

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

Cleber Nascimento da Costa

Análise da Estrutura Canônica do Setor de Calibre CPT-Par Massivo do
Modelo Padrão Estendido

Juiz de Fora
2021

Cleber Nascimento da Costa

**Análise da Estrutura Canônica do Setor de Calibre CPT-Par Massivo do
Modelo Padrão Estendido**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física - PPGF da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ananias Neto

Coorientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Cleber Nascimento da.

Análise da Estrutura Canônica do Setor de Calibre CPT-Par Massivo
do Modelo Padrão Estendido / Cleber Nascimento da Costa. – 2021.

55 f.

Orientador: Jorge Ananias Neto

Coorientador: Everton M. C. de Abreu

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física - PPGF, 2021.

1. Gauge Unfixing Aprimorado. 2. Invariância de Calibre. 3. Quebra
de Simetria de Lorentz. I. Ananias Neto, Jorge, orient. II. M. C. de Abreu,
Everton, coorient. III. Título.

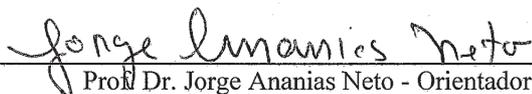
Cleber Nascimento da Costa

"Análise da Estrutura Canônica do Setor de Calibre CPT-Par Massivo do Modelo Padrão Estendido".

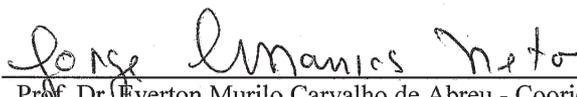
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Aprovada em 27 de agosto de 2021.

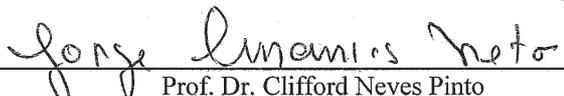
BANCA EXAMINADORA



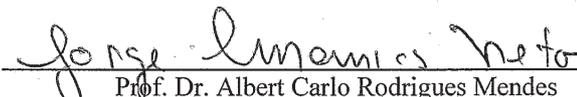
Prof. Dr. Jorge Ananias Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ



Prof. Dr. Clifford Neves Pinto
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ



Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

*Aos meu pais, **Marli** e **José**, por todo o sacrifício feito em prol das minhas realizações e por toda a confiança depositada em mim.*

*À minha irmã **Sabrina** e a todos os familiares, por acreditarem em mim.*

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Professor **Jorge Ananias Neto** e Professor **Everton M. C. de Abreu**, pela confiança, paciência e pelo conhecimento transferido.

Aos companheiros de pesquisa **Paulo**, **Widervan** e **Gabriella**, pela amizade, colaboração e discussões que culminaram na realização deste trabalho.

A todos os amigos do mestrado.

À **Universidade Federal de Juiz de Fora**, por oferecer as condições necessárias para a realização deste trabalho.

À **CAPES**, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, é investigada a estrutura canônica do setor de calibre CPT-par do modelo padrão estendido (MPE) acoplado com um termo de Proca, através do *método de Dirac* para sistemas vinculados e de uma forma aprimorada do método *gauge unfixing* (GU). O setor de calibre do modelo padrão estendido completo contém 23 parâmetros que quebram, espontaneamente, a invariância de Lorentz. 19 dos 23 parâmetros estão contidos no termo CPT-par. O setor de calibre CPT-par é originalmente um sistema invariante de calibre (que apresenta vínculos de primeira classe em sua estrutura), mas, acoplado com um termo de Proca, tem a sua simetria de calibre quebrada, fazendo com que este modelo passe a ter vínculos de segunda classe. Sendo assim, são calculados os parênteses de Dirac do modelo. Através do método GU aprimorado, converte-se o modelo com vínculos de segunda classe em um modelo com vínculos de primeira classe e, assim, simetrias escondidas na estrutura Hamiltoniana são reveladas. Foram obtidos dois modelos invariantes de calibre, nos quais os parênteses de Poisson envolvendo as variáveis de primeira classe do espaço de fase são consistentes com os parênteses de Dirac envolvendo as variáveis originais de segunda classe.

Palavras-chave: *Gauge unfixing* aprimorado. Invariância de calibre. Violação da invariância de Lorentz.

ABSTRACT

In this work, it is investigated the canonical structure of the CPT-even gauge sector of the standard model extension (SME) coupled with a Proca term, through the *Dirac method* for constrained systems and an improved form of the *gauge unfixing* formalism. The gauge sector of the standard model extension contains 23 parameters that violate, spontaneously, the Lorentz invariance. 19 of 23 parameters are contained within the CPT-even term. The CPT-even gauge sector of the SME is originally a gauge invariant system (that presents first class constraints in its structure), but, if coupled with a Proca term, the gauge symmetry is broken, resulting in the presence of second class constraints in the model. Therefore, the Dirac brackets of the model are calculated. Through the improved GU method, one converts the second class model into a first class one and, then, the hidden symmetries of the canonical structure are revealed. Two gauge invariant models were obtained, in which the Poisson brackets between the first class variables of the phase space are consistent with the Dirac brackets involving the original second class ones.

Keywords: Improved gauge unfixing. Gauge invariance. Lorentz invariance violation

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|--|
| PP | Parêntese de Poisson |
| PD | Parêntese de Dirac |
| GU | <i>Gauge Unfixing</i> |
| CPT | Charge Conjugation-Parity Transformation-Time Reversal |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------|----------------------|
| $\{, \}$ | Parêntese de Poisson |
| $[,]$ | Comutador |
| \approx | Fracamente igual |
| $\{, \}_D$ | Parêntese de Dirac |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 10 |
| 2 | FUNDAMENTOS BÁSICOS | 13 |
| 2.1 | O FORMALISMO LAGRANGIANO | 13 |
| 2.2 | O FORMALISMO HAMILTONIANO | 14 |
| 2.2.1 | Equações de Hamilton Via Cálculo Variacional | 16 |
| 2.2.2 | Parênteses de Poisson | 16 |
| 2.2.3 | Variação Infinitesimal de uma Variável Dinâmica | 18 |
| 2.2.4 | Da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica: A Quantização Canônica | 18 |
| 3 | O MÉTODO DE DIRAC PARA SISTEMAS VINCULADOS | 21 |
| 3.1 | VÍNCULOS PRIMÁRIOS | 21 |
| 3.2 | CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA | 22 |
| 3.3 | VÍNCULOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA CLASSE | 23 |
| 3.3.1 | Parênteses de Dirac | 24 |
| 3.4 | O MODELO CPT-PAR MASSIVO | 25 |
| 3.4.1 | Equações de Movimento | 27 |
| 3.4.2 | A Estrutura Canônica | 28 |
| 4 | O <i>GAUGE UNFIXING</i> | 34 |
| 4.1 | O <i>GAUGE UNFIXING</i> USUAL | 34 |
| 4.2 | O <i>GAUGE UNFIXING</i> APRIMORADO | 35 |
| 4.2.1 | Exemplo: O Modelo de Chern-Simons Abeliano Puro | 38 |
| 4.3 | REVELANDO SIMETRIAS NO MODELO CPT-PAR MASSIVO | 43 |
| 4.3.1 | Caso 1: T_1 como Gerador de Simetria de Calibre | 43 |
| 4.3.2 | Caso 2: T_2 como Gerador de Simetria de Calibre | 46 |
| 5 | CONCLUSÕES | 51 |
| | REFERÊNCIAS | 53 |

1 INTRODUÇÃO

A invariância de Lorentz, devido à teoria da relatividade especial de Einstein, expressa a afirmação de que as leis da física são as mesmas para diferentes observadores que se deslocam, um em relação ao outro, dentro de um referencial inercial. Em razão disso, a invariância de Lorentz é uma das bases da física moderna. Sabe-se, até o presente momento, com base em diversos resultados experimentais, que a invariância de Lorentz se apresenta como uma simetria exata da natureza [1]. Entretanto, a teoria de cordas sugere, devido a efeitos da gravitação quântica na escala de Planck, que a invariância de Lorentz e a simetria CPT possam ser violadas nessa escala de energia [2, 3, 4, 5]. Tal possibilidade tem gerado recentemente uma onda de questionamentos, sejam eles de natureza teórica ou experimental.

Com o objetivo de se obter uma extensão geral do modelo padrão que viole as invariâncias de Lorentz e CPT, Colladay e Kostelecky desenvolveram um sistema, denominado modelo padrão estendido (MPE), contendo coeficientes cujas direções privilegiadas induzem à quebra *espontânea* da simetria de Lorentz em um determinado referencial [6].

O setor de calibre do MPE é constituído pelo termo do campo eletromagnético usual, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, acrescentado de um termo que viola a simetria CPT, $\varepsilon^{\beta\alpha\rho\phi}V_\beta A_\alpha F_{\rho\phi}$, conhecido como termo de Carroll-Field-Jackiw [7]; e um termo que preserva a simetria CPT, $W^{\mu\nu\rho\phi}F_{\mu\nu}F_{\rho\phi}$ [6, 8]. O setor de calibre do modelo padrão estendido tem sido bastante estudado ultimamente [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]., tendo como principais motivos para essa atenção a possibilidade de se obter novos efeitos eletromagnéticos, provocados pelos coeficientes violadores das invariâncias de Lorentz e CPT, e uma melhor determinação dos limites superiores para os valores desses coeficientes.

O MPE preserva a invariância de calibre do modelo padrão mínimo. A consequência dessa característica é manifestada nas equações de movimento do sistema, em que parte das quais são relações de vínculos entre as coordenadas generalizadas e as velocidades generalizadas. No espaço de fase, esses vínculos constituem os chamados vínculos de primeira classe entre as coordenadas e os momentos [16].

Contudo, ao se adicionar um termo de Proca ao setor de calibre do MPE, isto é, inserir um termo que concede massa ao campo de calibre [17], não só a invariância de Lorentz é quebrada, mas também a invariância de calibre [18]. Com relação à última, na linguagem dos sistemas vinculados, significa dizer que o sistema apresenta vínculos de segunda classe em sua estrutura hamiltoniana (sendo assim, um sistema de segunda classe). Desta forma, o sistema perde também uma característica que é padrão a todas as teorias de interações fundamentais. Porém, é possível converter esse sistema para um sistema de primeira classe (que apresenta invariância de calibre). Em outras palavras, é possível revelar simetrias de calibre em um sistema que naturalmente não apresenta essa

simetria. Na literatura, existem vários métodos que permitem realizar esse procedimento:

1. truque de Stueckelberg [19],
2. quantização simplética [20],
3. quantização de Batalin-Fradkin-Tyutin (BFT) ,
4. método *gauge unfixing* (GU),
5. método *gauge unfixing* aprimorado.

As quantizações via truque de Stueckelberg e formalismo simplético são executadas através da lagrangiana que descreve o sistema. Já os métodos BFT, GU e GU aprimorado são executados no espaço de fase. No método *BFT*, são introduzidas variáveis extras no espaço de fase [21, 22, 23], diferentemente dos métodos GU e GU aprimorado, nos quais as teorias de calibre são obtidas dentro do espaço de fase através das variáveis originais de segunda classe. O método GU foi formulado inicialmente por Mitra e Rajaraman [24] e posteriormente continuado por Anishetty e Vytheeswaran [25, 26]. Nesse método, aplica-se um operador de projeção na hamiltoniana canônica do sistema, transformando-a em uma hamiltoniana invariante de calibre. Já no método GU aprimorado, desenvolvido por Jorge Ananias Neto [27, 28], as variáveis de segunda classe do sistema são convertidas em variáveis de primeira classe e, em seguida, as funções dessas variáveis são reescritas, se tornando funções invariantes de calibre.

Os objetivos deste trabalho são:

1. analisar a estrutura canônica do modelo CPT-par massivo, cujo sistema é representado pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\mu\nu\rho\phi}F_{\mu\nu}F_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu,$$

através do método de Dirac para sistemas vinculados [29];

2. revelar a simetria de calibre escondida no modelo CPT-par massivo, através da aplicação do método *gauge unfixing* aprimorado, e discutir as consequências desse procedimento na teoria;
3. comparar os resultados obtidos pelos dois procedimentos.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma breve revisão dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, que constituem a base da mecânica analítica e da teoria quântica de campos. No capítulo 3, discute-se as propriedades dos sistemas hamiltonianos vinculados, o método de Dirac e sua aplicação ao modelo CPT-par massivo. No capítulo 4, é apresentado o método *gauge unfixing*, dando ênfase ao método

gauge unfixing aprimorado, o qual é aplicado ao modelo CPT-par massivo. O capítulo 5 é dedicado à conclusão e às perspectivas.

2 FUNDAMENTOS BÁSICOS

2.1 O FORMALISMO LAGRANGIANO

Princípio de Hamilton

Considere uma determinada função $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$, chamada de *função de Lagrange*, ou *lagrangiana*, e que L dependa de certas quantidades $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ e t , as quais são, respectivamente, as coordenadas generalizadas, as velocidades generalizadas e o tempo [34]. Suponha que nos instantes de tempo $t = t_1$ e $t = t_2$ o sistema seja caracterizado, respectivamente, pelas coordenadas $q_i(t_1)$ e $q_i(t_2)$ e que o sistema evolua de $t = t_1$ para $t = t_2$. Integrando Ldt entre estes instantes de tempo, tem-se

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t). \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) é chamada de *ação*. A ação S não depende da variável de integração t , mas sim de $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$. Para cada valor de $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$, tem-se um valor determinado de S . Por esta razão, costuma-se representar a ação da seguinte forma:

$$S = S[L], \quad (2.2)$$

e diz-se que S é um funcional de L [32]. Sendo assim, faz-se a seguinte pergunta: para que valor de $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$, passando pelos instantes $t=t_1$ e $t = t_2$, o funcional S assume um valor de extremo (máximo ou mínimo)? Suponha que $q_i = q_i(t)$ seja uma função para a qual a ação assume um valor de extremo. Isto é, se for aplicada uma variação infinitesimal na coordenada $q_i(t)$ do tipo

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t), \quad (2.3)$$

então, nos instantes de tempo $t = t_1$ e $t = t_2$, deve-se ter

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \quad (2.4)$$

Desse modo, a função $q_i(t)$ corresponderá a um extremo se $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[L + \delta L] - S[L] = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t), t) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sabendo que

$$\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_i \quad (2.6)$$

e integrando o primeiro termo de (2.5) por partes, vem

$$\begin{aligned}\delta S &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0,\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde foi utilizado o fato (2.4). A quantidade δq_i é uma função de t completamente arbitrária, obrigando que o restante do integrando seja nulo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, R). \quad (2.8)$$

Assumindo que as R coordenadas generalizadas sejam independentes. Estas R equações diferenciais resultantes são chamadas de *equações de Euler-Lagrange* e representam a condição de extremo para a ação. Em outras palavras, se a lagrangiana for conhecida, pode-se obter as equações de Euler-Lagrange, que representam as equações de movimento do sistema. Ou seja, as teorias clássicas e quânticas estão diretamente associadas à ação.

2.2 O FORMALISMO HAMILTONIANO

É possível também descrever a dinâmica de um sistema por meio de uma duplicação simétrica do número de variáveis independentes. Esta descrição é feita através das $2R$ variáveis $q_1, \dots, q_R, p_1, \dots, p_R$, onde p_i é o que se define como *momento canônico conjugado* à q_i [33]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, R. \quad (2.9)$$

Considere a matriz Hessiana Ω , que possui os seguintes elementos:

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (2.10)$$

Suponha agora que a matriz Hessiana seja inversível, isto é

$$\det \Omega \neq 0. \quad (2.11)$$

Desta forma, é possível trocar a descrição do sistema mecânico através do conjunto (q_i, \dot{q}_i) pela descrição através do conjunto (q_i, p_i) . Efetivamente falando, troca-se a função de Lagrange $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ por uma função $H = H(q_i(t), p_i(t), t)$. Esta mudança é feita por meio de uma transformação de Legendre, a qual é executada da seguinte forma: A diferencial total da lagrangiana com relação às coordenadas generalizadas e às velocidades generalizadas é

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right). \quad (2.12)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange (2.8), pode-se notar que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.9) e (2.13) na equação (2.12), temos

$$dL = \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i). \quad (2.14)$$

Pode-se reescrever o segundo termo de (2.14) da seguinte forma:

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = \sum_i [d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i]. \quad (2.15)$$

Sendo assim, substituindo (2.15) em (2.14), vem

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i [\dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i] \\ \rightarrow d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A quantidade entre parênteses é, por definição, a *função de Hamilton* ou *hamiltoniana*:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.17)$$

As diferenciais no lado direito da expressão (2.16) indicam que a hamiltoniana depende das variáveis q_i e p_i . Ou seja, é a função $H = H(q_i(t), p_i(t), t)$ mencionada no início desta seção. Dito isso, pode-se reescrever a equação (2.16) como

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i). \quad (2.18)$$

Sabendo agora que a hamiltoniana depende das coordenadas e dos momentos, a diferencial total de H com relação às mesmas é:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right). \quad (2.19)$$

Comparando as equações (2.18) e (2.19), obtemos as seguintes equações:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, R. \quad (2.20)$$

As $2R$ equações diferenciais de segunda ordem que constituem esse conjunto são chamadas de *equações de Hamilton*. Conclui-se então que a descrição da dinâmica de um sistema mecânico através das R equações de Euler-Lagrange é substituída pela descrição através das $2R$ equações de Hamilton.

Considere a derivada total da hamiltoniana (2.17) com relação ao tempo:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.21)$$

Utilizando as equações de Hamilton (2.20), a equação (2.21) fica

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Ou seja, se a hamiltoniana não depender explicitamente do tempo, então ela é uma quantidade conservada no tempo (também chamada de constante de movimento) e representa a energia total do sistema [34].

2.2.1 Equações de Hamilton Via Cálculo Variacional

A condição de invariância da ação é

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = 0, \quad (2.23)$$

considerando que a variação é nula nos extremos $q_i(t_1)$ e $q_i(t_2)$. Entretanto, se forem consideradas variações da trajetória no espaço de fase, pode-se reproduzir essa condição através da definição de hamiltoniana:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i(t), p_i(t), t) \right\} = 0. \quad (2.24)$$

Considerando que as variações de q_i e p_i são independentes entre si, a variação da ação toma a seguinte forma:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ [\delta(p_i) \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i] - \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] \right\} = 0. \quad (2.25)$$

Sabendo que a ordem de operação das derivadas δ e $\frac{d}{dt}$ pode ser trocada, o segundo termo de (2.25) pode ser integrado por partes, resultando em:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right\} = 0. \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\} \delta p_i = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como as variações δq_i e δp_i são arbitrárias, os conteúdos entre chaves nos dois termos do lado direito da equação (2.26) devem se anular separadamente:

$$-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0,$$

ou,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, R, \quad (2.27)$$

as quais são as equações de Hamilton.

2.2.2 Parênteses de Poisson

Seja $A = A(q_i(t), p_i(t), t)$ uma variável dinâmica que depende explicitamente das coordenadas generalizadas, dos momentos generalizados e do tempo. Considere a derivada total de A com relação ao tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Com o auxílio das equações de Hamilton, a equação (2.28) pode ser reescrita como

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Define-se

$$\sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \{A, H\} \quad (2.30)$$

como sendo o *parêntese de Poisson* (PP) de A e H . Reescrevendo a equação (2.29), temos

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Se A for uma constante de movimento, então a condição para que tal situação ocorra é

$$\{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (2.32)$$

Além disso, se A não depender explicitamente do tempo, o PP dela com H deve ser nulo:

$$\{A, H\} = 0. \quad (2.33)$$

Para duas funções $A(q_i(t), p_i(t), t)$ e $B(q_i(t), p_i(t), t)$ quaisquer, o PP vem dado como:

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (2.34)$$

Os parênteses de Poisson apresentam as seguintes propriedades algébricas:

1. Antissimetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$, com $\{A, A\} = \{B, B\} = 0$.
2. Linearidade: $\{A + \alpha B, C\} = \{A, C\} + \alpha\{B, C\}$, sendo α independente de q_i e p_i .
3. “Regra de Leibniz”: $\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\}$.
4. Identidade de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0$.
5. $\frac{\partial}{\partial \lambda} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial \lambda}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right\}$, onde λ é um parâmetro que pode ser q_i , p_i , t ou um outro parâmetro qualquer.

Diante dessas propriedades, uma importante observação a respeito das constantes de movimento pode ser feita: Sejam F e G duas constantes de movimento, ou seja,

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (2.35)$$

Considere o PP de F e G . A derivada total de $\{F, G\}$ com relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{F, G\} &= \{\{F, G\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} \\ &= \{\{F, G\}, H\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde foi utilizada a propriedade 5. Utilizando as equações (2.35), vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{F, G\} &= \{\{F, G\}, H\} - \{\{F, H\}, G\} - \{F, \{G, H\}\} \\ &= \{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

em virtude das propriedades de antissimetria e da identidade de Jacobi. Portanto, a equação (2.37) nos mostra que o PP de F e G é também uma constante de movimento. Este resultado é conhecido como *teorema de Poisson*.

2.2.3 Variação Infinitesimal de uma Variável Dinâmica

A variação infinitesimal de uma variável dinâmica genérica $A(q_i(t), p_i(t), t)$ vem definida como [33]

$$\delta A = \varepsilon \{A, G\}, \quad (2.38)$$

onde ε é um parâmetro de transformação infinitesimal e G é um *gerador de transformações canônicas infinitesimais*.

Vamos analisar a situação em que o gerador de transformações canônicas infinitesimais é a própria hamiltoniana e o parâmetro de transformação infinitesimal é dt , que é um parâmetro de tempo. Neste caso, temos

$$\delta A = dt \{A, H\}. \quad (2.39)$$

Agora, considere a seguinte transformação infinitesimal na variável A :

$$A' = A + \delta A = A + dt \{A, H\}. \quad (2.40)$$

Lançando mão das equações de Hamilton, pode-se reescrever a última equação como

$$A' = A + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) dt = A + \frac{dA}{dt} dt = A(t + dt), \quad (2.41)$$

ou seja, a transformação canônica infinitesimal gerada por H leva valores de A no instante t em seus valores no instante $t + dt$. Portanto, a evolução temporal de um sistema mecânico é uma transformação canônica gerada pela hamiltoniana do sistema.

2.2.4 Da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica: A Quantização Canônica

O formalismo hamiltoniano clássico, desenvolvido por meio dos parênteses de Poisson, possibilita construir uma ponte para a mecânica quântica, chamada de *quantização canônica*. Na subseção 2.2.2, foi visto que a derivada total de uma variável dinâmica $A(q_i(t), p_i(t), t)$ com relação ao tempo é

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Contudo, na mecânica quântica, um observável físico é obtido a partir da atuação de um operador hermitiano \hat{A} sobre um vetor de estado ψ do espaço de Hilbert [35]. Considere que a seguinte equação de autovalores represente essa situação:

$$\hat{A}\psi = a\psi, \quad (2.43)$$

em que a é um autovalor que pode também depender do tempo. A evolução temporal de ψ vem dada pela equação de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (2.44)$$

Vamos aplicar uma derivada parcial temporal na equação (2.43):

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{da}{dt} \psi + a \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.45)$$

Substituindo a equação (2.44) na última equação, tem-se

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \frac{1}{i\hbar} \hat{A} \hat{H} \psi = \frac{da}{dt} \psi + \frac{1}{i\hbar} a \hat{H} \psi \quad (2.46)$$

e, notando que $a\hat{H}\psi = \hat{H}a\psi = \hat{H}\hat{A}\psi$, vem

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \psi &= \frac{1}{i\hbar} (\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}) \psi + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] \psi + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde $\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$ é o comutador de \hat{A} e \hat{H} . Pode-se assumir que a evolução temporal do autovalor a é resultado da evolução temporal do operador \hat{A} . Levando isso em conta, chega-se à

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (2.48)$$

A equação (2.48) representa, na mecânica quântica, a *equação de movimento na representação de Heisenberg* [35]. A semelhança com a equação (2.42) é clara. Enquanto que na mecânica clássica uma variável dinâmica A tem a sua evolução temporal dada por (2.42), por meio do parêntese de Poisson, na mecânica quântica a evolução temporal do operador \hat{A} é dada pela equação (2.48), por meio do comutador dividido por $i\hbar$. Tais fatos sugerem a possibilidade de se fazer a seguinte correspondência:

$$\{A, B\} \quad \rightarrow \quad \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar}, \quad (2.49)$$

em que o chapéu sobre as variáveis no comutador indica que agora essas variáveis são operadores. Se uma determinada grandeza quântica possui análogos clássicos, então essa substituição é plausível por dois motivos:

1. os seguintes parênteses de Poisson fundamentais

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (2.50)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (2.51)$$

são análogos às relações de comutação fundamentais envolvendo os operadores posição e momento:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (2.52)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.53)$$

2. os comutadores apresentam as mesmas propriedades algébricas que os parênteses de Poisson:

- a) Antissimetria: $[A, B] = -[B, A]$, com $[A, A] = [B, B] = 0$.
- b) Linearidade: $[A + \alpha B, C] = [A, C] + \alpha[B, C]$, sendo α independente de \hat{x}_i e \hat{p}_i .
- c) “Regra de Leibniz”: $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$.
- d) Identidade de Jacobi: $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$.
- e) $\frac{\partial}{\partial \lambda}[A, B] = \left[\frac{\partial A}{\partial \lambda}, B\right] + \left[A, \frac{\partial B}{\partial \lambda}\right]$, onde λ é um parâmetro que pode ser \hat{x}_i , \hat{p}_i , t ou um outro parâmetro qualquer.

Entretanto, existem sistemas em que a matriz Hessiana Ω é singular. Por conta disso, não é possível resolver, para todas as velocidades generalizadas \dot{q}_i em termos dos momentos canônicos p_i , as equações que definem os momentos e, portanto, não é possível definir a hamiltoniana de forma unívoca, porque os momentos não são independentes uns dos outros e das coordenadas. Em decorrência disso, aparecem certas relações envolvendo as coordenadas e os momentos chamadas de *vínculos* [29]. A presença desses vínculos faz com que a hamiltoniana apresente inconsistências, de modo que os parênteses de Poisson entre as variáveis dinâmicas não descrevem corretamente a estrutura canônica do sistema. Sistemas desse tipo são chamados de *singulares*, e o tratamento correto desses sistemas será discutido no próximo capítulo.

3 O MÉTODO DE DIRAC PARA SISTEMAS VINCULADOS

3.1 VÍNCULOS PRIMÁRIOS

Seja um sistema lagrangiano tal que a matriz Hessiana, com elementos definidos pela expressão (2.10), seja singular, isto é,

$$\det \mathbf{\Omega} = 0. \quad (3.1)$$

Em decorrência disso, como já introduzido na seção 2.2.4, os momentos canônicos não são independentes entre si e das coordenadas, levando à existência de relações envolvendo as coordenadas e os momentos, chamadas de vínculos:

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \leq R, \quad (3.2)$$

em que M é o número de vínculos. Esses vínculos, decorrentes da forma da lagrangiana ou, em outras palavras, da definição de momento canônico, são chamados de *vínculos primários*.

Em geral, o parêntese de Poisson de um vínculo com uma quantidade qualquer dependente de q_i e p_i pode não ser nulo. Por conta disso, ao invés de se utilizar o sinal de igualdade, costuma-se utilizar o sinal “ \approx ”, significando “fracamente igual”, no intuito de enfatizar que os vínculos podem não ser nulos dentro dos parênteses de Poisson. Sendo assim, daqui em diante, as equações de vínculos serão representadas da seguinte forma:

$$\phi_m(q_i, p_i) \approx 0. \quad (3.3)$$

Também introduzido no final da seção 2.2.4 foi o fato da hamiltoniana desse tipo de sistema apresentar inconsistências. Especificamente falando, a Hamiltoniana não é definida univocamente, já que pode-se adicionar qualquer combinação linear dos ϕ_m 's, pois são iguais a zero (fora dos parênteses de Poisson) [29]. Para que essa situação possa ser visualizada, considere a variação da ação (2.26), tomando variações nas trajetórias do espaço de fase:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i + \left[\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i \right\} = 0.$$

Como as variações δq_i e δp_i são arbitrárias, o integrando deve ser nulo:

$$\sum_i \left\{ \left[\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i - \left[\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i \right\} = 0. \quad (3.4)$$

Pela expressão anterior, não se observa nenhuma relação com a existência de vínculos primários. Entretanto, considere agora a variação do vínculo ϕ_m :

$$\delta \phi_m = \sum_i \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \delta p_i \right) \approx 0. \quad (3.5)$$

Multiplicando (3.5) pelo *multiplicador de Lagrange* λ_m e somando-a com (3.4), obtemos

$$\sum_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \approx 0. \quad (3.6)$$

O multiplicador de Lagrange é um coeficiente arbitrário que pode depender das coordenadas e dos momentos. Existe um multiplicador de Lagrange para cada vínculo primário, isto é, tem-se M multiplicadores de Lagrange. Levando-se em conta novamente que δq_i e δp_i são variações arbitrárias não-nulas, chega-se às seguintes equações de Hamilton modificadas:

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \quad (3.7)$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}. \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8), pode-se observar que a inserção dos vínculos primários no formalismo hamiltoniano impõe a necessidade de se definir uma nova hamiltoniana contendo uma combinação linear dos m vínculos primários. Esta nova hamiltoniana é chamada de *hamiltoniana primária*:

$$H_p = H + \sum_m \lambda_m \phi_m \approx H. \quad (3.9)$$

3.2 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA

Devido à expressão (3.3), é uma questão de consistência que os vínculos primários não evoluam no tempo [33]. A partir dessa condição, vem

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &= \{\phi_m, H_p\} \approx 0 \\ &= \{\phi_m, H\} + \sum_n \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0, \quad 1 \leq m, n \leq R, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e três situações distintas podem ocorrer:

1. $\{\phi_m, H\} + \sum_n \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$

Neste caso, só existem os vínculos primários, nenhuma outra relação de vínculo é gerada e os multiplicadores de Lagrange permanecem indeterminados. Logo, a dinâmica do sistema continua apresentando funções arbitrárias do tempo.

2. $\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$

Nesta situação, $\{\phi_m, H\} \approx 0$ pode gerar um dos vínculos primários do sistema ou novos vínculos, chamados de *vínculos secundários*:

$$\phi_k(q_i, p_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.11)$$

onde K é o número de vínculos secundários. São chamados de secundários simplesmente por não surgirem da definição de momento canônico, diferentemente dos

vínculos primários. Mas, esta classificação é uma simples questão de organização, não sendo relevante no objetivo final. Sendo assim, os K vínculos secundários são incorporados à teoria da mesma forma que os vínculos primários:

$$\begin{aligned} H_T &= H_p + \sum_k \lambda_k \phi_k \\ H_T &= H + \sum_m \lambda_m \phi_m + \sum_k \lambda_k \phi_k \\ H_T &= H + \sum_j \lambda_j \phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, M + K = J, \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que J é o número total de vínculos. Define-se H_T como *hamiltoniana total*. Aplicando a condição de consistência aos vínculos secundários, novos vínculos podem ser obtidos (terciários, quaternários, etc.) e incorporados à H_T . Repetições dos vínculos anteriores podem também ser gerados ou então o ciclo se encerra, sem a determinação dos multiplicadores de Lagrange.

3. $\{\phi_m, \phi_j\} \neq 0$

Tal situação resulta em relações que impõem certas condições aos multiplicadores de Lagrange, determinando-os. A condição de consistência de que os vínculos devem ser preservados no tempo deve ser aplicada para todos os vínculos até que todas as possibilidades de surgimento de novos vínculos se esgotem e que todos os multiplicadores de Lagrange sejam determinados.

3.3 VÍNCULOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA CLASSE

Como já antecipado na última seção, a classificação dos vínculos em primários ou secundários é uma simples questão de organização. No processo de quantização canônica, uma classificação mais incisiva pode ser feita levando-se em conta o resultado dos parênteses de Poisson entre os vínculos pois, após o cálculo desses, o resultado pode identicamente nulo, proporcional a um ou mais vínculos pertencentes ao conjunto ou, ainda, ser proporcional a uma outra quantidade qualquer diferente de zero.

Um vínculo é chamado de *vínculo de primeira classe* se esse tiver parêntese de Poisson nulo com ele mesmo e com todos os outros vínculos da teoria. Devido a essa característica, um vínculo de primeira classe pode ser tomado diretamente como uma igualdade forte. É por isso que em sistemas que apresentam vínculos de primeira classe a análise termina sem a determinação dos multiplicadores de Lagrange. Tal característica indica que o sistema apresenta *invariância de calibre*, isto é, trata-se de uma *teoria de calibre*. Os vínculos de primeira classe têm ainda a propriedade de *gerar transformações de calibre infinitesimais* [33]. Se o sistema apresenta vínculos de primeira classe, não é possível obter uma matriz \mathbf{C} que seja inversível. Para contornar essa situação, é necessário que os vínculos de primeira classe se tornem vínculos de segunda classe. Para esse fim, novos

vínculos precisam ser adicionados ao sistema. Esse processo recebe o nome de *fixação de calibre implícita* [36], pois, adicionando-se ao sistema equações de vínculos que tornam os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe, o sistema deixa de ser invariante de calibre, o que leva à remoção dos graus de liberdade não-dinâmicos.

Se o vínculo possui pelo menos 1 parêntese de Poisson não-nulo, esse vínculo é chamado de *vínculo de segunda classe*. Pelo fato de todas as teorias de interações fundamentais conhecidas serem teorias de calibre, os vínculos de segunda classe são regularmente associados à fixação de calibre, para a redução dos graus de liberdade do espaço de fase. Entretanto, existem sistemas, como o modelo CPT-par massivo, que naturalmente apresentam vínculos de segunda classe.

3.3.1 Parênteses de Dirac

Seja $A(q_i(t), p_i(t), t)$ uma variável dinâmica. Vamos repetir o raciocínio utilizado na seção 2.2.2, mas agora levando em conta a existência dos vínculos. Considere a derivada temporal total de A ,

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Utilizando as equações de Hamilton modificadas (3.7) e (3.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \right) \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_i \sum_j \lambda_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \right) \\ &\approx \{A, H\} + \sum_j \lambda_j \{A, \phi_j\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Procedendo de forma análoga para um vínculo qualquer ϕ_k , obtemos

$$\frac{d\phi_k}{dt} \approx \{\phi_k, H\} + \sum_j \lambda_j \{\phi_k, \phi_j\}. \quad (3.15)$$

Aplicando a condição de que os vínculos não evoluam no tempo, vem

$$\{\phi_k, H\} + \sum_j \lambda_j \{\phi_k, \phi_j\} \approx 0. \quad (3.16)$$

Vamos introduzir a matriz \mathbf{C} , de elementos $C_{jk} = \{\phi_j, \phi_k\}$. Para que os multiplicadores de Lagrange possam ser obtidos, a matriz \mathbf{C} deve ser inversível. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} &\{\phi_k, H\} + \sum_j \lambda_j C_{kj} \approx 0 \\ \rightarrow &\sum_k C_{lk}^{-1} \{\phi_k, H\} + \sum_k \sum_j \lambda_j C_{lk}^{-1} C_{kj} \approx 0 \\ &\sum_k C_{lk}^{-1} \{\phi_k, H\} + \sum_j \lambda_j \delta_{lj} \approx 0 \\ \rightarrow &\lambda_l \approx - \sum_k C_{lk}^{-1} \{\phi_k, H\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.14), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \{A, H\} - \sum_k \sum_l \{A, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H\}_D + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \sum_k \sum_l \{A, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, H\} \quad (3.19)$$

é o *parêntese de Dirac* (PD) de A e H. Dentro do formalismo dos parênteses de Dirac, os vínculos valem fortemente igual a zero:

$$\begin{aligned} \{A, \phi_a\}_D &= \{A, \phi_a\} - \sum_k \sum_l \{A, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, \phi_a\} \\ &= \{A, \phi_a\} - \sum_k \sum_l \{A, \phi_k\} C_{kl}^{-1} C_{la} \\ &= \{A, \phi_a\} - \sum_k \{A, \phi_k\} \delta_{ka} \\ &= \{A, \phi_a\} - \{A, \phi_a\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Além disso, os parênteses de Dirac apresentam as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson e dos comutadores:

1. Antissimetria: $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$, com $\{A, A\}_D = \{B, B\}_D = 0$.
2. Linearidade: $\{A + \alpha B, C\}_D = \{A, C\}_D + \alpha \{B, C\}_D$, sendo α independente de q_i e p_i .
3. “Regra de Leibniz”: $\{AB, C\}_D = \{A, C\}_D B + A \{B, C\}_D$.
4. Identidade de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\}_D + \{\{C, A\}, B\}_D + \{\{B, C\}, A\}_D = 0$.
5. $\frac{\partial}{\partial \lambda} \{A, B\}_D = \left\{ \frac{\partial A}{\partial \lambda}, B \right\}_D + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right\}_D$, onde λ é um parâmetro que pode ser q_i , p_i , t ou um outro parâmetro qualquer.

Tais fatos tornam consistente a passagem para a mecânica quântica por meio dos parênteses de dirac:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar}. \quad (3.21)$$

3.4 O MODELO CPT-PAR MASSIVO

Nesta seção, serão estudados certos aspectos clássicos do setor de calibre CPT-par do modelo padrão estendido [8], acoplado com um termo de Proca. A partir desta seção, será adotada a convenção de soma de Einstein e a assinatura utilizada é a $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+ . - . - . -)$.

O modelo CPT-par massivo, na presença de um termo de fonte, é representado pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\mu\nu\rho\phi}F_{\mu\nu}F_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - A^\mu J_\mu, \quad (3.22)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} \quad (3.23)$$

é o tensor campo eletromagnético, definido pelo quadripotencial vetor $A_\mu = (A_0, -\mathbf{A})$ e suas componentes são os campos elétrico e magnético, definidas por

$$F_{0i} = E_i, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k;$$

m é a massa do campo A_μ , responsável pela quebra da simetria de calibre; $J_\mu = (\rho, -\mathbf{J})$ é a quadricorrente e $W^{\mu\nu\rho\phi}$ é um acoplamento adimensional, renormalizável e é o responsável pela violação da invariância de Lorentz. O tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ apresenta as mesmas simetrias do tensor de Riemann:

$$W_{\mu\nu\rho\phi} = -W_{\nu\mu\rho\phi}, \quad W_{\mu\nu\rho\phi} = -W_{\mu\nu\phi\rho}, \quad W_{\mu\nu\rho\phi} = W_{\rho\phi\mu\nu} \quad (3.24)$$

e traço nulo duplo

$$W^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Essas propriedades fazem com que o tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ tenha apenas 19 componentes independentes, das quais 10 estão relacionadas com o fenômeno de birrefringência [8]. Em termos dos campos elétrico e magnético, a densidade lagrangiana (3.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - W^{0i0j}F_{0i}F_{0j} - W^{0ijk}F_{0i}F_{jk} - \frac{1}{4}W^{ijkl}F_{ij}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \\ & - \frac{m^2}{2}A_i^2 - A^0 J_0 + A^i J_i \\ \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - W^{0i0j}E_iE_j - W^{0ijk}\varepsilon_{ljk}E_iB_l - \frac{1}{4}W^{ijkl}\varepsilon_{lij}\varepsilon_{mkl}B_lB_m + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \\ & - \frac{m^2}{2}A_i^2 - A^0\rho + A^i J_i. \end{aligned} \quad (3.26)$$

É possível escrever os termos envolvendo o tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ em uma configuração mais simples. Existe uma parametrização para o tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ em termos de certas matrizes 3x3, cujas componentes são definidas da seguinte maneira [8]:

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2W^{0j0k}, \quad (3.27)$$

$$(\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{jpq}\varepsilon^{klm}W^{pqlm}, \quad (3.28)$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj} = \varepsilon^{kpq}W^{0jpk}. \quad (3.29)$$

Devido à forma das matrizes e as propriedades (3.24) e (3.25), pode-se concluir que as matrizes κ_{DE} e κ_{HB} têm paridade par e possuem juntas 11 elementos independentes, enquanto que as matrizes κ_{DB} e κ_{HE} têm paridade ímpar e juntas possuem 8 elementos independentes. Portanto, somam-se 19 elementos independentes do tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$. Em termos desta parametrização, a densidade lagrangiana (3.26) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (E^2 - B^2) + \frac{1}{2} (\kappa_{DE})^{ij} E_i E_j - (\kappa_{DB})^{ij} E_i B_j - \frac{1}{2} (\kappa_{HB})^{ij} B_i B_j + \frac{m^2}{2} A_0^2 - \\ &\quad - \frac{m^2}{2} A_i^2 - A^0 \rho + A^i J_i \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [\delta_i^j + (\kappa_{DE})^{ij}] E_i E_j - \frac{1}{2} [\delta_i^j + (\kappa_{HB})^{ij}] B_i B_j - (\kappa_{DB})^{ij} E_i B_j + \frac{m^2}{2} A_0^2 - \\ &\quad - \frac{m^2}{2} A_i^2 - A^0 \rho + A^i J_i. \quad (3.30)\end{aligned}$$

3.4.1 Equações de Movimento

A densidade lagrangiana (3.22) gera as seguintes equações de movimento não-homogêneas:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} - W^{\nu\alpha\rho\phi} \partial_\alpha F_{\rho\phi} + m^2 A^\nu &= J^\nu, \quad (3.31)\end{aligned}$$

enquanto que as equações de movimento homogêneas permanecem inalteradas:

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Na equação (3.31), observa-se que o termo envolvendo o tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ apresenta, assim como as equações de Maxwell usuais, uma linearidade em $F_{\mu\nu}$. Em termos dos campos elétrico e magnético, as equações (3.31) e (3.32) são, respectivamente,

$$\partial_i E_i + (\kappa_{DE})_{ij} \partial_i E_j - (\kappa_{DB})_{ij} \partial_i B_j + m^2 A_0 = \rho, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}\partial_t E_i - \varepsilon_{jli} \partial_j B_l + (\kappa_{DE})_{ij} \partial_t E_j + (\kappa_{DB})_{il} \partial_t B_l - \varepsilon_{ijl} (\kappa_{DB})_{kl} \partial_j E_k + \\ - \varepsilon_{jik} (\kappa_{HB})_{jl} \partial_k B_l + m^2 A_i = J_i \quad (3.34)\end{aligned}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Outra característica importante é que os termos que violam a invariância de Lorentz apresentam os campos elétrico e magnético, bem como suas derivadas. Tal comportamento

nos permite fazer uma analogia com a eletrodinâmica usual em um sistema anisotrópico. [6].

É bem sabido que o tensor campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é invariante sob a seguinte transformação de calibre local:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad (3.37)$$

onde λ é um parâmetro local de transformação de calibre. Por conta disso, as equações de Maxwell modificadas pelos termos violadores da invariância de Lorentz são invariantes de calibre, uma vez que elas dependem apenas de $F_{\mu\nu}$. Entretanto, a presença explícita do campo A_μ na equação (3.34) quebra a invariância de calibre do sistema, indicando a presença de vínculos de segunda classe no sistema.

3.4.2 A Estrutura Canônica

Nesta subseção, será feita uma análise da estrutura canônica do modelo CPT-par massivo por meio do método de Dirac. Este modelo é dado pela densidade lagrangiana (3.22) (sem a presença do termo de fonte):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\mu\nu\rho\phi}F_{\mu\nu}F_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu. \quad (3.38)$$

Antes da teoria ser passada para o formalismo hamiltoniano, vamos verificar a natureza singular da teoria. Considere a seguinte derivada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Daí, os componentes da matriz Hessiana Ω , definida na seção 2.2, são:

$$\Omega^{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu) \partial (\partial_0 A_\lambda)} = g^{0\nu} g^{0\lambda} - g^{00} g^{\nu\lambda} - 2W^{0\nu 0\lambda}, \quad (3.40)$$

de modo que a matriz Hessiana assume a seguinte forma explícita:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (\kappa_{DE})^{11} & (\kappa_{DE})^{12} & (\kappa_{DE})^{13} \\ 0 & (\kappa_{DE})^{12} & 1 + (\kappa_{DE})^{22} & (\kappa_{DE})^{23} \\ 0 & (\kappa_{DE})^{13} & (\kappa_{DE})^{23} & 1 + (\kappa_{DE})^{33} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

onde foi utilizada a equação (3.27) e as propriedades da matriz κ_{DE} . Pode-se concluir facilmente que o determinante dessa matriz é nulo, o que significa que estamos diante de um sistema singular, ou seja, que apresenta vínculos.

Os momentos conjugados ao campo A_μ são definidos como

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} - W^{0\mu\rho\phi} F_{\rho\phi}, \quad (3.42)$$

a partir dos quais pode-se escrever os seguintes parênteses de Poisson fundamentais:

$$\begin{aligned}\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} &= \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = 0, \\ \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x-y) = -\{\pi^\mu(x), A_\nu(y)\}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Tomando $\mu = 0$ na expressão (3.42), obtemos

$$\pi^0 = 0, \quad (3.44)$$

uma vez que o tensor campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e o tensor $W^{\mu\nu\rho\phi}$ são antissimétricos. Então, a equação (3.44) é um vínculo primário:

$$T_1 = \pi^0 \approx 0, \quad (3.45)$$

onde o símbolo de igualdade foi substituído por \approx (igualdade fraca) para indicar que a igualdade forte (3.44) não vale em todo o espaço de fase, pois

$$\{A_0(x), \pi^0(y)\} = \delta^{(3)}(x-y) \neq 0. \quad (3.46)$$

Fazendo agora $\mu = i$ na equação (3.42), com $i = 1, 2, 3$, obtém-se os seguintes momentos

$$\pi_i = -M_{ij}F_{0j} + W^{0ijk}F_{jk}, \quad (3.47)$$

onde

$$M_{ij} = \delta_{ij} - 2W_{0i0j} \quad (3.48)$$

é uma matriz simétrica e inversível. As velocidades \dot{A}_i , escritas em termos dos momentos, vêm dadas como

$$\dot{A}_i = \partial_i A_0 - (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0ljk}F_{jk}]. \quad (3.49)$$

A hamiltoniana canônica H tem a seguinte forma:

$$H = \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}).$$

Utilizando as equações (3.47) e (3.49), obtemos

$$\begin{aligned}H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk}F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn}F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \right. \\ \left. - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) \right], \quad (3.50)\end{aligned}$$

onde foi desconsiderado um termo de superfície quando integrou-se o segundo termo por partes. O próximo passo é escrever a hamiltoniana primária. Para isso, deve-se adicionar à hamiltoniana canônica um termo contendo o vínculo primário:

$$H_p = H + \int d^3x \lambda_1 T_1$$

$$H_p = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) + \lambda_1 \pi_0 \right], \quad (3.51)$$

na qual λ_1 é o multiplicador de Lagrange associado a T_1 .

Por questão de consistência, deve-se impor que o vínculo primário T_1 se conserve no tempo. Aplicando essa condição, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= \{T_1(x), H_p(y)\} \approx 0 \\ &= \int d^3y \left\{ \pi_0(x), A_0(y) \partial_i \pi_i(y) - \frac{m^2}{2} A_0^2 \right\} \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[\{\pi_0(x), A_0(y)\} \partial_i \pi_i(y) - m^2 \{\pi_0(x), A_0(y)\} A_0(y) \right] \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[-\partial_i \pi_i(y) + m^2 A_0(y) \right] \delta^{(3)}(x - y) \approx 0 \\ &= -\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Portanto, a teoria tem um vínculo secundário, que vem dado por

$$T_2 = -\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x) \approx 0, \quad (3.53)$$

o qual nada mais é do que a lei de Gauss modificada pelo termo de Proca. Impondo agora ao vínculo secundário T_2 a condição de conservação no tempo, vem

$$\begin{aligned} \dot{T}_2 &= \{T_2(x), H_p(y)\} \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[\frac{m^2}{2} \left\{ -\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x), A_j^2(y) \right\} + \lambda_1(y) \left\{ -\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x), \pi_0(y) \right\} \right] \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[-m^2 A_j(y) \partial_i \{\pi_i(x), A_j(y)\} + \lambda_1(y) m^2 \{A_0(x), \pi_0(y)\} \right] \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[m^2 \partial_i A_i(y) + \lambda_1(y) m^2 \right] \delta^{(3)}(x - y) \approx 0 \\ &= m^2 \partial_i A_i(x) + \lambda_1(x) m^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

isto é, foi obtida uma relação envolvendo o multiplicador de Lagrange λ_1 , que explicitamente é

$$\lambda_1(x) = -\partial_i A_i(x). \quad (3.55)$$

Isso significa que a cadeia de vínculos se encerra neste ponto, T_1 e T_2 são os únicos vínculos da teoria. Note que o termo CPT-par e violador da invariância de Lorentz não altera a forma dos vínculos da teoria de Maxwell-Proca. O fato do multiplicador de Lagrange λ_1 ter sido encontrado indica que o sistema apresenta vínculos de segunda classe e, conseqüentemente, não apresenta invariância de calibre. De fato, T_1 e T_2 são de segunda classe, pois o parêntese de Poisson entre eles não se anula:

$$\{T_1(x), T_2(y)\} = \left\{ \pi_0(x), -\partial_i \pi_i(y) + m^2 A_0(y) \right\} = -m^2 \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.56)$$

Dando continuidade ao algoritmo de Dirac, pode-se agora escrever a hamiltoniana total do sistema, definida como

$$H_T = H_p + \int d^3x \lambda_2 T_2$$

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) - (\partial_i A_i) \pi_0 + \lambda_2 (-\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x)) \right]. \quad (3.57)$$

A fim de se obter explicitamente o valor de λ_2 , deve-se aplicar novamente a condição de conservação no tempo de todos vínculos da teoria, mas, desta vez, utilizando a hamiltoniana total H_T . Na verdade, neste caso, apenas a imposição de conservação no tempo do vínculo primário T_1 é o suficiente para que λ_2 seja determinado:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= \{T_1(x), H_T(y)\} \approx 0 \\ &= \int d^3y \left\{ \pi_0(x), A_0(y) \partial_i \pi_i(y) - \frac{m^2}{2} A_0^2 + \lambda_2(y) m^2 A_0(y) \right\} \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[\{\pi_0(x), A_0(y)\} \partial_i \pi_i(y) - m^2 \{\pi_0(x), A_0(y)\} A_0(y) + \lambda_2(y) m^2 \{\pi_0(x), A_0(y)\} \right] \approx 0 \\ &= \int d^3y \left[-\partial_i \pi_i(y) + m^2 A_0(y) - m^2 \lambda_2(y) \right] \delta^{(3)}(x - y) \approx 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x) - m^2 \lambda_2(x) &\approx 0 \\ \Rightarrow \lambda_2(x) &\approx \frac{1}{m^2} (-\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x)) \approx \frac{T_2}{m^2} \approx 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) em (3.57), a hamiltoniana total fica

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) - (\partial_i A_i) \pi_0 \right]. \quad (3.59)$$

O próximo passo é calcular os parênteses de Dirac da teoria. Para isso, deve-se determinar a matriz dos parênteses de Poisson dos vínculos obtidos, a qual assume a seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \{T_1(x), T_1(y)\} & \{T_1(x), T_2(y)\} \\ \{T_2(x), T_1(y)\} & \{T_2(x), T_2(y)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.60)$$

Sua inversa é

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{m^2} \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.61)$$

O parêntese de Dirac entre quaisquer variáveis dinâmicas é definido, para campos, como

$$\{F(x), G(y)\}_D = \{F(x), G(y)\} - \iint d^3z d^3\bar{z} \{F(x), \phi^A(z)\} C_{AB}^{-1} \{\phi^B(\bar{z}), G(y)\}. \quad (3.62)$$

Cada situação será analisada separadamente. O PD entre dois A_μ s é

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D &= - \iint d^3z d^3\bar{z} \{A_\mu(x), \pi_0(z)\} \left(\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \{-\partial_i \pi_i(\bar{z}), A_\nu(y)\} - \\ &\quad - \iint d^3z d^3\bar{z} \{A_\mu(x), -\partial_i \pi_i(z)\} \left(-\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \{\pi_0(\bar{z}), A_\nu(y)\} \\ \{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D &= - \iint d^3z d^3\bar{z} g_{\mu 0} \delta^{(3)}(x - z) \left(\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \partial_i (g_{i\nu} \delta^{(3)}(\bar{z} - y)) - \\ &\quad - \iint d^3z d^3\bar{z} \partial_i (-g_{\mu i} \delta^{(3)}(x - z)) \left(-\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) (-g_{0\nu} \delta^{(3)}(\bar{z} - y)) \\ \{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D &= (-g_{\mu 0} g_{i\nu} + g_{\mu i} g_{0\nu}) \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^{(3)}(x - y). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Logo, separando em componentes temporal e espaciais, obtemos

$$\{A_0(x), A_0(y)\}_D = 0 = \{A_j(x), A_k(y)\}_D, \quad (3.64)$$

$$\{A_0(x), A_k(y)\}_D = \frac{1}{m^2} \partial_k \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.65)$$

Observe a equação (3.65). Seu resultado é idêntico ao seguinte PP:

$$\left\{ \frac{\partial_i \pi_i(x)}{m^2}, A_k(y) \right\} = \frac{1}{m^2} \partial_k \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.66)$$

Isso significa que o PD (3.65) é consistente com a equação de vínculo (3.53) ao tomá-la como uma igualdade forte e fazendo

$$A_0 = \frac{\partial_i \pi_i}{m^2}. \quad (3.67)$$

O PD entre os momentos π_μ é sempre zero:

$$\begin{aligned} \{\pi_\mu(x), \pi_\nu(y)\}_D &= - \iint d^3z d^3\bar{z} \{\pi_\mu(x), \pi_0(z)\} \left(\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \{-\partial_i \pi_i(\bar{z}), \pi_\nu(y)\} - \\ &\quad - \iint d^3z d^3\bar{z} \{\pi_\mu(x), -\partial_i \pi_i(z)\} \left(-\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \{\pi_0(\bar{z}), \pi_\nu(y)\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por fim, o PD entre os campos A_μ e π_μ é

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \pi_\nu(y)\}_D &= \{A_\mu(x), \pi_\nu(y)\} - \\ &\quad - \iint d^3z d^3\bar{z} \{A_\mu(x), \pi_0(z)\} \left(\frac{\delta^{(3)}(z - \bar{z})}{m^2} \right) \{m^2 A_0(\bar{z}), \pi_\nu(y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \pi_\nu(y)\}_D &= g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(x-y) - \\
&\quad - \iint d^3z d^3\bar{z} g_{\mu 0} \delta^{(3)}(x-z) \delta^{(3)}(z-\bar{z}) g_{0\nu} \delta^{(3)}(\bar{z}-y) \\
\{A_\mu(x), \pi_\nu(y)\}_D &= (g_{\mu\nu} - g_{\mu 0} g_{0\nu}) \delta^{(3)}(x-y).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Separando em componentes temporal e espaciais, temos a seguinte álgebra:

$$\{A_0(x), \pi_0(y)\}_D = \{A_0(x), \pi_i(y)\}_D = \{A_i(x), \pi_0(y)\}_D = 0, \tag{3.70}$$

$$\{A_i(x), \pi_j(y)\}_D = -\delta_{ij} \delta^{(3)}(x-y). \tag{3.71}$$

As equações (3.65) e (3.70) revelam que agora pode-se tomar todos os vínculos como igualdades fortes, enquanto que a equação (3.71) indica que A_i e π_j continuam formando pares canonicamente conjugados.

Obtidos os parênteses de Dirac fundamentais da teoria, pode-se retornar à hamiltoniana total (3.59) e tomar $\pi_0 = 0$ como uma igualdade forte (anulando o termo $(\partial_i A_i) \pi_0$). A hamiltoniana total se torna

$$\begin{aligned}
H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \right. \\
\left. - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) \right]. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

A hamiltoniana (3.72) e os parênteses de Dirac obtidos descrevem, sem arbitrariedades, a dinâmica e a estrutura canônica do modelo CPT-par massivo. Contudo, de acordo com a equação (3.65), a variável A_0 não é mais independente de π_i . Substituindo A_0 por $\frac{\partial_i \pi_i}{m^2}$ (*vide* equação (3.67)) na Hamiltoniana (3.72), obtém-se

$$\begin{aligned}
H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} + \right. \\
\left. + \frac{m^2}{2} A_i^2 + \frac{(\partial_i \pi_i)^2}{2m^2} \right]. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Em certas ocasiões, inverter a matriz dos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe pode não ser uma tarefa fácil. Existem outros formalismos para sistemas de segunda classe que nos permitem fazer a quantização canônica, isto é, obter uma álgebra consistente com os comutadores da mecânica quântica, sem a necessidade do cálculo dos parênteses de Dirac. No seguinte capítulo, será apresentado um desses métodos – consistente com os resultados obtidos pelo método de Dirac – que nos possibilita continuar utilizando os parênteses de Poisson para realizar a quantização canônica.

4 O GAUGE UNFIXING

Como mencionado na seção 3.3, os vínculos de segunda classe são regularmente associados à fixação de calibre. Mas, um sistema pode apresentar em sua estrutura canônica apenas vínculos de segunda classe. Embora tal fato não implique em invariância de calibre, sabe-se que é possível revelar simetrias de calibre nesse sistema. Pode-se pensar que um conjunto desses vínculos foi adicionado ao sistema como uma condição de fixação de calibre, mas que, ao ser retirado do sistema, revela a simetria de calibre que o sistema exibia anteriormente à fixação.

Existem razões que nos motivam a realizar tal procedimento. Ao tornar o sistema original (de segunda classe) em um sistema invariante de calibre (de primeira classe), pode-se utilizar outras técnicas de quantização bastante conhecidas, como o próprio método de Dirac [29], tendo a liberdade de fixar o calibre de acordo com a conveniência; o método BRST [37, 38, 39, 40], etc. Como mencionado no capítulo 1, existem vários métodos capazes de realizar essa conversão. Um desses métodos é o *gauge unfixing* (GU) [25, 26], que utiliza as próprias variáveis originais do espaço de fase.

As próximas duas seções serão dedicadas ao formalismo GU e a uma versão modificada deste formalismo, desenvolvida por Neto [27], denominada *gauge unfixing aprimorado*.

4.1 O GAUGE UNFIXING USUAL

Considere um sistema hamiltoniano vinculado H e que, por simplicidade, apresente em sua estrutura canônica apenas dois vínculos de segunda classe, T_1 e T_2 , que se relacionem da seguinte forma:

$$\{T_1, T_2\} \approx K, \quad (4.1)$$

onde $K \neq 0$ sobre a superfície definida por T_1 e T_2 . Sem perda de generalidade, tome

$$\chi = K^{-1}T_1 \approx 0, \quad (4.2)$$

de modo que, sobre a superfície definida por χ ,

$$\begin{aligned} \{\chi, T_2\} &\approx \{K^{-1}T_1, T_2\} \\ &\approx K^{-1} \{T_1, T_2\} + \{K^{-1}, T_2\} T_1 \\ &\approx K^{-1}K + \{K^{-1}, T_2\} K\chi \\ &\approx 1 + \{K^{-1}, T_2\} K\chi \approx 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

É uma questão de consistência que os vínculos se preservem no tempo. A partir dessa condição, pode-se gerar vínculos secundários (*vide* seção 3.2). Sendo assim, considere a seguinte situação

$$\{\chi, H\} \approx aT_2, \quad (4.4)$$

em que a é diferente de zero na superfície definida por χ . É neste ponto que se inicia a ideia básica do que se denomina *gauge unfixing*. O objetivo é construir uma hamiltoniana \tilde{H} de modo que a evolução temporal de χ , através de \tilde{H} , não gere um novo vínculo. Explicitamente falando,

$$\{\chi, \tilde{H}\} \approx 0, \quad (4.5)$$

o que significa que χ é o único vínculo da teoria e, de modo geral, um vínculo de primeira classe. A equação (4.3) nos indica que, na superfície definida por χ , pode-se considerar que χ e T_2 formam pares conjugados. A nova teoria de calibre é totalmente construída sobre a superfície $\chi = 0$ e, para que haja consistência com a teoria original, considera-se T_2 como uma variável de fixação de calibre, de modo que, sobre a superfície $T_2 = 0$, obtém-se $\tilde{H} = H$. Partindo-se dessas observações, define-se um operador de projeção \mathbb{P} que, ao atuar sobre H , produz um hamiltoniana \tilde{H} que vale em todo o espaço de fase (isto é, $\tilde{H} = H_T$):

$$\tilde{H} \equiv \mathbb{P}H \quad (4.6)$$

$$\tilde{H} \equiv: e^{T_2 \hat{\chi}} : H \quad (4.7)$$

$$\tilde{H} \equiv H + T_2 \{H, \chi\} + \frac{1}{2!} T_2^2 \{\{H, \chi\}, \chi\} + \frac{1}{3!} T_2^3 \{\{\{H, \chi\}, \chi\}, \chi\} + \dots, \quad (4.8)$$

onde

$$\hat{\chi}H \equiv \{H, \chi\}. \quad (4.9)$$

Convencionou-se que T_2 sempre venha a esquerda dos parênteses de Poisson.

De um modo geral, escolhe-se um dos vínculos de segunda classe do sistema para ser o gerador de simetria de calibre, e o *vínculo que forma um par conjugado com o gerador* é descartado, passando a ser uma variável de fixação de calibre. Ao final do processo, obtém-se uma hamiltoniana modificada que obedece a uma álgebra de funções de primeira classe (*vide* equação (4.5)).

Existe uma variante do GU, chamada de *gauge unfixing aprimorado*, na qual se redefine as variáveis do espaço de fase, sem a introdução de variáveis extras, a fim de se obter campos invariantes de calibre. Em seguida, constrói-se teorias invariantes de calibre a partir desses campos redefinidos. Este procedimento será discutido em detalhes na próxima seção.

4.2 O GAUGE UNFIXING APRIMORADO

Considere uma variável original do espaço de fase

$$F(q_i, p_i), \quad (4.10)$$

a qual pode representar tanto uma partícula quanto um modelo teórico. Como já mencionado, o propósito do *gauge unfixing* aprimorado é redefinir as variáveis do espaço de

fase, tornando-as variáveis de primeira classe, de modo que se possa obter funções dessas variáveis redefinidas que sejam invariantes de calibre, digamos $\tilde{A}(\tilde{F})$, a partir da função original $A(F)$.

Seja então uma variável do espaço de fase, redefinida para ser de primeira classe, dada por

$$\tilde{F}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i). \quad (4.11)$$

Sabe-se que os vínculos de primeira classe geram transformações canônicas infinitesimais que mudam as variáveis do espaço de fase sem alterar o estado físico do sistema, ou seja, geram transformações de calibre [33]. Desta forma, seja χ o vínculo de segunda classe, definido na equação (4,2), o vínculo escolhido para ser o gerador de simetria de calibre. A variável de primeira classe \tilde{F} deve respeitar a seguinte condição variacional:

$$\delta\tilde{F} = \varepsilon \{ \tilde{F}, \chi \} = 0, \quad (4.12)$$

uma vez que \tilde{F} já é invariante de calibre. Na expressão acima, ε é um parâmetro infinitesimal. A partir dessa condição, pode-se mostrar que qualquer função de \tilde{F} é também uma função de primeira classe, pois

$$\begin{aligned} \{ A(\tilde{F}), \chi \} &= \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{q}_i} \\ &= \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{F}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{F}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{q}_i} \\ &= \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{F}} \{ \tilde{F}, \chi \} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou, em termos de \tilde{q}_i e \tilde{p}_i ,

$$\{ A(\tilde{F}), \chi \} = \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{q}_i} \{ \tilde{q}_i, \chi \} + \frac{\partial A(\tilde{F})}{\partial \tilde{p}_i} \{ \tilde{p}_i, \chi \} = 0. \quad (4.14)$$

Portanto, pode-se obter funções invariantes de calibre através da substituição

$$A(F) \Rightarrow A(\tilde{F}) = \tilde{A}(\tilde{F}). \quad (4.15)$$

Usando a ideia do GU usual, a variável invariante de calibre \tilde{F} é definida por uma série de potências de T_2 , que é o vínculo descartado e que forma um par conjugado com χ :

$$\tilde{F} = F + c_1 T_2 + c_2 T_2^2 + \dots = F + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_2^n. \quad (4.16)$$

Assim como no GU usual, sobre a superfície $T_2 = 0$ tem-se a seguinte condição de contorno

$$\tilde{F}(T_2 = 0) = F. \quad (4.17)$$

Ou seja, quando se impõe que a variável de fixação de calibre seja nula, recupera-se a variável original de segunda classe.

Os coeficientes c_n que aparecem na expressão (4.16) são determinados através da condição variacional (4.12). Aplicando-a, temos

$$\begin{aligned}\delta\tilde{F} &= \delta F + \delta c_1 T_2 + c_1 \delta T_2 + \dots = 0 \\ \delta F + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta c_n T_2^n + n c_n T_2^{n-1} \delta T_2) &= 0.\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde

$$\delta F = \varepsilon \{F, \chi\} \quad (4.19)$$

$$\delta c_1 = \varepsilon \{c_1, \chi\} \quad (4.20)$$

$$\delta T_2 = \varepsilon \{T_2, \chi\} = -\varepsilon. \quad (4.21)$$

Na equação (4.21), considera-se que $\{T_2, \chi\} = 1$, devido à equação (4.3). Para $n = 1$, vem

$$\delta F + c_1 \delta T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta F - c_1 \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\delta F}{\varepsilon}. \quad (4.22)$$

Para $n=2$, temos

$$\delta c_1 T_2 + 2c_2 \delta T_2 T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta c_1 - 2\varepsilon c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{\delta c_1}{2\varepsilon} = \frac{\delta\delta F}{2\varepsilon^2}. \quad (4.23)$$

Pode-se observar então que, para $n \geq 2$, a seguinte fórmula geral pode ser escrita:

$$\delta c_{n-1} T_2^{n-1} + n c_n T_2^{n-1} \delta T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta c_{n-1} - n c_n \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{n} \frac{\delta c_{n-1}}{\varepsilon}, \quad (4.24)$$

ou, substituindo n por $n + 1$,

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{\delta c_n}{\varepsilon}. \quad (4.25)$$

Usando as expressões (4.22), (4.23) e (4.24), a série de potências que determina \tilde{F} ganha a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= F + T_2 \frac{\delta F}{\varepsilon} + T_2^2 \frac{\delta\delta F}{2\varepsilon^2} + T_2^3 \frac{\delta\delta\delta F}{6\varepsilon^3} + \dots \\ &= F + T_2 \frac{\delta F}{\varepsilon} + \frac{1}{2!} T_2^2 \frac{\delta\delta F}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3!} T_2^3 \frac{\delta\delta\delta F}{\varepsilon^3} + \dots \\ &= \left(1 + T_2 \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{1}{2!} T_2^2 \frac{\delta\delta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3!} T_2^3 \frac{\delta\delta\delta}{\varepsilon^3} + \dots \right) F \\ &= e^{T_2 \frac{\delta}{\varepsilon}} : F,\end{aligned}\quad (4.26)$$

onde, novamente, convencionou-se que T_2 venha antes de $\frac{\delta}{\varepsilon}$.

Considere agora o PP entre duas quantidades invariantes de calibre, definidas pela expressão (4.26):

$$\begin{aligned}\{\tilde{F}, \tilde{G}\} &= \left\{ F + T_2 \frac{\delta F}{\varepsilon} + \frac{1}{2!} T_2^2 \frac{\delta\delta F}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3!} T_2^3 \frac{\delta\delta\delta F}{\varepsilon^3} + \dots, \right. \\ &\quad \left. G + T_2 \frac{\delta G}{\varepsilon} + \frac{1}{2!} T_2^2 \frac{\delta\delta G}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3!} T_2^3 \frac{\delta\delta\delta G}{\varepsilon^3} + \dots \right\}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Utilizando as propriedades dos parênteses de Poisson e em seguida tomando o limite $T_2 \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{T_2=0} &= \{F, G\} + \{F, T_2\} \frac{\delta G}{\varepsilon} + \{T_2, G\} \frac{\delta F}{\varepsilon} \\ &= \{F, G\} + \{F, T_2\} \{G, \chi\} + \{T_2, G\} \{F, \chi\} \\ &= \{F, G\} + \{F, \chi\} \{T_2, G\} - \{F, T_2\} \{\chi, G\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tomando $\chi \equiv T_1$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{T_2=0} &= \{F, G\} + \{F, T_1\} \{T_2, G\} - \{F, T_2\} \{T_1, G\} \\ &= \{F, G\} + \{F, T_1\} \varepsilon^{12} \{T_2, G\} + \{F, T_2\} \varepsilon^{21} \{T_1, G\} \\ &= \{F, G\} + \{F, T_i\} \varepsilon^{ij} \{T_j, G\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considerando que $\varepsilon_{ij} \equiv C_{ij} = \{T_i, T_j\}$, isto é, um elemento da matriz dos PP dos vínculos, obtemos

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{T_2=0} &= \{F, G\} + \{F, T_i\} C^{ij} \{T_j, G\} \\ &= \{F, G\}_D, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde $C^{ij} = C_{ij}^{-1}$ é o inverso de C_{ij} e $\{F, G\}_D$ é o parêntese de Dirac, definido no capítulo anterior. Conclui-se então que, após as variáveis de segunda classe serem redefinidas, pode-se tomar as equações de vínculos como igualdades fortes, sem a necessidade de “abandonar” os parênteses de Poisson em favor dos parênteses de Dirac.

4.2.1 Exemplo: O Modelo de Chern-Simons Abeliano Puro

A teoria de Chern-Simons é uma teoria de calibre formulada em (2+1) dimensões e apresenta aplicações práticas em fenômenos que ocorrem em duas dimensões espaciais, como o efeito Hall quântico fracionário. A teoria é governada pela seguinte densidade lagrangiana [30]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \\ &= \frac{\kappa}{2} (A_0 \partial_1 A_2 - A_0 \partial_2 A_1 - A_1 \partial_0 A_2 + A_1 \partial_2 A_0 + A_2 \partial_0 A_1 - A_2 \partial_1 A_0) \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$ e κ é um parâmetro de acoplamento.

Os momentos canônicos são:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0, \quad (4.32)$$

$$\pi^1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_1)} = \frac{\kappa}{2} A_2, \quad (4.33)$$

$$\pi^2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_2)} = -\frac{\kappa}{2} A_1, \quad (4.34)$$

$$(4.35)$$

logo, tem-se três vínculos primários:

$$\phi_0 \equiv \pi^0 \approx 0 \quad (4.36)$$

$$\phi_1 \equiv \pi^1 - \frac{\kappa}{2}A_2 \approx 0 \quad (4.37)$$

$$\phi_2 \equiv \pi^2 + \frac{\kappa}{2}A_1 \approx 0. \quad (4.38)$$

A hamiltoniana canônica pode ser obtida por meio de uma transformação de Legendre:

$$\begin{aligned} H &= \int d^2x \left(\pi^0 \dot{A}_0 + \pi^1 \dot{A}_1 + \pi^2 \dot{A}_2 - \mathcal{L} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \int d^2x \left(-A_0 \partial_1 A_2 + A_0 \partial_2 A_1 - A_1 \partial_2 A_0 + A_2 \partial_1 A_0 \right) \\ &= \kappa \int d^2x \left(-A_0 \partial_1 A_2 + A_0 \partial_2 A_1 \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

A hamiltoniana primária é obtida adicionando à hamiltoniana canônica os vínculos primários:

$$\begin{aligned} H_p &= H + \int d^2x \left(\lambda_0 \phi_0 + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \right) \\ &= \int d^2x \left[-\kappa A_0 \partial_1 A_2 + \kappa A_0 \partial_2 A_1 + \lambda_0 \pi^0 + \lambda_1 \left(\pi^1 - \frac{\kappa}{2} A_2 \right) + \lambda_2 \left(\pi^2 + \frac{\kappa}{2} A_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A condição de preservação no tempo dos vínculos (4.37) e (4.38) determina os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_1 = \partial_1 A_0; \quad (4.41)$$

$$\lambda_2 = \partial_2 A_0. \quad (4.42)$$

Já a evolução temporal do vínculo (4.36) dá origem a um vínculo secundário:

$$\phi_3 \equiv \kappa (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1). \quad (4.43)$$

Através da equação (4.43) conclui-se então que, em (4.40), A_0 faz o papel de multiplicador de Lagrange de ϕ_3 e, portanto, não é uma variável dinâmica. Dessa forma, ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são os únicos vínculos do sistema. Eles formam um conjunto que constitui a seguinte álgebra:

$$\{\phi_0, \phi_1\} = \{\phi_0, \phi_2\} = \{\phi_0, \phi_3\} = 0, \quad (4.44)$$

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -\kappa \delta^{(2)}(x - y), \quad (4.45)$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \kappa \partial_2 \delta^{(2)}(x - y), \quad (4.46)$$

$$\{\phi_2, \phi_3\} = -\kappa \partial_1 \delta^{(2)}(x - y). \quad (4.47)$$

Portanto, ϕ_0 é um vínculo de primeira classe, enquanto que ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 parecem ser de segunda classe. A matriz de Dirac, formada pelos parênteses de Poisson envolvendo ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 é

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & \kappa \partial_2 \\ \kappa & 0 & -\kappa \partial_1 \\ -\kappa \partial_2 & \kappa \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(2)}(x - y). \quad (4.48)$$

O determinante da matriz \mathbf{C} é nulo, o que pode ser facilmente observado porque \mathbf{C} é antissimétrica e de ordem 3 (isto é, de ordem ímpar). Então, o conjunto formado pelos parênteses de Poisson de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 é linearmente dependente. Pode-se tomar combinações lineares independentes dos vínculos de modo que parte deles se tornem vínculos de primeira classe [29]. Sendo assim, considere a seguinte transformação:

$$\phi'_1 = \phi_1 \quad (4.49)$$

$$\phi'_2 = \phi_2 \quad (4.50)$$

$$\phi'_3 = \phi_3 + \partial_1\phi_1 + \partial_2\phi_2. \quad (4.51)$$

Após as transformações (4.49), (4.50) e (4.51), o vínculo ϕ'_3 passa a ser de primeira classe, enquanto que ϕ'_1 e ϕ'_2 permanecem sendo de segunda classe. A matriz \mathbf{C} dos vínculos de segunda classe se torna

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \delta^{(2)}(x-y), \quad (4.52)$$

a qual tem determinante não-nulo. Por conter vínculos de primeira classe, a teoria já é invariante de calibre, mas agora gerada pelos vínculos ϕ_0 e ϕ'_3 . Ou seja, o grupo de calibre foi aumentado. Através dos vínculos de segunda classe restantes, o grupo de calibre pode ser aumentado ainda mais. Isso pode ser feito através do método GU aprimorado.

A aplicação do método se inicia definindo um gerador de simetria de calibre. Como restaram 2 vínculos de segunda classe, ϕ_1 e ϕ_2 , tem-se duas opções. Considere a seguinte escolha:

$$\chi = -\frac{\phi_1}{\kappa} = -\frac{\pi^1}{\kappa} + \frac{A_2}{2}, \quad (4.53)$$

de modo que, sobre a superfície definida por χ , $\{\chi(x), \phi_2(y)\} = \delta^{(2)}(x-y)$. O vínculo ϕ_2 será descartado. As transformações de calibre infinitesimais geradas por χ são:

$$\delta A_1(x) = \int d^2y \varepsilon(y) \{A_1(x), \chi(y)\} = -\frac{\varepsilon(x)}{\kappa}, \quad (4.54)$$

$$\delta A_2(x) = \int d^2y \varepsilon(y) \{A_2(x), \chi(y)\} = 0, \quad (4.55)$$

$$\delta \pi^1(x) = \int d^2y \varepsilon(y) \{\pi^1(x), \chi(y)\} = 0, \quad (4.56)$$

$$\delta \pi^2(x) = \int d^2y \varepsilon(y) \{\pi^2(x), \chi(y)\} = -\frac{\varepsilon(x)}{2}, \quad (4.57)$$

$$\delta \phi_2(x) = \int d^2y \varepsilon(y) \{\phi_2(x), \chi(y)\} = -\varepsilon(x). \quad (4.58)$$

As expressões acima indicam que os campos A_2 e π^1 já são de primeira classe, mas os campos A_1 e π^2 se transformam. deve-se então aplicar o método iterativo a esses dois últimos campos.

O campo invariante de calibre \tilde{A}_1 é construído como uma série de potências de T_2 :

$$\tilde{A}_1(x) = A_1(x) + \int d^2y b_1(x, y) \phi_2(y) + \iint d^2y d^2z b_2(x, y, z) \phi_2(y) \phi_2(z) + \dots \quad (4.59)$$

Os coeficientes b_n serão determinados por meio da condição variacional (4.12):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A}_1(x) = & \delta A_1(x) + \int d^2y \delta b_1(x, y) \phi_2(y) + \int d^2y b_1(x, y) \delta \phi_2(y) + \\ & + \iint d^2y d^2z \delta b_2(x, y, z) \phi_2(y) \phi_2(z) + \iint d^2y d^2z b_2(x, y, z) \delta \phi_2(y) \phi_2(z) + \\ & + \iint d^2y d^2z b_2(x, y, z) \phi_2(y) \delta \phi_2(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Para termos de ordem zero em ϕ_2 , a equação (4.60) fornece

$$\begin{aligned} \delta A_1(x) + \int d^2y b_1(x, y) \delta \phi_2(y) &= 0 \\ -\frac{\varepsilon(x)}{\kappa} - \int d^2y b_1(x, y) \varepsilon(y) &= 0 \\ \rightarrow b_1(x, y) &= -\frac{\delta^{(2)}(x-y)}{\kappa}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Para termos de primeira ordem em ϕ_2 , obtém-se, pela equação (4.60),

$$\begin{aligned} \int d^2y \delta b_1(x, y) \phi_2(y) + 2 \iint d^2y d^2z b_2(x, y, z) \delta \phi_2(y) \phi_2(z) &= 0 \\ \rightarrow b_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

pois $\delta b_1(x, y) = \int d^2z \varepsilon(z) \{b_1(x, y), \chi(z)\} = 0$. Uma vez que $b_2 = 0$, todos também são nulos para $n > 2$. Dessa forma, o campo \tilde{A}_1 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(x) &= A_1(x) + \int d^2y b_1(x, y) \phi_2(y) \\ &= A_1(x) - \int d^2y \frac{\delta^{(2)}(x-y)}{\kappa} \phi_2(y) \\ &= A_1(x) - \frac{\phi_2(x)}{\kappa} \\ &= \frac{A_1(x)}{2} - \frac{\pi^2(x)}{\kappa}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Aplicando o mesmo processo iterativo para o campo π^2 , obtém-se o seguinte campo invariante de calibre:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^2(x) &= \pi^2(x) - \frac{\phi_2(x)}{2} \\ &= \frac{\pi^2(x)}{2} - \frac{\kappa}{4} A_1(x). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Portanto, os campos invariantes sob transformações de calibre geradas por χ são

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{2} - \frac{\pi^2}{\kappa} \quad (4.65)$$

$$\tilde{A}_2 = A_2 \quad (4.66)$$

$$\tilde{\pi}^1 = \pi^1 \quad (4.67)$$

$$\tilde{\pi}^2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\kappa}{4} A_1. \quad (4.68)$$

Esses campos formam a seguinte álgebra de Poisson:

$$\{\tilde{A}_1(x), \tilde{\pi}^2(y)\} = \{\tilde{A}_2(x), \tilde{\pi}^1(y)\} = 0, \quad (4.69)$$

$$\{\tilde{A}_1(x), \tilde{A}_2(y)\} = \frac{1}{\kappa} \delta^{(2)}(x-y), \quad (4.70)$$

$$\{\tilde{A}_1(x), \tilde{\pi}^1(y)\} = \frac{1}{2} \delta^{(2)}(x-y), \quad (4.71)$$

$$\{\tilde{A}_2(x), \tilde{\pi}^2(y)\} = \frac{1}{2} \delta^{(2)}(x-y), \quad (4.72)$$

$$\{\tilde{\pi}^1(x), \tilde{\pi}^2(y)\} = \frac{\kappa}{4} \delta^{(2)}(x-y). \quad (4.73)$$

Os parênteses de Poisson (4.69), (4.70), (4.71), (4.72) e (4.73), no limite $\phi_2 \rightarrow 0$, são equivalentes aos parênteses de Dirac do sistema original [31].

Pode-se agora obter uma hamiltoniana invariante de calibre através da relação (4.14), isto é, substituindo os campos A_1 e A_2 pelos novos campos invariantes de calibre \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 na hamiltoniana canônica (4.39). Fazendo isso, obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \kappa \int d^2x \left(-A_0 \partial_1 \tilde{A}_2 + A_0 \partial_2 \tilde{A}_1 \right). \\ &= \int d^2x \left(-\kappa A_0 \partial_1 A_2 + \frac{\kappa}{2} A_0 \partial_2 A_1 - A_0 \partial_2 \pi^2 \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Impondo a condição de preservação no tempo do vínculo (4.32), obtém-se o seguinte vínculo secundário:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= \{\pi^0, \tilde{H}\} \approx 0 \\ &= \kappa \partial_1 A_2 - \frac{\kappa}{2} \partial_2 A_1 + \partial_2 \pi^2 \approx 0 \\ &= \kappa \partial_1 A_2 - \kappa \partial_2 \left(\frac{A_1}{2} - \frac{\pi^2}{\kappa} \right) \approx 0 \\ &= \kappa (\partial_1 \tilde{A}_2 - \partial_2 \tilde{A}_1) \approx 0 \\ &= \tilde{\phi}_3 \approx 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

O conjunto $\{\phi_0, \chi, \tilde{\phi}_3, \tilde{H}\}$ forma a seguinte álgebra de Poisson:

$$\{\phi_0, \tilde{H}\} = \tilde{\phi}_3, \quad (4.76)$$

$$\{\tilde{\phi}_3, \tilde{H}\} = 0, \quad (4.77)$$

$$\{\chi, \tilde{H}\} = 0, \quad (4.78)$$

$$\{\phi_0, \chi\} = 0, \quad (4.79)$$

$$\{\phi_0, \tilde{\phi}_3\} = 0, \quad (4.80)$$

$$\{\chi, \tilde{\phi}_3\} = 0. \quad (4.81)$$

As equações (4.76), (4.77) e (4.78) mostram que \tilde{H} não permite a determinação de nenhum dos multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos restantes no sistema, o que prova

que \tilde{H} é invariante de calibre. Já as equações (4.79), (4.80) e (4.81) indicam que ϕ_0 , χ e $\tilde{\phi}_3$, que são os vínculos restantes no sistema, são vínculos de primeira classe. Esses resultados mostram o poder do formalismo GU aprimorado.

4.3 REVELANDO SIMETRIAS NO MODELO CPT-PAR MASSIVO

A fim de revelar a simetria de calibre escondida no modelo CPT-par massivo, será aplicado o método GU aprimorado. Como visto na subseção 3.4.2, o sistema apresenta apenas dois vínculos, os mesmos da teoria de Maxwell-Proca [18], os quais são de segunda classe, dados pelas equações (3.45) e (3.53):

$$\begin{aligned} T_1 &= \pi_0, \\ T_2 &= -\partial_i \pi_i + m^2 A_0. \end{aligned}$$

Em razão disso, tem-se duas possibilidades possíveis para o gerador de simetria de calibre, as quais serão discutidas separadamente.

4.3.1 Caso 1: T_1 como Gerador de Simetria de Calibre

Vamos iniciar o formalismo redefinindo o vínculo T_1 , para ser o gerador de simetria de calibre, como

$$\chi = -\frac{T_1}{m^2} = -\frac{\pi_0}{m^2}, \quad T_2 = -\partial_i \pi_i + m^2 A_0, \quad (4.82)$$

de modo que χ e T_2 formem um par conjugado, isto é,

$$\{\chi(x), T_2(y)\} = \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.83)$$

O vínculo T_2 será descartado, passando a fazer parte dos termos de fixação de calibre nas séries de potências que definirão as funções de primeira classe. As transformações de calibre infinitesimais geradas por χ são:

$$\delta A_0(x) = \int d^3 y \varepsilon(y) \{A_0(x), \chi(y)\} = -\frac{\varepsilon(x)}{m^2}, \quad (4.84)$$

$$\delta A_i(x) = \delta \pi_0(x) = \delta \pi_i(x) = 0, \quad (4.85)$$

$$\delta T_2(x) = \int d^3 y \varepsilon(y) \{T_2(x), \chi(y)\} = -\varepsilon(x). \quad (4.86)$$

A partir das relações acima, pode-se notar que apenas o campo A_0 não é invariante de calibre. Sendo assim, a quantidade invariante de calibre \tilde{A}_0 é definida pela série de potências de T_2 :

$$\tilde{A}_0(x) = A_0(x) + \int d^3 y c_1(x, y) T_2(y) + \iint d^3 y d^3 z c_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \dots, \quad (4.87)$$

na qual os coeficientes c_n são determinados pela condição variacional (4.12):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A}_0(x) = & \delta A_0(x) + \int d^3y \delta c_1(x, y) T_2(y) + \int d^3y c_1(x, y) \delta T_2(y) + \\ & + \iint d^3y d^3z \delta c_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) + \\ & + \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) T_2(y) \delta T_2(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Para termos de ordem zero em T_2 , temos

$$\delta A_0(x) + \int d^3y c_1(x, y) \delta T_2(y) = 0. \quad (4.89)$$

Utilizando as equações (4.84) e (4.86), vem

$$-\frac{\epsilon(x)}{m^2} - \int d^3y c_1(x, y) \epsilon(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(x, y) = -\frac{1}{m^2} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.90)$$

Para termos de primeira ordem em T_2 , temos a seguinte equação:

$$\int d^3y \delta c_1(x, y) T_2(y) + 2 \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) = 0. \quad (4.91)$$

Utilizando as equações (4.86) e (4.90) em (4.91), obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{m^2} \int d^3y \delta [\delta^{(3)}(x - y)] T_2(y) - 2 \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) \epsilon(y) T_2(z) = 0 \\ \rightarrow & -\frac{1}{m^2} \iint d^3y d^3z \epsilon(z) \{ \delta^{(3)}(x - y), \chi(z) \} T_2(y) - 2 \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) \epsilon(y) T_2(z) = 0 \\ & \rightarrow 0 - 2 \iint d^3y d^3z c_2(x, y, z) \epsilon(y) T_2(z) = 0 \\ & \rightarrow c_2(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Como $\delta c_2 = 0$, todos os termos de correção c_n são nulos para $n \geq 2$. Substituindo (4.90) em (4.87), chega-se ao campo invariante de calibre $\tilde{A}_0(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0(x) &= A_0(x) - \frac{1}{m^2} \int d^3y \delta^{(3)}(x - y) T_2(y) \\ &= A_0(x) - \frac{1}{m^2} T_2(x) \\ &= A_0(x) - \frac{1}{m^2} (-\partial_i \pi_i(x) + m^2 A_0(x)) \\ \tilde{A}_0(x) &= \frac{1}{m^2} \partial_i \pi_i(x). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Portanto, temos os seguintes campos invariantes de calibre:

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{m^2} \partial_i \pi_i, \quad (4.93)$$

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0, \quad (4.94)$$

$$\tilde{A}_i = A_i, \quad (4.95)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i. \quad (4.96)$$

Pode-se agora calcular os parênteses de Poisson entre as novas variáveis:

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} = \frac{1}{m^2} \{\partial_i \pi_i(x), \pi_0(y)\} = 0 = \{A_0(x), \pi_0(y)\}_D, \quad (4.97)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_i(y)\} = \frac{1}{m^2} \{\partial_j \pi_j(x), \pi_i(y)\} = 0 = \{A_0(x), \pi_i(y)\}_D, \quad (4.98)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_i(y)\} = \frac{1}{m^2} \{\partial_j \pi_j(x), A_i(y)\} = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^{(3)}(x-y) = \{A_0(x), A_i(y)\}_D, \quad (4.99)$$

$$\{\tilde{A}_i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \{A_i(x), \pi_j(y)\} = -\delta_{ij} \delta^{(3)}(x-y) = \{A_i(x), \pi_j(y)\}_D. \quad (4.100)$$

Note que a álgebra dos PP das variáveis de primeira classe acima é idêntica à algebra dos parênteses de Dirac das variáveis originais calculada na subseção 3.4.2. Isso demonstra a consistência do formalismo GU aprimorado.

Agora, pode-se calcular as funções invariantes de calibre a partir das novas variáveis do espaço de fase obtidas. Para isso, deve-se aplicar a relação (4.15):

$$G(A_\mu, \pi_\mu) \Rightarrow G(\tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}_\mu) = \tilde{G}(\tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}_\mu), \quad (4.101)$$

onde $G(A_\mu, \pi_\mu)$ é uma função qualquer das variáveis do espaço de fase. Sendo assim, vamos calcular uma hamiltoniana invariante de calibre. Substituindo as expressões (4.93), (4.95) e (4.96) na hamiltoniana canônica (3.50), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{\pi}_i - W^{0ijk} \tilde{F}_{jk}] (D^{-1})_{il} [\tilde{\pi}_l - W^{0ljk} \tilde{F}_{jk}] + \tilde{A}_0 \partial_i \tilde{\pi}_i + \frac{1}{4} (\tilde{F}_{ij})^2 + \frac{1}{4} W^{ijkl} \tilde{F}_{ij} \tilde{F}_{kl} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2} (\tilde{A}_0 \tilde{A}_0 - \tilde{A}_i \tilde{A}_i) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (D^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0ljk} F_{jk}] + \frac{1}{m^2} (\partial_i \pi_i)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{m^4} (\partial_i \pi_i)^2 - A_i A_i \right] \right\} \\ \tilde{H} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (D^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0ljk} F_{jk}] + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2} A_i^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi_i)^2 \right\}. \quad (4.102) \end{aligned}$$

Observe que hamiltoniana (4.102) é a mesma que a obtida na subseção 3.4.2 através do método de Dirac, quando considerou-se $T_2 \approx 0$ como uma igualdade forte e substituiu-se A_0 por $\frac{\partial_i \pi_i}{m^2}$ (*vide* equação (3.73)). Pela ausência da variável A_0 , fica fácil ver que

$$\{\chi, \tilde{H}\} = \left\{ -\frac{\pi_0}{m^2}, \tilde{H} \right\} = 0 \quad (4.103)$$

como deveria ser, por construção (*vide* eq. (4.12)).

Pode-se também obter uma lagrangiana invariante de calibre, analogamente ao processo realizado para a hamiltoniana original do sistema. Para isso, pode-se utilizar a forma funcional da densidade lagrangiana (3.38) [27, 28]. Utilizando as equações (4.93) e (4.95), a lagrangiana invariante de calibre assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \int d^3x \left(-\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{\mu\nu\rho\phi} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2} \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \right) \\ \tilde{L} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} [-2\tilde{F}_{0i} \tilde{F}_{0i} + \tilde{F}_{ij} \tilde{F}_{ij}] - \frac{1}{4} [4W^{0i0j} \tilde{F}_{0i} \tilde{F}_{0j} + 4W^{0ijk} \tilde{F}_{0i} \tilde{F}_{jk} + W^{ijkl} \tilde{F}_{ij} \tilde{F}_{kl}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2} \tilde{A}_0 \tilde{A}_0 - \frac{m^2}{2} \tilde{A}_i \tilde{A}_i \right\} \\ \tilde{L} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\partial_0 A_i - \partial_i \tilde{A}_0] [\partial_0 A_i - \partial_i \tilde{A}_0] - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - W^{0i0j} [\partial_0 A_i - \partial_i \tilde{A}_0] [\partial_0 A_j - \partial_j \tilde{A}_0] - \right. \\ &\quad \left. - W^{0ijk} [\partial_0 A_i - \partial_i \tilde{A}_0] F_{jk} - \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} + \frac{m^2}{2} \tilde{A}_0 \tilde{A}_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i \right\}. \quad (4.104)\end{aligned}$$

Como a variável original A_0 não está mais presente no sistema, não é possível escrever a lagrangiana (4.104) em uma forma manifestamente covariante.

4.3.2 Caso 2: T_2 como Gerador de Simetria de Calibre

Neste caso, redefine-se o vínculo T_2 como

$$\chi' = \frac{1}{m^2} (-\partial_i \pi_i + m^2 A_0), \quad T_1 = \pi_0, \quad (4.105)$$

a fim de que $\{\chi'(x), T_1(y)\} = \delta^{(3)}(x-y)$ (o sobrescrito ' foi inserido para enfatizar que o gerador de simetria de calibre χ' é diferente do gerador χ do caso anterior). O vínculo T_1 será descartado e passará a ser uma variável de fixação de calibre. As transformações de calibre infinitesimais geradas por χ' são:

$$\delta A_0(x) = \delta \pi_i(x) = 0, \quad (4.106)$$

$$\delta A_i(x) = \int d^3y \varepsilon(y) \{A_i(x), \chi'(y)\} = -\frac{\partial_i \varepsilon(x)}{m^2}, \quad (4.107)$$

$$\delta \pi_0(x) = \delta T_1(x) = \int d^3y \varepsilon(y) \{\pi_0(x), \chi'(y)\} = -\varepsilon(x). \quad (4.108)$$

Então, de acordo com as equações acima, as quantidades A_0 e π_i já são invariantes sob transformações de calibre geradas por χ' , enquanto que A_i muda. Sendo assim, o campo invariante de calibre \tilde{A}_i é construído pela seguinte série de potências de T_1 :

$$\tilde{A}_i(x) = A_i(x) + \int d^3y b_1(x, y) T_1(y) + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots \quad (4.109)$$

Aplique a condição variacional (4.12) para que sejam determinados os coeficientes b_n :

$$\begin{aligned} \delta\tilde{A}_i(x) = & \delta A_i(x) + \int d^3y \delta b_1(x, y) T_1(y) + \int d^3y b_1(x, y) \delta T_1(y) + \\ & + \iint d^3y d^3z \delta b_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \delta T_1(y) T_1(z) + \\ & + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) T_1(y) \delta T_1(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

A equação para os termos de ordem zero em T_1 é

$$\delta A_i(x) + \int d^3y b_1(x, y) \delta T_1(y) = 0. \quad (4.111)$$

Com uso das equações (4.107) e (4.108), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_i \varepsilon(x)}{m^2} - \int d^3y b_1(x, y) \varepsilon(y) = 0 \\ \Rightarrow b_1(x, y) = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^{(3)}(x - y). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Para termos de primeira ordem em T_1 , vem:

$$\int d^3y \delta b_1(x, y) T_1(y) + 2 \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \delta T_1(y) T_1(z) = 0. \quad (4.113)$$

Utilizando as equações (4.108) e (4.112) em (4.113), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} \int d^3y \delta [\partial_i \delta^{(3)}(x - y)] T_1(y) - 2 \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \varepsilon(y) T_1(y) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{m^2} \iint d^3y d^3z \varepsilon(z) \{ \partial_i \delta^{(3)}(x - y), \chi'(z) \} T_1(y) - 2 \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \varepsilon(y) T_1(z) = 0 \\ \Rightarrow 0 - 2 \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \varepsilon(y) T_1(z) = 0 \\ \rightarrow b_2(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (4.114)$$

Em razão disso, todos os coeficientes b_n serão também nulos para $n > 2$. Então, substituindo a equação (4.112) na equação (4.109) o campo invariante de calibre \tilde{A}_i obterá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(x) &= A_i(x) + \frac{1}{m^2} \int d^3y \partial_i \delta^{(3)}(x - y) T_1(y) \\ &= A_i(x) - \frac{1}{m^2} \int d^3y \delta^{(3)}(x - y) \partial_i T_1(y) \\ &= A_i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i T_1(x) \\ \tilde{A}_i(x) &= A_i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i \pi_0(x). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Como o campo π_0 foi descartado e, além disso, é a variável que corrige os outros campos, deve-se ter, por construção, $\tilde{\pi}_0 = 0$. Mas, a título de verificação, consideremos a aplicação deste processo iterativo sobre π_0 . O campo invariante $\tilde{\pi}_0$ vem definido como

$$\tilde{\pi}_0(x) = \pi_0(x) + \int d^3y b_1(x, y) T_1(y) + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots \quad (4.116)$$

Pela condição (4.12), temos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\pi}_0(x) = & \delta\pi_0(x) + \int d^3y \delta b_1(x, y) T_1(y) + \int d^3y b_1(x, y) \delta T_1(y) + \\ & + \iint d^3y d^3z \delta b_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) \delta T_1(y) T_1(z) + \\ & + \iint d^3y d^3z b_2(x, y, z) T_1(y) \delta T_1(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.117)$$

A equação para termos de ordem zero em T_1 nos fornece

$$b_1(x, y) = -\delta^{(3)}(x - y), \quad (4.118)$$

ao passo que a equação para termos de primeira ordem em T_1 fornece

$$b_2(x, y, z) = 0, \quad (4.119)$$

truncando a série. A equação (4.116) se reduz a

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_0(x) &= \pi_0(x) - \int d^3y \delta^{(3)}(x - y) T_1(y) \\ &= \pi_0(x) - T_1(x) \\ &= \pi_0(x) - \pi_0(x) \\ \tilde{\pi}_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.120)$$

como queríamos verificar. Portanto, os campos invariantes de calibre são:

$$\tilde{A}_0 = A_0, \quad (4.121)$$

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{1}{m^2} \partial_i \pi_0, \quad (4.122)$$

$$\tilde{\pi}_0 = 0, \quad (4.123)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i. \quad (4.124)$$

A álgebra dos parênteses de Poisson entre as variáveis invariantes de calibre é

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} = 0 = \{A_0(x), \pi_0(y)\}_D, \quad (4.125)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_i(y)\} = \{A_0(x), \pi_i(y)\} = 0 = \{A_0(x), \pi_i(y)\}_D, \quad (4.126)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_i(y)\} = \frac{1}{m^2} \partial_i \{A_0(x), \pi_0(y)\} = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^{(3)}(x - y) = \{A_0(x), A_i(y)\}_D, \quad (4.127)$$

$$\{\tilde{A}_i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \{A_i(x), \pi_j(y)\} = -\delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y) = \{A_i(x), \pi_j(y)\}_D, \quad (4.128)$$

a qual é também consistente com a álgebra dos parênteses de Dirac entre as variáveis originais do espaço de fase, calculada na subseção 3.4.2.

Agora, será aplicada a relação (4.15), substituindo as equações (4.121), (4.122) e (4.124) na hamiltoniana canônica (3.50). O resultado é a seguinte hamiltoniana de

primeira classe:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}' &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{\pi}_i - W^{0ijk} \tilde{F}_{jk}] (M^{-1})_{il} [\tilde{\pi}_l - W^{0lmn} \tilde{F}_{mn}] + \tilde{A}_0 \partial_i \tilde{\pi}_i + \frac{1}{4} (\tilde{F}_{ij})^2 + \frac{1}{4} W^{ijkl} \tilde{F}_{ij} \tilde{F}_{kl} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2}{2} (\tilde{A}_0 \tilde{A}_0 - \tilde{A}_i \tilde{A}_i) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\pi_i - W^{0ijk} F_{jk}] (M^{-1})_{il} [\pi_l - W^{0lmn} F_{mn}] + A_0 \partial_i \pi_i + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \frac{1}{4} W^{ijkl} F_{ij} F_{kl} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) + \pi_0 \partial_i A_i + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi_0)^2 \right\} \\
&\Rightarrow \tilde{H}' = H - \int d^3x \left\{ -\pi_0 \partial_i A_i - \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi_0)^2 \right\}. \tag{4.129}
\end{aligned}$$

As equações de Hamilton geradas pela hamiltoniana (4.129) são

$$\dot{A}_0 = \partial_i A_i - \frac{1}{2m^2} \partial_i \partial_i \pi_0, \tag{4.130}$$

$$\dot{A}_i = \partial_i A_0 - (M^{-1})_{ij} [\pi_j - W^{0jkl} F_{kl}], \tag{4.131}$$

$$\dot{\pi}_0 = T_2 = m^2 \chi' \approx 0, \tag{4.132}$$

$$\dot{\pi}_i = 2 (M^{-1})_{jk} W^{0kli} \partial_l [\pi_j - W^{0jmn} F_{mn}] - \partial_j F_{ji} + m^2 A_i - \partial_i \pi_0. \tag{4.133}$$

Embora a variável original A_0 já seja invariante de calibre, a equação (4.132) nos indica que é possível fazer a seguinte generalização:

$$A_0 \rightarrow \tilde{A}_0 = A_0 - \frac{1}{m^2} \partial_0 \pi_0, \tag{4.134}$$

uma vez que as evoluções temporais de A_0 e \tilde{A}_0 são iguais. Então, substituindo A_0 por \tilde{A}_0 na hamiltoniana (4.129), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{H}' &= H - \int d^3x \left\{ -\pi_0 \partial_i A_i + \frac{1}{2m^2} [(\partial_0 \pi_0)^2 - (\partial_i \pi_0)^2] \right\} \\
&= H - \int d^3x \left\{ -\pi_0 \partial_i A_i + \frac{1}{2m^2} (\partial_\mu \pi_0)^2 \right\}. \tag{4.135}
\end{aligned}$$

Pode-se agora fazer uma transformação de Legendre inversa da hamiltoniana (4.135), resultando em uma lagrangiana invariante de calibre:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}' &= \int d^3x \left\{ \pi_0 \dot{\tilde{A}}_0 - \pi_i \dot{\tilde{A}}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \pi_0 \dot{A}_0 - \pi_i \dot{A}_i - \mathcal{H} - \pi_0 \partial_i A_i + \frac{1}{2m^2} (\partial_\mu \pi_0)^2 \right\} \\
\tilde{L}' &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{\mu\nu\rho\phi} F_{\mu\nu} F_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \pi_0 \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2m^2} (\partial_\mu \pi_0)^2 \right\}, \tag{4.136}
\end{aligned}$$

onde foi utilizada a equação (4.131) para eliminar os momentos π_i . Integrando o penúltimo termo de (4.136) por partes (ignorando o termo de superfície) e definindo $\frac{\pi_0}{m^2} \equiv \theta$, a lagrangiana pode ser escrita como

$$\tilde{L}' = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{\mu\nu\rho\phi} F_{\mu\nu} F_{\rho\phi} + \frac{m^2}{2} (A_\mu + \partial_\mu \theta) (A^\mu + \partial^\mu \theta) \right\}. \quad (4.137)$$

A lagrangiana (4.137) é a lagrangiana de Stueckelberg [19] adicionada ao termo CPT-par e violador da invariância de Lorentz, sendo θ conhecido como escalar de Stueckelberg. Esta lagrangiana é a mesma encontrada por Vytheeswaran para a teoria de Maxwell-Proca por meio do GU usual [18]. Note que a Lagrangiana (4.137) é invariante sob a transformação de calibre

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta - \lambda, \quad (4.138)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (4.139)$$

onde λ , é um campo escalar arbitrário. Além disso, ao se aplicar a condição $\theta = 0$, tem-se novamente o setor CPT-par massivo.

5 CONCLUSÕES

Na física moderna, a invariância de calibre é uma característica importante e útil em diversas teorias, justificando a importância de se estudar modelos que apresentam tal simetria.

Neste trabalho, foi apresentado o modelo CPT-par massivo, o qual viola tanto a invariância de Lorentz quanto a invariância de calibre. Foi analisada a estrutura canônica do sistema através do método de Dirac e a simetria de calibre escondida foi revelada por meio do método *gauge unfixing* aprimorado, convertendo-se o sistema original de segunda classe (que não possui invariância de calibre) para um sistema de primeira classe (que possui invariância de calibre).

Pelo método de Dirac, foram obtidos os dois vínculos do sistema, os quais são de segunda classe e iguais aos vínculos do modelo de Proca. Ou seja, o termo CPT-par e violador da invariância de Lorentz não altera os vínculos da teoria de Proca. Em seguida, foram calculados os parênteses de Dirac da teoria, a partir dos quais a quantização canônica é diretamente realizada, sem inconsistências.

Pela aplicação do método *gauge unfixing* aprimorado, foram obtidas duas teorias invariantes de calibre consistentes com o sistema original. Especificamente falando, em ambos os casos, a álgebra dos parênteses de Poisson das novas variáveis do espaço de fase é consistente com a álgebra dos parênteses de Dirac envolvendo as variáveis originais. No primeiro caso, em que o vínculo primário foi escolhido como gerador de simetria de calibre, obteve-se uma lagrangiana que não pôde ser colocada na forma covariante. Já no segundo caso, em que o vínculo secundário foi escolhido como gerador de simetria, obteve-se uma lagrangiana do tipo Stueckelberg adicionada ao termo CPT-par e violador da invariância de Lorentz. Ou seja, no caso do modelo CPT-par massivo, pode-se considerar que a aplicação do método GU aprimorado justifica a aplicação do truque de Stueckelberg.

Pelo fato de não fazer uso de variáveis extras, o método GU se revela ser um método cômodo e atraente, em comparação com outros formalismos de conversão de sistemas de segunda classe para sistemas de primeira classe. Pode-se ainda comparar o método GU usual com o método GU aprimorado: é possível notar que a obtenção das variáveis invariantes de calibre, para que em seguida seja possível escrever as funções hamiltoniana e lagrangiana, torna os cálculos menos longos, em comparação com o método usual, no qual se aplica o operador de projeção diretamente sobre a hamiltoniana canônica.

Perspectivas

Futuramente, como continuação do trabalho, tem-se a intenção de aplicar o método BFT ao modelo CPT-par massivo, com o objetivo de se obter novas comparações. Além disso, dando prosseguimento na análise de sistemas vinculados de segunda classe, pretende-

se também estudar a aplicação do método *gauge unfixing* em modelos não-abelianos.

REFERÊNCIAS

- 1 MATTINGLY, D. **Modern Tests of Lorentz Invariance**. Living Rev. Relativ., v.8, n.5, 2005.
- 2 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. **Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory**. Phys. Rev. D, v. 39, n. 2, 1989.
- 3 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. **Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings**. Phys. Rev. D, v. 40, n. 6, 1989.
- 4 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. **CPT and strings**. Nucl. Phys. B, v. 359, n. 2-3, 1991.
- 5 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. **Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string**. Phys. Lett. B, v. 381, n.1-3, 1996.
- 6 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. **Lorentz-violating extension of the standard model**. Phys. Rev. D, v. 58, n. 11, 1998.
- 7 ALVES, P. R. F.; OTOYA, V. J. V. **Aspectos clássicos da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw**. Multiverso: Revista Eletrônica do Campus Juiz de Fora-IF Sudeste MG, v. 1, n. 1, 2016.
- 8 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. **Signals for Lorentz violation on electrodynamics**, Phys. Rev. D, v. 66, n. 5, 2002.
- 9 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. **Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension**, Phys. Rev. D, v. 80, n. 1, 2009.
- 10 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. **Astrophysical tests of Lorentz and CPT violation with photons**, Astrophys. J. Lett, v. 689, n. 1, 2008.
- 11 KAUFHOLD, C.; KLINKHAMER, F. R. **Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell-Chern-Simons theory**, Phys. Rev. D, v. 76, n. 2, 2007.
- 12 SCARPELLI, A. P. B.; SAMPAIO, M.; NEMES, M. C.; HILLER, B. **Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced Chern-Simons-like term in extended QED**, Eur. Phys. J. C, v. 56, 2008.
- 13 CASANA, R.; FERREIRA JR, M. M.; GOMES, A. R.; PINHEIRO, P. R. D. **Stationary solutions for the parity-even sector of the CPT-even and Lorentz-covariance-violating term of the standard model extension**, Eur. Phys. J. C, v. 62, 2009.
- 14 FONSECA, J. M.; GOMES, A. H.; MOURA-MELO, W. A. **Emission and absorption of photons and the black-body spectrum in Lorentz-odd electrodynamics**, Phys. Rev. Lett. B, v. 671, n. 2, 2009.
- 15 HOHENSEE, M. A.; LEHNERT, R.; PHILLIPS, D. F.; WALSWORTH, R. L. **Particle-accelerator constraints on isotropic modifications of the speed of light**, Phys. Rev. Lett., v. 102, n. 17, 2009.

- 16 ROTHE, H. J.; ROTHE, K. D. **Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems**. Singapore: World Scientific, 2010.
- 17 POENARU, N.D.; CALBOREANU, A.; POENARU, D.N. **Alexandru Proca (1897-1955) and his equation of the massive vector boson field**. Eur. Phys. News, v. 37, n.5, 2006.
- 18 VYTHEESWARAN, A. S. **Gauge invariances in the Proca model**. Int. J. Mod. Phys. A, v. 13, n. 5, 1998
- 19 STUECKELBERG, E. C. G. **Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass**. Helv. Phys. Act, v. 30, 1957.
- 20 NETO, J. B **Symplectic quantization of second class systems**, Mod. Phys Lett. A, v. 7, n. 19, 1992.
- 21 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. **Operator quantization of dynamical systems with irreducible first and second class constraints**. Phys. Lett. B, v. 180, n. 1-2, 1986.
- 22 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. **Operational quantization of dynamical systems subject to second class constraints**. Nucl. Phys. B, v. 279, n.3-4, 1987.
- 23 BATALIN, I. A.; TYUTIN, I. V. **Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with Abelian conversion of second class constraints**, Int. J. Mod. Phys. A, v. 6, 1991.
- 24 MITRA P.; RAJARAMAN R. **Gauge-invariant reformulation of theories with second-class constraints**. Ann. Phys. (N.Y.), v. 203, n. 1, 1990.
- 25 ANISHETTY, R.; VYTHEESWARAN, A. S. **Gauge invariance in second-class constrained systems**. J. Phys. A, v. 26, n. 20, 1993.
- 26 VYTHEESWARAN, A. S. **Gauge unfixing in second-class constrained systems**. Ann. Phys. (N.Y.), v. 236, n. 2, 1994.
- 27 NETO, J. A. **An improved gauge unfixing formalism and the abelian pure Chern-Simons theory**. Braz. J. Phys., v. 37, n. 3b, 2007.
- 28 ALVES, P. R. F.; COSTA, C. N.; ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R. **Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive Carroll-Field-Jackiw model**. Eur. Phys. Lett., v. 131, 31004, 2020.
- 29 DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University 1964.
- 30 DUNNE, G. V. **Aspects of Chern-Simons Theory**. Les Houches - Ecole d'Ete de Physique Theorique, vol 69: Berlin, Heidelberg, Springer, 1999
https://doi.org/10.1007/3-540-46637-1_3
- 31 BANERJEE, R. **Gauge-independent analysis of Chern-Simons theory with matter coupling**. Phys. Rev. Lett., v. 69, n. 1, 1992.
- 32 NETO, J. B. **Matemática para físicos com aplicações: tratamento clássico e quântico**, volume II São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

- 33 LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.
- 34 LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Mecânica**. Brasil: editora Hemus, 2004.
- 35 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica quântica moderna**. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- 36 SUNDERMEYER, K. **Constrained dynamics**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
- 37 BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. **The abelian Higgs Kibble model, unitarity of the S-operator**. Phys. Lett. B, v. 52, n. 3, 1974.
- 38 BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. **Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model**. Communications in Mathematical Physics, v. 42, 1975.
- 39 BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. **Renormalization of gauge theories**. Annals of Phys., v. 98, n. 2, 1976.
- 40 TYUTIN, I. V. **Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism**. Preprint of P.N. Lebedev Physical Institute, n. 39, 1975.