24)$$

*é uma função decrescente que tende a 0, como era de se esperar, já que o número de indivíduos que estavam infecciosos em 0 e permanecem infecciosos em  $t$  deve diminuir ao longo do tempo.*

Utilizando a Equação (2.6), podemos calcular a transformada de Laplace do núcleo de memória da remoção definido pela função de Mittag-Leffler, obtendo:

$$\mathcal{L}\{K_R(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{\psi(t)\}}{\mathcal{L}\{\phi(t)\}} = s^{1-\alpha} \tau^{-\alpha}. \quad (4.25)$$

Por outro lado, pela Equação (2.37), temos  $\mathcal{L}\{D_{0+}^{1-\alpha} f(t)\} = s^{1-\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\} - (I_{0+}^\alpha f)(0)$ . Consideramos aqui  $(I_{0+}^\alpha f)(0) = 0$ , como em [70]. Daqui em diante, por simplicidade, escrevemos  $D^{1-\alpha}$  no lugar de  $D_{0+}^{1-\alpha}$ . A partir dessas considerações, uma convolução com o núcleo de memória da remoção pode ser escrita como

$$\int_0^t K_R(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' = \tau^{-\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right). \quad (4.26)$$

Uma derivada de ordem arbitrária também pode ser incorporada no núcleo de memória de infectividade. Observe que a Equação (4.14) possui uma transformada de Laplace semelhante à Equação (4.25). Assim, a seguinte escolha torna-se conveniente:

$$\rho(t) = \frac{1}{\phi(t)} \frac{t^{\beta-1}}{\tau^\beta} E_{\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right). \quad (4.27)$$

Como requiere-se  $\rho(t) \geq 0$ , escolhemos  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  (Teorema 2.2). Utilizando a Equação (4.27), obtemos a transformada de Laplace do núcleo de infectividade:

$$\mathcal{L}\{K_I(t)\} = s^{1-\beta} \tau^{-\beta}, \quad (4.28)$$

seguinto que:

$$\int_0^t K_I(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' = \tau^{-\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right). \quad (4.29)$$

Substituindo as Equações (4.26) e (4.29) no modelo (4.18)-(4.20), obtemos um modelo SIR fracionário:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t, 0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right) - \gamma(t)S(t), \quad (4.30)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t, 0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right) - \frac{\theta(t, 0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (4.31)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \quad (4.32)$$

Observe que, se  $\beta = \alpha = 1$  e  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e  $\omega(t) \equiv \omega$  forem considerados constantes, obtemos o modelo (2.82)-(2.84), acrescido apenas da dinâmica vital:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma N - \frac{\omega S(t)I(t)}{N\tau} - \gamma S(t), \quad (4.33)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega S(t)I(t)}{N\tau} - \frac{1}{\tau} I(t) - \gamma I(t), \quad (4.34)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} I(t) - \gamma R(t). \quad (4.35)$$

Por completude, a seguinte observação ressalta que o fluxo de entrada em  $I$  é o mesmo que foi estabelecido anteriormente:

**Observação 4.2.** Para  $t > 0$ , temos

$$q^+(I, t) = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right). \quad (4.36)$$

Realmente, da Equação (4.13), temos

$$\int_0^t \rho(t-t')\phi(t-t') \frac{q^+(I, t')}{\theta(t',0)} dt' = \int_0^t K_I(t-t') \left( \frac{I(t')}{\theta(t',0)} \right) dt' - \rho(t)\phi(t)i_0, \quad (4.37)$$

seguindo da Equação (4.29) que

$$\int_0^t \rho(t-t')\phi(t-t') \frac{q^+(I, t')}{\theta(t',0)} dt' = \tau^{-\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \rho(t)\phi(t)i_0. \quad (4.38)$$

Logo, da Equação (4.2), temos

$$\begin{aligned} q^+(I, t) &= \int_0^t \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') q^+(I, t') dt' + i_0 \sigma(t, 0) \frac{S(t)}{N} \Phi(t, 0) = \\ &= \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N} \left( \int_0^t \rho(t-t')\phi(t-t') \frac{q^+(I, t')}{\theta(t',0)} + i_0 \rho(t)\phi(t) \right) = \\ &= \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

como queríamos.

Finalmente, lembramos que a distribuição de probabilidade  $F(t) = 1 - \phi(t)$  é uma distribuição de Mittag-Leffler  $F(t, \alpha, \tau) = 1 - E_\alpha(-(t/\tau)^\alpha)$  [71]. Como visto, a função de Mittag-Leffler pode ser considerada uma generalização da função exponencial, ou seja,  $F(t, 1, \tau)$  é a distribuição exponencial. Assim, se  $\alpha = 1$ ,  $\tau$  representa exatamente

o tempo médio de remoção, a esperança (primeiro momento) da variável aleatória  $X$ . Para  $0 < \alpha < 1$ , a esperança não é finita.

Na próxima Seção, analisamos um ponto que os autores [8] deixaram implícito: a não negatividade da solução. Além disso, mostramos que, no caso limite onde a dinâmica vital é nula, os compartimentos  $S$  e  $R$  são monótonos.

## 4.2 NÃO NEGATIVIDADE E MONOTONICIDADE NO CASO LIMITE

É esperado que a solução do sistema SIR seja não negativa, uma vez que os compartimentos reproduzem conjuntos de pessoas. Com efeito, vamos demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 4.1.** *Admitindo que  $\gamma(t) > 0$  e a solução do sistema (4.30)-(4.32) exista de maneira única com condições iniciais  $S(0) > 0, I(0) > 0$  e  $R(0) = N - S(0) - I(0) \geq 0$ , as funções  $S(t), I(t), R(t), D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t, 0))$  e  $D^{1-\alpha}(I(t)/\theta(t, 0))$  são não negativas para  $t > 0$ . Além disso,  $S(t), I(t), R(t) \leq N$  para todo  $t$ .*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que exista um tempo  $T > 0$  onde, pela primeira vez, tenhamos  $S(T) = 0$ . Da Equação (4.30), temos  $dS(T)/dt = \gamma(T)N > 0$ . Assim, existe um intervalo  $(T - \epsilon, T + \epsilon)$  tal que  $dS(T)/dt > 0$  e  $S$  é crescente nesse intervalo, absurdo, pois definimos  $T$  como o tempo onde, pela primeira vez, temos  $S(T) = 0$ . Logo,  $S(t) > 0$  para todo  $t$ .

Daí, como  $\sigma$  e  $\Phi$  são funções positivas, a Equação (4.2) fornece  $q^+(I, t) > 0$  para todo  $t$ . Da Equação (4.7) segue diretamente que  $I(t) > 0$  para todo  $t$ . Agora, aplicando a Transformada de Laplace inversa na Equação (4.13), temos

$$\int_0^t K_I(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' = \int_0^t \rho(t-t') \phi(t-t') \frac{q^+(I, t')}{\theta(t', 0)} dt' + \rho(t) \phi(t) i_0. \quad (4.40)$$

Segue da positividade de  $\rho, \phi, \theta$  e  $q^+(I, t)$  que

$$\int_0^t K_I(t-t') \frac{I(t')}{\theta(t', 0)} dt' > 0, \quad (4.41)$$

para todo  $t$ . Logo, da Equação (4.29), temos  $D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t, 0)) > 0$ , para todo  $t$ . Analogamente, das Equações (4.15) e (4.26), segue que  $D^{1-\alpha}(I(t)/\theta(t, 0)) > 0$ , para todo  $t$ .

Finalmente, suponha por absurdo que exista um tempo  $T > 0$  onde, pela primeira vez, tenhamos  $R(T) = 0$ . Da Equação (4.32), temos

$$\frac{dR}{dt}(T) = \frac{\theta(T, 0)}{\tau^\alpha} \left( D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t, 0)} \right) \right) (T) > 0. \quad (4.42)$$

Assim, existe um intervalo  $(T - \epsilon, T + \epsilon)$  tal que  $\frac{dR}{dt} > 0$  e  $R$  é crescente nesse intervalo, absurdo, pois definimos  $T$  como o tempo onde, pela primeira vez, temos  $R(T) = 0$ . Logo,  $R(t) > 0$  para todo  $t$ .

Como  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ , segue de  $S(t), I(t), R(t) \geq 0$  que  $S(t), I(t), R(t) \leq N$ , completando a demonstração.  $\square$

Agora, consideramos o sistema limite onde a dinâmica vital é nula. Lembramos que, nesse caso, o sistema com derivadas arbitrárias substituídas à esquerda não fornece a monotonicidade dos compartimentos  $S$  e  $R$ , o que parece contraditório. Primeiro, para a não negatividade, provamos que a solução não pode conter um ponto da forma  $(0, I^*, N - I^*)$  para o tempo  $t^*$  e, portanto, se  $S(0) > 0$ , então  $S(t) > 0$  para todo  $t$ .

Para isso, observamos que  $S(t) \equiv 0$ ,  $I(t) = f(t) + C$  e  $R(t) = N - I(t)$ , é uma solução para o sistema, onde  $f(t)$  é dada por  $f(t) = -I_{0+}^\alpha f(t)/\tau^\alpha$  e  $C = I^* - f(t^*)$ . Com efeito,  $df/dt = -D^{1-\alpha} f(t)/\tau^\alpha$ . Assim, essa solução passa pelo ponto  $(0, I^*, N - I^*)$  no tempo  $t^*$ . Pela unicidade, duas soluções não podem possuir um ponto comum. Logo,  $S(t)$  possui o sinal da condição inicial, que foi dada positiva. A positividade de  $I(t), R(t), D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t, 0))$  e  $D^{1-\alpha}(I(t)/\theta(t, 0))$  segue como na proposição anterior. Temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.2.** *Considerando o sistema limite (4.30)-(4.32) para o qual  $\gamma(t) \equiv 0$ , as funções  $S(t)$  e  $R(t)$  são monótonas decrescente e crescente, respectivamente.*

*Demonstração.* Segue diretamente de  $S(t), D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t, 0))$  e  $D^{1-\alpha}(I(t)/\theta(t, 0))$  serem positivas que, se  $\gamma(t) \equiv 0$ , então  $dS/dt < 0$  e  $dR/dt > 0$ , donde  $S$  e  $R$  são monótonas decrescente e crescente, respectivamente. Observamos que essa condição faz total sentido físico/epidemiológico, mas não pudemos garanti-la no modelo (3.17)-(3.19).  $\square$

Portanto, provamos duas proposições que reiteram a consistência da construção do modelo. Em particular, ficou claro que, no modelo (4.30)-(4.32), a perda da monotonicidade se dá apenas por conta da dinâmica vital, e não tem relação com um efeito não justificado da derivada de ordem arbitrária. A próxima Seção diz respeito ao número de reprodução.

### 4.3 OS NÚMEROS DE REPRODUÇÃO

Conforme vimos na Seção preliminar, o número de reprodução no tempo  $t'$  pode ser entendido como o número esperado de indivíduos que são infectados por um indivíduo infeccioso desde  $t$ . Já o número básico de reprodução é o número médio de infecções secundárias que ocorrem quando um infeccioso é introduzido em uma população completamente suscetível [42]. Porém, no modelo construído, não é natural a definição de uma fórmula que forneça os números de reprodução. Nesse sentido, em [8], os autores propõem uma

construção para o número básico de reprodução através de uma integral. Dentro dessa construção, estendemos a proposta para o número de reprodução em um tempo qualquer  $t'$ .

Em cada tempo  $t > t'$ , o indivíduo infeccioso desde  $t'$  tem uma probabilidade  $\Phi(t, t')$  de ainda estar vivo e infeccioso. Nesse caso, tem uma taxa de infecção  $\sigma(t, t')$  e uma probabilidade  $S(t)/N$  de que cada um de seus contatos seja um suscetível. Então, podemos calcular:

$$\mathfrak{R}(t') = \int_{t'}^{\infty} \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') dt = \int_{t'}^{\infty} \omega(t) \rho(t - t') \phi(t - t') \theta(t, t') \frac{S(t)}{N} dt. \quad (4.43)$$

Obtemos, da Equação (4.27):

$$\mathfrak{R}(t') = \int_{t'}^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) \theta(t, t') (t - t')^{\beta-1} E_{\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{(t - t')}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (4.44)$$

Portanto, se tomarmos  $\gamma(t) \equiv \gamma > 0$  e desconsiderarmos, na definição de número de reprodução, a variação do  $S(t)$ , por definição ou simplesmente considerando que  $S(t) \approx S(t')$  durante o período infeccioso do indivíduo, obtemos

$$\mathfrak{R}(t') = \frac{S(t')}{N\tau^\beta} \int_{t'}^{\infty} \omega(t) e^{-\gamma(t-t')} (t - t')^{\beta-1} E_{\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{(t - t')}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (4.45)$$

Particularmente, sendo  $S(0) \approx N$ ,

$$\mathfrak{R}_0 = \int_0^{\infty} \sigma(t) \Phi(t) dt = \frac{1}{\tau^\beta} \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-\gamma t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (4.46)$$

Consideramos inicialmente  $\omega(t) \equiv \omega$  e simplificamos a Equação (4.45) via mudança de variável  $t = t - t'$ . Verificando que a integral tem a forma de uma Transformada de Laplace, utilizamos a Equação (2.6), obtendo finalmente

$$\mathfrak{R}(t') = \frac{S(t')\omega}{N\tau^\beta} \frac{\gamma^{\alpha-\beta}}{\gamma^\alpha + \tau^{-\alpha}}. \quad (4.47)$$

Quanto ao número básico de reprodução, obtemos o resultado de [8]:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega\gamma^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta\gamma^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}. \quad (4.48)$$

Nesse caso, o número de reprodução no tempo  $t'$  relaciona-se diretamente com o número básico de reprodução, sendo dado, como nos modelos clássicos, por

$$\mathfrak{R}(t') = \mathfrak{R}_0 \cdot \frac{S(t')}{N}. \quad (4.49)$$

Agora, procuramos estender as hipóteses sobre  $\omega$ . Porém, é muito difícil que a integral da Equação (4.44) seja resolvida de forma exata. Um caso particular onde

podemos resolvê-la é o de um decaimento exponencial no valor de  $\omega$  ao longo do tempo:  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-t/a}$ , onde  $a$  é um parâmetro de escala. Essa hipótese, aplicada em nosso artigo [72], demonstrou bom comportamento na aproximação aos dados reais. Nesse caso,

$$\omega(t)\theta(t, t') = \omega \cdot e^{-(\gamma+1/a)(t-t')} e^{-t'/a}. \quad (4.50)$$

Novamente simplificando a Equação (4.45) via mudança de variável  $t = t - t'$  e utilizando a Transformada de Laplace (2.6), obtemos

$$\mathfrak{R}(t') = \frac{S(t')\omega(t')}{N\tau^\beta} \frac{(\gamma + 1/a)^{\alpha-\beta}}{(\gamma + 1/a)^\alpha + \tau^{-\alpha}}. \quad (4.51)$$

Quanto ao número básico de reprodução, temos

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega(\gamma + 1/a)^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta(\gamma + 1/a)^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}. \quad (4.52)$$

É interessante salientar que, do ponto de vista da modelagem, como já citado, o  $\mathfrak{R}(t)$  indica a quantidade de infecções secundárias que um indivíduo infeccioso desde  $t$  pode causar. Em modelos epidemiológicos clássicos, o fato de serem um sistema dinâmico faz com que esse valor seja equivalente ao valor de  $\mathfrak{R}_0 S(t)/N$ , ou seja, basta fazermos uma translação no tempo.

Por isso, em modelos clássicos, o pico ocorre quando  $\mathfrak{R}(t) = 1$ , uma vez que  $\mathfrak{R}_0 S(t)/N = 1$  é o limiar que determina se a epidemia vai aumentar ou diminuir. Assim,  $\mathfrak{R}(t) = 1$  exatamente no pico, pois se fizermos uma translação no tempo e começarmos a modelagem da epidemia naquele ponto, o  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N$  será 1 e diminuirá, fazendo com que a doença decline.

A grande questão é que, como vimos, modelos de ordem arbitrária são não locais e não seguem as propriedades comuns de sistemas dinâmicos, como a unicidade da trajetória, o que quebra o sentido de termos  $\mathfrak{R}(t) = 1$  exatamente no pico. Observamos que a não localidade influencia nesse comportamento ainda que o sistema seja de ordem inteira, mas  $\omega$ , por exemplo, seja não local. Como um exemplo, apresentamos o seguinte resultado:

**Proposição 4.3.** *Se  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma(t) \equiv \gamma$  (constante) e  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-t/a}$  (não autônomo), então o valor de  $\mathfrak{R}(t')$  no pico da infecção, denotado  $\mathfrak{R}_{pico}$ , é menor do que 1, onde  $\mathfrak{R}(t')$  é definido na Equação (4.51).*

*Demonstração.* Se  $\alpha = \beta = 1$  e  $\gamma(t) \equiv \gamma$  constante, a Equação (4.31) reduz-se a:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)I(t)}{N\tau} - \frac{I(t)}{\tau} - \gamma I(t). \quad (4.53)$$

O pico da infecção ocorre quando  $dI/dt = 0$ . Como  $I(t') > 0$ , podemos simplificar a equação, obtendo

$$\frac{1}{\tau} \left( \frac{\omega(t)S(t)}{N} - 1 \right) = \gamma, \quad (4.54)$$

donde segue que, no pico, temos:

$$\omega(t') = \omega \cdot e^{-t'/a} = \frac{(\tau\gamma + 1)N}{S(t')}. \quad (4.55)$$

Substituindo a Equação (4.55) e  $\alpha = \beta = 1$  na Equação (4.51), obtemos finalmente:

$$\mathfrak{R}_{pico} = \frac{S(t')}{N\tau} \cdot \frac{(\tau\gamma + 1)N}{S(t')} \cdot \frac{1}{(\gamma + 1/a) + \tau^{-1}} = 1 - \frac{\tau/a}{\tau\gamma + \tau/a + 1} < 1. \quad (4.56)$$

□

Aqui fazemos uma observação importante: desconsiderar a variação do  $S(t)$  durante o período infeccioso do indivíduo não é uma escolha irrelevante. Como apresentamos no Capítulo 5, essa hipótese faz uma grande diferença nos cálculos.

Assim, neste ponto introduzimos nossa proposta que chamamos de número de reprodução  $S$ -variável  $\mathfrak{R}^S(t')$ , definido pela integral da Equação (4.44) sem a aproximação  $S(t) \approx S(t')$ . Nesse caso, considerando novamente a dinâmica vital constante, temos

$$\mathfrak{R}^S(t') = \int_{t'}^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma(t-t')} (t-t')^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t-t'}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (4.57)$$

e, quanto ao número básico de reprodução,

$$\mathfrak{R}_0^S = \int_0^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) dt, \quad (4.58)$$

sendo  $S(0) = N - 1$ .

Conforme apresentamos nos resultados numéricos, o número de reprodução  $\mathfrak{R}(t')$  pode fornecer valores muito grandes no pico da infecção. Porém,  $\mathfrak{R}^S(t')$  não fornece, nas simulações realizadas no Capítulo 5, valores maiores do que 1 nas proximidades do pico. Assim, o pico de infecciosos não mais ocorre quando  $\mathfrak{R}(t) = 1$ , nem quando  $\mathfrak{R}^S(t) = 1$ , mas acreditamos que  $\mathfrak{R}^S$  forneça uma melhor estimativa para a realidade, pois uma pessoa que se torna infecciosa em um período próximo ao pico estaria infectando, em média, menos de uma pessoa. Assim, a doença estaria, de fato, em declínio.

A próxima Seção trata dos pontos de equilíbrio. Em particular, estudamos sua relação com o número básico de reprodução e abordagens para a análise da estabilidade.

#### 4.4 PONTOS DE EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE

O principal objetivo desta Seção é a análise do ponto de equilíbrio  $(S^*, I^*, R^*)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S, I, R) = (S^*, I^*, R^*)$ , onde o limite é tomado coordenada a coordenada. Consideramos  $\gamma(t) \equiv \gamma$  constante, de onde  $\theta(t, 0) = e^{-\gamma t}$ . Obtemos o sistema:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma N - \frac{\omega(t)S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma S(t), \quad (4.59)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) - \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma I(t), \quad (4.60)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma R(t). \quad (4.61)$$

Tomando o limite  $t \rightarrow \infty$ , as Equações (4.59)-(4.61) se reduzem a:

$$0 = \gamma N - \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega(t)S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) \right) - \gamma S^*, \quad (4.62)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega(t)S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) - \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) \right) - \gamma I^*, \quad (4.63)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) \right) - \gamma R^*. \quad (4.64)$$

Para calcular os limites da forma  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t})$ , considerando  $\gamma > 0$ , seguimos [9] e tomamos a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-\gamma t} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t})\} = (s + \gamma)^{1-\alpha} \mathcal{L}\{I\}. \quad (4.65)$$

Utilizando uma expansão em série de Taylor, obtemos

$$(s + \gamma)^{1-\alpha} \mathcal{L}\{I\} = \mathcal{L}\{I\}(\gamma^{1-\alpha} + (1 - \alpha)\gamma^{-\alpha}s + O(s^2)). \quad (4.66)$$

Como a Transformada de Laplace é um operador linear, podemos inverter termo a termo, obtendo

$$e^{-\gamma t} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) = \gamma^{1-\alpha} I(t) + (1 - \alpha)\gamma^{-\alpha} \frac{dI}{dt} + \mathcal{L}^{-1}(O(s^2)). \quad (4.67)$$

Como consideramos  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I^*$ , temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} dI/dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1}(O(s^2)) = 0$ . Assim, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) = \gamma^{1-\alpha} I^*. \quad (4.68)$$

Substituindo esses resultados nas Equações (4.62)-(4.64) e supondo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$  (possivelmente,  $\omega^* = 0$ ), ficamos com

$$0 = \gamma N - \left( \frac{\omega^* S^*}{N\tau^\beta} \gamma^{1-\beta} I^* \right) - \gamma S^*, \quad (4.69)$$

$$0 = \left( \frac{\omega^* S^*}{N\tau^\beta} \gamma^{1-\beta} I^* \right) - \frac{1}{\tau^\alpha} \gamma^{1-\alpha} I^* - \gamma I^*, \quad (4.70)$$

$$0 = \frac{1}{\tau^\alpha} \gamma^{1-\alpha} I^* - \gamma R^*. \quad (4.71)$$

Essas equações permitem obter um estado livre de doença:

$$S^* = N, \quad I^* = 0, \quad R^* = 0, \quad (4.72)$$

e, no caso em que  $\omega^* > 0$ , obtemos também um estado endêmico:

$$S^* = \frac{((\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta)N}{\omega^*}, \quad I^* = \frac{N(\tau\gamma)^\alpha}{1 + (\tau\gamma)^\alpha} - \frac{N(\tau\gamma)^\beta}{\omega^*}, \quad R^* = \frac{N}{1 + (\tau\gamma)^\alpha} - \frac{N(\tau\gamma)^{\beta-\alpha}}{\omega^*}. \quad (4.73)$$

Quando  $\omega(t) \equiv \omega$ , obtemos  $\omega^* = \omega$  e reconstituímos o estado endêmico do artigo original [8]. Observamos que o estado endêmico faz sentido físico apenas se pudermos ter  $I^* > 0$  e  $R^* > 0$ , ou seja, se

$$\omega^* > (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta. \quad (4.74)$$

**Observação 4.3.** *Se  $\omega(t) \equiv \omega$ , o critério (4.74) para a viabilidade do estado endêmico pode ser reescrito, pela Equação (4.48), como  $\mathfrak{R}_0 > 1$ . Além disso, o valor  $S^*$  do estado endêmico dado em (4.73) é da forma  $S^* = N/\mathfrak{R}_0$ . Assim, o  $\mathfrak{R}_0$  possui relação essencial com o tamanho final da infecção. O mesmo resultado ocorre no Teorema 3.2.*

Provamos, assim, que se existem equilíbrios assintoticamente estáveis para o caso  $\gamma > 0$ , então são dados pelas Equações (4.72)-(4.73). O caso limite onde a dinâmica vital é nula não foi estudado originalmente em [8], mas acreditamos ser interessante. Em particular, nessa situação, se  $\alpha = \beta$  e  $\omega(t) \equiv \omega$ , podemos escrever  $dS/dR = -\omega S(t)/N$  e  $dI/dS = -1 + N/\omega S(t)$ , como no modelo original tratado na Subseção 2.3.1.2. Assim, embora a velocidade da onda possa mudar, a trajetória é a mesma do caso original. A saber, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 4.1.** *No caso limite onde a dinâmica vital é nula, se  $\omega(t) \equiv \omega$ ,  $i_0 > 0$  e  $\alpha = \beta$  no sistema (4.59)-(4.61), então a solução se aproxima assintoticamente do equilíbrio  $(S, I, R)_\infty$ , onde*

$$R_\infty = N + \frac{N}{\omega} W_0 \left( \frac{-S_0 \omega e^{-\omega}}{N} \right), \quad (4.75)$$

e

$$S_\infty = S_0 \exp \left( -\frac{\omega}{N} R_\infty \right) = -\frac{N}{\omega} W_0 \left( \frac{-S_0 \omega e^{-\omega}}{N} \right), \quad I_\infty = N - S_\infty - R_\infty = 0, \quad (4.76)$$

onde  $W_0$  representa o ramo principal da função  $W$  de Lambert [41].

Além disso, a curva parametrizada  $(S(t), I(t))$  é a mesma para quaisquer  $\alpha = \beta$ , com

$$I(t) = i_0 + S_0 - S(t) + \frac{N}{\omega} \log(S(t)/S_0), \quad (4.77)$$

onde  $S(t)$  percorre o intervalo  $[S_\infty, S_0]$  de maneira monótona decrescente (ver Proposição 4.2).

Os resultados numéricos do Capítulo 5 fornecem a hipótese de que a velocidade na qual a curva é percorrida diminui conforme  $\alpha$ , mas não obtivemos uma formulação exata. Como no caso clássico, se a doença está no início,  $S_0 \approx N$  e a epidemia não ocorre se  $\mathfrak{R}_0 = \omega < 1$ . Com efeito, nesse caso  $-\omega > -1$  e

$$W_0 \left( \frac{-S_0 \omega e^{-\omega}}{N} \right) \approx W_0(-\omega e^{-\omega}) = -\omega, \quad (4.78)$$

sendo, portanto,  $R_\infty \approx 0$ .

Agora, se  $\alpha \neq \beta$ , as Equações (4.62)-(4.64) são escritas como:

$$0 = - \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega(t)S(t)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} I(t) \right), \quad (4.79)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega(t)S(t)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} I(t) - \frac{1}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} I(t) \right), \quad (4.80)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} I(t) \right), \quad (4.81)$$

o que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D^{1-\alpha} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t)S(t)D^{1-\beta} I(t) = 0. \quad (4.82)$$

Realmente, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I^*$ , então é possível provar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D^{1-\alpha} I(t) = D^{1-\beta} I(t) = 0, \quad (4.83)$$

pois,  $I(t) \approx I^*$  para  $t > T$  com  $T$  suficientemente grande e, pelo Princípio da Memória Curta (Short Memory Principle [15]), para  $t > T$  suficientemente grande, temos

$$D_{0+}^{1-\alpha} I(t) \approx D_T^{1-\alpha} I(t) \approx I^* \frac{(t-T)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (4.84)$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D^{1-\alpha} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I^* \frac{(t-T)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = 0, \quad (4.85)$$

valendo o mesmo para  $\lim_{t \rightarrow \infty} D^{1-\beta} I(t)$ .

Não conseguimos prosseguir na análise do ponto de equilíbrio, mas as simulações parecem mostrar que, nesse caso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ , obtendo o equilíbrio  $(0, 0, N)$ . Esse equilíbrio pode também ser obtido da Equação (4.73) se fizermos  $\alpha < \beta$  e  $\gamma = 0$ . Porém, essa equação foi obtida considerando  $\gamma > 0$  e a substituição não seria permitida de maneira direta.

Voltando ao caso onde  $\gamma > 0$ , não provamos que, realmente, os estados definidos são equilíbrios assintoticamente estáveis. Há dificuldades para a análise formal da estabilidade. Esperamos que o estado livre de doença seja um equilíbrio assintoticamente estável quando  $\omega^* < (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta$ , enquanto o estado endêmico deve ser assintoticamente estável

se  $\omega^* > (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta$ . Essa hipótese, para o caso  $\omega(t)$  constante, foi formulada sem demonstração em [8]. Contudo, é indicado o artigo [9], que considera a dependência do tempo desde a infecção apenas para a remoção, ou seja, o equivalente a considerarmos  $\beta = 1$ . Neste artigo, os autores sugerem que algum avanço na estabilidade pode ser feito ao utilizar a formulação integral do modelo. Depois de uma translação dos equilíbrios para a origem, o comportamento assintótico do sistema resultante de equações integrais não lineares de Volterra é dado de forma equivalente pelo comportamento assintótico de sua linearização como um sistema de equações lineares integrais de Volterra. Esse resultado notável foi usado por Hethcote e Tudor para inferir a estabilidade local dos equilíbrio do modelo epidemiológico integral que propuseram em [73]. Partimos desse caminho para esboçarmos os próximos resultados.

Precisamos das formas integrais dos infecciosos e dos recuperados em um tempo  $t$ . Da Equação (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(t) + \int_0^t \Phi(t-t')q^+(I, t')dt' = \\ &= I_0(t) + \int_0^t \Phi(t-t')\frac{\omega(t')S(t')\theta(t')}{N\tau^\beta} \left( D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) \right) (t')dt', \end{aligned} \quad (4.86)$$

Podemos construir intuitivamente a Equação (4.87) da seguinte forma: o número de recuperados em um tempo  $t$  é o número de infecciosos iniciais que foram removidos pela doença e não sofreram morte natural, dado por  $i_0F(t)\theta(t) = i_0(1 - \phi(t))\theta(t) = i_0\theta(t) - i_0\Phi(t) = i_0\theta(t) - I_0(t)$  (Equação (4.8)), somado à integral de 0 a  $t$  das pessoas que ingressam em  $I$  em cada  $t'$ , removidas pela doença (probabilidade  $F(t-t')$ ) e que não sofreram morte natural (probabilidade  $\theta(t-t')$ ), obtendo

$$\begin{aligned} R(t) &= i_0\theta(t) - I_0(t) + \int_0^t F(t-t')\theta(t-t')q^+(I, t')dt' = \\ &= i_0\theta(t) - I_0(t) + \int_0^t F(t-t')\theta(t-t')\frac{\omega(t')S(t')\theta(t')}{N\tau^\beta} \left( D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) \right) (t')dt'. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Para corroborar esse raciocínio intuitivo, derivamos a Equação (4.87) utilizando a regra de Leibniz:

$$\frac{dR}{dt} = -\gamma\theta(t)i_0 - \frac{dI_0}{dt} + \int_0^t \psi(t-t')\theta(t-t')q^+(I, t')dt' - \gamma \int_0^t F(t-t')\theta(t-t')q^+(I, t')dt'. \quad (4.88)$$

Pela Equação (4.8), temos  $I_0(t) = \phi(t)\theta(t)i_0$ , donde  $\frac{dI_0}{dt} = -i_0(\psi(t)\theta(t) + \gamma\phi(t)\theta(t))$ . Então,

$$\frac{dR}{dt} = -\gamma\theta(t)i_0 + \psi(t)\theta(t)i_0 + \gamma\phi(t)\theta(t)i_0 + \int_0^t \psi(t-t')\theta(t-t')q^+(I, t')dt' - \gamma(R(t) - (i_0\theta(t) - I_0(t))), \quad (4.89)$$

seguindo

$$\frac{dR}{dt} = \psi(t)\theta(t)i_0 + \int_0^t \psi(t-t')\theta(t-t')q^+(I, t')dt' - \gamma R(t). \quad (4.90)$$

Observamos que a Equação (4.90) é exatamente o resultado extraído da Equação (4.10). Isso indica que a formulação (4.87) conduz à mesma derivada para  $R$  do modelo apresentado. Como  $R(0) = 0$  em ambos os casos, as formulações são equivalentes.

Os Teoremas 4.2-4.3 seguem as ideias de [73]:

**Teorema 4.2.** *Se  $\omega(t)$  é limitado com  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$  e  $\beta = 1$  no sistema (4.59)-(4.61), então o equilíbrio livre de doença dado pela Equação (4.72) é globalmente assintoticamente estável se  $\omega^* < (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$ .*

*Demonstração.* Definimos a constante  $A$  tal que

$$A = \int_0^\infty \frac{\omega^*}{\tau} \Phi(t) dt = \frac{\omega^*}{(\tau\gamma) + (\tau\gamma)^{1-\alpha}} < 1. \quad (4.91)$$

Seja  $J = \limsup_{t \rightarrow \infty} I(t)$  e suponhamos por absurdo que  $J > 0$ .

Assim, é possível escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que  $2\epsilon + A(1+\epsilon)(J+\epsilon) < J$ . Com efeito, definindo a função contínua crescente  $E(t) = 2t + A(1+t)(J+t)$ , temos  $E(0) = AJ < J$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \infty$ , donde existe  $\epsilon_J > 0$  tal que  $E(\epsilon_J) = J$ . Basta, portanto, escolhermos  $\epsilon \in (0, \epsilon_J)$ .

Agora, pela Observação 4.1, temos  $\lim_{t \rightarrow 0} I_0(t) = 0$ . Além disso, sabemos que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) = J$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$ . Assim, escolhido esse  $\epsilon$ , podemos escolher um tempo  $t_1 > 0$  suficientemente grande tal que  $I_0(t) < \epsilon/2$ ,  $I(t) < J + \epsilon$  e  $\omega(t) < (1 + \epsilon)\omega^*$  para  $t > t_1$ .

Finalmente, escolhido  $t_1$ , uma vez que  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0$ , podemos escolher  $t_2$  suficientemente grande tal que  $Nt_1\theta(t)\omega_m/\tau < \epsilon$  para  $t > t_2$ , onde  $\omega_m$  é o valor máximo atingido por  $\omega(t)$ .

Então, para  $t > t_1 + t_2$ , temos  $t - t_1 > t_2$  e

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \Phi(t-t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt', \quad (4.92)$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \int_0^{t_1} \Phi(t-t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt' + \int_{t_1}^t \Phi(t-t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt'. \quad (4.93)$$

Agora, lembramos que  $S(t), I(t) \leq N$  para todo  $t$ . Além disso, na primeira integral usamos que  $\Phi(t) = \phi(t)\theta(t) \leq \theta(t)$ , enquanto, na segunda integral, usamos que  $I(t) < J + \epsilon$  e  $\omega(t) < (1 + \epsilon)\omega^*$  para  $t > t_1$ , obtendo

$$I(t) < \frac{\epsilon}{2} + N \int_0^{t_1} \theta(t-t') \frac{\omega_m}{\tau} dt' + (J + \epsilon)(1 + \epsilon) \int_{t_1}^t \Phi(t-t') \frac{\omega^*}{\tau} dt'. \quad (4.94)$$

Finalmente, notamos que, como  $t - t_1 > t_2$ , temos  $\theta(t - t_1) < \theta(t_2)$ . Além disso, pela definição de  $A$ , temos  $\int_{t_1}^t \Phi(t-t')\omega^*/\tau dt' < A$ . Logo, pela escolha de  $\epsilon, t_1$  e  $t_2$ , vem

que, para todo  $t > t_1 + t_2$ , temos

$$I(t) < \frac{\epsilon}{2} + Nt_1\theta(t_2)\frac{\omega_m}{\tau} + A(1 + \epsilon)(J + \epsilon), \quad (4.95)$$

$$< \frac{3\epsilon}{2} + A(1 + \epsilon)(J + \epsilon) < J - \frac{\epsilon}{2}, \quad (4.96)$$

contradição. Portanto,  $J = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

Lembrando que, nas condições do enunciado, temos

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma N - \frac{\omega(t)S(t)I(t)}{N\tau} - \gamma S(t), \quad (4.97)$$

então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = N$ . Finalmente,  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (N - I(t) - S(t)) = 0$ .

□

**Teorema 4.3.** *Se  $\omega(t) \equiv \omega$  é tomado constante e  $\beta = 1$  no sistema (4.59)-(4.61), então o equilíbrio endêmico dado pela Equação (4.73) é localmente assintoticamente estável sempre que é viável, isto é, quando  $\omega > (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$ .*

*Demonstração.* Pela Observação 4.3, temos  $\mathfrak{R}_0 = \int_0^\infty \sigma(t)\Phi(t)dt = N/S^*$ . Lembramos que, se  $\beta = 1$  e  $\omega$  é constante, então  $\sigma(t) \equiv \omega/\tau$ . Logo,

$$\begin{aligned} I^* &= \int_0^\infty \sigma(t')\Phi(t')dt' \cdot \frac{S^*}{N} \cdot I^* = \int_0^\infty \Phi(t') \cdot \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt' = \\ &= \int_0^t \Phi(t') \cdot \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt' + \int_t^\infty \Phi(t') \cdot \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt' = \\ &= \int_0^t \Phi(t-t') \cdot \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt' + \int_t^\infty \Phi(t') \cdot \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt'. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t')dt' &= \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \theta(t')dt' - \frac{N}{S^*} = \frac{\omega}{\tau\gamma} - \frac{N}{S^*} = \\ &= \frac{N}{S^*}(\tau\gamma)^{-\alpha} = (\tau\gamma)^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \Phi(t')dt', \end{aligned} \quad (4.99)$$

ou seja,

$$\frac{N}{S^*} = \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \Phi(t')dt' = (\tau\gamma)^\alpha \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t')dt'. \quad (4.100)$$

Agora, voltando à Equação (4.74), notamos que  $R^* = (\tau\gamma)^{-\alpha}I^*$ . Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} R^* &= (\tau\gamma)^{-\alpha}(\tau\gamma)^\alpha \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t')dt' \cdot \frac{S^*}{N} \cdot I^* = \int_0^\infty F(t')\theta(t') \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt', \\ &= \int_0^t F(t-t')\theta(t-t') \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt' + \int_t^\infty F(t')\theta(t') \frac{S^*I^*\omega}{N\tau} dt'. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Fazemos  $V = I - I^*$  e  $W = R - R^*$  para transladar o equilíbrio à origem. Então, pelas Equações (4.86), (4.87), (4.98) e (4.101) e observando que  $SI - S^*I^* = S^*V - I^*(V + W) - V(V + W)$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \Phi(t-t')\omega/N\tau & 0 \\ F(t-t')\theta(t-t')\omega/N\tau & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (S^*V - I^*(V + W) - V(V + W))(t') \\ (V + W)(t') \end{bmatrix} dt', \quad (4.102)$$

onde

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0(t) - \int_t^\infty \Phi(t') \cdot \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' \\ i_0 \theta(t) - I_0(t) - \int_t^\infty F(t') \theta(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

O sistema integral não linear de Volterra da Equação (4.102) pode ser escrito na forma matricial como:

$$X(t) = F(t) + \int_0^t A(t-t') G(X(t')) dt', \quad (4.104)$$

onde

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} V(t) \\ W(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}; \quad A(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t)\omega/N\tau & 0 \\ F(t)\theta(t)\omega/N\tau & 0 \end{bmatrix}; \\ G(X) &= G(V, W) = \begin{bmatrix} S^*V - I^*(V+W) - V(V+W) \\ V+W \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

A equação característica da linearização da Equação (4.104) é

$$\det \left( \text{Identidade} - \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(t) J dt \right) = 0, \quad (4.106)$$

onde  $J$  é a jacobiana de  $G$  avaliada em 0.

A análise da estabilidade da origem utiliza um resultado extraído de Miller ([74]) por Hethcote e Tudor ([73]): *Se as soluções da Equação (4.104) existem em  $[0, \infty)$  e são limitadas,  $F(t) \in C[0, \infty)$ ,  $F(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $A(t) \in L^1[0, \infty)$ ,  $G(X) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $G(0) = 0$ ,  $J$  é não singular e a Equação (4.106) não possui raízes com partes reais não negativas, então a origem é um equilíbrio localmente assintoticamente estável.*

A maior parte das condições é bastante direta. Em particular,  $F(t) \rightarrow 0$  devido à existência da Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler.

Vamos verificar as raízes características da Equação (4.106). A intenção é provar que não existem raízes com parte real positiva. Primeiro, calculamos  $J$ , obtendo

$$J = \begin{bmatrix} S^* - I^* - 2V & -I^* - V \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{V=W=0} = \begin{bmatrix} S^* - I^* & -I^* \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.107)$$

Prosseguindo,

$$A(t)J = \begin{bmatrix} \Phi(t)\omega/N\tau & 0 \\ F(t)\theta(t)\omega/N\tau & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^* - I^* & -I^* \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(t)\omega(S^* - I^*)/N\tau & -\Phi(t)I^*\omega/N\tau \\ F(t)\theta(t)\omega(S^* - I^*)/N\tau & -F(t)\theta(t)I^*\omega/N\tau \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

levando à equação característica

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} \Phi(t)\omega(S^* - I^*)/N\tau & -e^{-\lambda t} \Phi(t)I^*\omega/N\tau \\ e^{-\lambda t} F(t)\theta(t)\omega(S^* - I^*)/N\tau & -e^{-\lambda t} F(t)\theta(t)I^*\omega/N\tau \end{bmatrix} dt \right) = 0. \quad (4.109)$$

Observamos que as integrais têm a forma de uma transformada de Laplace e, no artigo original [73], Hethcote e Tudor pediram que a probabilidade de permanência  $\phi$

fosse dominada por um decaimento exponencial, de maneira a garantir a existência da transformada. A função de Mittag-Leffler não é dominada pelo decaimento exponencial, mas, como vimos no resultado 2.6, essa transformada existe se  $\text{Re}(\lambda) > -\gamma$ .

A Equação (4.106) pode ser escrita como

$$\left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt\right) \left(1 + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right) - \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) I^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right) \left(-\int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt\right) = 0. \quad (4.110)$$

Simplificando,

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0. \quad (4.111)$$

Finalmente, como  $\Phi(t) = \theta(t)\phi(t) = e^{-\gamma t}(1 - F(t))$ , temos

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0, \quad (4.112)$$

e

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) S^* \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0. \quad (4.113)$$

Novamente, pela Observação 4.3, a condição  $\omega > (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$  equivale a

$$\frac{N}{S^*} = \int_0^\infty \Phi(t) \frac{\omega}{\tau} dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt > 1. \quad (4.114)$$

Supondo por absurdo que  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ , então

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt = \frac{N}{S^*} > \text{Re} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt \right). \quad (4.115)$$

Logo,

$$1 > \text{Re} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) S^* \frac{\omega}{N\tau} dt \right), \quad (4.116)$$

e, para cumprir a Equação (4.113), será necessário ter

$$\text{Re} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt \right) < 0. \quad (4.117)$$

Mas, veja que, se  $\text{Re}(\lambda) > -\gamma$ , temos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = \frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma) N\tau}. \quad (4.118)$$

Sendo  $\lambda = a + bi$  com  $a \geq 0$ , temos

$$\frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma) N\tau} = \frac{\omega I^*}{N\tau} \cdot \frac{1}{(a + \gamma) + bi} \cdot \frac{(a + \gamma) - bi}{(a + \gamma) - bi} = \frac{\omega I^*}{N\tau} \cdot \frac{(a + \gamma) - bi}{(a + \gamma)^2 + b^2}, \quad (4.119)$$

seguindo que

$$\text{Re} \left( \frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma) N\tau} \right) = \frac{\omega I^* (a + \gamma)}{N\tau ((a + \gamma)^2 + b^2)} > 0, \quad (4.120)$$

contradição com a condição (4.117).

Logo, o equilíbrio  $(S^*, I^*, R^*)$  é localmente assintoticamente estável.  $\square$

Neste Capítulo, reapresentamos o modelo de [8] com a intenção de completar os resultados anteriores e, ainda, divulgá-lo, pois, é pouco utilizado. Nos interessamos por esse modelo porque parte de uma construção significativa, na qual as derivadas de ordem arbitrária surgem naturalmente. Além de apresentarmos o modelo, demonstramos a não negatividade e, no caso limite sem dinâmica vital, o resultado da monotonicidade, o que está de acordo com as expectativas. Também foram construídos os números de reprodução, onde apresentamos uma nova proposta para sua aproximação. Os pontos de equilíbrio foram estudados, provando algumas hipóteses e mantendo outras em aberto, como a conjectura de que toda a região com  $i_0 > 0$  é uma região de estabilidade para  $(S^*, I^*, R^*)$ . No próximo Capítulo, resultados numéricos retomam cada um dos pontos ressaltados.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo deste Capítulo é estudar numericamente os pontos ressaltados ao longo dos Capítulos 3 e 4. Para tanto, realizamos análises numéricas do modelo através de esquema discreto e implementação em MATLAB, conforme detalhado nas próximas Seções. A ideia é utilizar o computador para realizar experimentos que permitam que a teoria e os resultados das simulações se retroalimentem de forma a ampliar nosso conhecimento.

### 5.1 DISCRETIZAÇÃO DAS DERIVADAS DE ORDEM ARBITRÁRIA

Existem diversos métodos numéricos que podem ser aplicados às derivadas de ordem arbitrária. Um deles, estudado, por exemplo, em [75], é o Método de Diferenças Finitas Não Clássico (NSFD). Esperamos utilizar diferentes métodos numéricos em trabalhos futuros. Por ora, construímos um esquema numérico tipo  $L1$  [19] para discretizar os modelos SIR de ordem arbitrária descritos nos Capítulos 3 e 4. O intervalo temporal  $[a, t]$  é discretizado como  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , onde os passos de tempo  $\Delta T$  têm o mesmo tamanho. Considerando  $\alpha \in (0, 1]$ , realizamos a seguinte discretização para a derivada de Caputo:

$$\begin{aligned}
{}^C D_{a+}^\alpha f(t_j) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_j} (t_j - \theta)^{-\alpha} \frac{d}{d\theta} f(\theta) d\theta \simeq \\
&\simeq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_j - \theta)^{-\alpha} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta T} d\theta = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_j - \theta)^{-\alpha} d\theta = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta T} \left[ \frac{-(t_j - \theta)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} d\theta = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta T} \cdot \frac{(t_j - t_k)^{1-\alpha} - (t_j - t_{k+1})^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta T} \sum_{k=0}^{j-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)] [(t_j - t_k)^{1-\alpha} - (t_j - t_{k+1})^{1-\alpha}] = \\
&= \frac{\Delta T^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)] [(j-k)^{1-\alpha} - (j-k-1)^{1-\alpha}],
\end{aligned} \tag{5.1}$$

pois  $t_i = i\Delta T + t_0$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . A ordem de convergência do esquema  $L1$  é  $O(\Delta T^{2-\alpha})$  [76]. Consideramos o sistema completo com ordens  $\alpha_i$  e dinâmica vital  $\mu_i$  em cada compartimento:

$${}^C D_{0+}^{\alpha_1} S(t) = \mu_1 N(t) - \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N(t)} - \mu_1 S(t), \tag{5.2}$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_2} I(t) = \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma_2 I(t) - \mu_2 I(t), \tag{5.3}$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_3} R(t) = \gamma_3 I(t) - \mu_3 R(t). \quad (5.4)$$

Discretizando, obtemos as Equações (5.5)-(5.7):

$$\begin{aligned} S(j+1) &= S(j) - \sum_{k=0}^{j-1} [S(k+1) - S(k)][(j+1-k)^{1-\alpha_1} - (j-k)^{1-\alpha_1}] \\ &\quad + \Delta T^{\alpha_1} \Gamma(2-\alpha_1)(\mu_1 N - \beta_1 S(j)I(j) - \mu_1 S(j)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} I(j+1) &= I(j) - \sum_{k=0}^{j-1} [I(k+1) - I(k)][(j+1-k)^{1-\alpha_2} - (j-k)^{1-\alpha_2}] \\ &\quad + \Delta T^{\alpha_2} \Gamma(2-\alpha_2)(\beta_2 S(j)I(j) - \gamma_2 I(j) - \mu_2 I(j)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} R(j+1) &= R(j) - \sum_{k=0}^{j-1} [R(k+1) - R(k)][(j+1-k)^{1-\alpha_3} - (j-k)^{1-\alpha_3}] \\ &\quad + \Delta T^{\alpha_3} \Gamma(2-\alpha_3)(\gamma_3 I(j) - \mu_3 R(j)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Uma vez que o MATLAB utiliza linguagem matricial, é conveniente definir as seguintes expressões matriciais:

$$DS_j = [S(1) - S(0), S(2) - S(1), \dots, S(j) - S(j-1)] \cdot \left[ \begin{array}{c} [j+1]^{1-\alpha_1} \\ j \\ \vdots \\ 2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]^{1-\alpha_1}, \quad (5.8)$$

$$DI_j = [I(1) - I(0), I(2) - I(1), \dots, I(j) - I(j-1)] \cdot \left[ \begin{array}{c} [j+1]^{1-\alpha_2} \\ j \\ \vdots \\ 2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]^{1-\alpha_2}, \quad (5.9)$$

$$DR_j = [R(1) - R(0), R(2) - R(1), \dots, R(j) - R(j-1)] \cdot \left[ \begin{array}{c} [j+1]^{1-\alpha_3} \\ j \\ \vdots \\ 2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]^{1-\alpha_3}. \quad (5.10)$$

Assim, obtemos a versão final da discretização na forma

$$S(j+1) = S(j) - DS_j + \Delta T^{\alpha_1} \Gamma(2-\alpha_1)(\mu_1 N - \beta_1 S(j)I(j) - \mu_1 S(j)), \quad (5.11)$$

$$I(j+1) = I(j) - DI_j + \Delta T^{\alpha_2} \Gamma(2-\alpha_2)(\beta_2 S(j)I(j) - \gamma_2 I(j) - \mu_2 I(j)), \quad (5.12)$$

$$R(j+1) = R(j) - DR_j + \Delta T^{\alpha_3} \Gamma(2-\alpha_3)(\gamma_3 I(j) - \mu_3 R(j)), \quad (5.13)$$

sendo que, para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ , temos o sistema de ordem inteira.

Agora, para a derivada de Riemann-Liouville, realizamos a seguinte discretização:

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{1-\alpha} f(t_j) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{d}{dt_j} \right) \int_a^{t_j} (t_j - \theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta = \\
&\simeq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\int_a^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta - \int_a^{t_j} (t_j - \theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta}{\Delta T} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Delta T} \left[ \int_a^{t_j} [(t_{j+1} - \theta)^{\alpha-1} - (t_j - \theta)^{\alpha-1}] f(\theta) d\theta + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta \right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Delta T} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(t_{j+1} - \theta)^{\alpha-1} - (t_j - \theta)^{\alpha-1}] f(\theta) d\theta + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta \right] = \\
&\simeq \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Delta T} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} f(t_k) \cdot \left[ \frac{-(t_{j+1} - \theta)^\alpha + (t_j - \theta)^\alpha}{\alpha} \right] \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + f(t_j) \cdot \left[ \frac{-(t_{j+1} - \theta)^\alpha}{\alpha} \right] \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} \right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Delta T} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} f(t_k) \frac{(t_{j+1} - t_k)^\alpha - (t_j - t_k)^\alpha - (t_{j+1} - t_{k+1})^\alpha + (t_j - t_{k+1})^\alpha}{\alpha} \right. \\
&\quad \left. + f(t_j) \frac{(t_{j+1} - t_j)^\alpha}{\alpha} \right] = \\
&= \frac{\Delta T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} f(t_k) [(j-k+1)^\alpha - 2(j-k)^\alpha + (j-k-1)^\alpha] + f(t_j) \right],
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde  $t_i = i\Delta T + t_0$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Discretizando o sistema (4.30)-(4.32), obtemos as Equações (5.15)-(5.17):

$$\begin{aligned}
S(j+1) &= S(j) + \Delta T \gamma(j) N - \frac{\omega(j) S(j) \theta(j, 0) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{I(k)}{\theta(k, 0)} [(j-k+1)^\beta - 2(j-k)^\beta \right. \\
&\quad \left. + (j-k-1)^\beta] + \frac{I(j)}{\theta(j, 0)} \right] - \Delta T \gamma(j) S(j),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
I(j+1) &= I(j) + \frac{\omega(j) S(j) \theta(j, 0) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{I(k)}{\theta(k, 0)} [(j-k+1)^\beta - 2(j-k)^\beta + (j-k-1)^\beta] \right. \\
&\quad \left. + \frac{I(j)}{\theta(j, 0)} \right] - \frac{\theta(j, 0) \Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{I(k)}{\theta(k, 0)} [(j-k+1)^\alpha - 2(j-k)^\alpha + (j-k-1)^\alpha] \right. \\
&\quad \left. + \frac{I(j)}{\theta(j, 0)} \right] - \Delta T \gamma(j) I(j),
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
R(j+1) &= R(j) + \frac{\theta(j, 0) \Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \left[ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{I(k)}{\theta(k, 0)} [(j-k+1)^\alpha - 2(j-k)^\alpha + (j-k-1)^\alpha] + \frac{I(j)}{\theta(j, 0)} \right] \\
&\quad - \Delta T \gamma(j) R(j).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Novamente, definimos as seguintes expressões matriciais:

$$AI_j = [D \bullet [I(0), I(1), \dots, I(k), \dots, I(j-1)]] \cdot \left[ \begin{bmatrix} j+1 \\ j \\ \vdots \\ j-k+1 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}^\alpha - 2 \begin{bmatrix} j \\ j-1 \\ \vdots \\ j-k \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^\alpha + \begin{bmatrix} j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ j-k-1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^\alpha \right], \tag{5.18}$$

$$BI_j = [D \bullet [I(0), I(1), \dots, I(k), \dots, I(j-1)]] \cdot \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} j+1 \\ j \\ \vdots \\ j-k+1 \\ \vdots \\ 2 \end{array} \right]^\beta \\ - 2 \left[ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ \vdots \\ j-k \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]^\beta \\ + \left[ \begin{array}{c} j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ j-k-1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right]^\beta \end{array} \right], \quad (5.19)$$

$$D = \theta(j, 0) \left[ \frac{1}{\theta(0, 0)}, \frac{1}{\theta(1, 0)}, \dots, \frac{1}{\theta(k, 0)}, \dots, \frac{1}{\theta(j-1, 0)} \right] = [\theta(j, 0), \theta(j-1, 0), \dots, \theta(1, 0)], \quad (5.20)$$

com  $\bullet$  representando o produto coordenada a coordenada.

Escrevemos finalmente:

$$S(j+1) = S(j) + \Delta T \gamma(j) N - \frac{\omega(j) S(j) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} [BI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) S(j), \quad (5.21)$$

$$I(j+1) = I(j) + \frac{\omega(j) S(j) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} [BI_j + I(j)] - \frac{\Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} [AI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) I(j), \quad (5.22)$$

$$R(j+1) = R(j) + \frac{\Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} [AI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) R(j). \quad (5.23)$$

Esses esquemas multipassos são utilizados nas próximas Seções. É importante reiterar que os gráficos para ordem inteira foram obtidos, neste último caso, fazendo  $\alpha = \beta = 1$ . Ainda, devemos ter em mente a importância de se escolher qual método utilizar. Por exemplo, o método multipasso MSGDTM se faz inaplicável por tratar a modelagem fracionária de maneira local, como discutido em [77].

## 5.2 EXEMPLOS DO CAPÍTULO 3

Como dito, procuramos implementar no MATLAB exemplos que corroborem as discussões realizadas nos Capítulos 3 e 4. Quanto ao Capítulo 3, os exemplos permitem observar diversas características que podem não persistir ao mudarmos a ordem da derivada, como a população total, a monotonicidade no caso sem dinâmica vital, a região de estabilidade do equilíbrio  $(S, I, R)_\infty$  e a condição do ponto de pico.

### 5.2.1 Ordens distintas

Inicialmente, consideramos o modelo sem dinâmica vital com ordens distintas, dado por

$${}^C D_{0+}^{\alpha_1} S(t) = -\frac{\beta_1 S(t) I(t)}{N_0}, \quad (5.24)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_2} I(t) = \frac{\beta_1 S(t) I(t)}{N_0} - \gamma_2 I(t), \quad (5.25)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_3} R(t) = \gamma_3 I(t). \quad (5.26)$$

Para as Figuras 5.1-5.16, utilizamos uma população  $N_0 = 1000000$ , condições iniciais  $S(0) = N_0 - 1$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e  $dt = 0.1$ .

Na Figura 5.1, temos o modelo de ordem inteira  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . Notamos a monotonicidade dos compartimentos  $S$  e  $R$  e a constância da população total.

• (População Total) Nas Figuras 5.2- 5.4, utilizando a derivada de Caputo e ordens diferentes, com parâmetros  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ , observamos que a população total não é mantida: ela pode aumentar, diminuir ou mesmo oscilar, como mostrado na Equação (3.13). Lembramos que essa questão não é resolvida ao corrigirmos as unidades dos parâmetros inicialmente considerados. Por exemplo, a Figura 5.5 considera os parâmetros de índice  $i$  elevados a  $\alpha_i$ , enquanto a Figura 5.6 considera as equações do sistema multiplicadas pela potência  $\tau^{1-\alpha_i}$ , sendo  $\tau = 0.1$  uma constante de tempo. Em qualquer caso, a população não é mantida. Já na Figura 5.7, vemos a população constante quando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . Ainda, a título de curiosidade, a Figura 5.8 retrata a não constância da população total para o sistema em derivadas de Riemann-Liouville, mesmo que as ordens sejam iguais em cada compartimento.

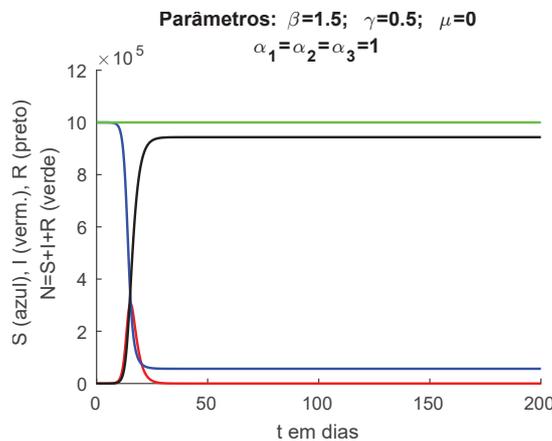


Figura 5.1 – Modelo SIR Clássico.

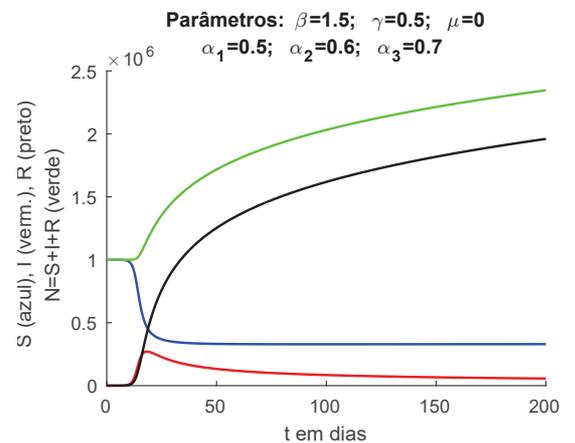


Figura 5.2 – População crescendo.

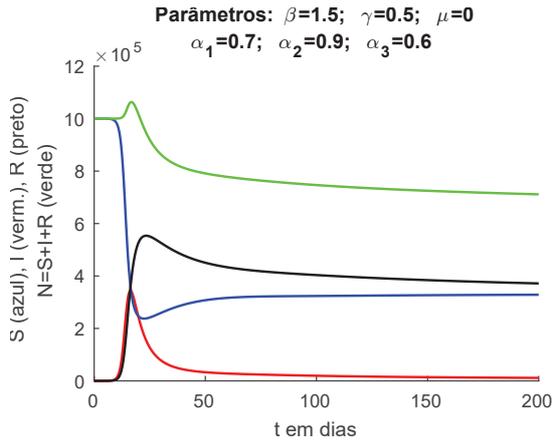


Figura 5.3 – População oscilando.

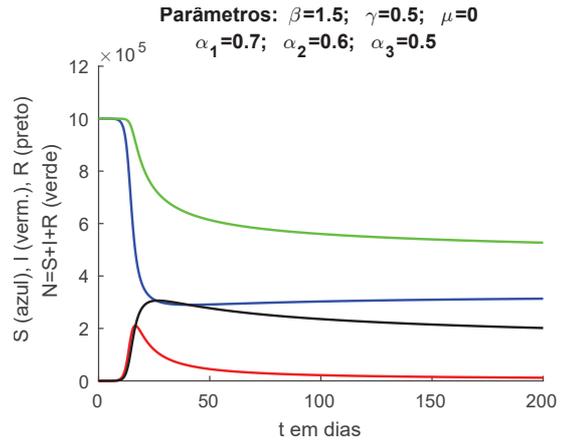


Figura 5.4 – População decrescendo.

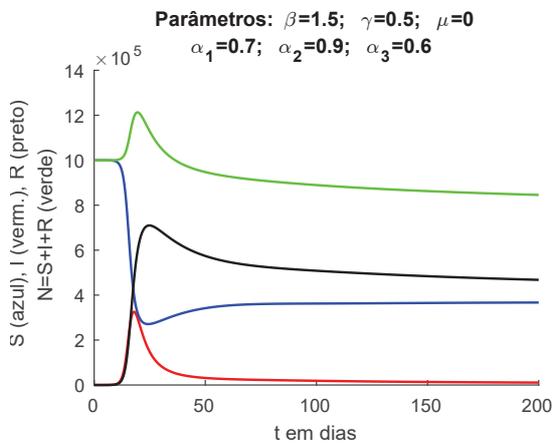


Figura 5.5 – Parâmetros elevados a  $\alpha_i$ .

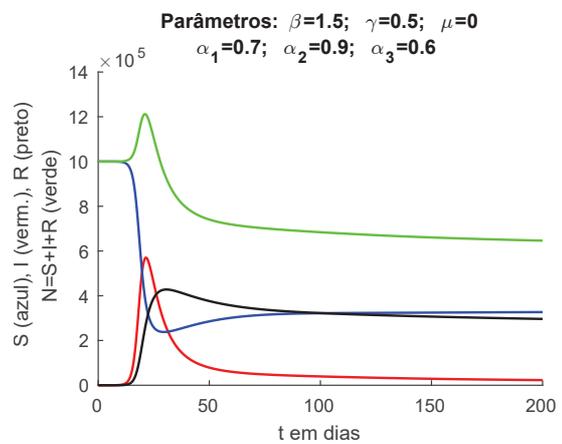


Figura 5.6 – Multiplicação por  $\tau^{1-\alpha_i}$ .

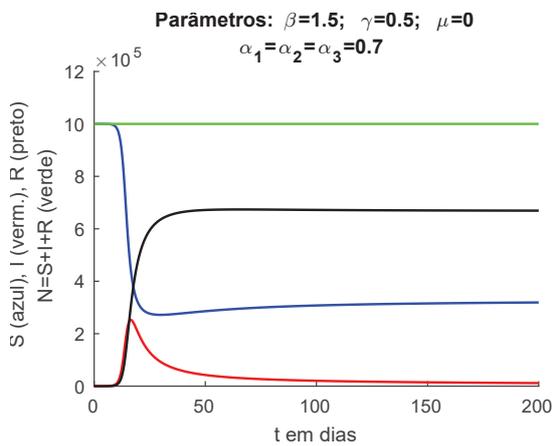


Figura 5.7 – Pop. constante se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .

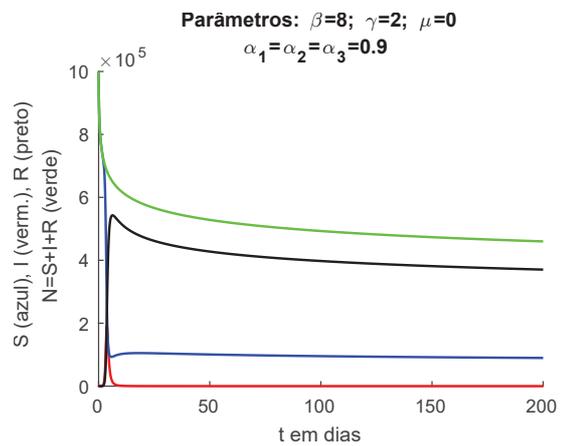


Figura 5.8 – RL não mantém pop. constante.

Na próxima Seção, consideramos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ , de maneira que a população se mantenha constante.

### 5.2.2 Ordens iguais, sem dinâmica vital

Agora que a população se mantém constante, nos preocupamos com algumas outras características que podem não persistir.

- (Monotonicidade) Ilustramos na Figura 5.9 a não monotonicidade dos compartimentos  $S$  e  $R$  no modelo sem dinâmica vital, como discutido na Seção 3.1. Novamente, esse problema não é resolvido ao balancearmos as unidades dos parâmetros inicialmente considerados. Com as ordens iguais, as correções os transformariam numericamente em outras constantes, porém iguais em cada compartimento.
- (Equilíbrio e ponto de pico) Já na Figura 5.10, exibimos o plano  $(S, I)$ , onde é possível observar diversas características que não persistem ao mudarmos a ordem da derivada, como a monotonicidade, a região de estabilidade do equilíbrio  $(S, I, R)_\infty$  e a condição do ponto de pico. A trajetória externa equivale ao modelo tradicional e o ponto vermelho indica  $(S, I) = (\gamma N / \beta, 0)$ . Nessa simulação, o tempo máximo foi de  $T = 1000$ . Notamos que os pontos de pico, em azul, não seguem mais a relação  ${}^C D_{0+}^\alpha I = 0$ , variando conforme  $\alpha$ .

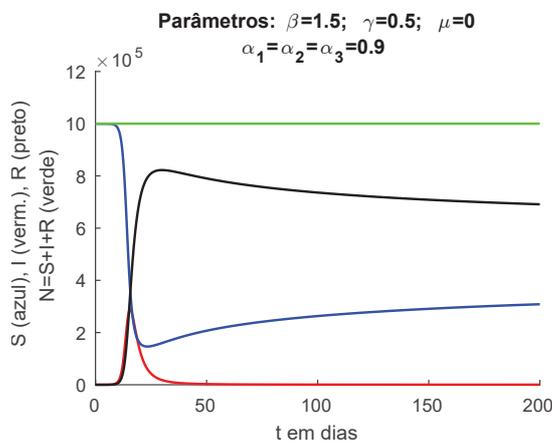
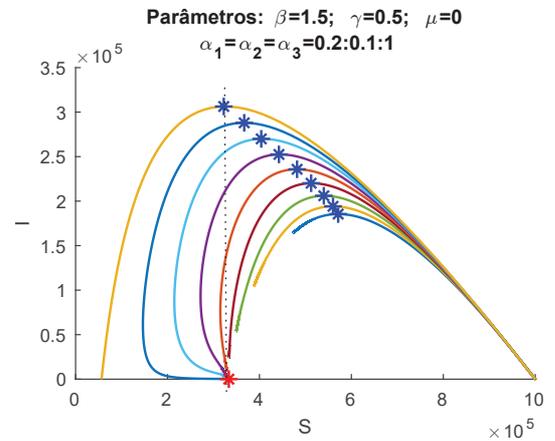


Figura 5.9 – Não monotonicidade.

Figura 5.10 – Trajetórias para  $I(0) = 1$ .

Notamos, ainda, que as trajetórias têm autointersecções, o que não ocorre no caso inteiro. Também é interessante observar que o modelo sem dinâmica vital parece comportar-se, no caso de ordem arbitrária, como se tivesse dinâmica vital, respeitando o equilíbrio do Teorema 3.2 para boa parte do plano. Entretanto, como vemos na Figura 5.12, esse equilíbrio não é globalmente estável.

Na próxima Subseção, acrescentamos a dinâmica vital.

### 5.2.3 Modelo completo, com dinâmica vital

Agora, as Figuras 5.13-5.14 consideram a dinâmica vital, seguindo o modelo

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = \mu N - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t), \quad (5.27)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t), \quad (5.28)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (5.29)$$

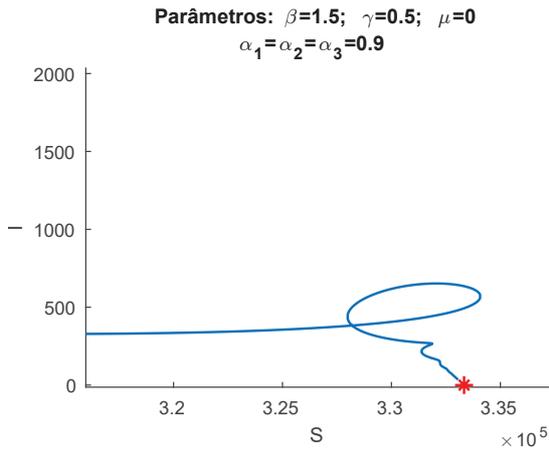


Figura 5.11 – Autocruzamento.

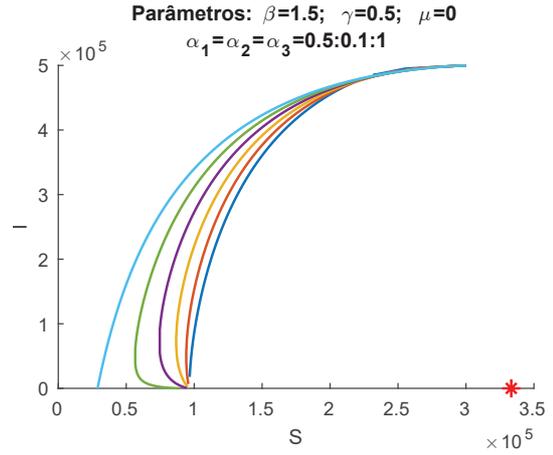


Figura 5.12 – C.I. (0.2, 0.5, 0.3)N.

Por generalidade, os parâmetros não foram elevados a  $\alpha$  no código, sendo, portanto, já considerados nas devidas unidades.

- (Equilíbrio) Observamos que, nessa condição, o equilíbrio endêmico é o mesmo do caso inteiro (trajetória azul), como visto no Teorema 3.2, porém o ponto de pico muda. A Figura 5.15 exibe um zoom da região próxima ao equilíbrio endêmico, onde novamente podemos notar uma autointersecção. A presença da dinâmica vital permite oscilações mesmo no caso inteiro. Porém, dada a Subseção anterior, podemos concluir que as oscilações presentes no caso não inteiro não são provenientes apenas da dinâmica vital, mas também da possível não monotonicidade de uma função cuja derivada fracionária tem sinal definido. Finalmente, a Figura 5.16 exibe um exemplo no plano  $(S, I)$  para o caso  $\mathfrak{R}_0 < 1$ . Nesse caso, o equilíbrio livre de doença é assintoticamente estável, como visto no Teorema 3.1.

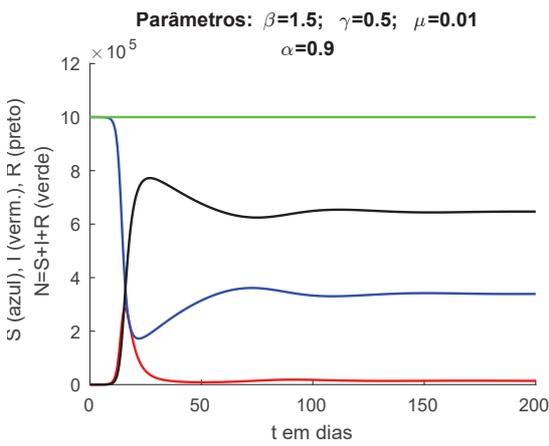


Figura 5.13 – Modelo com din. vital.

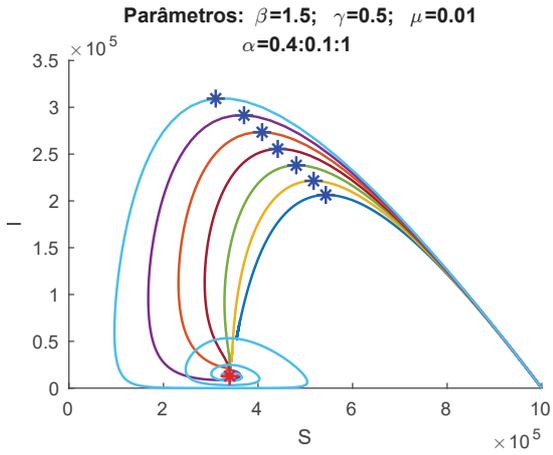


Figura 5.14 – Trajetórias com din. vital.

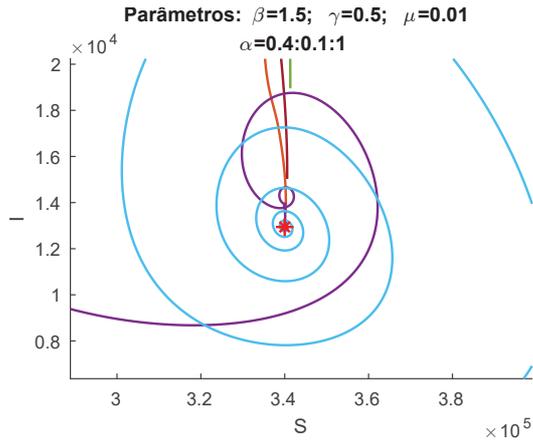


Figura 5.15 – Zoom  $EE$ .

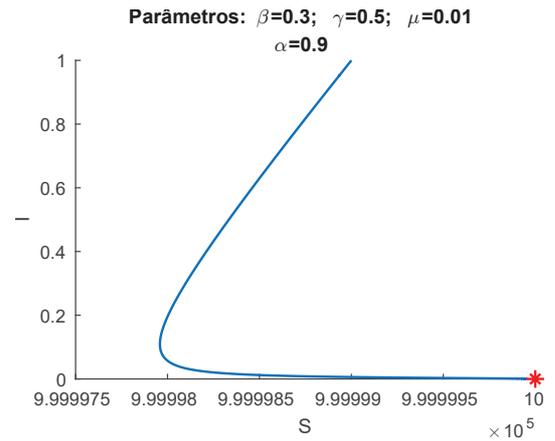


Figura 5.16 – Trajetória com  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .

A próxima Subseção trará exemplos da não localidade do modelo.

#### 5.2.4 Não localidade

Aqui, ilustramos a questão da não localidade discutida na Seção 3.2. Consideramos novamente  $N = 1000000$ , condições iniciais  $S(0) = N - 1$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e  $dt = 0.1$ . No tempo  $t = 30$ , a solução numérica fornece  $S(30) = 209310$ ,  $I(30) = 24375$  e  $R(30) = 766315$ . Consideramos agora esta condição inicial e rodamos novamente o modelo.

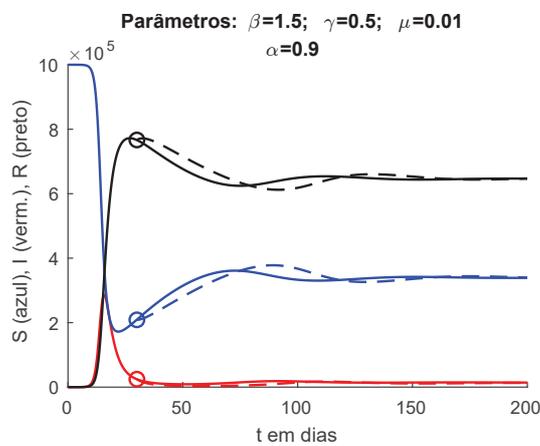


Figura 5.17 – Mudança de solução.

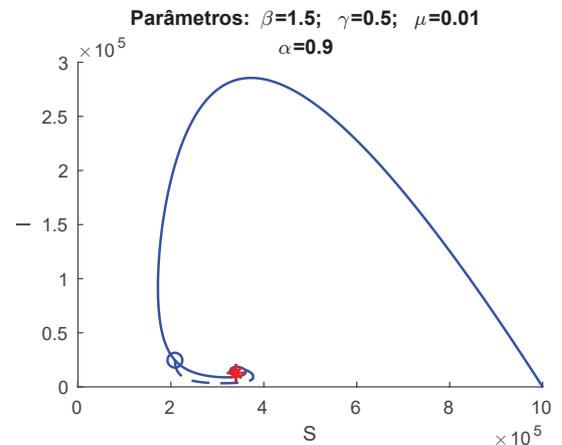


Figura 5.18 – Mudança na trajetória.

A Figura 5.17 ilustra a mudança da solução, onde o tracejado corresponde à solução a partir do tempo  $t = 30$ . Na Figura 5.18, temos as trajetórias equivalentes para um tempo máximo  $T = 1000$ . Uma observação interessante é a de que, embora as soluções se modifiquem, o ponto de equilíbrio permanece o mesmo. A Proposição 5 de [62] discute essa propriedade.

Finalizados os principais exemplos da teoria apresentada no Capítulo 3, realizamos uma análise de parâmetros na próxima Seção.

### 5.3 ANÁLISE DE PARÂMETROS DO MODELO DISCUTIDO NO CAPÍTULO 3

Nesta Seção, analisamos numericamente o modelo discutido no Capítulo 3. O objetivo é um entendimento mais aprofundado do modelo e do efeito individual das ordens e parâmetros. Como visto, o modelo possui comportamentos que não conseguimos justificar. Assim, o interesse, nesse caso, é menos epidemiológico e mais matemático. Ainda, o entendimento desses efeitos pode favorecer a utilização de modelos com diferentes ordens em situações reais que justifiquem esses comportamentos.

#### 5.3.1 Ordens distintas

Como visto, a utilização de ordens diferentes no lado esquerdo dos modelos SIR conduz a complicações, como a mudança inexplicável da população total. Contudo, iniciamos a análise de parâmetros estudando o efeito da variação das ordens  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  no sistema (5.24)-(5.26).

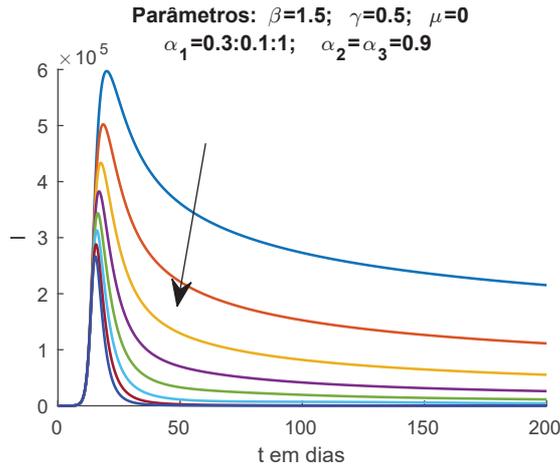
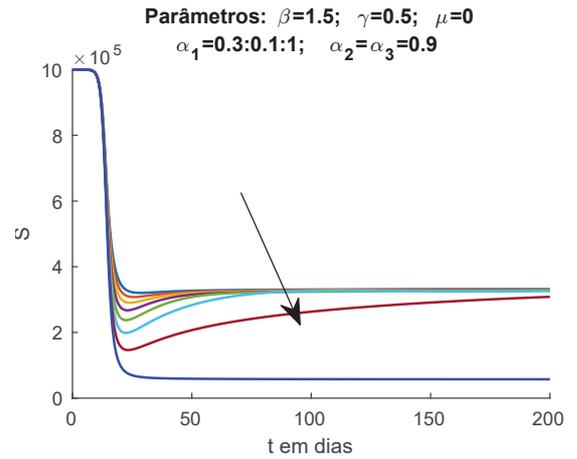
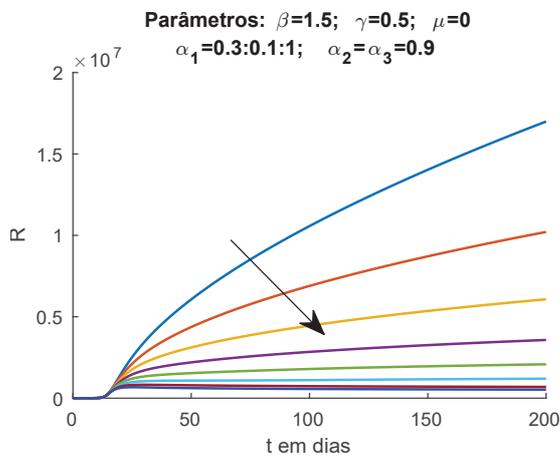
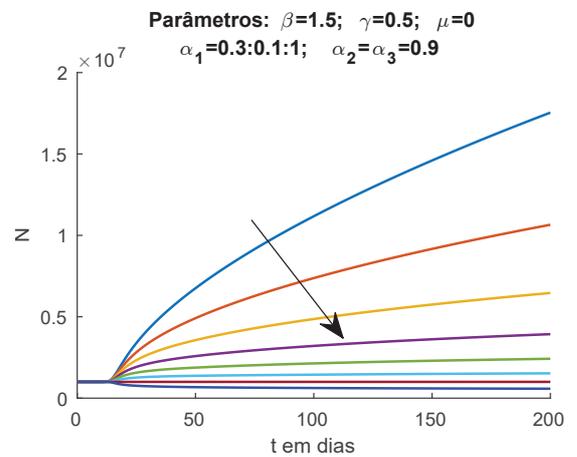
No modelo (5.30)-(5.32), consideramos  $N_0 = 1000000$  e  $dt = 0.1$ . As condições iniciais são  $I(0) = 1$  e  $S(0) = N_0 - 1$ , com  $R(0) = 0$ .

$${}^C D_{0+}^{\alpha_1} S(t) = -\frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N_0}, \quad (5.30)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_2} I(t) = \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N_0} - \gamma_2 I(t), \quad (5.31)$$

$${}^C D_{0+}^{\alpha_3} R(t) = \gamma_3 I(t). \quad (5.32)$$

- (Efeito de  $\alpha_1$  nos compartimentos) Na Figura 5.19, fixamos  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.9$  e verificamos que, ao crescermos  $\alpha_1$ , o pico diminui. A seta indica o sentido do crescimento do parâmetro. Nas Figuras 5.20-5.22, observamos o efeito nos compartimentos  $S$  e  $R$  e na população total  $N$ , respectivamente. No compartimento  $S$ , verificamos que, ao crescermos  $\alpha_1$ , os suscetíveis tendem a diminuir mais rápido. Para  $\alpha_1 < 1$ , a não monotonicidade fica mais acentuada conforme crescemos  $\alpha_1$ . Já com relação ao compartimento  $R$ ,  $\alpha_1$  pequeno faz com que  $R$  se torne muito grande, ultrapassando  $N_0$ . A população total  $N$  segue esse comportamento.

Figura 5.19 – Efeito de  $\alpha_1$  em  $I$ .Figura 5.20 – Efeito de  $\alpha_1$  em  $S$ .Figura 5.21 – Efeito de  $\alpha_1$  em  $R$ .Figura 5.22 – Efeito de  $\alpha_1$  em  $N$ .

- (Efeito de  $\alpha_2$  nos compartimentos) Já na Figura 5.23, fixamos  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.9$  e verificamos que, ao crescermos  $\alpha_2$ , o pico torna-se maior, ocorrendo também mais cedo. Nas Figuras 5.24-5.25, observamos o efeito nos compartimentos  $S$  e  $R$  e na população total  $N$ , respectivamente. Diminuir  $\alpha_2$  torna  $S$  cada vez mais próximo de ser monótono, enquanto faz com que  $R$  cresça. A Figura 5.26 ilustra o efeito de  $\alpha_2$  em  $N$ . Como esperado, para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.9$ , a população permanece constante, mas o mesmo não ocorre nas demais situações. Particularmente, para  $\alpha_2 = 1$ , a população torna-se maior do que a inicial.

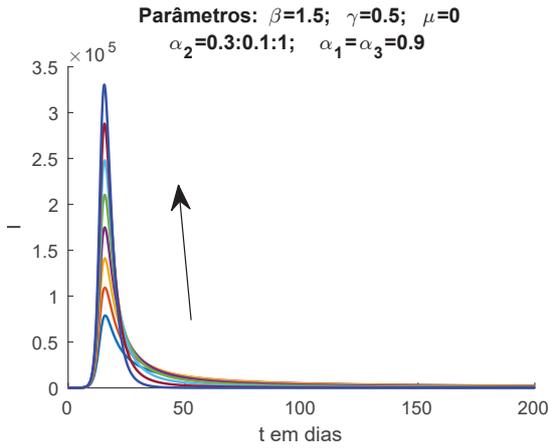


Figura 5.23 – Efeito de  $\alpha_2$  em  $I$ .

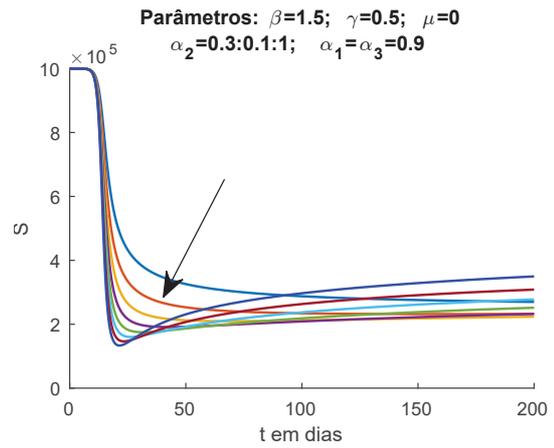


Figura 5.24 – Efeito de  $\alpha_2$  em  $S$ .

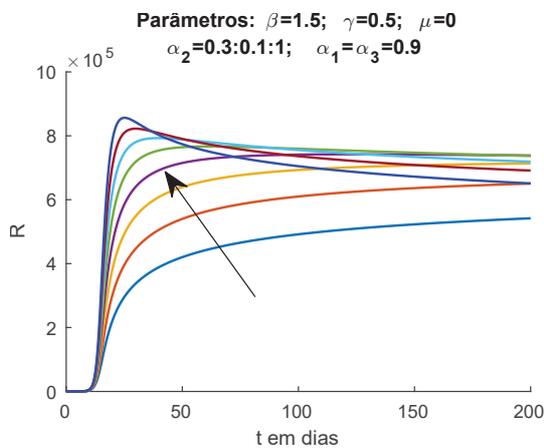


Figura 5.25 – Efeito de  $\alpha_2$  em  $R$ .

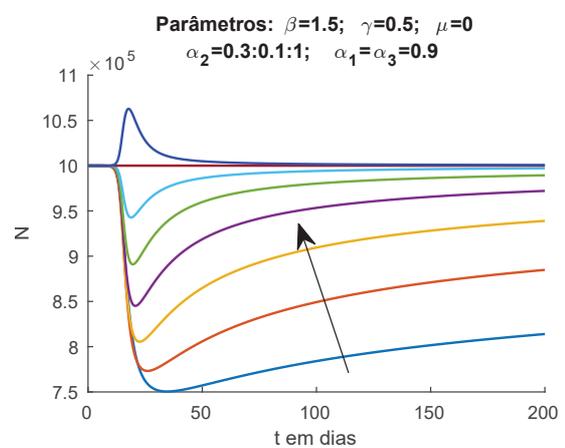


Figura 5.26 – Efeito de  $\alpha_2$  em  $N$ .

• (Efeito de  $\alpha_3$  nos compartimentos) Em seguida, nas Figuras 5.27-5.30, fixamos  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.9$ . Verificamos que a ordem  $\alpha_3$  não influencia os compartimentos  $S$  e  $I$ . Nas Figuras 5.29-5.30, observamos o efeito no compartimento  $R$  e na população total  $N$ , respectivamente. Observamos que, se  $\alpha_3$  cresce, então  $R$  torna-se maior, ou seja, mais pessoas são dadas como removidas.

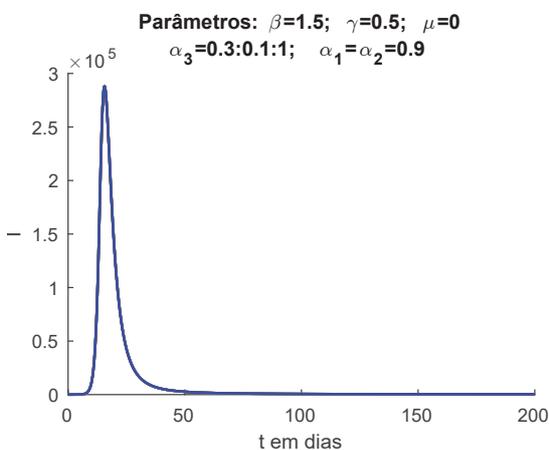


Figura 5.27 – Efeito de  $\alpha_3$  em  $I$ .

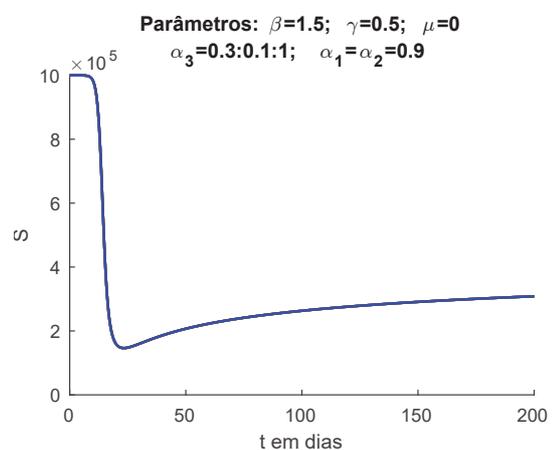
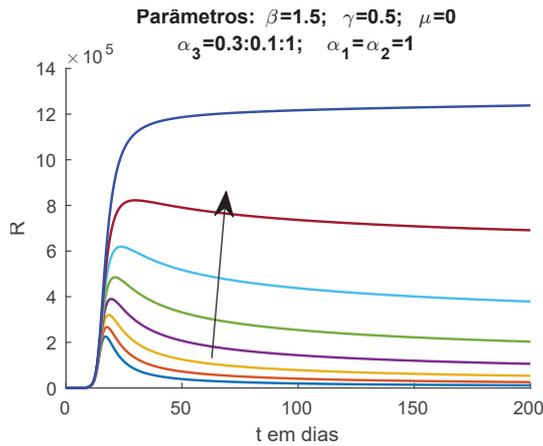
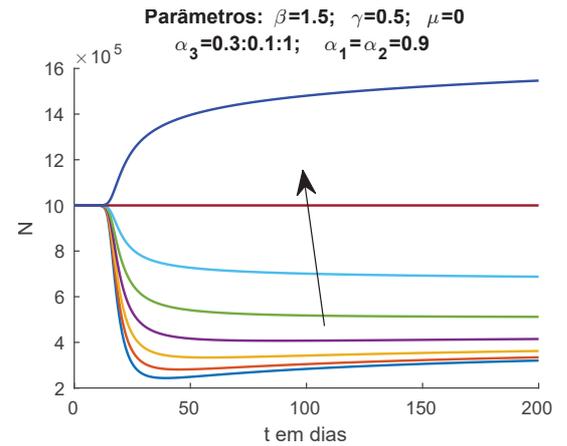


Figura 5.28 – Efeito de  $\alpha_3$  em  $S$ .

Figura 5.29 – Efeito de  $\alpha_3$  em  $R$ .Figura 5.30 – Efeito de  $\alpha_3$  em  $N$ .

Como os compartimentos  $S$  e  $I$  não são modificados, a população total segue a mudança de  $R$ . Além disso, para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  temos a população constante, como verificado na Equação (3.13). Após essa análise, a próxima Subseção tratará do caso onde as ordens são iguais em todos os compartimentos, o que permite o equilíbrio da população.

### 5.3.2 Ordens iguais

Agora, fixamos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  e consideramos o modelo completo, com dinâmica vital:

$${}^C D_{0+}^\alpha S(t) = \mu N - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t), \quad (5.33)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha I(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t), \quad (5.34)$$

$${}^C D_{0+}^\alpha R(t) = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (5.35)$$

Novamente, por generalidade, não elevamos os parâmetros a  $\alpha$ . Primeiramente, estudamos o efeito da variação de  $\alpha$  em cada compartimento, nas Figuras 5.31-5.33.

- (Efeito de  $\alpha$  nos compartimentos) Observamos que, quanto maior o  $\alpha$ , isto é, quanto menor o efeito memória, maior e mais rápido ocorre o pico da infecção. Os suscetíveis diminuem mais rápido conforme  $\alpha$  cresce, assim como os removidos aumentam mais rapidamente. É importante notar que diminuir o  $\alpha$  aumenta o efeito de cauda pesada na distribuição dos infecciosos.
- (Efeito de  $\alpha$  no equilíbrio) A Figura 5.34 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 3.2 para diferentes ordens. Assim, as trajetórias compartilham o mesmo equilíbrio, sendo a trajetória para  $\alpha = 1$  a mais externa. Observamos também que a “velocidade” da trajetória diminui conforme  $\alpha$ , ou seja, as trajetórias para  $\alpha$  pequeno demoram a se aproximar do ponto de equilíbrio. O tempo máximo utilizado foi  $T = 1000$ . Como antes, os pontos azuis ressaltam o pico do compartimento  $I$  para cada trajetória.

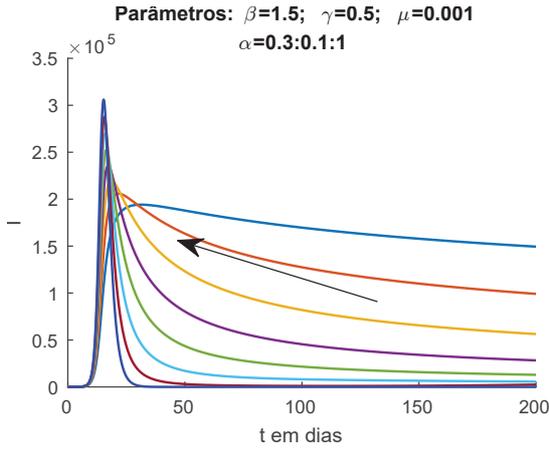


Figura 5.31 – Efeito de  $\alpha$  em  $I$ .

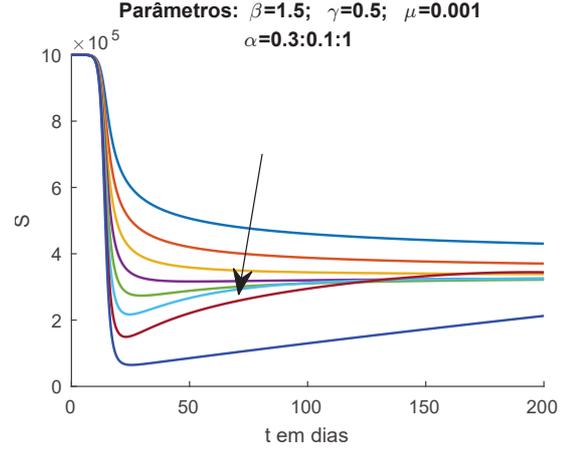


Figura 5.32 – Efeito de  $\alpha$  em  $S$ .

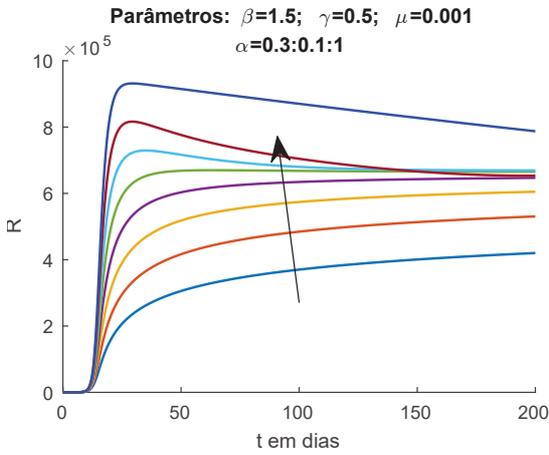


Figura 5.33 – Efeito de  $\alpha$  em  $R$ .

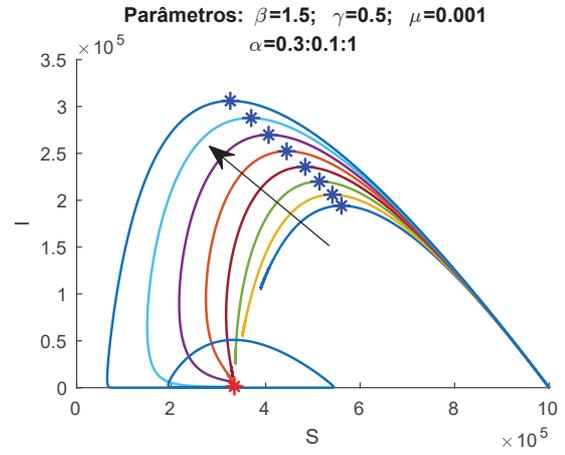
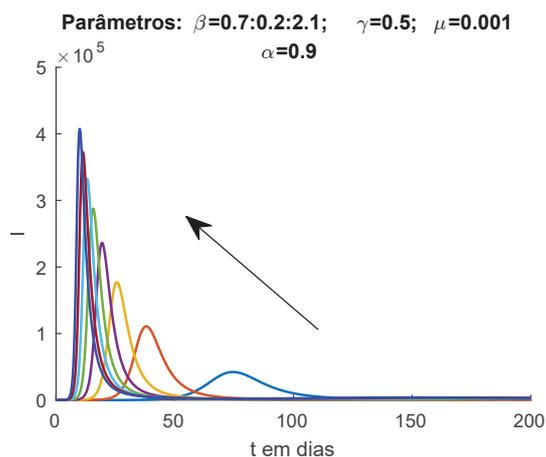
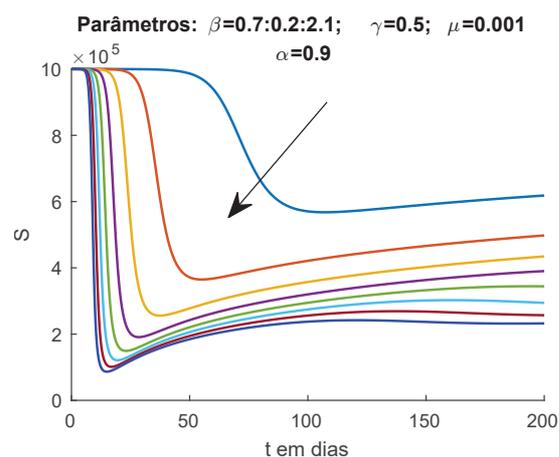
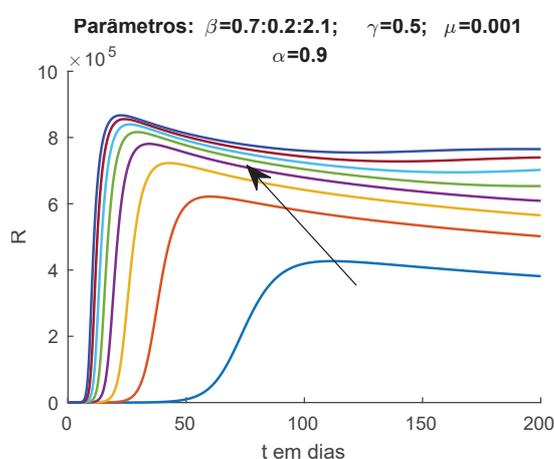
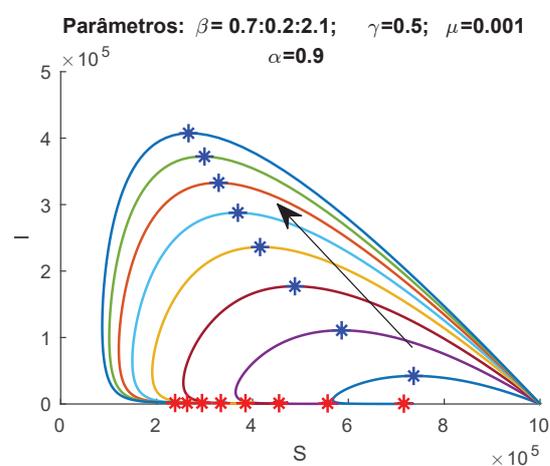


Figura 5.34 – Efeito de  $\alpha$  -  $(S, I)$ .

Em seguida, estudamos o efeito da variação do parâmetro  $\beta$  em cada compartimento, variando de 0.7 a 2.1.

- (Efeito de  $\beta$  nos compartimentos) Observando as Figuras 5.35-5.37, notamos que o aumento do  $\beta$  faz com que o pico ocorra mais cedo e seja maior, porém mais agudo. Também aumenta a velocidade dos suscetíveis infecciosos e a onda do compartimento  $R$ . Todo o modelo fica mais rápido conforme  $\beta$  aumenta, o que faz sentido, pois, no modelo clássico, o parâmetro  $\beta$  se relaciona à infectividade.
- (Efeito de  $\beta$  no equilíbrio) A Figura 5.38 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 3.2 para diferentes parâmetros  $\beta$ . Como o equilíbrio depende de  $\beta$ , ele muda ao longo das simulações, sendo a trajetória para  $\beta = 2.1$  a mais externa. Ela corresponde ao maior pico. Novamente, o tempo máximo utilizado foi  $T = 1000$ .

Figura 5.35 – Efeito de  $\beta$  em  $I$ .Figura 5.36 – Efeito de  $\beta$  em  $S$ .Figura 5.37 – Efeito de  $\beta$  em  $R$ .Figura 5.38 – Efeito de  $\beta$  -  $(S, I)$ .

Adiante, estudamos o efeito da variação do parâmetro  $\gamma$  em cada compartimento, variando de 0.1 a 0.8.

- (Efeito de  $\gamma$  nos compartimentos) Observando as Figuras 5.39-5.41, notamos que o aumento do  $\gamma$  faz com que o pico seja menor e mais lento, assim como diminui a velocidade dos suscetíveis infecciosos e a onda do compartimento  $R$ . Assim, a epidemia torna-se menos expressiva conforme  $\gamma$  aumenta, o que faz sentido, pois, no modelo clássico, o parâmetro  $\gamma$  se relaciona à recuperação/remoção.
- (Efeito de  $\gamma$  no equilíbrio) A Figura 5.42 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 3.2 para diferentes parâmetros  $\gamma$ . Como o equilíbrio depende de  $\gamma$ , ele muda ao longo das simulações, sendo a trajetória para  $\gamma = 0.8$  a mais interna. Ela corresponde ao menor pico. O tempo máximo utilizado, mais uma vez, foi  $T = 1000$ .

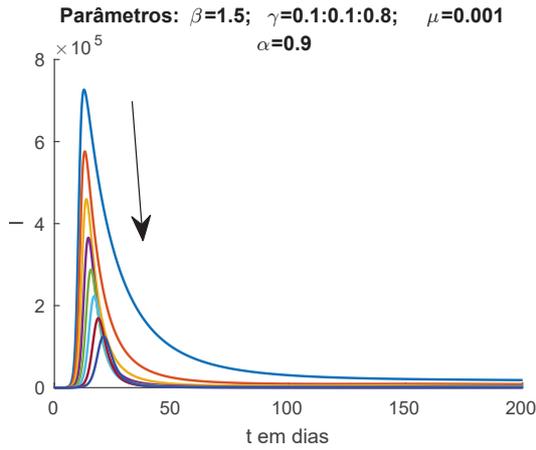


Figura 5.39 – Efeito de  $\gamma$  em  $I$ .

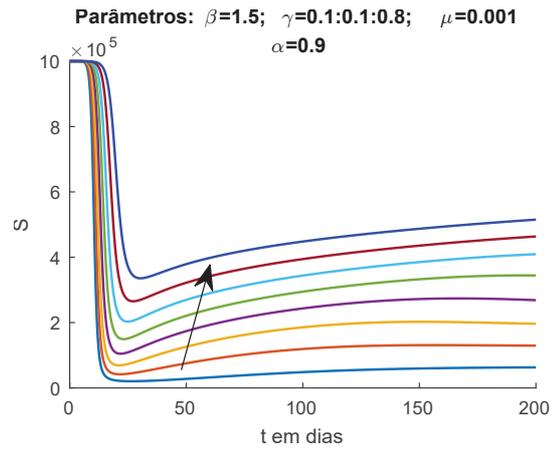


Figura 5.40 – Efeito de  $\gamma$  em  $S$ .

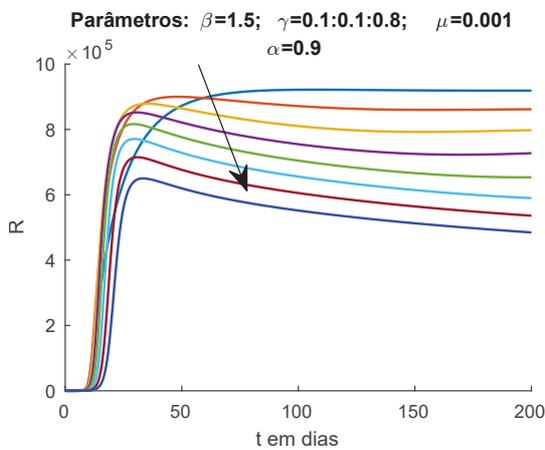


Figura 5.41 – Efeito de  $\gamma$  em  $R$ .

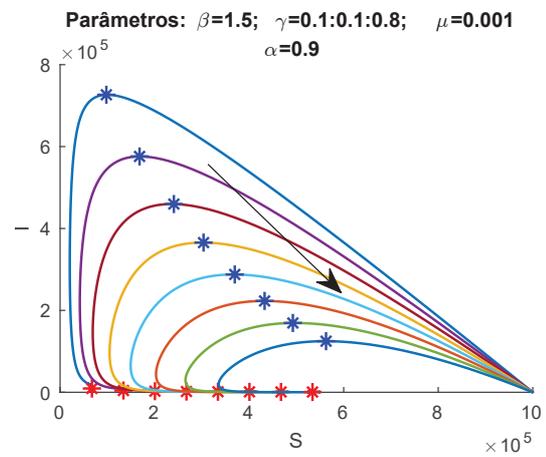
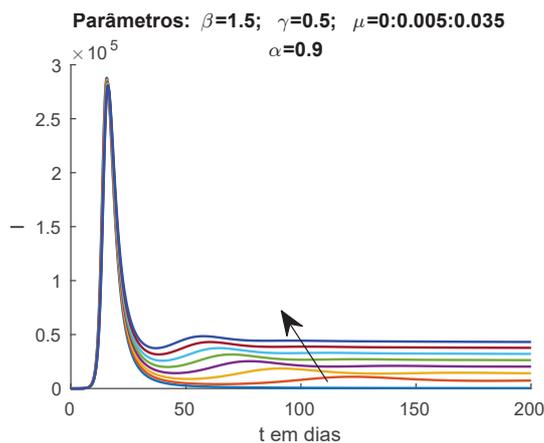
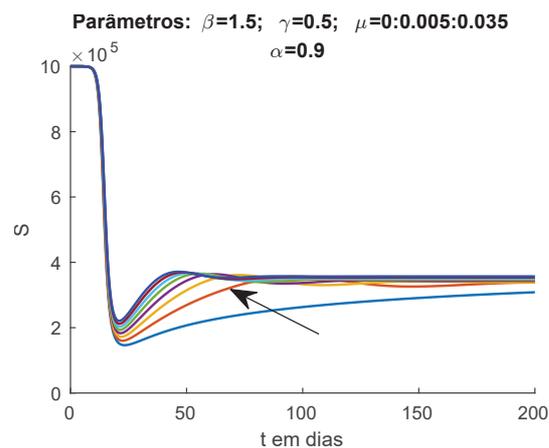
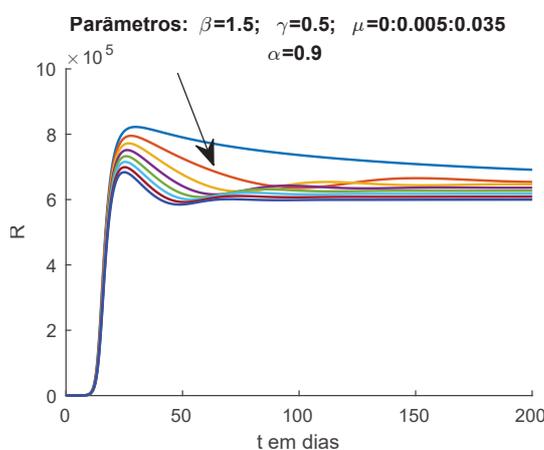
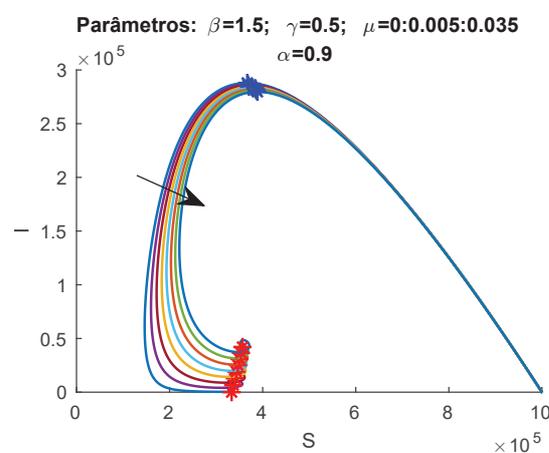


Figura 5.42 – Efeito de  $\gamma$  -  $(S, I)$ .

Finalmente, estudamos o efeito da variação do parâmetro  $\mu$  em cada compartimento, variando de 0 a 0.035.

- (Efeito de  $\mu$  nos compartimentos) Observando as Figuras 5.43-5.45, notamos que o aumento do  $\mu$  faz com que a cauda direita do compartimento  $I$  se torne mais densa, assim como aumenta a velocidade na qual os compartimentos  $S$  e  $R$  se estabilizam após o pico.
- (Efeito de  $\mu$  no equilíbrio) A Figura 5.42 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 3.2 para diferentes parâmetros  $\mu$ . Como o equilíbrio depende de  $\mu$ , ele muda ao longo das simulações, sendo a trajetória para  $\mu = 0.035$  a mais interna. As trajetórias são muito próximas até o pico, mas aumentar o  $\mu$ , como vimos, aumenta o número de infecciosos no equilíbrio.

Figura 5.43 – Efeito de  $\mu$  em  $I$ .Figura 5.44 – Efeito de  $\mu$  em  $S$ .Figura 5.45 – Efeito de  $\mu$  em  $R$ .Figura 5.46 – Efeito de  $\mu$  -  $(S, I)$ .

Finalizamos a Seção lembrando que nosso objetivo é um entendimento mais aprofundado do modelo e do efeito individual das ordens e parâmetros. Como o modelo possui comportamentos que não conseguimos enquadrar na construção significativa, o interesse foi maior do ponto de vista do código e das equações, como um objeto matemático. Porém, acreditamos, ainda, que o entendimento desses efeitos pode favorecer a utilização desse tipo de modelo em situações reais nos quais eles possam ter sentido físico mais claro.

## 5.4 EXEMPLOS DO CAPÍTULO 4

Nesta Seção, ilustramos o modelo construído no Capítulo 4, onde as derivadas de ordem arbitrária surgem a partir de distribuições de Mittag-Leffler. Assim, inicialmente, mostramos alguns exemplos da função de Mittag-Leffler.

### 5.4.1 Exemplos da função de Mittag-Leffler de 1, 2 e 3 parâmetros

Ilustramos a função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z)$  dada na Definição 2.7 através de um código MATLAB proposto em [29]. Inicialmente, consideramos  $\beta = \rho = 1$ , o que equivale a estudarmos a clássica função de Mittag-Leffler. Nas Figuras 5.47-5.49,

exibimos o comportamento da função  $E_\alpha(-z)$  para  $\alpha$  entre 0.1 e 3. Observamos que, para  $\alpha = 0.1 : 0.1 : 1$ , a função é completamente monotônica, como dado no Teorema 2.2. Já para  $\alpha > 1$ , a função oscila, crescendo em amplitude e em comprimento conforme  $\alpha$  cresce. Agora, na Figura 5.50 analisamos o argumento positivo, ou seja,  $E_\alpha(z)$ . Como a função Gama é crescente para argumentos maiores do que 1, segue diretamente da definição que o valor de  $E_\alpha(z)$  diminui conforme  $\alpha$  cresce.

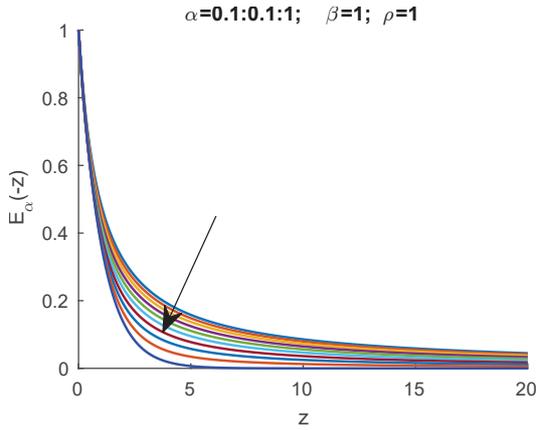


Figura 5.47 – Efeito de  $\alpha \leq 1$  em  $E_\alpha(-z)$ .

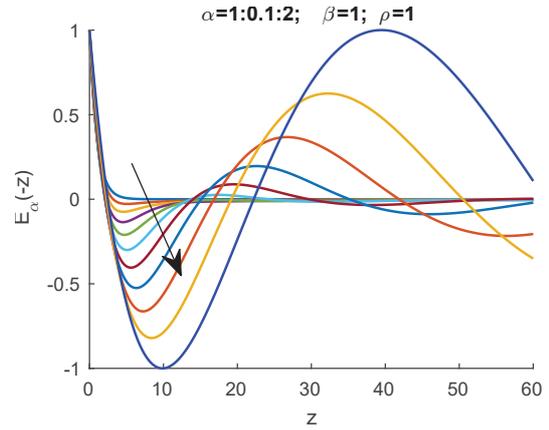


Figura 5.48 – Efeito de  $\alpha \geq 1$  em  $E_\alpha(-z)$ .

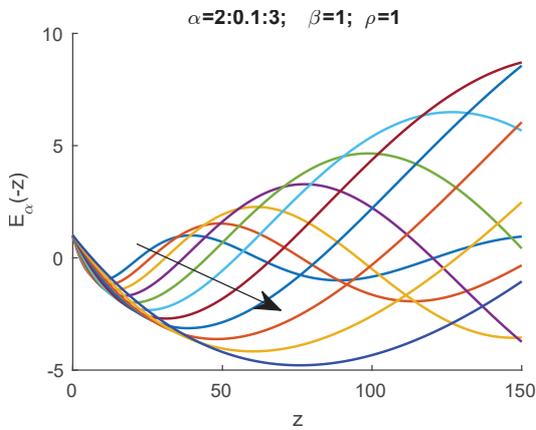


Figura 5.49 – Efeito de  $\alpha \geq 2$  em  $E_\alpha(-z)$ .

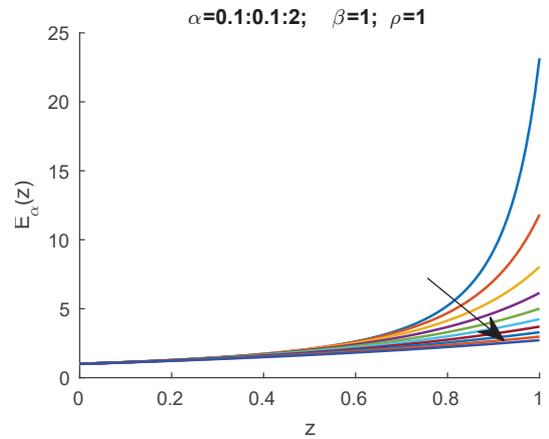


Figura 5.50 – Efeito de  $\alpha$  em  $E_\alpha(z)$ .

Na Figura 5.51, exibimos o comportamento de  $E_{\alpha,\beta}(-z)$  obtido ao modificarmos o parâmetro  $\beta$ . Observamos, novamente, conforme o Teorema 2.2, que, se  $\alpha \leq 1$  e  $\beta \geq \alpha$ , a função possui a propriedade da monotonicidade completa. Já na Figura 5.52, exibimos o comportamento para argumento positivo. Logo após, na Figura 5.53, exibimos o efeito do parâmetro  $\rho$  na função de Mittag-Leffler de três parâmetros. Vale a observação de que, no código que utilizamos, o autor ressalta, para a função de três parâmetros, que  $\alpha$  deve ser um escalar real tal que  $0 < \alpha < 1$  e os argumentos  $z$  devem satisfazer  $|Arg(z)| > \alpha\pi$ .

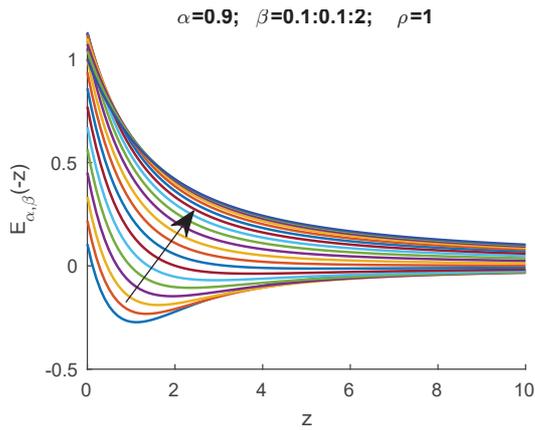


Figura 5.51 – Efeito de  $\beta$  em  $E_{\alpha,\beta}(-z)$ .

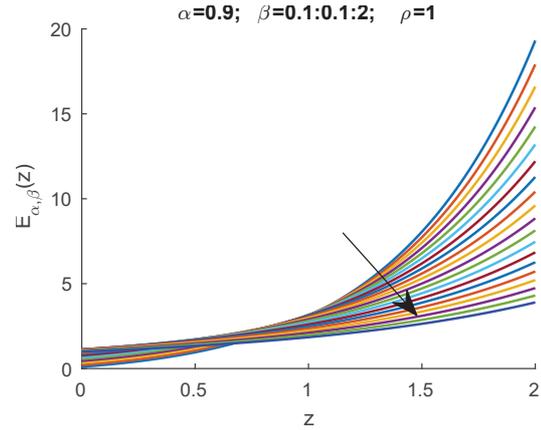


Figura 5.52 – Efeito de  $\beta$  em  $E_{\alpha,\beta}(z)$ .

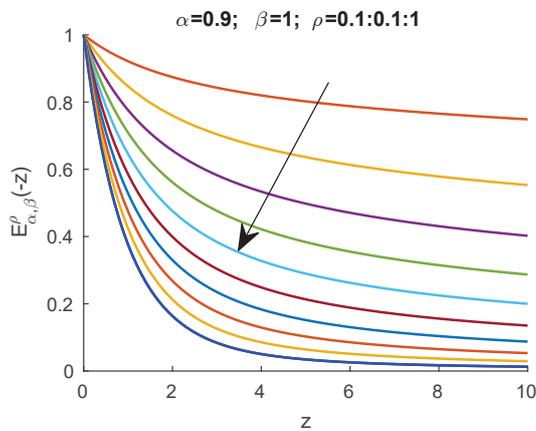


Figura 5.53 – Efeito de  $\rho$  em  $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-z)$ .

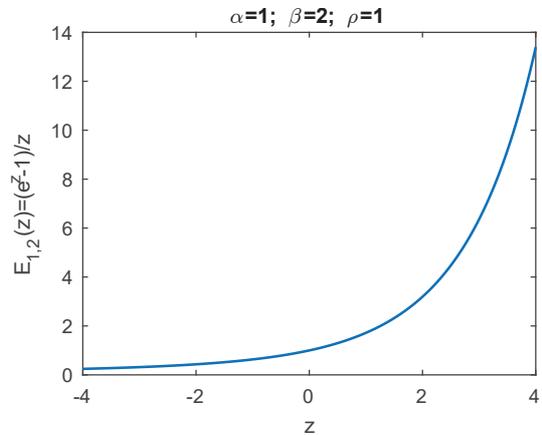


Figura 5.54 –  $E_{1,2}(z) = (e^z - 1)/z$ .

Prosseguindo, na Figura 5.54, exibimos o caso especial  $E_{1,2}(z) = (e^z - 1)/z$ , que pode ser consultado em [22]. Finalmente, nas Figuras 5.55-5.58 exibimos situações especiais que permitem que a função de Mittag-Leffler generalize as funções seno e cosseno trigonométricos e hiperbólicos [7]. A saber,  $E_2(-z^2) = \cos(z)$  e  $E_2(z^2) = \cosh(z)$ , enquanto  $zE_{2,2}(-z^2) = \sin(z)$  e  $zE_{2,2}(z^2) = \sinh(z)$ .

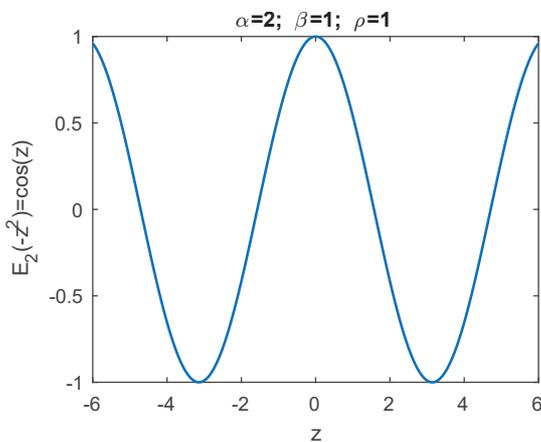


Figura 5.55 –  $E_2(-z^2) = \cos(z)$ .

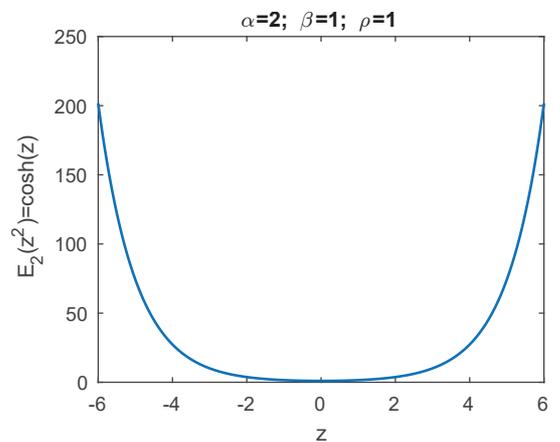


Figura 5.56 –  $E_2(z^2) = \cosh(z)$ .

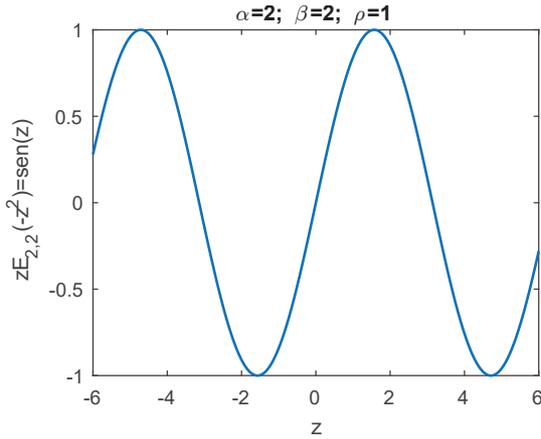


Figura 5.57 –  $zE_{2,2}(-z^2) = \text{sen}(z)$ .

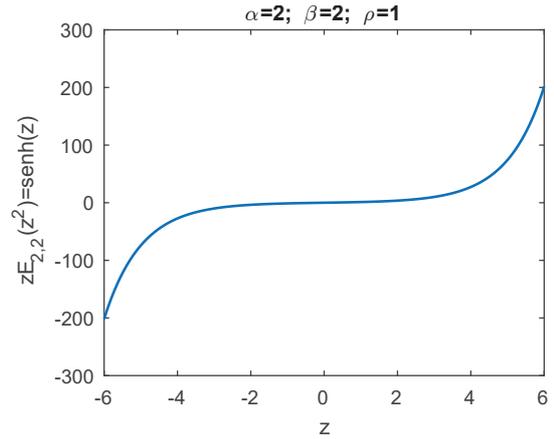


Figura 5.58 –  $zE_{2,2}(z^2) = \text{sinh}(z)$ .

Um maior conhecimento das funções de Mittag-Leffler é uma boa base para entendermos as funções de infectividade intrínseca  $\rho$  e permanência  $\phi$  do modelo construído no Capítulo 4. Como visto, elas foram definidas através de funções de Mittag-Leffler.

#### 5.4.2 Exemplos do modelo do Capítulo 4

Agora, exemplificamos o modelo (4.30)-(4.32) apresentado no Capítulo 4:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S(t), \quad (5.36)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (5.37)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \quad (5.38)$$

Para as Figuras 5.59-5.63, utilizamos uma população  $N = 1000000$ , condições iniciais  $S(0) = N - 1$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e  $dt = 0.1$ . Inicialmente, consideramos  $\omega$  constante. Relembramos que  $d(S(t) + I(t) + R(t))/dt = 0$ , ou seja, a população é constante. Na Figura 5.59 usamos  $\alpha = \beta = 1$  no código proposto, o que equivale ao modelo dos “pais” Kermack e McKendrick. Já na Figura 5.60, observamos que a população se mantém no modelo com ordem arbitrária, mesmo sendo  $\alpha \neq \beta$ .

A constância da população atende às expectativas de termos considerado as taxas de nascimento e morte iguais.

##### 5.4.2.1 Caso limite sem dinâmica vital

Agora, estudamos o caso limite onde  $\gamma(t) \equiv 0$ . Como vimos, no modelo clássico, os compartimentos  $S$  e  $R$  devem ser monótonos se desconsiderarmos essa dinâmica. Porém, nos modelos fracionários *ad hoc*, isso não pode ser garantido.

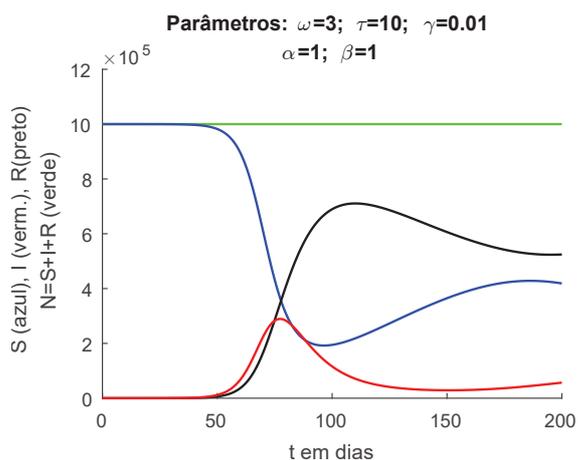
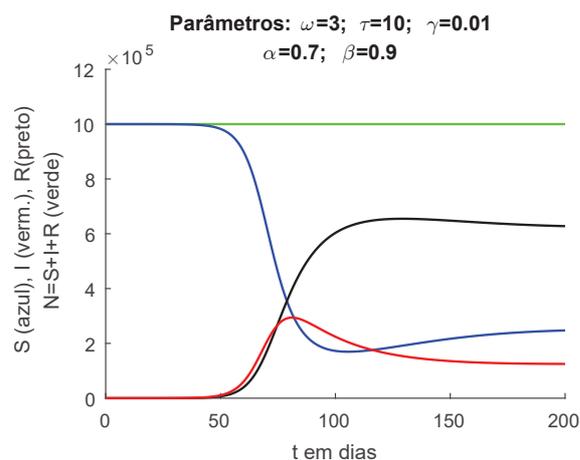
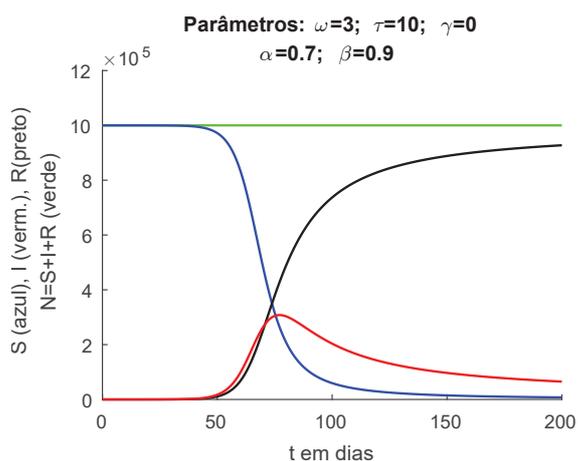
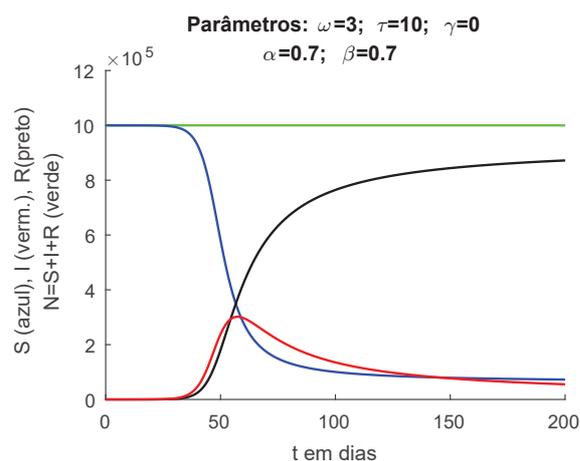


Figura 5.59 – Modelo SIR Clássico.

Figura 5.60 – População ct. para  $\alpha \neq \beta$ .

- (Monotonicidade) Nas Figuras 5.61-5.62, observamos que a monotonicidade se mantém no modelo com ordens arbitrárias, conforme observado na Proposição 4.2. Assim, as oscilações que surgem no modelo completo são devidas exclusivamente à dinâmica vital.

Figura 5.61 – Monotonicidade de  $S$  e  $R$ .Figura 5.62 – Modelo com  $\alpha = \beta$ .

Como discutido no Capítulo 4, o equilíbrio limite tem um comportamento distinto se  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha \neq \beta$ .

- (Equilíbrio) Para  $\alpha = \beta$ , como nas Figuras 5.62-5.63, o equilíbrio endêmico é o mesmo do caso inteiro (Teorema 4.1). Ressaltamos a observação de que, para  $\alpha = \beta$ , as trajetórias são idênticas, a menos da velocidade na qual são percorridas à medida que se varia o valor de  $\alpha$ . O tempo máximo foi de  $T = 2000$  e a Figura 5.63 indica as trajetórias para  $\alpha = \beta = 0.2 : 0.1 : 1$ . Para  $\alpha = \beta$  pequeno, a trajetória, percorrida em velocidade muito lenta, não se aproxima do equilíbrio nesse tempo, mas continua seguindo o mesmo perfil.

Já o modelo com  $\alpha \neq \beta$  não possui o mesmo ponto de equilíbrio endêmico do caso inteiro, como podemos verificar na Figura 5.64. Na verdade, para  $\alpha \neq \beta$ , as simulações parecem mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .

É interessante notar que o equilíbrio  $(S^*, I^*, R^*) = (0, 0, N)$  pode ser obtido da

Equação (4.73) se fizermos  $\alpha < \beta$  e  $\gamma = 0$ . Porém, devemos lembrar que a Equação (4.73) foi obtida considerando-se  $\gamma > 0$ .

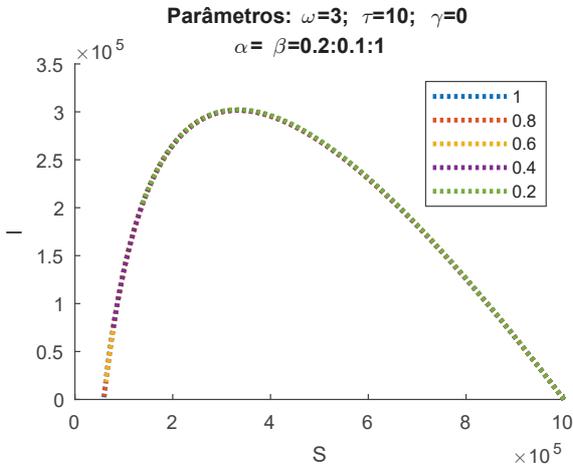


Figura 5.63 – Trajetórias para  $\alpha = \beta$ .

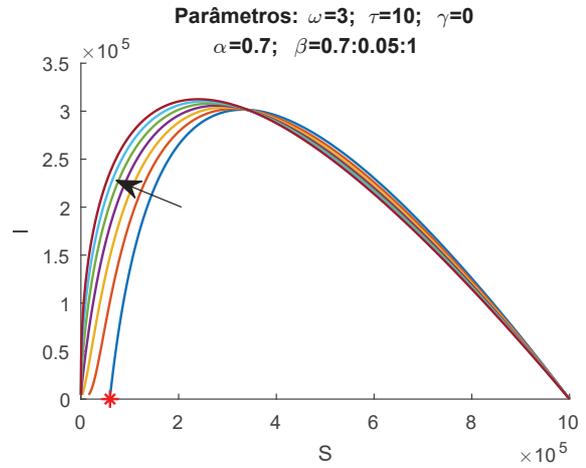


Figura 5.64 – Trajetórias para  $\gamma \equiv 0$ .

Na próxima Subseção, o modelo será considerado com dinâmica vital  $\gamma(t) > 0$ .

5.4.2.2 *Modelo com dinâmica vital*

Agora, consideramos a dinâmica vital. Nas Figuras 5.65-5.66 utilizamos as condições iniciais  $I(0) = 1, S(0) = N - 1, R(0) = 0$  e  $I(0) = 0.1N, S(0) = 0.5N, R(0) = 0.4N$ .

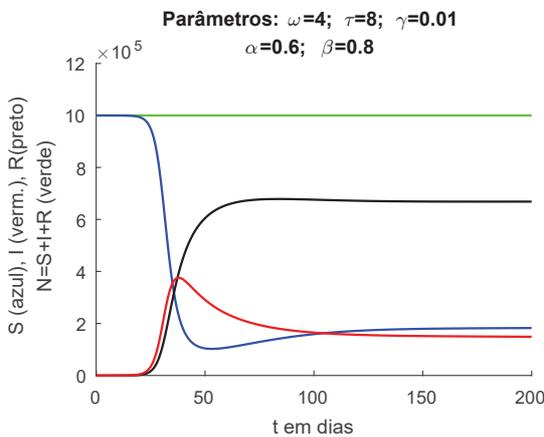


Figura 5.65 – C.I.:  $(N - 1, 1, 0)$ .

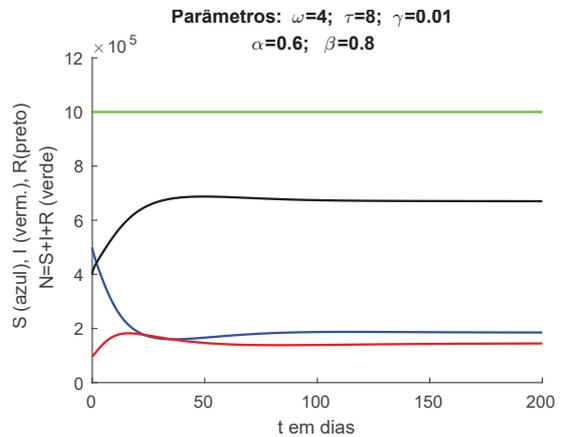


Figura 5.66 – C.I.:  $(0.5, 0.1, 0.4)N$ .

- (Equilíbrios) Na Figura 5.67, ilustramos as respectivas trajetórias. Elas possuem perfil semelhante e o mesmo ponto de equilíbrio, pois a Equação (4.73) independe da condição inicial. Embora tenhamos demonstrado, no caso do equilíbrio endêmico, apenas a estabilidade local para  $\beta = 1$ , reiteramos que o resultado parece valer no caso geral.

Já na Figura 5.68, temos as trajetórias para situações nas quais  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , com as condições iniciais  $(S(0), I(0), R(0)) = (N - 3, 2, 1)$  e  $(S(0), I(0), R(0)) = (N - 1, 1, 0)$ . Observamos a estabilidade assintótica do equilíbrio livre de doença.

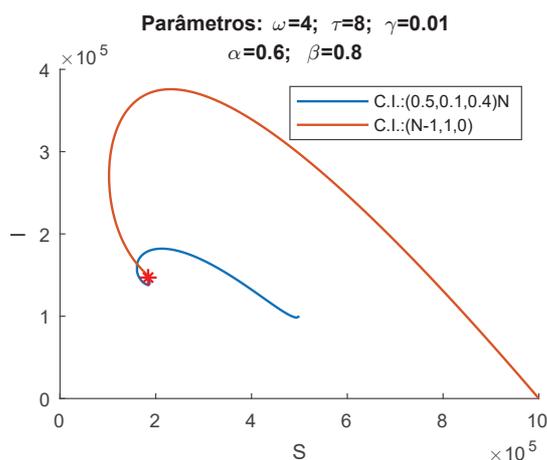


Figura 5.67 – Trajetórias  $\mathfrak{R}_0 > 1$ .

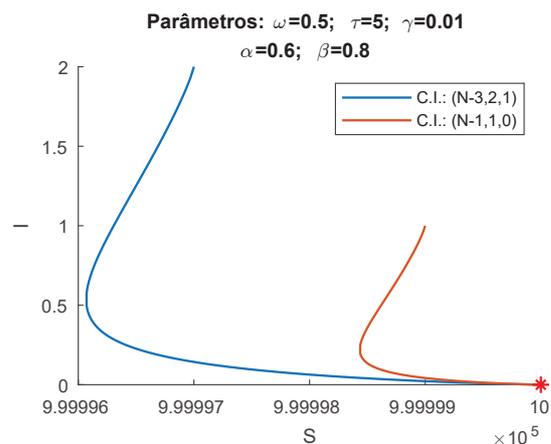


Figura 5.68 – Trajetórias  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .

Finalmente, nas Figuras 5.69-5.70, consideramos  $\omega$  com decaimento exponencial, tal que  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-t/100}$ . A Figura 5.69 exibe o comportamento do modelo para a condição inicial  $(S(0), I(0), R(0)) = (N - 1, 1, 0)$ . Já na Figura 5.70, temos as órbitas para diversas condições iniciais. Como  $\omega^* = 0$ , o único equilíbrio viável é o livre de doença. Assim, a trajetória volta para  $(N, 0, 0)$ , como dado no Capítulo 4.

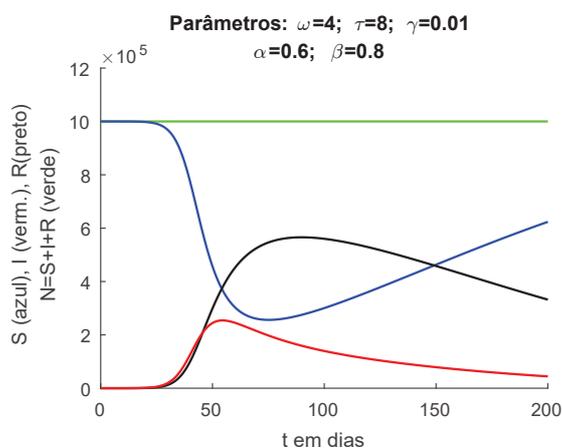


Figura 5.69 – Caso  $\omega^* = 0$ .

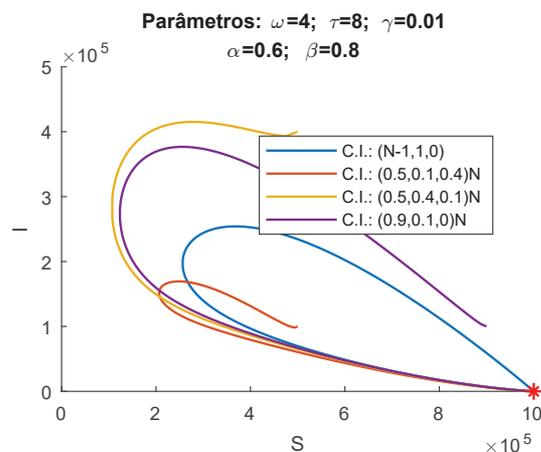


Figura 5.70 – Trajetória com  $\omega^* = 0$ .

A partir desses exemplos gerais, voltamos nossa atenção para as características de não localidade do modelo e, ainda, do comportamento incomum no terminal inferior.

#### 5.4.2.3 Comportamentos incomuns

Na sequência, ilustramos que o modelo do Capítulo 4 também não é local. Consideramos novamente  $N = 1000000$ , condições iniciais  $S(0) = N - 1$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e  $dt = 0.1$ . No tempo  $t = 90$ , a solução numérica fornece  $S(90) = 205890$ ,  $I(90) = 267840$  e  $R(90) = 526270$ . Consideramos agora essa condição inicial e rodamos novamente o modelo.

• (Solução Não Local) A Figura 5.71 ilustra a mudança da solução, onde o tracejado corresponde à solução a partir do tempo  $t = 90$ . Na Figura 5.72, temos as trajetórias

equivalentes para um tempo máximo  $T = 3000$ . Novamente, o equilíbrio é mantido.

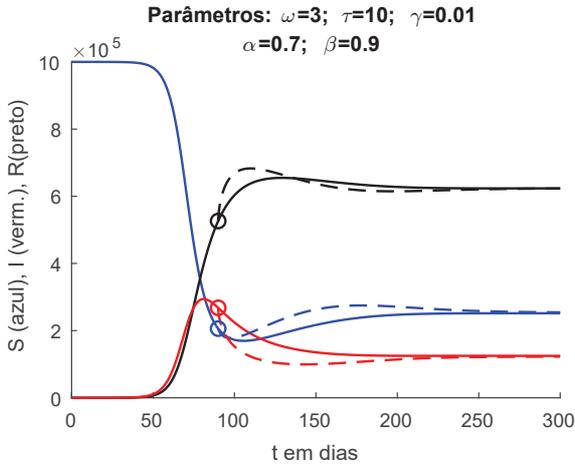


Figura 5.71 – Mudança na solução.

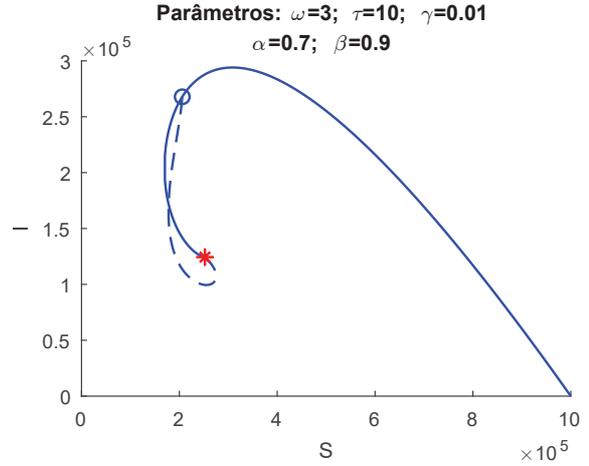


Figura 5.72 – Mudança na trajetória.

Finalmente, exibimos uma característica incomum observada nos instantes iniciais das simulações do modelo (4.30)-(4.32). Dado o comportamento assintótico das derivadas de Riemann-Liouville de ordem arbitrária próximo ao terminal inferior [15],

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) \approx \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad (t \rightarrow a+), \quad (5.39)$$

se  $\beta > \alpha$  então  $D_{a+}^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t})$  vai a 0 mais lentamente que  $D_{a+}^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t})$ .

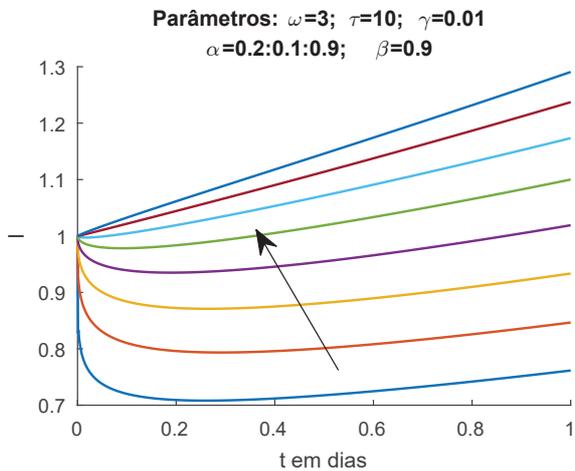


Figura 5.73 –  $I$  (terminal inferior)

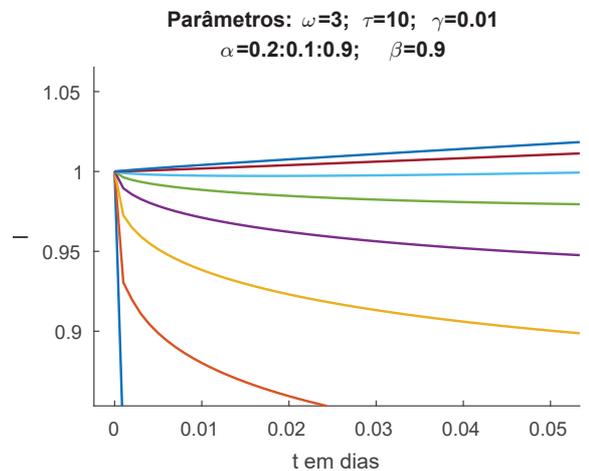


Figura 5.74 – ZOOM terminal inferior.

Assim, temos  $dI/dt < 0$  para  $t$  suficientemente pequeno, como ilustrado nas Figuras 5.73-5.74. Para essa figura, utilizamos  $dt = 10^{-3}$ . Quando  $\alpha = \beta$ , esse comportamento não é observado se  $\mathfrak{R}_0 > 1$ . Ressaltamos, ainda, que a solução do modelo não é  $C^1$ , pois não é derivável na origem.

Aqui, finalizamos os exemplos que tiveram por objetivo experimentar a teoria discutida no Capítulo 4, fortalecendo nossa intuição sobre o modelo e fornecendo novos *insights*. Na próxima Seção, será realizada uma análise de parâmetros do mesmo modelo.

## 5.5 ANÁLISE DE PARÂMETROS DO MODELO DISCUTIDO NO CAPÍTULO 4

Agora, realizamos análise semelhante no modelo dado em (4.30)-(4.32). Como na maior parte das aplicações, consideramos  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e, portanto,  $\theta(t, 0) = e^{-\gamma t}$ . Inicialmente, consideramos  $\omega(t) \equiv \omega$ . Depois, estudamos  $\omega(t)$  com decaimento exponencial e oscilatório. Por ora, consideramos então o modelo

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma N - \frac{\omega S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma S(t), \quad (5.40)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega S(t)e^{-\gamma t}}{N\tau^\beta} D^{1-\beta}(I(t)e^{\gamma t}) - \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma I(t), \quad (5.41)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{e^{-\gamma t}}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha}(I(t)e^{\gamma t}) - \gamma I(t) - \gamma R(t), \quad (5.42)$$

com condições iniciais  $N = 1000000$ ,  $I(0) = 1$ ,  $S(0) = N - 1$  e  $R(0) = 0$ . Também analisamos a influências das ordens  $\alpha, \beta$  e do parâmetro  $\tau$  nas funções de permanência no compartimento infeccioso (independente da dinâmica vital) e na função de infectividade intrínseca, respectivamente dadas por

$$\phi(t) = E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right), \quad (5.43)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{\phi(t)} \frac{t^{\beta-1}}{\tau^\beta} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right). \quad (5.44)$$

O passo de tempo utilizado foi  $dt = 0.1$ . Observamos que, para  $\beta < 1$ , temos  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) = \infty$ . Assim, iniciamos o cálculo de  $\rho$  em  $t = 0.5$ .

- (Efeito de  $\alpha$  nas funções  $\phi$  e  $\rho$ ) A Figura 5.75 nos mostra que, quanto menor  $\alpha$ , mais pesada é a cauda da função  $\phi$  de permanência no compartimento infeccioso. Além disso, pela Figura 5.76, quanto maior  $\alpha$ , menor a função de infectividade intrínseca ao longo do tempo.

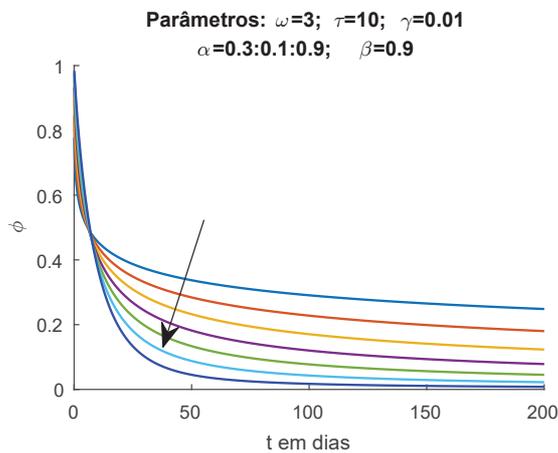


Figura 5.75 – Efeito de  $\alpha$  em  $\phi$ .

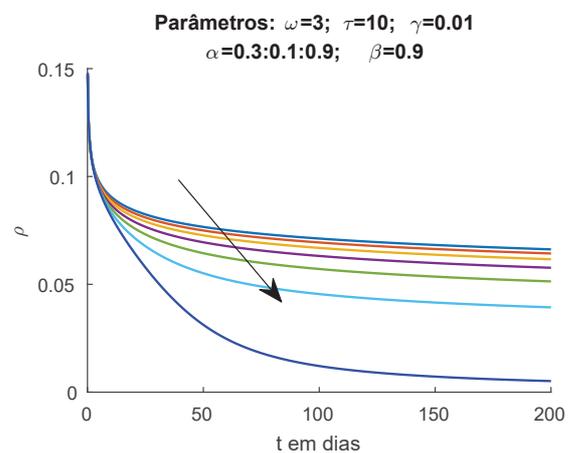


Figura 5.76 – Efeito de  $\alpha$  em  $\rho$ .

- (Efeito de  $\alpha$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.77-5.79, observamos que, quanto maior o  $\alpha$ , menor e mais cedo ocorre o pico da infecção. A quantidade de suscetíveis se restabelece mais cedo conforme  $\alpha$  cresce e a onda dos removidos ocorre em um tempo menor. Diminuir o  $\alpha$  aumenta a assimetria na distribuição dos infectados, como reflexo do efeito de  $\alpha$  na função  $\phi$ , e aumenta o pico, como reflexo do efeito de  $\alpha$  em  $\rho$ .
- (Efeito de  $\alpha$  no equilíbrio) A Figura 5.80 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 para diferentes ordens  $\alpha$ . O equilíbrio depende de  $\alpha$  e a trajetória para  $\alpha = \beta = 0.9$  é a mais interna. Observamos que as trajetórias são muito semelhantes no início, mas diferem ao longo do tempo. O tempo máximo utilizado foi  $T = 2000$ .

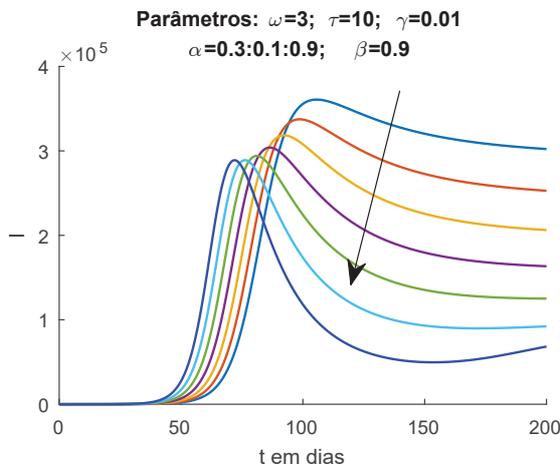


Figura 5.77 – Efeito de  $\alpha$  em  $I$ .

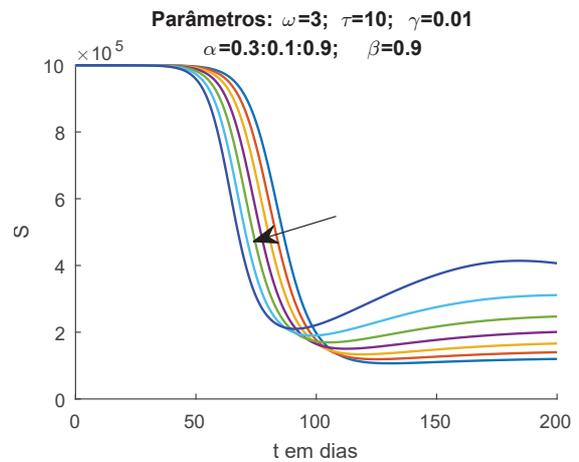


Figura 5.78 – Efeito de  $\alpha$  em  $S$ .

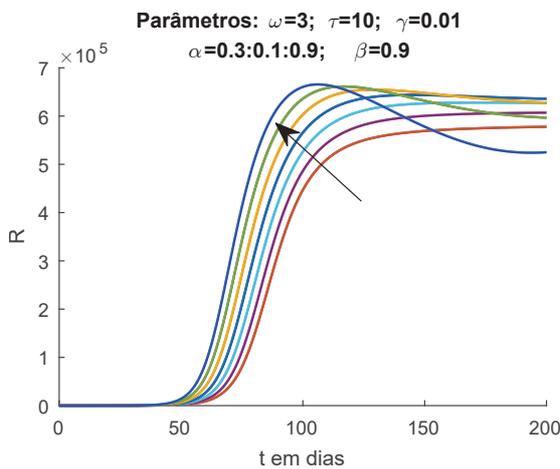


Figura 5.79 – Efeito de  $\alpha$  em  $R$ .

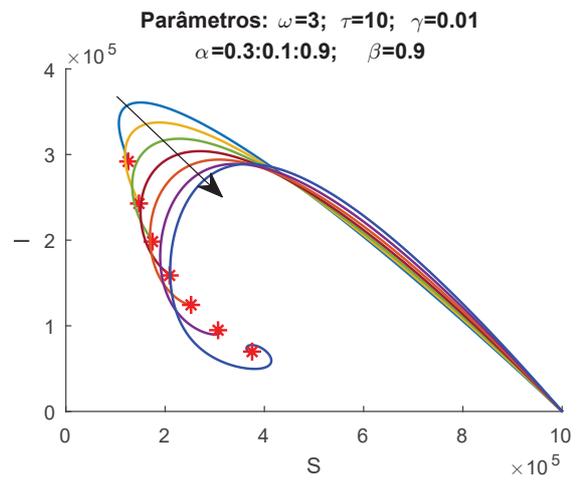
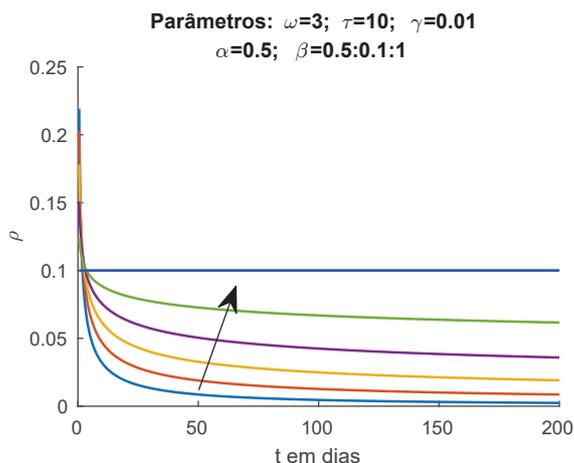
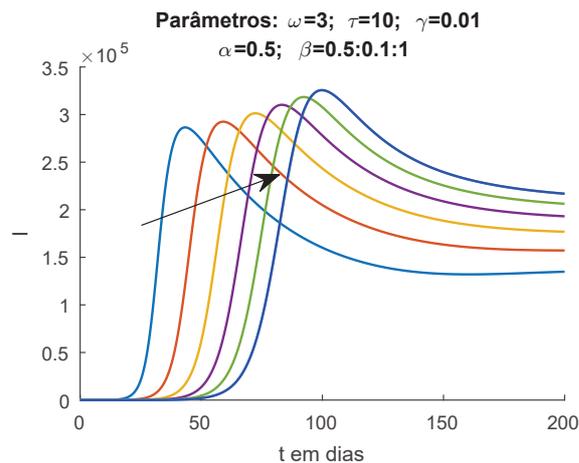


Figura 5.80 – Efeito de  $\alpha$  -  $(S, I)$ .

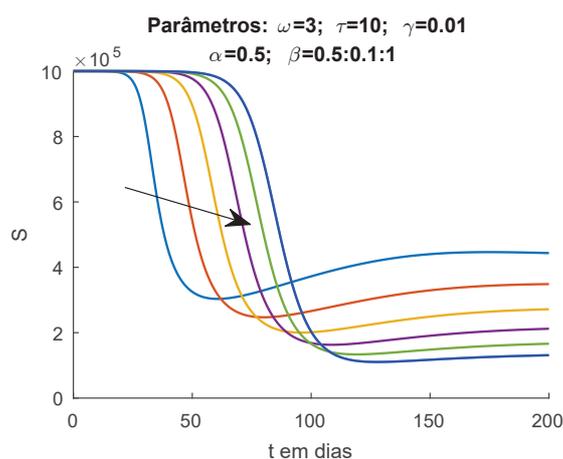
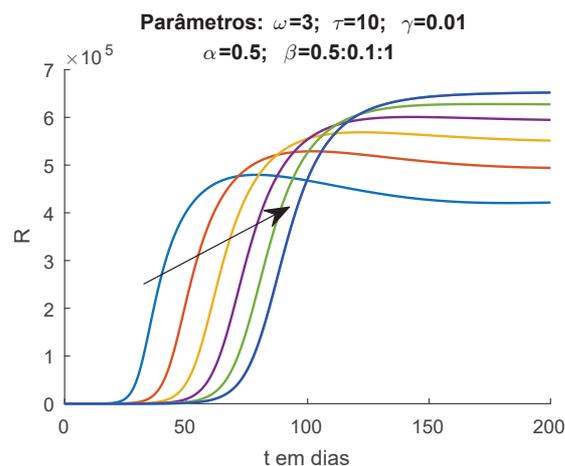
Agora, estudamos o efeito da ordem  $\beta$ , que relaciona-se à infectividade pela Equação (4.27).

- (Efeito de  $\beta$  na função  $\rho$ ) Na Figura 5.81, observamos que aumentar  $\beta$  torna a infectividade intrínseca menor no começo, porém maior conforme o tempo. Para  $\beta = 1$ , a função  $\rho$  é constante, ou seja, a infecção não muda sua transmissibilidade ao longo do tempo, a menos por fatores externos, relacionados a  $\omega$ .

Figura 5.81 – Efeito de  $\beta$  em  $\rho$ .Figura 5.82 – Efeito de  $\beta$  em  $I$ .

- (Efeito de  $\beta$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.82-5.84, observamos que, quanto maior o  $\beta$ , mais o pico da infecção demora a ocorrer e é maior, embora o perfil da onda de infecciosos não mude muito, já que o  $\beta$  não influencia na função  $\phi$  de permanência. A quantidade de suscetíveis diminui conforme  $\beta$  cresce, mas a onda também é retardada. Assim,  $\beta$  crescer aumenta a epidemia, porém em um tempo posterior, reflexo de seu efeito em  $\rho$ .

- (Efeito de  $\beta$  no equilíbrio) A Figura 5.85 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 para diferentes ordens  $\beta$ . O equilíbrio depende de  $\beta$  e a trajetória para  $\alpha = \beta = 0.9$  é a mais externa. Observamos que as trajetórias são muito semelhantes no início, mas diferem ao longo do tempo. Na Figura 5.86, utilizamos um tempo máximo de  $T = 3000$  para observamos o comportamento da trajetória próximo ao ponto de equilíbrio para  $\beta = 0.5$ .

Figura 5.83 – Efeito de  $\beta$  em  $S$ .Figura 5.84 – Efeito de  $\beta$  em  $R$ .

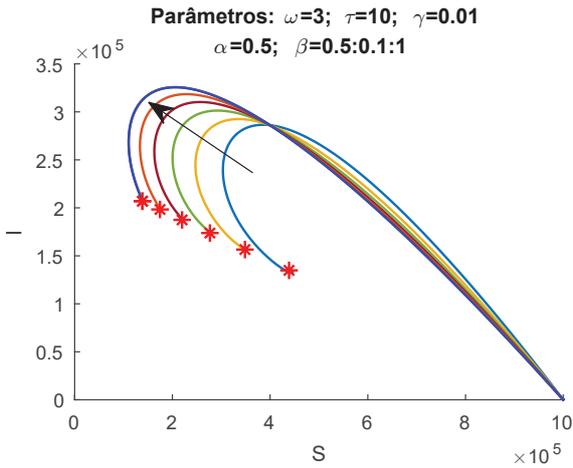


Figura 5.85 – Efeito de  $\beta$  –  $(S, I)$ .

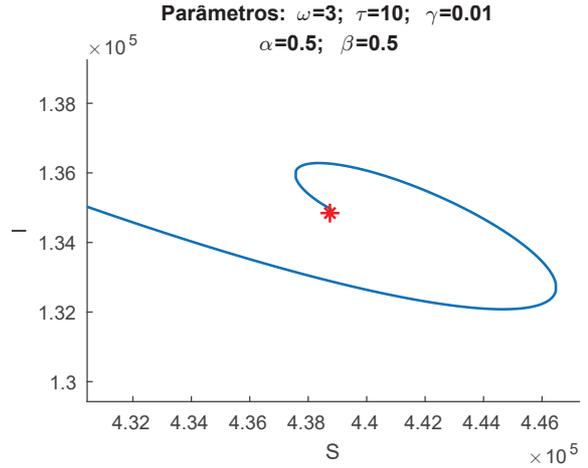


Figura 5.86 –  $(S, I)$  (ZOOM).

Em seguida, analisamos o efeito do parâmetro  $\omega$ , a infectividade extrínseca dada pela Equação (4.3).

- (Efeito de  $\omega$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.87-5.89, observamos que, quanto maior o  $\omega$ , maior e mais cedo ocorre o pico da infecção. A quantidade de suscetíveis diminui mais rápido conforme  $\omega$  cresce e a onda dos removidos ocorre em um tempo menor. Isso era esperado, já que  $\omega$  diz respeito à infectividade extrínseca.
- (Efeito de  $\omega$  no equilíbrio) A Figura 5.90 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 para diferentes escolhas de  $\omega$ . O equilíbrio depende de  $\omega$  e a trajetória para  $\omega = 4.5$  é a mais externa. Como era de se esperar, a epidemia é maior se a infectividade extrínseca  $\omega$  é maior. O tempo máximo utilizado foi  $T = 1000$ .

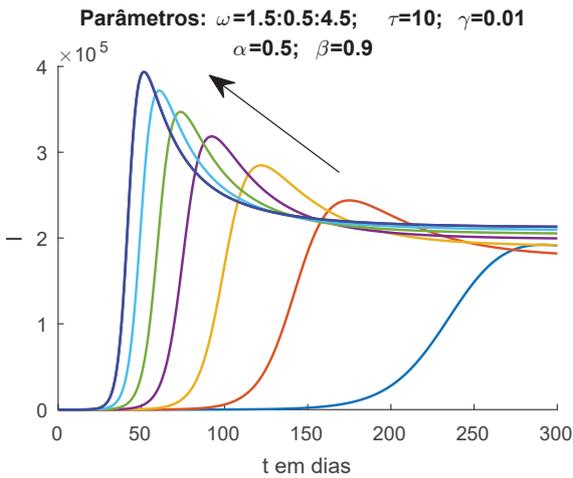


Figura 5.87 – Efeito de  $\omega$  em  $I$ .

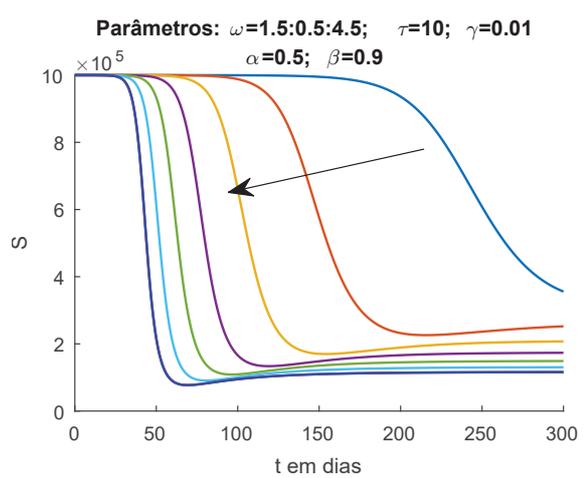
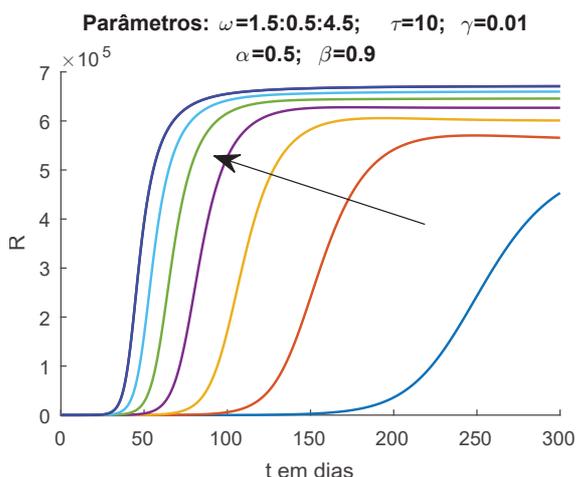
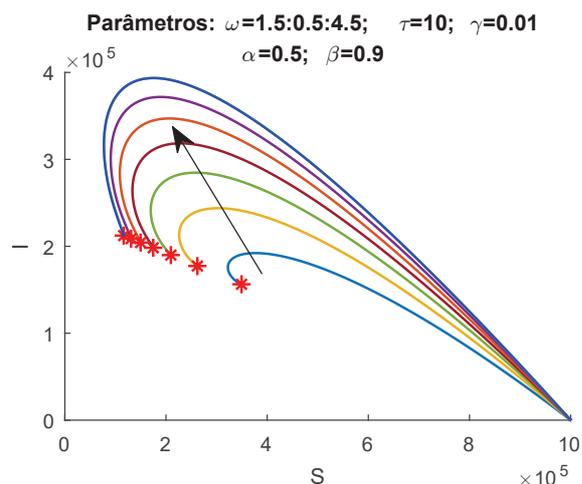
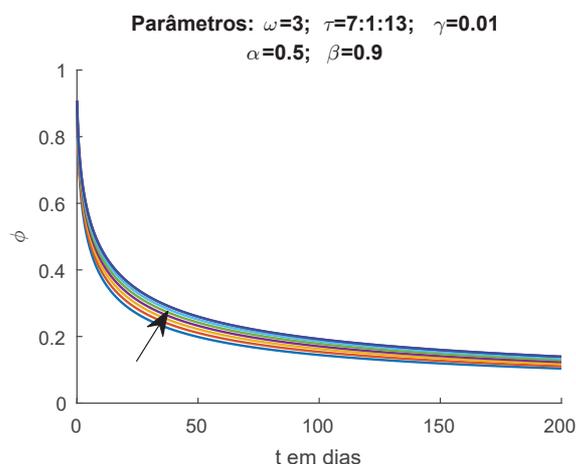
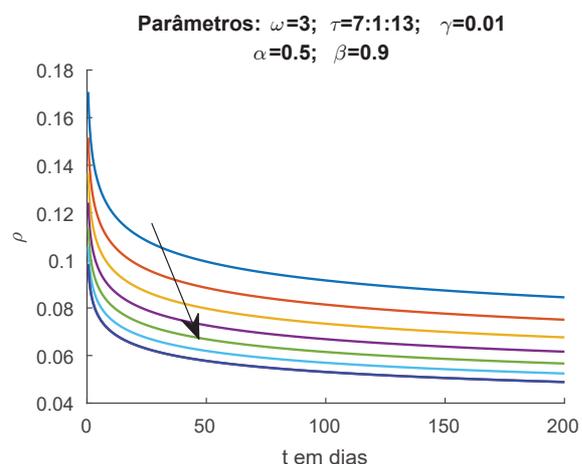


Figura 5.88 – Efeito de  $\omega$  em  $S$ .

Figura 5.89 – Efeito de  $\omega$  em  $R$ .Figura 5.90 – Efeito de  $\omega$  -  $(S, I)$ .

Agora, analisamos o efeito do parâmetro  $\tau$ , a escala utilizada nas funções Mittag-Leffler de infectividade e remoção. Lembramos que, se  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\tau$  é o tempo médio de remoção.

- (Efeito de  $\tau$  nas funções  $\phi$  e  $\rho$ ) A Figura 5.91 ilustra um ligeiro aumento da função de permanência independente da morte natural à medida em que  $\tau$  aumenta. Por outro lado, a Figura 5.92 indica que, ao aumentar  $\tau$ , temos uma diminuição da infectividade intrínseca. É importante lembrar que  $\rho$  é constante para  $\beta = 1$ . Assim, se  $\beta = 1$ , o parâmetro  $\tau$  não influencia na infectividade intrínseca.

Figura 5.91 – Efeito de  $\tau$  em  $\phi$ .Figura 5.92 – Efeito de  $\tau$  em  $\rho$ .

- (Efeito de  $\tau$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.93-5.95, observamos que, conforme  $\tau$  cresce, a epidemia é transladada para frente, apenas com uma ligeira diminuição do pico. Como  $\tau$  é uma escala temporal, esse comportamento de deslocamento temporal é esperado. A ligeira diminuição do pico é devida à diminuição da infectividade intrínseca, enquanto o ligeiro aumento da função de permanência independente da morte natural faz com que o pico se torne um pouco mais grosso.

- (Efeito de  $\tau$  no equilíbrio) A Figura 5.96 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 para diferentes escolhas de  $\tau$ . O equilíbrio depende de  $\tau$  e a trajetória para  $\tau = 7$  é a mais externa. Observamos que as trajetórias são muito semelhantes, pois, como vimos, o parâmetro  $\tau$  tem maior influência no tempo.

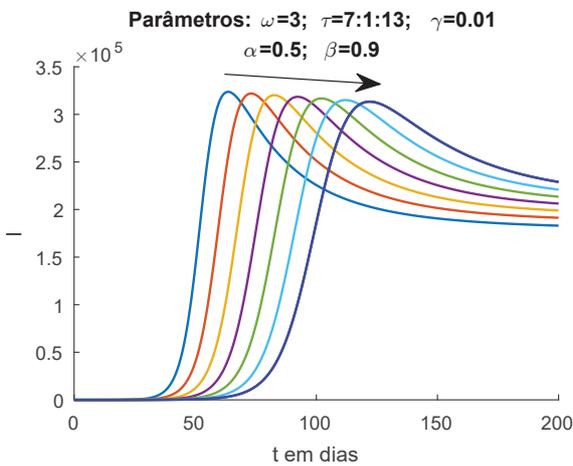


Figura 5.93 – Efeito de  $\tau$  em  $I$ .

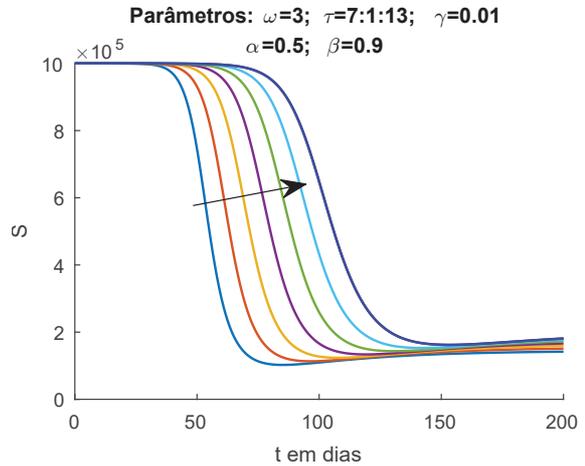


Figura 5.94 – Efeito de  $\tau$  em  $S$ .

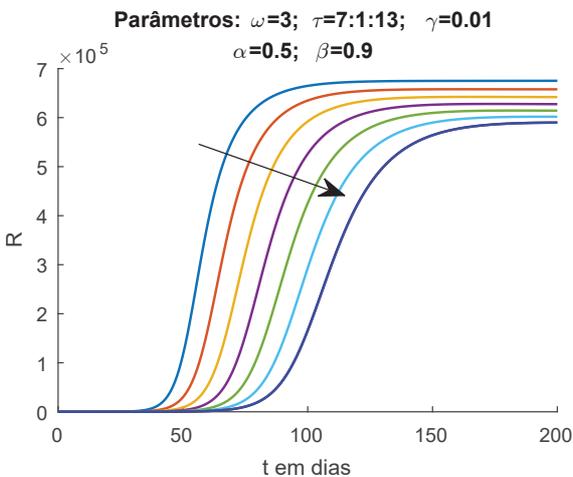


Figura 5.95 – Efeito de  $\tau$  em  $R$ .

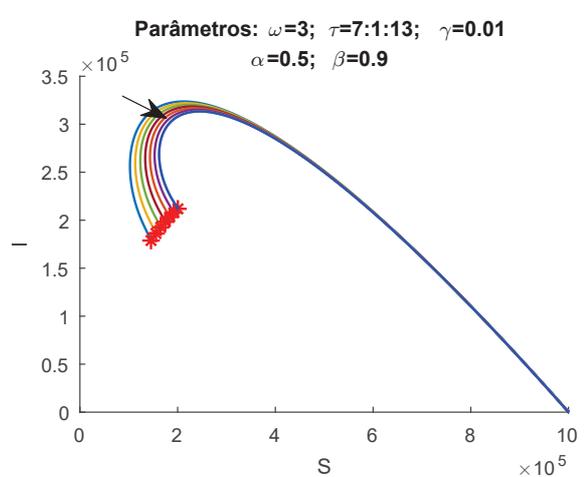
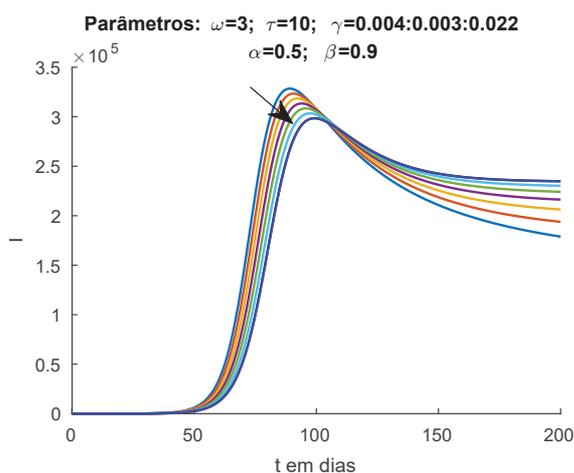
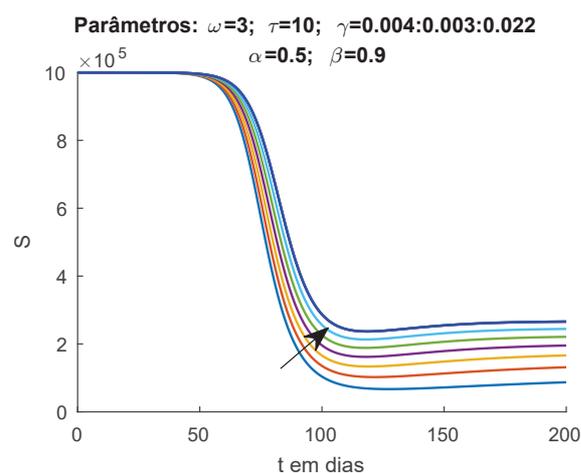
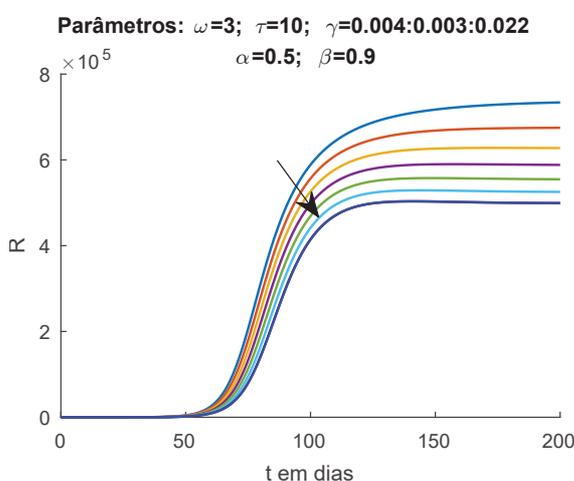
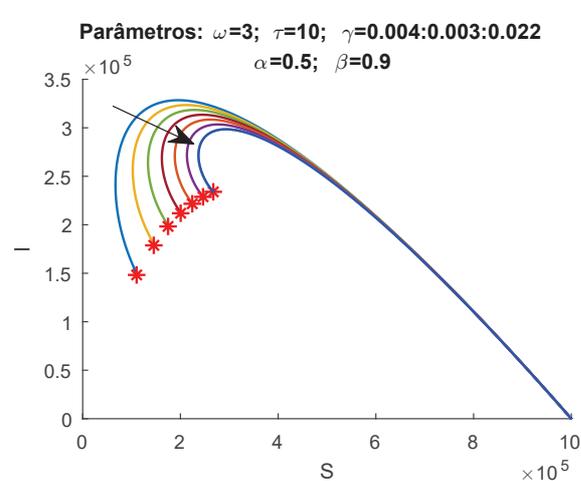


Figura 5.96 – Efeito de  $\tau$  -  $(S, I)$ .

Finalmente, analisamos o efeito do parâmetro  $\gamma$ , a dinâmica vital.

- (Efeito de  $\gamma$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.97-5.99, observamos que aumentar  $\gamma$  diminui o pico da epidemia, muito embora pareça retardar seu desaparecimento. Esse retardo pode ser visto como um efeito do maior nascimento de novos suscetíveis à infecção.
- (Efeito de  $\gamma$  no equilíbrio) A Figura 5.100 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 para diferentes escolhas de  $\gamma$ . O equilíbrio depende de  $\gamma$  e a trajetória para  $\gamma = 0.004$  é a mais externa. Observamos que as trajetórias são muito semelhantes no início, mas diferem ao longo do tempo, sendo a epidemia menor quando  $\gamma$  é maior. Isto se deve, acreditamos, ao fato de que a mortalidade alta induz a um maior decréscimo do pico de infecciosos.

Figura 5.97 – Efeito de  $\gamma$  em  $I$ .Figura 5.98 – Efeito de  $\gamma$  em  $S$ .Figura 5.99 – Efeito de  $\gamma$  em  $R$ .Figura 5.100 – Efeito de  $\gamma$  -  $(S, I)$ .

Na próxima Subseção, analisamos algumas modificações do modelo simples, por meio da introdução da infectividade extrínseca  $\omega(t)$  variável.

### 5.5.1 Infectividade extrínseca variável

Agora, consideramos  $\omega$  com decaimento exponencial, dado por  $\omega = \omega \cdot e^{-at}$ . Consideramos  $-at$  em vez de  $-t/a$ , como originalmente fizemos em [72], pois assim podemos fazer com que o modelo com  $\omega(t)$  constante seja recuperado se  $a = 0$ . A seguir, fixamos  $\omega$  e analisamos o efeito do parâmetro  $a$ .

- (Efeito de  $a$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.101-5.103, observamos que aumentar  $a$  diminui o pico da epidemia e restabelece a parcela suscetível mais rapidamente. Esse efeito pode ser visto como um reflexo da diminuição monótona da infectividade extrínseca, por exemplo, por medidas de profilaxia.
- (Efeito de  $a$  no equilíbrio) A Figura 5.104 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3 em vermelho. O tempo máximo utilizado foi de  $T = 2000$ . Observamos que o equilíbrio é alcançado apenas se o decaimento for nulo, isto é, se  $\omega$  for constante. Do contrário, uma

vez que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$ , o ponto de equilíbrio é o livre de doença, isto é,  $(N, 0, 0)$ , como visto no Capítulo 4.

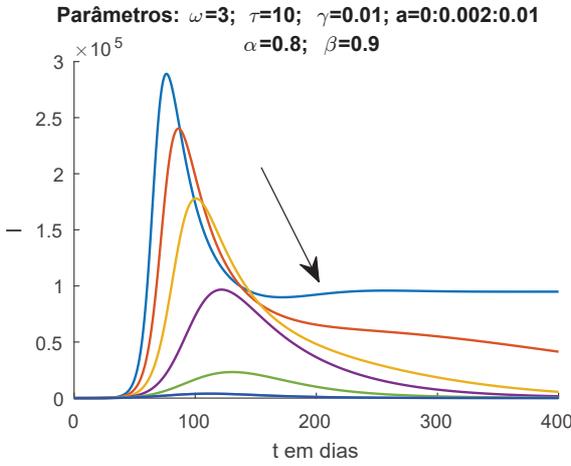


Figura 5.101 – Efeito de  $a$  em  $I$ .

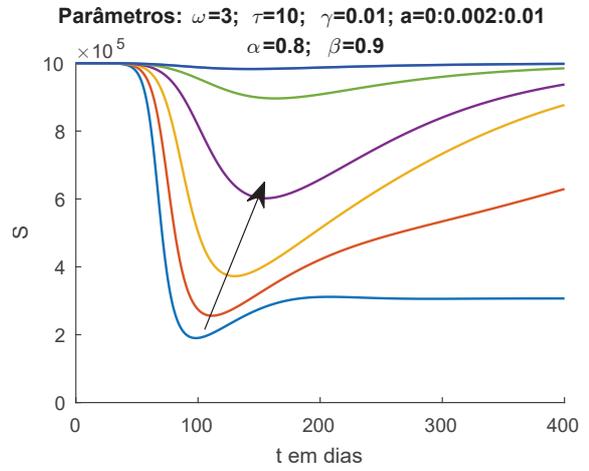


Figura 5.102 – Efeito de  $a$  em  $S$ .

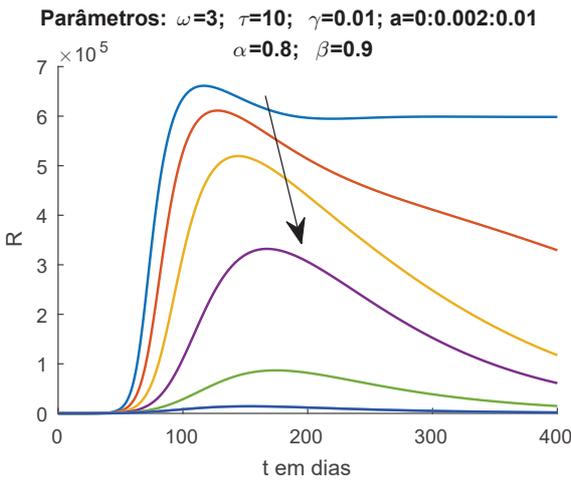


Figura 5.103 – Efeito de  $a$  em  $R$ .

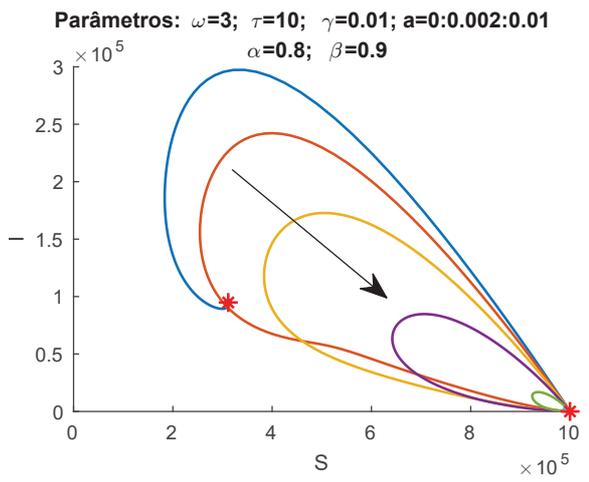
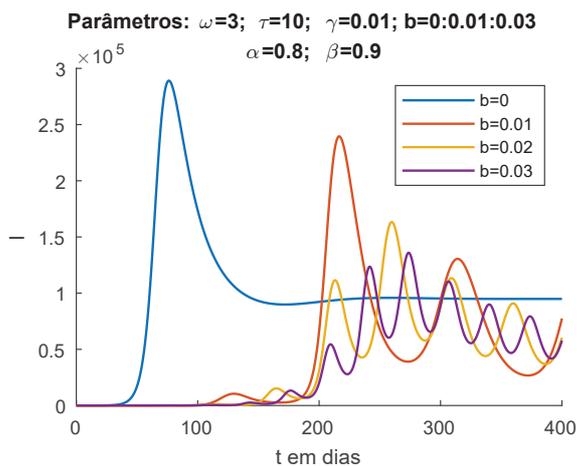
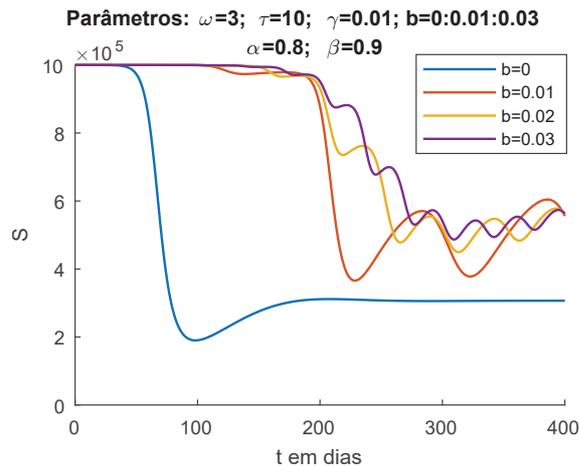
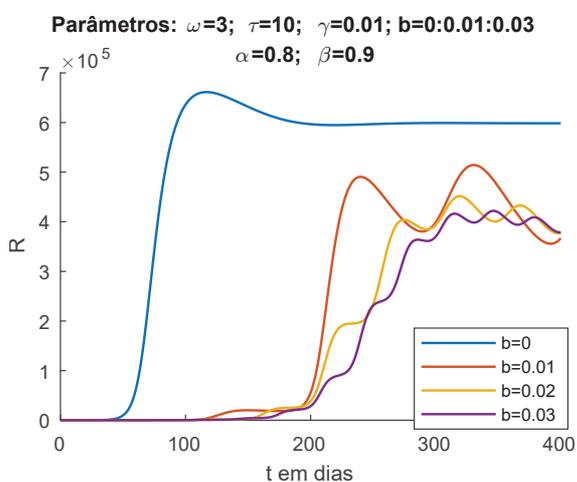
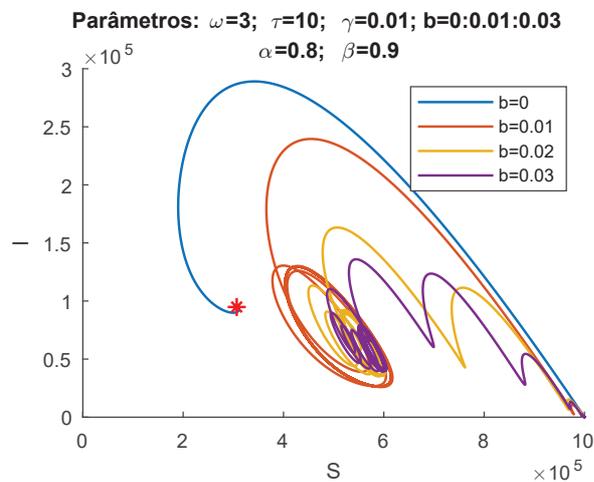


Figura 5.104 – Efeito de  $a$  -  $(S, I)$ .

Agora, consideramos um efeito oscilatório, definindo  $\omega = \omega \cos^2(b\pi t)$ .

- (Efeito de  $b$  nos compartimentos) Nas Figuras 5.105-5.107, observamos que aumentar  $b$  aumenta a quantidade de ondas da infecção, por exemplo, por períodos alternados de relaxamento e endurecimento de medidas de contenção.
- (Efeito de  $b$  no equilíbrio) A Figura 5.108 ilustra o equilíbrio dado no Teorema 4.3, respeitado apenas se  $b = 0$ . Na presença da oscilação, parece não existir um equilíbrio assintoticamente estável.

Figura 5.105 – Efeito de  $b$  em  $I$ .Figura 5.106 – Efeito de  $b$  em  $S$ .Figura 5.107 – Efeito de  $b$  em  $R$ .Figura 5.108 – Efeito de  $b$  -  $(S, I)$ .

Finalmente, nas Figuras 5.109-5.110 exibimos exemplos particulares da combinação desses dois efeitos:  $\omega = \omega \cdot e^{-at} \cos^2(b\pi t)$ . A utilização desses parâmetros permite o fenômeno das ondas e a extinção da doença, através de uma perda oscilatória de infectividade extrínseca. Essa variação de infectividade pode ser vista, por exemplo, como períodos alternados de relaxamento e endurecimento de medidas de contenção, sempre apontando para um amortecimento total da doença. Nas Figuras 5.111-5.112, exibimos as respectivas trajetórias. Como  $\omega^* = 0$ , o equilíbrio livre de doença é assintoticamente estável.

As análises numéricas fomentam a interpretação biológica dos parâmetros. Isso facilita a utilização do modelo, recente e pouco disseminado. Como no Capítulo 6 pretendemos expandir o estudo aos dados da COVID-19, a análise também pode auxiliar no reajuste dos parâmetros. Na próxima Seção, falamos do número de reprodução.

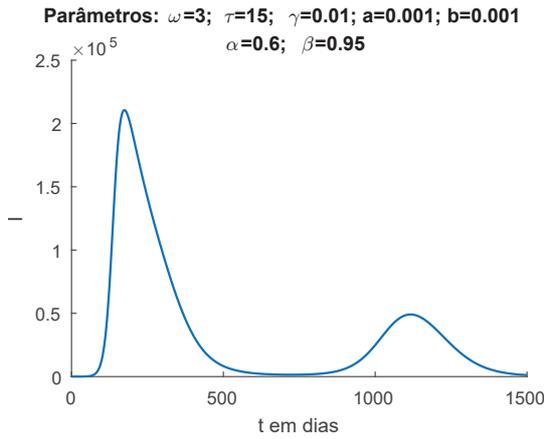


Figura 5.109 – Decaimento oscilatório (1).

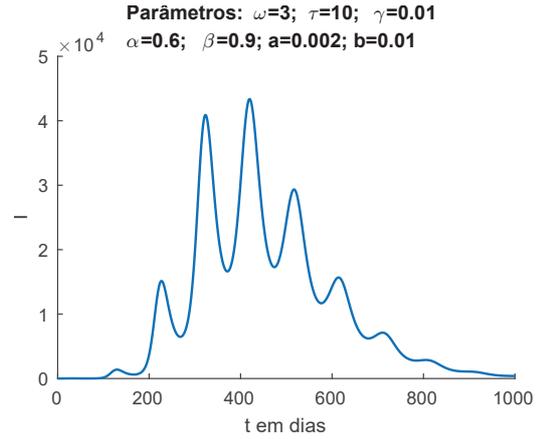


Figura 5.110 – Decaimento oscilatório (2).

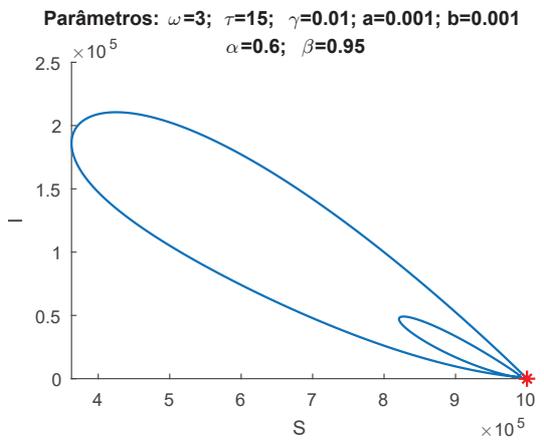


Figura 5.111 – Decaimento osc. ( $S - I$ ).

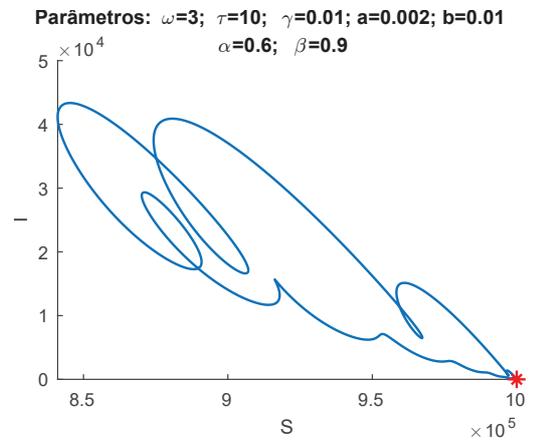


Figura 5.112 – Decaimento osc. (2) ( $S - I$ ).

### 5.5.2 O número de reprodução

Conforme vimos, o número de reprodução no tempo  $t'$  pode ser entendido como o número esperado de indivíduos que são infectados por um indivíduo infeccioso desde  $t'$ , sendo o número básico de reprodução a quantidade média de infecções secundárias que ocorrem quando um infeccioso é introduzido em uma população completamente suscetível [42]. Como, no modelo construído, não é natural a definição de uma fórmula que forneça o número de reprodução, em [8] os autores propõem uma construção para o número básico de reprodução através de uma integral. Aqui, estendemos a proposta para o número de reprodução em um tempo qualquer  $t'$ . Assim, inicialmente, consideramos  $\omega(t)$  constante e as definições (5.45)-(5.46) dadas por

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega \gamma^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta \gamma^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}, \tag{5.45}$$

$$\mathfrak{R}(t') = \frac{S(t') \omega}{N \tau^\beta} \frac{\gamma^{\alpha-\beta}}{\gamma^\alpha + \tau^{-\alpha}} = \mathfrak{R}_0 \cdot \frac{S(t')}{N}. \tag{5.46}$$

Essa análise será importante, uma vez que para esse modelo não temos tabelas de parâmetros, nem mesmo aplicação a nenhuma doença infecciosa específica. Como já

citado, em modelos epidemiológicos clássicos, o pico ocorre quando  $\mathfrak{R}(t) = 1$ , mas isso não ocorre nos modelos de ordem arbitrária ou com parâmetros dependentes do tempo.

Consideramos o exemplo abaixo, da Figura 5.113, onde o valor de  $\mathfrak{R}(t')$  dado pela Equação (5.45) para o ponto  $t'$  de pico é  $\mathfrak{R}_{pico} \approx 0.9078 < 1$ . Se começarmos a modelagem em um tempo anterior ao pico, para o qual  $\mathfrak{R}_{pico} < \mathfrak{R}(t) < 1$ , a epidemia vai decrescer ainda mais rapidamente, mas após uma pequena elevação. Ainda, como o sistema é não local, a trajetória não continua a mesma quando mudamos o ponto inicial, como já discutido na Seção de exemplos.

O que acontece em outros casos, contudo, é termos  $\mathfrak{R}_{pico} > 1$ . Em alguns casos, podemos pegar um dia anterior, onde  $\mathfrak{R}(t) > \mathfrak{R}_{pico} > 1$  e, ainda assim, começarmos com a doença decrescendo ainda mais rapidamente, como ilustrado na Fig. 5.114. Ou seja, “o ponto onde a epidemia deve começar para decrescer” realmente não é mais o ponto de pico! Isso indica uma dificuldade no entendimento do  $\mathfrak{R}_0$  definido em (5.45): embora  $\mathfrak{R}_0 > 1$  seja a condição de viabilidade do equilíbrio endêmico dada na Equação 4.3,  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N > 1$  não necessariamente indica que a epidemia vai ou não ocorrer, isto é, se  $I$  vai ou não crescer. Em ambos os exemplos, consideramos  $N = 1000000$  e a condição inicial é  $(N - 1, 1, 0)$ .

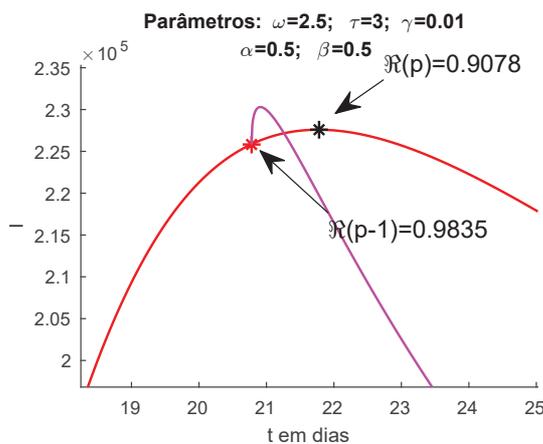


Figura 5.113 – Caso  $\mathfrak{R}(p) < 1$ .

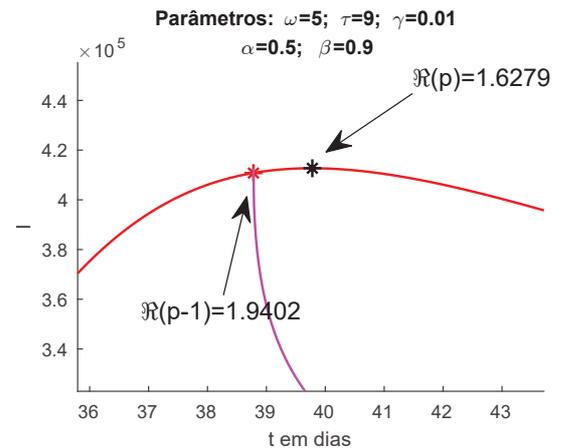


Figura 5.114 – Caso  $\mathfrak{R}(p) > 1$ .

Agora, consideramos diferentes pontos iniciais ao longo da curva  $I$  construída originalmente com condições iniciais  $(N - 1, 1, 0)$ . A Figura 5.115 ilustra a evolução do compartimento  $I$  se começarmos a modelagem em diferentes pontos iniciais ao longo da mesma curva. O comportamento não local do modelo é surpreendente e vemos que, nesse exemplo, o compartimento  $I$  sobe apenas se tomarmos um ponto inicial bem anterior ao pico. Neste ponto, começamos a considerar também a proposta que apresentamos no Capítulo 4 do número de reprodução  $S$ -variável  $\mathfrak{R}^S(t')$ :

$$\mathfrak{R}^S(t') = \int_{t'}^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma(t-t')} (t-t')^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t-t'}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (5.47)$$

e, quanto ao número básico de reprodução,

$$\mathfrak{R}_0^S = \int_0^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (5.48)$$

Na tabela da Figura 5.116, exibimos o  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N$  e o  $\mathfrak{R}_0^S S(0)/N$  para cada uma das curvas. Em modelos clássicos, a doença declina desde o início se, e somente se,  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N < 1$ . Se  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N > 1$ , ela tem que crescer por um tempo. Como podemos observar, isso não acontece no nosso modelo se considerarmos  $\mathfrak{R}_0$  definido pela Equação (5.45). Entretanto, o equilíbrio da Equação (4.73) é o mesmo para qualquer condição inicial, sendo dado no compartimento  $I$  por (5.49).

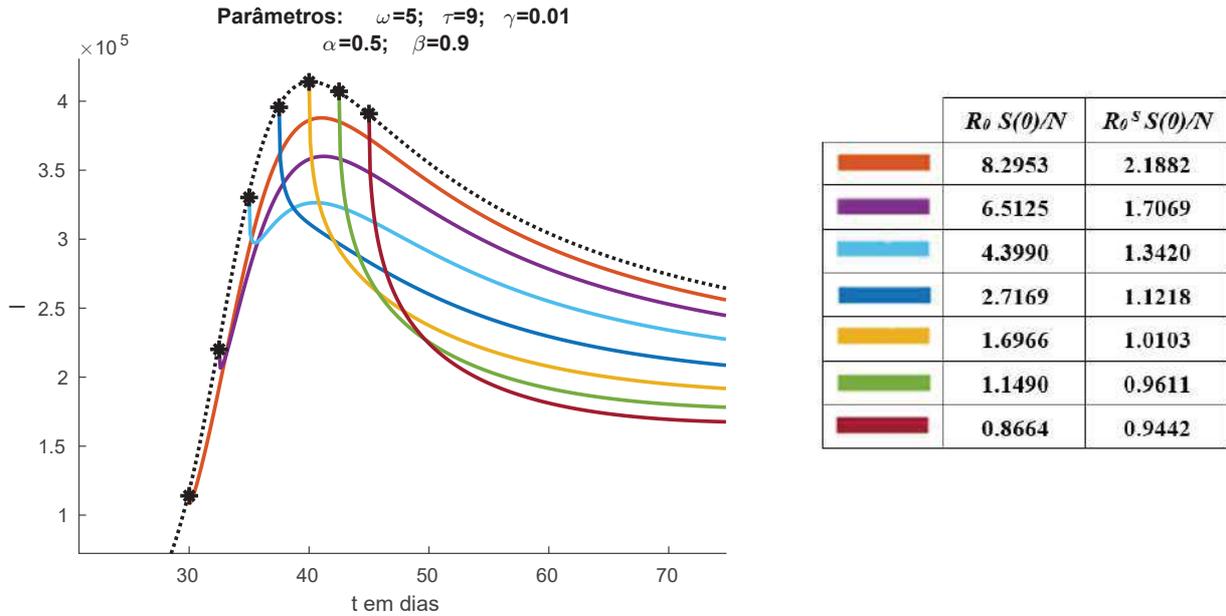


Figura 5.115 – Modificando o ponto inicial.

Figura 5.116 –  $\mathfrak{R}_0$  e  $\mathfrak{R}_0^S$ .

$$I^* = \frac{N}{(\tau\gamma)^{-\alpha} + 1} - \frac{N}{\omega(\tau\gamma)^{-\beta}}. \quad (5.49)$$

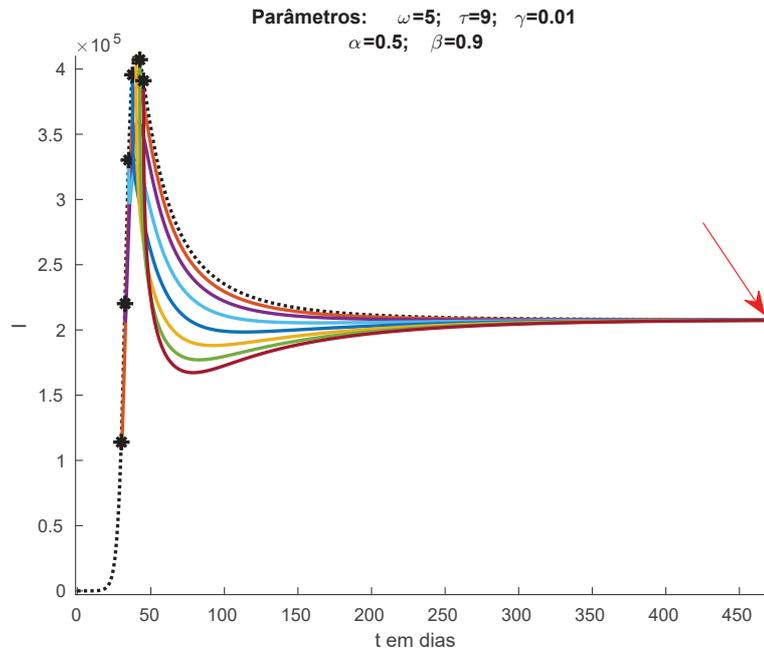


Figura 5.117 – O equilíbrio permanece o mesmo.

Um outro exemplo é construído com condição inicial  $I(0) = 200000, S(0) = 500000$ . Podemos tomar diferentes valores para o parâmetro  $\omega$  de maneira que o  $\mathfrak{R}_0$  varie, o que

nos permite observar a relação entre o  $\mathfrak{R}_0$  e a ocorrência da epidemia, entendendo essa “ocorrência” como uma quantidade de infectados acima do ponto inicial. A seta simples indica o sentido de crescimento de  $\omega$  e, conseqüentemente, o sentido de crescimento de  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N$ . A seta dupla em roxo indica a simulação para a qual  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N \approx 1$ . Já a seta dupla em vinho, indica uma das simulações para a qual  $\mathfrak{R}_0^S S(0)/N \approx 1$ . Observamos que  $I$  está decrescendo em ambas as curvas sinalizadas. Na Tabela 5.1, são dados os valores de  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N$  para  $\omega = 1 : 0.1 : 4$ . O valor de  $\mathfrak{R}_0 S(0)/N$  ultrapassa 1 em um caso muito anterior àquele onde a epidemia ocorre. Porém, novamente o ponto de equilíbrio é o mesmo.

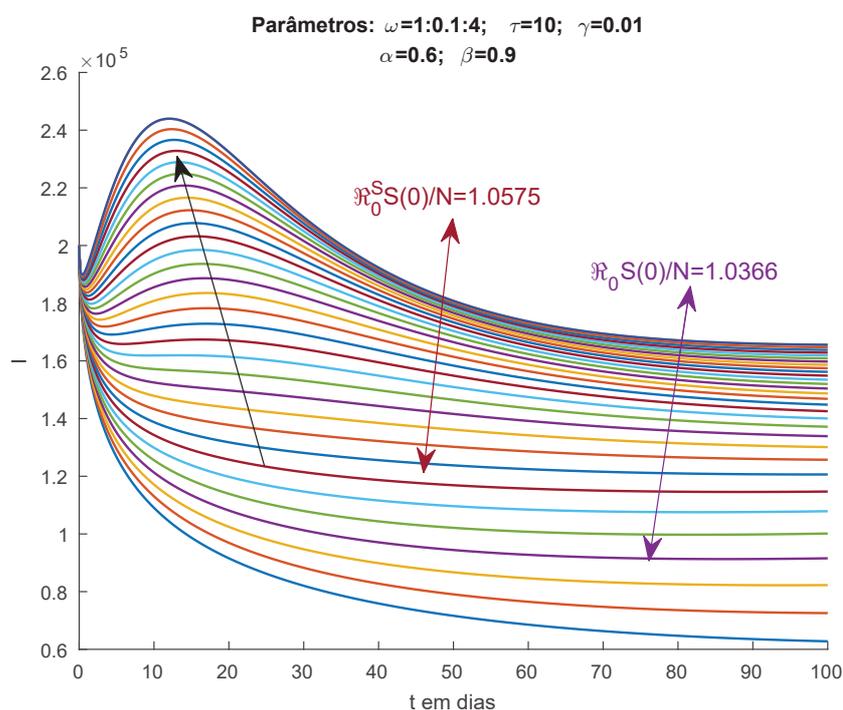


Figura 5.118 –  $\mathfrak{R}_0 > 1$  não necessariamente indica a ocorrência de uma epidemia.

Na Tabela 5.2, são dados os valores de  $\mathfrak{R}_0^S$  para  $\omega = 1 : 0.1 : 4$ , de acordo com a Figura 5.5.2. Observamos que o  $\mathfrak{R}_0^S S(0)/N$  fornece valores mais próximos a 1 nos casos nos quais a epidemia começa a ocorrer. Ainda assim, a epidemia só pode ser considerada quando  $\mathfrak{R}_0^S S(0)/N$  é um pouco acima de 1.

Lembramos que, até o momento, não obtivemos uma formulação perfeita para o número básico de reprodução desse modelo. Mas, os testes numéricos indicam que nossa proposta, dada em (5.47)-(5.48), parece fornecer algo mais próximo do que esperamos, em termos de argumentos biológicos plausíveis, a saber,

$\omega$	$\mathfrak{R}_0 S(0)/N$	$\omega$	$\mathfrak{R}_0 S(0)/N$
1	0.797346717415876	2.5	1.993366793539680
1.1	0.877081389157463	2.6	2.073101465281270
1.2	0.956816060899051	2.7	2.152836137022860
1.3	1.036550732640630	2.8	2.232570808764450
1.4	1.116285404382220	2.9	2.312305480506040
1.5	1.196020076123810	3.	2.392040152247620
1.6	1.275754747865400	3.1	2.471774823989210
1.7	1.355489419606980	3.2	2.551509495730800
1.8	1.435224091348570	3.3	2.631244167472390
1.9	1.514958763090160	3.4	2.710978839213970
2	1.594693434831750	3.5	2.790713510955560
2.1	1.674428106573330	3.6	2.870448182697150
2.2	1.754162778314920	3.7	2.950182854438740
2.3	1.833897450056510	3.8	3.029917526180320
2.4	1.913632121798100	3.9	3.109652197921910

Tabela 5.1 –  $\mathfrak{R}_0$  ultrapassa 1 antes da infecção começar a subir.

$\omega$	$\mathfrak{R}_0^S S(0)/N$	$\omega$	$\mathfrak{R}_0^S S(0)/N$
1	0.797179856571252	2.5	1.270169587622030
1.1	0.851305562459823	2.6	1.286611837775870
1.2	0.900524333274055	2.7	1.302064591238640
1.3	0.945292917648240	2.8	1.316610224672580
1.4	0.986089343720545	2.9	1.330322378695790
1.5	1.023365549937640	3	1.343267067889520
1.6	1.057526950497950	3.1	1.355503627275880
1.7	1.088928068761710	3.2	1.367085522997280
1.8	1.117875680024210	3.3	1.378061049449770
1.9	1.144634587832660	3.4	1.388473930910600
2	1.169433740184080	3.5	1.398363842426100
2.1	1.192471785352160	3.6	1.407766862146210
2.2	1.213921816055770	3.7	1.416715865234270
2.3	1.233935316861070	3.8	1.425240867819360
2.4	1.252645419617920	3.9	1.433369328103370

Tabela 5.2 – Interpretação biológica parece favorecer o uso de  $\mathfrak{R}_0^S$  em vez de  $\mathfrak{R}_0$ .

- O valor  $\mathfrak{R}_0^S = 1$  determina, aproximadamente, se a epidemia vai ou não ocorrer;
- e, como verificamos abaixo, obtemos  $\mathfrak{R}^S(p) < 1$  em todos os casos, ou seja, a doença já está se extinguindo, mas, como a cauda da função de permanência é mais pesada se  $\alpha < 1$ , o pico ocorre um pouco depois de obtermos  $\mathfrak{R}^S(p) = 1$ . Não encontramos justificativa epidemiológica para a ocorrência de  $\mathfrak{R}(p) > 1$  na maior parte dos casos.

Procuramos estender o estudo dos números de reprodução realizando, na próxima Seção, uma análise de parâmetros.

### 5.5.2.1 Efeito dos parâmetros nos números de reprodução

Construímos tabelas para que, com os intervalos da análise de parâmetros da Seção anterior, possamos investigar o tempo de pico,  $p$ , a quantidade máxima de infecciosos,  $I(p)$ , e os valores de  $\mathfrak{R}_0$ ,  $\mathfrak{R}_0^S$ ,  $\mathfrak{R}(p)$ ,  $\mathfrak{R}^S(p)$ . Os valores de referência considerados foram  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\omega = 3$ ,  $\tau = 10$  e  $\gamma = 0.01$ . Utilizamos uma população  $N = 1000000$ , condições iniciais  $S(0) = N - 1$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e  $dt = 0.1$ . As integrais em (5.47)-(5.48) são avaliadas numericamente. Na Tabela 5.3 verificamos, como anteriormente, que, quanto maior  $\alpha$ , isto é, quanto menor o efeito memória considerado, menor e mais rápido ocorre o pico da infecção, pois menor é a função de infectividade extrínseca ao longo do tempo e menos pesada a cauda da função de permanência. O fato do pico ser menor é corroborado pela indicação de que os números de reprodução diminuem conforme  $\alpha$  aumenta.

$\alpha$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
0.3	7.9558	5.8800	105.8	3.6075	1.1937	0.9154
0.4	6.7855	5.2298	98.8	3.3742	1.2715	0.9158
0.5	5.7252	4.6203	92.4	3.1844	1.3086	0.9124
0.6	4.7841	4.0539	86.5	3.0392	1.2950	0.9001
0.7	3.9638	3.5316	81.2	2.9406	1.2233	0.8701
0.8	3.2601	3.0528	76.4	2.8905	1.1121	0.8175
0.9	2.6646	2.6153	72.1	2.8895	0.9776	0.7355

Tabela 5.3 – Pico e números de reprodução para  $\alpha = 0.3 : 0.1 : 0.9$ .

Em seguida, na Tabela 5.4 ressaltamos que, como foi visto, quanto maior  $\beta$ , mais o pico da infecção demora a ocorrer e é maior, pois aumentar  $\beta$  torna a infectividade intrínseca menor no começo, porém maior conforme o tempo. O fato do pico ser maior é corroborado pela indicação de que os números de reprodução aumentam conforme  $\beta$  aumenta.

$\beta$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
0.5	2.2792	1.9023	43.4	2.8653	0.8809	0.7234
0.6	2.8694	2.4525	59.1	2.9251	0.9648	0.8032
0.7	3.6123	3.0681	72.4	3.0133	1.0575	0.8514
0.8	4.5477	3.7807	83.4	3.1026	1.1676	0.8846
0.9	5.7252	4.6203	92.4	3.1844	1.3086	0.9124
1.0	7.2076	5.6174	99.9	3.2566	1.4834	0.9370

Tabela 5.4 – Pico e números de reprodução para  $\beta = 0.5 : 0.1 : 1$ .

Já na Tabela 5.5 verificamos, como anteriormente, que, quanto maior o  $\omega$ , maior e mais rápido ocorre o pico da infecção, já que  $\omega$  diz respeito à infectividade extrínseca. O fato do pico ser maior é corroborado pela indicação de que os números de reprodução aumentam conforme  $\omega$  aumenta. Porém, há que se observar que, nesse caso, o  $\mathfrak{R}^S(p)$  diminui ligeiramente, nunca ultrapassando 1.

$\omega$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
1.5	2.8626	2.7934	291.2	1.9221	1.0791	0.9389
2.0	3.8168	3.5411	175.1	2.4384	1.1559	0.9498
2.5	4.7710	4.1396	122.1	2.8472	1.2332	0.9360
3.0	5.7252	4.6231	92.4	3.1844	1.3086	0.9207
3.5	6.6794	5.0218	73.7	3.4704	1.3770	0.9057
4.0	7.6336	5.3576	60.9	3.7178	1.4469	0.8928
4.5	8.5878	5.6456	51.7	3.9353	1.5083	0.8805

Tabela 5.5 – Pico e números de reprodução para  $\omega = 1.5 : 0.5 : 4.5$ .

Prosseguindo, na Tabela 5.6, vemos que, conforme  $\tau$  cresce, o ponto de máximo do compartimento  $I$  é transladado para frente, apenas com uma ligeira diminuição do pico, devida à diminuição da infectividade intrínseca. Os números de reprodução não mudam muito conforme  $\tau$ , uma vez que, como vimos, esse parâmetro tem maior influência na escala temporal.

$\tau$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
7	6.8729	4.9934	63.7	3.2368	1.4588	0.9031
8	6.4226	4.8628	73.2	3.2191	1.3936	0.9059
9	6.0462	4.7386	82.7	3.2016	1.3509	0.9102
10	5.7252	4.6203	92.4	3.1844	1.3086	0.9124
11	5.4472	4.5073	102.2	3.1673	1.2742	0.9143
12	5.2032	4.3995	112.1	3.1503	1.2459	0.9159
13	4.9869	4.2964	122.1	3.1334	1.2222	0.9172

Tabela 5.6 – Pico e números de reprodução para  $\tau = 7 : 1 : 13$ .

Quanto à dinâmica vital, na Tabela 5.7, vemos que, conforme  $\gamma$  cresce, o pico da epidemia diminui, pois apenas a mortalidade age em  $I$ , e não o nascimento. Assim, uma maior mortalidade diminui o pico da infecção. O fato do pico ser menor é corroborado pela diminuição dos números de reprodução conforme  $\gamma$  aumenta. Porém, também nesse caso, o  $\mathfrak{R}^S(p)$  tem um comportamento inverso, aumentando ligeiramente, sem ultrapassar 1.

$\gamma$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
0.004	9.0597	5.3837	89.3	3.2844	1.7706	0.7934
0.007	6.8729	4.9871	90.8	3.2344	1.4595	0.8789
0.010	5.7252	4.6203	92.4	3.1844	1.3086	0.9124
0.013	4.9869	4.2955	94.0	3.1344	1.2237	0.9297
0.016	4.4601	4.0097	95.7	3.0845	1.1668	0.9398
0.019	4.0597	3.7576	97.5	3.0347	1.1263	0.9467
0.022	3.7421	3.5342	99.4	2.9848	1.0961	0.9519

Tabela 5.7 – Pico e números de reprodução para  $\gamma = 0.004 : 0.003 : 0.022$ .

Agora, consideramos novamente algumas opções de variação de  $\omega$ . Inicialmente,

consideramos um decaimento exponencial dado por  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-at}$ . A seguir, fixamos  $\omega = 3$  e analisamos o efeito do parâmetro  $a$ . Consideramos as definições de número de reprodução dadas por

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega(\gamma + a)^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta(\gamma + a)^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}, \quad (5.50)$$

$$\mathfrak{R}(t') = \frac{S(t')\omega(t')}{N} \frac{(\gamma + a)^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta(\gamma + a)^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}. \quad (5.51)$$

Como já dissemos, o parâmetro  $a$  faz com que o pico diminua e demore mais a ocorrer, o que é corroborado pela diminuição de  $\mathfrak{R}_0$ .

$a$	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}(p)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
0.000	5.7252	4.6231	92.4	3.1844	1.3086	0.9207
0.002	5.2032	4.5398	106.7	2.8327	1.1267	0.9163
0.004	4.7933	4.4383	128.7	2.3438	0.9781	0.8936
0.006	4.4601	4.3096	164.1	1.5605	0.8569	0.8422
0.008	4.1824	4.1310	188.3	0.4691	0.7838	0.7807
0.01	3.9462	3.9159	164.5	0.0722	0.7437	0.7404

Tabela 5.8 – Pico e números de reprodução para  $a = 0 : 0.002 : 0.01$ .

Finalmente, analisamos um decaimento oscilatório, onde  $\omega(t) = \omega \cos^2(b\pi t)$ . O pico considerado é o maior valor de  $I$  até o tempo 400, mas lembramos que há diversos picos, dada a oscilação de  $\omega(t)$ . Nesse caso, estimamos apenas  $\mathfrak{R}_0^S$  e  $\mathfrak{R}^S(p)$ , uma vez que não há fórmula explícita para  $\mathfrak{R}_0$  e  $\mathfrak{R}(p)$ .

$b$	$\mathfrak{R}_0^S$	$p$	$I(p)(\times 10^5)$	$\mathfrak{R}^S(p)$
0.00	4.6231	92.4	3.1844	0.9207
0.01	3.4251	216.7	2.8862	0.7435
0.02	3.1329	258.2	2.4480	0.7550
0.03	3.0224	240.6	2.3260	0.8392

Tabela 5.9 – Pico e números de reprodução para  $b = 0 : 0.01 : 0.03$ .

Acreditamos na utilidade deste Capítulo para a aplicação aos dados de uma epidemia real: as análises numéricas facilitam e ilustram a interpretação biológica dos parâmetros, o que auxilia muito na utilização do modelo, ainda pouco difundido. Além disso, a análise realizada pode auxiliar no reajuste dos parâmetros depois de uma otimização.

A construção deste Capítulo nos levou bastante tempo e muitos resultados apresentados são de caráter empírico, como um relatório de uma experiência laboratorial. Talvez, nem todos os dados aqui contidos sejam de utilidade imediata, mas foram de extrema importância para nosso entendimento, proporcionando confiança, conhecimento e aprofundamento não apenas com relação ao novo modelo, mas também com relação ao código utilizado nas simulações. Esse arcabouço permitiu uma maior segurança para o

próximo Capítulo, onde consideramos dados reais da pandemia de COVID-19 e propomos, ainda, extensões do modelo estudado no Capítulo 4.

## 6 APLICAÇÕES

*“Construímos muros demais e pontes de menos.”* Isaac Newton.

A interdisciplinaridade é uma forte tendência no atual mundo acadêmico, sendo a matemática uma ferramenta grandiosa para o estudo e controle de epidemias. De fato, ela permite realizar em pouco tempo experimentos virtuais que testam diferentes cenários e hipóteses sobre a doença. Neste Capítulo, consideramos dados reais da atual pandemia de COVID-19, seguindo as ideias do artigo que publicamos em [72]. Expandindo o trabalho em [72], calculamos sempre o  $\mathfrak{R}_0^S$  e também analisamos os estados brasileiros.

Em seguida, da mesma forma que o modelo SIR possui diversas extensões que se adéquam a cada doença, como exemplificado na Subseção 2.3.2, analisamos algumas opções de extensão do modelo SIR proposto no Capítulo 4:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S(t), \quad (6.1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (6.2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \quad (6.3)$$

Essas extensões compreendem infectividade oscilatória, compartimento de quarentena e dinâmica da imitação (comportamento humano), todas possibilitando a ocorrência de diversas ondas. Elas são propostas de forma que o significado da construção seja mantido e foram também analisadas numericamente. Ressaltamos que a construção significativa foi justamente a maior influência para que escolhêssemos trabalhar com esse modelo, em detrimento à substituição das ordens inteiras por ordens arbitrárias.

A doença por coronavírus (COVID-19) é considerada uma das maiores pandemias em rápida expansão desde a gripe espanhola de 1918, com graves consequências para a saúde e economia globais. Em 1º de setembro de 2021, a síndrome respiratória aguda grave causada pelo coronavírus 2 (SARS-CoV-2) havia infectado mais de 200 milhões de pessoas, com cerca de 2% de óbitos [78]. Acredita-se que o SARS-CoV-2 seja derivado de um coronavírus animal que adotou a capacidade de transmissão entre humanos. No entanto, em contraste com o SARS-CoV, o SARS-CoV-2 é mais contagioso e se espalhou rapidamente pelo mundo após algumas infecções humanas em Wuhan, China [79].

Segundo [79], o SARS-CoV-2 se espalha de uma pessoa para outra através do contato direto ou por curtas distâncias no ar, em gotas de aerossol ou transportado por fômites - objetos inanimados ou substâncias capazes de absorver, reter e transportar organismos contagiantes ou infecciosos. Após a inalação, o SARS-CoV-2 entra nas células

respiratórias do hospedeiro por meio da interação com seu receptor de entrada. A replicação viral nessas células provoca efeitos adversos diretos nas células, mas também induz as células imunes locais a secretarem citocinas e quimiocinas de forma rápida e abundante. Por sua vez, uma quantidade excessiva de células imunes é atraída para o local da infecção, causando uma cascata de reações inflamatórias com efeitos prejudiciais aos pulmões. A visão atual sobre a COVID-19 concentra-se nessas patologias respiratórias, causando sintomas como tosse, febre, mal-estar geral e falta de ar, que podem eventualmente levar à morte. No entanto, evidências mostram que o SARS-CoV-2 nem sempre está confinado ao trato respiratório, mas também pode se espalhar para outros órgãos, incluindo disfunções neurológicas, cardiovasculares, intestinais e renais.

A transmissão pessoa-a-pessoa sugere que o uso do modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis-Infeciosos- Removidos) é razoável para a compreensão da disseminação da COVID-19. Entretanto, evidências demonstram a assimetria da curva de infeciosos, o que inclusive apareceu em uma declaração do então presidente da OMS, Tedros A. Ghebreyesus, quando, em abril de 2020, afirmou que “embora a COVID-19 acelere muito rápido, ela desacelera muito mais lentamente. Em outras palavras, a descida é muito mais lenta do que a subida” [80]. Essa assimetria foi relatada, entre muitas outras notícias, na curva de infeciosos do estado do Paraná, onde se afirmou, com relação à primeira onda, que a velocidade de descida era a metade da velocidade de subida [81]. Além disso, dados laboratoriais sugerem que as pessoas infectadas são mais infeciosas imediatamente antes de desenvolverem os sintomas e no início da doença.

Os dois fatores apresentados, isto é, a assimetria dos dados, com efeito de cauda direita pesada e a diminuição da infectividade ao longo do tempo desde a infecção são capturados pelo modelo de ordem arbitrária apresentado no Capítulo 4. Particularmente, como vimos na apresentação e também nos exemplos numéricos do Capítulo 5, a ordem  $\alpha$  tem maior influência na cauda pesada, enquanto a ordem  $\beta$  permite modelar a queda da infectividade ao longo dos dias.

Procurando ajustar as curvas reais ao modelo, acoplamos o algoritmo de otimização Feasible Directions Interior Point Algorithm (FDIPA) ao modelo discreto 5.21-5.23 que construímos:

$$S(j+1) = S(j) + \Delta T \gamma(j) N - \frac{\omega(j) S(j) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} [BI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) S(j), \quad (6.4)$$

$$I(j+1) = I(j) + \frac{\omega(j) S(j) \Delta T^\beta}{N \tau^\beta \Gamma(\beta+1)} [BI_j + I(j)] - \frac{\Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} [AI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) I(j), \quad (6.5)$$

$$R(j+1) = R(j) + \frac{\Delta T^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha+1)} [AI_j + I(j)] - \Delta T \gamma(j) R(j). \quad (6.6)$$

Na próxima Seção, damos uma visão geral desse algoritmo.

## 6.1 O ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Com os dados disponíveis da pandemia de COVID-19, utilizamos o MATLAB para resolver um problema de Mínimos Quadrados através do algoritmo de otimização FDIPA [82]. A ideia é minimizar a função

$$f(X) = \|AI - I\|^2 + \|AR - R\|^2, \quad (6.7)$$

onde  $X$  é o vetor dos parâmetros a serem otimizados, por exemplo,  $X = (\omega, \tau)$ ,  $AI$  é o vetor formado pelos dados dos infecciosos monitorados e,  $AR$ , pelos dados dos removidos (recuperados + óbitos). Os parâmetros a serem otimizados podem ser não apenas  $\omega$  e  $\tau$ , mas também  $\alpha, \beta$  etc. Além disso, se os recuperados forem negligenciados, pode-se considerar apenas a norma  $\|AI - I\|^2$  para minimização.

O algoritmo FDIPA -Feasible Directions Interior Point Algorithm -, é um algoritmo de ponto interior para resolver problemas não lineares de otimização restrita da forma

$$\begin{cases} \text{minimize } f(x), \\ \text{sujeito a } g(x) \leq 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

sendo o conjunto viável dado por  $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ .

Em cada ponto, o FDIPA calcula uma direção de busca viável de descida do problema. Então, um novo ponto viável é calculado através de uma busca linear. As direções de busca constituem um campo de direções uniformemente viável e de descida, de acordo com as seguintes definições:

**Definição 6.1.** *O vetor  $d \in \mathbb{R}^n$  em  $x \in \mathbb{R}^n$  é uma direção de descida para uma função suave  $\phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se  $d^T \nabla \phi(x) < 0$ .*

**Definição 6.2.** *O vetor  $d \in \mathbb{R}^n$  é uma direção viável para o problema, em  $x \in \Omega$ , se para algum  $\theta(x) > 0$  temos  $x + td \in \Omega$  para todo  $t \in [0, \theta(x)]$ . Um campo vetorial  $d(x)$  definido em  $\Omega$  é considerado um campo de direções uniformemente viável para o problema (6.8) se existe um comprimento de passo  $\tau > 0$  tal que  $x + td(x) \in \Omega$  para todo  $t \in [0, \tau]$  e para todo  $x \in \Omega$ . Ou seja,  $\tau \leq \theta(x)$  para  $x \in \Omega$ .*

O algoritmo inclui uma busca baseada em procedimento de Armijo e converge para pontos ótimos segundo as condições de Karush-Kuhn-Tucker [82]. A direção de busca é ilustrada na Figura 6.1. A linha laranja indica uma curva de nível de  $f$  e o vetor vermelho indica o sentido do crescimento de  $f$ . Assim, a direção de descida deve estar com sentido oposto. Além disso, a região viável está em azul. A direção de descida  $d_0$  pode apontar para um ponto fora da região viável. Assim, utilizamos uma direção de restauração  $d_1$ , para que a direção  $d$  seja viável e de descida.

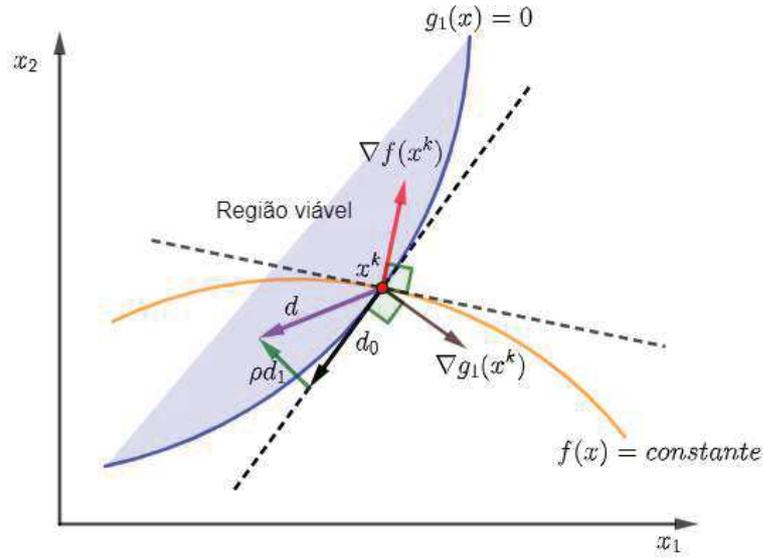


Figura 6.1 – Descrição do FDIPA.

Os passos do algoritmo são descritos como segue, onde  $\Omega_a \equiv \{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$  é compacto e tal que  $g(x) < 0$  para todo  $x \in \text{int}(\Omega_a)$ .

### Algoritmo FDIPA

**Parâmetros**  $\xi \in (0, 1), \eta \in (0, 1), \varphi > 0$  e  $\nu \in (0, 1)$ .

**Dados iniciais**  $x \in \text{int}(\Omega_a), \lambda \in \mathbb{R}_+^m$  (multiplicador de Lagrange) e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e definida positiva.

**Passo 1** Computar a direção de busca  $d$ .

(i) Resolva o seguinte sistema linear para obter  $d_0, d_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g(x) \\ G \nabla g^T(x) & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Se  $d_0 = 0$ , pare.

(ii) Se  $d_1^T \nabla f(x) > 0$ , calcule  $\rho = \min \left( \varphi \|d_0\|^2, (\xi - 1) d_0^T \nabla f(x) / d_1^T \nabla f(x) \right)$ .

Caso contrário, calcule  $\rho = \varphi \|d_0\|^2$ .

(iii) Calcule a direção de busca  $d = d_0 + \rho d_1$ . Faça  $\bar{\lambda} = \lambda_0 + \rho \lambda_1$ .

**Passo 2** Busca linear.

Encontre  $t$ , o primeiro elemento de  $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$  tal que

$$f(x + td) \leq f(x) + t\eta d^T \nabla f(x) \quad (6.10)$$

e

$$g_i(x + td) < 0, \bar{\lambda}_i \geq 0; \quad g_i(x + td) \leq g_i(x), \bar{\lambda}_i < 0. \quad (6.11)$$

**Passo 3** Atualização.

- (i) Atualize o ponto  $x = x + td$ .
- (ii) Defina um novo valor para  $B$  e  $\lambda$ .
- (iii) Se  $d_0 < \epsilon$ , então pare. Do contrário, volte para o Passo 1.

Nesse trabalho, consideramos para o passo inicial  $B = I$ . Então, a cada passo calculamos  $B$  por uma estimativa quasi-Newton, por meio da regra Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno (BFGS), conforme [83].

## 6.2 PRIMEIRAS APLICAÇÕES À COVID-19

No artigo [72], publicado durante o trabalho de mestrado, procuramos investigar o uso do Cálculo de ordem arbitrária tanto analiticamente quanto através de simulações. Apresentamos alguns modelos e realizamos investigações sobre eles, partindo do modelo clássico e das definições básicas para discutir as dificuldades na construção de um modelo fracionário não artificial. Além disso, analisamos a pandemia da COVID-19 usando o modelo (6.1)-(6.3) e apresentamos resultados numéricos. O parâmetro  $\omega(t)$  está relacionado ao contágio, sendo fortemente afetado por medidas governamentais, como quarentena, além de medidas de higiene e readaptação em tempos de pandemia. Assim, em [72] consideramos três situações nas simulações: 1) Valor constante  $\omega(t) = \omega$ , como considerado na maioria dos modelos, 2) Decaimento exponencial no valor ao longo do tempo:  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-at}$ , 3) Decaimento exponencial com oscilações, representando relaxamento e endurecimento periódico das medidas de contenção:  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-at} \cos^2(b\pi t)$ .

### 6.2.1 Valor constante $\omega(t) = \omega$

A população brasileira considerada foi de  $N = 210147125$  habitantes e o estágio inicial dado por  $(S, I, R) = (N - 1, 1, 0)$ . Conforme dito, aplicando o Método dos Mínimos Quadrados através do algoritmo FDIPA, buscamos minimizar a função  $f(\omega, \tau) = \|AI - I\|^2 + \|AR - R\|^2$ . Notamos que a ausência de dados sobre recuperados nos primeiros dois meses da pandemia brasileira prejudica a análise. Em cada figura, as linhas sólidas são o resultado do modelo, enquanto as linhas pontilhadas representam os dados colhidos de 26 de fevereiro a 25 de julho de 2020 no Bing [84].

Inicialmente fixamos  $\alpha = \beta = 1$  e  $\omega(t) \equiv \omega$ , considerando um modelo SIR clássico com parâmetros constantes. Os resultados são obtidos na Figura 6.2 (comparação entre o modelo e os dados reais) e na Figura 6.3 (projeção do pico de infecção). Os dados foram atualizados até 25/07/2020 e os números de reprodução calculados da forma tradicional para o modelo SIR de ordem inteira. A dinâmica vital considerada para todos os testes do Brasil ou de seus estados foi  $\gamma(t) \equiv 6.08 \cdot 10^{-5}$  [85]. O número de reprodução exibido foi obtido pela Equação (5.46).

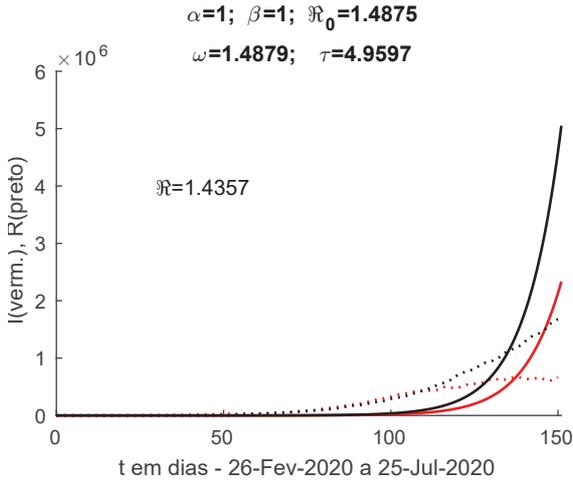


Figura 6.2 – Modelo X Dados.

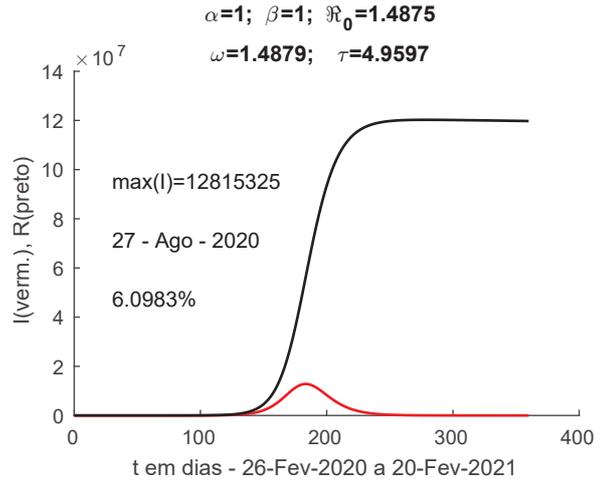


Figura 6.3 – Projeção.

A seguir, nas Figuras 6.4-6.5, minimizamos a função  $f(\omega, \tau, \alpha, \beta) = \|AI - I\|^2 + \|AR - R\|^2$ . Enfatizamos que, à medida que  $\alpha$  diminui, a cauda direita do compartimento  $I$  torna-se mais pesada. Percebemos que a otimização não consegue encontrar parâmetros adequados de maneira a manter uma projeção aceitável.

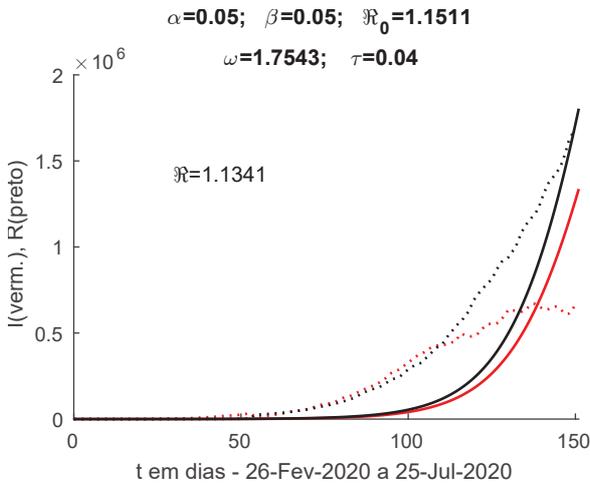


Figura 6.4 – Modelo X Dados.

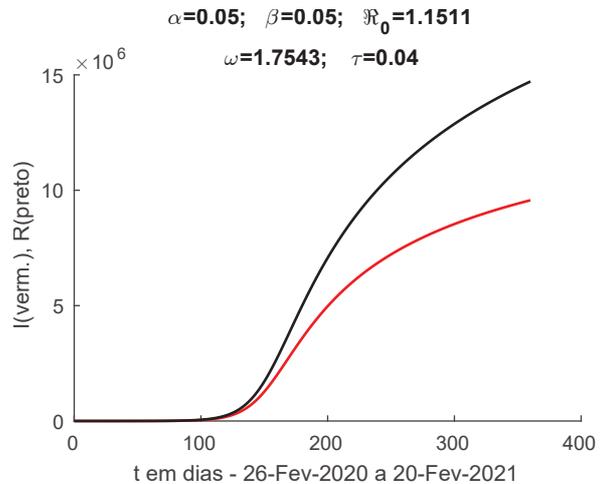


Figura 6.5 – Projeção.

Agora, acrescentamos os dados obtidos na minimização da função  $f(\omega, \tau, \alpha, \beta) = \|AI - I\|^2$  nos 27 estados brasileiros. Como os dados estaduais exibem apenas o acumulado de óbitos e de infecciosos, não fornecendo os recuperados, aproximamos os dados  $AI$  apenas nos primeiros meses como acumulados menos óbitos. As Figuras 6.6-6.7 exibem os resultados das otimizações para dois dos estados.

Por enquanto, não utilizamos a definição de  $\mathfrak{R}_0^S$ , apenas o  $\mathfrak{R}_0$  dado no artigo original [8],

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega \gamma^{\alpha-\beta}}{\tau^\beta \gamma^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}}. \tag{6.12}$$

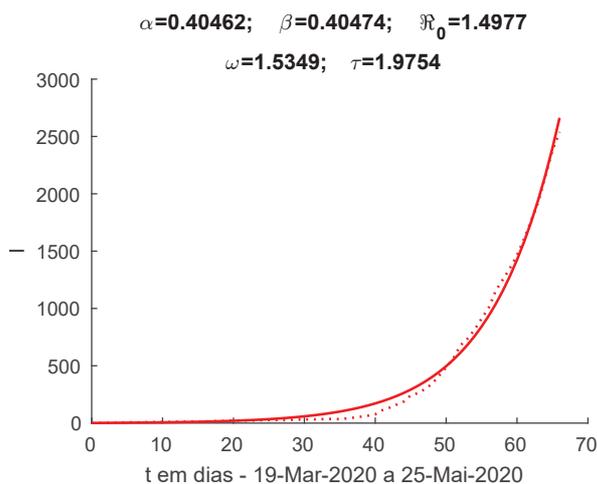


Figura 6.6 – Tocantins.

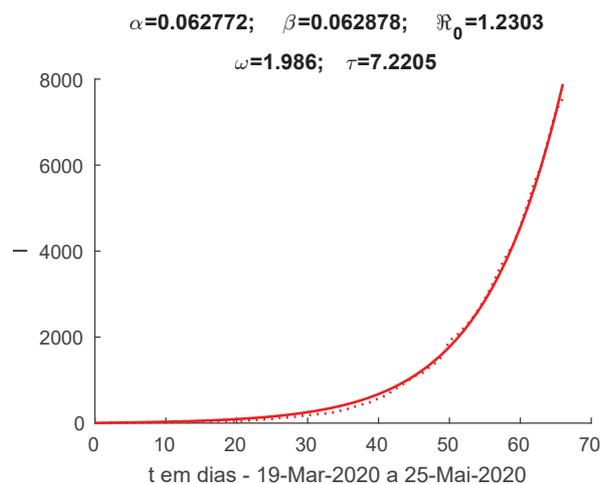


Figura 6.7 – Paraíba.

A data inicial das legendas corresponde ao dia do primeiro infectado em cada estado. Observamos que, embora a otimização tenha sido fina, as curvas  $I$  e  $R$  não têm um bom comportamento, como podemos ver nas projeções das Figuras 6.8-6.9. Embora o  $\mathcal{R}_0$  seja pequeno, as curvas têm um crescimento muito acima do esperado.

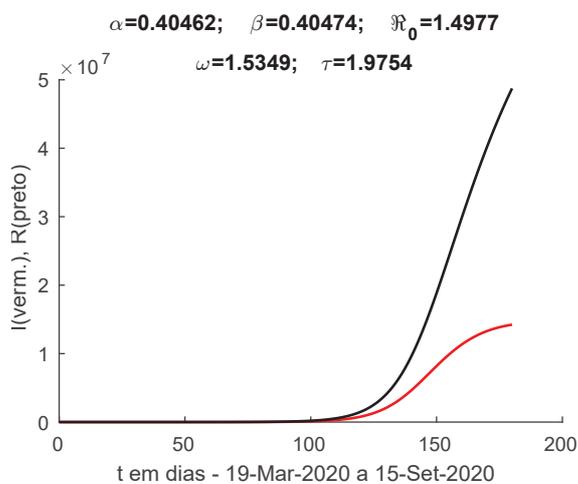


Figura 6.8 – Tocantins.

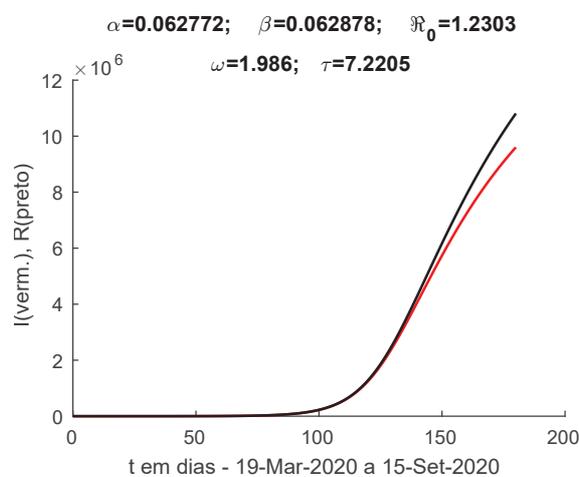


Figura 6.9 – Paraíba.

Acreditamos que isso se deva ao fato de desconsiderarmos os dados dos recuperados e, sobretudo, a termos considerado  $\omega$  constante. Os platôs também não são capturados. Contudo, acreditamos que o modelo pode gerar uma informação preliminar muito útil.

Agora, analisamos a aplicabilidade do modelo 6.1-6.3 à primeira onda de COVID-19 brasileira, prestando atenção sobretudo ao cálculo do número básico de reprodução. Assim, consideramos 260 dias de dados reais, de 26/02/2020 a 09/11/2020, o que acreditamos ser uma boa aproximação para a primeira onda da COVID-19.

Consideramos os dados do Brasil como um todo e o resultado da otimização é mostrado na Figura 6.10. A título de curiosidade, na Figura 6.11 extrapolamos o tempo

para 20000 dias. O ponto vermelho representa o equilíbrio endêmico dado na Equação (4.73), ou seja,  $S^* \approx 161762631$  e  $I^* \approx 44449$ . Nessas simulações, também calculamos os números de reprodução  $S$ -variáveis, nas formas

$$\mathfrak{R}^S(t') = \int_{t'}^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma(t-t')} (t-t')^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t-t'}{\tau} \right)^\alpha \right) dt. \quad (6.13)$$

e, quanto ao número básico de reprodução,

$$\mathfrak{R}_0^S = \int_0^{\infty} \frac{S(t)}{N\tau^\beta} \omega(t) e^{-\gamma t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) dt, \quad (6.14)$$

sendo  $S(0) = N - 1$ . As integrais foram truncadas e discretizadas com passo  $dt = 0.1$  para o resultado numérico.

Observamos que, ainda que o  $\mathfrak{R}_0$  (assim como o  $\mathfrak{R}_0^S$ ) forneça um valor abaixo das referências para a COVID-19, a curva possui um perfil de crescimento que não condiz com os dados reais.

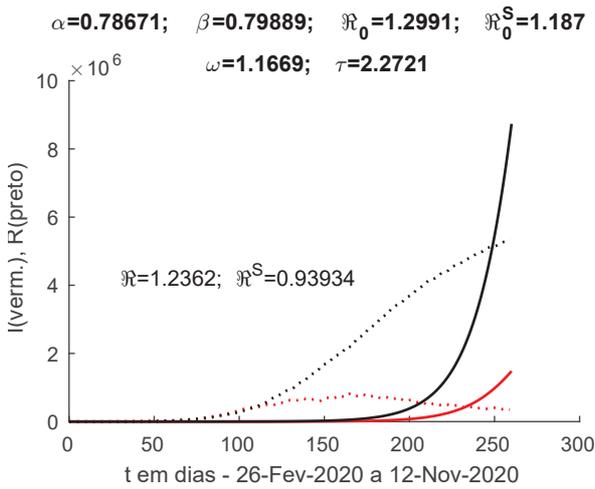


Figura 6.10 – Primeira onda COVID-19.

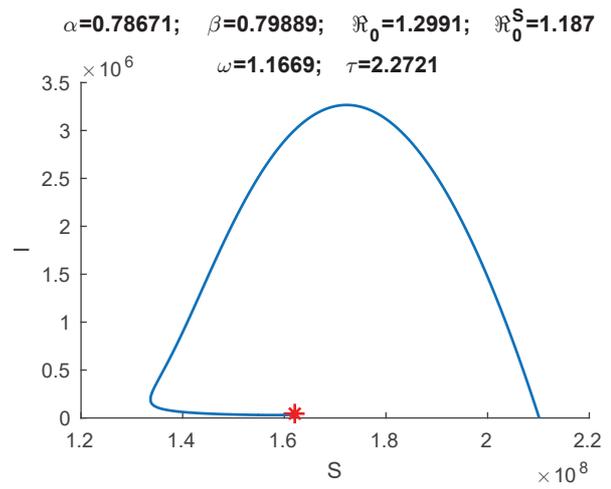


Figura 6.11 – Órbita relativa à primeira onda.

É possível melhorar o ajuste à curva  $I$  modificando as ordens  $\alpha$  e  $\beta$  e os parâmetros  $\omega$  e  $\tau$ , como podemos ver na Figura 6.12. Os ajustes foram feitos manualmente através dos conhecimentos de análise de parâmetros obtidos no Capítulo 5. Por exemplo, diminuindo o parâmetro  $\tau$  conseguimos transladar o pico para trás.

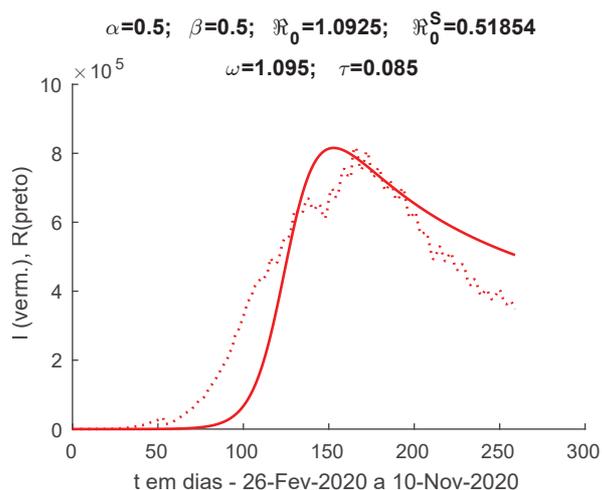


Figura 6.12 – Otimização para a curva  $I$ .

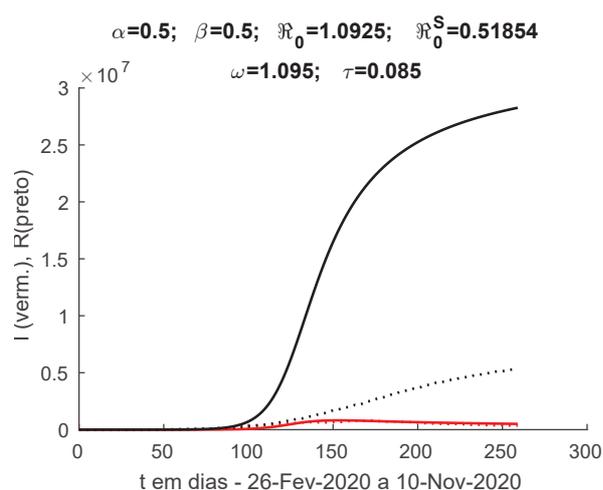


Figura 6.13 – Curvas  $I$  e  $R$ .

Porém, esses valores fornecem uma curva  $R$  bastante distinta dos dados oferecidos, como visto na Figura 6.13. Além disso, o valor do  $\mathfrak{R}_0$  está muito abaixo do esperado para a COVID-19, sendo que  $\mathfrak{R}_0^S < 1$ . A próxima Seção busca melhorar o ajuste das curvas considerando  $\omega(t)$  variável.

## 6.2.2 Infectividade extrínseca variável

Como visto na Subseção anterior, precisamos melhorar o ajuste das curvas, e nossa proposta em [72] foi a de considerar, para tanto,  $\omega(t)$  variável. Como já foi dito, apresentamos duas propostas: decaimento exponencial no valor ao longo do tempo,  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-at}$ , e decaimento exponencial com oscilações, representando relaxamento e endurecimento periódico das medidas de contenção,  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-at} \cos^2(b\pi t)$ . Na primeira proposta, nas Figuras 6.14-6.15, adaptadas de [72], consideramos  $a = 1/70$  para  $\alpha = 0.7$  e  $\beta = 0.9$ .

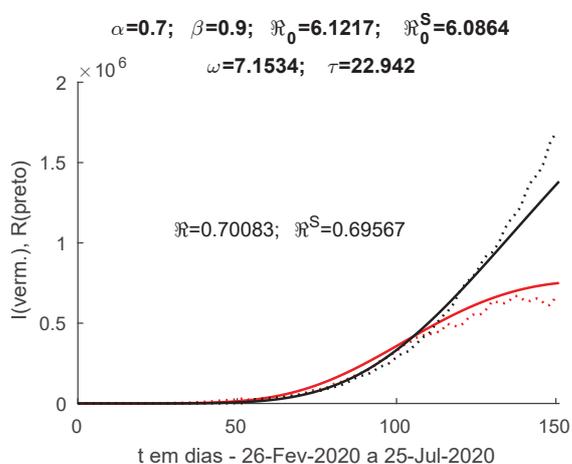


Figura 6.14 – Modelo X Dados.

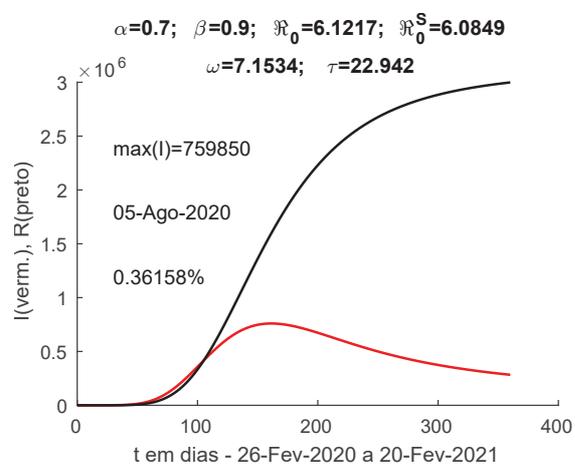


Figura 6.15 – Projecção.

Já com relação à segunda proposta, nas Figuras 6.16 e 6.17, também adaptadas de [72], tomamos um decaimento exponencial oscilatório para  $\omega$ , com  $a = 1/140$ ,  $b = 1/110$  e ordens  $\alpha = 0.8$  e  $\beta = 0.9$ . A figura apresentada é uma pequena adaptação da Figura 12 do artigo [72] e fornece, no período em análise, três ondas. O fenômeno de ondas característico da COVID-19 nos leva a continuar estudando modelos oscilatórios.

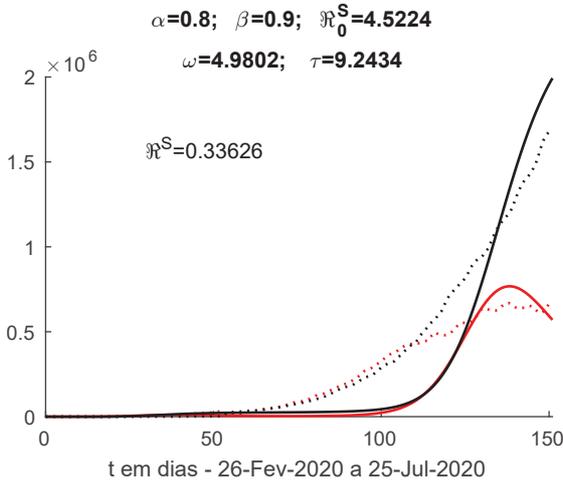


Figura 6.16 – Modelo X Dados.

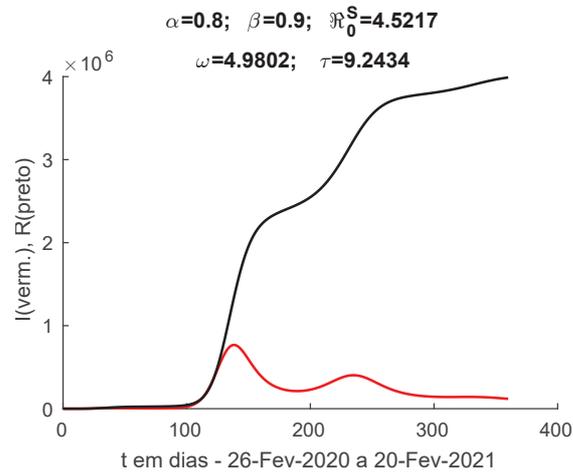


Figura 6.17 – Projeção.

Os resultados construídos apenas com os dados até julho de 2020 mostraram-se interessantes do ponto de vista atual, no que diz respeito à modelagem da primeira onda e também ao modelo com infectividade oscilatória. Sugerimos a consulta do artigo original para demais figuras, inclusive sobre a primeira onda da pandemia italiana.

### 6.3 EXTENSÕES PARA A INFECTIVIDADE EXTRÍNSECA VARIÁVEL

Os resultados obtidos na Seção anterior parecem promissores. Portanto, acreditamos que, com dados mais precisos, o modelo pode ser realmente útil na análise de epidemias. Particularmente, definimos de maneira mais geral

$$\omega(t) = \omega \cdot (c + e^{-at} \cos^2(b\pi t)). \quad (6.15)$$

Se considerarmos  $c > 0$ , a infectividade extrínseca não será 0 ainda que  $\cos^2(b\pi t) = 0$  para algum  $t$ . Além disso, temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^* = c\omega > 0$ .

Nas figuras abaixo, a otimização foi realizada com os dados até 25/07/2020 e, em seguida, o modelo foi projetado até 25/08/2020, sendo a projeção comparada aos dados do período durante esse mês.

- (Decaimento exponencial -  $b = c = 0$ ) Para as Figuras 6.18-6.19, os parâmetros otimizados foram  $\omega$ ,  $\tau$  e  $a$ , além das ordens  $\alpha$  e  $\beta$ . Os pontos iniciais e restrições são dados na tabela a seguir, onde  $\text{rand}(1)$  é um número randômico escolhido pelo MATLAB entre 0 e 1.

Parâmetro	Ponto inicial	Restrição
$\omega$	$1 + 20 \cdot \text{rand}(1)$	$0 \leq \omega \leq 50$
$a$	$0.01 \cdot \text{rand}(1)$	$0 \leq a \leq 0.05$
$\tau$	$5 + 30 \cdot \text{rand}(1)$	$0 \leq \tau \leq 200$
$\alpha$	$0.4 + 0.4 \cdot \text{rand}(1)$	$0 \leq \alpha \leq 1$
$\beta$	$0.5 + 0.5 \cdot \text{rand}(1)$	$\alpha \leq \beta \leq 1$

Verificamos que as curvas se aproximam de maneira excelente no intervalo considerado para a otimização, sendo que, ao longo do tempo, se tornam menores do que os dados reais. Provavelmente, isso se deve a reinfeções, que não foram consideradas, e ao início das mutações. Contudo, curtas previsões são razoáveis, pois, em um período de 3 dias, o erro máximo foi de 7.96%, enquanto para 7 dias aumentou para 11.81%. Para 30 dias, o erro máximo foi de 27.35%, impossibilitando uma boa previsão.

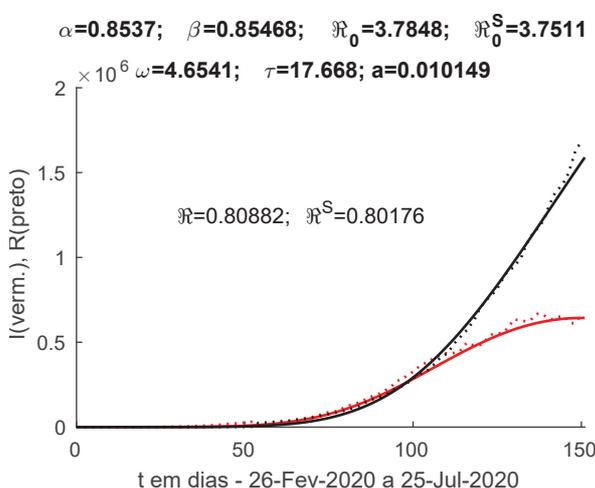


Figura 6.18 – Modelo X Dados.

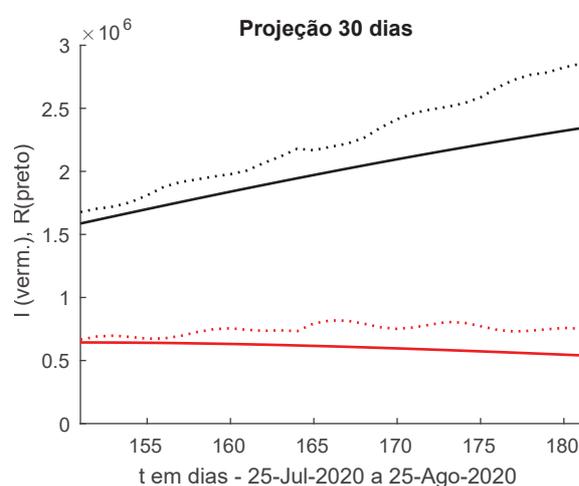


Figura 6.19 – Extrapolação

- (Decaimento exponencial com limite inferior -  $b = 0$  e  $c = 0.01$ ) Nas Figuras 6.20-6.21, novamente, verificamos que as curvas estão muito próximas da realidade na faixa considerada para a otimização e, com o tempo, tornam-se menores que os dados reais. No entanto, as previsões curtas continuam razoáveis, pois para um período de 3 dias o erro máximo foi de 9.13%, enquanto para 7 dias aumentou para 13.36%. No período de 30 dias, o erro máximo foi de 29.75%.
- (Caso geral) Agora, otimizamos também o parâmetro  $b$ , com restrição  $b \in [0, 0.03]$  e ponto inicial  $b_0 = 0.01 \cdot \text{rand}(1)$ , permitindo a oscilação de  $\omega$  nas Figuras 6.22-6.23. Para um período de 3 dias o erro máximo foi de 18.53%, enquanto para 7 dias aumentou para 25.43%, tornando-se já muito grande para ser aceitável.

Isso mostra que a pandemia, embora não siga de maneira exata um padrão oscilatório relacionado ao cosseno, possui uma modelagem interessante no que diz respeito às ondas da primeira cepa do vírus. Porém, os platôs observados não podem ser modelados dessa forma. Talvez a dificuldade da otimização com relação ao  $\beta$  surja por conta da

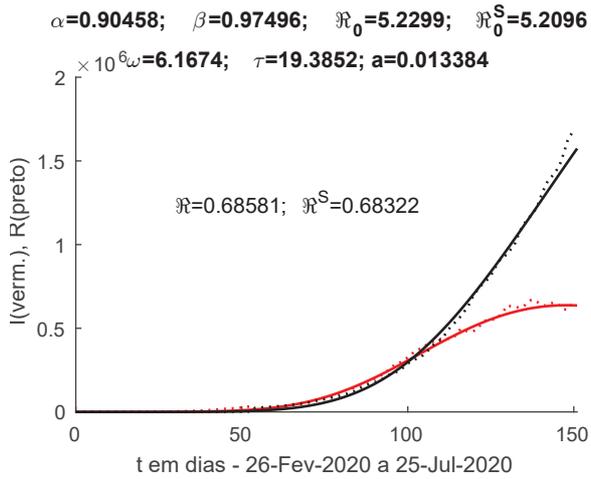


Figura 6.20 – Modelo X Dados.

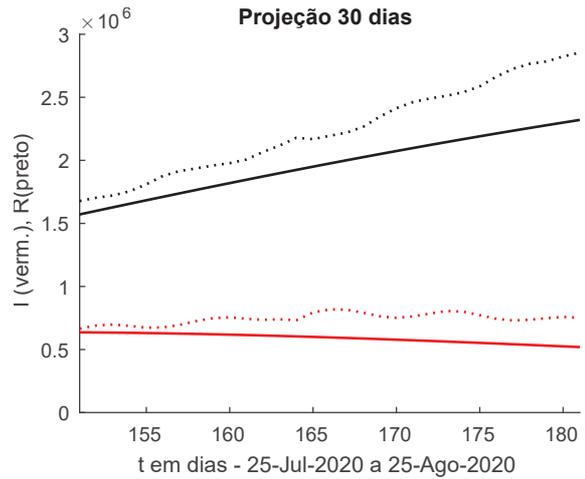


Figura 6.21 – Extrapolação

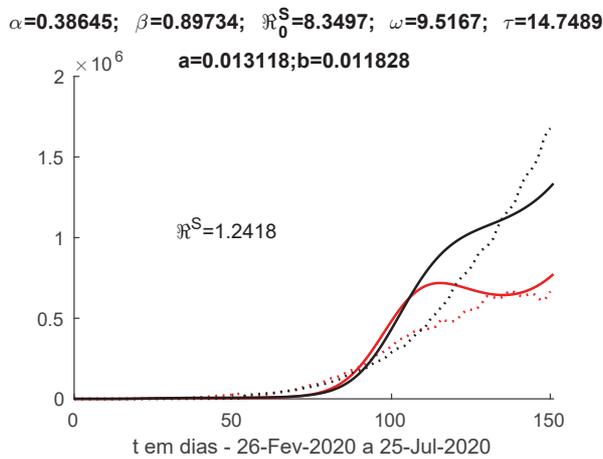


Figura 6.22 – Modelo X Dados ( $c = 0.01$ ).

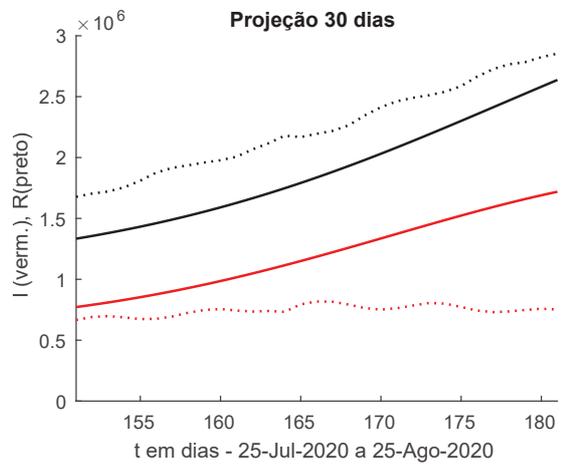


Figura 6.23 – Extrapolação ( $c = 0.01$ ).

complicada curva de contágio da COVID-19, dada pela Figura 6.24, na qual verifica-se que a infectividade do SARS-CoV-2 não pode ser descrita de maneira exata por uma função monótona decrescente, como aquela baseada na função de Mittag-Leffler que consideramos.

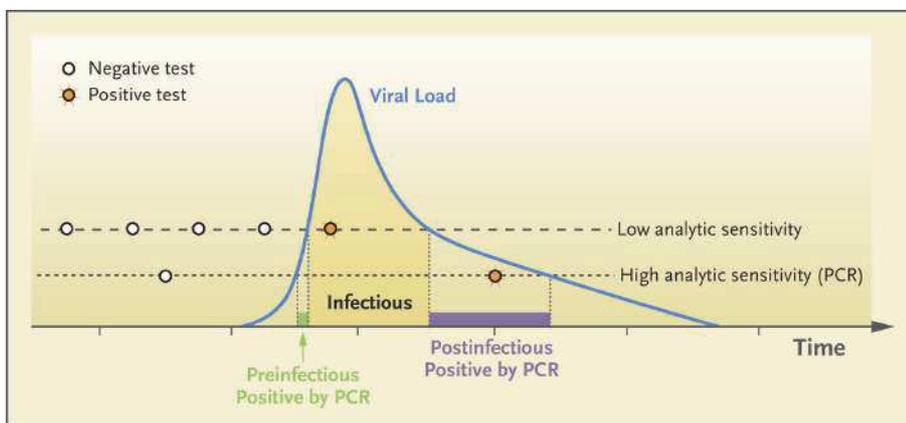


Figura 6.24 – Curva de contágio COVID-19 [4].

Contudo, é possível concluir que, se a otimização for refeita a curtos períodos de tempo, o modelo é capaz de traduzir a realidade de maneira fina, fornecendo, portanto, uma boa previsão para um intervalo pequeno de dias posteriores.

Voltando nossa atenção à primeira onda no Brasil, que tomamos como de 260 dias, visamos melhorar o ajuste, considerando  $c = 0.01$  e  $b = 0$  na definição de  $\omega$  que fornecemos na Equação (6.15). Otimizamos também o parâmetro  $a$  relacionado ao decaimento, com condição inicial  $a_0 = 0.01 \cdot \text{rand}(1)$  e restrição  $a \in [0, 0.05]$ . O resultado da otimização é exibido na Figura 6.25. Na Figura 6.26, extrapolamos o tempo para 20000 dias.

$\alpha=0.88121$ ;  $\beta=0.99999$ ;  $\Re_0=4.5743$ ;  $\Re_0^S=4.553$ ;  $\omega=4.2284$

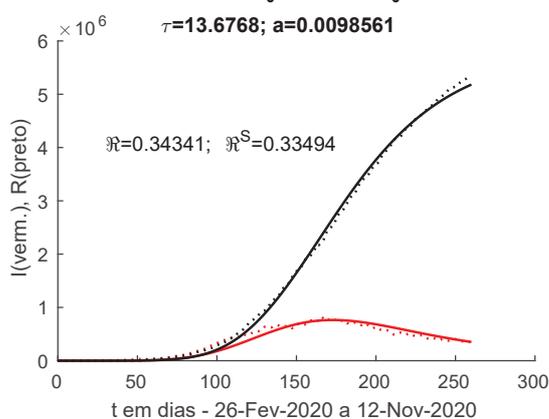


Figura 6.25 – Primeira onda COVID-19.

$\alpha=0.88121$ ;  $\beta=0.99999$ ;  $\Re_0=4.5743$ ;  $\Re_0^S=4.5563$ ;  $\omega=4.2284$

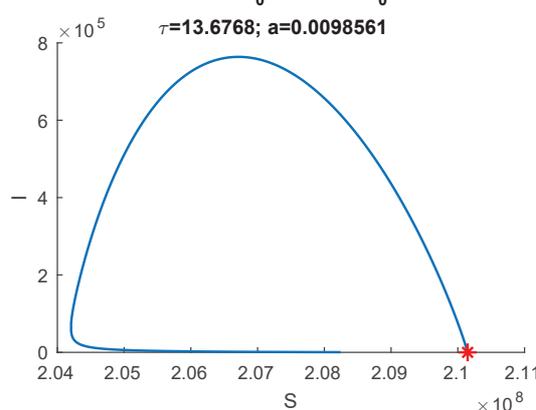


Figura 6.26 – Órbita relativa à primeira onda.

Observamos que o ajuste é ótimo, embora tenhamos perdido o equilíbrio endêmico, uma vez que  $\omega^* = \omega c < (\tau\gamma)^{(\beta-\alpha)} + (\tau\gamma)^\beta$ . O valor de  $\Re_0$  está compatível com as principais referências, como [86]-[87].

### 6.3.1 Estados brasileiros

Em seguida, consideramos os 27 estados da federação, fixando  $c = a = 0.01$ , valores que se adequaram razoavelmente ao Brasil como um todo. Foi necessário um ajuste artificial nos dados, pois os dados estaduais exibem apenas o acumulado de óbitos e de infecciosos, não fornecendo os recuperados. Inicialmente, quase todos os notificados eram os que iam a óbito, mas a notificação foi melhorando ao longo do tempo e, de acordo com os dados do Brasil no final dos 260 dias,  $AR \approx 30 \cdot AM$ . Assim, após estudar o caso do Brasil como um todo, escolhemos a aproximação  $AR = (t \cdot 0.1)AM$ , onde  $t$  é o tempo em dias e  $AM$  é o vetor dos óbitos acumulados. Reiteramos que a inexatidão dos dados não permite otimizar o modelo de forma realmente fina. As Figuras 6.27-6.38 exibem os resultados das otimizações para 12 dos 27 estados, enquanto na tabela 6.3.1 exibimos os parâmetros de todas as otimizações. A diferença na data inicial das legendas se deve ao dia do primeiro infectado em cada estado.

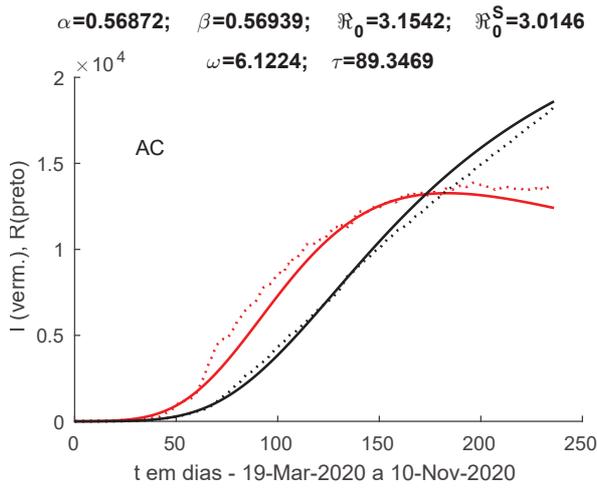


Figura 6.27 – Acre.

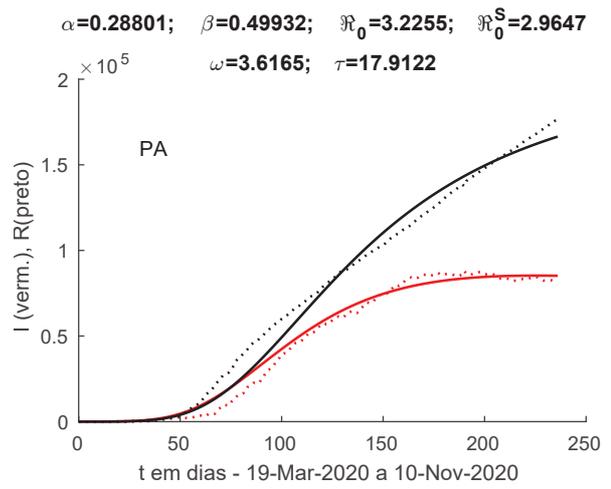


Figura 6.28 – Pará.

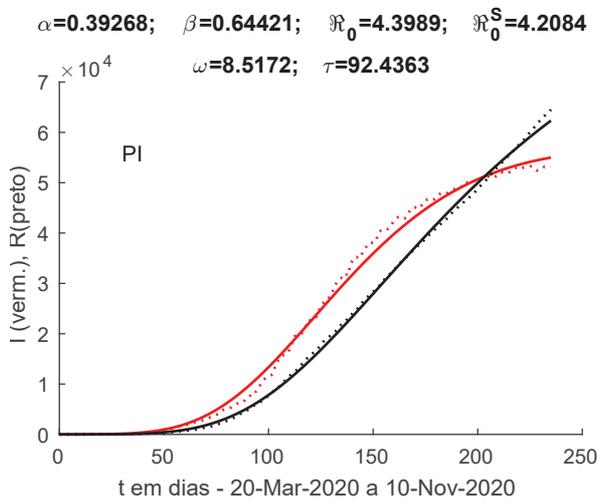


Figura 6.29 – Piauí.

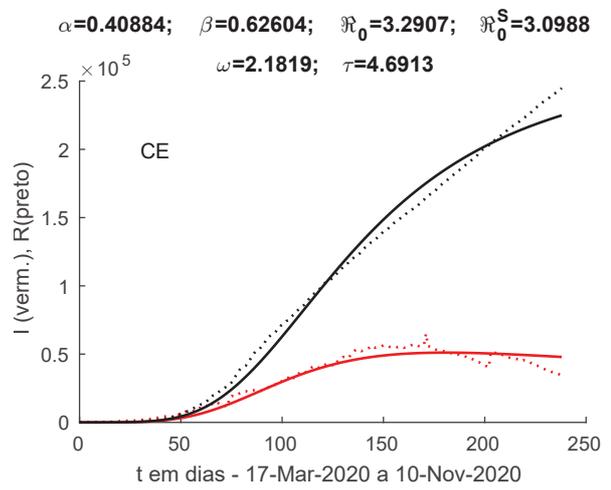


Figura 6.30 – Ceará.

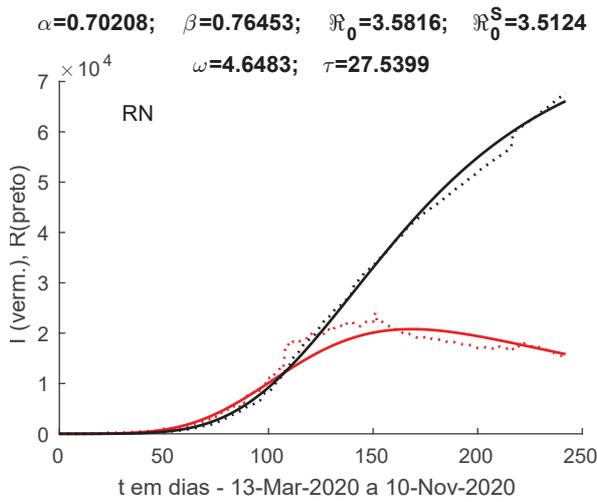


Figura 6.31 – Rio Grande do Norte.

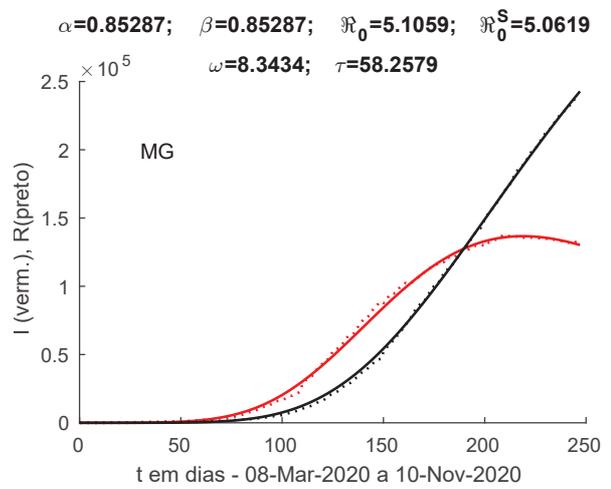


Figura 6.32 – Minas Gerais.

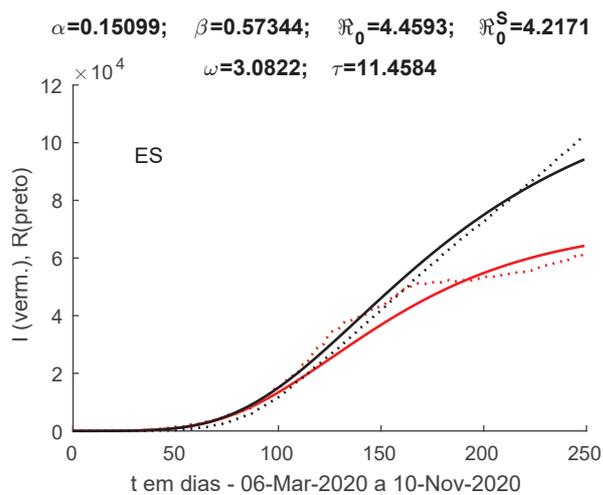


Figura 6.33 – Espírito Santo.

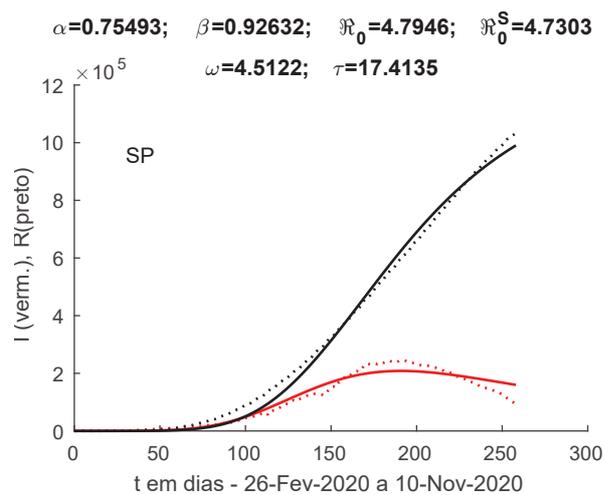


Figura 6.34 – São Paulo.

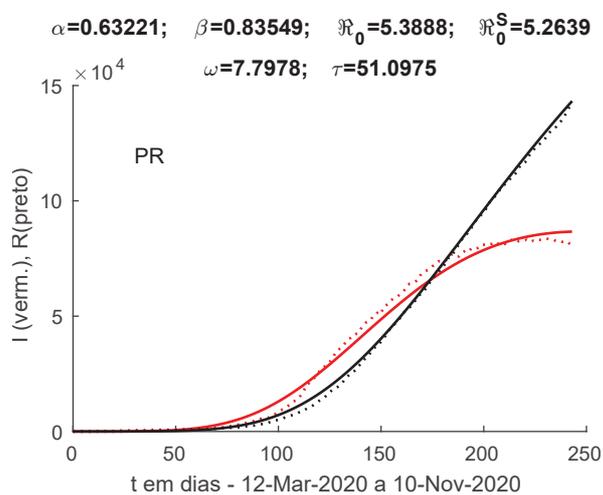


Figura 6.35 – Paraná.

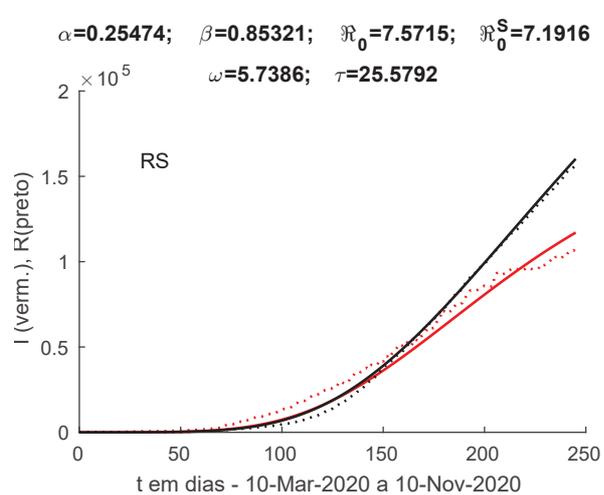


Figura 6.36 – Rio Grande do Sul.

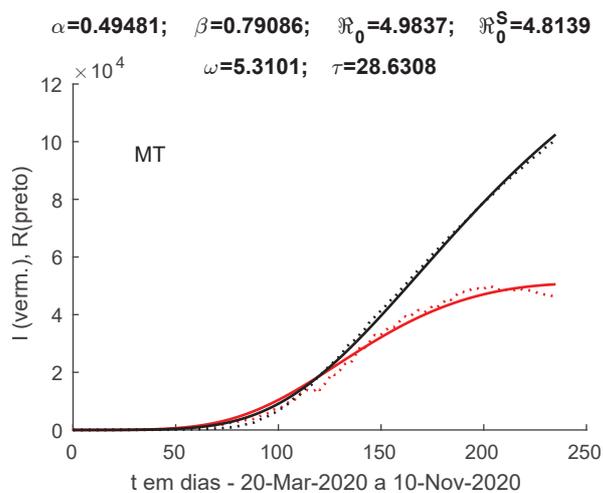


Figura 6.37 – Mato Grosso.

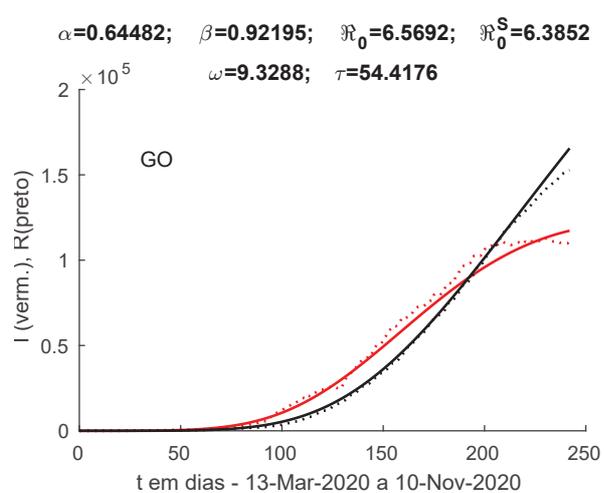


Figura 6.38 – Goiás.

Observamos que os parâmetros mudam muito a cada estado, o que acreditamos ser

Estado	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\tau$	$\mathfrak{R}_0^S$
RO	0.44	0.67	10.87	127.13	4.58
AC	0.57	0.57	6.12	89.35	3.01
AM	0.24	0.49	3.09	12.08	2.99
RR	0.67	0.67	11.88	200.00	4.42
PA	0.29	0.50	3.62	17.91	2.96
AP	0.57	0.57	9.13	199.98	3.51
TO	0.44	0.72	15.13	199.82	5.06
<b>Média Norte</b>	<b>0.48</b>	<b>0.60</b>	<b>8.55</b>	<b>92.61</b>	<b>3.79</b>
MA	0.34	0.66	8.65	77.43	4.67
PI	0.39	0.64	8.52	92.44	4.21
CE	0.41	0.63	2.18	4.69	3.10
RN	0.70	0.76	4.65	27.54	3.51
PB	0.49	0.71	4.40	23.01	3.95
PE	0.49	0.80	1.57	2.91	3.88
AL	0.41	0.61	6.55	66.53	3.67
SE	0.13	0.51	3.31	14.35	3.61
BA	0.33	0.67	11.08	115.14	4.94
<b>Média Nordeste</b>	<b>0.41</b>	<b>0.67</b>	<b>5.66</b>	<b>47.12</b>	<b>3.95</b>
MG	0.85	0.85	8.34	58.26	5.06
ES	0.15	0.57	3.08	11.46	4.22
RJ	0.37	0.77	2.05	4.88	4.99
SP	0.75	0.93	4.51	17.41	4.73
<b>Média Sudeste</b>	<b>0.53</b>	<b>0.63</b>	<b>4.50</b>	<b>23.00</b>	<b>4.75</b>
PR	0.63	0.78	7.80	51.10	5.26
SC	0.19	0.68	3.57	13.89	5.27
RS	0.25	0.85	5.74	25.58	7.19
<b>Média Sul</b>	<b>0.36</b>	<b>0.77</b>	<b>5.70</b>	<b>30.19</b>	<b>5.91</b>
MS	0.79	0.83	10.97	100.98	5.35
MT	0.49	0.79	5.31	28.63	4.81
GO	0.64	0.92	9.33	54.42	6.39
DF	0.39	0.88	16.78	111.39	7.37
<b>Média Centro-Oeste</b>	<b>0.58</b>	<b>0.86</b>	<b>10.60</b>	<b>73.86</b>	<b>5.98</b>
<b>Média Brasil</b>	<b>0.47</b>	<b>0.70</b>	<b>9.97</b>	<b>60.29</b>	<b>4.54</b>

Tabela 6.1 – Parâmetros otimizados para cada estado do Brasil.

devido à diferença populacional entre cada um e, sobretudo, aos possíveis erros das bases de dados. Porém, o  $\mathfrak{R}_0^S$  manteve-se entre 2.96 e 7.37, sendo a média dos estados  $\mathfrak{R}_0^S = 4.54$ , o que é coerente com as principais referências. Por exemplo, [86] considera o  $\mathfrak{R}_0$  do Brasil no intervalo de 95% de confiança 2.4 – 5.5, enquanto a Organização Mundial da Saúde sugeriu, em junho de 2020, a estimativa 2 – 4 [87]. Assim, embora tenhamos realizado algumas manobras, como a inserção manual dos dados dos recuperados, obtivemos um resultado satisfatório para os estudos iniciais que foram realizados.

Trabalhos futuros pretendem utilizar outras definições para o  $\omega$  variável, buscando inclusive respeitar a condição de existência do equilíbrio endêmico. Por outro lado, o equilíbrio livre também é interessante, pois representa o caminho da extinção de uma doença ao longo dos anos. Algo semelhante ao ocorrido com a peste negra em alguns países. Entretanto, a total erradicação da doença não é atingida em tempo finito.

É necessária, ainda, uma teoria mais fina que relacione a variabilidade dos parâmetros às características de cada população. Outras propostas futuras são utilizar mais parâmetros no problema de otimização e também introduzir uma infectividade intrínseca baseada nas funções de Mittag-Leffler. Nas próximas Seções, apresentamos duas extensões para o modelo proposto que também permitem o surgimento de diversas ondas.

#### 6.4 MODELO COM QUARENTENA

Como citado na Subseção 2.3.2, o modelo SIR possui diversas variações, como o acréscimo de novos compartimentos. Partindo de nossa proposta, que não é olhar para o modelo tradicional e apenas substituir as derivadas, agora procuramos estabelecer direções de expansão para o modelo apresentado no Capítulo 4, propondo algumas variações que, por exemplo, possam reproduzir novas ondas. Segundo nossa filosofia, essas variações devem ser inseridas de maneira que a construção do modelo não se perca. Uma das possibilidades, a proposta de  $\omega$  com decaimento exponencial e oscilatório, já foi apresentada. Nesta e na próxima Seção, exibimos alguns outros resultados numéricos de modelos que não foram detalhadamente estudados durante a dissertação. Expandimos o modelo estudado (6.1)-(6.3), amplamente discutido analítica e numericamente, com duas diferentes hipóteses: a possibilidade de indivíduos em quarentena com susceptibilidade menor do que os demais e, semelhante a essa, a possibilidade da dependência comportamental na resposta humana à epidemia.

Aqui, acrescentamos o compartimento  $Q$ , o qual recebe indivíduos de  $S$  proporcionalmente a uma função  $q_1(t)$  que representa períodos de contenção e relaxamento. Como alguns indivíduos deixam a quarentena eventualmente, sobretudo nos períodos de relaxamento das medidas,  $S$  recebe indivíduos de  $Q$  proporcionalmente a uma função  $q_2(t)$ . Na Figura 6.39, temos o diagrama de fluxo do modelo proposto. As setas cinzas indicam a dinâmica vital.

No compartimento  $Q$ , a infectividade extrínseca é dada por  $\omega_q(t) < \omega(t)$  para todo tempo  $t$ . O modelo é governado pelas seguintes equações:

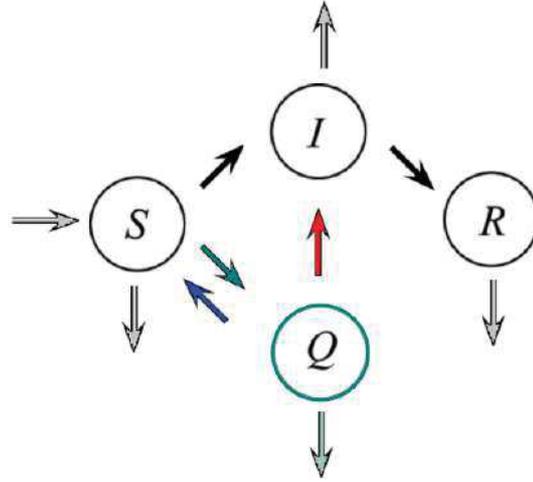


Figura 6.39 – Fluxo SQIR.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - (\gamma(t) + q_1(t))S(t) + q_2(t)Q(t), \quad (6.16)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = q_1(t)S(t) - \frac{\omega_q(t)Q(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - (\gamma(t) + q_2(t))Q(t), \quad (6.17)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{(\omega(t)S(t) + \omega_q(t)Q(t))\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (6.18)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \quad (6.19)$$

Consideramos as seguintes funções de fluxo:

$$q_1(t) = m(q\pi t (E_{\beta_1+1,2}(- (q\pi t)^{(\beta_1+1)})))^2, \quad q_2(t) = 0.5m(E_{\beta_1+1,1}(- (q\pi t)^{(\beta_1+1)}))^2, \quad (6.20)$$

onde  $m$  é proporção máxima da população que será colocada em quarentena e  $q$  é um parâmetro que regula as oscilações. Se  $\beta_1 = 1$ , então  $q_1(t) = m \sin^2(q\pi t)$  e  $q_2(t) = 0.5m \cos^2(q\pi t)$ : se o fluxo de  $S$  para  $Q$  está alto, então as medidas são rígidas e o fluxo de  $Q$  para  $S$  é baixo. Reciprocamente, se o fluxo de  $S$  para  $Q$  está baixo, as medidas estão relaxadas e o fluxo de  $Q$  para  $S$  é alto. Consideramos o fluxo de  $Q$  para  $S$  menor, porque algumas pessoas (acamadas ou em grupo de alto risco, por exemplo) tendem a permanecer em  $Q$ .

As Figuras 6.40-6.43 exibem alguns exemplos numéricos para  $\beta_1 = 1$ , construídos considerando uma população  $N = 1000000$  e dinâmica vital  $\gamma(t) \equiv 0.01$ . Inicialmente, consideramos  $\omega(t) \equiv \omega$ . Nas Figuras 6.44-6.45, aumentamos o parâmetro  $q$ , relacionado à frequência das oscilações, o que permitiu uma maior quantidade de ondas no mesmo intervalo de tempo.

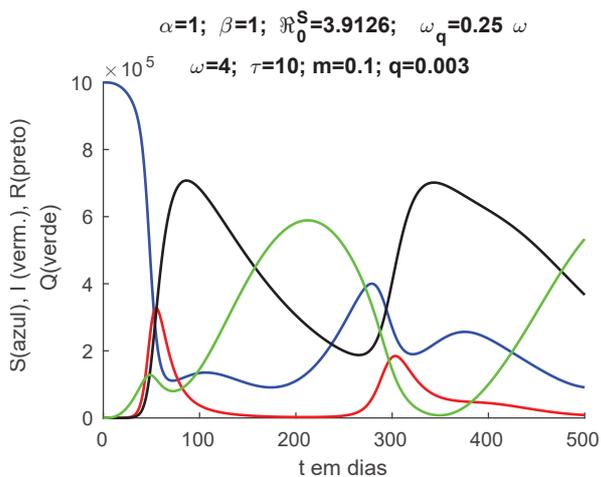


Figura 6.40 – SQR frac.-Exemplo 1.

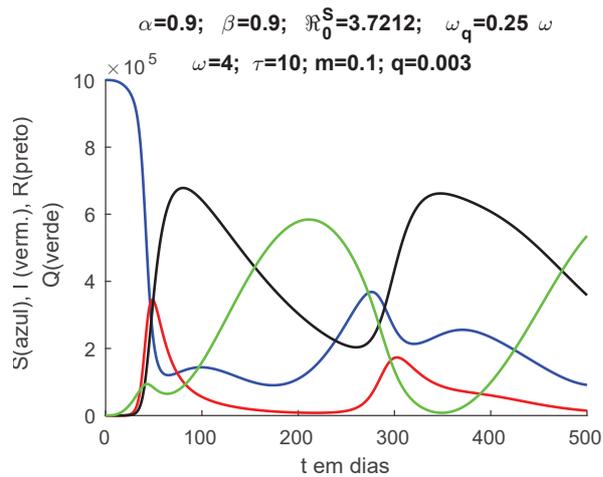


Figura 6.41 – SQR frac.-Exemplo 2.

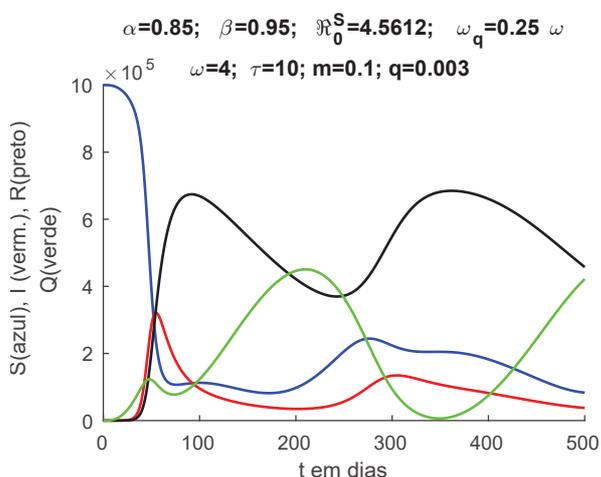


Figura 6.42 – SQR frac.-Exemplo 3.

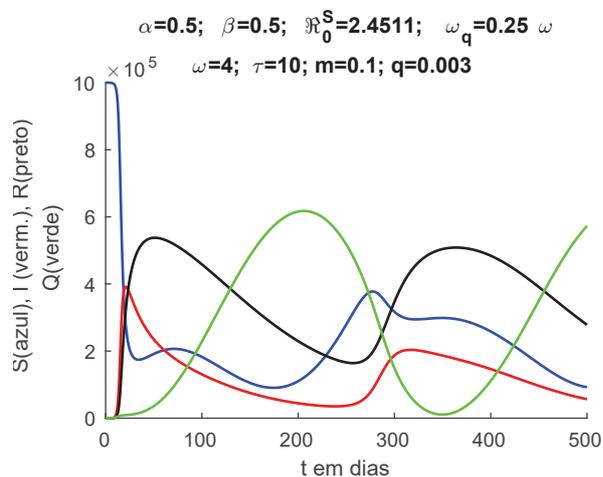


Figura 6.43 – SQR frac.-Exemplo 4.

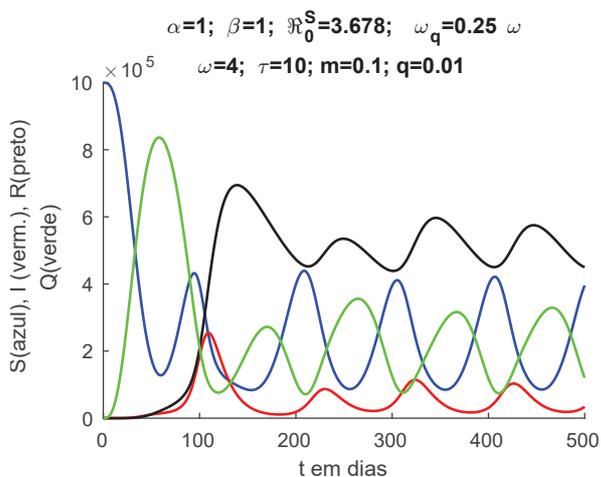


Figura 6.44 – SQR frac.-Exemplo 5.

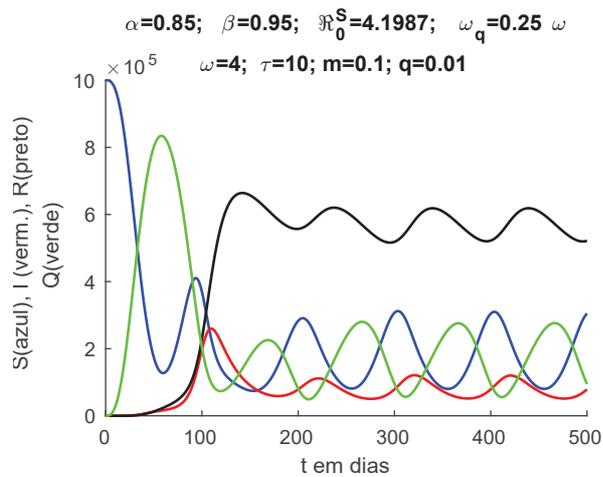


Figura 6.45 – SQR frac.-Exemplo 6.

Percebemos, como se poderia supor, que diminuir a ordem  $\alpha$  torna a cauda direita das ondas mais pesada. As ordens arbitrárias influenciam sobretudo no formato da segunda

onda, mas diminuir  $\beta$  também pode fazer com que a primeira seja maior e ocorra mais cedo. Agora, na Figura 6.46, aumentamos a proporção máxima da população a fluir para a quarentena de 10% para 80%. Talvez devido ao fluxo reverso, as ondas se modificam apenas levemente, com uma pequena diminuição da primeira e aumento da segunda.

Já na Figura 6.47, consideramos  $\omega(t)$  variável na forma  $\omega(t) = \omega \cdot (c + e^{-at} \cos^2(b\pi t))$ , com  $a = b = 0.0005$ , porém mantendo  $c = 0$ .

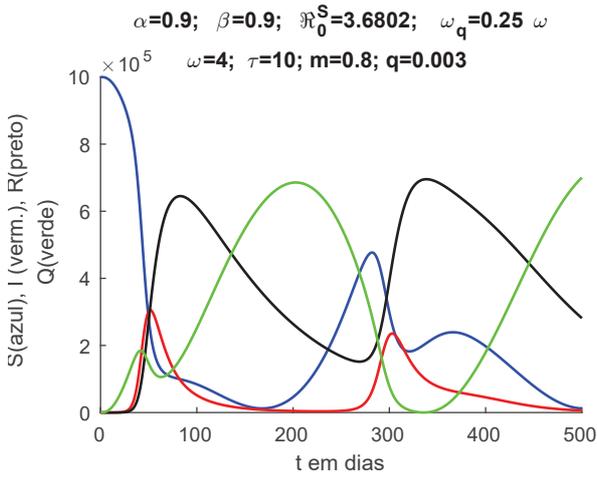


Figura 6.46 – SQR frac.-Exemplo 7.

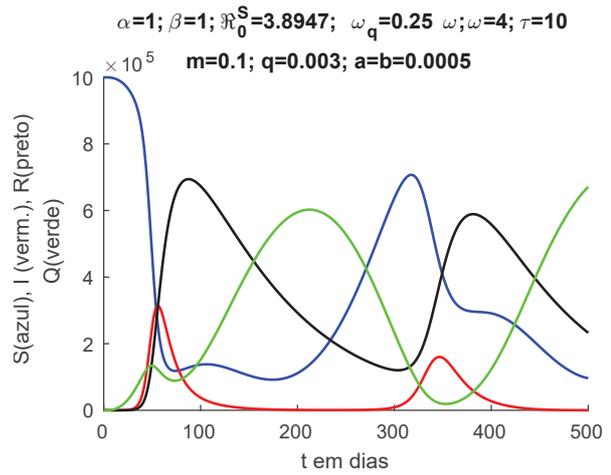


Figura 6.47 – SQR frac.-Exemplo 8.

A variação de  $\omega$  torna as ondas mais modestas, como era de se supor. Ressaltamos que em todas as Figuras calculamos o  $\mathfrak{R}_0^S$  conforme Equação (5.48) e consideramos  $\omega_q = 0.25\omega$ , ou seja, a infectividade extrínseca para o comportamento de quarentena foi considerada quatro vezes menor. Finalmente, nas Figuras 6.48-6.49, modificamos o  $\beta_1$ , parâmetro das funções de Mittag-Leffler que definem os fluxos, dados na Equação (6.20). Os zoom's exibidos nas Figuras 6.50-6.51 mostram o comportamento interessante do início das ondas. Os platôs, percebidos no mundo real, aparecem aqui.

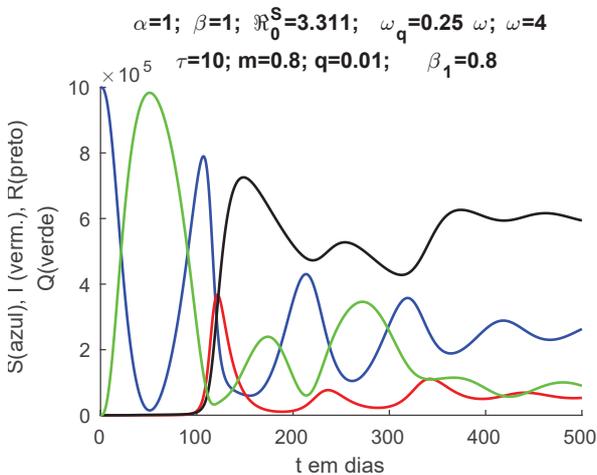


Figura 6.48 – SQR frac.-Exemplo 9.

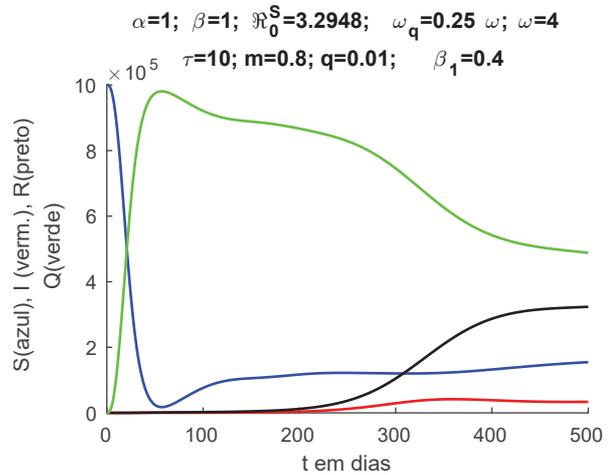


Figura 6.49 – SQR frac.-Exemplo 10.

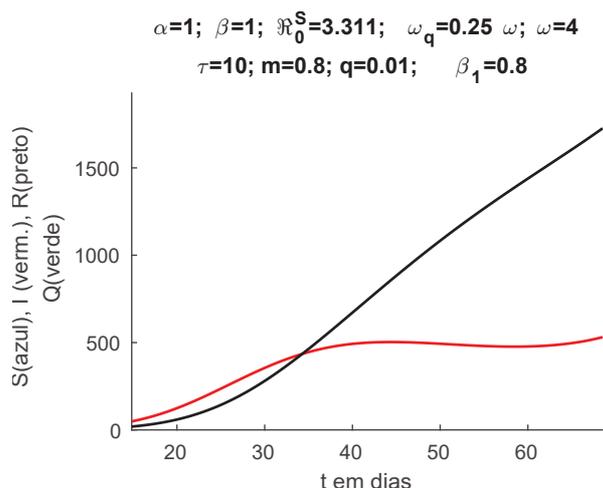


Figura 6.50 – Exemplo 9 (ZOOM).

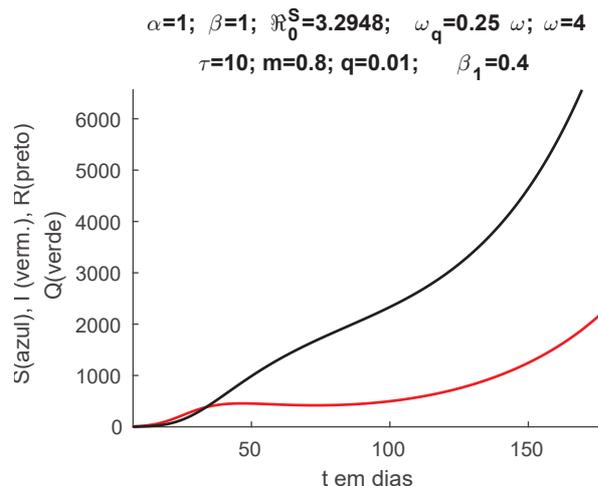
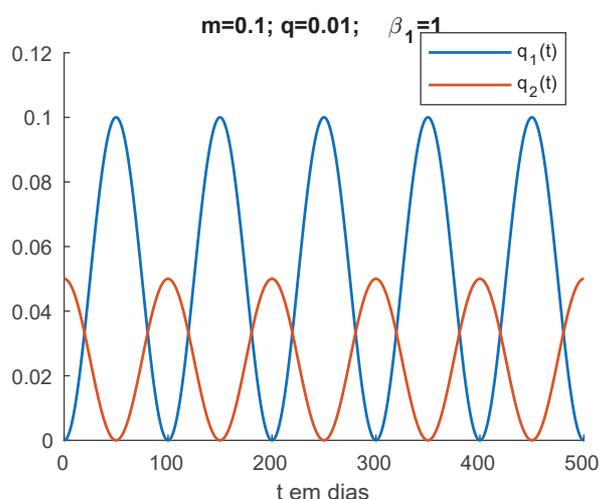
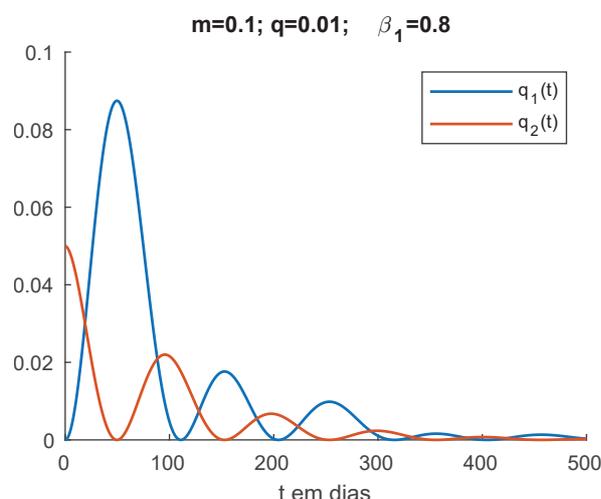


Figura 6.51 – Exemplo 10 (ZOOM).

Observamos que as oscilações diminuem conforme  $\beta_1$  decresce, até que, para  $\beta_1 = 0$ , tenhamos  $q_1(t) = m(\exp(-q\pi t) - 1)^2$  estritamente crescente e  $q_2(t) = 0.5m \exp^2(-q\pi t)$  estritamente decrescente. As Figuras 6.52-6.55 exibem o comportamento das funções  $q_1$  e  $q_2$  para diferentes valores de  $\beta_1$ .

Figura 6.52 – Funções de fluxo -  $\beta_1 = 1$ .Figura 6.53 – Funções de fluxo -  $\beta_1 = 0.8$ .

Na sequência, acoplamos o modelo ao algoritmo FDIPA com os dados de 575 dias, a saber, de 26/02/2020 a 21/09/2021. Procuramos minimizar a função  $f(\omega, \tau, \alpha, \beta) = \|AI - I\|^2 + \|AR - R\|^2$ . Consideramos  $\omega(t) = \omega \cdot (c + e^{-at} \cos^2(b\pi t))$ , com  $c = b = 0.01$  e  $a = 0.001$ . Ainda, consideramos  $\beta_1 = 1$ . O parâmetro  $q$  de regulação da quarentena foi considerado  $q = 0.003$ , enquanto o parâmetro  $m = 0.1$  indica proporção máxima da população a ser colocada em quarentena. Ressaltamos que recursos computacionais impossibilitaram que otimizássemos mais parâmetros neste momento da pesquisa.

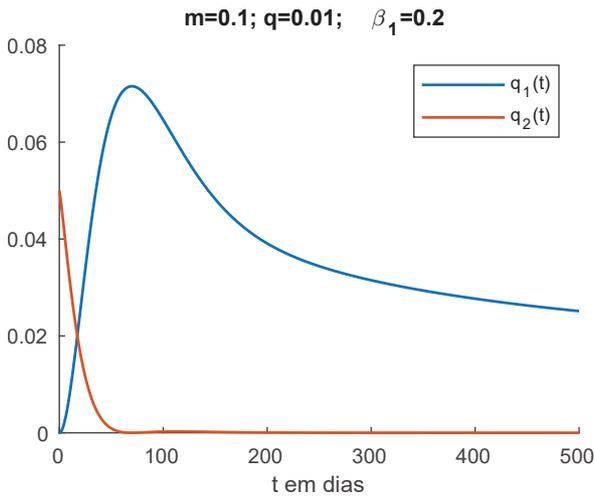
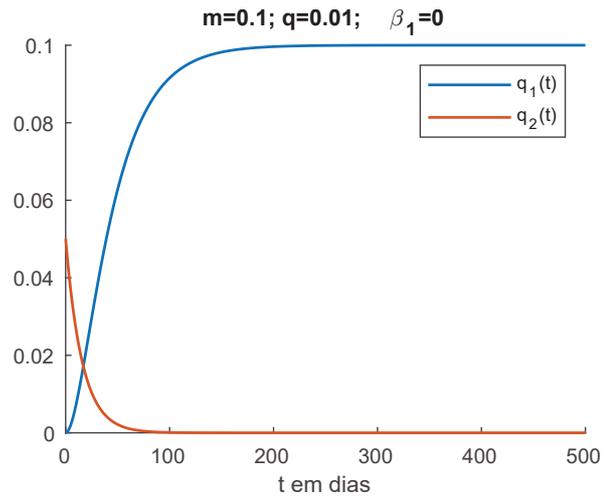
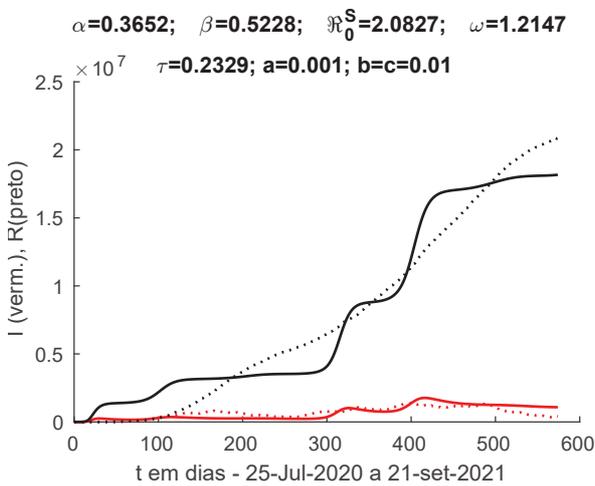
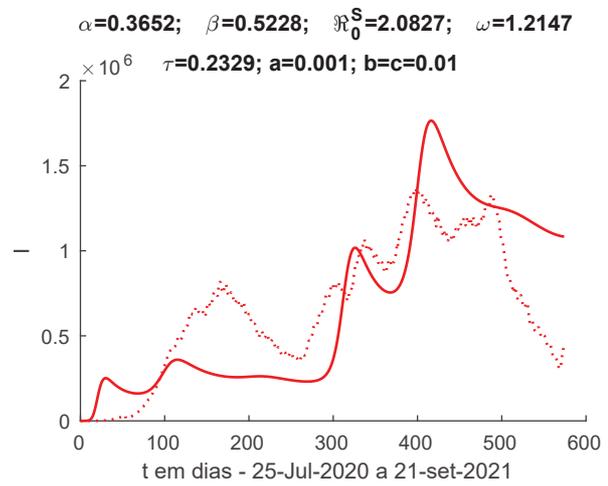
Figura 6.54 – Funções de fluxo -  $\beta_1 = 0.2$ .Figura 6.55 – Funções de fluxo -  $\beta_1 = 0$ .

Figura 6.56 – Modelo X Dados.

Figura 6.57 – Modelo X Dados ( $I$ ).

Os resultados foram muito satisfatórios no que diz respeito à reprodução das ondas. Trabalhos futuros pretendem estabelecer uma análise numérica e analítica do modelo (6.16)-(6.19) e acoplar mais parâmetros à otimização.

## 6.5 MODELO COM DEPENDÊNCIA DE COMPORTAMENTO

Outra maneira de obtermos as ondas de uma epidemia é definirmos uma infectividade extrínseca variável em termos comportamentais. Essa abordagem considera uma linha de pesquisa em expansão no estudo de modelos: o comportamento humano através da dinâmica de imitação. Compreender como a influência social molda os processos biológicos é um desafio central, essencial para alcançar o progresso em uma variedade de campos que vão desde a organização e evolução da ação coletiva coordenada entre células, ou animais, até a dinâmica da troca de informações nas sociedades humanas. Um exemplo é o do grupo de pesquisa Collective Behaviour (Couzin Lab) [88], cujos estudos permitem

explorar as causas e consequências dos comportamentos sociais e identificar princípios em comum.

O italiano Poletti [89] introduziu em 2010 a ideia de usar a dinâmica de imitação para modelar a resposta humana a uma epidemia. No 33º Colóquio Brasileiro de Matemática, o tema ocupou o Capítulo 5 do livro-texto Equações Diferenciais e Modelos Epidemiológicos [90]. Na ocasião, a proposta é baseada em um modelo SIR simples, de ordem inteira, sem dinâmica vital. Aqui, oferecemos uma proposta para a adaptação do comportamento ao modelo 6.1-6.3. Trabalhos futuros devem oferecer um estudo teórico mais aprofundado desta proposta.

A proposta consiste em considerar dois tipos de indivíduos suscetíveis: os cuidadosos e os “normais”, sendo que a transição entre um tipo de comportamento e outro é baseada na dinâmica de imitação. Cada comportamento produz uma recompensa (*payoff*) esperada pelo indivíduo que a adota, e a dinâmica de imitação ocorre quando suscetíveis dos dois tipos conversam entre si e, ocasionalmente, mudam de comportamento. O comportamento normal tem um retorno negativo devido à chance de contrair a doença. No modelo SIR, essa probabilidade é proporcional a  $I$ . No modelo de ordem arbitrária proposto no Capítulo 4, a infectividade de cada pessoa do compartimento  $I$  é dependente do tempo desde a infecção, então consideramos que esse retorno é proporcional a  $\theta(t)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t))/N\tau^\beta$ , sendo dado por  $p_n = -\bar{m}_n\theta(t)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t))/N\tau^\beta$ , com  $m_n = \bar{m}_n/\tau$  uma constante positiva.

Indivíduos que adotam um comportamento cuidadoso ainda podem pegar a doença, então têm um retorno  $-\bar{m}_c\theta(t)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t))/N\tau^\beta$ , onde  $m_c = \bar{m}_c/\tau$  é uma constante positiva menor que  $m_n$ . Também há um retorno negativo de  $-k$  por adotar um comportamento cuidadoso, devido a possíveis implicações pessoais, comerciais etc. Assim,  $p_c = -k - \bar{m}_c\theta(t,0)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t,0))/N\tau^\beta$ .

A diferença entre as duas recompensas é dada por

$$p_n - p_c = k - \bar{m} \frac{\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right), \quad (6.21)$$

sendo  $\bar{m} = \bar{m}_n - \bar{m}_c$ . Vemos que o comportamento normal tem recompensa maior quando  $\theta(t,0)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t,0)) < kN\tau^\beta/\bar{m}$  e menor quando  $\theta(t,0)D^{1-\beta}(I(t)/\theta(t,0)) > kN\tau^\beta/\bar{m}$ .

Digamos que  $x$  indica a porcentagem da população com comportamento normal e,  $1 - x$ , a porcentagem da população com comportamento cuidadoso. Através de conversas presenciais ou virtuais, as pessoas podem mudar de comportamento se descobrirem que o comportamento de seu contato é mais vantajoso. Assim, considera-se que a mudança de comportamento é proporcional à diferença entre as recompensas, ou seja, existe uma constante positiva  $\xi$  tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1-2x)\gamma(t)N}{S_n + S_c} + x(1-x) \frac{(\omega_c(t) - \omega_n(t))\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) + \xi x(1-x) \left( k - \bar{m} \frac{\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) \right). \quad (6.22)$$

Nessa equação, o último termo é devido à dinâmica de imitação. Já os dois primeiros termos são devidos à diminuição natural de suscetíveis com comportamento normal, por conta da maior infectividade extrínseca à qual estão expostos. Esse termo pode ser encontrado se desconsiderarmos a dinâmica de imitação e escrevermos o modelo com quatro compartimentos, isto é, desmembrando os suscetíveis nos compartimentos  $S_n$  (suscetíveis com comportamento normal) e  $S_c$  (suscetíveis com comportamento cuidadoso):

$$\frac{dS_n(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega_n(t)S_n(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S_n(t), \quad (6.23)$$

$$\frac{dS_c(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega_c(t)S_c(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S_c(t), \quad (6.24)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{(\omega_c(t)S_c + \omega_n(t)S_n(t))\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (6.25)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \quad (6.26)$$

A infectividade extrínseca  $\omega_c$  é tal que  $\omega_c < \omega_n$ . Se  $x = S_n/(S_n + S_c)$ , então

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dS_n/dt \cdot S_c - S_n \cdot dS_c/dt}{(S_n + S_c)^2} = \quad (6.27)$$

$$= \frac{1}{(S_n + S_c)^2} \left[ \gamma(t)N(S_c - S_n) - \frac{(\omega_n(t) - \omega_c(t))S_n(t)S_c(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) \right] = \quad (6.28)$$

$$= \frac{(1 - 2x)\gamma(t)N}{S_n + S_c} + x(1 - x) \frac{(\omega_c(t) - \omega_n(t))\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right). \quad (6.29)$$

Assim, o modelo é governado pelas seguintes equações:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{(\omega_n(t)x + \omega_c(t)(1 - x))S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S(t), \quad (6.30)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{(\omega_n(t)x + \omega_c(t)(1 - x))S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (6.31)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t), \quad (6.32)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1 - 2x)\gamma(t)N}{S(t)} + x(1 - x) \frac{(\omega_c(t) - \omega_n(t))\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) + \xi x(1 - x) \left( k - \bar{m} \frac{\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) \right). \quad (6.33)$$

As Figuras 6.58-6.61 exibem alguns exemplos numéricos, construídos considerando uma população  $N = 1000000$  e dinâmica vital nula. Inicialmente, tomamos  $\omega(t) \equiv \omega$ . Consideramos, ainda, que, inicialmente, 80% da população possui comportamento normal.

Agora, consideramos  $\gamma(t) \equiv 0.01$ . A dinâmica vital faz com que as oscilações da proporção de indivíduos com comportamental normal não sejam tão extremas, como podemos ver nas Figuras 6.62-6.65.

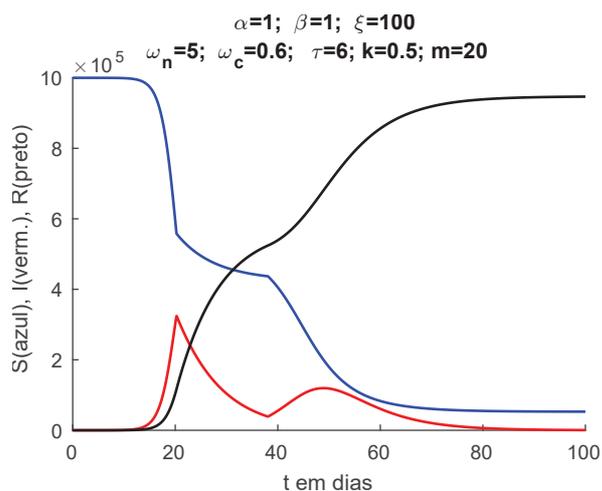


Figura 6.58 – Modelo Comport. (Ex. 1)

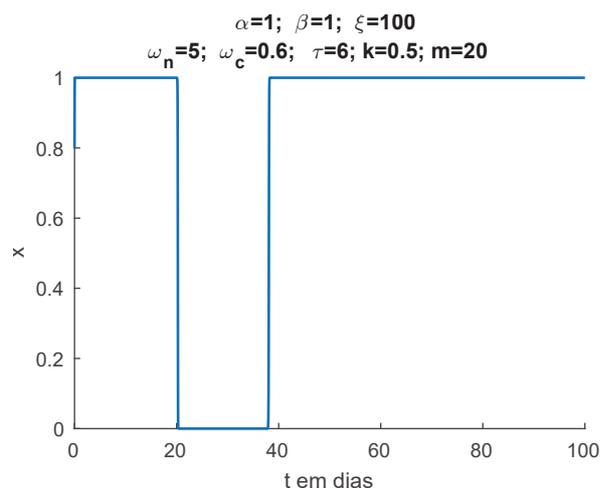
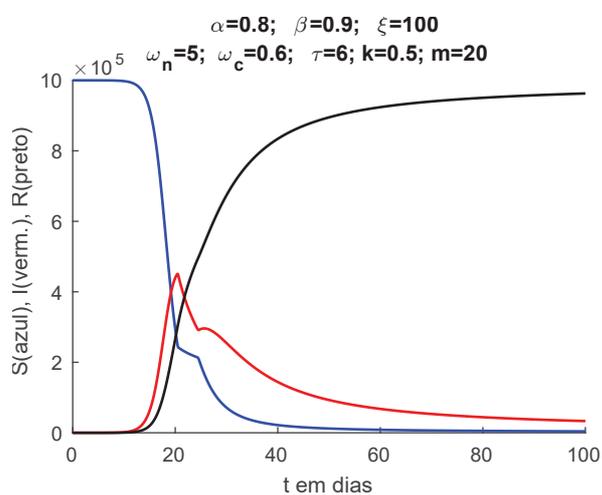
Figura 6.59 – Variação da proporção  $x$  (1).

Figura 6.60 – Modelo Comport. (Ex. 2)

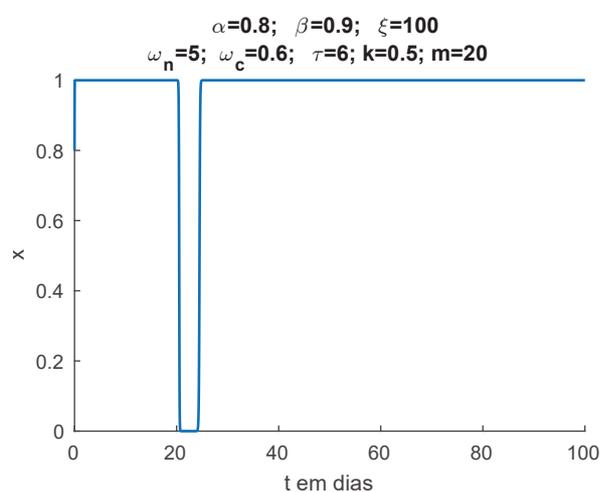
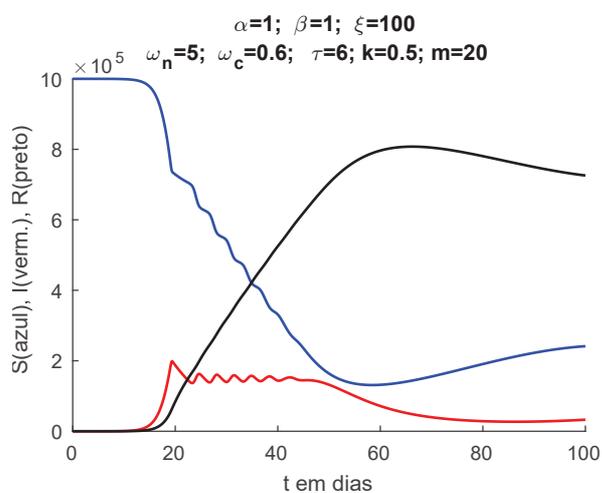
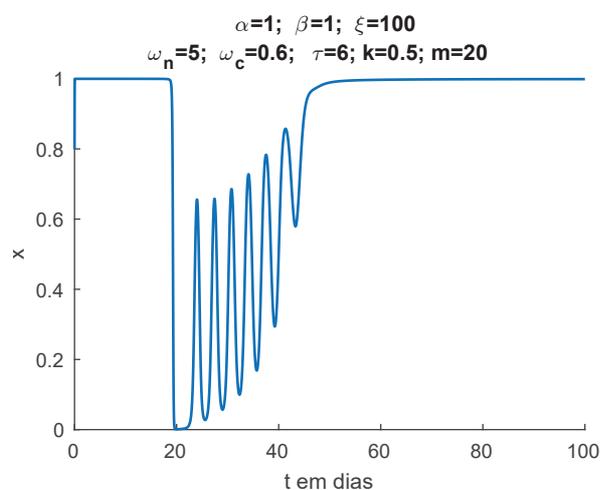
Figura 6.61 – Variação da proporção  $x$  (2).

Figura 6.62 – Modelo Comport. (Ex. 3)

Figura 6.63 – Variação da proporção  $x$  (3).

Finalmente, apresentamos nas Figuras 6.66-6.67 um exemplo de como o modelo pode ser

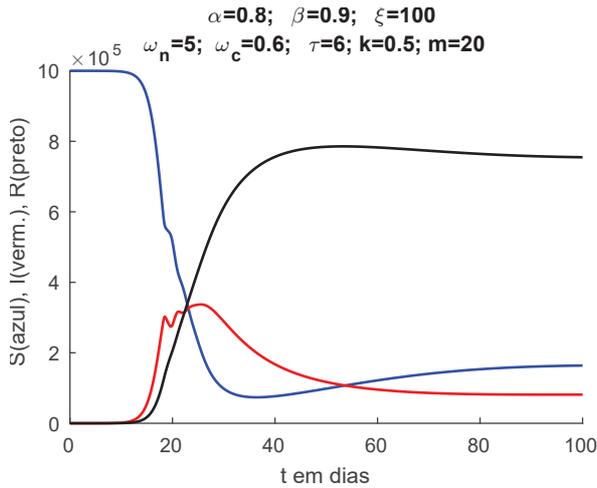


Figura 6.64 – Modelo Comport. (Ex. 4)

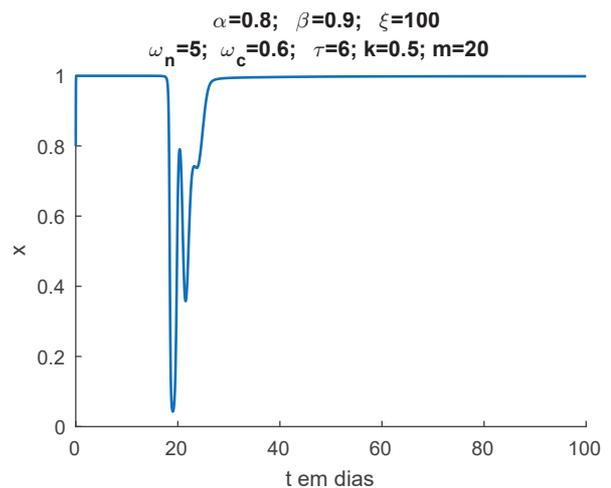


Figura 6.65 – Variação da proporção  $x$  (4).

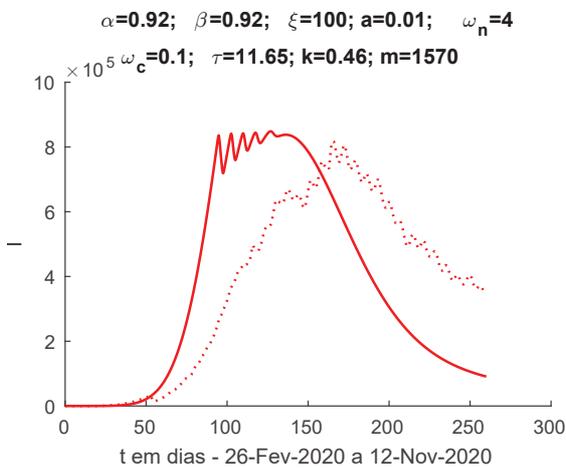


Figura 6.66 – Modelo Comport (BR).

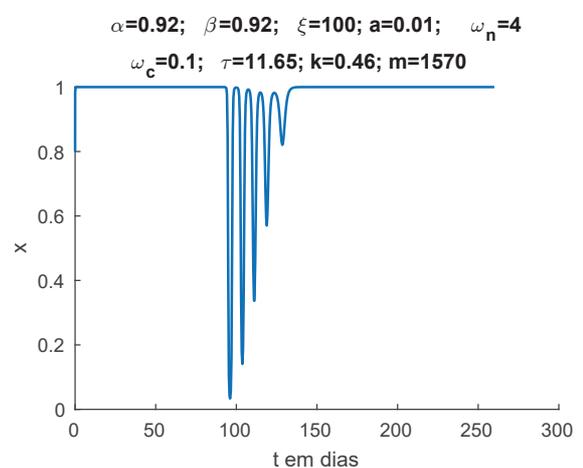


Figura 6.67 – Variação da proporção  $x$  (BR).

utilizado junto aos dados do Brasil, com  $N = 210147125$  e  $\gamma(t) \equiv \gamma = 6.08 \cdot 10^{-5}$ .

Trabalhos futuros pretendem utilizar a otimização via FDIPA e, para tanto, resultados teóricos deverão embasar melhor as escolhas de  $k$ ,  $\xi$  e  $m$ . Por enquanto, as escolhas de  $k$  e  $m$ , por exemplo, foram inteiramente empíricas. Pretendemos um estudo mais aprofundado de [89] para adaptação a esse modelo. Chamamos a atenção para a possibilidade de platôs oscilatórios, inexistente nos outros modelos que apresentamos.

Lembramos que as extensões ao modelo do Capítulo 4 são propostas de maneira a manter a filosofia construtiva apresentada. Acreditamos ter grande potencial um estudo futuro analítico e numérico dessas extensões.

## 7 CONCLUSÃO

O Cálculo Fracionário possui mais de 320 anos, mas apenas nas últimas décadas tem mostrado crescimento substancial como área de pesquisa. É uma área fértil, porque permite tratar o “efeito memória” de muitos fenômenos, considerando a dependência de estágios anteriores em materiais ou processos e, nesse contexto, otimizando a modelagem de fenômenos e sistemas. Porém, o Cálculo Fracionário possui alguns comportamentos incomuns e, nesse sentido, muitas teorias do Cálculo clássico necessitam ser adaptadas para que continuem a ser utilizadas.

Neste trabalho, apresentamos definições básicas e um pequeno contexto histórico do Cálculo Fracionário, chamando a atenção para propriedades que não são herdadas do Cálculo de ordem inteira. Ressaltamos os fatos de que o sinal da derivada deixa de valer como indicativo do comportamento monótono da função e que a solução de um PVI de ordem arbitrária pode não manter a positividade do PVI equivalente com ordem inteira, sendo este último contraexemplo original. Também ilustramos a dificuldade da definição de condições iniciais para PVI's, pois, como as derivadas de ordem arbitrária que utilizamos neste trabalho são não locais, todo o passado deve ser levado em consideração, entre outros aspectos que merecem atenção. Esperamos ter oferecido uma rápida base no Cálculo de ordem arbitrária e, sobretudo, objetivamos atrair a atenção para alguns cuidados que não devem ser esquecidos em seu uso. Esse objetivo nos levou a realizar uma apresentação na I Reunião Mineira de Matemática [91].

Com relação à modelagem fracionária, o presente trabalho não pretende invalidar os diversos modelos desenvolvidos nos últimos anos. Inclusive, sugerimos a leitura de [43] para um estudo do efeito memória tratado pelo Cálculo Fracionário através de uma abordagem estatística. Na verdade, é esperado que os novos modelos não herdem todas as características originais. Mas, é importante saber o que mudou, porque é interessante não apenas estimar a curva real, mas também entender a perspectiva física/biológica do que está acontecendo com as taxas e parâmetros. Nossa discussão versa, assim, sobre o que se perde, o que se ganha e o que se transforma ao utilizar o modelo SIR fracionário, tema que gerou uma publicação em [92]. Discutimos resultados e comportamentos desse tipo de modelagem *ad hoc*, mas, até o momento, não conseguimos encontrar uma estrutura física que nos permita mudar a ordem das derivadas originais, mesmo que as unidades sejam ajustadas e as novas ordens sejam as mesmas em todos os compartimentos.

Portanto, buscamos a possibilidade de modelar um sistema fisicamente, com formalismo semelhante ao dos “pais” Kermack e McKendrick, cuja construção original revisitamos, de maneira que o surgimento de derivadas fracionárias decorra de leis potenciais nas funções de infectividade e remoção. Nesse sentido, apresentamos uma derivação física de um modelo fracionário, seguindo os passos de Angstmann, Henry e McGann [8] e a linguagem probabilística dos Passeios Aleatórios em Tempo Contínuo (PATC).

Nós discutimos o modelo de [8], com a intenção de compreendê-lo melhor e, também, divulgá-lo, pois, é pouco utilizado. Procuramos, ainda, expandir alguns dos resultados anteriores. Demonstramos a não negatividade e, no caso limite sem dinâmica vital, o resultado da monotonicidade, o que está de acordo com as expectativas. Também foram discutidos os números de

reprodução e apresentamos uma nova proposta para sua aproximação. Essas extensões aparecem em nossa publicação [93], sendo mais desenvolvidas nesta dissertação. Outro exemplo de resultado original é o de que a trajetória da solução para  $\alpha = \beta$ , no caso sem dinâmica vital, é a mesma para qualquer  $\alpha \in (0, 1]$ .

Os resultados numéricos corroboram os resultados teóricos. Para tanto, formulamos uma discretização baseada no esquema L1 e construímos um código MATLAB para sua implementação. Assim, realizamos análises de parâmetros, além de validarmos nossas propostas de número de reprodução, verificarmos condições de inicialização, entre outros. Para citar um exemplo, verificamos o efeito das ordens arbitrárias  $\alpha$ , relacionada à função de permanência no compartimento infeccioso, e  $\beta$ , relacionada à infectividade intrínseca. Quanto menor  $\alpha$ , mais pesada é a cauda da função de permanência no compartimento infeccioso, enquanto, quanto maior  $\alpha$ , menor é a função de infectividade intrínseca ao longo do tempo. Portanto, diminuir  $\alpha$  aumenta a assimetria na distribuição de infecciosos e aumenta o pico. Por outro lado, quanto maior o  $\beta$ , mais tempo leva para ocorrer o pico de infecção e é maior, embora o perfil da onda de infectados não mude muito, já que  $\beta$  não influencia a função de permanência  $\phi$ . Esse tipo de discussão válida e facilita o uso significativo do modelo.

Também discutimos um comportamento incomum do modelo do Capítulo 4, onde a curva  $I$  decresce antes de começar a subir. Os resultados numéricos e a análise de comportamentos incomuns do modelo do Capítulo 4 deram oportunidade às apresentações [94]-[95]. Ainda, foram realizados ajustes do modelo a dados da COVID-19 via Mínimos Quadrados usando o algoritmo FDIPA - Feasible Directions Interior Point Algorithm [82]. Alguns resultados iniciais foram publicados nos pôsteres [96] (caso inteiro) e [97] (ordens arbitrárias, estados brasileiros).

Expandindo os resultados, investigamos as diferentes ondas de pandemia, propondo uma infectividade extrínseca variável. Essa proposta possibilitou um ajuste fino nos dados da COVID-19, o que nos encaminha para novas oportunidades, como a proposta futura de uma infectividade extrínseca construída por funções de Mittag-Leffler. A infectividade extrínseca variável foi também ilustrada no artigo [72], onde publicamos uma revisão do modelo de Kermack e McKendrick, partindo para o modelo estudado no Capítulo 4 e apresentando aplicações à COVID-19, com os dados até 25 de julho de 2020.

Ainda, apresentamos de forma seminal duas outras propostas de extensões para o modelo apresentado: a inserção de um compartimento de quarentena e a aplicação da dinâmica de imitação (comportamento humano). Essas extensões são formuladas de maneira a manter a filosofia construtiva apresentada. Ressaltamos que um estudo analítico e numérico mais aprofundado dessas extensões ainda está em aberto, possuindo grande potencial.

O presente trabalho possui diversas vertentes de continuação. Quanto ao estudo do Cálculo Fracionário, trabalhos futuros pretendem relacionar propriedades e espaços de funções nas quais elas valem. Um maior conhecimento da teoria das derivadas de ordem arbitrária pode ser útil para uma análise completa do modelo *ad hoc*, por exemplo. Em particular, a estabilidade do caso sem dinâmica vital ainda está em aberto. Já no que diz respeito ao modelo construído com distribuições de Mittag-Leffler, nosso foco principal, pretendemos fechar alguns resultados não completamente explorados, como a estabilidade dos pontos de equilíbrio no caso geral e a

utilização de uma infectividade extrínseca advinda de funções de Mittag-Leffler. Além disso, acreditamos serem de grande importância estudos posteriores nos modelos propostos (quarentena e comportamental), pois carecem de embasamento teórico, como a análise da estabilidade. Resultados numéricos poderão ser melhorados com o desenvolvimento de outras discretizações e a utilização de uma base de dados mais sólida.

Encerramos parafraseando uma analogia escrita pelo professor Rubens de Figueiredo Camargo na conclusão de sua tese [24]: da mesma forma que a mecânica de Newton parecia estar completa até o surgimento das teorias de Einstein, também o Cálculo clássico parecia estar completo; mas, com o advento do Cálculo Fracionário, estamos diante de uma evolução cujas consequências podem ser tão formidáveis quanto às advindas da física quântica.



## REFERÊNCIAS

- [1] LEHNING, H. La propagation des Épidémies. *Maths et Médecine*, 2016.
- [2] KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. Contributions to the mathematical theory of epidemics—i. 1927. *Bulletin of mathematical biology*, v. 53, n. 1-2, p. 33–55, 1991.
- [3] BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. Epidemic models. In: *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer, 2012. p. 345–409.
- [4] MINA, M. J.; PARKER, R.; LARREMORE, D. B. Rethinking COVID-19 test sensitivity—a strategy for containment. *New England Journal of Medicine*, Mass Medical Soc, v. 383, n. 22, 2020.
- [5] Wikipedia contributors. *Basic reproduction number — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2021. [Online; accessed 2-March-2021].
- [6] COHEN, J. E. Mathematics is biology’s next microscope, only better; biology is mathematics’ next physics, only better. *PLoS biology*, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 2, n. 12, p. e439, 2004.
- [7] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. Capelas de. *Cálculo fracionário*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [8] ANGSTMANN, C. N.; HENRY, B. I.; MCGANN, A. V. A fractional-order infectivity and recovery SIR model. *Fractal and Fractional*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 1, n. 1, p. 11, 2017.
- [9] ANGSTMANN, C.; HENRY, B.; MCGANN, A. A fractional order recovery SIR model from a stochastic process. *Bulletin of mathematical biology*, Springer, v. 78, n. 3, p. 468–499, 2016.
- [10] MURRAY, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction*. New York: Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. New York: Oxford university press, 1979.
- [12] MATHWORKS. *MATLAB*. 2018. [https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s\\_tid=hp\\_products\\_matlab](https://www.mathworks.com/products/matlab.html?s_tid=hp_products_matlab). Acesso em: 03 fev. 2020.
- [13] SIMMONS, G. F. *Differential equations with applications and historical notes*. Danvers: CRC Press, 2016.
- [14] SALERI, F.; QUARTERONI, A. *Cálculo científico: com MATLAB e Octave*. Milano: Springer, 2007.
- [15] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego: Elsevier, 1998.

- [16] OLIVEIRA, E. Capelas de. *Solved Exercises in Fractional Calculus*. Switzerland: Springer, 2019.
- [17] MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. A poster about the old history of Fractional Calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 13, n. 4, p. 447p–454p, 2010.
- [18] MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of Fractional Calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 1140–1153, 2011.
- [19] OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. New York: Elsevier, 1974.
- [20] MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. London: World Scientific, 2010.
- [21] DIETHELM, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2004.
- [22] GORENFLO, R.; KILBAS, A. A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. V. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Berlin: Springer, 2014.
- [23] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 293, p. 4–13, 2015.
- [24] CAMARGO, R. de F. *Cálculo fracionário e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Supervised by Edmundo Capelas de Oliveira.
- [25] OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. Capelas de. Hilfer–Katugampola fractional derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 37, n. 3, p. 3672–3690, 2018.
- [26] OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. Capelas de. On the generalized  $(k, \rho)$ -fractional derivative. *Progr. Fract. Differ. Appl*, v. 4, p. 133–145, 2018.
- [27] SOUSA, J. V. da C.; OLIVEIRA, E. Capelas de. On the  $\psi$ -Hilfer fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 60, p. 72–91, 2018.
- [28] GUSSON, V. H. L.; CAMARGO, R. de F. Rainha das Funções Especiais. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- [29] GARRAPPA, R. Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 53, n. 3, p. 1350–1369, 2015.
- [30] WIDDER, D. V. *The Laplace transformation*. London: Princeton University Press, 1946.
- [31] KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. *A primer of real analytic functions*. Birkhauser: Springer Science & Business Media, 2002.

- [32] GUO, P.; LI, C.; CHEN, G. On the fractional mean-value theorem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 22, n. 05, p. 1250104, 2012.
- [33] KUMAR, R.; KUMAR, S. A new fractional modelling on susceptible-infected-recovered equations with constant vaccination rate. *Nonlinear Engineering*, De Gruyter Open, v. 3, n. 1, p. 11–19, 2014.
- [34] AMMI, M. R. S.; TAHIRI, M.; TORRES, D. F. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate. *Mathematics in Computer Science*, Springer, v. 15, n. 1, p. 91–105, 2021.
- [35] GOUFO, E. F. D.; MARITZ, R.; MUNGANGA, J. Some properties of the Kermack-McKendrick epidemic model with fractional derivative and nonlinear incidence. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2014, n. 1, p. 1–9, 2014.
- [36] DIETHELM, K. Monotonicity of functions and sign changes of their Caputo derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, De Gruyter, v. 19, n. 2, p. 561–566, 2016.
- [37] CHOI, S. K.; KOO, N. The monotonic property and stability of solutions of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 74, n. 17, p. 6530–6536, 2011.
- [38] TARASOV, V. E. *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. Berlin: de Gruyter, 2019.
- [39] SABATIER, J. Why the Caputo definition and the initial value problem should not be considered in a fractional model definition - December 4th-6th. In: *First Online Conference on Modern Fractional Calculus and its Applications*. Online: OCMFCA, 2020.
- [40] SLAVÍK, A. *Product integration, its history and applications*. Prague: Matfyzpress Prague, 2007.
- [41] CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the Lambert W function. *Advances in Computational mathematics*, Springer, v. 5, n. 1, p. 329–359, 1996.
- [42] HETHCOTE, H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM review*, SIAM, v. 42, n. 4, p. 599–653, 2000.
- [43] BARROS, L. C. de; LOPES, M. M.; PEDRO, F. S.; ESMI, E.; SANTOS, J. P. C. dos; SÁNCHEZ, D. E. The memory effect on Fractional Calculus : an application in the spread of COVID-19. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 40, n. 3, p. 1–21, 2021.
- [44] DOKOUMETZIDIS, A.; MAGIN, R.; MACHERAS, P. A commentary on fractionalization of multi-compartmental models. *Journal of pharmacokinetics and pharmacodynamics*, Springer, v. 37, n. 2, p. 203–207, 2010.

- [45] DOKOUMETZIDIS, A.; MAGIN, R.; MACHERAS, P. Fractional kinetics in multi-compartmental systems. *Journal of pharmacokinetics and pharmacodynamics*, Springer, v. 37, n. 5, p. 507–524, 2010.
- [46] HASAN, S.; AL-ZOUBI, A.; FREIHET, A.; AL-SMADI, M.; MOMANI, S. Solution of fractional SIR epidemic model using residual power series method. *Applied Mathematics and Information Sciences*, v. 13, n. 2, p. 153–161, 2019.
- [47] AHMAD, A.; FARMAN, M.; AHMAD, M.; RAZA, N.; ABDULLAH, M. Dynamical behavior of SIR epidemic model with non-integer time fractional derivatives: A mathematical analysis. *Int. J. Adv. Appl. Sci*, v. 5, n. 1, p. 123–129, 2018.
- [48] FARMAN, M.; AHMAD, A.; MUSLIM, H.; AHMAD, M. Dynamical behavior of Hepatitis B fractional-order model with modeling and simulation. *Journal of Biochemical Technology*, Sevas Educational Society, v. 10, n. 3, p. 11, 2019.
- [49] ROSTAMY, D.; MOTTAGHI, E. Numerical solution and stability analysis of a nonlinear vaccination model with historical effects. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, v. 47, n. 6, p. 1478–1494, 2017.
- [50] HAQ, F.; SHAHZAD, M.; MUHAMMAD, S.; WAHAB, H. A. Numerical analysis of fractional order epidemic model of childhood diseases. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Hindawi, v. 2017, 2017.
- [51] NISAR, K. S.; AHMAD, S.; ULLAH, A.; SHAH, K.; ALRABAIAH, H.; ARFAN, M. Mathematical analysis of SIRD model of COVID-19 with Caputo fractional derivative based on real data. *Results in Physics*, Elsevier, v. 21, p. 103772, 2021.
- [52] ALMEIDA, R. Analysis of a fractional SEIR model with treatment. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 84, p. 56–62, 2018.
- [53] ALSHOMRANI, A. S.; ULLAH, M. Z.; BALEANU, D. Caputo SIR model for COVID-19 under optimized fractional order. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2021, n. 1, p. 1–17, 2021.
- [54] BALEANU, D.; JAJARMI, A.; SAJJADI, S.; MOZYRSKA, D. A new fractional model and optimal control of a tumor-immune surveillance with non-singular derivative operator. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 29, n. 8, p. 083127, 2019.
- [55] AKYILDIZ, F. T.; ALSHAMMARI, F. S. Complex mathematical SIR model for spreading of COVID-19 virus with Mittag-Leffler kernel. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2021, n. 1, p. 1–17, 2021.
- [56] REZAPOUR, S.; MOHAMMADI, H.; SAMEI, M. E. SEIR epidemic model for COVID-19 transmission by Caputo derivative of fractional order. *Advances in difference equations*, SpringerOpen, v. 2020, n. 1, p. 1–19, 2020.

- [57] SHI, R.; LU, T. Dynamic analysis and optimal control of a fractional order model for hand-foot-mouth disease. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Springer, v. 64, p. 565–590, 2020.
- [58] AMMI, M. R. S.; TAHIRI, M.; TORRES, D. F. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate. *Mathematics in Computer Science*, Springer, p. 1–15, 2020.
- [59] CONG, N.; TUAN, H. Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations. *Journal of Integral Equations and Applications*, Rocky Mountain Mathematics Consortium, v. 29, n. 4, p. 585–608, 2017.
- [60] SENE, N. SIR epidemic model with Mittag-Leffler fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 137, p. 109833, 2020.
- [61] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [62] GALLEGOS, J. A.; DUARTE-MERMOUD, M. A. On the Lyapunov theory for fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 287, p. 161–170, 2016.
- [63] MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: LILLE, FRANCE. *Computational engineering in systems applications*. Beijing, 1996. v. 2, n. 1, p. 963–968.
- [64] LI, C.; MA, Y. Fractional dynamical system and its linearization theorem. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 71, n. 4, p. 621–633, 2013.
- [65] ZHANG, R.; LIU, Y. A new Barbalat’s lemma and Lyapunov stability theorem for fractional order systems. In: IEEE. *2017 29th Chinese control and decision conference (CCDC)*. Chongqing, 2017. p. 3676–3681.
- [66] GALLEGOS, J. A.; DUARTE-MERMOUD, M. A.; AGUILA-CAMACHO, N.; CASTRO-LINARES, R. On fractional extensions of Barbalat lemma. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 84, p. 7–12, 2015.
- [67] VARGAS-DE-LEÓN, C. Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 24, n. 1-3, p. 75–85, 2015.
- [68] AGUILA-CAMACHO, N.; DUARTE-MERMOUD, M. A.; GALLEGOS, J. A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 19, n. 9, p. 2951–2957, 2014.
- [69] BATEMAN, H. *Higher transcendental functions*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Vol 3.
- [70] ANGSTMANN, C. N.; HENRY, B. I.; MCGANN, A. V. A fractional-order infectivity SIR model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 452, p. 86–93, 2016.

- [71] PILLAI, R. N. On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Annals of the Institute of statistical Mathematics*, Springer, v. 42, n. 1, p. 157–161, 1990.
- [72] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Fractional derivatives applied to epidemiology. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, p. 157–177, 2021.
- [73] HETHCOTE, H. W.; TUDOR, D. W. Integral equation models for endemic infectious diseases. *Journal of mathematical biology*, Springer, v. 9, n. 1, p. 37–47, 1980.
- [74] MILLER, R. K. On the linearization of Volterra integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Academic Press, v. 23, n. 1, p. 198–208, 1968.
- [75] CARDOSO, L. C.; SANTOS, F. L. Pio dos; CAMARGO, R. de F. Método de diferenças finitas não clássico: influência da função denominador na solução numérica de um modelo de ordem fracionária. In: *Congress: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Online: CNMAC, 2021.
- [76] LI, H.; CAO, J.; LI, C. High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection–diffusion equations (iii). *Journal of computational and Applied mathematics*, Elsevier, v. 299, p. 159–175, 2016.
- [77] KURODA, L. K. B. *Nova modelagem fracionária aplicada à dinâmica tumoral (HPV 16)*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Botucatu, 2020. Supervised by Rubens de Figueiredo Camargo.
- [78] ORGANIZATION, W. H. Coronavirus disease 2019 (COVID-19): situation report. World Health Organization, 2020.
- [79] TRYPSTEEN, W.; CLEEMPUT, J. V.; SNIPPENBERG, W. V.; GERLO, S.; VANDEKERCKHOVE, L. On the whereabouts of SARS-CoV-2 in the human body: A systematic review. *PLoS Pathogens*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 16, n. 10, p. e1009037, 2020.
- [80] ORGANIZATION, W. H. Director-general’s opening remarks at the media briefing on COVID-19. World Health Organization, 2020.
- [81] Gazeta do Povo. *Queda da curva de COVID-19 no Paraná ocorre com metade da velocidade de subida*. 2021. [Online; accessed 01-September-2021]. Disponível em: <<https://www.gazetadopovo.com.br/parana/curva-covid-parana-velocidade-queda/>>.
- [82] HERSKOVITS, J. Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 99, n. 1, p. 121–146, 1998.
- [83] HERSKOVITS, J.; SANTOS, G. On the computer implementation of feasible direction interior point algorithms for nonlinear optimization. *Structural optimization*, Springer, v. 14, n. 2, p. 165–172, 1997.

- [84] Microsoft/Bing. *COVID-19-Data*. 2020. [Online; accessed 26-September-2020]. Disponível em: <<https://github.com/microsoft/Bing-COVID-19-Data/blob/master/data/Bing-COVID19-Data.csv>>.
- [85] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística . *Taxa Bruta de Mortalidade por mil habitantes – Brasil – 2000 a 2015*. 2015. [IBGE-Online; accessed 18-July-2020]. Disponível em: <<https://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-brutas-de-mortalidade.html>>.
- [86] SOUZA, W. M. de et al. Epidemiological and clinical characteristics of the COVID-19 epidemic in Brazil. *Nature human behaviour*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 8, p. 856–865, 2020.
- [87] ORGANIZATION, W. H. What do we know about SARS-CoV-2 and COVID-19? (update-28). World Health Organization, 2020.
- [88] Collective Behaviour. *Couzin Lab*. 2021. [Online; accessed 12-Sep-2021]. Disponível em: <<https://collectivebehaviour.com/people/couzin-iain/>>.
- [89] POLETTI, P. *Human behavior in epidemic modelling*. Tese (Doutorado) — University of Trento, 2010.
- [90] LÓPEZ, M.; MARCHESIN, D.; MATOS, V.; SCHECTER, S. *Equações Diferenciais e Modelos Epidemiológicos*. Rio de Janeiro: 33º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2021.
- [91] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. O Cálculo Fracionário e alguns de seus comportamentos incomuns. In: *I Reunião Mineira de Matemática*. Online: RMM, 2021.
- [92] MAZORCHE, S. R.; MONTEIRO, N. Z. Modelos epidemiológicos fracionários: o que se perde, o que se ganha, o que se transforma? In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. Online: CNMAC, 2021.
- [93] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Analysis and application of a fractional SIR model constructed with Mittag- Leffler distribution. In: *Proceedings of the XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Online: CILAMCE, 2021.
- [94] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Estudo de um modelo SIR fracionário construído com distribuição de Mittag-Leffler. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. Online: CNMAC, 2021.
- [95] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Analysis results on an arbitrary-order SIR model constructed with Mittag-Leffler distribution. In: *Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações*. Online: ENAMA, 2021.
- [96] VICENTE, H. T.; MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Calibragem do modelo epidemiológico SIR aplicado à COVID-19. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. Online: CNMAC, 2021.

- [97] MONTEIRO, N. Z.; MAZORCHE, S. R. Application of a fractional SIR model built with Mittag-Leffler distribution. In: *Conference: Mathematical Congress of the Americas*. Online: MCA, 2021.