

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Júlia de Castro Motta**

**Otimização estrutural multi-objetivo de pórticos espaciais em aço com  
variáveis de projeto não usuais**

Juiz de Fora

2022

Júlia de Castro Motta

Otimização estrutural multi-objetivo de pórticos espaciais em aço com  
variáveis de projeto não usuais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Motta, Júlia de Castro.

Otimização estrutural multi-objetivo de pórticos espaciais em aço com  
variáveis de projeto não usuais / Júlia de Castro Motta. – 2022.

151 f. : il.

Orientador: Afonso Celso de Castro Lemonge

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Fa-  
culdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil,  
2022.

1. Otimização Multi-objetivo. 2. Pórticos Espaciais de Aço. 3. Evolução  
Diferencial. 4. Variáveis de projeto não-usuais. I. Lemonge, Afonso Celso  
de Castro. II. Título.

**Júlia de Castro Motta**

Otimização estrutural multi-objetivo de pórticos espaciais em aço com variáveis de projeto não usuais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Aprovada em 09 de março de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Afonso Celso de Castro Lemonge** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Moacir Kripka**

Universidade de Passo Fundo

**Prof.ª Dr.ª Patricia Habib Hallak**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 21/02/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Afonso Celso de Castro Lemonge, Professor(a)**, em 09/03/2022, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Patricia Habib Hallak, Professor(a)**, em 09/03/2022, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Moacir Kripka, Usuário Externo**, em 09/03/2022, às 18:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0688028** e o código CRC **3E799C57**.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Armando e Sandra, pelo apoio, amor, e confiança que sempre depositaram em mim. Obrigada por estarem do meu lado, vocês são meus exemplos.

Ao meu irmão Cássio pela torcida e pelo ombro amigo sempre que foi preciso.

Ao meu orientador, Afonso Lemonge, por, mesmo em uma situação atípica de pandemia, estar sempre presente com muita dedicação e paciência, garantindo que este trabalho ficasse o melhor possível.

Aos amigos e familiares que sempre acreditaram em mim.

Ao professores Patrícia Hallack e Moacir Kripka, pela ajuda no enriquecimento deste trabalho.

A todos aqueles que dedicaram seu tempo tornando possível este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

## RESUMO

Em problemas de engenharia estrutural, é de grande interesse do projetista encontrar a solução mais econômica possível, que atenda as exigências impostas em normas técnicas. Encontrar soluções mais econômicas que atendam os critérios de segurança pode demandar um processo de tentativa-e-erro geralmente de alto custo computacional. Para contornar esse problema formulam-se problemas de otimização estrutural com o objetivo de encontrar a solução ótima, ou próxima da ótima, desejada. Os problemas de otimização podem apresentar um ou mais objetivos. Em geral, no contexto da otimização estrutural, o peso, a massa ou custo da estrutura é o principal objetivo a ser minimizado. Por outro lado, caso seja desejado aumentar o desempenho estrutural, o problema pode ser formulado com mais objetivos, que são conflitantes. Para resolvê-lo, pode-se recorrer à otimização multi-objetivo, onde estão também presentes funções objetivo relacionadas, por exemplo, à minimização de deslocamentos máximos, maximização de fatores de carga crítica referentes à estabilidade global da estrutura, melhor comportamento dinâmico, além de outros. Esta dissertação tem como objetivo a formulação, solução e análise de vários problemas de otimização estrutural multi-objetivo de pórticos espaciais de aço considerando esses objetivos combinados de várias maneiras. Quando um ou mais destes não são considerados como objetivos os mesmos tornam-se restrições. Ademais, além de considerar as variáveis de projeto tradicionais relacionadas às seções transversais dos membros que se referem a um conjunto de perfis metálicos comerciais, são consideradas também a orientação dos pilares e suas posições como variáveis de projeto. Nos exemplos estudados, a procura pelas melhores soluções é feita através de algoritmos baseados em Evolução Diferencial para problemas multi-objetivo. Para os experimentos numéricos analisados são apresentadas frentes de Pareto em duas, três e quatro dimensões. Sobres estas frentes são apresentadas análises detalhadas acerca das soluções não-dominadas. Além disso, um método de tomada de decisão de torneio multicritério é utilizado para extrair as soluções mais adequadas aos critérios definidos pelo projetista e vários indicadores de desempenho são usados para a comparação dos algoritmos.

Palavras-chave: Otimização Multi-objetivo. Pórticos Espaciais de Aço. Evolução Diferencial. Variáveis de projeto não-usuais

## ABSTRACT

In structural engineering problems, it is of great interest to the designer to find the most economical solution possible, which meets the requirements imposed by technical standards. Finding the most economical solutions, meeting the safety requirements, may demand a trial and error process with high computational cost. To work out this issue, structural optimization problems are formulated to find an optimal solution, or close to the optimum, as desired. Structural optimization problems can have one or more objectives. In most of the cases, the weight of the structure or the total cost is the main objective to be minimized. However, if it is desired to increase the structural performance of the building, the problem have conflicting objectives. To solve it, one can resort to multi-objective optimization, where objective functions related to displacement minimization, stability maximization, and better dynamic behavior are also present. This work objective is to formulate, solve and analyse several multi-objective optimization of steel space frames considering these objective functions, combined in multiple ways. When one of these aspects is not an objective, it is considered as a constraint. Furthermore, in addition to considering the traditional design variables related to the cross-sections designated to a group of members, the orientation of the columns and their positions are also considered as design variables. In the studied examples, the search for the best solutions is done using algorithms based in Differential Evolution to multi-objective problems. Pareto fronts in two, three and four dimension are presented. A detailed analysis about the non-dominated solutions presented in the Pareto fronts is done. A multi-criteria tournament decision-making method is used in multi-objective problems to extract the adequate solutions to the criteria defined by the designer and performance metrics are applied to compare the algorithms.

Keywords: Multi-objective optimization. Spatial steel frames. Differential evolution. Unusual design variables.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 - Trabalhos recentes e/ou relevantes relativos à otimização estrutural de pórticos espaciais . . . . .	7
Figura 2 - Esquema do DE de geração de vetores mutantes . . . . .	10
Figura 3 - Exemplo de hipervolume para um problema com dois objetivos . . . . .	16
Figura 4 - Distância $d^+$ entre dois pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{z}$ para um exemplo com duas funções objetivo . . . . .	17
Figura 5 - Exemplos de <i>spacing</i> para um espaço bidimensional . . . . .	18
Figura 6 - Exemplo de perfis de desempenho em problemas de otimização multi-objetivo de treliças . . . . .	19
Quadro 2 - Perfis metálicos para pilares e vigas . . . . .	21
Figura 8 - Eixos principais de inércia de um perfil metálico genérico . . . . .	22
Figura 9 - Parametrização utilizada no posicionamento dos pilares Exemplo genérico com quatro vigas e três pilares . . . . .	23
Figura 10 - Vetor candidato com três tipos de variáveis de projeto . . . . .	24
Figura 11 - Vetor candidato com seis tipos de variáveis de projeto . . . . .	25
Figura 12 - Distribuição de cargas gravitacionais de duas lajes adjacentes . . . . .	28
Figura 13 - Distribuição das cargas de vento nas vigas de uma fachada . . . . .	30
Figura 14 - Efeito de diafragma rígido nos deslocamentos horizontais . . . . .	31
Figura 15 - Pórtico Espacial de 258 barras e 126 nós . . . . .	32
Figura 16 - Agrupamento dos pilares no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	33
Figura 17 - Agrupamento das vigas no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	33
Figura 18 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	33
Figura 19 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	34
Figura 20 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	36
Figura 21 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	36
Figura 22 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	37

Figura 23 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós	38
Figura 24 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	40
Figura 25 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	42
Figura 26 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	42
Figura 27 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	43
Figura 28 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	44
Figura 29 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	46
Figura 30 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	47
Figura 31 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	48
Figura 32 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	48
Figura 33 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	49

Figura 34 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	51
Figura 35 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	52
Figura 36 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	54
Figura 37 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	54
Figura 38 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	55
Figura 39 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	57
Figura 41 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	59
Figura 40 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	60
Figura 42 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	61

Figura 43 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	62
Figura 44 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	63
Figura 45 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	64
Figura 46 - Coordenadas paralelas das frentes de Pareto do problema multi-objetivo de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	67
Figura 47 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	67
Figura 48 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	69
Figura 49 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	70
Figura 50 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	71

Figura 51 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	72
Figura 52 - Perfis de desempenho dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	75
Figura 53 - Planta baixa do pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento (dimensões em metros) . . . . .	76
Figura 54 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento . . . . .	77
Figura 55 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento . . .	78
Figura 56 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento . . .	79
Figura 57 - Planta baixa do pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento (dimensões em metros) . . . . .	82
Figura 58 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	83
Figura 59 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	84
Figura 60 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	85
Figura 61 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	85
Figura 62 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	86
Figura 63 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	87

Figura 64 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	87
Figura 65 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	88
Figura 66 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	91
Figura 67 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	92
Figura 68 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	92
Figura 69 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	93
Figura 70 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	94
Figura 71 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	94
Figura 72 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais a minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	95

Figura 73 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento	98
Figura 74 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	99
Figura 75 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	99
Figura 76 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	100
Figura 77 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	101
Figura 78 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	101
Figura 79 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	102
Figura 80 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . .	105
Figura 81 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	106

Figura 82 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	106
Figura 83 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	107
Figura 84 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( <i>LRFD</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento	108
Figura 85 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( <i>V</i> ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento	108
Figura 86 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	109
Figura 87 - Perfis de desempenho dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	112
Figura 88 - Pórtico espacial genérico . . . . .	120
Figura 89 - Eixos locais do elemento genérico <i>i</i> e seus GL's . . . . .	122
Figura 90 - Eixos locais do elemento genérico <i>i</i> e seus GL's . . . . .	122
Figura 91 - Eixos globais e eixos locais de um elemento genérico . . . . .	125
Figura 92 - Rotação em torno de <i>y</i> . . . . .	126
Figura 93 - Rotação em torno de $z_\beta$ . . . . .	126
Figura 94 - Rotação em torno de $x_\gamma$ . . . . .	126

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	35
Tabela 2	– Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós	37
Tabela 3	– Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	39
Tabela 4	– Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	39
Tabela 5	– Soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	41
Tabela 6	– Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	43
Tabela 7	– Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	44
Tabela 8	– Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	45
Tabela 9	– Soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . .	47
Tabela 10	– Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	49
Tabela 11	– Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . .	50

Tabela 12 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	50
Tabela 13 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	53
Tabela 14 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do primeiro deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	56
Tabela 15 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	57
Tabela 16 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	58
Tabela 17 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	59
Tabela 18 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do primeiro deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	63
Tabela 19 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	65
Tabela 20 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	65
Tabela 21 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	68

Tabela 22 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	70
Tabela 23 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . . . .	72
Tabela 24 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós . . .	73
Tabela 25 – Áreas normalizadas sob as curvas do perfis de performance dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós	75
Tabela 26 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento	78
Tabela 27 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento	80
Tabela 28 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento . . . . .	80
Tabela 29 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	84
Tabela 30 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	89
Tabela 31 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	89

Tabela 32 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	90
Tabela 33 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	96
Tabela 34 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	96
Tabela 35 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	97
Tabela 36 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	103
Tabela 37 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	103
Tabela 38 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	104
Tabela 39 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crític no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	110
Tabela 40 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	110

Tabela 41 – Áreas normalizadas sob as curvas do perfis de performance dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento . . . . .	112
---	-----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	2
1.2	JUSTIFICATIVA . . . . .	3
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>META-HEURÍSTICAS DE BUSCA, INDICADORES DE DESEMPENHO E TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO</b>	<b>8</b>
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL (POE) . . . . .	8
3.1.1	<b>Problema de Otimização Estrutural mono-objetivo</b> . . . . .	8
3.1.2	<b>Problema de Otimização Estrutural multi-objetivo</b> . . . . .	9
3.2	THIRD EVOLUTION STEP OF DIFFERENTIAL EVOLUTION (GDE3)	9
3.2.1	<b>Mutação</b> . . . . .	9
3.2.2	<b>Cruzamento</b> . . . . .	10
3.2.3	<b>Seleção</b> . . . . .	10
3.3	SUCCESS HISTORYBASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION (SHAMODE) . . . . .	11
3.3.1	<b>Adaptação de parâmetros</b> . . . . .	11
3.3.2	<b>Mutação</b> . . . . .	12
3.3.3	<b>Cruzamento</b> . . . . .	12
3.3.4	<b>Seleção</b> . . . . .	12
3.4	SUCCESS HISTORYBASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION WITH WHALE OPTMIZATION (SHAMODE-WO) . . . . .	13
3.5	MULTIOBJECTIVE METAHEURISTIC WITH ITERATIVE PARAMETER DISTRIBUTION ESTIMATIONN (MM-IPDE) . . . . .	13
3.5.1	<b>Adaptação de parâmetros</b> . . . . .	14
3.5.2	<b>Reprodução</b> . . . . .	15
3.6	INDICADORES DE DESEMPENHO . . . . .	15
3.6.1	<b>Hipervolume</b> . . . . .	15
3.6.2	<i>Inverted Generational Distance Plus</i> . . . . .	16
3.6.3	<i>Spacing</i> . . . . .	17
3.6.4	<i>Perfis de desempenho</i> . . . . .	18
3.7	TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO . . . . .	20
<b>4</b>	<b>ESTRUTURA DOS POE'S</b> . . . . .	<b>21</b>
4.1	VARIÁVEIS DE PROJETO . . . . .	21
4.1.1	<b>Perfis metálicos</b> . . . . .	21

4.1.2	<b>Orientações dos pilares</b> . . . . .	22
4.1.3	<b>Posições dos pilares</b> . . . . .	22
4.2	<b>ESTRUTURA DE UM VETOR CANDIDATO E AGRUPAMENTO AUTOMÁTICO DE MEMBROS</b> . . . . .	23
4.3	<b>FUNÇÕES OBJETIVO</b> . . . . .	24
4.4	<b>RESTRIÇÕES</b> . . . . .	25
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>28</b>
5.1	<b>CARGAS DE PROJETO</b> . . . . .	28
5.1.1	<b>Cargas gravitacionais</b> . . . . .	28
5.1.2	<b>Cargas de vento</b> . . . . .	29
5.2	<b>EFEITOS ESTRUTURAIS DAS LAJES DE CONCRETO ARMADO</b> .	31
5.3	<b>PRIMEIRO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS - PÓRTICO ESPACIAL DE 258 BARRAS E 126 NÓS</b> . . . . .	32
5.3.1	<b>Minimização do peso da estrutura e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós</b> . .	33
5.3.2	<b>Minimização do peso da estrutura e maximização da primeira frequência natural de vibração</b> . . . . .	39
5.3.3	<b>Minimização do peso da estrutura e do maximização do fator de carga crítica</b> . . . . .	45
5.3.4	<b>Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração</b> . . . . .	51
5.3.5	<b>Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica</b>	58
5.3.6	<b>Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica</b> . .	65
5.3.7	<b>Análise dos resultados</b> . . . . .	73
5.4	<b>SEGUNDO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS</b> . . . . .	76
5.5	<b>TERCEIRO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS</b> . . . . .	81
5.5.1	<b>Minimização do peso da estrutura e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais</b> . . . . .	83
5.5.2	<b>Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal</b> . . . . .	89
5.5.3	<b>Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração</b> . . . . .	96

5.5.4	Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica . . . . .	103
5.5.5	Análise dos resultados . . . . .	110
6	<b>CONCLUSÕES E EXTENSÕES DO TRABALHO . . . . .</b>	<b>113</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>115</b>
	<b>APÊNDICE A – Análise matricial de estruturas . . . . .</b>	<b>120</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Com os avanços tecnológicos na construção civil, o projeto de edificações de grande porte se torna cada dia mais comum no dia-a-dia dos engenheiros estruturais. O desenvolvimentos de *softwares* computacionais de análise estrutural foi um dos grandes avanços neste ramo. Nestes *softwares*, o projetista deve fornecer a geometria da estrutura e as cargas atuantes na mesma, assim como as características do material e das seções transversais dos elementos. Desta maneira, utilizando sua intuição e experiência, o projetista desenvolve uma configuração estrutural e, em um processo de tentativa e erro, tenta melhorá-la procurando aquela que seja a mais econômica possível ao mesmo tempo que atende às exigências impostas em normas técnicas. Em edificações de grande porte, esta é uma tarefa não-trivial.

Além disso, pode ser desejado também aprimorar certos comportamentos mecânicos da estrutura, como a diminuição de deslocamentos, aumento da estabilidade estrutural e melhor comportamento dinâmico. Estas características estão, de maneira geral, relacionadas a estruturas mais rígidas e, conseqüentemente, mais caras. Isto leva a um problema com objetivos conflitantes. A otimização estrutural entra neste cenário como uma ferramenta capaz de auxiliar o projetista nesta tarefa.

A otimização estrutural é um processo que, ao variar determinadas características da estrutura, procura uma configuração que resulta em um desempenho ótimo em relação a um ou mais objetivos determinados. Tudo isto é feito respeitando a restrições, que podem ser de várias naturezas, como as tensões e deslocamentos máximos, frequências naturais de vibração, cargas de flambagem, entre outros.

Em um problema de otimização são definidas uma ou mais funções objetivo, que se deseja minimizar ou maximizar. Um problema com apenas uma função objetivo é chamado de mono-objetivo, enquanto um com duas ou mais funções objetivo é chamado de multi-objetivo. Em geral, em problemas mono-objetivo o resultado é uma solução ótima que atende melhor ao objetivo que as demais. Já nos problemas multi-objetivo, o resultado é um conjunto de soluções ótimas, chamado de frente ou fronteira de Pareto, ficando a cargo de um tomador de decisões escolher a que melhor atende às suas preferências.

Em um problema real de engenharia estrutural, a minimização de custos é desejada na grande maioria das vezes. É possível então utilizar uma formulação de otimização mono-objetivo, onde a função objetivo dá a quantidade de material, custo total ou peso da estrutura. Caso seja desejado aumentar o desempenho estrutural, pode-se recorrer à otimização multi-objetivo, onde, geralmente, estão presentes funções objetivo relacionadas à minimização de deslocamentos, maximização de fatores de carga crítica referentes à estabilidade global da estrutura e melhor comportamento dinâmico.

O valor da função objetivo é calculado a partir das chamadas variáveis de projeto,

que podem ser contínuas, discretas, inteiras ou mistas. Em um problema de otimização estrutural de estruturas formadas por barras, como é o caso deste trabalho, estas variáveis podem representar a seção transversal, posição e orientação dos elementos estruturais, entre outros aspectos.

A orientação e posição dos pilares em projetos simples normalmente pode ser prevista com a experiência do projetista. Em estruturas de planta baixa retangular, em geral, os pilares são posicionados nos cantos da estrutura e orientados de maneira a resistir os esforços laterais na direção da menor dimensão da edificação. Em projetos mais complexos, esta tarefa pode não ser trivial.

Além disso, também é necessário definir as restrições às quais o problema está submetido. Em uma situação de otimização de estruturas estas restrições podem ser impostas por normas técnicas ou por outros aspectos da preferência do projetista, podendo ser correspondentes a deslocamentos, esforços, tensões, frequências naturais de vibração, estabilidade global, entre outros.

## 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos entre objetivo principal e objetivos específicos, como descrito na presente Seção.

### **Objetivo principal**

O objetivo principal deste trabalho é a otimização multi-objetivo de pórticos espaciais de aço considerando variáveis de projeto não-usuais, como orientações e posições dos perfis metálicos designados para os pilares. Para isso, a procura pelas melhores soluções é feita através de quatro meta-heurísticas: *Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution* (GDE3), *Success History-based Adaptive Multi-Objective Differential Evolution* (SHAMODE), *Success History-based Adaptive Multi-Objective Differential Evolution with Whale Optimization* (SHAMODE-WO) e *Multiobjective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimation* (MM-IPDE). [1–3]

Apesar de existirem estudos considerando posições de apoios e orientações das seções transversais de pilares como variáveis de projeto, não são encontrados trabalhos de otimização multi-objetivo de pórticos espaciais em aço que consideram estas duas simultaneamente. Esta consideração é um aspecto inovador da dissertação.

### **Objetivos Específicos**

Como objetivos específicos, pode-se citar:

- a) acoplar um simulador de pórtico espacial à quatro meta-heurísticas de otimização estrutural;

- b) desenvolver um algoritmo que trate os perfis metálicos dos elementos e as posições e orientações dos pilares como variáveis de projeto;
- c) utilizar uma metodologia de agrupamento automático de membros;
- d) conduzir três conjuntos de experimentos de otimização estrutural de pórticos espaciais, aumentando gradativamente a complexidade;
- e) analisar a influência da escolha correta dos perfis metálicos dos elementos, orientações e posições dos pilares no desempenho estrutural dos pórticos;
- f) comparar o desempenho das meta-heurísticas utilizando indicadores de desempenho como Hipervolume, *Inverted Generational Distance Plus* (IGD+) e *Spacing*.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A justificativa para o desenvolvimento desta dissertação está no fato de que a grande maioria dos problemas de otimização estrutural de pórticos espaciais tem as suas formulações como problemas com uma única função objetivo, sendo esta o peso ou volume, e as restrições são as usuais indicadas pelas normas reguladoras. A consideração de objetivos adicionais como os deslocamentos horizontais, as frequências naturais de vibração e fatores de carga crítica referentes à estabilidade global da estrutura ainda tem muitos aspectos a serem investigados. Estas grandezas podem ser combinadas ora como objetivos e ora como restrições. Somado a isso a consideração de variáveis de projeto que usualmente não são consideradas nas formulações como a orientação e posicionamento dos pilares. Tudo isto é feito seguindo as recomendações normativas para dimensionamento de estruturas metálicas, aproximando este estudo acadêmico de casos reais de projetos estruturais.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, incluindo a presente introdução que apresenta o tema e os objetivos do trabalho. O Capítulo 2 faz uma revisão da literatura com o objetivo apresentar ao leitor trabalhos relevantes e relacionados ao tema da dissertação. O Capítulo 3 descreve a formulação de problemas de otimização estrutural mono e multi-objetivo, apresenta os algoritmos de busca utilizadas e os indicadores de desempenho utilizadas para comparar estes algoritmos. Além disso, é descrito o método de tomada de decisões, para a extração das soluções desejadas pelo projetista, adotado nos problemas multi-objetivo. No Capítulo 4, são descritas as variáveis de projeto, restrições e funções-objetivo estudadas nos exemplos numéricos. No Capítulo 5, são apresentados os experimentos numéricos, assim como a análise de seus resultados. Finalmente, no Capítulo

6 são discutidas as conclusões do trabalho, além de possíveis extensões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é feita uma revisão dos trabalhos existentes na literatura que possuem relevância no tema da dissertação. A partir disto, é possível visualizar as lacunas existentes e como este trabalho se encaixa neste contexto. Não é o objetivo desta dissertação fazer uma análise aprofundada de cada um dos trabalhos citados a seguir.

Os estudos relacionados a otimização estrutural de pórticos de aço utilizando meta-heurísticas começam a surgir no final do século passado. Inicialmente, as variáveis de projeto adotadas eram apenas as seções transversais dos elementos estruturais. Em 1991, Saka [4] conduziu estudos preliminares em otimização de pórticos planos de aço com restrições de esforços e deslocamento impostas por normas técnicas, além de restrições de estabilidade. Em 1992, Chan [5] aplicou critérios de otimização a prédios altos utilizando perfis comerciais e satisfazendo restrições de deslocamento.

Foi nessa época também que as frequências naturais de vibração começaram a ser consideradas como restrições. Como exemplos, pode-se citar os estudos conduzidos por Vanderplaats e Salajegheh e por McGee e Phan [6, 7]. Ao longo dos anos, foram publicados mais estudos de otimização estrutural de pórticos de aço com restrições relacionadas a frequências naturais de vibração [8–11]. Os fatores de carga crítica das estruturas também são aspectos interessantes a serem considerados na otimização estrutural de pórticos. Sua maximização foi considerada como único objetivo em um pórtico de peso constante otimizado por Rong, Xie e Yang em 2001 [12].

No século atual, começa a haver uma presença significativa de problemas de otimização multi-objetivo de pórticos de aço. Em 2003, Liu, Burns e Wen [13] otimizaram pórticos de aço considerando como objetivos a minimização de custos totais e a minimização dos custos referentes a danos sísmicos na estrutura. Um algoritmo de otimização baseado em ensino-aprendizagem ou *Teaching-Learning Based Optimization* (TLBO) foi aplicado por Toğan em 2012 [14] para obter o peso mínimo de pórtico planos sujeitos a restrições de tensão e deslocamento impostas pelo *American Institute for Steel Construction* (AISC). Uma comparação de diferentes meta-heurísticas em otimização multi-objetivo de pórticos metálicos, considerando a minimização de peso e deslocamentos como objetivos, foi conduzida por Gholizadeh e Baghchevan [15]. Recentemente, Resende *et al.* [16] fez uma análise de problemas de otimização multi-objetivo considerando o peso mínimo de pórticos de aço, juntamente com a maximização da primeira frequência natural de vibração, maximização do fator de carga crítica e minimização do máximo deslocamento horizontal.

Problemas de otimização estrutural em pórticos de estrutura metálica considerando a orientação de pilares também foram explorados em estudos anteriores. Em 2010, Kızıllkan [17] fez uma investigação no efeito da escolha apropriada da orientação de pilares na minimização de peso da estrutura. Em Lemonge e Barbosa (2012) [18], um pórtico

espacial foi otimizado considerando múltiplas restrições de cardinalidade e variáveis de projeto correspondendo à orientação das seções transversais dos perfis dos pilares. Em 2021, Motta *et al.* otimizou um pórtico estrutural de aço considerando como objetivos a minimização do peso e a minimização do máximo deslocamento horizontal.

Outra variável de projeto que é estudada neste trabalho e produz efeitos significativos é a posição dos apoios na estrutura. Em Wang e Chen (1996) [20], algoritmos genéticos foram aplicados para encontrar a posição ótima de apoios em vigas. Em 1998, Kripka [21] utilizou algoritmos de otimização para reduzir e uniformizar esforços em grelhas a partir da variação da posição dos apoios. Em Raich e Ghaboussi (2000) [22] foi realizada otimização topológica e geométrica de um pórtico plano de três pavimentos, considerando a posição dos nós dos apoios em cada um dos pavimentos como variável. No trabalho de Petprakob (2014) [23], foi desenvolvida uma sequência de algoritmos que busca as melhores posições de vigas e colunas de aço em uma edificação onde a posição das paredes é predefinida. O problema possui diversos objetivos, entre eles, pode-se citar a minimização da quantidade de elementos. Oliveira (2017) [24] aplicou algoritmos genéticos acoplados a um *software* comercial de cálculo estrutural para encontrar o melhor posicionamento de pilares em pórticos de concreto armado e fornecer alternativas de projeto.

Nos últimos anos, foram realizados diversos trabalhos relacionados a otimização estrutural. Entre eles, pode-se citar: Truong e Kim [25]; Kaveh e Ghazaan [26]; Kaveh, Kabir e Bohlool [27]; Tu, He e Huang [28]; Wang *et al.* [29]; Alkhadashi *et al.* [30]; Do e Ohsaki [31]; Ghasemof, Mirtaheri e Mohammadi [32]; Gholizadeh e Fattahi [33] e Shen, Ohsaki e Yamakawa [34]. No Quadro 1 é apresentado um resumo com os trabalhos mais relevantes citados na presente revisão bibliográfica, além dos trabalhos relacionados publicados nos últimos cinco anos, destacando as funções-objetivo, restrições e variáveis de projeto aplicadas em cada um, que são representadas por: peso da estrutura (W), deslocamentos (D), tensões e esforços internos (T), frequências naturais de vibração (F), estabilidade global e confiabilidade estrutural (E), seções transversais (S), orientações dos pilares (O) e posições de apoios (P).

A leitura desta revisão bibliográfica, em conjunto da análise do Quadro 1 permite ao leitor enxergar uma lacuna na literatura. A grande maioria dos trabalhos considera apenas a seção transversal dos elementos como variável de projeto. Apesar de existirem estudos considerando posições de apoios e orientações das seções transversais de pilares como variáveis de projeto, não são encontrados trabalhos de otimização multi-objetivo de pórticos espaciais em aço que consideram estas duas simultaneamente nem que consideram funções-objetivo relacionadas à estabilidade global e ao comportamento dinâmico.

Quadro 1 - Trabalhos recentes e/ou relevantes relativos à otimização estrutural de pórticos espaciais

Ano	Autores	Objetivos					Restrições					Variáveis		
		W	D	T	E	F	D	T	E	F	S	O	P	
1988	Vanderplaats e Salajegheh [6]	✓								✓	✓			
1991	Saka [4]	✓					✓	✓	✓		✓			
1991	McGee e Phan [7]	✓								✓	✓			
1996	Wang e Chen [20]	✓					✓	✓			✓		✓	
1998	Kripka [21]			✓									✓	
2000	Raich e Ghaboussi [22]	✓					✓	✓			✓		✓	
2001	Rong, Xie e Yang [12]				✓		✓	✓			✓			
2010	Kızılkın [17]	✓					✓	✓			✓	✓		
2012	Lemonge e Barbosa [18]	✓					✓				✓	✓		
2012	Toğan [14]	✓	✓	✓			✓	✓			✓			
2014	Petprakob [23]	✓									✓		✓	
2017	Barraza <i>et al.</i> [35]	✓	✓					✓			✓			
2017	Gholizadeh e Baghchevan [15]	✓		✓			✓	✓			✓			
2017	Oliveira [24]	✓	✓	✓			✓	✓			✓		✓	
2017	Truong e Kim [25]	✓					✓	✓	✓		✓			
2019	Zakian [11]	✓								✓	✓			
2020	Kaveh e Ghazaan [26]	✓	✓					✓			✓			
2020	Kaveh, Kabir e Bohlool [27]	✓					✓	✓			✓			
2020	Resende <i>et al.</i> [16]	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
2020	Tu, He e Huang [28]	✓					✓	✓	✓		✓			
2020	Wang <i>et al.</i> [29]	✓					✓	✓			✓			
2021	Alkhadashi <i>et al.</i> [30]	✓					✓	✓			✓			
2021	Do e Ohsaki [31]	✓	✓				✓	✓			✓			
2021	Ghasemof, Mirtaheri e Mohammadi [32]	✓	✓				✓	✓			✓			
2021	Gholizadeh e Fattahi [33]	✓			✓						✓			
2021	Motta <i>et al.</i> [19]	✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓		
2021	Shen, Ohsaki e Yamakawa [34]	✓		✓					✓	✓	✓			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

### 3 META-HEURÍSTICAS DE BUSCA, INDICADORES DE DESEMPENHO E TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

Os problemas de otimização estrutural estudados neste trabalho foram resolvidos utilizando algoritmos de otimização baseados em meta-heurísticas.

O termo meta-heurística vem dos radicais “*meta*”, que significa “além” ou “de mais alto nível” e “*heurístico*”, que significa “descobrir por tentativa e erro”. Estes métodos são processos iterativos guiados por processos de diversificação, que é a exploração do espaço de busca de maneira global e intensificação, que consiste em focar a busca em uma região que produz boas soluções [36]. Estratégias de aprendizado são utilizadas, o que faz com que estes métodos tenham uma boa performance na maioria dos problemas de otimização, encontrando soluções próximas das ótimas com boa eficiência computacional [37].

Neste capítulo, inicialmente é apresentada a formulação dos problemas de otimização estrutural mono e multi-objetivo. Em seguida, são descritas as quatro meta-heurísticas utilizadas na resolução dos problemas. Na sequência, são apresentados indicadores para avaliar o desempenho destes métodos. Por último, é apresentado um método de tomada de decisão que extrai, entre as soluções encontradas pelos algoritmos, as mais adequadas em relação a critérios definidos pelo tomador de decisões.

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL (POE)

Nesta seção serão apresentadas as formulações dos problemas de otimização mono e multi objetivo.

##### 3.1.1 Problema de Otimização Estrutural mono-objetivo

O POE mono-objetivo pode ser escrito como mostrado na Equação 3.1. Este problema consiste em encontrar um vetor  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_V}\}$  composto por  $N_V$  variáveis de projeto que minimize o valor de uma função objetivo  $of(\mathbf{x})$ . O espaço de busca  $X$  contido em  $\mathbb{R}^n$  é definido pelos limites inferior e superior da variável de projeto  $x_i$ , representados, respectivamente, por  $x_i^L$  e  $x_i^U$ . O problema pode estar submetido a  $N_R$  restrições de desigualdade representadas por  $g_i$ . Um vetor  $\mathbf{x} \in X$  que satisfaz todas as restrições do problema é chamado de solução factível.

$$\begin{aligned} \min \quad & of(\mathbf{x}), \text{ submetido a:} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N_R \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, \dots, N_V\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para o caso de maximização da função objetivo, é feita a minimização da função com o sinal inverso, como mostrado na Equação 3.2:

$$\max \quad of(\mathbf{x}) = - \min \quad of(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Problema de Otimização Estrutural multi-objetivo

O POE multi-objetivo é formulado de maneira semelhante ao mono-objetivo. No entanto, a solução encontrada é um conjunto de vetores  $\mathbf{x}$  não-dominados que minimizam  $N_F$  funções objetivo, como descrito na Equação 3.3. O conjunto de soluções não-dominadas que atendem às restrições impostas é chamado de frente de Pareto.

$$\min \quad of_1(\mathbf{x}), \min \quad of_2(\mathbf{x}), \dots, \min \quad of_{N_F}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

O espaço de busca e as restrições podem ser definidos da mesma forma que na Seção 3.1.1.

## 3.2 THIRD EVOLUTION STEP OF DIFFERENTIAL EVOLUTION (GDE3)

Um dos algoritmos de busca adotados foi o *Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution* (GDE3). A Evolução Diferencial tradicional (DE) foi proposta por Storn e Price em 1995 [38], para a solução de problemas de otimização mono-objetivo, a partir da geração e evolução de uma população de vetores candidatos. O GDE3, proposto por Kukkonen e Lampinen em 2005 [1] é uma versão adaptada do DE para a solução de problemas multi-objetivo.

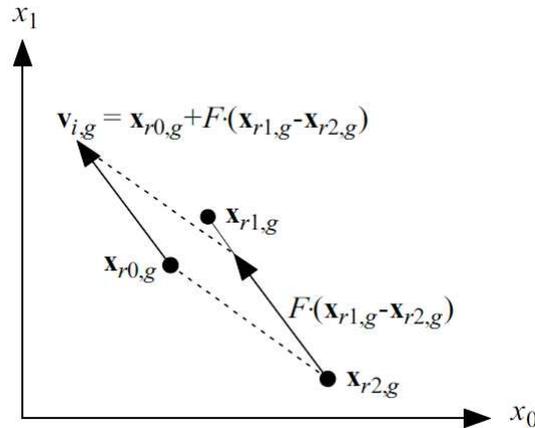
O GDE3 inicia gerando uma população inicial aleatória ( $x_0$ ) de  $N_p$  vetores candidatos, onde a dimensão do vetor é o número de variáveis de projeto. Esta população passa por um processo de evolução governado por processos de mutação, cruzamento e seleção.

### 3.2.1 Mutação

A cada geração  $g$ , são gerados  $N_p$  vetores mutantes ( $\mathbf{v}_{i,g}$ ). A mutação diferencial é regida pela Equação 3.4 e consiste em adicionar, a um vetor base aleatório ( $\mathbf{x}_{r0}$ ), a diferença entre dois vetores também aleatoriamente escolhidos ( $\mathbf{x}_{r1,g}$  e  $\mathbf{x}_{r2,g}$ ) multiplicada por um fator de escala ( $F \in (0, 1)$ ), definido pelo usuário na inicialização, para encontrar  $\mathbf{v}_{i,g}$ , o  $i$ -ésimo vetor. A Figura 2 representa a operação de mutação graficamente, para uma situação com duas variáveis de projeto.

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r0,g} + F \times (\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g}) \quad (3.4)$$

Figura 2 - Esquema do DE de geração de vetores mutantes



Fonte: Price, Storn e Lampinen *Differential evolution: a practical approach to global optimization* [39]

### 3.2.2 Cruzamento

Outra operação presente na evolução diferencial é o cruzamento uniforme. Neste passo, cada vetor alvo ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ) é cruzado com um vetor mutante ( $\mathbf{v}_{i,g}$ ) gerado pela Equação 3.4 para gerar um vetor teste ( $\mathbf{u}_{i,g}$ ). O parâmetro chamado de fator de probabilidade de cruzamento ( $Cr \in [0, 1]$ ) determina a probabilidade da  $j$ -ésima variável do  $i$ -ésimo vetor mutante ser transportada para o vetor teste. Além disso, um parâmetro do teste com índice aleatório  $j_{rand}$  é retirado do vetor mutante para garantir que não haja duplicação do vetor  $\mathbf{x}_{i,g}$ . A Equação 3.5 define a operação de cruzamento.

$$u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g} & \text{se } \text{rand}_j(0, 1) \leq Cr \quad \text{ou} \quad j = j_{rand} \\ x_{j,i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Seleção

Após serem realizadas as operações de mutação e cruzamento, cada vetor alvo ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ) é comparado com o vetor teste correspondente ( $\mathbf{u}_{i,g}$ ) a partir do conceito de dominância no espaço das restrições. Um vetor  $\mathbf{x}$  domina um vetor  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x} \succeq_c \mathbf{y}$ ) se uma, e apenas uma, das seguintes condições é verdadeira:

- Ambos são infactíveis e  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  no espaço de violação das restrições.
- O vetor  $\mathbf{x}$  é factível e o vetor  $\mathbf{y}$  é infactível.
- Ambos são factíveis e  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  no espaço das funções objetivo.

O vetor teste  $\mathbf{u}_{i,g}$  é selecionado para substituir o vetor decisão  $\mathbf{x}_{i,g}$  na próxima geração ( $g+1$ ) se  $\mathbf{u}_{i,g} \succeq_c \mathbf{x}_{i,g}$ . Se  $\mathbf{x}_{i,g} \succeq_c \mathbf{u}_{i,g}$ ,  $\mathbf{u}_{i,g}$  é descartado e  $\mathbf{x}_{i,g}$  permanece na

população. Caso nenhuma destas condições seja atendida, ambos são incluídos na geração seguinte.

### 3.3 SUCCESS HISTORYBASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION (SHAMODE)

O algoritmo *Success History-based Adaptive Multi-Objective Differential Evolution* (SHAMODE) foi proposto por Panagant, Bureerat e Tai em 2019 [2]. Este é um algoritmo de evolução diferencial adaptativa para problemas de otimização multi-objetivo, que adapta os parâmetros  $F$  e  $Cr$  do DE original, a partir dos resultados bem sucedidos em gerações anteriores. Este método de adaptação foi originalmente proposto por Tanabe e Fukunaga (2013) [40].

Esta meta-heurística também é inicializada com uma população inicial aleatória ( $x_0$ ) de  $N_p$  vetores candidatos e opera com processos de mutação, cruzamento e seleção. É necessário criar um arquivo externo vazio ( $A_0$ ) e definir os valores iniciais dos parâmetros de adaptação que são detalhados na seção 3.3.1.

#### 3.3.1 Adaptação de parâmetros

Um diferencial desta meta-heurística é a adaptação dos fatores de escala ( $F$ ) e de probabilidade de cruzamento ( $Cr$ ) para cada indivíduo  $i$  de cada geração  $g$ . Nesta seção, será descrito o processo de adaptação destes parâmetros.

Ao final de cada geração  $g$ , os índices  $i$  dos indivíduos que sobreviveram ao processo de seleção nesta geração são guardados em um vetor chamado *sind*. A partir destes índices, os vetores que produzem uma prole de sucesso ( $x_{sind,g}$ ) são armazenados no arquivo externo  $A_{g+1}$ . Em seguida, caso *sind* não seja um vetor vazio, são calculados as médias de Lehmer para os valores de  $F$  e  $Cr$  dos vetores  $x_{sind,g}$ . Estas médias são então guardadas em vetores de histórico de memória  $\mathbf{M}_F$  e  $\mathbf{M}_{Cr}$ . Estes vetores guardam os valores das médias das últimas  $H$  gerações, tendo  $H$  um valor recomendado de 5. Nas  $H$  primeiras gerações, estes valores são definidos como 0.5. Este processo está descrito nas Equações 3.6, 3.7 e 3.8, onde  $k_g$  representa a posição em que a geração  $g$  se encontra no intervalo entre 1 e  $H$ .

$$\mathbf{M}_{F,k,g+1} = \begin{cases} Lmean(\mathbf{F}_{sind,g}) & \text{se } \mathbf{F}_{sind,g} \neq \emptyset \\ \mathbf{M}_{F,k,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M}_{Cr,k,g+1} = \begin{cases} Lmean(\mathbf{Cr}_{sind,g}) & \text{se } \mathbf{Cr}_{sind,g} \neq \emptyset \\ \mathbf{M}_{Cr,k,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$k_{g+1} = \begin{cases} k_g + 1 & \text{se } k_g + 1 \leq H \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

No início da próxima geração ( $g = g + 1$ ) devem ser definidos os  $N_p$  valores de  $F_{i,g}$  e  $Cr_{i,g}$ . Para cada vetor  $i$  é escolhido aleatoriamente um dos valores médios dentro de  $\mathbf{M}_F$  (chamado de  $\mu_F$ ) e um dos valores médios dentro de  $\mathbf{M}_{Cr}$  (chamado de  $\mu_{Cr}$ ). A partir destes valores,  $F_{i,g}$  e  $Cr_{i,g}$  são calculados a partir de distribuições de Cauchy e distribuições normais, respectivamente, considerando que as variâncias tem valores de 0.1.

$$F_{i,g} = \text{rand}c_i(\mu_F, 0.1) \quad (3.9)$$

$$Cr_{i,g} = \text{rand}n_i(\mu_{Cr}, 0.1) \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Mutação

A cada geração  $g$ , são gerados  $N_p$  vetores mutantes ( $\mathbf{v}_{i,g}$ ) a partir da operação de mutação regida pela Equação 3.11. Esta operação consiste em adicionar dois termos ao  $i$ -ésimo vetor ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ), multiplicados pelo fator de escala adaptado ( $F_{i,g} \in (0, 1)$ ).

O primeiro termo corresponde ao vetor diferença entre  $\mathbf{x}_{pbest}$ , uma solução aleatoriamente escolhida da frente de Pareto  $Pareto_g$ , e  $\mathbf{x}_{i,g}$ . O segundo termo corresponde ao vetor diferença entre  $\mathbf{x}_{r1,g}$ , um vetor escolhido aleatoriamente dentro da população atual ( $x_g$ ), e  $\tilde{\mathbf{x}}_{r2,g}$ , um vetor escolhido aleatoriamente dentro da união entre a geração atual e o arquivo externo ( $x_g \cup A_g$ ).

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{i,g} + F_{i,g} \times (\mathbf{x}_{pbest} - \mathbf{x}_{i,g}) + F_{i,g} \times (\mathbf{x}_{r1,g} - \tilde{\mathbf{x}}_{r2,g}) \quad (3.11)$$

### 3.3.3 Cruzamento

Assim como no GDE3, na operação de cruzamento do algoritmo SHAMODE, cada vetor alvo ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ) é cruzado com um vetor mutante ( $\mathbf{v}_{i,g}$ ) para gerar um vetor teste ( $\mathbf{u}_{i,g}$ ). A diferença é que, neste caso, o fator de probabilidade de cruzamento ( $Cr_{i,g} \in [0, 1]$ ), que determina a probabilidade da  $j$ -ésima variável do  $i$ -ésimo vetor mutante ser transportada para o vetor teste, é adaptado para cada vetor de cada geração. A Equação 3.12 define a operação de cruzamento.

$$u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g} & \text{se } \text{rand}_j(0, 1) \leq Cr_{i,g} \quad \text{ou} \quad j = j_{rand} \\ x_{j,i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3.4 Seleção

A seleção dos indivíduos que serão levados à próxima geração é feita como descrito a seguir.

Todos os vetores alvo e teste da geração atual são unidos e os indivíduos da população resultante ( $x_g \cup u_g$ ) são ordenados utilizando o esquema de não-dominância do NSGA-II, proposto por Deb *et al.* em 2002 [41]. Desta união, são selecionadas as soluções que possuem os maiores níveis de não-dominância. Caso o número de soluções selecionadas seja maior que  $N_p$ , algumas soluções serão aleatoriamente removidas para manter o tamanho da população. As restantes formam a população da próxima geração ( $x_{g+1}$ ).

Em seguida, as soluções selecionadas de  $u_g$  são incluídas no arquivo externo  $Pareto_g$ , dando origem à  $Pareto_{g+1}$ . Caso o tamanho deste arquivo seja maior que o definido como máximo, algumas soluções serão aleatoriamente removidas.

### 3.4 SUCCESS HISTORYBASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION WITH WHALE OPTMIZATION (SHAMODE-WO)

O algoritmo SHAMODE-WO é uma variação do SHAMODE, também proposto em 2. Esta variação é feita no processo de mutação, com a inserção do operador de movimento espiral presente no algoritmo de otimização de baleia (WOA) [42].

Inicialmente, acontece o processo de mutação descrito como na Seção 3.3.2, que gera os vetores mutantes ( $\mathbf{v}_{i,g}$ ). Em seguida cada um destes vetores mutantes tem 50% de chance de ser atualizado pelo operador espiral do WOA, como descrito nas Equações 3.13 e 3.14.

$$\mathbf{v}_{i,g}^* = \begin{cases} \mathbf{D}_i \times e^l \times \cos(2\pi l) + \mathbf{x}_{pbest2} & \text{se } \text{rand}_i < 0.5 \\ \mathbf{v}_{i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{D}_i = |\mathbf{x}_{pbest2} - \mathbf{v}_{i,g}| \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{v}_{i,g}^*$  é o novo vetor mutante atualizado com o operador espiral e  $\mathbf{x}_{pbest2}$  é um vetor aleatoriamente selecionado de  $Pareto_g$ . As variáveis  $l$  e  $\text{rand}_i$  são números aleatórios escolhidos dos intervalos  $[-1, 1]$  e  $[0, 1]$ , respectivamente. Em seguida, os processos de cruzamento, seleção e adaptação de parâmetros operam da mesma maneira em que foi descrito na Seção 3.3 para o SHAMODE.

### 3.5 MULTIOBJECTIVE METAHEURISTIC WITH ITERATIVE PARAMETER DISTRIBUTION ESTIMATIONN (MM-IPDE)

O algoritmo *Multiobjective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimationn* (MM-IPDE) foi proposto por Wansasueb *et al.* em 2020 [3]. Assim como SHAMODE e SHAMODE-WO, este é um algoritmo baseado em evolução diferencial que adapta os parâmetros  $F$  e  $Cr$  do DE original.

Nestes dois algoritmos já descritos, a adaptação dos parâmetro é feita baseada no histórico de sucesso dos indivíduos. No MM-IPDE, estes parâmetros são adaptados utilizando um algoritmo de otimização que trabalha em espaço de buscas binários, o *Population-Based Incremental Learning for Multi-objective optimisation* (PBILM) [43]. Além disso, o algoritmo trabalha com variados processos de mutação e cruzamento, onde o processo a ser utilizado também é escolhido pelo PBLIM.

### 3.5.1 Adaptação de parâmetros

Durante o processo evolutivo, há a operação de dois problemas otimização simultaneamente. Isto significa que há, em paralelo, dois conjuntos de variáveis de projeto. O primeiro conjunto de variáveis de projeto, chamado de variáveis de alto nível ( $\mathbf{x}_h$ ) representa os parâmetros de otimização do DE e pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}_h = \{F_{scheme}, F_1, F_2, Cr, I_{reprod}\} \quad (3.15)$$

onde  $F_{scheme}$  indica qual processo será utilizado para a adaptação do fator de escala  $F$ ,  $F_1$  e  $F_2$  são valores utilizados na geração de  $F$ ,  $Cr$  é o fator de probabilidade de cruzamento e  $I_{reprod}$  indica qual processo de reprodução será utilizado. Os valores de  $x_h$  são utilizados para se encontrar o segundo conjunto de variáveis, chamado de variáveis de baixo nível ( $\mathbf{x}_l$ ), que são as variáveis de projeto do problema de otimização estrutural a ser resolvido.

A probabilidade de cruzamento ( $Cr_{i,g}$ ) é obtida diretamente do valor da variável de alto nível do individuo  $i$  da  $g$ -ésima geração ( $x_{h,i,g}$ ). O fator de escala  $F_{i,g}$  é calculado como na Equação 3.16 a partir dos valores das variáveis de alto nível ( $x_{h,i,g}$ ), onde  $F_2$  está restrito a ser sempre menor do que  $F_1$ .

$$F_{i,g} = \begin{cases} \text{rand}_{n_i}(F_1, F_2) & \text{se } F_{scheme} = 1 \\ \text{rand}_i(F_1, F_2) & \text{se } F_{scheme} = 2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Caso  $F_{scheme}$  seja igual a 1,  $F_{i,g}$  é um número aleatório calculado a partir de uma distribuição normal de média  $F_1$  e desvio padrão  $F_2$ . Caso  $F_{scheme}$  seja igual a 2,  $F_{i,g}$  é um número aleatório calculado a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[F_1, F_2]$ .

A otimização desta variáveis de alto nível é feita utilizando um mecanismo de busca em um espaço binário, utilizando os chamados vetores de probabilidades para representar a população durante o processo de busca. Para problemas multi-objetivo, este método é chamado de MPBIL [43], por ser baseado no *Population-based incremental learning* (PBIL), proposto por Baluja em 1994 [44] para otimização mono-objetivo.

### 3.5.2 Reprodução

Nesta meta-heurística, a reprodução pode ser feita de cinco maneiras e o valor de  $I_{reprod}$  em  $x_{h,i,g}$  define qual será o processo a ser utilizado para o indivíduo  $i$  da  $g$ -ésima geração. Os cinco processos estão descritos na Equação 3.17.

$$u_{i,g} = \begin{cases} \text{Reprodução utilizada por [45]}(\mathbf{x}_{pbest,1}, \mathbf{x}_{pbest,2}, Cr) & \text{se } I_{reprod} = 1 \\ \mathbf{x}_{i,g} + F_{i,g}(\mathbf{x}_{pbest,1} + \mathbf{x}_{pbest,2} + \mathbf{x}_{i,g}) \rightarrow \text{Cruzamento} & \text{se } I_{reprod} = 2 \\ \mathbf{x}_{pbest,1} + \mathbf{x}_{pbest,2} + F(\mathbf{x}_{r,1,g} + \mathbf{x}_{r,2,g} - \mathbf{x}_{r,3,g} - \mathbf{x}_{r,4,g}) \rightarrow \text{Cruzamento} & \text{se } I_{reprod} = 3 \\ \mathbf{x}_{i,g} + F(\mathbf{x}_{pbest,1} + \mathbf{x}_{i,g}) \rightarrow \text{Cruzamento} & \text{se } I_{reprod} = 4 \\ \text{Mutação simples} \rightarrow \text{Cruzamento} & \text{se } I_{reprod} = 5 \end{cases} \quad (3.17)$$

O primeiro método de reprodução utiliza o fator de probabilidade de cruzamento ( $Cr$ ) e duas soluções ( $\mathbf{x}_{pbest,1}$  e  $\mathbf{x}_{pbest,2}$ ) escolhidas aleatoriamente de  $Pareto_g$ . Uma descrição detalhada deste esquema de reprodução pode ser encontrada em [45]. O segundo método de geração de vetores mutantes utiliza a  $i$ -gésima solução da geração atual ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ) e uma soma ponderada de duas soluções não dominadas escolhidas aleatoriamente do arquivo externo ( $\mathbf{x}_{pbest,1}$  e  $\mathbf{x}_{pbest,2}$ ). O vetor mutante gerado no terceiro esquema é gerado por uma soma de duas soluções não dominadas escolhidas aleatoriamente do arquivo externo ( $\mathbf{x}_{pbest,1}$  e  $\mathbf{x}_{pbest,2}$ ) com a soma ponderada de quatro soluções da geração atual ( $g$ ). O quarto esquema de geração de vetores mutantes consiste na soma de um vetor da geração atual ( $\mathbf{x}_{i,g}$ ) somado a uma diferença ponderada entre um vetor escolhido aleatoriamente de  $Pareto_g$  e  $\mathbf{x}_{i,g}$ . O quinto esquema, que é uma mutação simples, é o mesmo descrito na Equação 3.4. Nos esquemas de reprodução 1 a 5, é necessário realizar uma operação de cruzamento, similar ao descrito nas Equações 3.5 e 3.12.

## 3.6 INDICADORES DE DESEMPENHO

A fim de se fazer um comparação entre a performance das meta-heurísticas citadas na Seção anterior, podem ser usados indicadores que analisam o desempenho de diferentes conjuntos de soluções em relação a aspectos como tamanho do espaço coberto no espaço das funções objetivo, espaçamento uniforme das soluções no espaço, entre outros.

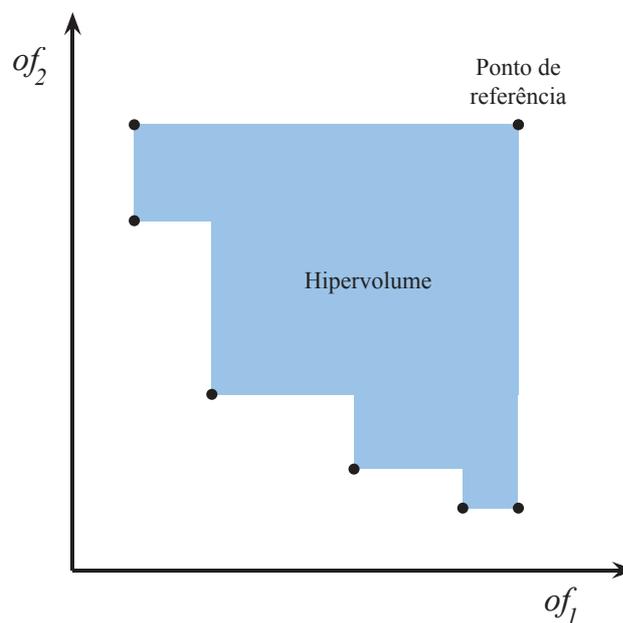
### 3.6.1 Hipervolume

O hipervolume foi proposto por Zitzler e Thiele em 1998 [46]. Esta métrica avalia o tamanho do espaço das funções objetivo que é coberto por um conjunto de soluções não dominadas em relação a um ponto de referência. No caso de duas funções objetivo (espaço bidimensional), cada solução da frente de Pareto cobre uma área igual a um retângulo definido pelo ponto de referência e por  $(of_1(\mathbf{x}), of_2(\mathbf{x}))$ , a união das áreas cobertas por todas as soluções forma um polígono, como representado na Figura 3. Em problemas

de minimização o ponto de referência escolhido usualmente é um vetor com o maior valor encontrado para cada função objetivo. Este conceito pode ser estendido para mais dimensões.

O uso do hipervolume para a comparação de conjuntos de soluções tem uma forte base teórica. Sempre que um conjunto de soluções  $A$  tem um valor de hipervolume maior do que o de um conjunto de soluções  $B$  (i.e.  $HV(A) > HV(B)$ ), é possível afirmar que  $A$  não é pior do que  $B$ , pois isto indica que este conjunto de soluções cobre um maior espaço dentro do espaço das funções-objetivo [47].

Figura 3 - Exemplo de hipervolume para um problema com dois objetivos



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

### 3.6.2 *Inverted Generational Distance Plus*

A métrica do hipervolume apresentada na seção anterior tem como desvantagem o alto custo computacional para problemas com muitos objetivos. Como alternativa, o *Inverted Generational Distance Plus* ( $IGD^+$ ) pode ser aplicado. O  $IGD^+$  [48] é uma versão modificada do  $IGD$  [49].

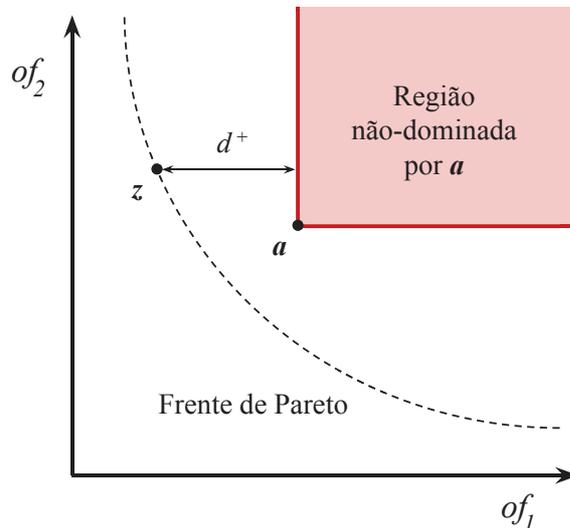
O  $IGD^+$  mede a distância média de cada ponto de referência até a região não-dominada mais próxima. Estas regiões não-dominadas são definidas pelo conjunto de soluções a ser analisado. Menores valores de  $IGD^+$  representam um melhor conjunto de soluções. Esta operação está definida na Equação 3.18, onde  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{|A|}\}$  é o conjunto de soluções a ser analisado e  $Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{|Z|}\}$  é o conjunto de pontos de referência. Quando a frente de Pareto é conhecida, ela é normalmente utilizada como o conjunto de pontos de referência.

$$IGD^+(A) = \frac{1}{|Z|} \sum_{i=1}^{|Z|} \min_{j=1}^{|A|} d^+(z_i, a_j) \quad (3.18)$$

A distância entre um ponto de referência  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{Nobj})$  e a região não-dominada definida por um ponto  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{Nobj})$  é chamada de  $d^+$  e é calculada como mostrado na Equação 3.19. Nela, o  $i$ -ésimo objetivo é utilizado no cálculo da distância apenas se o valor  $a_i$  da solução é inferior ao valor de  $z_i$ . Essa distância também pode ser visualizada na Figura 4.

$$d^+(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \sqrt{(\max\{a_1 - z_1, 0\})^2 + \dots + (\max\{a_{Nobj} - z_{Nobj}, 0\})^2} \quad (3.19)$$

Figura 4 - Distância  $d^+$  entre dois pontos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{z}$  para um exemplo com duas funções objetivo



Fonte: Adaptado de Ishibuchi, Masuda e Nojima *Sensitivity of Performance Evaluation Results by Inverted Generational Distance to Reference Points* [48]

### 3.6.3 Spacing

A última métrica de desempenho utilizada é o *spacing* ( $SP$ ), proposta por Schott em 1995 [50]. Ela é calculada como o desvio padrão das distâncias relativas ( $d_i$ ) de cada solução do conjunto  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{|A|}\}$  à sua vizinha mais próxima, também do conjunto  $A$ , como mostrado na Equação 3.20, onde  $\bar{d}$  é a média das distâncias  $d_i$ .

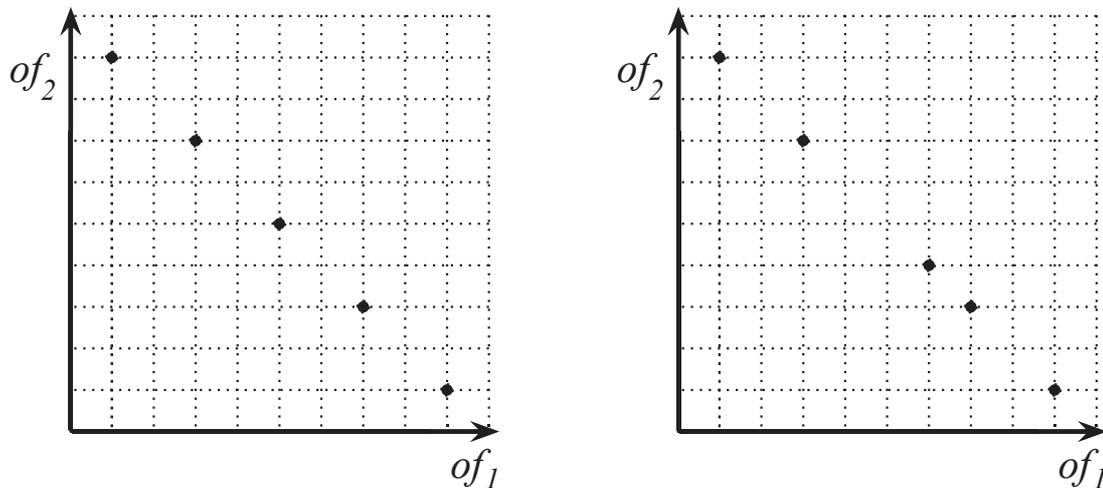
$$SP(A) = \sqrt{\frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{|A|} (d_i - \bar{d})^2} \quad (3.20)$$

A distância entre um ponto  $\mathbf{a}_i = (a_1, a_2, \dots, a_{Nobj})$  e seu vizinho mais próximo é dada pela Equação 3.21.

$$d_i = \min_{j=1}^{|A|} \sum_{k=1}^{N_{obj}} |of_k(\mathbf{a}_i) - of_k(\mathbf{a}_j)| \quad (3.21)$$

O valor do *spacing* representa, basicamente, o quão bem-espaçadas as soluções estão entre si. Se o valor do *spacing* for igual a 0, isso significa que todas as soluções do conjunto  $A$  estão igualmente espaçadas entre si, como ilustrado na Figura 5a. Caso os pontos não seja equidistantes entre si, como o exemplo na Figura 5b, o valor do *spacing* será maior do que zero.

Figura 5 - Exemplos de *spacing* para um espaço bidimensional



(a) Soluções equidistantes -  $SP(A) = 0$     (b) Soluções não-equidistantes -  $SP(A) \neq 0$   
 Fonte: Adaptado de Meng, Zhang e Liu *New quality measures for multiobjective programming* [51]

### 3.6.4 Perfis de desempenho

Os perfis de desempenho foram introduzidos por Dolan e Moré em 2002 e permitem avaliar o comportamento de meta-heurísticas em um conjunto de problemas de otimização, considerando um indicador de desempenho que se deseja minimizar [52]. Caso esteja sendo avaliado um indicador que se deseja maximizar (como, por exemplo, o hipervolume) os perfis de desempenho são definidos com o inverso do valor do indicador.

Considera-se  $\mathcal{P}$  como um conjunto de  $n_{\mathcal{P}}$  problemas,  $\mathcal{S}$  como um conjunto de  $n_{\mathcal{S}}$  algoritmos e  $t_{p,s}$  como um indicador de desempenho, que se deseja minimizar, cujo valor foi obtido em um problema  $p$  por uma métrica  $s$ . A razão de desempenho é dada pela Equação 3.22.

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min(t_{p,s}, s \in \mathcal{S})} \quad (3.22)$$

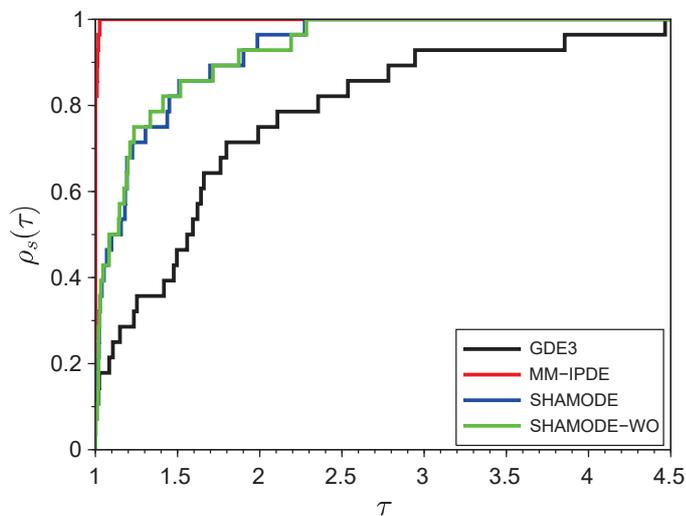
O valor de  $\rho_s(\tau)$  é definido como a probabilidade que a razão de desempenho do algoritmo  $s \in \mathcal{S}$  seja menor que o fator  $\tau$  da melhor razão de desempenho encontrada. Desta maneira,  $\tau$  varia entre 1 ( $t_{p,s} = \min(t_{p,s})$ ) e  $\max(t_{p,s})/\min(t_{p,s})$ .

É possível calcular o valor de  $\rho_s(\tau)$  para cada valor de  $\tau$  como o percentual de problemas do conjunto  $n_{\mathcal{P}}$  em que a razão de desempenho de  $s$  é menor que  $\tau$ , como mostrado pela Equação 3.23. A função  $\rho_s$  também pode ser definida como a função de distribuição cumulativa para a razão de desempenho.

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_{\mathcal{P}}} |p \in \mathcal{P} : r_{p,s} \leq \tau| \quad (3.23)$$

Um perfil de desempenho pode ser plotado com  $\tau$  no eixo horizontal e  $\rho_s(\tau) \in [0, 1]$  no eixo vertical. Um exemplo de perfil de desempenho dos algoritmos GDE3, MM-IPDE, SHAMODE e SHAMODE-WO para problemas de otimização estrutural multi-objetivo de diversas treliças, considerando o inverso do hipervolume como indicador de desempenho, pode ser visualizado na Figura 6.

Figura 6 - Exemplo de perfis de desempenho em problemas de otimização multi-objetivo de treliças



Fonte: Carvalho *et al.*, 2021 - *Multi-objective optimum design of truss structures using differential evolution algorithms* [53]

Além disso, a área sob a curva do perfil de desempenho pode ser vista como um indicador de performance geral de uma meta-heurística em um conjunto de problemas [54]. Pela Figura 6, é fácil visualizar que a área sob o perfil de desempenho do MM-IPDE é a maior. Desta maneira, no que diz respeito ao hipervolume, ele foi o algoritmo de melhor desempenho nos problemas apresentados por Carvalho *et al.*, 2021.

### 3.7 TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

Em um prolema multi-objetivo, uma tarefa importante e não-trivial é a definição de qual ou quais soluções serão escolhidas após a obtenção da frente de Pareto. Uma maneira de fazer esta escolha é atribuir um peso de importância a cada função objetivo. Através destes pesos, são estabelecidos cenários de comparação de onde são extraídas as soluções. [55]

Neste trabalho, foi adotada uma decisão de torneio multicritério (DTM) proposta por Parreiras e Vasconcelos em 2009 [56]. De acordo com o valor das funções objetivo e seus respectivos pesos de importância, o DTM classifica as melhores e piores soluções da curva de Pareto através de torneios. A função  $t_i(a, b)$ , descrita na Equação 3.24 indica se a solução  $a$  vence ou perde o torneio contra a solução  $b$ , para a  $i$ -ésima função objetivo:

$$t_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } of_i(b) - of_i(a) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.24)$$

O somatório das funções  $t_i(a, b)$  resulta no número de vezes que a solução  $a$  vence os torneios contra cada uma das outras soluções  $b$  do conjunto de todas as soluções da frente de Pareto ( $A$ ). A função torneio  $T_i(a, A)$  é então definida pela Equação 3.25 :

$$T_i(a, A) = \sum_{\forall b \in A, b \neq a} \frac{t_i(a, b)}{(|A| - 1)} \quad (3.25)$$

O valor de  $T_i(a, A)$  informa o desempenho da solução  $a$  perante as outras do conjunto  $A$ , em relação a  $i$ -ésima função objetivo. Para gerar um *ranking* global ( $R$ ), que engloba todos os objetivos e seus respectivos pesos de importância, podem ser utilizadas as Equações 3.26 [55] ou 3.27 [57]. Neste trabalho, foi adotada a Equação 3.26.

$$R(a) = \left( \prod_{i=1}^{N_F} T_i(a, A)^{w_i} \right)^{1/N_F} \quad (3.26)$$

$$R(a) = \min\{T_1(a, A)^{w_1}, \dots, T_{N_F}(a, A)^{w_{N_F}}\} \quad (3.27)$$

Onde  $w_i$  são os pesos de importância definidos pelo tomador de decisões para cada uma das funções objetivo, sendo que  $w_i > 0$  para  $i = 1, \dots, N_F$  e  $\sum_{i=1}^{N_F} w_i = 1$ . Os indicadores de ranking definidos por  $R(a)$  oferecem uma medida de preferência da solução  $a$  em relação às demais, tal que:

- se  $R(a) > R(b)$ , então  $a$  é preferida a  $b$
- se  $R(a) = R(b)$ , então  $a$  é indiferente a  $b$

## 4 ESTRUTURA DOS POE'S

Os problemas estudados possuem objetivos de várias naturezas e restrições que são interessantes nos aspectos econômicos e estruturais. Estes valores são calculados, para cada solução candidata, a partir das variáveis de projeto. O Apêndice A apresenta uma descrição detalhada da formulação utilizada na análise estrutural dos pórticos espaciais. A partir desta análise é possível extrair resultados como deslocamentos nodais, frequências naturais de vibração, esforços internos e fatores de carga crítica, resultados estes que são utilizados no cálculo das restrições e funções objetivo.

### 4.1 VARIÁVEIS DE PROJETO

Nesta seção são apresentadas as variáveis de projeto adotadas nos exemplos numéricos estudados neste trabalho.

#### 4.1.1 Perfis metálicos

Parte das variáveis de projeto consiste em escolher, de um espaço de busca, perfis metálicos para as vigas e pilares dos pórticos. Este espaço de busca é composto por 29 perfis metálicos do tipo “H” para os pilares e 56 perfis metálicos do tipo “I” para as vigas, mostrados no Quadro 2.

Quadro 2 - Perfis metálicos para pilares e vigas

Perfis para pilares		Perfis para vigas			
W 150x22.5	W 250x89	W 150x13	W 310x21	W 410x38.8	W 530x66
W 150x29.8	W 250x101	W 150x18	W 310x23.8	W 410x46.1	W 530x72
W 150x37.1	W 250x115	W 150x24	W 310x28.3	W 410x53	W 530x74
W 200x35.9	W 310x79	W 200x15	W 310x32.7	W 410x60	W 530x82
W 200x41.7	W 310x93	W 200x19.3	W 310x38.7	W 410x67	W 530x85
W 200x46.1	W 310x97	W 200x22.5	W 310x44.5	W 410x75	W 530x92
W 200x52	W 310x107	W 200x26.6	W 310x52	W 410x85	W 530x101
W 200x53	W 310x110	W 200x31.3	W 360x32.9	W 460x52	W 530x109
W 200x59	W 310x117	W 250x17.9	W 360x39	W 460x60	W 610x101
W 200x71	W 310x125	W 250x22.3	W 360x44	W 460x68	W 610x113
W 200x86	W 360x91	W 250x25.3	W 360x51	W 460x74	W 610x125
W 250x62	W 360x101	W 250x28.4	W 360x57.8	W 460x82	
W 250x73	W 360x110	W 250x32.7	W 360x64	W 460x89	
W 250x80	W 360x122	W 250x38.5	W 360x72	W 460x97	
W 250x85		W 250x44.8	W 360x79	W 460x106	

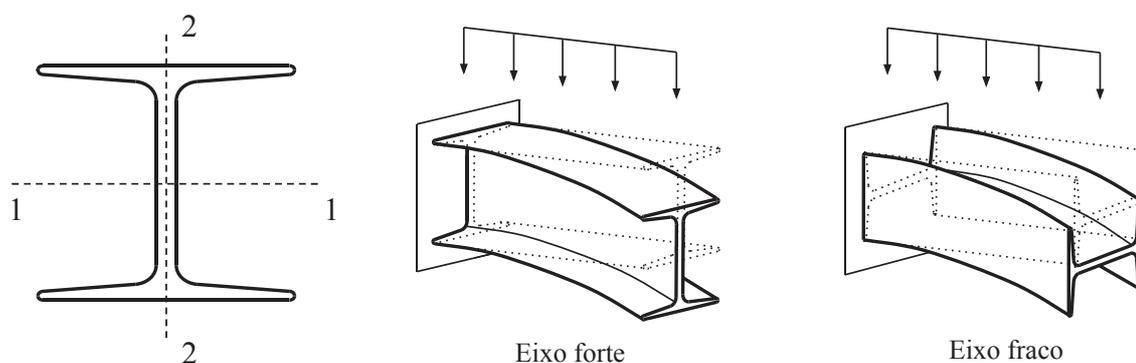
Fonte: Elaborado pela autora (2022)

### 4.1.2 Orientações dos pilares

Os eixos principais de inércia de um perfil metálico comercial de tipo “I” ou “H” são o eixo que passa pela alma do perfil e o eixo paralelo às mesas, como ilustrado na Figura 8. Os momentos de inércia em relação a estes eixos principais, assim como outras propriedades dos perfis, podem ser encontrados com facilidade nas tabelas comerciais fornecidas pelos fabricantes.

Na Figura 8 o maior momento de inércia é chamado de  $I_1$  (ou eixo forte) e o menor de  $I_2$  (ou eixo fraco), seguindo a orientação de eixos locais mostrada. Enquanto  $I_1$  resiste às cargas aplicadas no sentido do eixo 2,  $I_2$  resiste às cargas aplicadas no sentido do eixo 1. Por esse motivo, de maneira geral, é interessante orientar o eixo de solicitação coincidindo com a direção 2.

Figura 8 - Eixos principais de inércia de um perfil metálico genérico



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A escolha correta da orientação dos elementos estruturais é de extrema importância. Vigas são normalmente orientadas de maneira que o eixo forte resista aos esforços gerados pelas cargas gravitacionais. Quando se trata de pilares, essa escolha não é trivial e depende da distribuição de esforços laterais da estrutura e da forma da estrutura.

Por este motivo, a orientação dos pilares pode ser tratada como uma variável de projeto. Por mais que o ângulo de orientação seja, em teoria, uma variável contínua, neste trabalho ela foi tratada como uma variável discreta chamada de  $O_i$ , restringindo os eixos principais de inércia às orientações nos sentidos  $x$  e  $y$  globais. Se  $O_i$  é igual a 0, a alma do  $i$ -ésimo pilar é orientada na direção  $x$  (**←**) e se  $O_i$  é igual a 1, a alma do  $i$ -ésimo pilar é orientada na direção  $y$  (**I**).

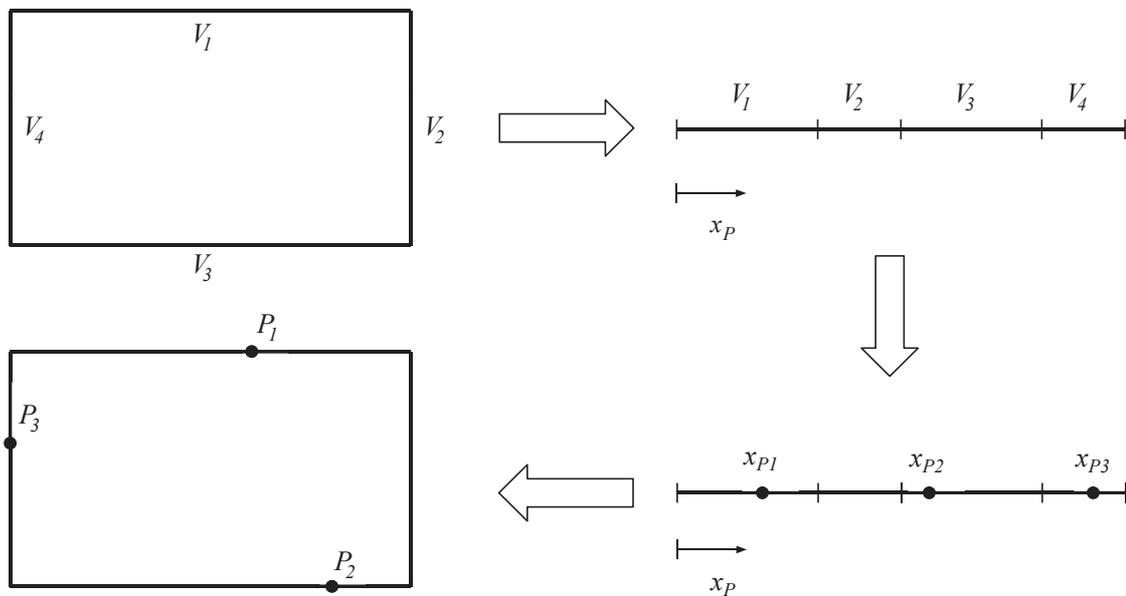
### 4.1.3 Posições dos pilares

No projeto de uma edificação, a planta baixa é definida por um projeto arquitetônico. A partir dele, o projetista deve posicionar os elementos estruturais da melhor maneira possível. De maneira geral, as vigas são posicionadas sob as paredes a serem construídas.

Já no que diz respeito aos pilares, em algumas configurações de plantas baixas, esta tarefa pode não ser simples. Por este motivo, a posição de uma quantidade pré-definida de pilares foi considerada como variável de projeto em alguns experimentos.

A posição das vigas na planta baixa já deve estar definida antes do início do processo evolutivo. A parametrização adotada permite que os pilares sejam posicionados sob as vigas como descrito a seguir. Inicialmente, é definido um espaço linear contínuo formado por todas as vigas posicionadas em sequência. Desta forma, o tamanho deste espaço é igual ao comprimento total de vigas em um pavimento, como mostrado na Figura 9. A posição  $x_{P_i}$  de um pilar  $i$  é escolhida pela meta-heurística dentro deste espaço linear, o que permite definir a sua posição na planta baixa.

Figura 9 - Parametrização utilizada no posicionamento dos pilares  
Exemplo genérico com quatro vigas e três pilares



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

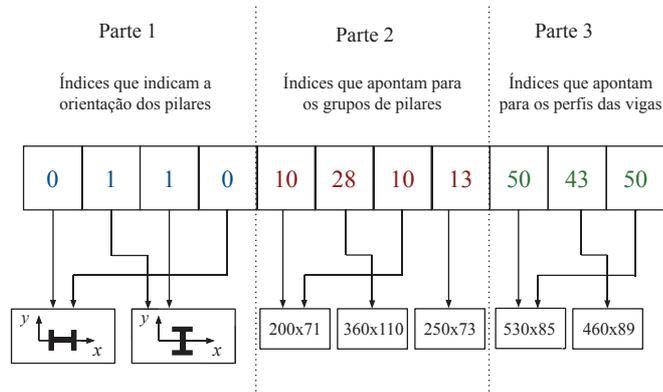
Para evitar a presença de trechos muito curtos de vigas, caso um pilar seja posicionado a uma distância menor que 20 cm de um canto, ele é automaticamente considerado como posicionado exatamente sob o canto em questão.

#### 4.2 ESTRUTURA DE UM VETOR CANDIDATO E AGRUPAMENTO AUTOMÁTICO DE MEMBROS

Em alguns dos exemplos apresentados, há três tipos de variáveis de projeto: a orientação dos pilares, os perfis metálicos designados para os pilares e os perfis metálicos designados para as vigas. A Figura 10 ilustra um vetor candidato genérico composto por três partes de variáveis de projeto. A primeira parte, em azul, representa a orientação  $O$

de quatro pilares (ou quatro grupos de pilares). A segunda e terceira parte representam os índices dos elementos designados a quatro pilares (ou quatro grupos de pilares) ( $P$ ) e três vigas (ou três grupos de vigas) ( $V$ ) seguindo os perfis da Tabela 7. Estas variáveis estão representadas em vermelho e verde, respectivamente.

Figura 10 - Vetor candidato com três tipos de variáveis de projeto



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

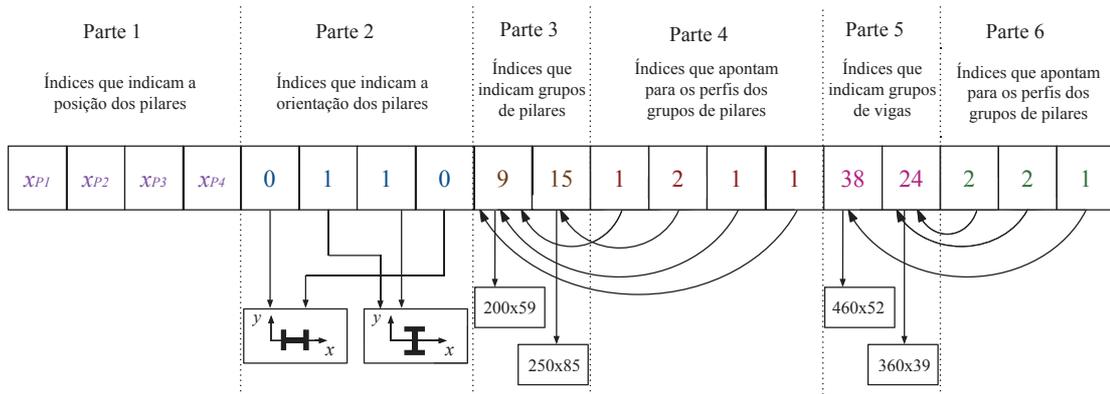
Já em outros exemplos mais complexos, há quatro tipos de variáveis de projeto: a orientação e a posição dos pilares, os perfis metálicos designados para os pilares e os perfis metálicos designados para as vigas. Além disso, dois grupos adicionais de variáveis de projeto trabalham no agrupamento automático de membros. A Figura 11 ilustra um vetor candidato genérico composto por seis partes de variáveis de projeto. A primeira parte, em roxo, representa a posição  $x_P$  de quatro pilares. A segunda parte, em azul, representa a orientação  $O$  de quatro pilares. A terceira parte, em marrom, representa os perfis designados para um grupo de pilares, considerando um número máximo de dois perfis diferentes para os pilares ( $m_P = 2$ ). A quinta parte, em rosa, representa os perfis designados para um grupo de vigas, considerando um número máximo de dois perfis diferentes para as vigas ( $m_V = 2$ ). Estas variáveis de projeto apontam para perfis da Tabela 7 e estão representadas em vermelho e verde, respectivamente.

Por fim, a quarta e sexta parte indicam em qual dos grupos anteriormente definidos o elemento se encaixa. Estas variáveis estão representadas em vermelho e verde, respectivamente. Por exemplo, a variável com valor 2 na quarta parte (em vermelho) aponta para a variável de valor 15 na terceira parte (em marrom), que por sua vez aponta para o 15º perfil metálico para pilares (W 250x85).

### 4.3 FUNÇÕES OBJETIVO

O primeiro objetivo, que está presente em todos os problemas analisados, é a minimização do peso da estrutura. A Equação 4.1 descreve o peso da estrutura ( $W(\mathbf{x})$ )

Figura 11 - Vetor candidato com seis tipos de variáveis de projeto



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

em função da massa específica do material, da área da seção transversal e do comprimento do  $i$ -ésimo elemento do pórtico ( $\rho_i$ ,  $A_i$  e  $L_i$ , respectivamente).

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{barras}} \rho_i A_i L_i \quad (4.1)$$

Em alguns problemas de otimização multi-objetivo estudados, a minimização do máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}(\mathbf{x})$ ) que a estrutura apresenta também é um objetivo. Em outros problemas, há a intenção também de se minimizar os deslocamentos verticais nas extremidades das vigas. Estes deslocamentos são encontrados a partir de um vetor de deslocamentos chamado de  $p$ , como descrito no Apêndice A.

Outro objetivo considerado é a maximização da primeira frequência natural de vibração  $f_1$ . Para maximizar a estabilidade das estruturas, em alguns problemas a maximização do fator de carga crítica ( $\lambda_{crit}$ ) referente à estabilidade global da estrutura também é um objetivo. Este valores também são calculados como descrito no Apêndice A.

#### 4.4 RESTRIÇÕES

Os problemas estão sujeitos a diversas restrições. Entre elas, encontram-se restrições que garantem a segurança da estrutura, como aquelas impostas pelas normas de dimensionamento, e outras impostas para facilitar a montagem da estrutura. Nos POEs multi-objetivo, quando uma variável se torna função objetivo, a mesma deixa de ser restrição.

Segundo as normas brasileira (NBR 8800:2008) e americana (AISC 360-16), a estrutura deve apresentar um máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}(\mathbf{x})$ ) e um máximo deslocamento inter-pavimento ( $d_{max}(\mathbf{x})$ ) menores que os máximos valores permitidos ( $\bar{\delta}$  e  $\bar{d}$ ). Estes valores dependem da altura do pórtico ( $H$ ) e da altura entre dois pavimentos

consecutivos ( $h$ ) e são dados por  $\bar{\delta} = H/400$  e  $\bar{d} = h/500$ . Estas restrições são descritas nas equações 4.2 e 4.3, respectivamente [58, 59].

$$\frac{\delta_{max}(\mathbf{x})}{\bar{\delta}} - 1 \leq 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d_{max}(\mathbf{x})}{\bar{d}} - 1 \leq 0 \quad (4.3)$$

Além disso, as normas também impõem um limite de  $L/350$  para os deslocamentos verticais ( $\delta_v$ ) nas vigas, onde  $L$  é o vão teórico entre os apoios ou o dobro do comprimento teórico do balanço. Além disso, nas vigas que suportam paredes,  $\delta_v$  também deve ser limitado a 15 mm.

A fim de se generalizar esta conferência, a restrição imposta é que todo nó  $i$  tenha um deslocamento vertical menor do que o máximo deslocamento vertical admissível ( $\bar{\delta}_{v,i}$ ) para este nó, como ilustrado na Equação 4.4. O valor de  $\bar{\delta}_{v,i}$  é o menor valor entre 15 mm e o  $2/350$  vezes o comprimento da viga mais curta que chega a este nó ( $L_{viga,i}$ ), como mostrado na Equação 4.5.

$$\frac{\delta_{v,i}(\mathbf{x})}{\bar{\delta}_{v,i}} - 1 \leq 0 \quad (4.4)$$

$$\bar{\delta}_{v,i} = \begin{cases} 15mm & \text{se } 15 \text{ mm} \leq \frac{2}{350} L_{viga,i} \\ \frac{2}{350} L_{viga,i} & \text{se } 15 \text{ mm} > \frac{2}{350} L_{viga,i} \end{cases} \quad (4.5)$$

A estrutura deve apresentar uma primeira frequência natural de vibração ( $f_1(\mathbf{x})$ ) maior que um mínimo permitido ( $\bar{f}_1$ ) como descrito na Equação 4.6. As frequências naturais de vibração são obtidas como mostrado no Apêndice A.

$$1 - \frac{f_1(\mathbf{x})}{\bar{f}_1} \leq 0 \quad (4.6)$$

A fim de garantir a estabilidade global da estrutura, o fator de carga crítica ( $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$ ) deve ser maior do que 1, como definido na Equação 4.7. A determinação do fator de carga crítica é descrita no Apêndice A.

$$1 - \frac{\lambda_{crt}(\mathbf{x})}{1} \leq 0 \quad (4.7)$$

Todos os membros da estrutura devem satisfazer à equação de interação de esforços para flexão composta (Equação 4.8), e apresentar máximo esforço cortante menor que o permitido para o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento (Equação 4.9). Na Equação 4.8,  $N_{Sd}$ ,  $M_{x,Sd}$ , e  $M_{y,Sd}$  são o esforço axial, o momento em torno do eixo de maior inércia e o momento em torno do eixo de menor inércia solicitantes de

projeto, respectivamente. O esforço axial e os momentos em torno dos eixos de maior e menor inércia resistentes de projeto são designados  $N_{Rd}$ ,  $M_{x,Rd}$ , e  $M_{y,Rd}$ , respectivamente. Na Equação 4.9,  $V_{Sd}$  e  $V_{Rd}$  são os esforços cortantes solicitante e resistente de projeto, respectivamente. Estas restrições são impostas tanto pela NBR 8800:2008 quanto pela AISC 360-16 [58,59]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) - 1 \leq 0 \quad se \quad \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} \geq 0.2 \\ \frac{N_{Sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) - 1 \leq 0 \quad se \quad \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} < 0.2 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd}} - 1 \leq 0 \quad (4.9)$$

As restrições geométricas adotadas são referentes à montagem da estrutura e estabelecem que, para todo encaixe pilar-pilar, o pilar superior não deve ter altura ou massa linear maior do que o pilar inferior. Estas restrições estão definidas nas Equações 4.10 e 4.11, onde  $dp_i(\mathbf{x})$  e  $dp_{i-1}(\mathbf{x})$  são as alturas dos perfis comerciais selecionados para os grupos de pilares  $i$  e  $i - 1$ , respectivamente, em um pavimento do  $j$ -ésimo grupo de pavimentos.  $ms_i(\mathbf{x})$  e  $ms_{i-1}(\mathbf{x})$  são as massas por metro linear dos perfis selecionados para os grupos  $i$  e  $i - 1$ , respectivamente, em um pavimento do  $j$ -ésimo grupo de pavimentos.  $NG_{pil}$  é o número de grupos de pilares em um pavimento e  $NG_{pav}$  é o número de grupos de pavimentos.

$$\frac{dp_{i,j}(\mathbf{x})}{dp_{i,j-1}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, NG_{pil} \quad j = 2, \dots, NG_{pav} \quad (4.10)$$

$$\frac{ms_{i,j}(\mathbf{x})}{ms_{i,j-1}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, NG_{pil} \quad j = 2, \dots, NG_{pav} \quad (4.11)$$

Finalmente, a última restrição a ser apresentada é imposta nos problema onde a posição dos pilares é uma variável. Para evitar que haja sobreposição de pilares, a restrição definida na Equação 4.12, estabelece que a distância ( $d_{i,j}$ ) entre um pilar  $i$  e um pilar  $j$  deve ser maior que 40 cm.

$$\frac{d_{i,j}}{0.4} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, N_P \quad j = 1, \dots, N_P \quad i \neq j \quad (4.12)$$

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os experimentos numéricos realizados. Antes disso, são mostradas as cargas gravitacionais e de vento consideradas na análise das estruturas. Os experimentos podem ser divididos em três conjuntos. No primeiro deles, são realizadas otimizações multi-objetivo de um pórtico de seis pavimentos, considerando como variáveis de projeto os perfis metálicos dos elementos estruturais e as orientações dos pilares. No segundo conjunto de experimentos, é feita uma otimização multi-objetivo de um pórtico simples de seis pavimentos. Este é um experimento preliminar para validação do modelo que considera também a posição dos pilares como variável de projeto. O terceiro conjunto de experimentos considera todas as variáveis de projeto já citadas, e, além disso, conta com o agrupamento automático dos perfis de vigas e pilares.

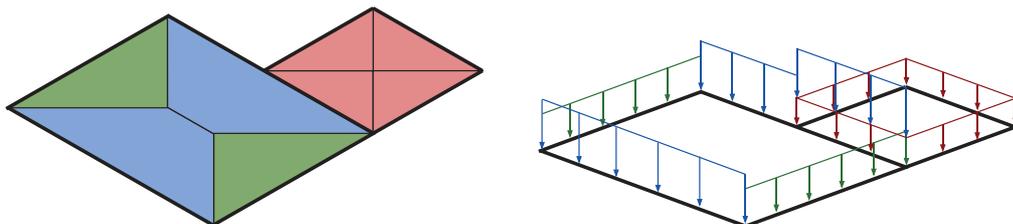
### 5.1 CARGAS DE PROJETO

No processo de otimização estrutural, as soluções devem satisfazer restrições referentes a esforços internos nos membros e deslocamentos da estrutura. Estes valores dependem diretamente do carregamento utilizado. Nesta dissertação os carregamentos adotados foram definidos seguindo as normas “NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações” [60], “NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios” [58] e “NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações” [61].

#### 5.1.1 Cargas gravitacionais

As cargas gravitacionais por metro linear que incidem em uma viga podem ser divididas em peso próprio, cargas lineares atuantes sobre a viga e cargas atuantes sobre a laje, que são transferidas para viga. O valor desta última é encontrado a partir da área de contribuição ( $A_c$ ) que a viga possui, multiplicada pelo valor da carga por unidade de área ( $m^2$ ), dividido pelo comprimento da viga ( $L$ ), como mostrado na Figura 12.

Figura 12 - Distribuição de cargas gravitacionais de duas lajes adjacentes



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

As cargas atuantes sobre as vigas e lajes podem ser divididas entre permanentes e variáveis. Pela NBR 8800:2008 [58] as cargas permanentes referentes ao peso próprio dos elementos metálicos ( $P_p$ ) devem ser majoradas por um coeficiente de segurança de 1,25 e as demais cargas permanentes ( $G$ ) por um de 1,4. Já para as cargas variáveis ( $Q$ ) este coeficiente de segurança é de 1,5. Este somatório pode ser visualizado na Equação 5.1. A carga por metro linear devido ao peso próprio dos perfis pode ser encontrado utilizando a área da seção transversal multiplicada pelo peso específico do aço ( $\rho_{aço} = 78,5 \text{ kN/m}^3$ ).

$$P = 1,4 \times G + 1,5 \times Q + 1,25 \times P_p \quad (5.1)$$

As demais cargas permanentes ( $G$ ) consideradas no problemas foram o peso das lajes e o peso de paredes sobre as vigas. O peso das lajes por metro quadrado é calculado multiplicando o peso específico do concreto armado ( $\rho_{CA} = 25 \text{ kN/m}^3$ ) pela altura da laje. É adicionada uma carga de revestimento de  $1 \text{ kN/m}^2$ , como recomendado pela NBR 6120:2019 [60]. Este peso então é distribuído para as vigas utilizando as áreas de contribuição. O peso linear das paredes sobre as vigas é calculado multiplicando o peso específico da parede por sua altura. A NBR 6120:2019 [60] sugere que este peso específico, para paredes de 9 cm, seja de  $13 \text{ kN/m}^3$ . A altura das paredes é definida pela diferença entre a altura do pavimento e a altura da laje. O somatório destas cargas permanentes é chamado de  $G$  e está definido na Equação 5.2.

$$G = \sum \frac{Ac}{L} \times (25 \text{ kN/m}^3 \times h_{laje} + 1 \text{ kN/m}^2) + 13 \text{ kN/m}^3 \times 0,09 \text{ m} \times (h_{pav} - h_{laje}) \quad (5.2)$$

A carga acidental ( $Q$ ) considerada foi de  $2 \text{ kN/m}^2$ , transferida para as vigas pelas áreas de contribuição, como mostrado na Equação 5.3.

$$Q = \sum \frac{Ac}{L} \times 2 \text{ kN/m}^2 \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Cargas de vento

As cargas laterais geradas pelo vento atuam sobre as fachadas do edifício. Nos exemplos analisados neste trabalho, estas cargas foram consideradas como cargas laterais distribuídas linearmente nas vigas da fachada. Para determinar o valores destas cargas, primeiramente é necessário determinar a pressão dinâmica ( $q$ ) atuante na área da fachada. Este processo de cálculo segue as recomendações da NBR 6123:1988 [61]. Inicialmente, deve-se definir a velocidade básica do vento ( $V_0$ ). Esta velocidade, é a velocidade de uma rajada de 3 segundos, excedida em média uma vez em 50 anos, a 10 m acima do terreno, em campo aberto e plano [61]. Foi adotada uma velocidade básica igual a de Juiz de Fora - MG, que tem valor  $V_0 = 35 \text{ m/s}$ . A partir de  $V_0$ , é então encontrada a

velocidade característica  $V_k$  pela Equações 5.4, onde  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são fatores de ponderação denominados fator topográfico, fator de rugosidade do terreno e fator estatístico. Para a determinação destes fatores de ponderação pela [61], foi considerado que os edifícios estudados estão em terreno plano ( $S_1 = 1,0$ ), coberto por obstáculos numerosos e pouco espaçados. Como todas as dimensões dos edifícios são menores que 20m,  $S_2 = 0,93$ . O fator estatístico foi considerado como  $S_3 = 1,0$ .

$$\begin{aligned} V_k &= V_0 S_1 S_2 S_3 \\ V_k &= 35 \times 1,0 \times 0,93 \times 1,0 = 32,55 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (5.4)$$

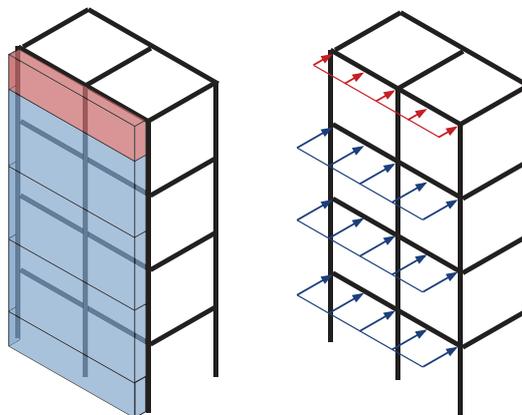
Com a velocidade característica calculada, é possível definir a pressão dinâmica devido ao vento atuante nas fachadas ( $q$ ), como mostrado na Equação 5.5.

$$q = 0,613 \times V_k^2 = 0,613 \times 32,55^2 = 649,48 \text{ N/m}^2 \quad (5.5)$$

A carga linear lateral por metro de viga ( $Q_v$ ) é encontrada multiplicando a pressão dinâmica pela altura do pavimento ( $h_{pav}$ ) e pelo fator de segurança de 1,4 recomendado pela NBR 8800:2008 [58]. Nas vigas do último pavimento, esse valor é dividido por dois, pois a área de contribuição para as cargas de vento é metade do que a dos pavimentos inferiores. Este processo está descrito na Equação 5.6 e pode ser visualizado na Figura 13.

$$Q_v = \begin{cases} 1,4 \times 649,48 \text{ N/m}^2 \times h_{pav} & \text{se } pav \neq N_{pav} \\ 1,4 \times 649,48 \text{ N/m}^2 \times h_{pav} \times \frac{1}{2} & \text{se } pav = N_{pav} \end{cases} \quad (5.6)$$

Figura 13 - Distribuição das cargas de vento nas vigas de uma fachada



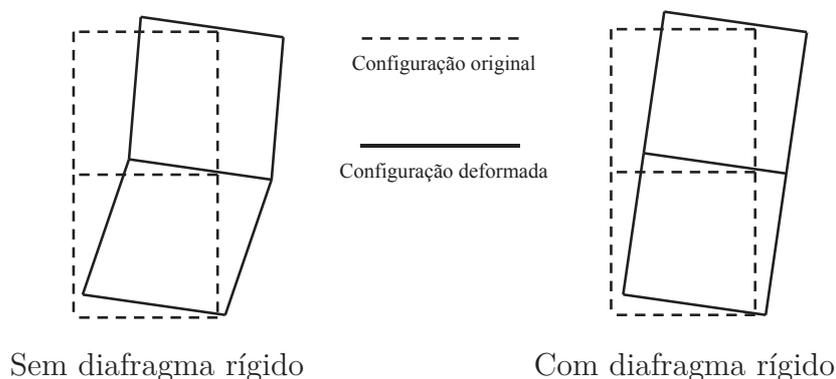
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

## 5.2 EFEITOS ESTRUTURAIS DAS LAJES DE CONCRETO ARMADO

Lajes de concreto armado com espessura  $h_{laje}$  e peso específico ( $\rho_{CA}$ ) de  $25 \text{ kN/m}^3$  foram consideradas em toda a área dos pavimentos dos pórticos estudados. Esta consideração leva a alguns efeitos estruturais significativos. A rigidez da laje incorporada ao pórtico gera um efeito de diafragma rígido, ou seja, o elemento de laje absorve parte dos esforços solicitantes, o que altera a resposta da estrutura nos seguintes aspectos:

- Aumento dos valores de  $\lambda_{crt}$ , o que significa uma maior estabilidade da estrutura;
- Aumento dos valores das frequências naturais de vibração ( $f$ );
- Aumento do esforço axial resistente das vigas ( $N_{Rd}$ );
- Aumento do momento fletor resistente no eixo fraco das vigas ( $M_{y,Rd}$ );
- O deslocamento horizontal relativo entre os nós dos pavimentos é igual a zero, como mostrado na Figura 14.

Figura 14 - Efeito de diafragma rígido nos deslocamentos horizontais



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

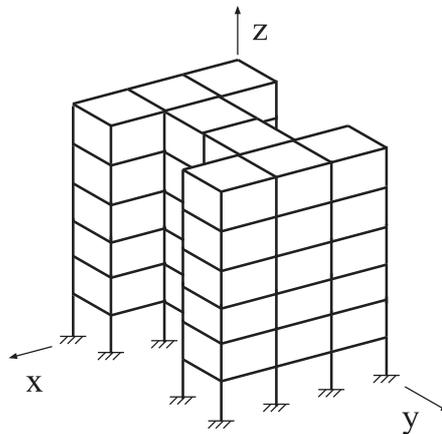
A consideração das lajes nos pórticos foi feita de maneira simplificada. Primeiramente, para o cálculo da matriz de rigidez ( $[K]$ ) e dos esforços resistentes  $N_{Rd}$  e  $M_{y,Rd}$ , a inércia lateral ( $I_y$ ), o módulo de resistência elástico lateral ( $W_y$ ) e a área da seção transversal ( $A$ ) das vigas são considerados como infinitos. Em seguida, área da seção transversal ( $A$ ) das vigas na matriz de massa ( $[M]$ ) é aumentada para uma área equivalente ( $A_{eq}$ ), de modo que a massa total da viga seja igual a massa real da vigas mais a massa de laje coberta pela área contribuição ( $A_c$ ) dessa viga, como mostrado na Equação 5.7. É importante destacar que o peso das lajes não foi considerado na função objetivo  $W(\mathbf{x})$  descrita na Equação 4.1.

$$A_{eq} = (\rho_{aço}A_{original}L + \rho_{CA}h_{laje}A_c) \frac{1}{\rho_{aço}L} \quad (5.7)$$

### 5.3 PRIMEIRO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS - PÓRTICO ESPACIAL DE 258 BARRAS E 126 NÓS

Este conjunto de experimentos trata da otimização de um pórtico espacial de seis pavimentos com 258 barras e 126 nós representado na Figura 15. Este pórtico foi otimizado em problemas multi-objetivo, considerando objetivos como minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica. Todos os pilares e vigas tem comprimento igual a três metros. Neste problema as variáveis de projeto são os perfis metálicos atribuídos às vigas e pilares. Além disso, as orientações das seções dos pilares, em relação aos seus eixos principais, também são variáveis de projeto.

Figura 15 - Pórtico Espacial de 258 barras e 126 nós



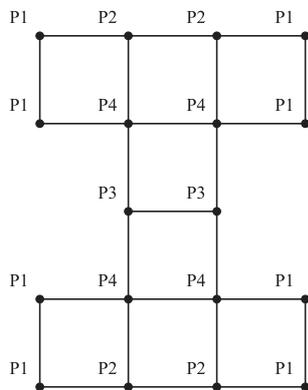
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O agrupamento de membros adotado para os pilares e vigas está representado em planta baixa nas Figuras 16 e 17, respectivamente. São quatro grupos de pilares e dois de vigas, que mudam a cada três pavimentos, resultando em doze variáveis de projeto. A orientação dos pilares de um grupo é constante ao longo dos seis pavimentos, resultando em quatro variáveis adicionais de projeto. Isto leva a um total de dezesseis variáveis de projeto, dadas por  $\mathbf{x} = \{O_1, \dots, O_4, P_1, \dots, P_8, V_1, \dots, V_4\}$ , onde  $P_i$  e  $V_i$  são índices inteiros que apontam para os perfis comerciais de cada grupo de pilares e vigas, respectivamente, e  $O_i$  é um índice que indica a orientação de um grupo de pilares.

As cargas gravitacionais foram contabilizadas sobre todos os pavimentos do pórtico, como descrito na Seção 5.1.1, considerando a presença de lajes de 12 cm de espessura. As cargas de vento foram consideradas nas fachadas ilustradas pela Figura 18. Os valores das cargas foram calculados como descrito na Seção 5.1.2. Utilizando a Equação 5.1.2, considerando pavimentos de altura  $h_{pav}=3$  m, encontra-se que  $Q_v = 1363,91$  N/m agindo lateralmente nas vigas do último pavimento e  $Q_v = 2727,82$  N/m nas dos demais.

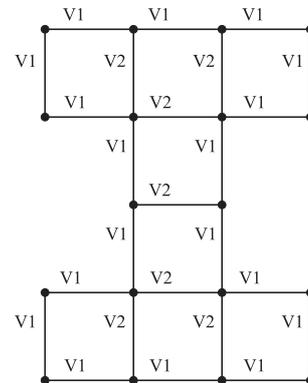
Em todo os problemas, dez execuções independentes com 150 gerações e populações

Figura 16 - Agrupamento dos pilares no pórtico de 258 barras e 126 nós



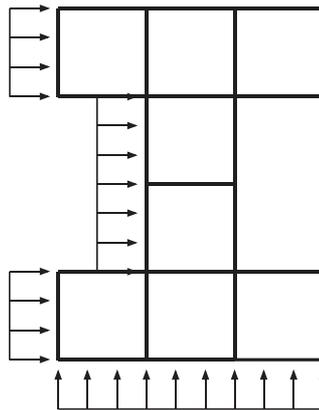
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 17 - Agrupamento das vigas no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 18 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

de 50 vetores candidatos foram adotados no processo evolutivo. Os parâmetros de evolução diferencial adotados no GDE3 foram: taxa de cruzamento  $C_r = 0,9$ , probabilidade de mutação  $M = 0,1$  e fator de escalonamento  $F = 0,4$ . Nos algoritmos MM-IPDE, SHAMODE e SHAMODE-WO, estes parâmetros são calculados automaticamente. Ao final de cada execução de cada uma das quatro meta-heurísticas, 50 soluções não-dominadas são salvas em um arquivo externo, o que resulta em um total de 2000 soluções por problema. As simulações são realizadas utilizando o *software Matlab*®.

### 5.3.1 Minimização do peso da estrutura e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós

O primeiro caso estudado neste conjunto de experimentos é uma extensão do estudo realizado em [19], considerando cargas normativas e mais algoritmos de busca. É analisado um POE de dois objetivos. Nele, a minimização do peso da estrutura e a minimização

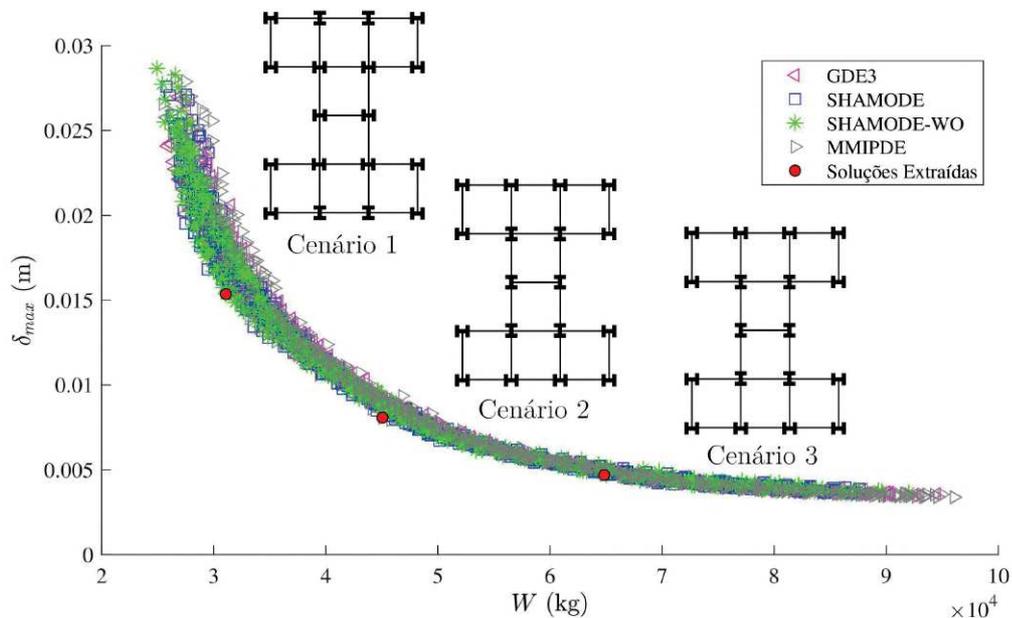
do máximo deslocamento horizontal são os objetivos. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- Cenário 1:  $w_1 = 0,75$  e  $w_2 = 0,25$
- Cenário 2:  $w_1 = 0,5$  e  $w_2 = 0,5$
- Cenário 3:  $w_1 = 0,25$  e  $w_2 = 0,75$

onde  $w_1$  e  $w_2$  são os pesos de importância das funções-objetivo conflitantes: minimização do peso da estrutura e minimização do máximo deslocamento horizontal, respectivamente.

As 2000 soluções salvas estão representadas na Figura 19. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 1, onde  $LRFD_{max}$  e  $V_{max}$  são os máximos valores encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento, respectivamente. As frentes de Pareto das soluções não-dominadas obtidas no problema multi-objetivo, juntamente com as orientações das colunas das soluções extraídas, estão ilustradas na Figura 19.

Figura 19 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 1 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1		2		3	
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	150x29,8	┌	310x79	┌	360x110	┌
	4-6	150x22,5		150x22,5		250x62	
P2	1-3	360x91	I	360x101	┌	360x122	┌
	4-6	200x46,1		310x97		360x122	
P3	1-3	310x97	┌	310x79	I	360x122	I
	4-6	200x46,1		310x79		360x101	
P4	1-3	310x93	┌	360x91	I	360x122	I
	4-6	310x97		310x79		310x122	
V1	1-3	310x21		530x66		610x101	
	4-6	250x17,9		360,32,9		460x52	
V2	1-3	530x66		360x32,9		460x52	
	4-6	410x46,1		460x52		360x51	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,6049		0,4504		0,2488	
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1330		0,1314		0,1010	
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		3,3		1,8		1,0	
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)		1,3779		2,1798		2,6727	
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		18,0751		54,3511		82,2723	
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		<b>15,4</b>		<b>8,1</b>		<b>4,7</b>	
$W(\mathbf{x})$ (kg)		<b>31099</b>		<b>45064</b>		<b>64834</b>	
Meta-heurística		SHAMODE-WO		MM-IPDE		MM-IPDE	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

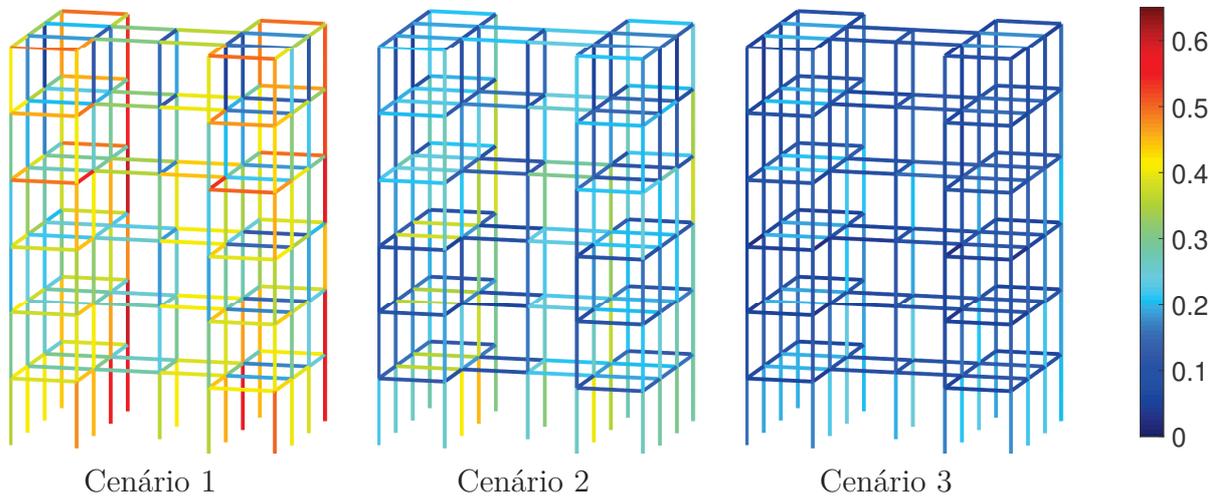
Analisando a Tabela 1 é possível chegar a algumas conclusões sobre o experimento. A estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 31099$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 64834$  kg no cenário 3, 108% maior do que no cenário 1).

Em relação aos deslocamentos horizontais, na solução extraída do cenário 1 do problema o máximo deslocamento horizontal foi de  $\delta_{max}(\mathbf{x}) = 15,4$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminui ( $\delta_{max}(\mathbf{x}) = 4,7$  mm no cenário 3, 69% menor do que no cenário 1).

De maneira geral, na medida em que o peso da estrutura aumenta, há um aumento de rigidez que leva a um melhor comportamento estrutural. Isso é ilustrado pelo fato de que, para as três soluções descritas na Tabela 1, na medida em que o peso da estrutura aumenta, os valores de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$  e  $f_1(\mathbf{x})$  aumentam e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  diminuem. Na Figura 20 é possível visualizar os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta para cada barra da estrutura, enquanto na Figura 21 estão representados os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ). É possível perceber que, de maneira geral, os

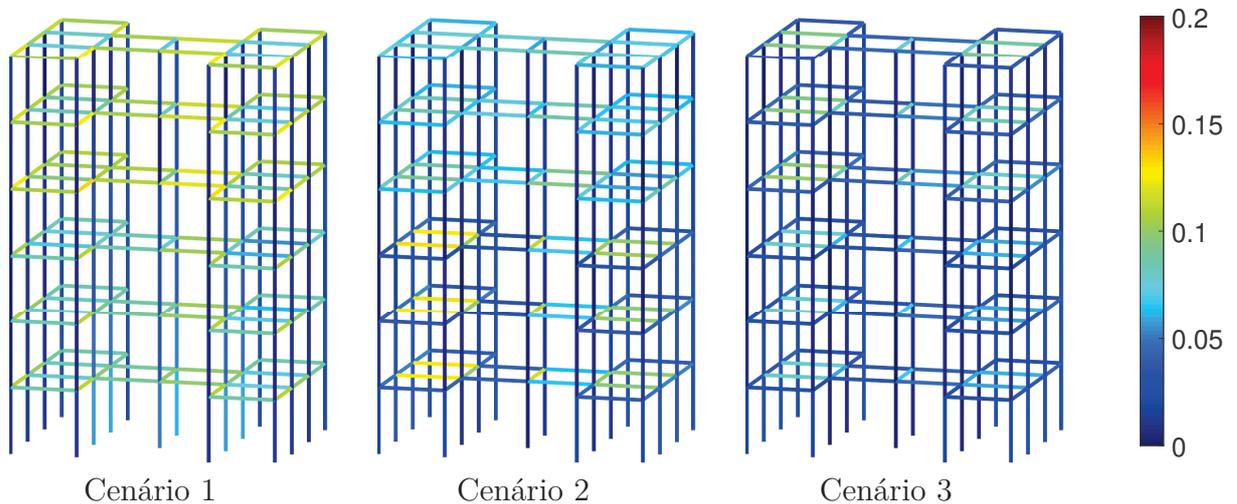
valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Figura 20 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

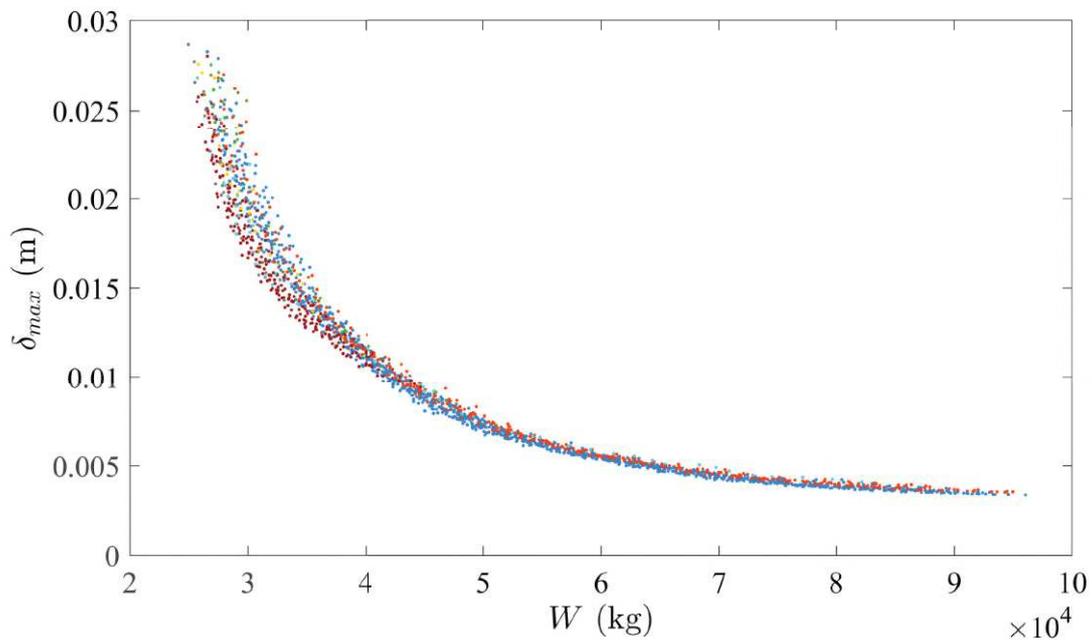
Figura 21 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No que se diz respeito às orientações dos pilares, há 16 configurações possíveis. Na Figura 22, as 2000 soluções salvas estão plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 2.

Figura 22 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 2 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós

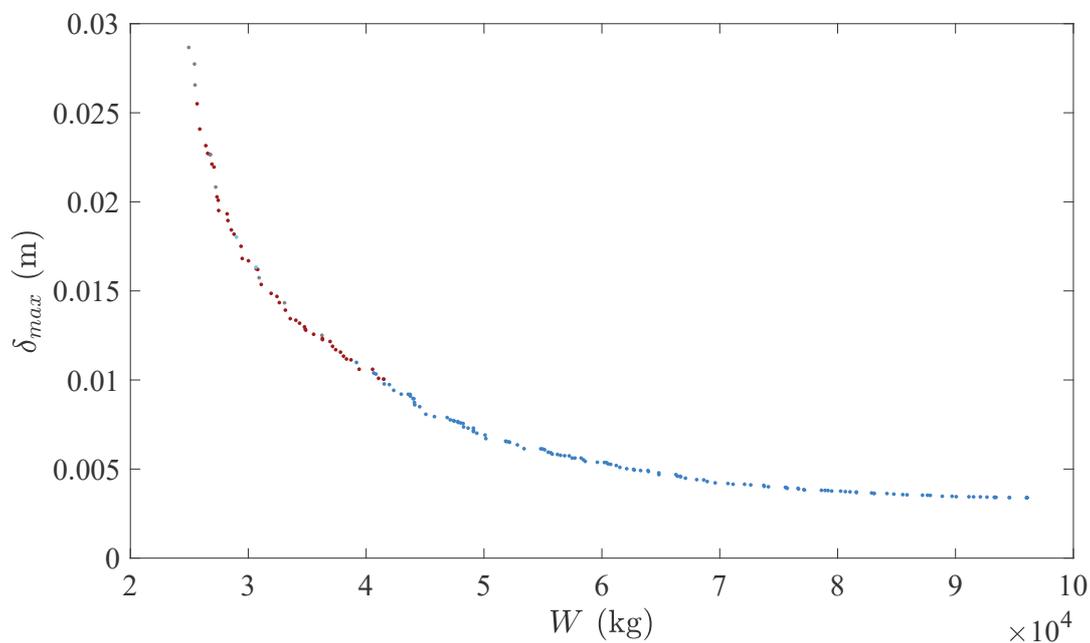
P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
─	─	─	─	─	I	─	─	I	─	─	─	I	I	─	─
0				284				5				56			
─	─	─	I	─	I	─	I	I	─	─	I	I	I	─	I
31				2				0				0			
─	─	I	─	─	I	I	─	I	─	I	─	I	I	I	─
34				64				474				0			
─	─	I	I	─	I	I	I	I	─	I	I	I	I	I	I
1050				0				0				0			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando estes resultados, percebe-se que as configurações  $[\text{─ ─ I I}]$ ,  $[\text{─ I ─ ─}]$  e  $[\text{I ─ I ─}]$  são predominantes. No entanto ao analisar a Figura 23, que mostra as soluções

que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, é possível notar que as soluções predominantes são  $[\text{--- I I}]$  e  $[\text{--- I ---}]$ . Enquanto nos pontos de menores pesos e maiores deslocamentos  $[\text{--- I ---}]$  se mostra a melhor configuração, nos pontos de maiores pesos e menores deslocamentos  $[\text{--- I I}]$  traz melhores resultados. Esta análise corrobora os resultados encontrados na Tabela 1, onde a solução extraída no primeiro cenário apresenta a configuração  $[\text{--- I ---}]$  e as soluções extraídas no segundo e terceiro cenários apresentam a configuração  $[\text{--- I I}]$ .

Figura 23 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Na Seção 3.6, foram apresentados indicadores de desempenho que permitem fazer uma comparação entre o desempenho das meta-heurísticas. Os hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) foram calculados para cada uma das 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas. Em seguida, foram encontrados os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) entre as execuções. Estes resultados estão apresentados na Tabela 3. Em seguida, é executado um teste de Wilcoxon [62] para cada indicador de desempenho entre cada possível par de algoritmos. Utilizando uma significância de 0,05, os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 4 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ).

Tabela 3 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,80946	0,00795	0,01434	0,00311	0,01080	0,00300
MM-IPDE	0,79964	0,00940	0,01749	0,00394	0,01766	0,00805
SHAMODE	0,81147	0,00832	0,01308	0,00407	0,00774	0,00137
SHAMODE-WO	0,81055	0,00614	0,01401	0,00248	0,00759	0,00126

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 4 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	✓	✓	✓
GDE3	SHAMODE	✗	✗	✓
GDE3	SHAMODE-WO	✗	✗	✓
MM-IPDE	SHAMODE	✓	✓	✓
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✓	✓	✓
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível concluir que, para este problema, o algoritmo MM-IPDE apresentou desempenho significativamente inferior que as outras meta-heurísticas nos três indicadores de desempenho utilizados. Mesmo assim, duas das três soluções extraídas foram encontradas por esse algoritmo, como mostrado na Tabela 1. Não há diferença significativa entre SHAMODE e SHAMODE-WO em nenhum dos indicadores, e ambos foram significativamente melhores que GDE3 e MM-IPDE em relação ao *spacing*.

### 5.3.2 Minimização do peso da estrutura e maximização da primeira frequência natural de vibração

O segundo caso estudado neste conjunto de experimentos foi um POE de dois objetivos. Assim como no caso anterior, o primeiro objetivo é a minimização do peso da estrutura. Mas, neste caso, o segundo objetivo é a maximização da primeira frequência natural de vibração. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, seguindo os mesmo cenário do primeiro problema:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$  e  $w_2 = 0,25$

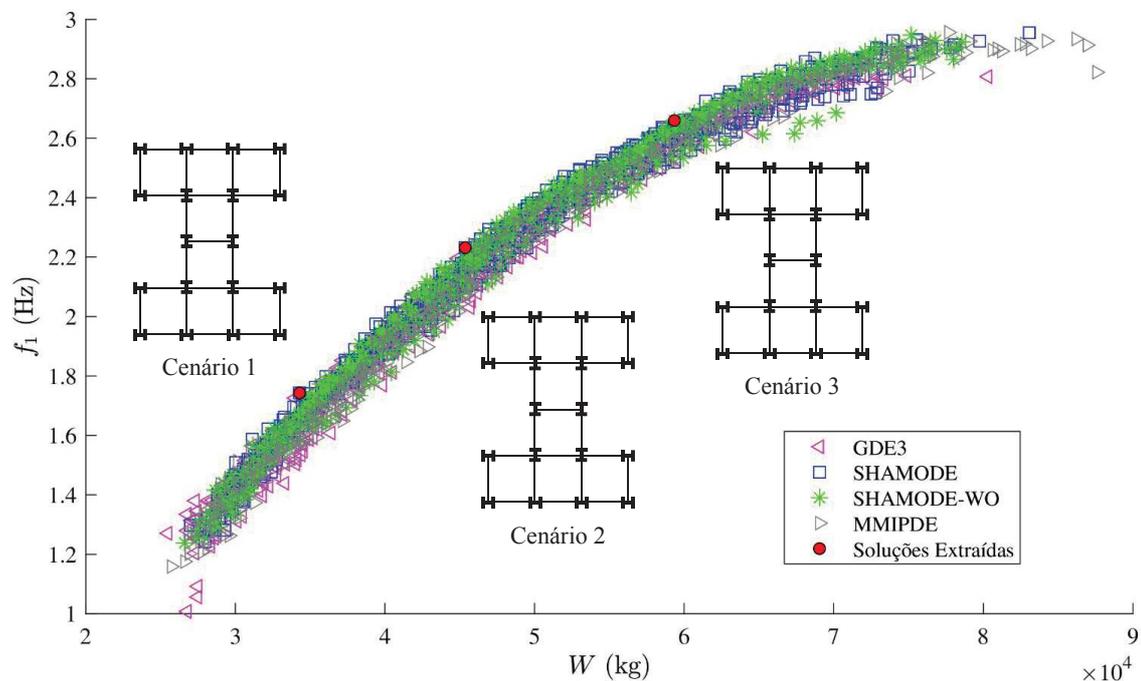
b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$  e  $w_2 = 0,5$

c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$  e  $w_2 = 0,75$

onde  $w_1$  e  $w_2$  são os pesos de importância das funções-objetivo conflitantes: minimização do peso da estrutura e maximização da primeira frequência natural de vibração.

As 2000 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 24 e os resultados encontrados nos POEs são apresentados na Tabela 5. As soluções extraídas, assim como suas orientações de pilares, também estão ilustradas na Figura 24.

Figura 24 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 5 é possível chegar a algumas conclusões sobre o experimento. No que diz respeito ao peso da estrutura, é possível observar que a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 34291$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 59439$  kg no cenário 3, 73% maior do que no cenário 1).

Em relação às primeiras frequências naturais de vibração, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $f_1 = 1,7431$  Hz. Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $f_1(\mathbf{x})$  aumenta ( $f_1 = 2,6594$  Hz no cenário 3, 52% maior do que no cenário 1).

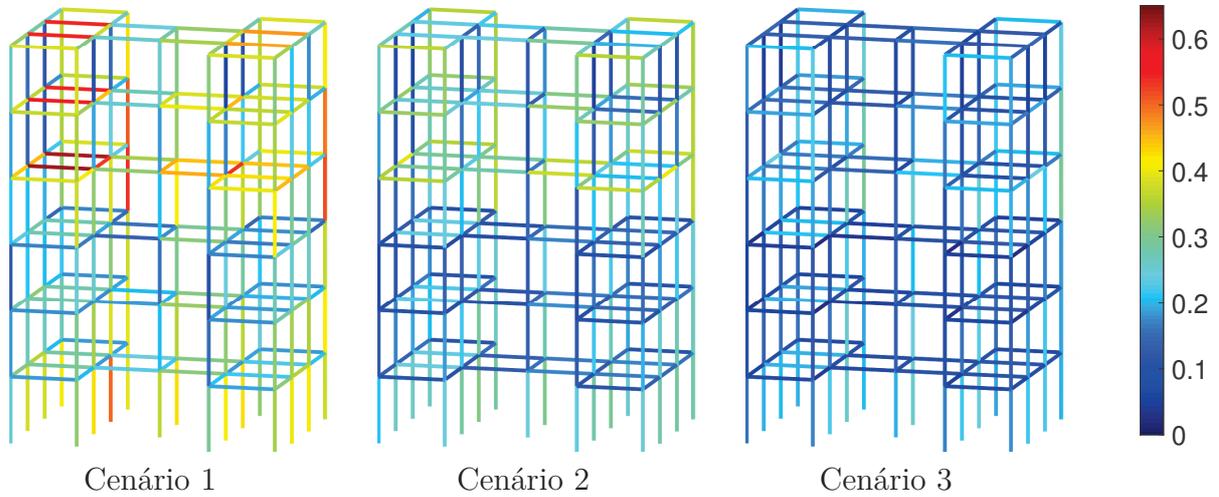
Tabela 5 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1	2	3			
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	200x46,1	┌	310x79	┌	310x117	┌
	4-6	150x22,5		200x35,9	┌	200x35,9	┌
P2	1-3	360x91	┌	310x97	┌	360x122	┌
	4-6	250x80		310x97	┌	310x97	┌
P3	1-3	360x101	I	360x110	I	360x110	I
	4-6	250x62		250x73	I	250x80	I
P4	1-3	360x91	I	360x110	I	360x110	I
	4-6	310x79		310x93	I	360x101	I
V1	1-3	410x38,8		530x66		610x101	
	4-6	310x21		310x21		360x32,9	
V2	1-3	410x46,1		410x46,1		460x52	
	4-6	310x21		410x38,8		530x66	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,6302		0,3995		0,2983	
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1595		0,1054		0,0840	
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		3,4		2,1		1,4	
$\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ (Hz)		<b>1,7431</b>		<b>2,2315</b>		<b>2,6594</b>	
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		33,4216		52,0941		66,7744	
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		14,6		8,5		5,6	
$\mathbf{W}(\mathbf{x})$ (kg)		<b>34291</b>		<b>45364</b>		<b>59439</b>	
Meta-heurística		SHAMODE		SHAMODE		SHAMODE-WO	

Elaborado pela autora (2022).

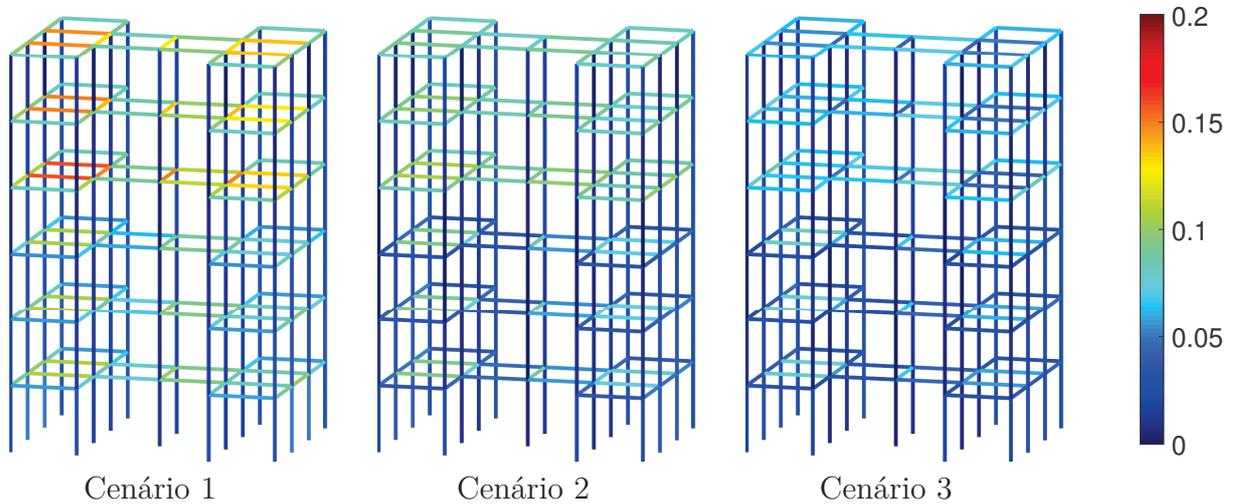
Assim como foi constatado no problema anterior, na medida em que o peso da estrutura aumenta, os valores de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$  aumentam e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  e  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminuem. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 25 e 26, respectivamente. De maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso. Novamente, estes resultados estão dentro do previsto, pois maiores pesos estão relacionados a estruturas mais rígidas, que apresentam melhor comportamento estrutural.

Figura 25 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

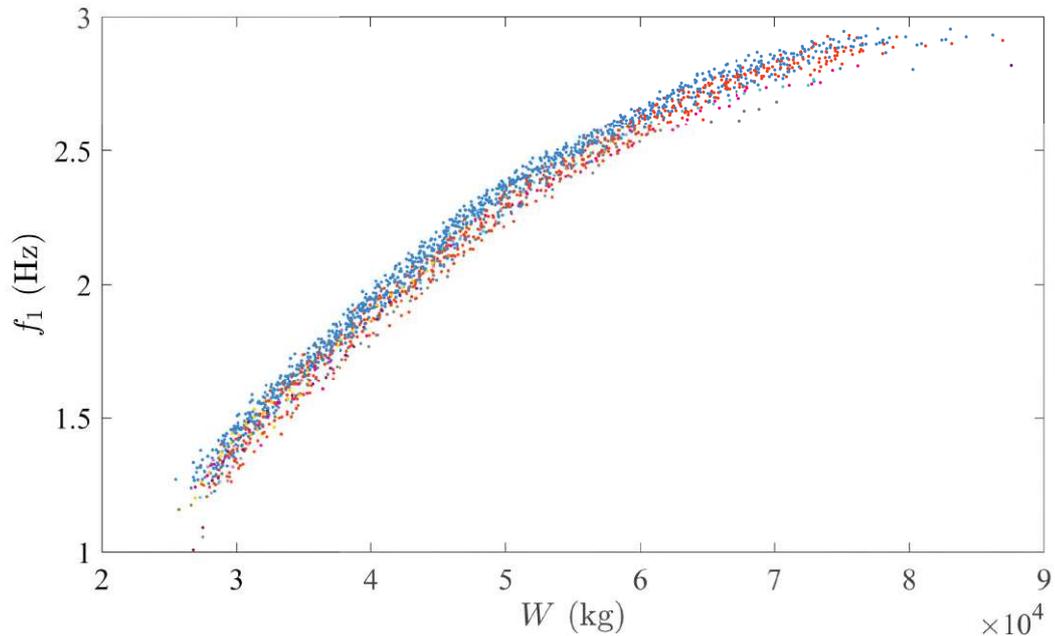
Figura 26 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para analisar as orientações de pilares encontradas, a Figura 27 mostra as 2000 soluções salvas plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 6.

Figura 27 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

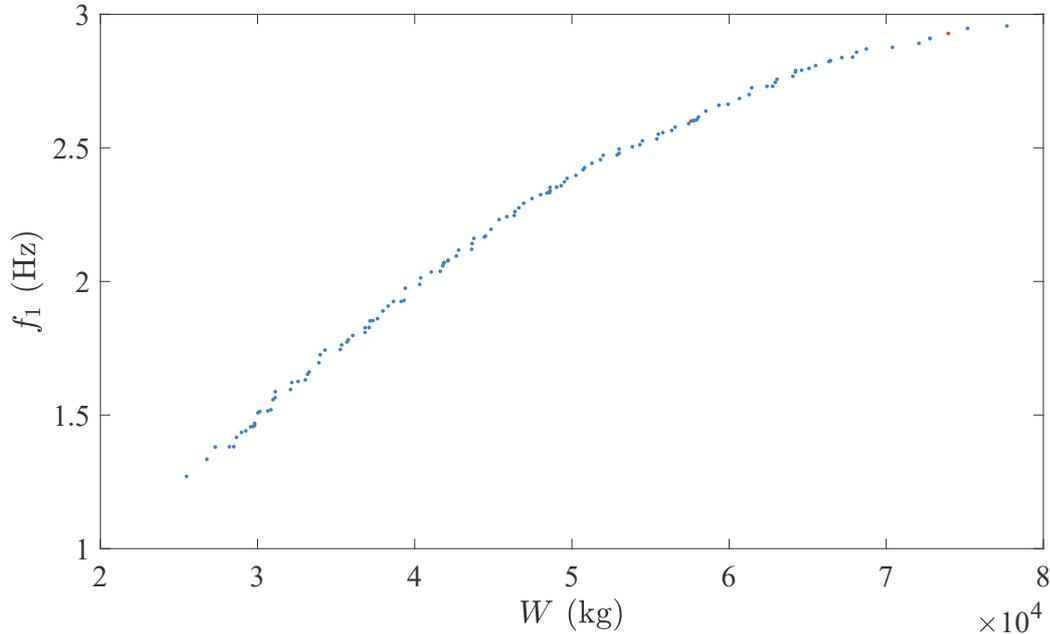
Tabela 6 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
┌	┌	┌	┌	┌	I	┌	┌	I	┌	┌	┌	I	I	┌	┌
0				2				5				66			
┌	┌	┌	I	┌	I	┌	I	I	┌	┌	I	I	I	┌	I
41				21				0				0			
┌	┌	I	┌	┌	I	I	┌	I	┌	I	┌	I	I	I	┌
0				0				591				20			
┌	┌	I	I	┌	I	I	I	I	┌	I	I	I	I	I	I
1152				0				38				0			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando estes resultados, percebe-se que as configurações  $[\text{┌ ┌ I I}]$  e  $[\text{I ┌ I ┌}]$  são predominantes. No entanto ao analisar a Figura 28, que mostra as soluções que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, a maioria absoluta das soluções apresenta a configuração  $[\text{┌ ┌ I I}]$ . Os resultados encontrados na Tabela 5 reafirmam este comportamento, pois as soluções extraídas nos três cenários apresentam a configuração  $[\text{┌ ┌ I I}]$ .

Figura 28 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 7. Em seguida, é executado um teste de Wilcoxon para cada indicador de desempenho entre cada possível par de algoritmos. Utilizando uma significância de 0,05, os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 8 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 7 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hiper-volume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,66968	0,01442	0,02687	0,00930	0,01091	0,00483
MM-IPDE	0,67719	0,01286	0,02811	0,00804	0,01198	0,00671
SHAMODE	0,68065	0,01894	0,02139	0,01022	0,00678	0,00244
SHAMODE-WO	0,68476	0,02344	0,02006	0,01268	0,00677	0,00170

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 8 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	✗	✗	✗
GDE3	SHAMODE	✗	✗	✓
GDE3	SHAMODE-WO	✓	✗	✓
MM-IPDE	SHAMODE	✗	✗	✓
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✗	✓	✓
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível concluir que, para este problema, a maior média de hipervolumes foi a do algoritmo SHAMODE-WO. No entanto este valor só é significativamente maior do que o menor valor de  $\overline{HV}$ , que foi encontrado para o GDE3. O menor valor de  $\overline{IGD+}$  foi também do algoritmo SHAMODE-WO, mas este valor só é significativamente menor do que o maior valor de  $\overline{IGD+}$ , que foi encontrado para o MM-IPDE. Não há diferença significativa entre SHAMODE e SHAMODE-WO e entre GDE3 e MM-IPDE em nenhum dos indicadores. Além disso, SHAMODE e SHAMODE-WO foram significativamente melhores que GDE3 e MM-IPDE em relação ao *spacing*. Também é importante pontuar que, como mostrado na Tabela 5, as três soluções extraídas foram obtidas pelos algoritmos SHAMODE ou SHAMODE-WO.

### 5.3.3 Minimização do peso da estrutura e do maximização do fator de carga crítica

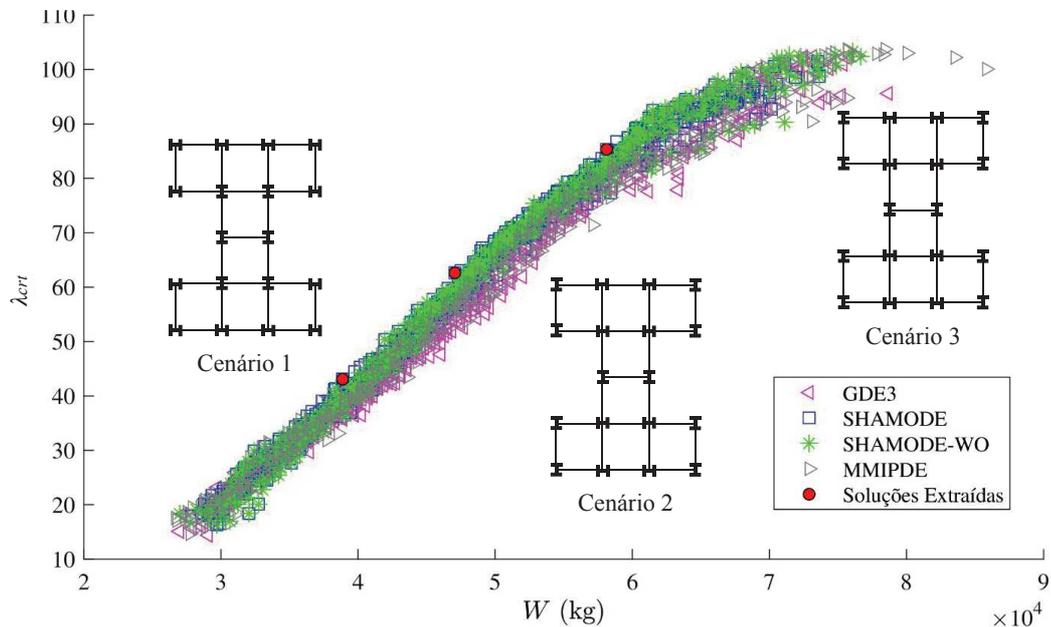
O terceiro caso estudado neste conjunto de experimentos foi mais um POE de dois objetivos. Aqui, o primeiro objetivo é a minimização do peso da estrutura e o segundo objetivo é a maximização do fator de carga crítica. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, seguindo os mesmo cenário dos problemas anteriores:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$  e  $w_2 = 0,25$
- b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$  e  $w_2 = 0,5$
- c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$  e  $w_2 = 0,75$

onde  $w_1$  e  $w_2$  são os pesos de importância das funções-objetivo conflitantes: minimização do peso da estrutura e maximização do fator de carga crítica.

As 2000 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 29 e os resultados encontrados nos POEs são apresentados na Tabela 9. As soluções extraídas, assim como suas orientações de pilares, também estão ilustradas na Figura 29.

Figura 29 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo e plantas baixas das soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 9 é possível chegar a algumas conclusões sobre o experimento. No que diz respeito ao peso da estrutura, é possível observar que a estrutura mais leve, assim como nos outros problemas, foi encontrada no cenário 1 ( $W = 38868$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 58129$  kg no cenário 3, 49% maior do que no cenário 1).

Em relação aos fatores de carga crítica, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\lambda_{crit} = 43,0809$ . Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  aumenta, o valor de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  aumenta ( $\lambda_{crit} = 85,3286$  no cenário 3, 98% maior do que no cenário 1).

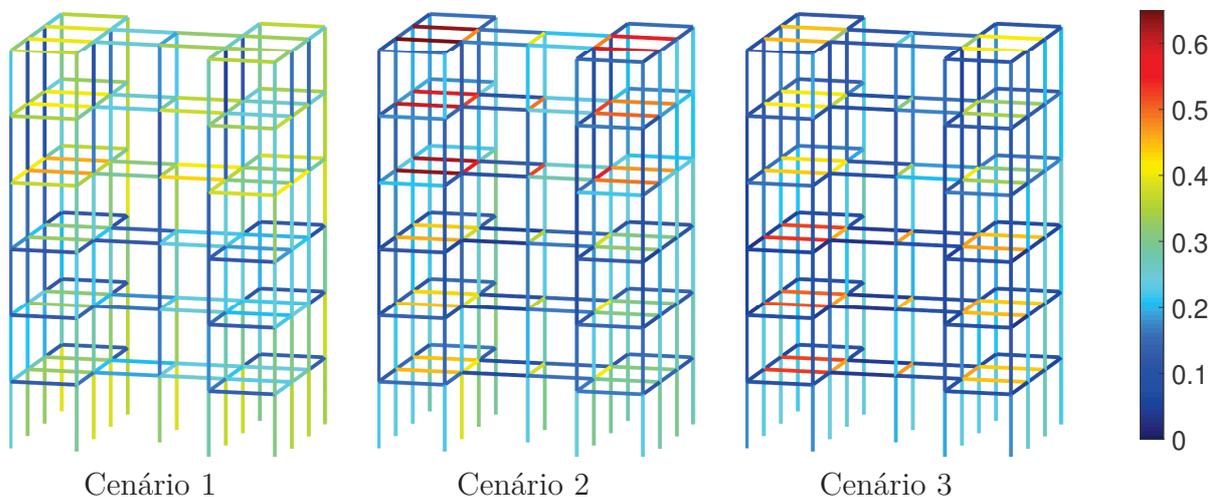
Assim como foi constatado nos problemas anteriores, na medida em que o peso da estrutura aumenta, os valores de  $f_1(\mathbf{x})$  aumentam e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  e  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminuem. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 30 e 31, respectivamente. De maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso. Novamente, estes resultados estão dentro do previsto, pois maiores pesos estão relacionados a estruturas mais rígidas, que apresentam melhor comportamento estrutural.

Tabela 9 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1	2	3			
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	200x46,1	┌	310x97	I	310x117	I
	4-6	200x35,9	┌	310x79	I	310x79	I
P2	1-3	360x101	┌	310x93	┌	360x101	┌
	4-6	310x93	┌	310x79	┌	250x80	┌
P3	1-3	360x101	I	360x101	I	360x110	I
	4-6	310x79	I	360x91	I	360x101	I
P4	1-3	360x101	I	310x97	┌	310x117	┌
	4-6	310x79	I	250x73	┌	310x97	┌
V1	1-3	460x52		530x66		610x101	
	4-6	310x21		360x32,9		410x38,8	
V2	1-3	360x39		310x23,8		200x22,5	
	4-6	310x23,8		250x17,9		310x23,8	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,4646	0,6486	0,5388			
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1363	0,1791	0,1631			
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		2,6	1,7	1,3			
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)		1,9073	2,2157	2,5848			
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		<b>43,0809</b>	<b>62,6305</b>	<b>85,3286</b>			
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		11,8	8,3	6,0			
$W(\mathbf{x})$ (kg)		<b>38868</b>	<b>47059</b>	<b>58129</b>			
Meta-heurística		SHAMODE	SHAMODE	SHAMODE			

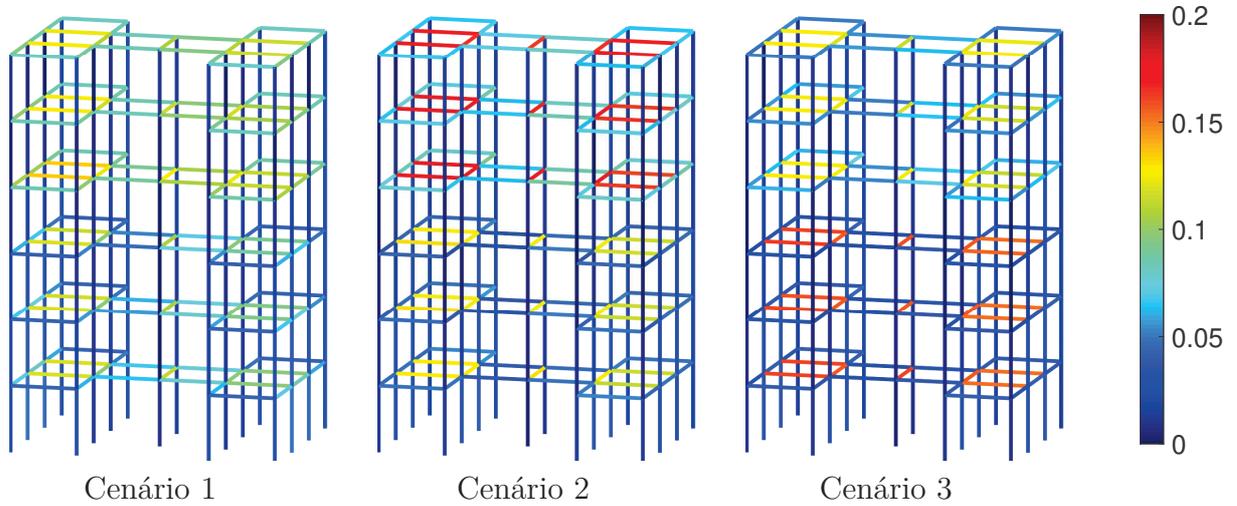
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 30 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

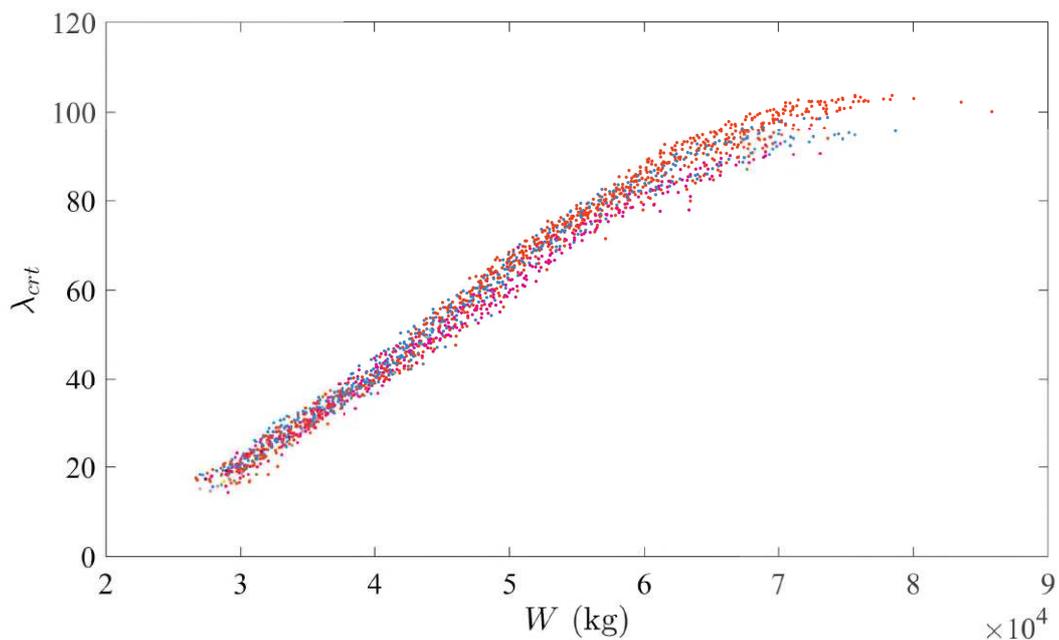
Figura 31 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para analisar as orientações de pilares encontradas, a Figura 32 mostra as 2000 soluções salvas plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 10.

Figura 32 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

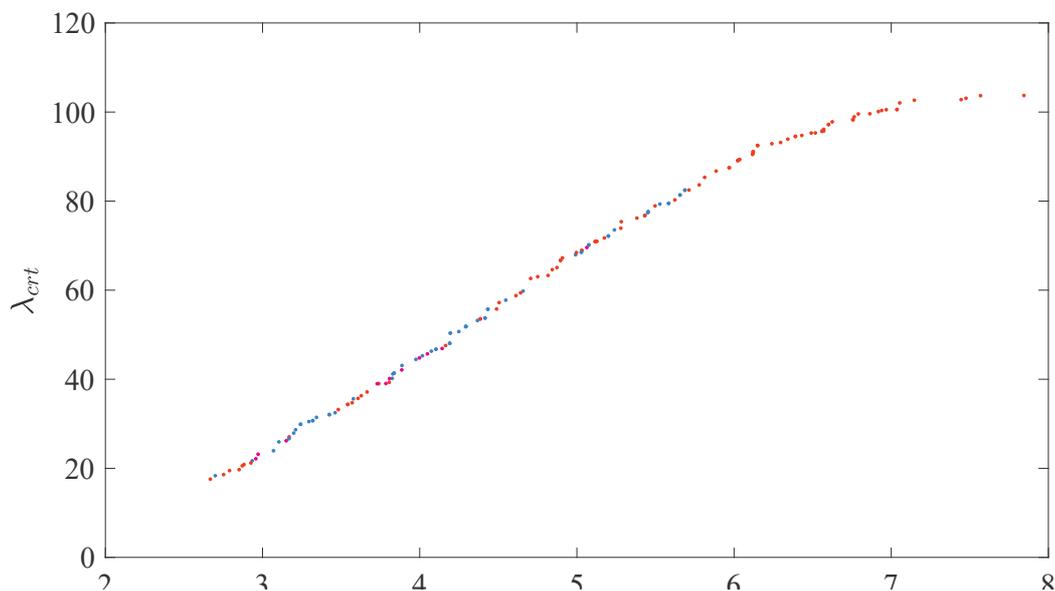
Tabela 10 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
0				0				5				10			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
1				4				398				0			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
1				0				971				8			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
586				1				15				0			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando estes resultados, percebe-se que as configurações  $[I \ I \ I \ I]$ ,  $[I \ I \ I \ ]$  e  $[I \ I \ ] \ ]$  são predominantes. No entanto ao analisar a Figura 33, que mostra as soluções que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, é possível notar que as soluções que predominam nesta Figura são aquelas com as configurações  $[I \ I \ I \ I]$  e  $[I \ I \ I \ ]$ . Enquanto nos pontos de menores pesos e menores fatores de carga crítica  $[I \ I \ I \ I]$  mostra uma leve predominância, nos pontos de maiores pesos e maiores fatores de carga crítica  $[I \ I \ I \ ]$  é mais encontrada. Esta análise é coerente com os resultados encontrados na Tabela 9, onde a solução extraída no primeiro cenário apresenta a configuração  $[I \ I \ I \ I]$ , as soluções extraídas no segundo e terceiro cenários apresentam a configuração  $[I \ I \ I \ ]$ .

Figura 33 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 11. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 12 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 11 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
Meta-heurística	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
GDE3	0,59159	0,02696	0,03812	0,01343	0,01010	0,00245
MM-IPDE	0,60192	0,01763	0,03372	0,00846	0,01341	0,00745
SHAMODE	0,61194	0,01239	0,02288	0,00628	0,00753	0,00126
SHAMODE-WO	0,61943	0,01582	0,02127	0,00647	0,00743	0,00138

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 12 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas	Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3 MM-IPDE	$\times$	$\times$	$\times$
GDE3 SHAMODE	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
GDE3 SHAMODE-WO	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
MM-IPDE SHAMODE	$\times$	$\times$	$\checkmark$
MM-IPDE SHAMODE-WO	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
SHAMODE SHAMODE-WO	$\times$	$\times$	$\times$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível concluir que, para este problema, a maior média de hipervolumes ( $\overline{HV}$ ) foi a do algoritmo SHAMODE-WO. No entanto este valor só é significativamente maior do que os valores de  $\overline{HV}$  para o GDE3 e para o MM-IPDE. O menor valor de ( $\overline{IGD+}$ ) foi encontrado para o algoritmo SHAMODE-WO, mas este valor só é significativamente menor do que o maior valor de  $\overline{IGD+}$ , que foi encontrado para o MM-IPDE. Novamente, não há diferença significativa entre SHAMODE e SHAMODE-WO e entre GDE3 e MM-IPDE em nenhum dos indicadores. Além disso, SHAMODE e SHAMODE-WO foram significativamente melhores que GDE3 e MM-IPDE em relação ao  $spacing$ . Também é importante pontuar que, como mostrado na Tabela 9, as três soluções extraídas foram obtidas pelos algoritmos SHAMODE.

### 5.3.4 Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração

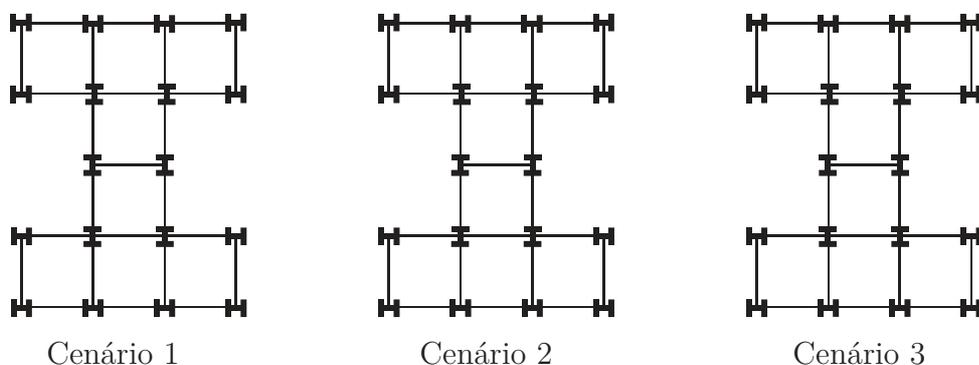
O caso estudado nesta Sub-seção é um POE de três objetivos, onde o primeiro deles é a minimização do peso da estrutura, o segundo é a minimização do máximo deslocamento horizontal e o terceiro é a maximização da primeira frequência natural de vibração. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, seguindo os seguintes cenários:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$
- b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$
- c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

Assim como nos problemas anteriores,  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura, e seus valores nos 3 cenários foram mantidos os mesmos que nos casos anteriores (0,75; 0,5 e 0,25). No entanto, como agora tem-se dois objetivos conflitantes com a minimização do peso estrutura, a importância restante foi distribuída de maneira igual entre  $w_2$  e  $w_3$ , que não são conflitantes entre si e representam os pesos de importância da minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração, respectivamente.

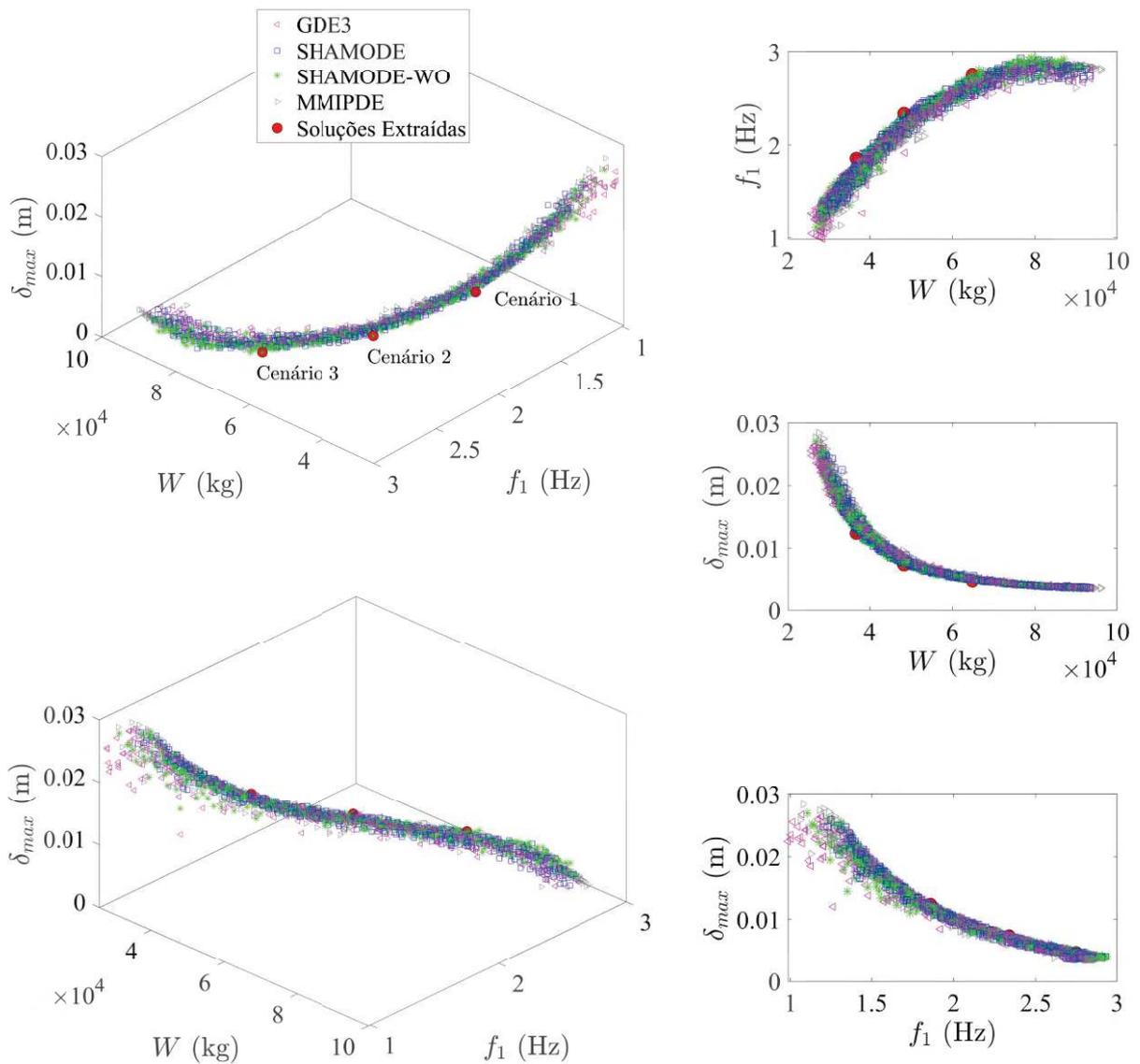
As 2000 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 35, assim como as soluções extraídas pela tomada de decisão multi-critério. Os perfis metálicos, orientações, além dos valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas, são apresentados na Tabela 13. As orientações dos pilares das soluções extraídas, representadas em planta baixa, estão representadas na Figura 34.

Figura 34 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 35 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 13 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1	2	3			
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	250x73	┌	310x79	┌	310x117	┌
	4-6	150x22,5	┌	150x22,5	┌	310x79	┌
P2	1-3	360x91	┌	360x91	┌	360x122	┌
	4-6	250x73	┌	310x79	┌	360x101	┌
P3	1-3	360x101	I	360x110	I	360x122	I
	4-6	250x59	I	310x97	I	360x101	I
P4	1-3	360x91	I	360x110	I	360x122	I
	4-6	310x79	I	310x97	I	3610x117	I
V1	1-3	410x38,8		530x66		610x101	
	4-6	310x21		410x38,8		410x38,8	
V2	1-3	410x38,8		460x52		460x52	
	4-6	410x38,8		360x51		460x60	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,5253		0,3381		0,2439	
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1115		0,0999		0,0779	
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		3,0		1,6		1,0	
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)		<b>1,8580</b>		<b>2,3377</b>		<b>2,7515</b>	
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		34,2238		58,8942		90,6445	
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		<b>12,4</b>		<b>7,3</b>		<b>4,7</b>	
$W(\mathbf{x})$ (kg)		<b>36766</b>		<b>48299</b>		<b>64851</b>	
Meta-heurística		SHAMODE		SHAMODE-WO		SHAMODE-WO	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

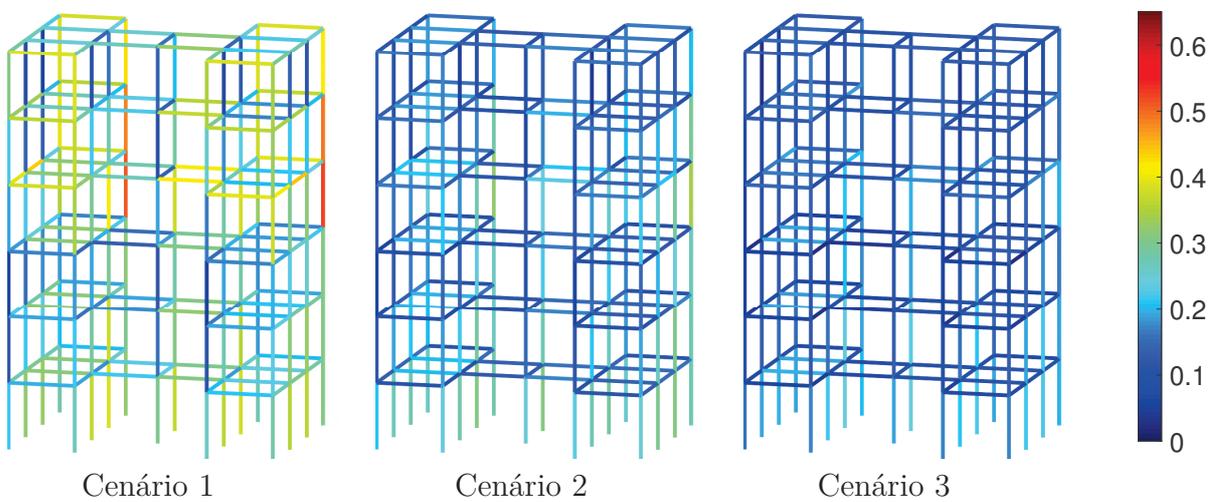
Ao observar os resultados encontrados na Tabela 13 é possível fazer algumas análises relevantes. Em relação ao peso da estrutura, é possível observar que a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 36766$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 64851$  kg no cenário 3, 76% maior do que no cenário 1). Novamente, este é um resultado intuitivo e dentro do esperado.

No que tange o máximo deslocamento horizontal, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\delta_{max} = 12,4$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminui ( $\delta_{max} = 4,7$  mm no cenário 3, 62% menor do que no cenário 1). Já em relação às primeiras frequências naturais de vibração, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $f_1 = 1,8580$  Hz. Na medida em que o peso de importância  $w_3$  aumenta, o valor de  $f_1(\mathbf{x})$  aumenta ( $f_1 = 2,7515$  Hz no cenário 3, 48% maior do que no cenário 1).

Novamente, os valores de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$  aumentaram e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  diminuíram com o aumento do peso da estrutura. Os valores de  $LRFD$  e  $V$  encontrados na equação de

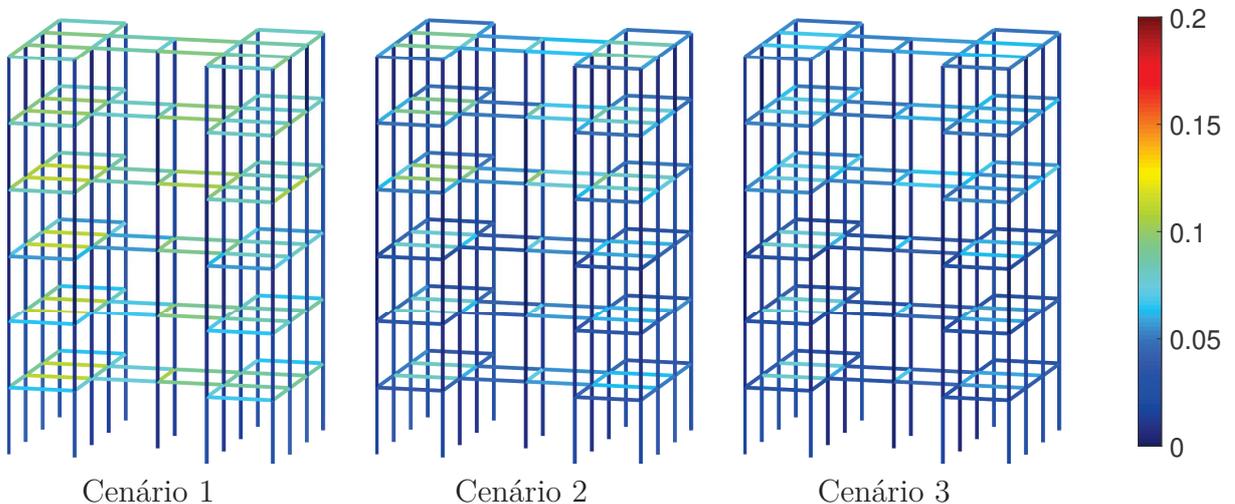
interação de esforços para flexão composta e na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento para cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 36 e 37, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso. Como explicado anteriormente, isto ocorre pois maiores pesos estão relacionados a estruturas mais rígidas, que apresentam melhor comportamento estrutural.

Figura 36 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

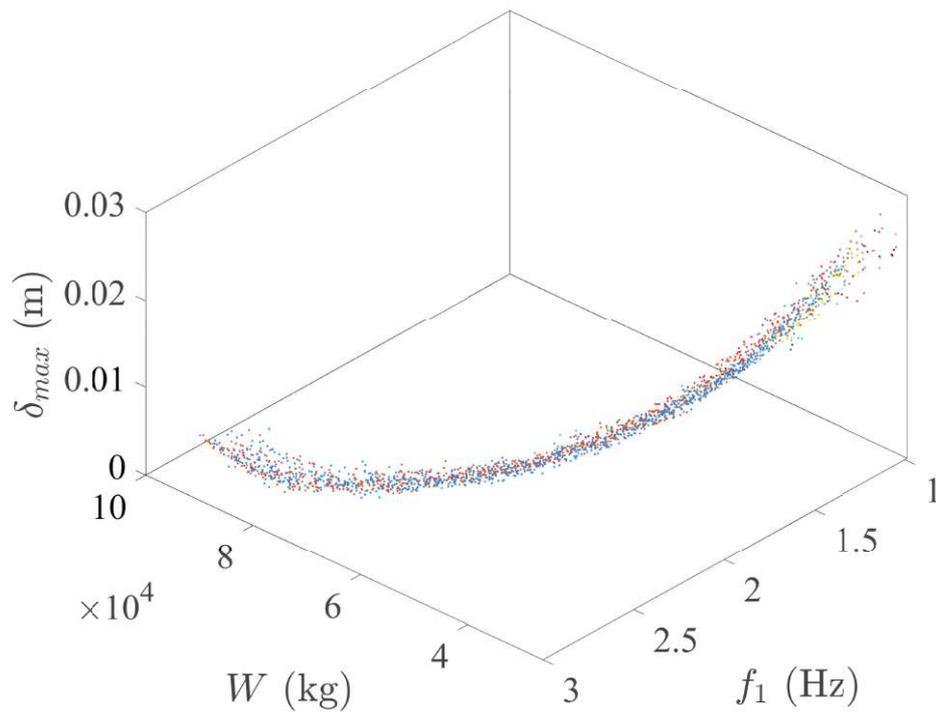
Figura 37 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para analisar as orientações de pilares encontradas, a Figura 38 mostra as 2000 soluções salvas plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 14.

Figura 38 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

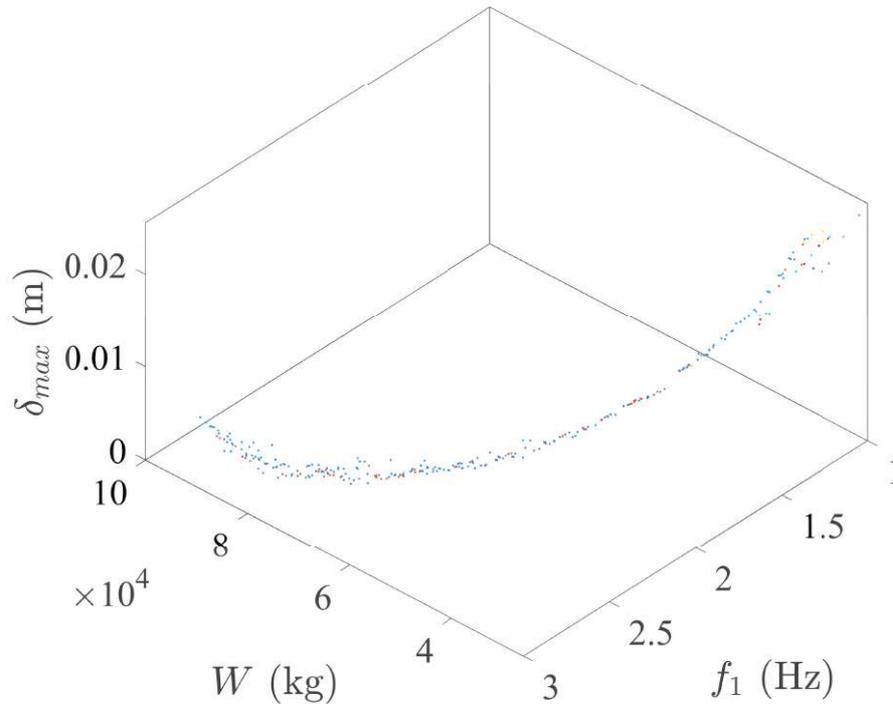
Tabela 14 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do primeiro deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
←	←	←	←	←	I	←	←	I	←	←	←	I	I	←	←
0				31				16				19			
←	←	←	I	←	I	←	I	I	←	←	I	I	I	←	I
44				8				26				0			
←	←	I	←	←	I	I	←	I	←	I	←	I	I	I	←
19				58				659				11			
←	←	I	I	←	I	I	I	I	←	I	I	I	I	I	I
1098				5				6				0			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando estes resultados, percebe-se que as configurações [← ← I I] e [I ← I ←] são predominantes. No entanto ao analisar a Figura 39, que mostra as soluções que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, é possível perceber que a maioria das soluções que predominam nesta Figura são aquelas com a configuração [← ← I I]. Este comportamento é congruente com os encontrados na Tabela 13, onde as soluções extraídas dos três cenários apresentam os pilares com a configuração de orientação [← ← I I]. Além disto, analisando estes resultados em conjunto com os encontrados na Sub-seção 5.3.2, é possível concluir esta configuração de orientações tem uma forte predominância quando a primeira frequência natural de vibração é um dos objetivos.

Figura 39 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 15. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 16 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 15 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hiper-volume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,62260	0,00894	0,02499	0,00494	0,02074	0,00430
MM-IPDE	0,62279	0,00859	0,02735	0,00507	0,02677	0,00711
SHAMODE	0,62509	0,01865	0,02543	0,00951	0,01691	0,00274
SHAMODE-WO	0,63383	0,01367	0,02057	0,00694	0,02044	0,00607

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 16 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	✗	✗	✗
GDE3	SHAMODE	✗	✗	✓
GDE3	SHAMODE-WO	✓	✗	✗
MM-IPDE	SHAMODE	✗	✗	✓
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✗	✓	✓
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que, neste problema, o algoritmo MM-IPDE apresentou um desempenho significativamente pior que SHAMODE e SHAMODE-WO nos três indicadores. Já o algoritmo SHAMODE-WO obteve os melhores valores de  $\overline{HV}$ ,  $\overline{IGD+}$  e  $\overline{SP}$ . No entanto apenas o valor de  $\overline{IGD+}$  foi significativamente melhor que o encontrado para o SHAMODE. Além disso, como mostrado na Tabela 13, as três soluções extraídas foram obtidas pelos algoritmos SHAMODE ou SHAMODE-WO.

### 5.3.5 Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica

O caso estudado nesta Sub-seção é um POE de três objetivos, onde o primeiro deles é a minimização do peso da estrutura, o segundo é a minimização do máximo deslocamento horizontal e o terceiro é a maximização do fator de carga crítica. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, seguindo cenários similares ao do problema anterior:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$
- b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$
- c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

onde  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  são os pesos de importância da minimização do peso da estrutura, da minimização do máximo deslocamento horizontal e da maximização do fator de carga crítica, respectivamente.

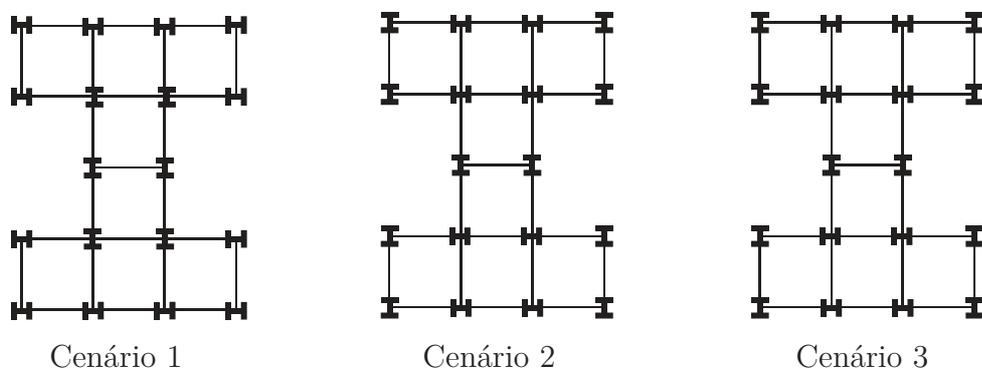
As 2000 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 40, assim como as soluções extraídas pela tomada de decisão multi-critério. Os perfis metálicos designados para a estrutura, assim como os valores encontrados para as restrições e funções-objetivo são apresentados na Tabela 17. As orientações dos pilares das soluções extraídas, representadas em planta baixa, estão representadas na Figura 41.

Tabela 17 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1	2	3			
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	150x29,8	┌	360x91	┌	360x122	┌
	4-6	150x22,5	┌	310x79	┌	310x79	┌
P2	1-3	360x91	┌	360x91	┌	360x122	┌
	4-6	310x79	┌	200x53	┌	310x107	┌
P3	1-3	360x110	┌	360x91	┌	360x101	┌
	4-6	200x35,9	┌	250x85	┌	250x101	┌
P4	1-3	360x117	┌	360x101	┌	360x122	┌
	4-6	310x97	┌	310x93	┌	310x117	┌
V1	1-3	460x52		530x66		610x101	
	4-6	310x21		410x38,8		410x38,8	
V2	1-3	250x22,3		310x21		360x57,8	
	4-6	360x32,9		310x23,8		530x66	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,5897		0,5236		0,2552	
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1583		0,1442		0,0871	
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		3,0		1,7		1,0	
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)		1,7697		2,2472		2,7031	
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		<b>36,4554</b>		<b>62,7099</b>		<b>93,3286</b>	
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		<b>13,9</b>		<b>7,9</b>		<b>4,8</b>	
$W(\mathbf{x})$ (kg)		<b>35718</b>		<b>47780</b>		<b>65633</b>	
Meta-heurística		SHAMODE-WO		SHAMODE-WO		MM-IPDE	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

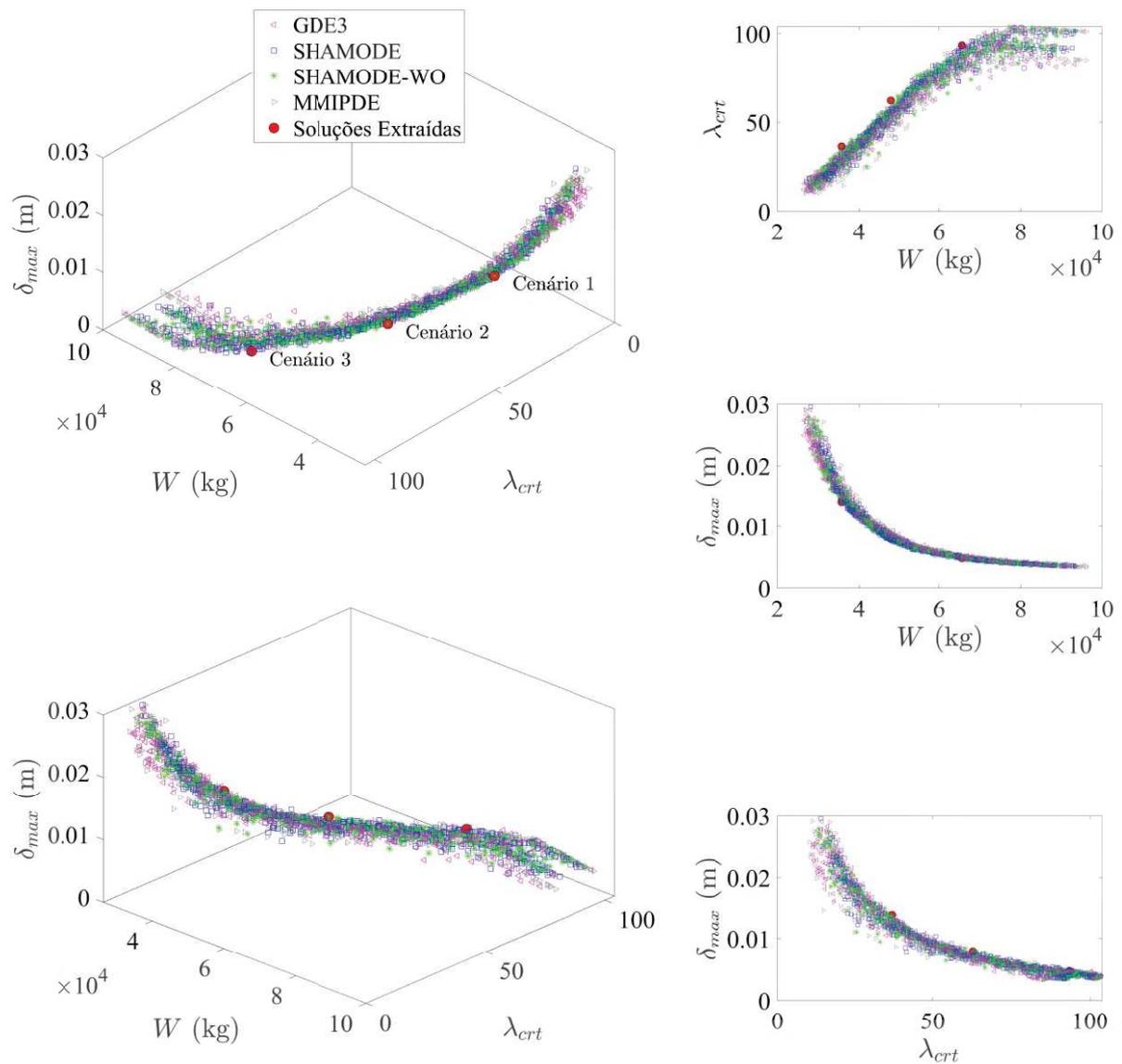
Figura 41 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando os dados disponíveis na Tabela 17 é possível fazer algumas análises relevantes. Novamente, a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema

Figura 40 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

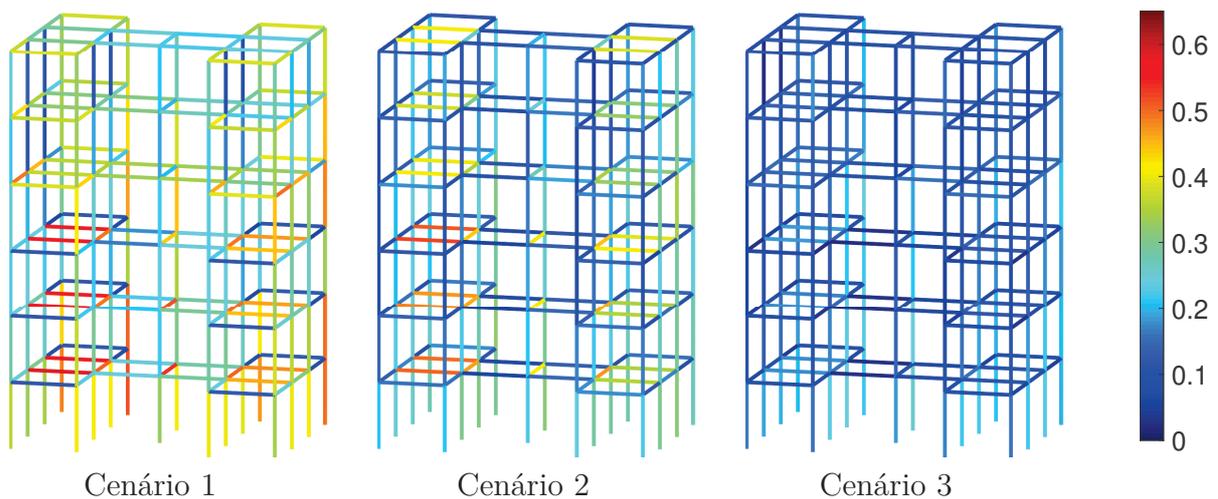
( $W = 35718$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 65633$  kg no cenário 3, 84% maior do que no cenário 1).

No que tange o máximo deslocamento horizontal, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\delta_{max} = 13,9$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminui ( $\delta_{max} = 4,8$  mm no cenário 3, 65% menor do que no cenário 1).

Em relação aos fatores de carga crítica, na solução do cenário 1 o valor encontrado foi de  $\lambda_{crt} = 36,4554$ . Na medida em que o peso de importância  $w_3$  aumenta, o valor de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$  aumenta ( $\lambda_{crt} = 93,3286$  no cenário 3, 156% maior do que no cenário 1).

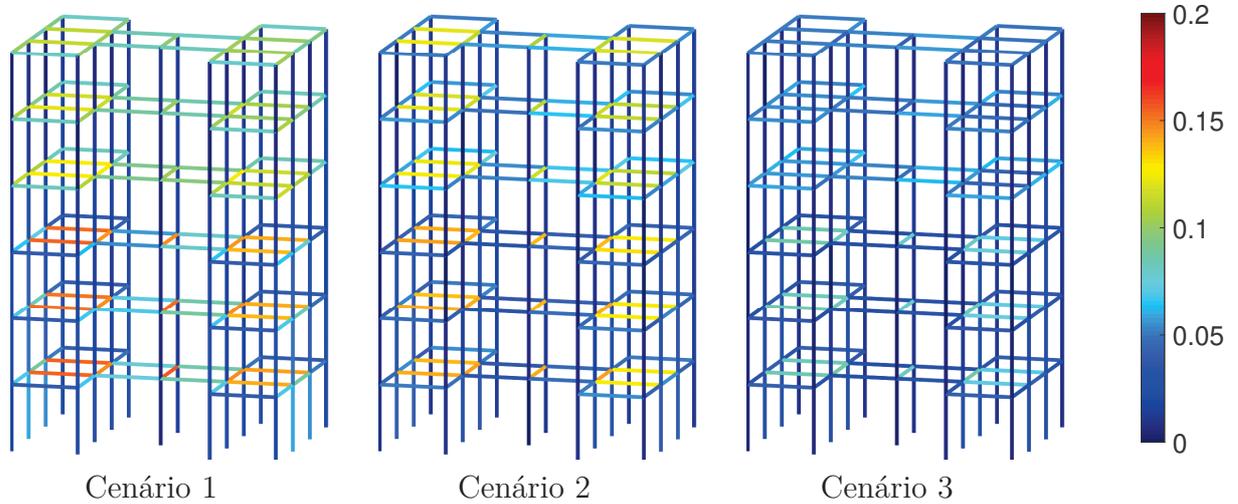
De maneira geral, estruturas mais pesadas apresentam uma maior rigidez, o que leva a um melhor comportamento estrutural. Isso é ilustrado pelo fato dos valores de  $f_1(\mathbf{x})$  aumentarem e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  diminuírem na medida em que cresce o peso. Os valores de  $LRFD$  e  $V$  encontrados para cada barra na equação de interação de esforços para flexão composta e na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento podem ser visualizados nas Figuras 42 e 43, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Figura 42 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

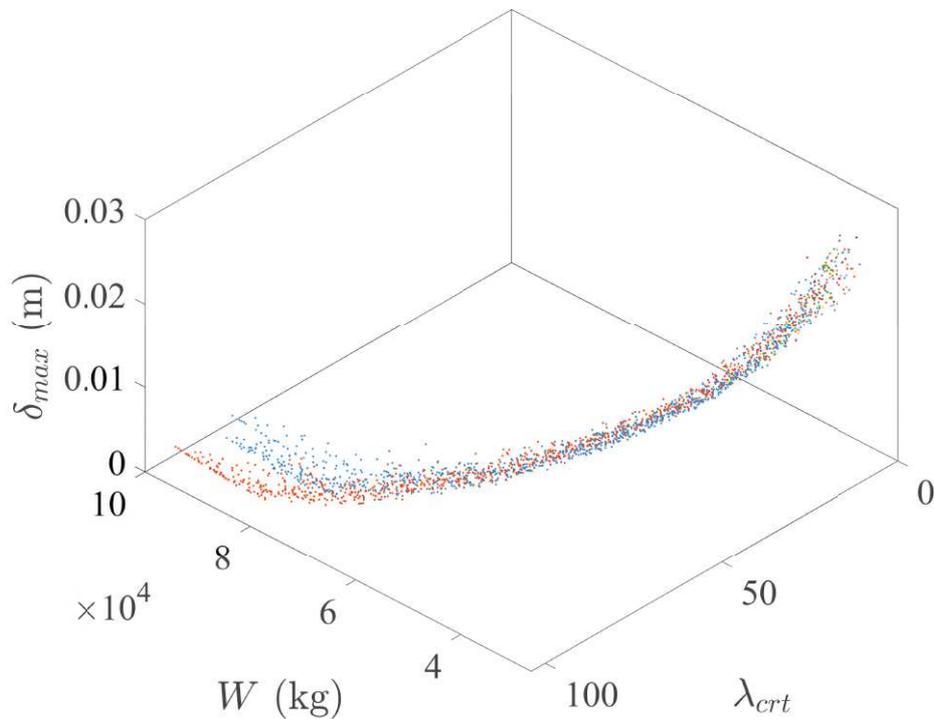
Figura 43 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para analisar as orientações de pilares encontradas, a Figura 44 mostra as 2000 soluções salvas plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 18.

Figura 44 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 18 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do primeiro deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica de vibração no pórtico de 258 barras e 126 nós

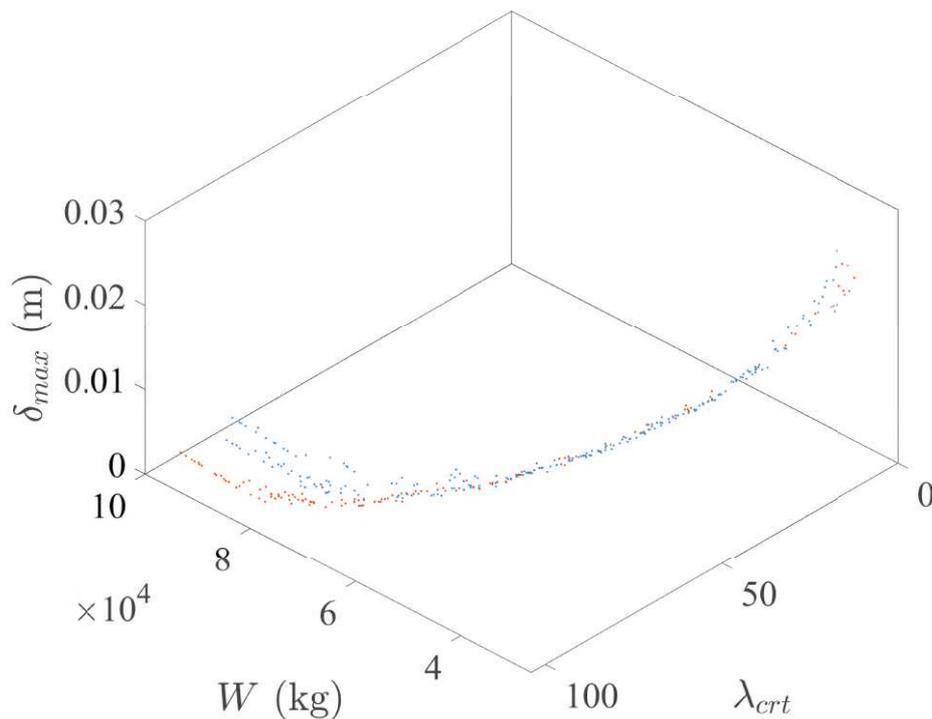
P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
6				9				26				21			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
21				0				19				0			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
29				8				862				15			
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
971				0				13				0			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

É possível observar que as configurações  $[I \ I \ I \ I]$  e  $[I \ I \ I \ I]$  são predominantes. Analisando a Figura 39, que mostra as soluções que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, este comportamento se repete. Além disso, nas soluções de menores pesos, a configuração  $[I \ I \ I \ I]$  aparece com mais frequência. Este comportamento é

observado da mesma maneira na Tabela 13, onde a solução extraída no primeiro cenário possui configuração  $[\text{I} \text{---} \text{I} \text{---} \text{I}]$  e as segunda e terceira soluções extraídas apresentam a configuração  $[\text{I} \text{---} \text{I} \text{---} \text{I}]$ . A presença da configuração  $[\text{I} \text{---} \text{I} \text{---} \text{I}]$  em soluções com maiores fatores de carga crítica também é observada no problema da Sub-seção 5.3.3, se mostrando uma configuração interessante para este objetivo.

Figura 45 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 19. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 20 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 19 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,57035	0,01993	0,03133	0,00770	0,02156	0,00433
MM-IPDE	0,58400	0,02002	0,02844	0,00857	0,02429	0,00573
SHAMODE	0,58285	0,01874	0,02629	0,00753	0,02223	0,00310
SHAMODE-WO	0,58203	0,01006	0,02495	0,00249	0,02427	0,00510

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 20 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
GDE3	SHAMODE	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
GDE3	SHAMODE-WO	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
MM-IPDE	SHAMODE	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
MM-IPDE	SHAMODE-WO	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
SHAMODE	SHAMODE-WO	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que, para este problema, o algoritmo que apresentou o melhor desempenho em relação hipervolume foi o MM-IPDE; considerando o  $IGD+$ , o melhor foi o SHAMODE-WO e considerando o *spacing*, o melhor foi o GDE3. No entanto, nenhum deles é significativamente melhor que os demais. Apesar disso, é importante pontuar que, como mostrado na Tabela 17, as três soluções extraídas foram obtidas pelos algoritmos MM-IPDE ou SHAMODE-WO.

### 5.3.6 Minimização do peso da estrutura, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica

O último caso estudado neste conjunto de experimentos é um POE de quatro objetivos, onde o primeiro deles é a minimização do peso da estrutura, o segundo é a minimização do máximo deslocamento horizontal, o terceiro é a maximização da primeira frequência natural de vibração e o quarto é a maximização do fator de carga crítica. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, seguindo os seguintes cenários:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,25/3$ ;  $w_3 = 0,25/3$  e  $w_4 = 0,25/3$
- b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,5/3$ ;  $w_3 = 0,5/3$  e  $w_4 = 0,5/3$
- c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,25$ ;  $w_3 = 0,25$  e  $w_4 = 0,25$

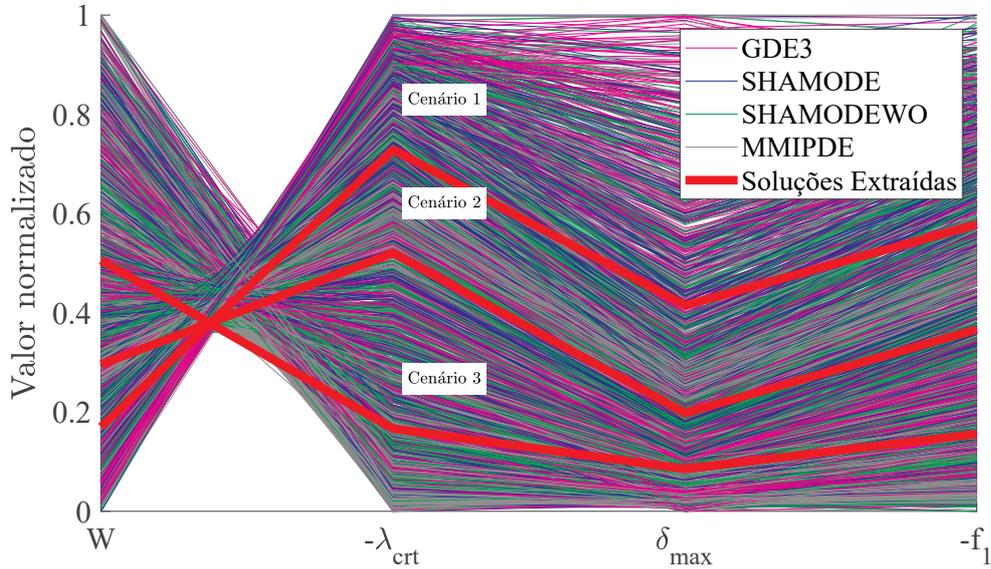
Assim como nos problemas anteriores,  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura, e seus valores nos 3 cenários foram mantidos os mesmos que nos casos anteriores (0,75; 0,5 e 0,25). No entanto, como agora tem-se três objetivos conflitantes com a minimização do peso estrutura, a importância restante foi distribuída de maneira igual entre  $w_2$ ,  $w_3$  e  $w_4$ , que não são conflitantes entre si e representam os pesos de importância da minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica, respectivamente.

As 2000 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 46 em forma de coordenadas paralelas. A representação em coordenadas paralelas é uma maneira de representar dados multidimensionais em um gráfico bi-dimensional. Cada curva representa uma solução encontrada e une os valores normalizados das funções-objetivo plotados no eixo vertical. O eixo horizontal indica cada uma das funções-objetivo a serem minimizadas. [63] A partir desta Figura é possível observar o fato de que a minimização do peso da estrutura  $W(\mathbf{x})$  é conflitante com os demais objetivos; pois na medida que seu valor aumenta, o das outras funções-objetivo diminui e vice-versa.

A Figura 47 apresenta, em planta baixa, as orientações dos pilares obtidas nas soluções extraídas pela tomada de decisão multi-critério. Por ela é possível visualizar, por exemplo, o conflito entre a minimização do peso e dos demais objetivos, pois as linhas unem altos valores de peso a baixos valores das outras funções e vice-versa.

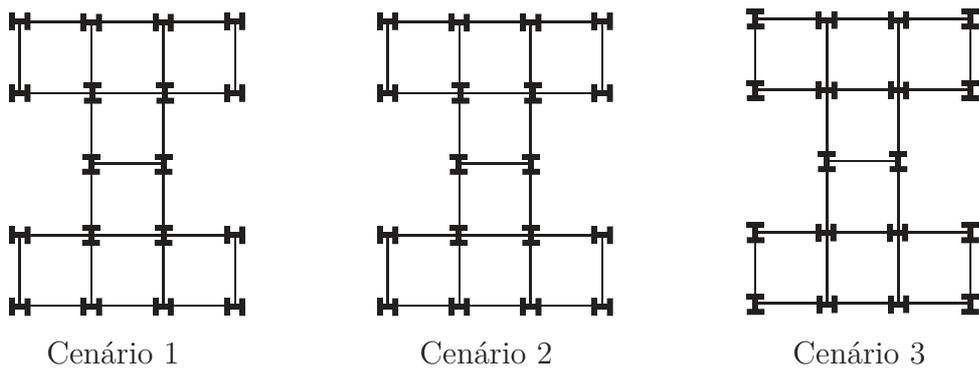
Os perfis metálicos, orientações, além dos valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas, são apresentados na Tabela 17.

Figura 46 - Coordenadas paralelas das frentes de Pareto do problema multi-objetivo de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 47 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 21 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Cenário		1	2	3			
Grupos	Pavimentos	Perfis W e suas orientações (para pilares)					
P1	1-3	200x52		310x93		310x117	I
	4-6	200x46,1	┌	200x46,1	┌	310x79	
P2	1-3	250x62		360x101		360x110	┌
	4-6	250x62	┌	310x79	┌	250x73	
P3	1-3	310x79		360x110		360x122	I
	4-6	250x62	I	360x91	I	310x117	
P4	1-3	310x107		360x101		310x97	┌
	4-6	310x79	I	310x97	I	310x79	
V1	1-3	460x52		530x72		610x101	
	4-6	310x21		310x21		460x52	
V2	1-3	360x44		250x17,9		360x39	
	4-6	310x23,8		410x38,8		310x32,7	
Valores das restrições e funções objetivo							
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$		0,5508		0,6468		0,3463	
$V_{max}(\mathbf{x})$		0,1360		0,1803		0,1138	
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		2,8		1,9		1,1	
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)		<b>1,7958</b>		<b>2,2162</b>		<b>2,6352</b>	
$\lambda_{crt}(\mathbf{x})$		<b>34,7763</b>		<b>54,5587</b>		<b>88,1817</b>	
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)		<b>13,5</b>		<b>8,2</b>		<b>5,5</b>	
$W(\mathbf{x})$ (kg)		<b>37111</b>		<b>46050</b>		<b>60953</b>	
Meta-heurística		SHAMODE/SHAMODE-WO		SHAMODE-WO		SHAMODE-WO	

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 21 é possível observar que, assim como nos outros problemas já apresentados, a estrutura mais leve entre as três extraídas foi encontrada no cenário 1 ( $W = 37111$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$ ,  $w_3$  e  $w_4$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 60953$  kg no cenário 3, 64% maior do que no cenário 1).

Em relação ao máximo deslocamento horizontal, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\delta_{max} = 13,5$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminui ( $\delta_{max} = 5,5$  mm no cenário 3, 59% menor do que no cenário 1).

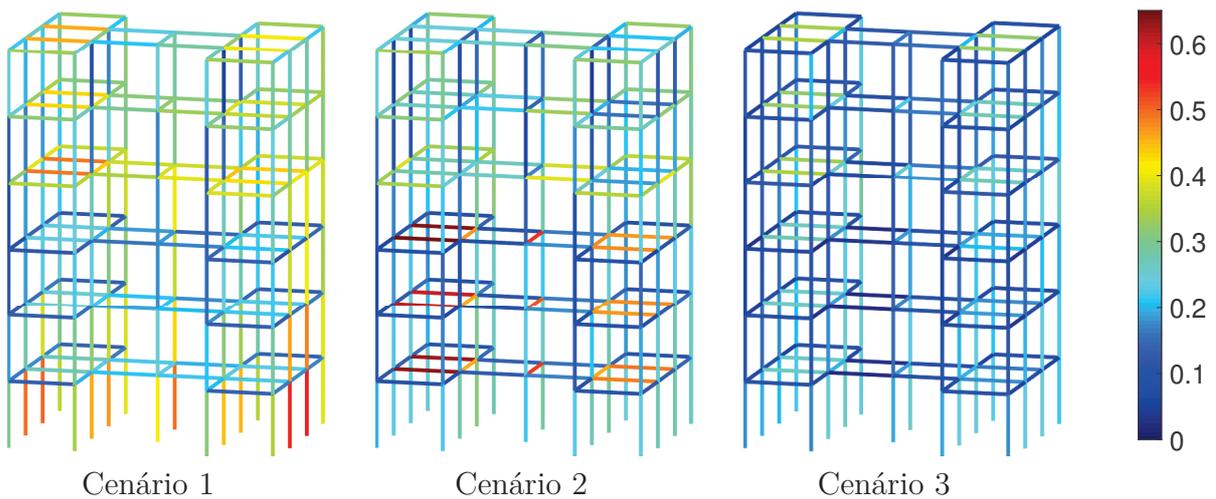
Quanto à primeira frequência natural de vibração, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $f_1 = 1,7958$  Hz. Com o aumento do peso de importância  $w_3$ , o valor de  $f_1(\mathbf{x})$  aumenta ( $f_1 = 2,6352$  Hz no cenário 3, 47% maior do que no cenário 1).

Finalmente, para o fator de carga crítica, último objetivo do problema, os resultados também se comportam como o esperado, a solução extraída do cenário 1 do problema

possui o menor valor de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  entre as soluções extraídas ( $\lambda_{crit} = 34,7763$ ). Na medida em que o peso de importância  $w_4$  aumenta, o valor de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  aumenta ( $\lambda_{crit} = 88,1817$  no cenário 3, 154% maior do que no cenário 1).

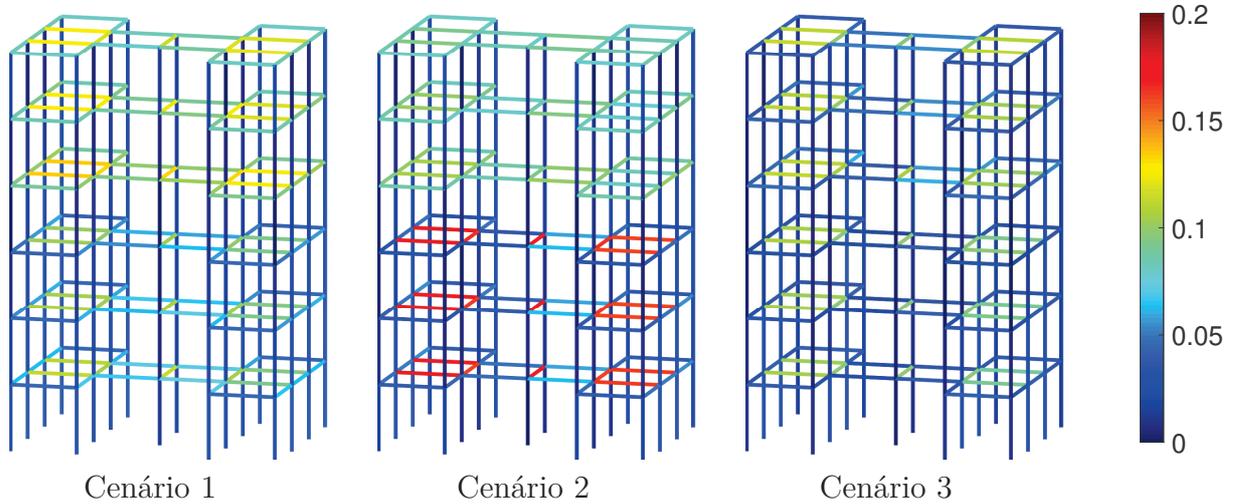
Como já explicado anteriormente, na medida em que o peso da estrutura aumenta, de maneira geral, ela se torna mais rígida, o que leva a um melhor comportamento estrutural. Nas Figuras 48 e 49, respectivamente, podem ser visualizados os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para cada barra da estrutura. É possível observar que, para a maioria das barras, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Figura 48 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 49 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

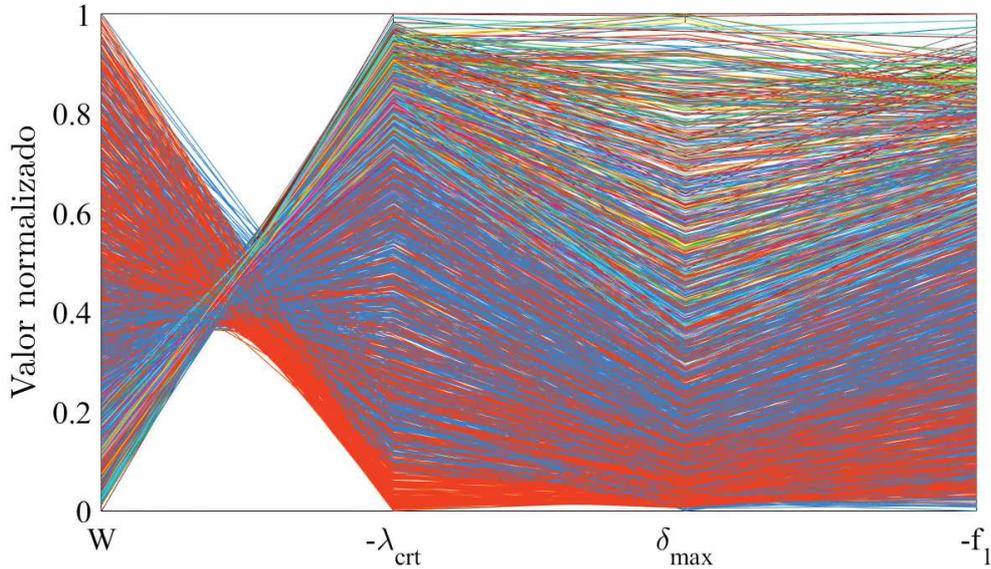
Para analisar as orientações de pilares encontradas, a Figura 50 mostra as 2000 soluções salvas plotadas com cores que representam as configurações de orientação encontradas. As orientações referentes a cada cor, assim como a quantidade de vezes que cada configuração se repete entre as 2000 soluções, podem ser visualizadas na Tabela 22.

Tabela 22 – Repetições das possíveis orientações de pilares entre as soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
—	—	—	—	—	I	—	—	I	—	—	—	I	I	—	—
7				18				8				16			
—	—	—	I	—	I	—	I	I	—	—	I	I	I	—	I
40				0				15				2			
—	—	I	—	—	I	I	—	I	—	I	—	I	I	I	—
43				1				800				19			
—	—	I	I	—	I	I	I	I	—	I	I	I	I	I	I
971				1				19				1			

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

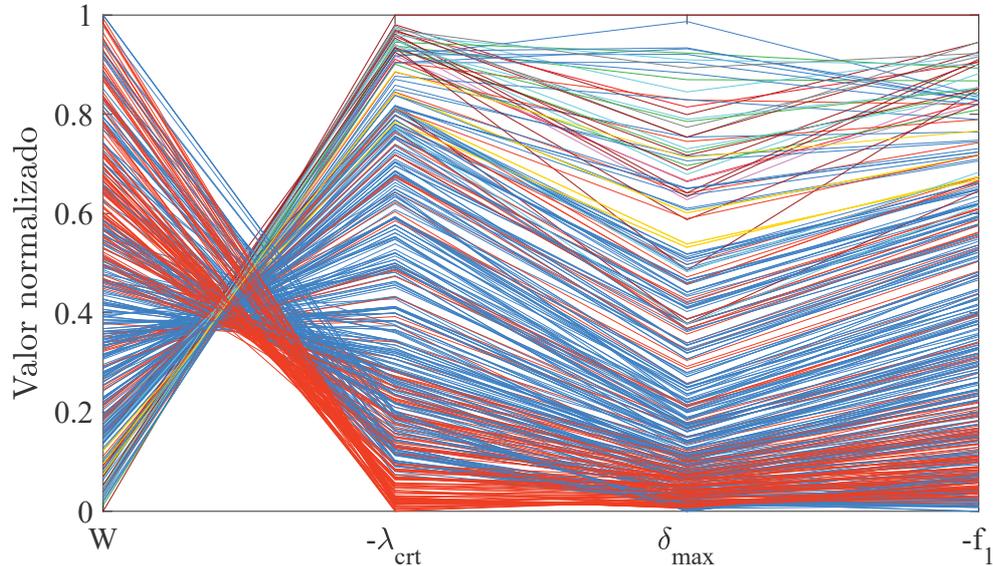
Figura 50 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas frentes de Pareto do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando estes resultados, percebe-se que as configurações  $[\leftarrow \leftarrow \mathbf{I} \mathbf{I}]$  e  $[\mathbf{I} \leftarrow \mathbf{I} \leftarrow]$  são predominantes. Na Figura 28, que mostra as soluções que são não-dominadas entre o conjunto de 2000 soluções, esse comportamento se repete. Além disso, é fácil perceber que a configuração  $[\leftarrow \leftarrow \mathbf{I} \mathbf{I}]$  predomina nas soluções de menor peso, enquanto a configuração  $[\mathbf{I} \leftarrow \mathbf{I} \leftarrow]$  predomina nas que atendem melhor aos outros objetivos. Os resultados encontrados na Tabela 5 reafirmam este comportamento, pois as soluções extraídas nos dois primeiros cenários apresentam a configuração  $[\leftarrow \leftarrow \mathbf{I} \mathbf{I}]$  e a solução extraída no cenário apresenta a configuração  $[\mathbf{I} \leftarrow \mathbf{I} \leftarrow]$ .

Figura 51 - Distribuição das configurações de orientação de pilares nas soluções não-dominadas do problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 23. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 24 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 23 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,46359	0,01776	0,03832	0,00665	0,02091	0,00298
MM-IPDE	0,48617	0,02015	0,03214	0,00847	0,02223	0,00470
SHAMODE	0,48095	0,01062	0,03250	0,00339	0,01839	0,00576
SHAMODE-WO	0,47362	0,01184	0,03497	0,00614	0,01943	0,00509

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 24 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 258 barras e 126 nós

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	✓	✓	✗
GDE3	SHAMODE	✓	✓	✗
GDE3	SHAMODE-WO	✗	✗	✗
MM-IPDE	SHAMODE	✗	✗	✗
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as medidas de desempenho e os teste de Wilcoxon para este problema, foi possível observar que o algoritmo GDE3 teve desempenho significativamente pior que MM-IPDE e SHAMODE em relação ao hipervolume e ao *IGD+*. Já em relação ao *spacing*, não houve diferença significativa entre as meta-heurísticas. É importante lembrar que, como mostrado na Tabela 21, as soluções extraídas foram obtidas pelos algoritmos SHAMODE e SHAMODE-WO.

### 5.3.7 Análise dos resultados

Após ter em mãos os resultados dos experimentos realizados nesta Seção, é possível fazer algumas considerações sobre os valores das restrições e funções-objetivo:

- O menor peso encontrado entre as soluções extraídas foi  $W = 31099$  kg, encontrado no cenário 1 do problema da Seção 5.3.1, onde os objetivos são a minimização do peso da estrutura ( $W$ ) e minimização do máximo deslocamento horizontal  $\delta_{max}$ . Já o maior ( $W = 65633$  kg) foi encontrado no cenário 3 do problema de minimização do peso da estrutura ( $W$ ), minimização do máximo deslocamento horizontal  $\delta_{max}$  e maximização do fator de carga crítica ( $\lambda_{crt}$ ).
- O menor deslocamento máximo horizontal encontrado entre as soluções extraídas foi  $\delta_{max} = 4,7$  mm, encontrado nos cenários 3 dos problemas das Seções 5.3.1 e 5.3.4, o que é coerente, pois são problemas onde a minimização do máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ) é um objetivo.
- A maior frequência natural de vibração encontrada entre as soluções extraídas foi  $f_1 = 2,7515$  Hz. Este valor foi encontrado no cenário 3 do problema da Seção 5.3.4, onde além da minimização do peso da estrutura ( $W$ ) e do máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ), a maximização da primeira frequência natural de vibração ( $f_1$ ) é um objetivo.

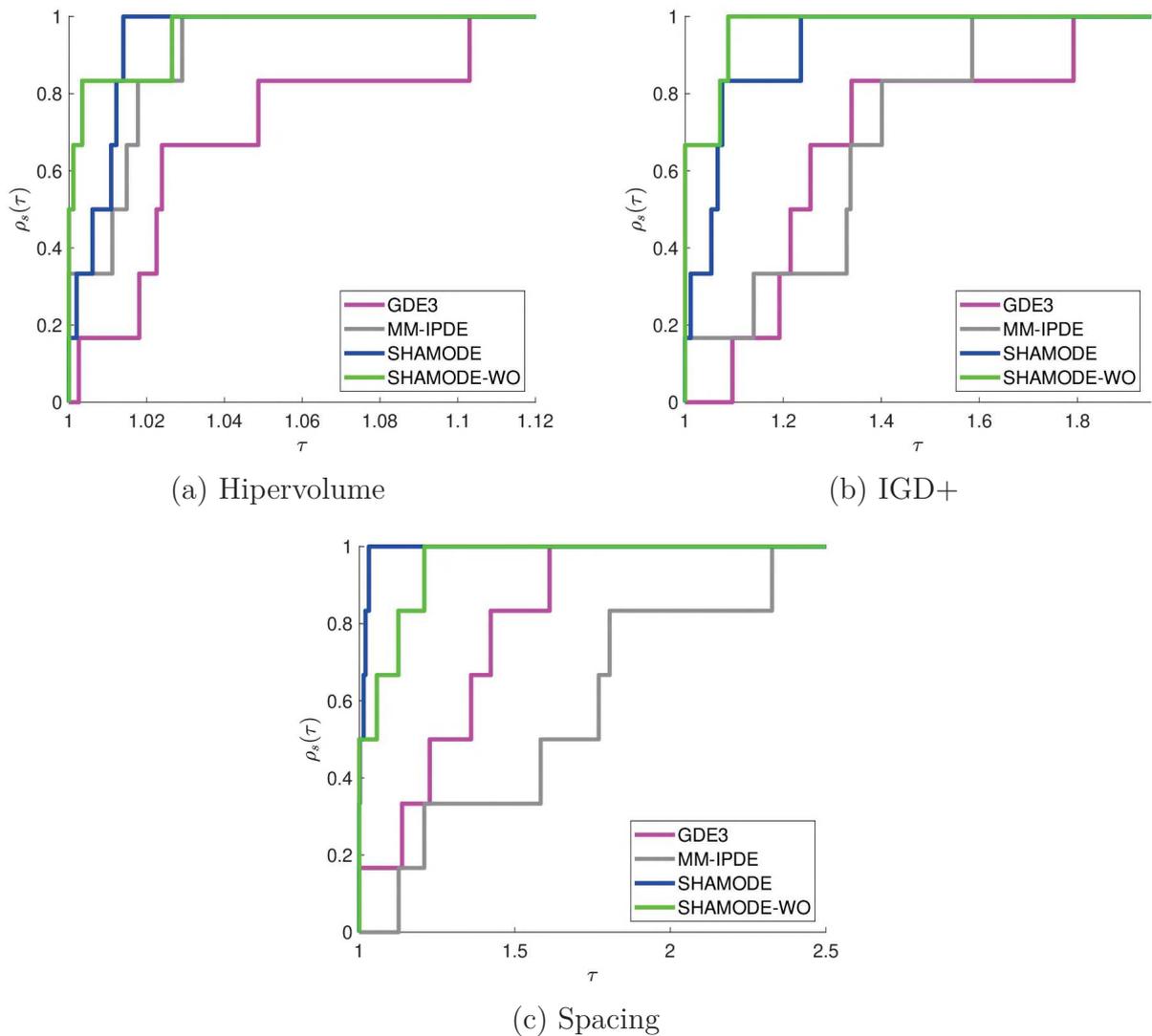
- d) O maior fator de carga crítica encontrado foi  $\lambda_{crt} = 93,3286$ , encontrado no cenário 3 do problema da Seção 5.3.5, o que é coerente, pois além da minimização do peso da estrutura ( $W$ ) e do máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ), a maximização do fator de carga ( $\lambda_{crt}$ ) é também um objetivo.
- e) O menor deslocamento horizontal máximo inter-pavimentos encontrado entre as soluções extraídas foi  $d_{max} = 1,0$  mm, encontrado nos cenários 3 dos problemas das Seções 5.3.1, 5.3.4 e 5.3.5. Este resultado também está dentro do esperado, pois apesar de não ser função-objetivo, o máximo deslocamento inter-pavimentos está diretamente ligado ao máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ), cuja minimização é um objetivo nestes problemas.

No que se diz respeito às orientações dos pilares, é notável que há configurações predominantes em cada um problemas. Também é possível perceber que algumas delas se mostraram interessantes em mais de um dos problemas apresentados. Dentre elas, a configuração  $[\dashv \dashv \mathbf{I} \mathbf{I}]$  se mostrou competitiva em todos os problemas analisados, representado 48% de todas as soluções salvas nos experimentos apresentados nessa Seção. Além disto, esta configuração está presente em 67% das soluções extraídas. Em seguida, pode-se citar também a configuração  $[\mathbf{I} \dashv \mathbf{I} \dashv]$ , que representa 36% das soluções salvas pelas meta-heurísticas e 28% das soluções extraídas. No entanto a maior força desta configuração está nas soluções em que a maximização do fator de carga crítica ( $\lambda_{crt}$ ) é um objetivo com peso de importância mais elevado.

Pelos motivos apresentados, nesta estrutura em específico é possível recomendar para o tomador de decisões a configuração  $[\dashv \dashv \mathbf{I} \mathbf{I}]$  quando for de seu desejo uma solução econômica, mas que apresente bom desempenho estrutural de maneira geral. Caso o principal objetivo deste tomador de decisões seja aumentar a estabilidade da estrutura, a configuração  $[\mathbf{I} \dashv \mathbf{I} \dashv]$  deve ser recomendada. Esta metodologia pode ser aplicada em outros pórticos para recomendar as melhores orientações para o tomador de decisões.

Em relação ao desempenho dos algoritmos, é possível fazer considerações relevantes. Na Figura 52 é possível visualizar os perfis de desempenho deste conjunto de problemas considerando como indicadores de desempenho o hipervolume (Figura 52a), o  $IGD+$  (Figura 52b) e o *spacing* (Figura 52c). Na Tabela 25, estão indicadas as áreas normalizadas sob as curvas dos perfis de desempenho. A partir dela, percebe-se que o desempenho geral dos algoritmos SHAMODE e SHAMODE-WO foi melhor do que o dos algoritmos GDE3 e MM-IPDE. A meta-heurística SHAMODE-WO venceu em relação ao hipervolume e ao  $IGD+$ . No entanto, SHAMODE possui soluções mais uniformemente espaçadas, pois vence em relação ao *spacing*. Estes resultados confirmam as análises feitas nas Sub-seções, onde SHAMODE e SHAMODE-WO, de maneira geral, também apresentaram os melhores resultados.

Figura 52 - Perfis de desempenho dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 25 – Áreas normalizadas sob as curvas do perfis de performance dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós

	Hipervolume	IGD+	Spacing
GDE3	0,68016	0,62305	0,78574
MM-IPDE	0,92871	0,64429	0,52450
SHAMODE	0,97608	0,93818	1,00000
SHAMODE-WO	1,00000	1,00000	0,95880

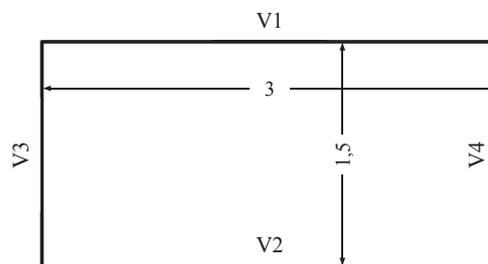
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

#### 5.4 SEGUNDO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS

A fim de se testar a parametrização adotada para posicionamento automático de pilares, foi proposto um exemplo preliminar onde o pórtico a ser otimizado é composto por 4 pavimentos. Cada pavimento, de pé-direito de 3m, é formado por uma quadro de 1,5 m por 3 m, delimitado por quatro vigas, como ilustrado na Figura 53. Neste problema os algoritmos buscam encontrar, sob o espaço das vigas, a melhor posição possível de 4 pilares. O objetivo deste exemplo é validar a metodologia de posicionamento automático das colunas. Por se tratar de um problema de pouca complexidade, é sabido que a configuração que apresentaria os menores deslocamentos verticais nodais seria aquela com os pilares posicionados no quatro cantos. Como a minimização destes deslocamentos será tratada como objetivo, se esta configuração for encontrada, está validada a metodologia. Caso o objetivo fosse por exemplo, a uniformização de esforços, esta provavelmente não seria a configuração encontrada [21].

Além das posições dos pilares, as variáveis de projeto são um perfil metálico a ser atribuído às vigas e um a ser atribuído aos pilares. As orientações dos quatro pilares em relação aos seus eixos principais também são variáveis de projeto.

Figura 53 - Planta baixa do pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento (dimensões em metros)



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Neste problema, há um total de 10 variáveis de projeto, dadas por  $\mathbf{x} = \{x_{P1}, \dots, x_{P4}, O_1, \dots, O_4, P, V\}$ , onde  $O_i$  e  $x_{P_i}$  representam, respectivamente, as orientações e posições dos pilares;  $P$  e  $V$  são índices inteiros que apontam os perfis designados para todos os pilares e para todas as vigas do pórtico, respectivamente.

As cargas gravitacionais foram contabilizadas sobre todos os pavimentos do pórtico, como descrito na Seção 5.1.1, considerando a presença de lajes de 12 cm de espessura. As cargas de vento foram consideradas nas fachadas ilustradas pela Figura 54. Os valores das cargas foram calculados como descrito na Seção 5.1.2. Utilizando a Equação 5.1.2, considerando pavimentos de altura  $h_{pav}=3$  m, encontra-se que  $Q_v = 1363,91$  N/m agindo lateralmente nas vigas do último pavimento e  $Q_v = 2727,82$  N/m nas dos demais.

Este pórtico foi otimizado em um problema onde os objetivos são a minimização

Figura 54 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

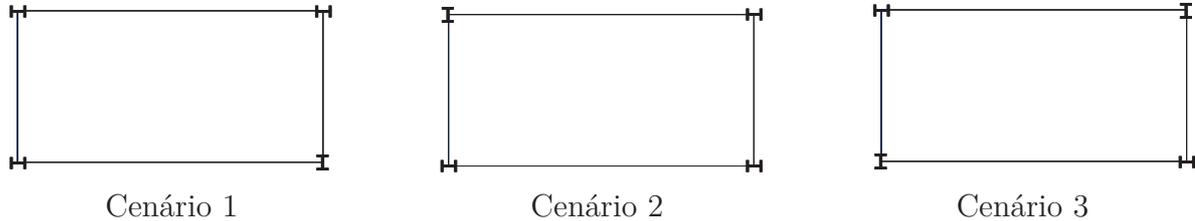
de peso, a minimização de deslocamentos verticais nodais totais e a maximização da primeira frequência natural de vibração. Os parâmetros de evolução diferencial adotados no GDE3 foram: taxa de cruzamento  $C_r = 0,4$ , probabilidade de mutação  $M = 0,1$  e fator de escalonamento  $F = 0,4$ . Nos algoritmos MM-IPDE, SHAMODE e SHAMODE-WO, estes parâmetros são calculados automaticamente. Dez execuções independentes com 200 gerações e populações de 50 vetores candidatos foram adotados no processo evolutivo. Ao final de cada execução de cada uma das três meta-heurísticas, 70 soluções não-dominadas são salvas em um arquivo externo, o que resulta em um total de 2800 soluções. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$
- Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$
- Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

Assim como nos problemas anteriores,  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura, e seus valores nos 3 cenários foram 0,75; 0,5 e 0,25. A importância restante foi distribuída de maneira igual entre  $w_2$  e  $w_3$ , que não são conflitantes entre si e representam os pesos de importância da minimização dos deslocamentos nodais verticais totais e a maximização da primeira frequência natural de vibração, respectivamente.

As 2800 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 56, assim como as soluções extraídas pela tomada de decisão multi-critério. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 26. As orientações e posições dos pilares das soluções extraídas, representadas em planta baixa, estão representadas na Figura 55.

Figura 55 - Plantas baixas representando as orientações dos pilares das soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 26 é possível observar que, assim como nos outros problemas já apresentados, a estrutura mais leve entre as três extraídas foi encontrada no cenário 1 ( $W = 3768$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 6079$  kg no cenário 3, 61% maior do que no cenário 1).

Tabela 26 – Soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento

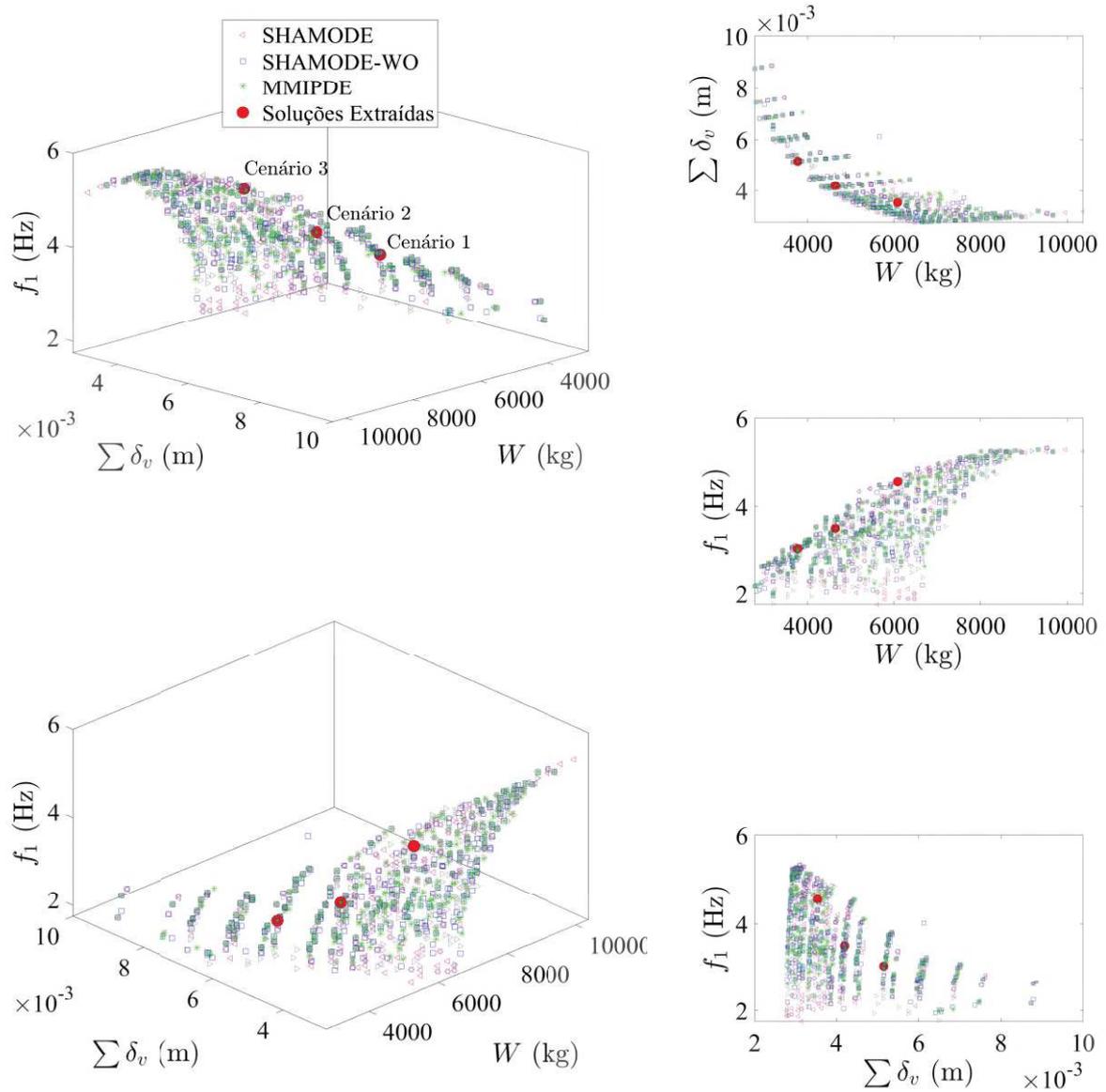
Cenário	1	2	3
Perfis W			
Pilares	250x62	310x79	310x97
Vigas	250x28.4	310x32.7	310x44.5
Valores das restrições e funções objetivo			
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$	0,4724	0,4021	0,1961
$V_{max}(\mathbf{x})$	0,1324	0,1179	0,0786
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	4,2	3,1	1,4
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)	<b>3,0363</b>	<b>3,4985</b>	<b>4,5619</b>
$\lambda_{crt}(x)$	52,0982	78,3858	150,8742
$\delta_{max}(x)$ (mm)	12,3	9,3	4,5
$\sum \delta_v(\mathbf{x})$ (mm)	<b>5,2</b>	<b>4,2</b>	<b>3,5</b>
$W(\mathbf{x})$ (kg)	<b>3768</b>	<b>4636</b>	<b>6079</b>
Meta-heurística	SHAMODE-WO/MM-IPDE	SHAMODE-WO	GDE3

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Em relação à soma dos deslocamentos verticais nodais, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\sum \delta_v = 5,2$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\sum \delta_v(\mathbf{x})$  diminui ( $\sum \delta_v = 3,5$  mm no cenário 3, 33% menor do que no cenário 1).

Quanto à primeira frequência natural de vibração, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $f_1 = 3,0363$  Hz. Com o aumento do peso de

Figura 56 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

importância  $w_3$ , o valor de  $f_1(\mathbf{x})$  aumenta ( $f_1 = 4,5619$  Hz no cenário 3, 50% maior do que no cenário 1).

Assim como nos exemplos já analisados, o aumento do peso levou a uma melhora do comportamento estrutural. Isso é refletido pela diminuição dos valores de  $LRFD_{max}(\mathbf{x})$ ,  $V_{max}(\mathbf{x})$ ,  $d_{max}(\mathbf{x})$ ,  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  e pelo aumento no valor de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$ .

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 27. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 28 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 27 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
GDE3	0,66122	0,00278	0,01899	0,00200	0,03780	0,00435
MM-IPDE	0,65139	0,00861	0,01970	0,00247	0,04704	0,00831
SHAMODE	0,63610	0,00871	0,02485	0,00331	0,05365	0,00744
SHAMODE-WO	0,63991	0,01063	0,02330	0,00275	0,04972	0,00768

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 28 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência de vibração no pórtico de 4 vigas e 4 pilares por pavimento

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
GDE3	MM-IPDE	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
GDE3	SHAMODE	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
GDE3	SHAMODE-WO	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
MM-IPDE	SHAMODE	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
MM-IPDE	SHAMODE-WO	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
SHAMODE	SHAMODE-WO	$\times$	$\times$	$\times$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as medidas de desempenho e os teste de Wilcoxon para este problema, foi possível observar que os algoritmos GDE3 e MM-IPDE tiveram desempenho significativamente melhor que SHAMODE e SHAMODE-WO em relação ao hipervolume e ao  $IGD+$ . Além disso, o GDE3 obteve um valor significativamente maior de  $\overline{HV}$  que o MM-IPDE. Já em relação ao  $spacing$ , é possível afirmar que o GDE3 obteve melhor

desempenho que todas as demais meta-heurísticas. No entanto, como é possível observar na Tabela 26, tanto o GDE3 como o MM-IPDE e SHAMODE-WO foram capazes de encontrar soluções que vieram a ser extraídas.

Apesar do objetivo desta seção não ser fazer uma análise detalhada das características estruturais, e sim validar a metodologia utilizada no posicionamento de pilares, os resultados encontrados na Tabela 26 foram coerentes. Além disso, como citado no início da seção, esta validação aconteceria caso os pilares fossem posicionados nos quatro cantos. Como foi este o caso, nas três soluções extraídas, está validada a metodologia e é possível aplicá-la agora para problemas de maior complexidade.

## 5.5 TERCEIRO CONJUNTO DE EXPERIMENTOS

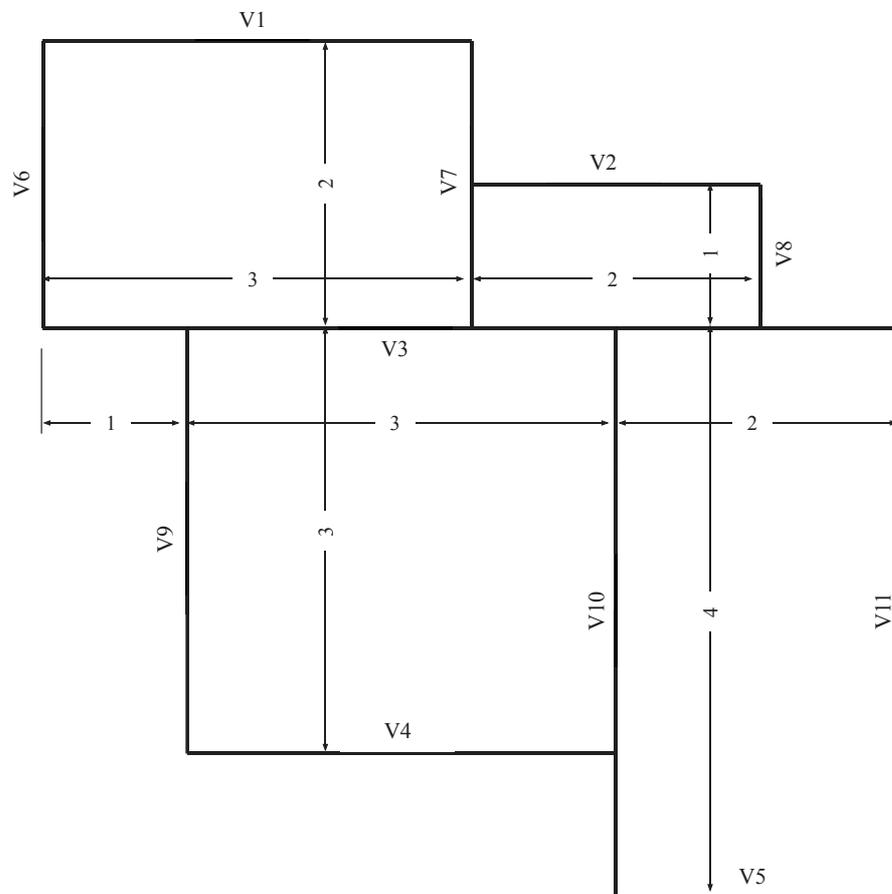
Este conjunto de experimentos trata da otimização de um pórtico espacial de quatro pavimentos e 11 vigas por pavimento, representado em planta baixa na Figura 57. Este pórtico foi otimizado em problemas multi-objetivo, considerando objetivos como minimização de peso, minimização de deslocamentos verticais nodais totais, minimização do máximo deslocamento horizontal, maximização da primeira frequência natural de vibração e maximização do fator de carga crítica. O pé direito da edificação é de 3 m. Neste problema os algoritmos buscam encontrar, sob o espaço das vigas a melhor posição possível de 9 pilares. Além das posições dos pilares, as variáveis de projeto são os perfis metálicos atribuídos às vigas e pilares e suas orientações em relação aos seus eixos principais.

Neste problema o agrupamento de pilares e vigas foi feito automaticamente, como mostrado na Seção 4.2. O número máximo de perfis diferentes a serem designados para as vigas ( $m_V$ ) foi definido como 4 e para os pilares ( $m_P$ ) foi definido como 3. Os perfis se repetem em todos os 4 pavimentos. A orientação dos pilares também é constante ao longo dos quatro pavimentos. Isto leva a um total de 45 variáveis de projeto, dadas por  $\mathbf{x} = \{x_{P1}, \dots, x_{P9}, O_1, \dots, O_9, M_{P1}, \dots, M_{P3}, P_1, \dots, P_9, M_{V1}, \dots, M_{V4}, V_1, \dots, V_{11}\}$ , onde  $O_i$  e  $x_{P_i}$  representam, respectivamente, as orientações e posições dos pilares;  $P_i$  e  $V_i$  são índices inteiros que apontam em qual grupo os pilares e vigas se encontram e  $M_{V_i}$  e  $M_{P_i}$  indicam qual os perfis comerciais designado para cada um destes grupos.

São apresentados nesta Seção problemas de otimização estrutural multi-objetivo. Assim como nas Seções anteriores, a minimização do peso da estrutura sempre é um objetivo a ser minimizado. Além disso, em todos os problemas a seguir, a minimização dos deslocamento nodais verticais totais também é um objetivo. Como a posição dos pilares é uma variável, o que pode levar à formação de balanços, é essencial que as flechas nas vigas sejam minimizadas a fim de evitar efeitos estruturais indesejados como trincas nas paredes de alvenaria.

As cargas gravitacionais foram contabilizadas sobre todos os pavimentos do pórtico,

Figura 57 - Planta baixa do pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento (dimensões em metros)



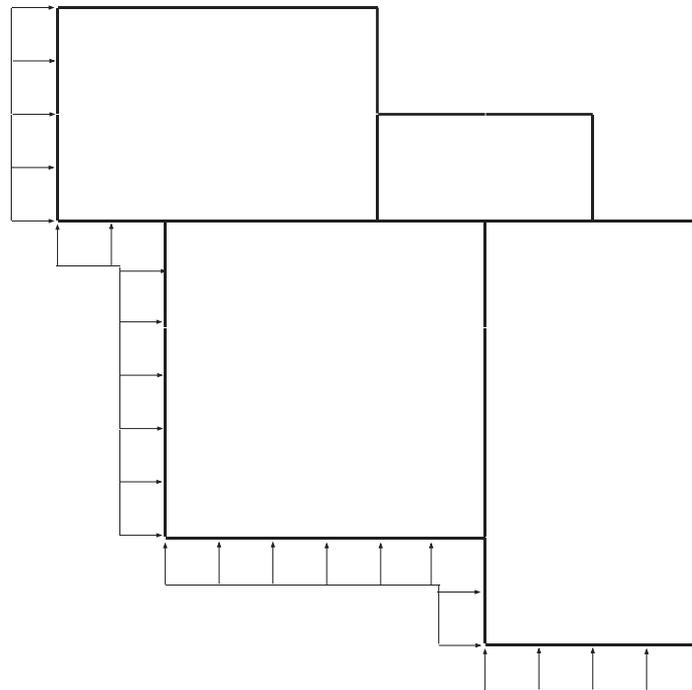
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

como descrito na Seção 5.1.1, considerando a presença de lajes de 12 cm de espessura. As cargas de vento foram consideradas nas fachadas ilustradas pela Figura 58. Os valores das cargas foram calculados como descrito na Seção 5.1.2. Utilizando a Equação 5.1.2, considerando pavimentos de altura  $h_{pav}=3$  m, encontra-se que  $Q_v = 1363,91$  N/m agindo lateralmente nas vigas do último pavimento e  $Q_v = 2727,82$  N/m nas dos demais.

Nos problemas apresentados a seguir, os algoritmos utilizados foram MM-IPDE, SHAMODE e SHAMODE-WO. Mesmo buscando, por tentativa e erro, valores de  $F$  e  $Cr$  que levariam a um bom desempenho do GDE3, este algoritmo não conseguiu obter um número razoável de soluções factíveis por execução. Por este motivo, ele não é apresentado nas Sub-seções a seguir.

Em todos os exemplos desta Seção, dez execuções independentes com 400 gerações e populações de 50 vetores candidatos foram adotados no processo evolutivo. Os parâmetros de evolução diferencial dos algoritmos foram calculados automaticamente. 70 soluções não-dominadas foram salvas a cada execução, levando a um total de 2100 soluções salvas por problema.

Figura 58 - Fachadas sujeitas a cargas de vento no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

### 5.5.1 Minimização do peso da estrutura e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais

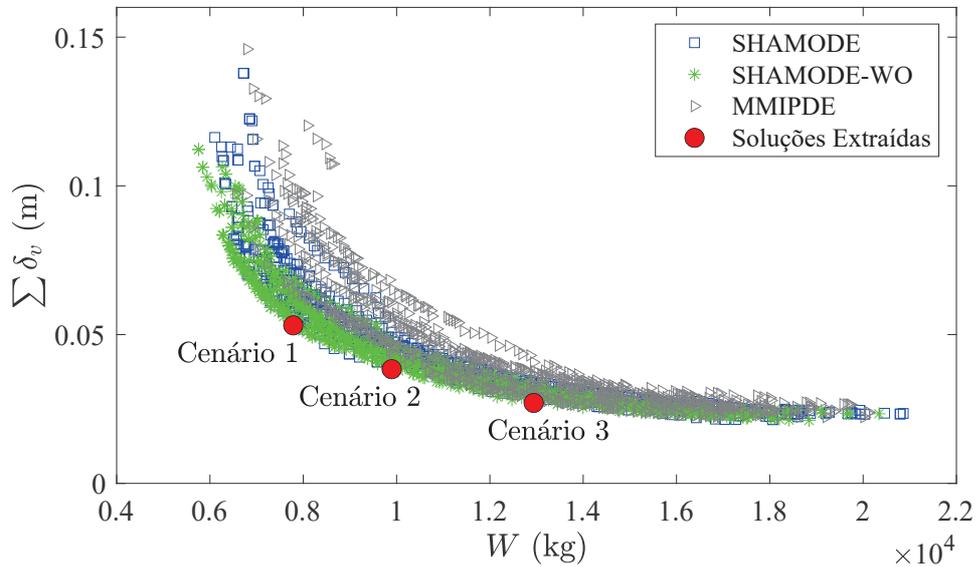
O primeiro caso estudado neste conjunto de experimentos foi um POE de dois objetivos. Nele, os dois objetivos são a minimização do peso da estrutura e a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$  e  $w_2 = 0,25$
- b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$  e  $w_2 = 0,5$
- c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$  e  $w_2 = 0,75$

onde  $w_1$  e  $w_2$  são os pesos de importância das funções-objetivo conflitantes: minimização do peso da estrutura e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais, respectivamente.

As 2100 soluções salvas pelas meta-heurísticas estão representadas na Figura 59, com destaque para as soluções extraídas. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 29. As plantas baixas das soluções extraídas nos cenários 1, 2 e 3 estão representadas nas Figuras 60, 61 e 62, respectivamente.

Figura 59 - Frentes de Pareto do problema multi-objetivo no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



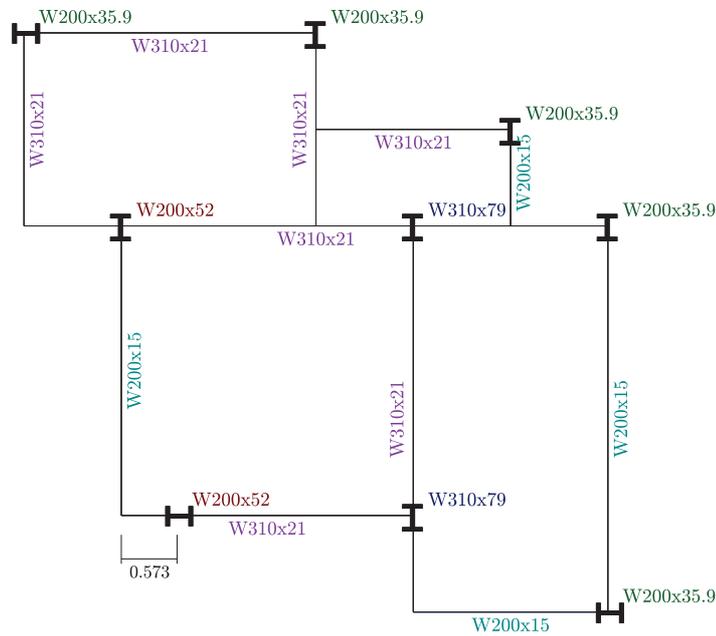
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 29 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Cenário	1	2	3
Grupos		Perfis W	
P1	200x35,9	200x46,1	200x52
P2	200x52	200x86	360x110
P3	310x79	360x91	310x125
V1	200x15	200x15	150x13
V2	310x21	360x32.9	460x52
V3	310x21	310x21	310x21
V4	200x22.5	250x25.3	530x82
Valores das restrições e funções objetivo			
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$	0,9939	0,9627	0,7028
$V_{max}(\mathbf{x})$	0,2017	0,2063	0,1889
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	5,7	5,0	4,3
$f_1(x)$ (Hz)	1,5609	1,7673	2,0172
$\lambda_{crt}(x)$	16,0752	23,1680	30,0628
$\delta_{max}(x)$ (mm)	15,7	13,4	11,9
$\Sigma \delta_v(\mathbf{x})$ (mm)	<b>53,1</b>	<b>38,4</b>	<b>27,0</b>
$W(\mathbf{x})$ (kg)	<b>7780</b>	<b>9895</b>	<b>12939</b>
Meta-heurística	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO

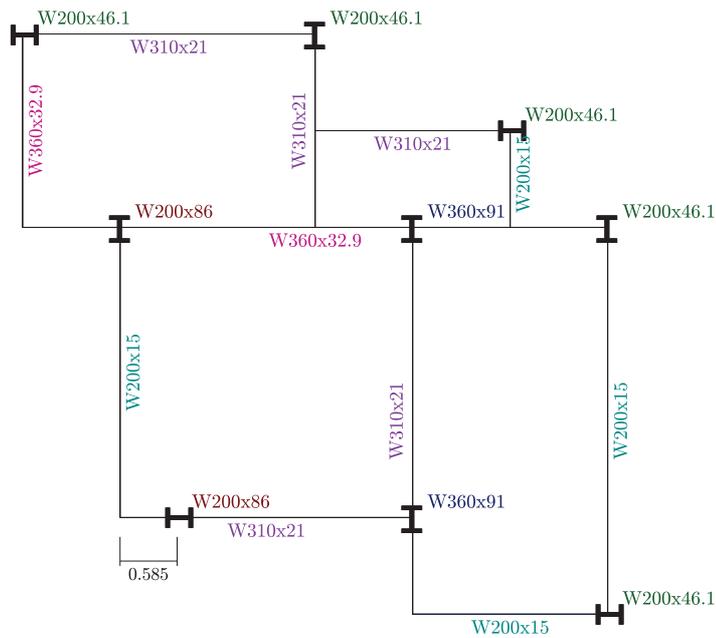
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 60 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



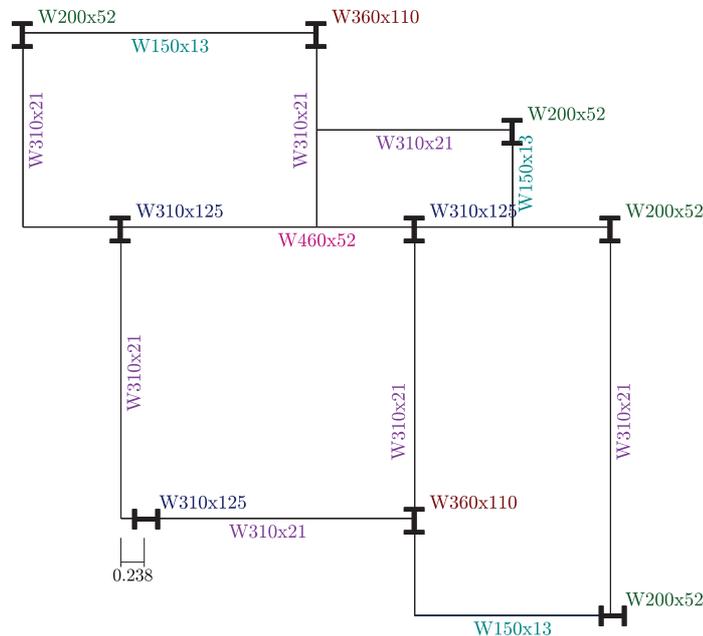
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 61 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 62 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

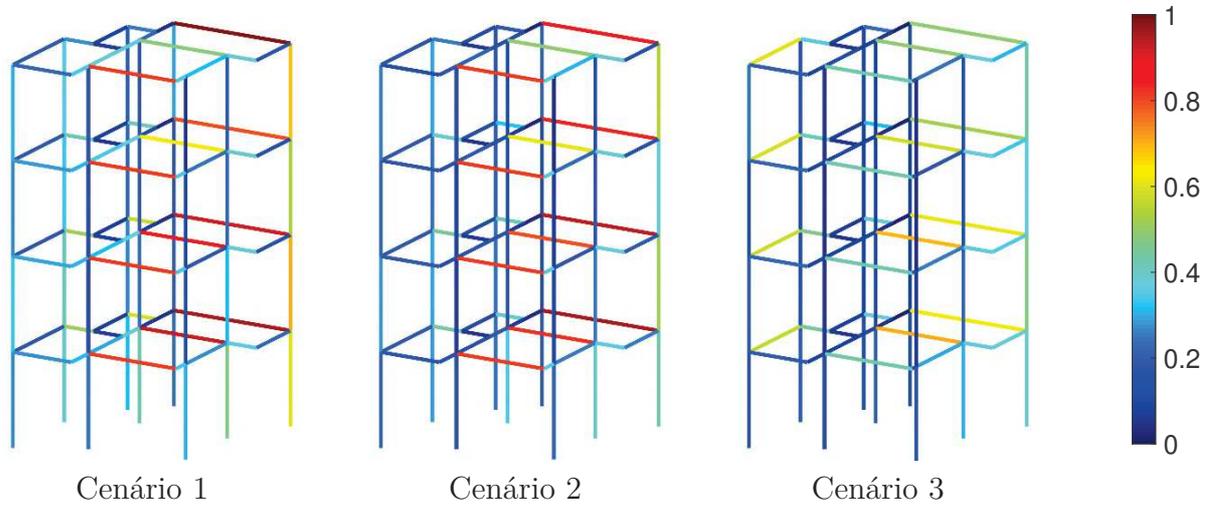
Com os resultados mostrados na Tabela 29 é possível chegar a algumas conclusões. Como esperado, a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 7785$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 12939$  kg no cenário 3, 66% maior do que no cenário 1).

Em relação aos deslocamentos verticais totais, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\sum \delta_v = 53,1$  mm. Novamente, na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\sum \delta_v$  diminui ( $\sum \delta_v = 27,0$  mm no cenário 3, 62% menor do que no cenário 1).

Assim como nos outros problemas analisados, na medida em que o peso da estrutura aumenta, de maneira geral, ela se torna mais rígida, o que leva a um melhor comportamento estrutural. Isso é ilustrado pelo fato dos valores de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  e  $f_1(\mathbf{x})$  aumentarem e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  e  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminuírem. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 63 e 64, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

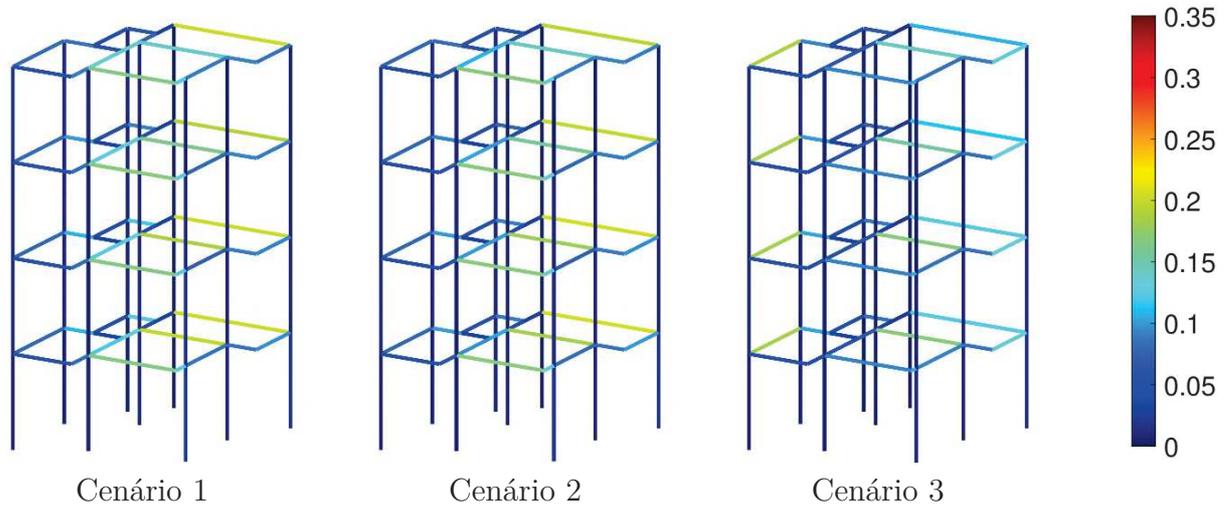
Além disso, foi possível observar que, mesmo que na formulação do problema tenha sido permitido um número máximo de quatro perfis diferentes para as vigas, no cenário 1 a solução extraída possui apenas dois perfis diferentes. Nas soluções extraídas nos cenários 2 e 3, há a presença de três perfis diferentes.

Figura 63 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 64 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



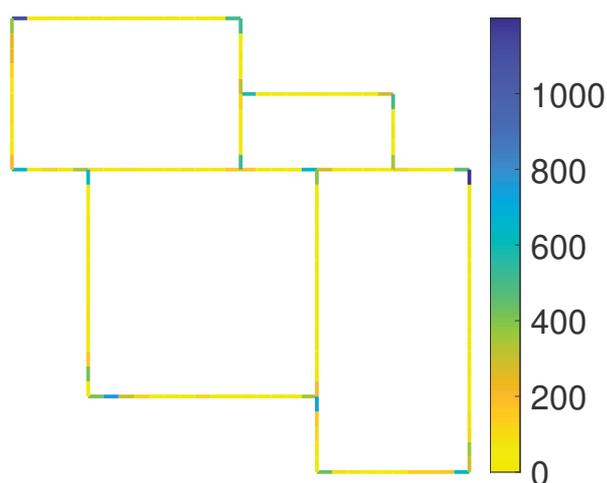
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No que se diz respeito às posições dos pilares, nas três soluções extraídas, 8 dos 9 pilares foram posicionados na união de duas ou mais vigas. O único pilar que não está posicionado em um canto se encontra sob a viga V4. As orientações dos pilares das soluções extraídas nos cenários 1 e 2 são idênticas. A solução extraída no cenário 3 também possui as orientações de pilares iguais às soluções extraídas nos demais cenários, exceto pela orientação do pilar posicionado no encontro de V2 e V8.

A Figura 65 mostra, dentro das 2100 soluções salvas pelas meta-heurísticas, quantas posicionam pilares em cada intervalo de 20 cm do espaço de busca. É possível perceber que, de maneira geral, há uma concentração maior de pilares nos cantos, resultado que reforça as observações feitas sobre as três soluções extraídas. Além disso, em projetos estruturais feitos sem o auxílio de posicionamento automático de pilares é esperado que o projetista posicione as colunas sob os encontros das vigas, assim como encontrado pelas meta-heurísticas.

A exceção para este fato é o canto de encontro de V4 e V9. A quantidade de pilares posicionados de 20 a 60 cm deste encontro são maiores do que a quantidade de pilares posicionados no canto em si. Um resultado similar foi encontrado também nas soluções extraídas.

Figura 65 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 30. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 31 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 30 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
Meta-heurística						
MM-IPDE	0,75997	0,03636	0,07625	0,02811	0,01201	0,00302
SHAMODE	0,81141	0,03134	0,04177	0,02023	0,00885	0,00161
SHAMODE-WO	0,83839	0,02654	0,02446	0,01517	0,00795	0,00139

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 31 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso e minimização dos deslocamentos verticais nodais totais no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
MM-IPDE	SHAMODE	✓	✓	✓
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✓	✓	✓
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✓	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que, neste problema, a maior média de hipervolumes ( $\overline{HV}$ ) foi a do algoritmo SHAMODE-WO. No entanto este valor só é significativamente maior do que o valor de  $\overline{HV}$  para o GDE3. Já em relação ao  $IGD+$ , o GDE3 apresentou o melhor desempenho, mas essa melhora só é significativa quando comparada com o valor de  $\overline{IGD+}$  encontrado para o SHAMODE-WO. No entanto, em relação ao *spacing*, ele apresenta um desempenho significativamente pior que os demais. Novamente, não há diferença significativa entre SHAMODE e SHAMODE-WO e entre GDE3 e MM-IPDE em nenhum dos indicadores. Além disso, como mostrado na Tabela 29, as três soluções extraídas foram obtidas pelo algoritmo SHAMODE-WO.

### 5.5.2 Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal

O próximo exemplo foi um POE de três objetivos. Nele, além da minimização do peso da estrutura e a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais serem objetivos, procura-se também minimizar o máximo deslocamento horizontal. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$
- Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$

c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

onde  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura. O peso de importância restante foi distribuído igualmente entre os objetivos conflitantes com a minimização de peso: minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $w_2$ ) e minimização do máximo deslocamento horizontal ( $w_3$ ).

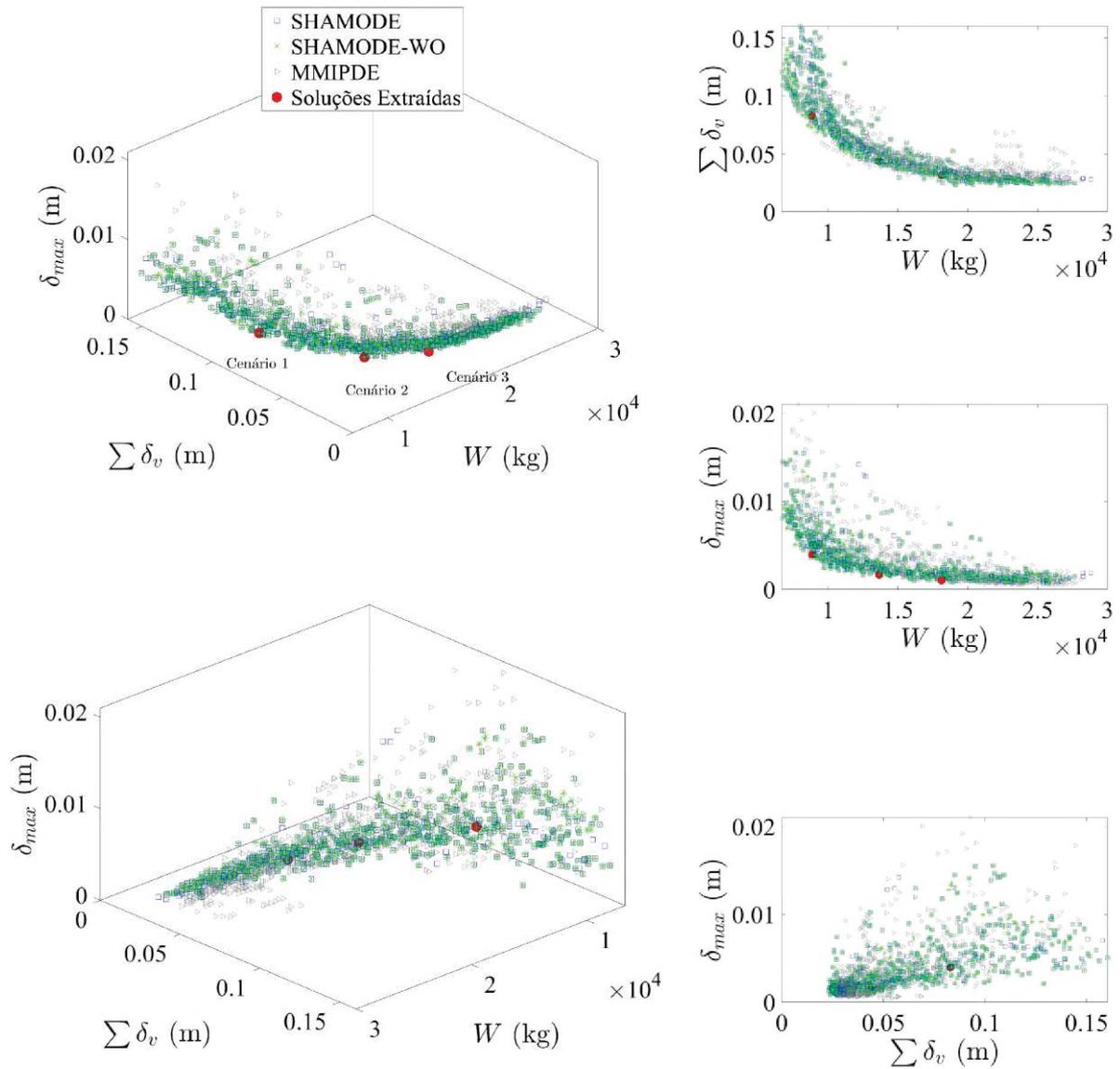
As 2100 soluções estão representadas na Figura 66. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 32. As plantas baixas das soluções extraídas nos cenários 1, 2 e 3 estão representadas nas Figuras 67, 68 e 69, respectivamente.

Tabela 32 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Cenário	1	2	3
Grupos	Perfis W		
P1	200x46,1	360x91	310x117
P2	200x35,9	360x122	310x117
P3	200x71	200x46,1	250x59
V1	200x22,3	200x15	150x18
V2	310x23,8	360x51	310x38,7
V3	360x32,9	360x57,8	410x60
V4	250x17,9	310x28,3	460x52
Valores das restrições e funções objetivo			
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$	0,6598	0,7537	0,6294
$V_{max}(\mathbf{x})$	0,3016	0,1827	0,1710
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	2,6	1,0	0,6
$f_1(x)$ (Hz)	1,3658	2,1838	2,4006
$\lambda_{crt}(x)$	12,9132	39,7920	52,0340
$\delta_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	<b>3,9</b>	<b>1,6</b>	<b>1,0</b>
$\sum \delta_v(\mathbf{x})$ (mm)	<b>82,9</b>	<b>43,8</b>	<b>31,4</b>
$W(\mathbf{x})$ (kg)	<b>8843</b>	<b>13650</b>	<b>18100</b>
Meta-heurística	SHAMODE/SHAMODE-WO	SHAMODE/SHAMODE-WO	MMIPDE

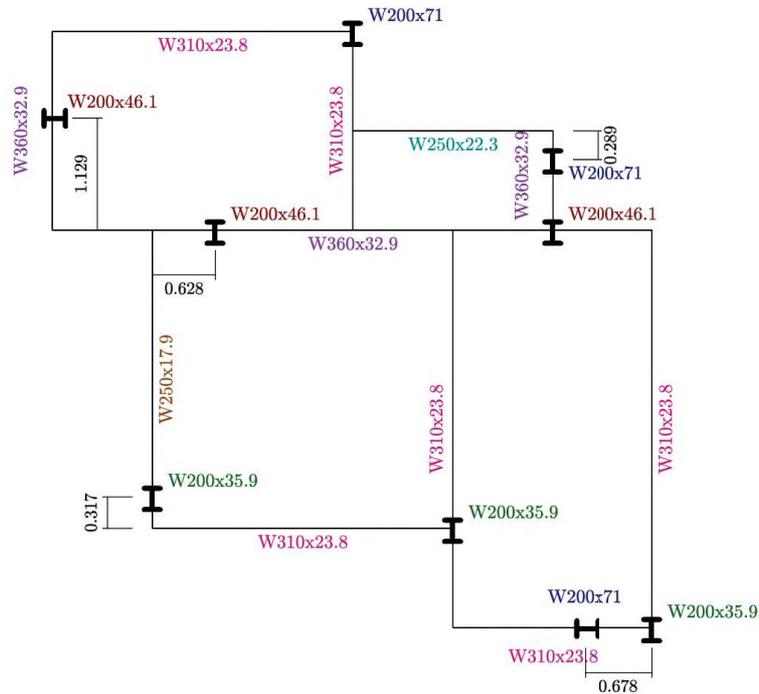
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 66 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



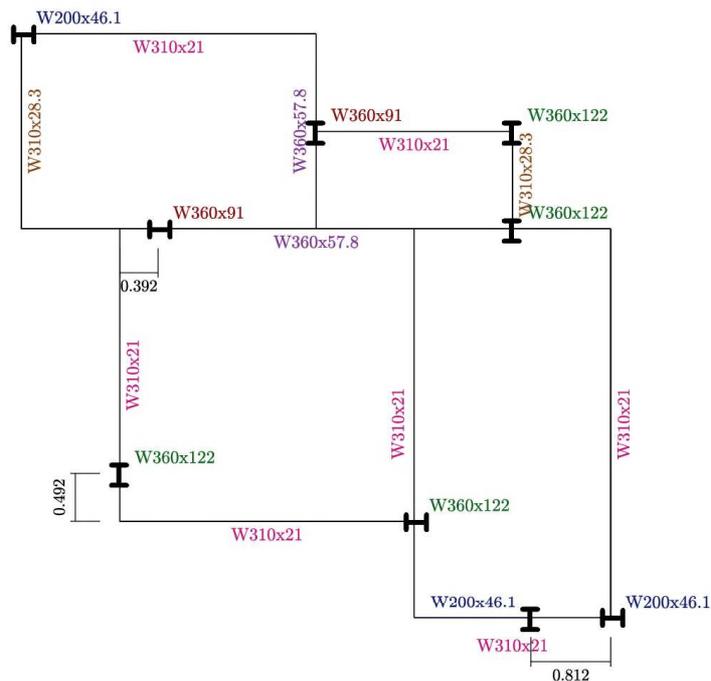
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 67 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



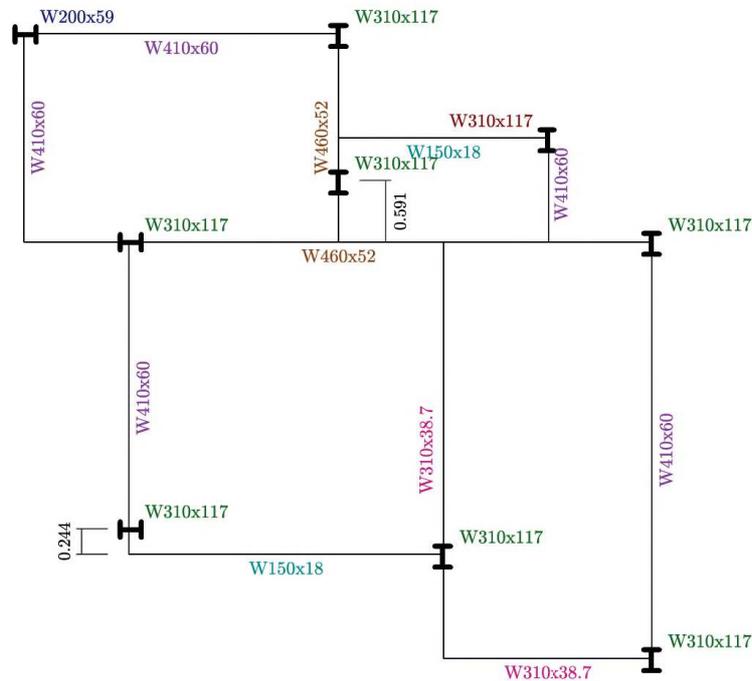
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 68 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 69 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

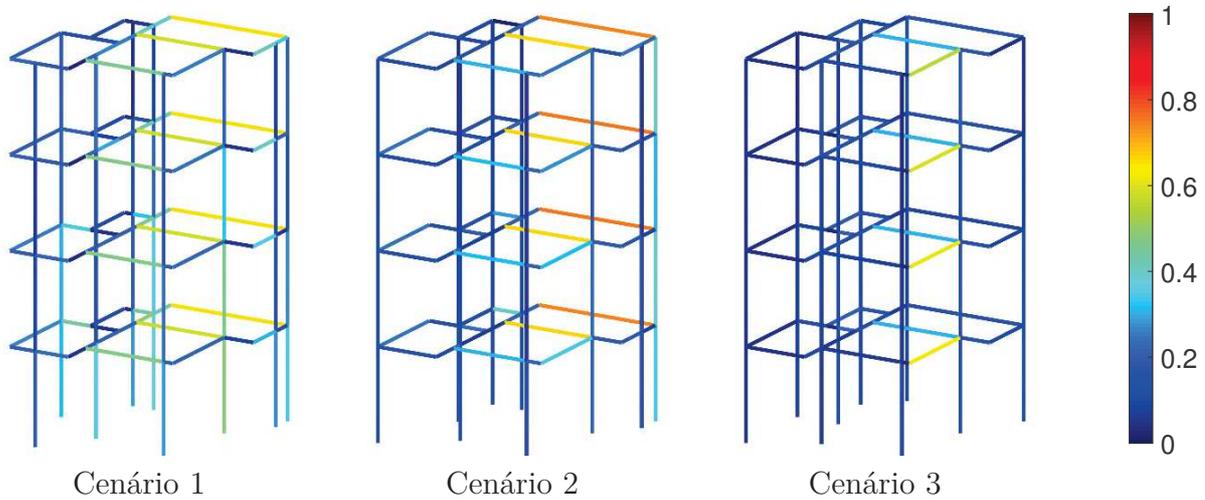
Analisando a Tabela 32 é possível observar que a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 8843$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 18100$  kg no cenário 3, 105% maior do que no cenário 1).

Em relação aos deslocamentos verticais totais, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\sum \delta_v = 82,9$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\sum \delta_v$  diminui ( $\sum \delta_v = 31,4$  mm no cenário 3, 62% menor do que no cenário 1).

Também é possível reparar que, em relação ao problema anterior, os valores dos pesos e dos deslocamentos verticais totais das soluções extraídas aumentaram, provavelmente devido a inserção de um novo objetivo (minimização do máximo deslocamento horizontal).

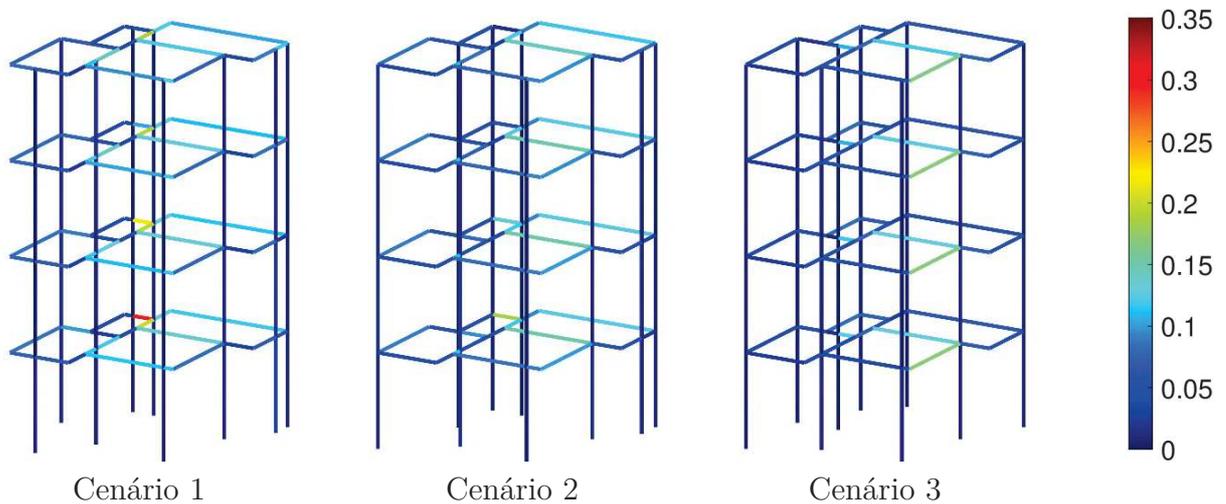
Em relação a este máximo deslocamento horizontal, os valores diminuíram em relação ao problema anterior, onde sua minimização não era objetivo. O valor encontrado na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\delta_{max} = 3,9$  mm. Além disso, na medida em que o peso de importância  $w_3$  aumenta, o valor de  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminui ( $\delta_{max} = 1,0$  mm no cenário 3, 74% menor do que no cenário 1).

Figura 70 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 71 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Assim como nos outros problemas analisados, na medida em que o peso da estrutura aumenta, de maneira geral, ela apresenta um melhor comportamento estrutural devido ao aumento da rigidez. Novamente, os valores de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  e  $f_1(\mathbf{x})$  aumentam e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  diminuem na medida em que aumenta o peso. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para

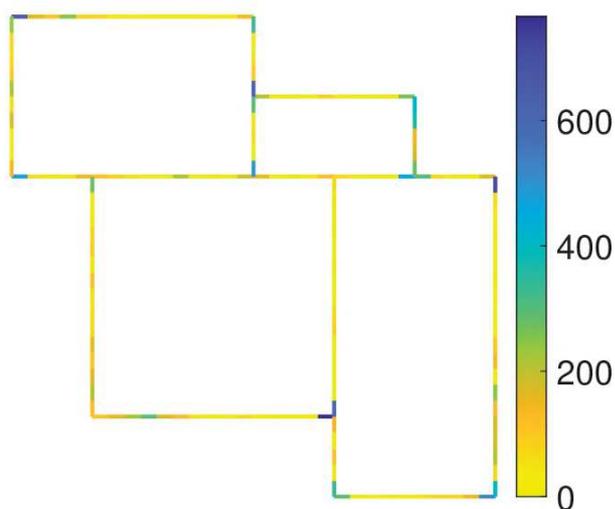
cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 70 e 71, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Além disso, foi possível observar que, mesmo que na formulação do problema tenha sido permitido um número máximo de quatro perfis diferentes para as vigas, no cenário 2 apenas apenas três perfis diferentes foram utilizados.

No que se diz respeito às posições dos pilares, na primeira solução extraída, apenas 4 dos 9 pilares foram posicionados na união de duas ou mais vigas. Esse número aumenta na medida em que a minimização dos deslocamentos verticais tem sua importância aumentada (no cenário 2 este número aumenta para 6 e no cenário 3, para 7). As únicas posições em comum nos três cenários são a união de V4 e V10 e a união de V5 e V11. Em relação a estes dois pilares, a orientação dos cenários 1 e 3 é idêntica.

A Figura 72 mostra, dentro das 2100 soluções salvas pelas meta-heurísticas, quantas posicionam pilares em cada intervalo de 20 cm do espaço de busca. É possível perceber que mesmo que haja uma concentração maior de pilares nos cantos, ela não é tão significativa quanto no problema anterior. Novamente, a quantidade de pilares posicionados nas proximidades do encontro de V4 e V9 é maior do que a quantidade de pilares posicionados no canto em si. As mesmas observações podem ser feitas sobre as soluções extraídas.

Figura 72 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais a minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções

independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 33. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 34 indicam se a diferença entre as médias foi significativa (✓) ou não (✗), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 33 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
Meta-heurística	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
MM-IPDE	0,74217	0,02026	0,05056	0,01413	0,04321	0,01536
SHAMODE	0,76291	0,02376	0,03412	0,01018	0,04309	0,01030
SHAMODE-WO	0,76821	0,02262	0,03201	0,00934	0,04143	0,01047

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 34 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e minimização do máximo deslocamento horizontal no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
MM-IPDE	SHAMODE	✓	✓	✗
MM-IPDE	SHAMODE-WO	✓	✓	✗
SHAMODE	SHAMODE-WO	✗	✗	✗

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que, neste problema, o algoritmo MM-IPDE foi significativamente pior que SHAMODE e SHAMODE-WO em relação ao hipervolume e ao  $IGD+$ . No entanto, em relação ao *spacing*, apesar de MM-IPDE ter o maior valor médio, essa diferença não pode ser considerada significativa. Mesmo assim a Tabela 32, mostra que o MM-IPDE foi capaz de encontrar uma das soluções extraídas.

### 5.5.3 Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração

O exemplo analisado foi um POE de três objetivos. Agora, além da minimização do peso da estrutura e a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais serem objetivos, o terceiro objetivo é a maximização da primeira frequência natural de vibração. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$

b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$

c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

onde  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura. O peso de importância restante foi distribuído igualmente entre os objetivos conflitantes com a minimização de peso: minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $w_2$ ) e maximização da primeira frequência natural de vibração ( $w_3$ ).

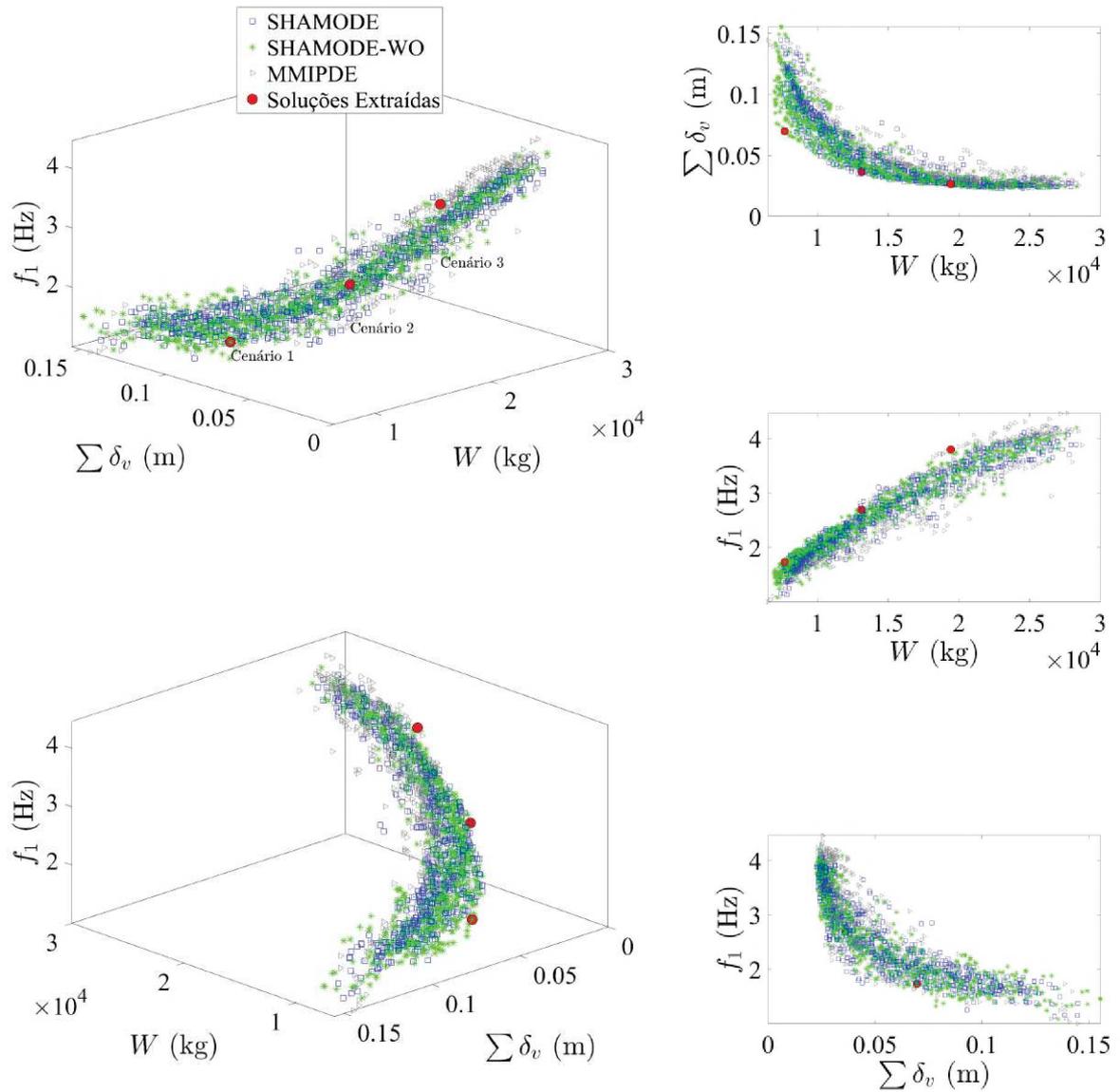
As 2100 soluções estão representadas na Figura 73. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 35. As plantas baixas das soluções extraídas nos cenários 1, 2 e 3 estão representadas nas Figuras 74, 75 e 76, respectivamente.

Tabela 35 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Cenário	1	2	3
Grupos	Perfis W		
P1	200x46,1	250x62	310x117
P2	200x46,1	310x93	250x89
P3	200x46,1	310x93	310x117
V1	310x21	250x32,7	530x74
V2	360x79	410x38,8	310x28,3
V3	310x21	360x32,9	460x52
V4	360x44	360x44	200x26,6
Valores das restrições e funções objetivo			
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$	0,8431	0,3964	0,3807
$V_{max}(\mathbf{x})$	0,1988	0,1229	0,1187
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	4,7	1,8	1,2
$f_1(\mathbf{x})$ (Hz)	<b>1,7347</b>	<b>2,6960</b>	<b>3,8017</b>
$\lambda_{crt}(x)$	20,2936	53,5553	109,3317
$\delta_{max}(x)$ (mm)	12,3	4,0	3,0
$\sum \delta_v(\mathbf{x})$ (mm)	<b>69,7</b>	<b>36,2</b>	<b>26,2</b>
$W(\mathbf{x})$ (kg)	<b>7701</b>	<b>13127</b>	<b>19418</b>
Meta-heurística	SHAMODE-WO	SHAMODE	MMIPDE

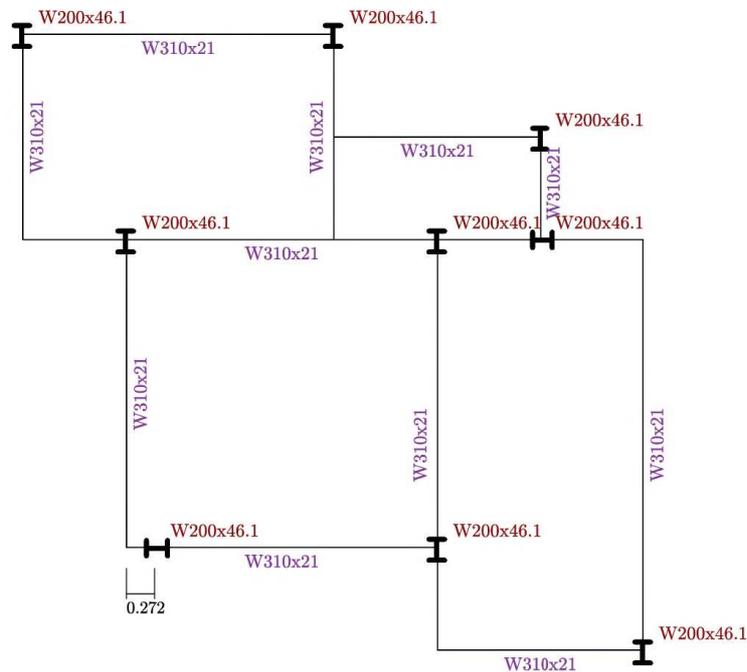
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 73 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



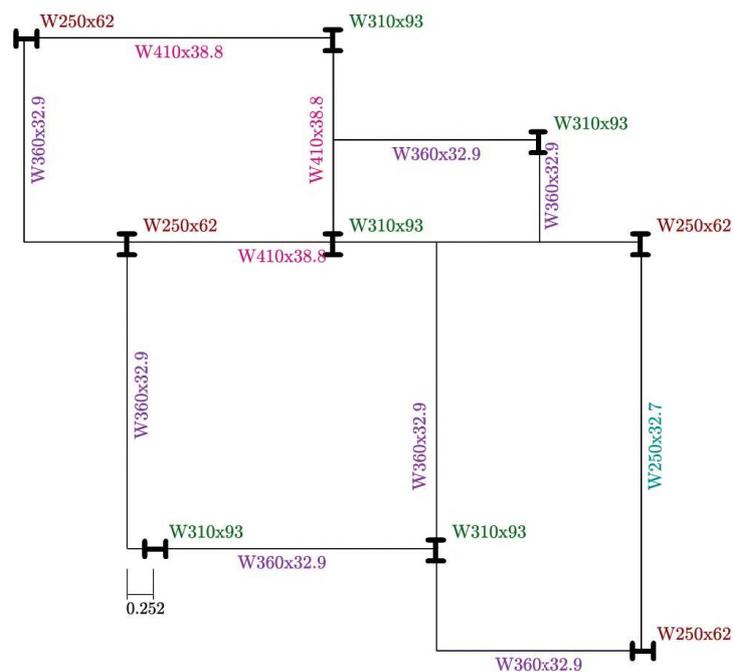
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 74 - Planta baixa da solução extraída no cenário 1 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



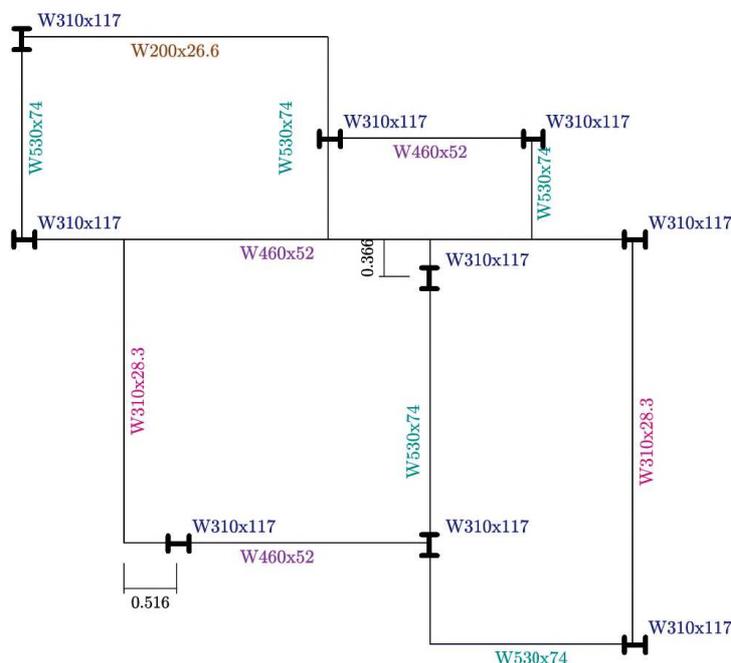
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 75 - Planta baixa da solução extraída no cenário 2 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 76 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



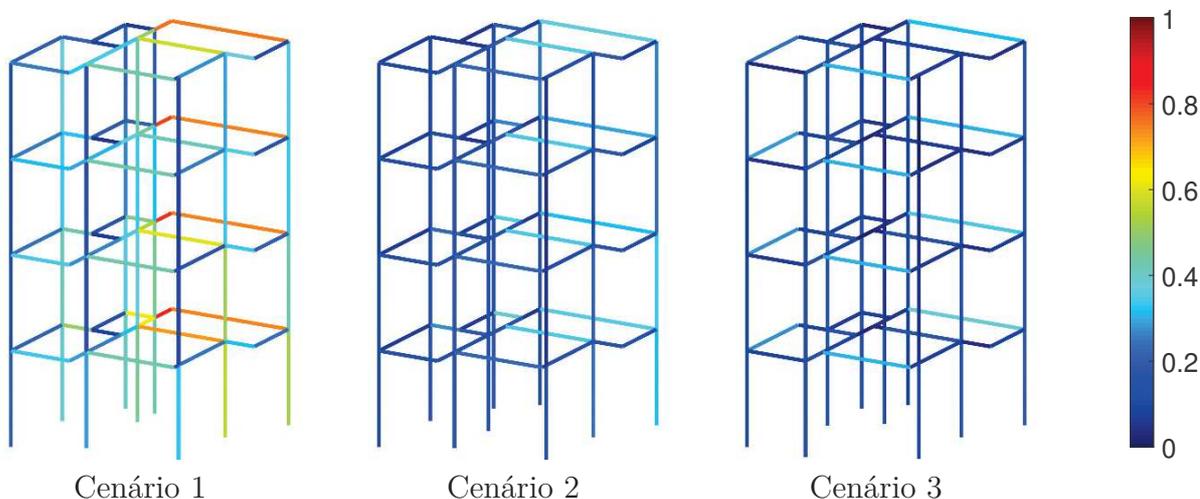
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 35 é possível observar que, assim como nos outros problemas, a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 7701$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 19418$  kg no cenário 3, 152% maior do que no cenário 1).

Em relação aos deslocamentos verticais totais, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\sum \delta_v = 69,7$  mm. Na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\sum \delta_v$  diminui ( $\sum \delta_v = 26,2$  mm no cenário 3, 62% menor do que no cenário 1).

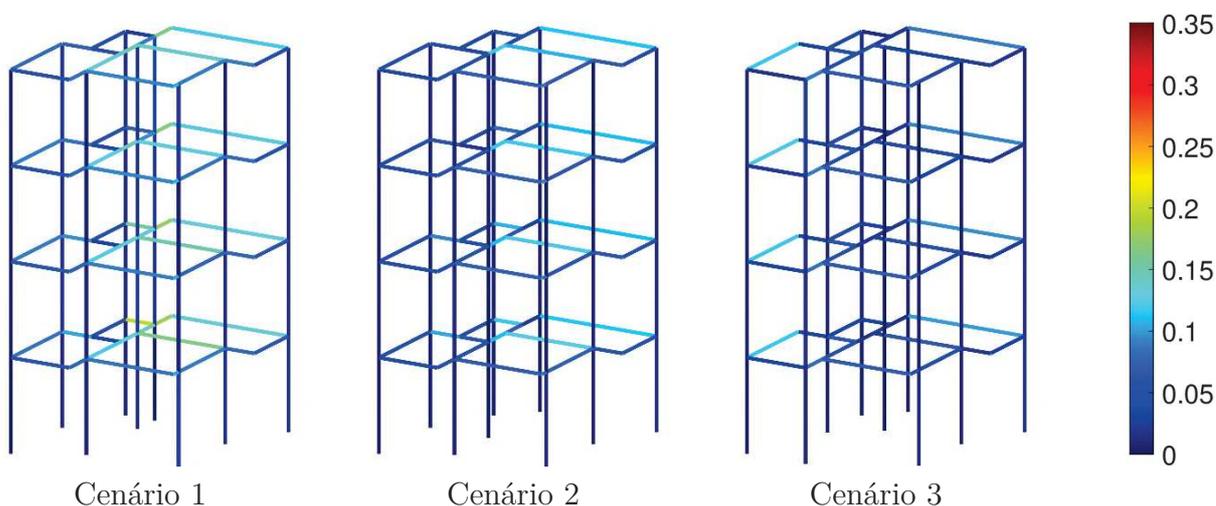
Em relação a primeira frequência natural de vibração, os valores aumentaram em relação aos problemas anteriores, onde sua minimização não era objetivo. O valor encontrado na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $f_1 = 1,7347$  Hz. Na medida em que o peso de importância  $w_3$  aumenta, o valor de  $f_1(\mathbf{x})$  aumenta ( $f_1 = 3,8017$  Hz no cenário 3, 119% maior do que no cenário 1).

Figura 77 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 78 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

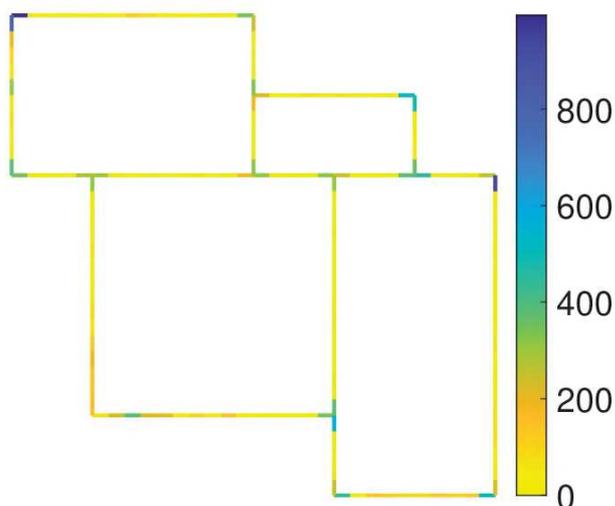
Assim como nos outros problemas analisados, na medida em que o peso da estrutura aumenta, de maneira geral, ela apresenta um melhor comportamento estrutural devido ao aumento da rigidez. Novamente, os valores de  $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$  aumentam e os valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  e  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  diminuem na medida em que aumenta o peso. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para

cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 70 e 71, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Além disso, nas três soluções extraídas não foram utilizados 3 perfis diferentes para vigas e 4 para pilares, como permitido pela formulação adotada. No que se diz respeito às posições dos pilares, na primeira e na segunda solução extraída, 8 dos 9 pilares foram posicionados na união de duas ou mais vigas. Na terceira solução extraída, este número cai para 7. Assim como no problema apresentado na Seção 5.5.1, nas três soluções extraídas um pilar foi posicionado ao longo de V4, entre 20 e 60 cm de seu encontro com V9. Há algumas posições em comum nos três cenários são: a união de V1 e V6, a união de V2 e V8, a união de V4 e V10 e a união de V5 e V11. Em relação a estes quatro pilares, o único que possui a mesma orientação nos três cenários é aquele posicionado no encontro de V4 e V10.

A Figura 79 mostra, dentro das 2100 soluções salvas pelas meta-heurísticas, quantas posicionam pilares em cada intervalo de 20 cm do espaço de busca. É possível perceber que mesmo que haja uma concentração maior de pilares nos cantos, ela não é tão significativa quanto no problema apresentado na Seção 5.5.1. Novamente, a quantidade de pilares posicionados nas proximidades do encontro de V4 e V9 é maior do que a quantidade de pilares posicionados no canto em si. As mesmas observações podem ser feitas sobre as soluções extraídas.

Figura 79 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 36. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 37 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 36 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica	Hipervolume		IGD+		Spacing	
Meta-heurística	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
MM-IPDE	0,51904	0,04316	0,07104	0,02351	0,03061	0,00708
SHAMODE	0,51844	0,03348	0,05437	0,02063	0,02899	0,00539
SHAMODE-WO	0,53105	0,02179	0,04477	0,01380	0,02928	0,00479

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 37 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização da primeira frequência natural de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica		Hipervolume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas		Resultados do teste de Wilcoxon		
MM-IPDE	SHAMODE	$\times$	$\times$	$\times$
MM-IPDE	SHAMODE-WO	$\times$	$\checkmark$	$\times$
SHAMODE	SHAMODE-WO	$\times$	$\times$	$\times$

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que, apesar do algoritmo SHAMODE-WO ter apresentado as melhores médias de hipervolume e  $IGD+$ , a única diferença significativa foi em relação a média do  $IGD+$  obtida pelo MM-IPDE. Em relação ao  $spacing$ , o algoritmo que teve melhor desempenho foi o SHAMODE. No entanto, a diferença em relação às outras meta-heurísticas não foi significativa. Na Tabela 35, é possível perceber que cada solução extraída foi encontrada por um algoritmo diferente.

#### 5.5.4 Minimização do peso da estrutura, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica

O último exemplo estudado nesta dissertação foi um POE de três objetivos. Além da minimização do peso da estrutura e a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais serem objetivos, o terceiro objetivo é a maximização do fator de carga crítica. Entre as soluções salvas pelas meta-heurísticas, três foram extraídas pela tomada de decisão multicritério, considerando os seguintes cenários:

- a) Cenário 1:  $w_1 = 0,75$ ;  $w_2 = 0,125$  e  $w_3 = 0,125$   
 b) Cenário 2:  $w_1 = 0,5$ ;  $w_2 = 0,25$  e  $w_3 = 0,25$   
 c) Cenário 3:  $w_1 = 0,25$ ;  $w_2 = 0,375$  e  $w_3 = 0,375$

onde  $w_1$  é o peso de importância da minimização do peso da estrutura. O peso de importância restante foi distribuído igualmente entre os objetivos conflitantes com a minimização de peso: minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $w_2$ ) e maximização do fator de carga crítica ( $w_3$ ).

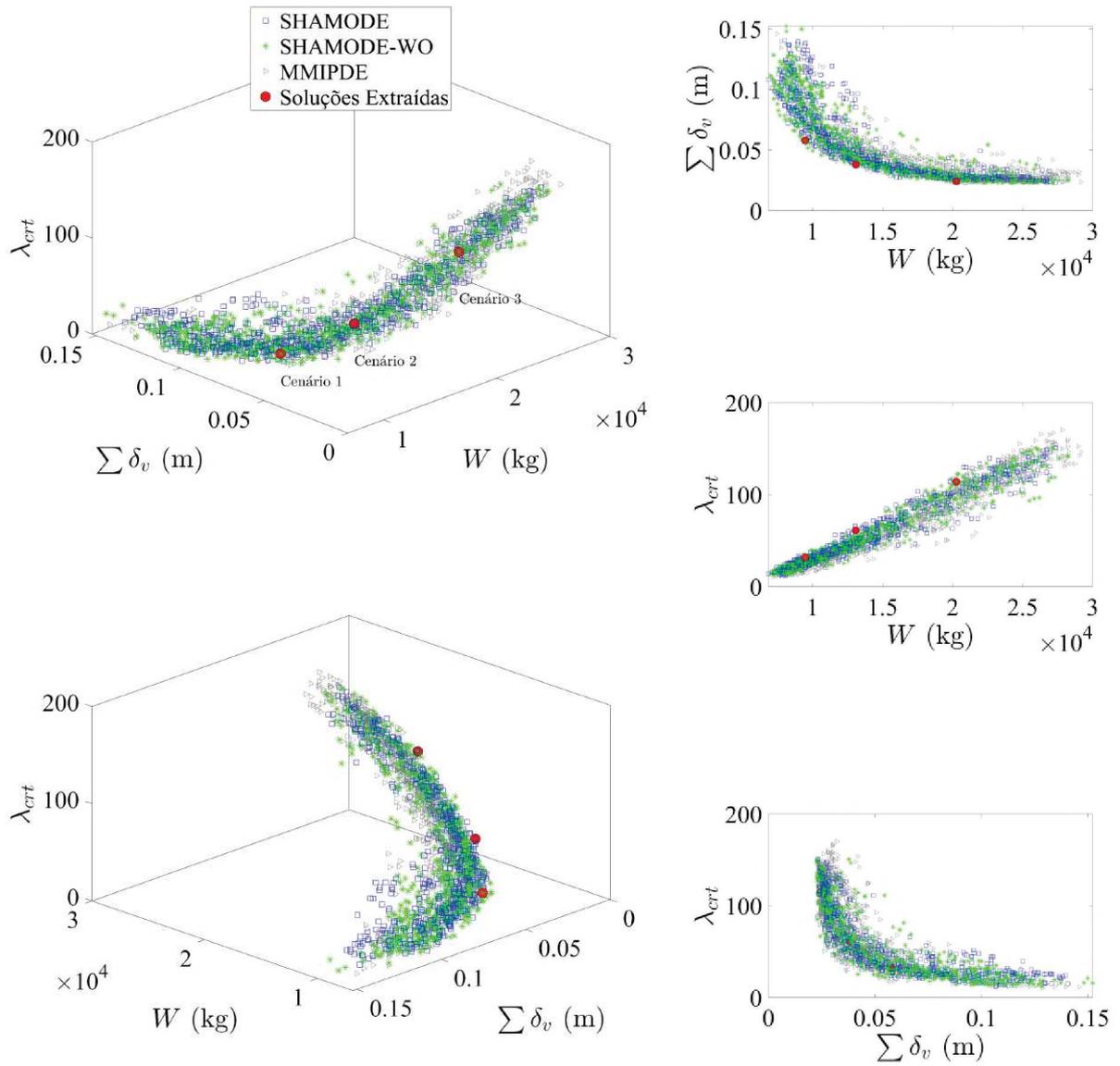
As 2100 soluções estão representadas na Figura 80. Os perfis metálicos, valores das restrições e funções-objetivos das estruturas obtidas nas soluções extraídas são apresentados na Tabela 38. As plantas baixas das soluções extraídas nos cenários 1, 2 e 3 estão representadas nas Figuras 81, 82 e 83, respectivamente.

Tabela 38 – Soluções extraídas no problema multi-objetivo no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Cenário	1	2	3
Grupos		Perfis W	
P1	310x79	200x52	310x117
P2	200x46,1	310x79	310x117
P3	200x53	250x80	310x117
V1	360x32,9	200x26,6	410x38,8
V2	200x15	360x32,9	530x85
V3	310x23,8	410x38,8	410x60
V4	410x38,8	310x23,8	250x22,3
Valores das restrições e funções objetivo			
$LRFD_{max}(\mathbf{x})$	0,7092	0,3707	0,3213
$V_{max}(\mathbf{x})$	0,1893	0,1141	0,0975
$d_{max}(\mathbf{x})$ (mm)	3,6	1,9	0,8
$f_1(x)$ (Hz)	2,0059	2,7289	3,5910
$\lambda_{ert}(\mathbf{x})$	<b>31,9523</b>	<b>61,0544</b>	<b>113,9597</b>
$\delta_{max}(x)$ (mm)	7,5	4,4	2,0
$\sum \delta_v(\mathbf{x})$ (mm)	<b>57,9</b>	<b>38,1</b>	<b>24,2</b>
$W(\mathbf{x})$ (kg)	<b>9474</b>	<b>13071</b>	<b>20269</b>
Meta-heurística	SHAMODE-WO	SHAMODE	SHAMODE-WO

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

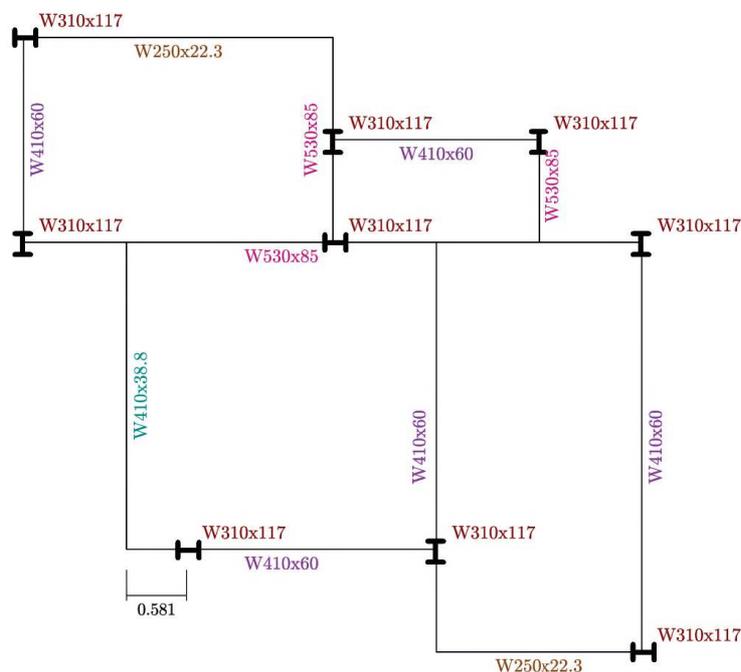
Figura 80 - Diferentes ângulos de visualização das frentes de Pareto e soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica de vibração no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).



Figura 83 - Planta baixa da solução extraída no cenário 3 no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando a Tabela 38 é possível observar que, assim como nos outros problemas, a estrutura mais leve foi encontrada no cenário 1 do problema ( $W = 9474$  kg). Na medida em que o peso de importância  $w_1$  diminui e  $w_2$  e  $w_3$  aumentam, o valor de  $W(\mathbf{x})$  também aumenta ( $W(\mathbf{x}) = 20269$  kg no cenário 3, 114% maior do que no cenário 1).

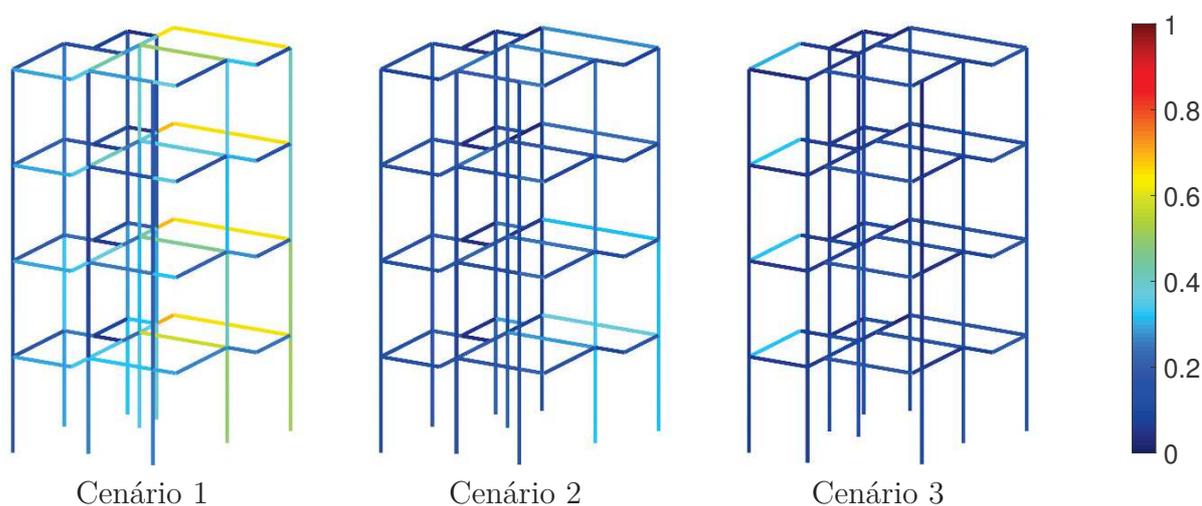
Em relação aos deslocamentos verticais totais, na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\sum \delta_v = 57,9$  mm. Assim como nos problemas anteriores, na medida em que o peso de importância  $w_2$  aumenta, o valor de  $\sum \delta_v$  diminui ( $\sum \delta_v = 24,2$  mm no cenário 3, 58% menor do que no cenário 1).

Em relação ao fator de carga crítica, os valores aumentaram em relação aos problemas anteriores, onde sua minimização não era objetivo. O valor encontrado na solução extraída do cenário 1 do problema o valor encontrado foi de  $\lambda_{crt} = 31,9523$ . Novamente, na medida em que o peso de importância  $w_3$  aumenta, o valor de  $\lambda_{crt}(\mathbf{x})$  aumenta ( $\lambda_{crt} = 113,9597$  Hz no cenário 3, 257% maior do que no cenário 1).

Novamente, é possível observar o melhor comportamento estrutural com o aumento do peso, fato que pode ser observado com o aumento dos valores de  $f_1(\mathbf{x})$  e diminuição dos valores de  $d_{max}(\mathbf{x})$  e  $\delta_{max}(\mathbf{x})$  na medida em que aumenta o peso. Os valores de  $LRFD$  encontrados na equação de interação de esforços para flexão composta e os valores encontrados na equação que determina o estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) para cada barra da estrutura podem ser visualizados nas Figuras 70 e

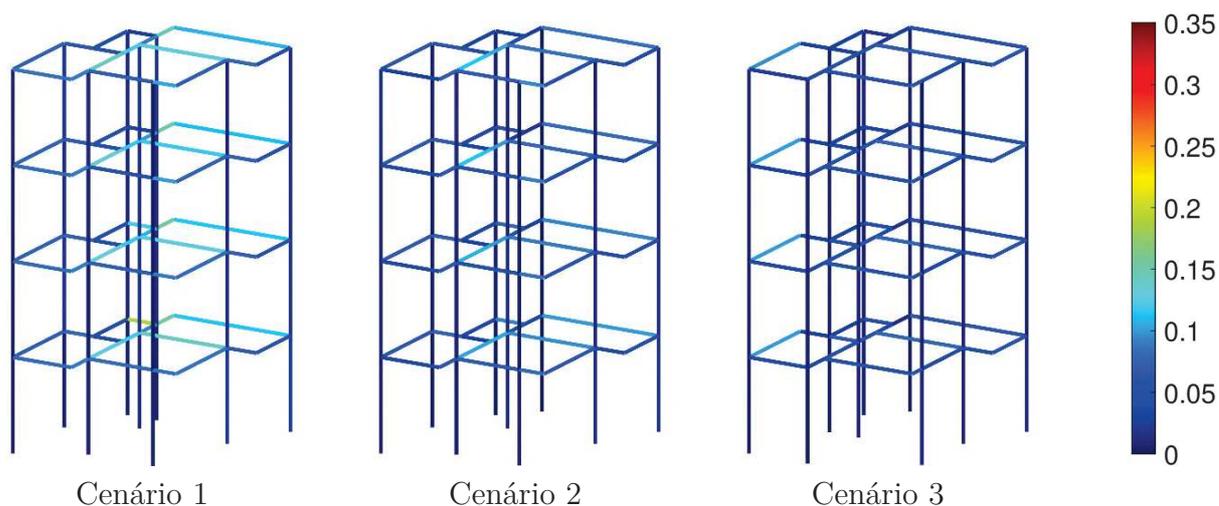
71, respectivamente, mostrando que, de maneira geral, os valores de  $LRFD$  e  $V$  diminuem na medida que cresce o peso.

Figura 84 - Valores da equação de interação de esforços para flexão composta ( $LRFD$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 85 - Valores da equação do estado limite de plastificação da alma por cisalhamento ( $V$ ) nas soluções extraídas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



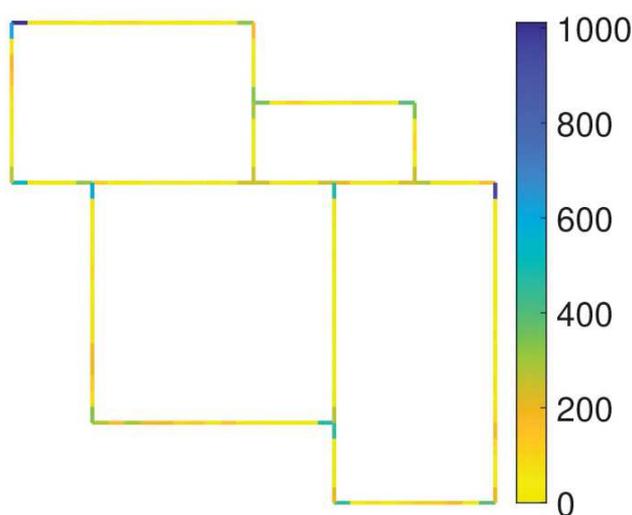
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Além disso, nas três soluções extraídas não foram utilizados 3 perfis diferentes para vigas e 4 para pilares, como permitido pela formulação adotada. No que se diz respeito às posições dos pilares, nas três soluções extraídas, apenas 1 dos 9 pilares não foi posicionado

na união de duas ou mais vigas. Nas três soluções extraídas este único pilar foi posicionado ao longo de V4 ou V9. As posições em comum nos três cenários são: a união de V1 e V6, a união de V4 e V10 e a união de V5 e V11. Em relação a estes três pilares, o único que possui a mesma orientação nos três cenários é aquele posicionado no encontro de V5 e V11.

A Figura 86 mostra, dentro das 2100 soluções salvas pelas meta-heurísticas, quantas posicionam pilares em cada intervalo de 20 cm do espaço de busca. Novamente, há uma concentração maior de pilares nos cantos. Assim como nos outros problemas, a quantidade de pilares posicionados em V4, de 20 a 60 cm do encontro com V9, é significativa. No entanto, neste caso a quantidade de pilares posicionados no encontro efetivo de V4 e V9 é maior.

Figura 86 - Distribuição dos pilares encontrados nas 2100 soluções salvas no problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Os valores de média e desvio-padrão ( $\sigma$ ) dos hipervolumes calculados a partir das funções objetivo normalizadas ( $HV$ ),  $IGD+$  e  $spacing$  ( $SP$ ) entre as 10 execuções independentes de cada meta-heurísticas estão apresentados na Tabela 39. Os testes de Wilcoxon apresentados na Tabela 40 indicam se a diferença entre as médias foi significativa ( $\checkmark$ ) ou não ( $\times$ ), utilizando um valor de significância de 0,05.

Tabela 39 – Média e desvio padrão dos valores dos indicadores entre as execuções independentes para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítico no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica	Hiper-volume		IGD+		Spacing	
Meta-heurística	$\overline{HV}$	$\sigma_{HV}$	$\overline{IGD+}$	$\sigma_{IGD+}$	$\overline{SP}$	$\sigma_{SP}$
MM-IPDE	0,43149	0,01714	0,05950	0,01605	0,03237	0,00493
SHAMODE	0,42689	0,03037	0,05016	0,01912	0,02904	0,00343
SHAMODE-WO	0,42442	0,03324	0,05086	0,02023	0,03102	0,00527

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 40 – Testes de Wilcoxon entre as meta-heurísticas para o problema de minimização de peso, minimização dos deslocamentos verticais nodais totais e maximização do fator de carga crítica no pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

Métrica	Hiper-volume	IGD+	Spacing
Meta-heurísticas	Resultados do teste de Wilcoxon		
MM-IPDE SHAMODE	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
MM-IPDE SHAMODE-WO	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
SHAMODE SHAMODE-WO	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Analisando as Tabelas acima foi possível observar que o algoritmo SHAMODE apresentou as melhores médias de hiper-volume,  $IGD+$  e  $spacing$  enquanto o MM-IPDE apresentou as piores. Apesar disso, não houve diferença significativa entre os algoritmos. Outra consideração importante é que, como mostra a Tabela 38, as soluções extraídas foram encontradas pelos algoritmos SHAMODE e SHAMODE-WO.

### 5.5.5 Análise dos resultados

Após ter em mãos os resultados dos experimentos realizados nesta Seção, é possível fazer algumas considerações sobre os valores das restrições e funções-objetivo:

- O menor peso encontrado entre as soluções extraídas foi  $W = 7701$  kg, encontrado no cenário 1 do problema da Seção 5.5.3, onde os objetivos são a minimização do peso da estrutura ( $W$ ), a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $\sum \delta_v$ ) e maximização da primeira frequência natural de vibração. Já o maior ( $W = 20269$  kg) foi encontrado no cenário 3 do problema de minimização do peso da estrutura ( $W$ ), a minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $\sum \delta_v$ ) e maximização do fator de carga crítica ( $\lambda_{crt}$ ) (Seção 5.5.4).

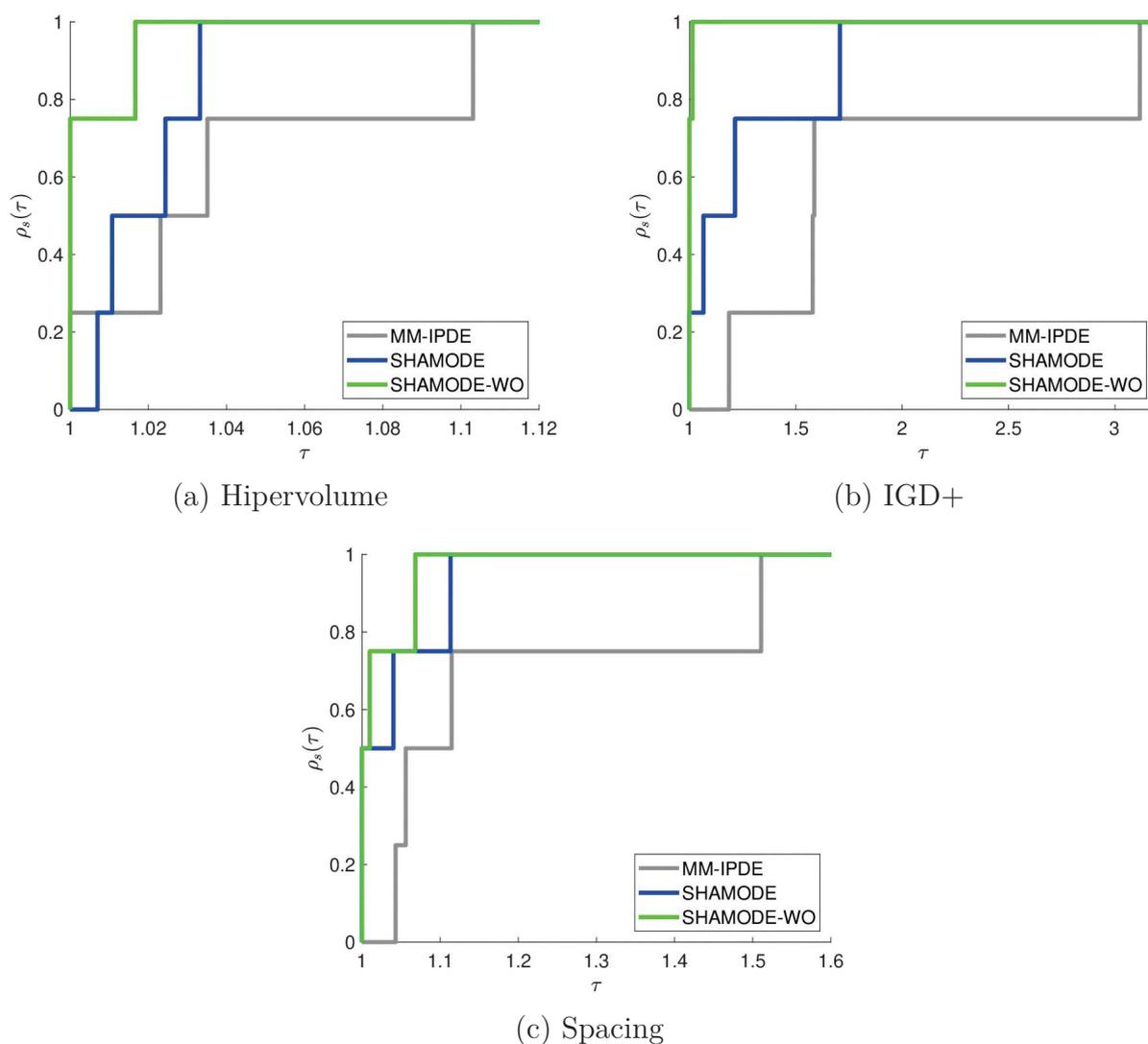
- b) A menor soma de deslocamentos verticais nodais, cuja minimização é um objetivo em todos os problemas, foi encontrada no mesmo caso da estrutura mais pesada: o cenário 3 do problema de minimização do peso da estrutura ( $W$ ), minimização dos deslocamentos verticais nodais totais ( $\sum \delta_v$ ) e maximização do fator de carga crítica ( $\lambda_{crt}$ ) (Seção 5.5.4).
- c) Como esperado, o menor deslocamento máximo horizontal encontrado entre as soluções extraídas foi  $\delta_{max} = 1,0$  mm, encontrado no cenários 1 do problema da Seção 5.5.2, pois é o único onde a minimização do máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ) é um objetivo.
- d) A maior frequência natural de vibração encontrada entre as soluções extraídas foi  $f_1 = 3,8017$  Hz. Este valor foi encontrado no cenário 3 do problema da Seção 5.5.3, problema onde a maximização da primeira frequência natural de vibração ( $f_1$ ) é um objetivo. Novamente este resultado está coerente e dentro das expectativas.
- e) O maior fator de carga crítica encontrado foi  $\lambda_{crt} = 113,9597$ , encontrado no cenário 3 do problema da Seção 5.5.4, o que é coerente, pois além da minimização do peso da estrutura ( $W$ ) e dos deslocamentos verticais nodais totais ( $\sum \delta_v$ ), a maximização do fator de carga ( $\lambda_{crt}$ ) é também é um objetivo.
- f) O menor deslocamento horizontal máximo inter-pavimentos encontrado entre as soluções extraídas foi  $d_{max} = 0,6$  mm, encontrado no cenário 3 do problema da Seção 5.5.2. Este resultado também está dentro das expectativas, pois apesar de não ser função-objetivo, o máximo deslocamento inter-pavimentos está diretamente ligado ao máximo deslocamento horizontal ( $\delta_{max}$ ), cuja minimização é um objetivo neste problema.

No que se diz respeito às posições dos pilares, a maioria dos pilares foram posicionados em encontros de duas mais vigas. Este tipo de posicionamento é intuitivo pois faz diminuir a quantidade de balanços e, conseqüentemente, os deslocamentos verticais dos nós da estrutura. No entanto, alguns aspectos das soluções encontradas fogem do que é esperado. Como exemplo, pode-se citar o fato de que nenhuma das soluções extraídas apresenta um pilar posicionado no encontro de V4 e V9. No entanto, todas apresentam um pilar a menos de 1m deste encontro.

Em relação ao desempenho dos algoritmos, é possível fazer considerações relevantes. Na Figura 87 é possível visualizar os perfis de desempenho deste conjunto de problemas considerando como indicadores de desempenho o hipervolume (Figura 87a), o  $IGD+$  (Figura 87b) e o *spacing* (Figura 87c). Na Tabela 41, estão indicadas as áreas normalizadas sob as curvas dos perfis de desempenho. A partir dela, percebe-se que o desempenho geral

do algoritmo SHAMODE-WO foi melhor nos três indicadores, seguido pelo SHAMODE e por fim pelo MM-IPDE. É importante lembrar que o GDE3 não foi adotado neste caso, pois ao fim de 400 gerações, ele não era capaz de encontrar soluções factíveis.

Figura 87 - Perfis de desempenho dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 258 barras e 126 nós



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Tabela 41 – Áreas normalizadas sob as curvas do perfis de performance dos problemas de otimização estrutural do pórtico de 11 vigas e 9 pilares por pavimento

	Hipervolume	IGD+	Spacing
MM-IPDE	0,63450	0,59128	0,67117
SHAMODE	0,85195	0,77480	0,96178
SHAMODE-WO	1,00000	1,00000	1,00000

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

## 6 CONCLUSÕES E EXTENSÕES DO TRABALHO

Como visto no Capítulo 2, apesar de existirem estudos considerando posições de apoios e orientações das seções transversais de pilares como variáveis de projeto, não são encontrados trabalhos de otimização multi-objetivo de pórticos espaciais em aço que consideram estas duas simultaneamente, com ou sem agrupamento automático de membros. Além disso, estes estudos não consideram funções-objetivo relacionadas à estabilidade global nem ao comportamento dinâmico. Neste sentido, a dissertação cumpriu seu objetivo, que era preencher esta lacuna na literatura, chegando a conclusões muito interessantes sobre o comportamento estrutural dos pórticos e sobre o desempenho de diferentes meta-heurísticas nestes problemas.

Pelo primeiro conjunto de experimentos, apresentado na Seção 5.3, foi possível analisar diversos comportamentos estruturais relevantes. Estes problemas consistiram na otimização estrutural multi-objetivo de um pórtico espacial, considerando a orientação dos pilares como variáveis de projeto. Percebeu-se que existem orientações ótimas nos problemas com diferentes objetivos. Algumas destas orientações se mostram interessantes para um objetivo em específico, e outras se repetem, se mostrando boas opções para todos os objetivos analisados.

No segundo conjunto de experimentos, foi aplicada pela primeira vez a formulação utilizada no posicionamento automático de pilares. Por se tratar de um pórtico simples, onde seria trivial posicionar os pilares manualmente, este exemplo foi utilizado para validar a formulação utilizada. Como as posições encontradas coincidiram com o esperado, foi confirmada a validação do método utilizado, permitindo sua utilização nos exemplos seguintes.

No terceiro e último conjunto de experimentos, um pórtico espacial de planta baixa não-retangular e não-simétrica foi otimizado considerando as posições e orientações dos pilares como objetivo. Além disso, neste caso foi adotado um agrupamento automático de pilares e vigas. Ao final das análises dos resultados obtidos foi possível notar que, em muitos dos casos, o agrupamento automático de membros designou menos seções diferentes do que o máximo permitido. Outro resultado interessante diz respeito às posições dos pilares: houve, como esperado, uma concentração significativa de pilares posicionados nos cantos de encontro de duas ou mais vigas. Mesmo assim, houveram posições que fugiram da resposta intuitiva e se mostraram interessantes e competitivas.

Analisando em conjunto o desempenho dos algoritmos de busca nos experimentos apresentados na dissertação pode-se afirmar que, com exceção do problema de otimização do segundo pórtico, as meta-heurísticas SHAMODE e SHAMODE-WO se mostraram as mais interessantes. O algoritmo MM-IPDE também teve um desempenho satisfatório em todos os exemplos analisados. No entanto, no experimento mais complexo, onde a posição

dos pilares é uma variável de projeto, mesmo buscando, por tentativa e erro, valores de  $F$  e  $Cr$  que levariam a um bom desempenho do GDE3, este algoritmo não conseguiu obter um número razoável de soluções factíveis por execução.

Ao final desta dissertação, é possível afirmar atingiu todos os objetivos propostos, apresentando resultados interessantes e passíveis de diversas análises complementares. Além disso, há muitas possibilidades de extensões em trabalhos futuros. Entre elas, pode-se citar:

- a) Considerar outros objetivos nas formulações como a maximização das diferenças entre frequências naturais de vibração e, da mesma forma, a maximização das diferenças entre os fatores de carga. Ainda, considerar como objetivos a minimização das amplitudes dos deslocamentos dos modos de vibração e modos de instabilidade.
- b) Ampliar o uso do agrupamento automático dos elementos estruturais como o usado no terceiro experimento. Também é possível analisar e comparar outras metodologias de agrupamento automático de membros.
- c) Usar pontos de referência de interesse do tomador de decisões para explorar melhor as vizinhanças da frente de Pareto nestes pontos.

## REFERÊNCIAS

- 1 KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. Gde3: The third evolution step of generalized differential evolution. In: IEEE. **2005 IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**. Edinburgh, Scotland, 2005. v. 1, p. 443–450.
- 2 PANAGANT, N. *et al.* A novel self-adaptive hybrid multi-objective meta-heuristic for reliability design of trusses with simultaneous topology, shape and sizing optimisation design variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 60, n. 5, p. 1937–1955, 2019.
- 3 WANSASUEB, K. *et al.* Multiobjective meta-heuristic with iterative parameter distribution estimation for aeroelastic design of an aircraft wing. **Engineering with Computers**, Springer, p. 1–19, 2020.
- 4 SAKA, M. Optimum design of steel frames with stability constraints. **Computers & structures**, Elsevier, v. 41, n. 6, p. 1365–1377, 1991.
- 5 CHAN, C. An optimality criteria algorithm for tall steel building design using commercial standard sections. **Structural optimization**, Springer, v. 5, n. 1, p. 26–29, 1992.
- 6 VANDERPLAATS, G. N.; SALAJEGHEH, E. An efficient approximation technique for frequency constraints in frame optimization. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 26, n. 5, p. 1057–1069, 1988.
- 7 MCGEE, O.; PHAN, K. A robust optimality criteria procedure for cross-sectional optimization of frame structures with multiple frequency limits. **Computers & structures**, Elsevier, v. 38, n. 5-6, p. 485–500, 1991.
- 8 SALAJEGHEH, E. Optimum design of steel space frames with frequency constraints using three point rayleigh quotient approximation. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 54, n. 2, p. 305–313, 2000.
- 9 SEDAGHATI, R. *et al.* Structural optimization with frequency constraints using the finite element force method. **AIAA journal**, v. 40, n. 2, p. 382–388, 2002.
- 10 KAVEH, A.; MAHDAVI, V. R. Optimal design of structures with multiple natural frequency constraints using a hybridized bb-bc/quasi-newton algorithm. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 57, n. 1, p. 27–38, 2013.
- 11 ZAKIAN, P. Meta-heuristic design optimization of steel moment resisting frames subjected to natural frequency constraints. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 135, p. 102686, 2019.
- 12 RONG, J. *et al.* An improved method for evolutionary structural optimisation against buckling. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 79, n. 3, p. 253–263, 2001.
- 13 LIU, M. *et al.* Optimal seismic design of steel frame buildings based on life cycle cost considerations. **Earthquake engineering & structural dynamics**, Wiley Online Library, v. 32, n. 9, p. 1313–1332, 2003.

- 14 TOĞAN, V. Design of planar steel frames using teaching–learning based optimization. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 34, p. 225–232, 2012.
- 15 GHOLIZADEH, S.; BAGHCHEVAN, A. Multi-objective seismic design optimization of steel frames by a chaotic meta-heuristic algorithm. **Engineering with Computers**, Springer, v. 33, n. 4, p. 1045–1060, 2017.
- 16 RESENDE, C. *et al.* Global stability and natural frequencies of vibration in multi-objective optimization of 3d steel frames. In: **Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE**. Foz do Iguaçu, Brazil: ABMEC, 2020.
- 17 KIZILKAN, M. **Investigating the effect of column orientations on minimum weight design of steel frames**. Dissertação (Mestrado) — Middle East Technical University, Turkey, 2010.
- 18 LEMONGE, A. C.; BARBOSA, H. J. Design optimization of space framed structures using multiple cardinality constraint. In: **EngOpt 2012 - International Conference on Engineering Optimization**. Rio de Janeiro, Brazil: EngOpt, 2012.
- 19 MOTTA, J. *et al.* Optimal orientation of cross-sections of columns of 3d steel frames in a single and multi-objective optimization. In: **Proceedings of the XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE**. Rio de Janeiro, Brazil: ABMEC, 2021.
- 20 WANG, B. P.; CHEN, J. L. Application of genetic algorithm for the support location optimization of beams. **Computers & structures**, Elsevier, v. 58, n. 4, p. 797–800, 1996.
- 21 KRIPKA, M. **Determinação do posicionamento ótimo dos apoios em edificações analisadas pelo modelo de grelha**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1998.
- 22 RAICH, A.; GHABOUSSI, J. Evolving structural design solutions using an implicit redundant genetic algorithm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 20, n. 3, p. 222–231, 2000.
- 23 PETPRAKOB, W. **Beam-slab Floor Optimization Using Genetic and Particle Swarm Optimization Algorithms**. Tese (Doutorado) — THAMMASAT UNIVERSITY, 2014.
- 24 OLIVEIRA, J. I. F. d. **Otimização multiobjetivo aplicada à análise estrutural de edifícios**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Nacional de Brasília, Brasil, 2017.
- 25 TRUONG, V.; KIM, S.-E. An efficient method for reliability-based design optimization of nonlinear inelastic steel space frames. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 56, n. 2, p. 331–351, 2017.
- 26 KAVEH, A.; GHAZAN, M. I. A new vps-based algorithm for multi-objective optimization problems. **Engineering with Computers**, Springer, v. 36, n. 3, p. 1029–1040, 2020.
- 27 KAVEH, A. *et al.* Optimum design of three-dimensional steel frames with prismatic and non-prismatic elements. **Engineering with Computers**, Springer, v. 36, n. 3, p. 1011–1027, 2020.

- 28 TU, X. *et al.* Performance-based multi-objective collaborative optimization of steel frames with fuse-oriented buckling-restrained braces. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 61, n. 1, p. 365–379, 2020.
- 29 WANG, X. *et al.* An efficient discrete optimization algorithm for performance-based design optimization of steel frames. **Advances in Structural Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 23, n. 3, p. 411–423, 2020.
- 30 ALKHADASHI, A. *et al.* Multi-objective design optimisation of steel framed structures using three different methods. **International Journal of Structural Integrity**, Emerald Publishing Limited, 2021.
- 31 DO, B.; OHSAKI, M. Gaussian mixture model for robust design optimization of planar steel frames. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 63, n. 1, p. 137–160, 2021.
- 32 GHASEMOF, A. *et al.* A new swift algorithm for bi-objective optimum design of steel moment frames. **Journal of Building Engineering**, Elsevier, v. 39, p. 102162, 2021.
- 33 GHOLIZADEH, S.; FATTAHI, F. Multi-objective design optimization of steel moment frames considering seismic collapse safety. **Engineering with Computers**, Springer, v. 37, n. 2, p. 1315–1328, 2021.
- 34 SHEN, W. *et al.* Robust geometry and topology optimization of plane frames using order statistics and force density method with global stability constraint. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 122, n. 14, p. 3653–3677, 2021.
- 35 BARRAZA, M. *et al.* Multi-objective optimization of structural steel buildings under earthquake loads using nsga-ii and pso. **KSCE Journal of Civil Engineering**, Springer, v. 21, n. 2, p. 488–500, 2017.
- 36 YANG, X.-S. **Nature-inspired metaheuristic algorithms**. United Kingdom: Luniver press, 2010.
- 37 KAVEH, A. **Advances in metaheuristic algorithms for optimal design of structures**. Switzerland: Springer International Publishing, 2014.
- 38 STORN, R.; PRICE, K. **Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces Technical Report TR-95-012, ICSI**. 1995.
- 39 PRICE, K. *et al.* **Differential evolution: a practical approach to global optimization**. Germany: Springer Science & Business Media, 2006.
- 40 TANABE, R.; FUKUNAGA, A. Success-history based parameter adaptation for differential evolution. In: IEEE. **2013 IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**. Cancun, Mexico, 2013. p. 71–78.
- 41 DEB, K. *et al.* A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.
- 42 MIRJALILI, S.; LEWIS, A. The whale optimization algorithm. **Advances in Engineering Software**, v. 95, p. 51–67, 2016. ISSN 0965-9978.

- 43 BUREERAT, S.; SRIWORAMAS, K. Population-based incremental learning for multiobjective optimisation. In: **Soft Computing in Industrial Applications**. Berlin: Springer, 2007. p. 223–232.
- 44 BALUJA, S. **Population-based incremental learning. a method for integrating genetic search based function optimization and competitive learning**. Pittsburgh, 1994.
- 45 SRISOMPORN, S.; BUREERAT, S. Geometrical design of plate-fin heat sinks using hybridization of moea and rsm. **IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies**, v. 31, n. 2, p. 351–360, 2008.
- 46 ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study. In: SPRINGER. **5th International conference on parallel problem solving from nature**. Amsterdam, 1998. p. 292–301.
- 47 ZITZLER, E. *et al.* Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. **IEEE Transactions on evolutionary computation**, IEEE, v. 7, n. 2, p. 117–132, 2003.
- 48 ISHIBUCHI, H. *et al.* Sensitivity of performance evaluation results by inverted generational distance to reference points. In: IEEE. **2016 IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**. Vancouver, 2016. p. 1107–1114.
- 49 COELLO, C. A. C.; SIERRA, M. R. A study of the parallelization of a coevolutionary multi-objective evolutionary algorithm. In: SPRINGER. **Mexican international conference on artificial intelligence**. [S.l.], 2004. p. 688–697.
- 50 SCHOTT, J. R. **Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization**. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- 51 MENG, H.-y. *et al.* New quality measures for multiobjective programming. In: SPRINGER. **International Conference on Natural Computation**. [S.l.], 2005. p. 1044–1048.
- 52 DOLAN, E. D.; MORE´, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical programming**, Springer, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- 53 CARVALHO, J. P. G. *et al.* Multi-objective optimum design of truss structures using differential evolution algorithms. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 252, p. 106544, 2021.
- 54 BARBOSA, H. J. *et al.* Using performance profiles to analyze the results of the 2006 cec constrained optimization competition. In: IEEE. **2016 IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**. Vancouver, 2010. p. 1–8.
- 55 ZHANG, Q. *et al.* Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 247–258, 2004.
- 56 PARREIRAS, R.; VASCONCELOS, J. Decision making in multiobjective optimization aided by the multicriteria tournament decision method. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 71, n. 12, p. e191–e198, 2009.

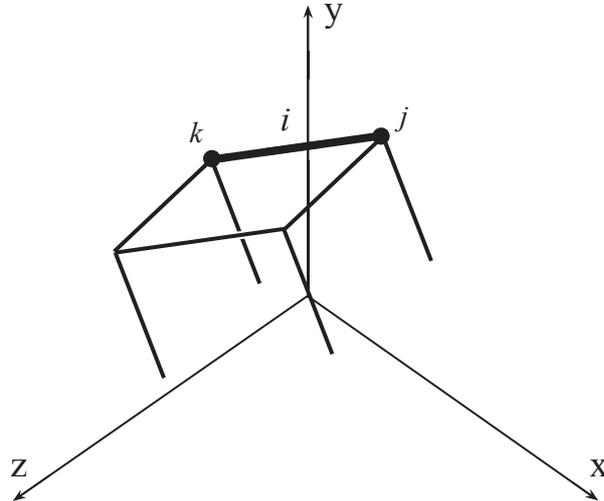
- 57 EKEL, P. Y. *et al.* Fuzzy preference modeling and its application to multiobjective decision making. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 52, n. 1-2, p. 179–196, 2006.
- 58 ABNT. **NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Rio de Janeiro, Brasil: ABNT Editora, 2008.
- 59 ANSI. **AISC 360-16 Specification for Structural Steel Buildings**. Chicago, USA: AISC, 2016.
- 60 ABNT. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, Brasil: ABNT Editora, 2019.
- 61 ABNT. **NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações**. Rio de Janeiro, Brasil: ABNT Editora, 1988.
- 62 SIDNEY, S. Nonparametric statistics for the behavioral sciences. **The Journal of Nervous and Mental Disease**, LWW, v. 125, n. 3, p. 497, 1957.
- 63 LI, M. *et al.* How to read many-objective solution sets in parallel coordinates [educational forum]. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, IEEE, v. 12, n. 4, p. 88–100, 2017.
- 64 MCGUIRE, W. *et al.* **Matrix structural analysis**. New York: John Wiley & Sons, 2014. 2nd Edition.
- 65 WEAVER, W.; GERE, J. M. **Matrix analysis of framed structures**. New York: Springer science & business media, 2012.
- 66 BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. Watertown, MA: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2006.

## APÊNDICE A – Análise matricial de estruturas

O método adotado para a análise estrutural dos pórticos estudados foi o método da rigidez direta. Neste capítulo será apresentada a formulação matricial utilizada a fim de se encontrar os deslocamentos nodais, esforços internos nas barras, frequências naturais de vibração e fator de carga crítica para estabilidade global.

O primeiro passo na solução de um problema de análise estrutural é a definição da geometria do pórtico analisado, ou seja, a posição de seus nós e barras. Um pórtico espacial está representado na Figura 88 e nele está destacado um elemento genérico de barra chamado de  $i$ , cujas extremidades são definidas pelos nós  $j$  e  $k$ . Como esta análise trata de pórticos tridimensionais, estão representados os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Figura 88 - Pórtico espacial genérico



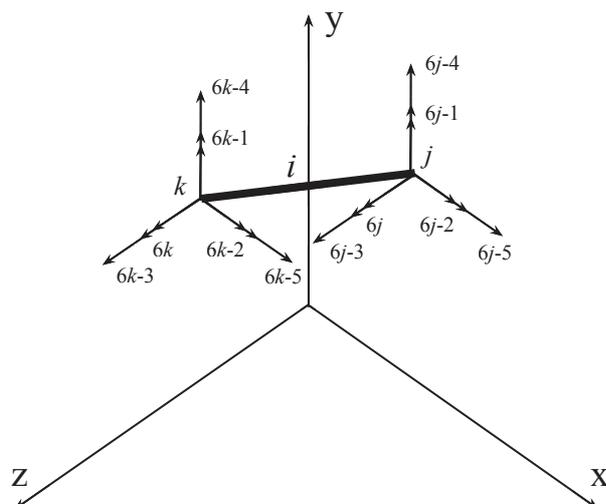
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Inicialmente, deve ser definida uma matriz de coordenadas, que contém a posição inicial dos  $N_{nós}$  nós do pórtico em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Esta matriz está descrita na Equação A.1 e inclui os nós  $j$  e  $k$  do elemento genérico  $i$  da Figura 88.

$$[Coord] = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_j & z_j & y_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & z_k & y_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{nós}} & z_{N_{nós}} & y_{N_{nós}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N_{nós} \end{matrix} \quad (A.1)$$

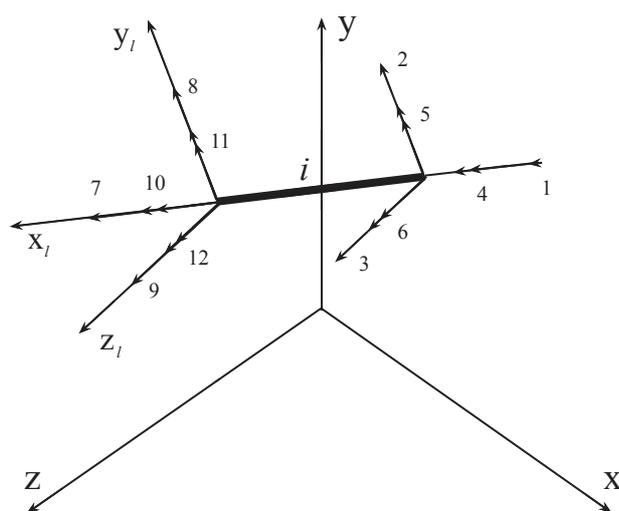
Em seguida, deve ser definida uma matriz de conectividades. Cada linha da matriz



Figura 89 - Eixos locais do elemento genérico  $i$  e seus GL's

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Como já citado, em problemas de pórticos tridimensionais, cada nó possui seis graus de liberdade. Como cada elemento de barra é definido por dois nós, o total de graus de liberdade por elemento é doze. Os doze graus de liberdade de um elemento genérico  $i$  podem ser mapeados em coordenadas locais. Os eixos locais, assim como os 12 GL's, estão definidos na Figura 90, onde  $x_l$  coincide com o eixo da barra tomado em sentido positivo na direção do nó inicial para o o final,  $y_l$  e  $z_l$  são escolhidos como sendo os eixos principais de menor e maior inércia da seção transversal, respectivamente.

Figura 90 - Eixos locais do elemento genérico  $i$  e seus GL's

Fonte:Elaborado pela autora (2022).

A matriz de rigidez elástica de um elemento  $i$  de pórtico espacial é inicialmente escrita em coordenadas locais. Nesta matriz ( $[K_{i,l}]$ ), um elemento na linha  $m$  e coluna

$n$  representa o esforço na direção  $m$  associado a um deslocamento unitário na direção  $n$ . A Equação A.5 descreve  $[K_{i,l}]$ , que é simétrica, onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $L$  é o comprimento do elemento,  $A$  é a área da seção transversal,  $I_x$  é a inércia à torção,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia em tornos dois eixos principais de menor e maior inércia, respectivamente.

$$[K_{i,l}] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_x}{L^2} & 0 & -\frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_x}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{EL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{EL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L^2} & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_x}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{EL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

sim.

A matriz de massa representa a distribuição da massa do elemento nos doze graus de liberdade. Neste trabalho, foi adotada a matriz de massa consistente. A matriz de massa de um elemento  $i$  em coordenadas locais ( $[M_{i,l}]$ ) está definida na Equação A.6, onde  $\rho$  é a massa específica do material.

$$[M_{i,l}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L \\ & & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ & & & \frac{140I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_x}{A} & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & & & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & & & & 156 & 0 & 22L & 0 \\ & & & \text{sim.} & & & & & & \frac{140I_x}{A} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

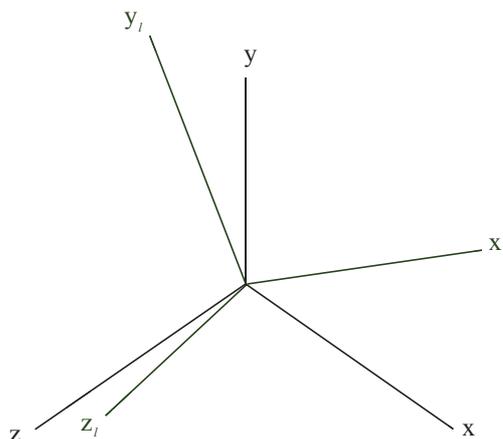
A última matriz utilizada neste trabalho é a matriz de rigidez geométrica . A matriz de rigidez geométrica de um elemento  $i$  em coordenadas locais ( $[K_{G,i,l}]$ ) é avaliada para um dado carregamento de referência  $\{P_{ref}\}$ , do qual assume-se que a distribuição de esforços internos gerados leva à carga crítica  $\{P_{crt}\}$ . Esta matriz está definida na Equação A.7, onde  $P$  é o esforço axial atuante na barra. [64]

$$[K_{G,i,l}] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ & & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ & & & \frac{I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_t}{A} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ & & & \text{sim.} & & & & & & \frac{I_t}{A} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} & \\ & & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

As matrizes descritas anteriormente foram todas descritas em coordenadas locais.

No entanto, como cada barra possui sua própria orientação, e conseqüentemente seus próprios eixos locais (em verde, na Figura 91), é necessário fazer uma transformação para o sistema de coordenadas globais (em preto, na Figura 91).

Figura 91 - Eixos globais e eixos locais de um elemento genérico



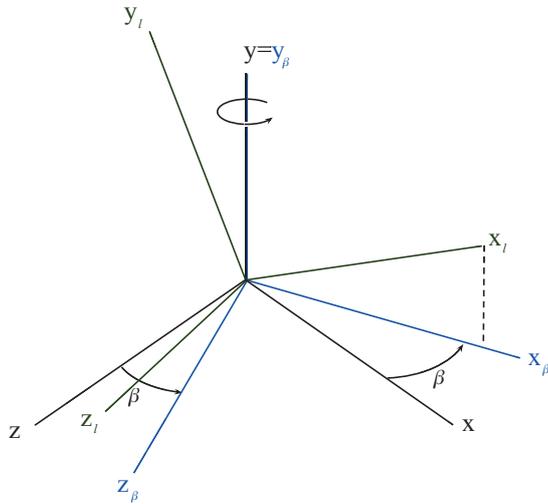
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Esta transformação é feita encontrando as componentes dos graus de liberdade nos eixos globais  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Para isto, é utilizada uma matriz de rotação. A matriz de rotação  $[R]$  obtida conforme a Equação A.8 é determinada por três rotações sucessivas. Primeiramente, rotação de um ângulo  $\beta$  em torno do eixo  $y$  deve fazer com que o eixo  $x_\beta$  coincida com a projeção do eixo  $x_l$  no plano  $xz$  (Figura 92). Em seguida, há uma rotação de um ângulo  $\gamma$  em torno do eixo  $z_\beta$  para que  $x_\gamma$  coincida com  $x_l$  (Figura 93). Finalmente a terceira rotação correspondendo a um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo  $x_\gamma$ , que deve fazer coincidir os eixos restantes. Esta rotação também pode ser representada com uma rotação no plano da seção transversal do elemento, como mostra a Figura 94. [65]

$$[R] = [R_\alpha][R_\gamma][R_\beta] \quad (\text{A.8})$$

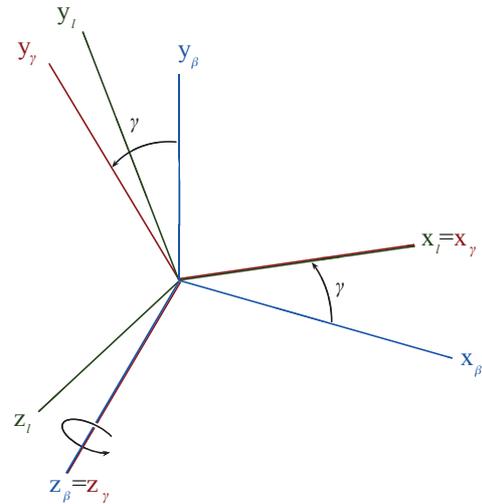
A matriz resultante da Equação A.8 é expressa em em função dos cossenos diretores na Equação A.9, designados  $C_x$ ,  $C_y$  e  $C_z$ . A matriz de rotação para elementos verticais (Equação A.10) é diferente da matriz para os demais membros nessa formulação [65]. Para pórticos espaciais, a matriz de transformação de rotação é dada pela matriz  $[R_T]$  (Equação A.11).

Figura 92 - Rotação em torno de  $y$



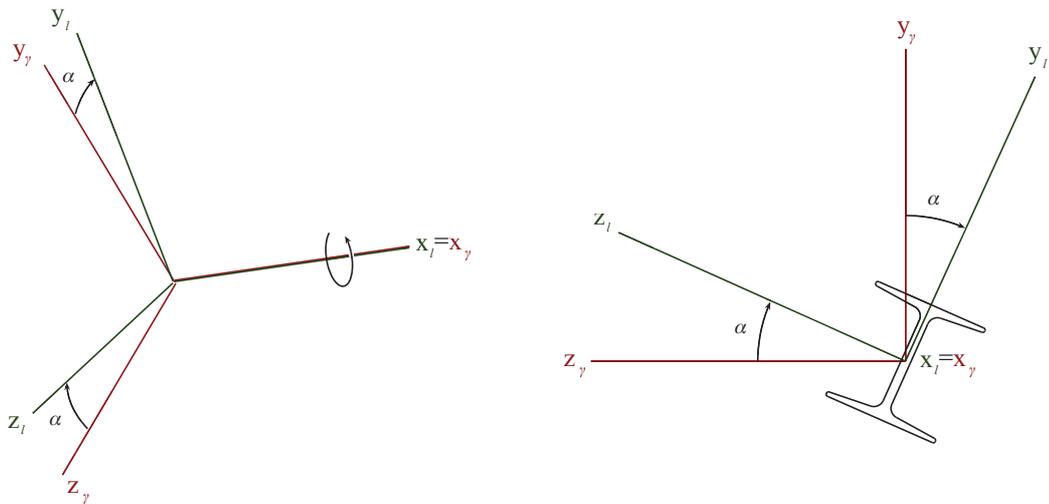
Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 93 - Rotação em torno de  $z$



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Figura 94 - Rotação em torno de  $x$



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

$$[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos(\alpha) - C_z \sin(\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & (\sqrt{C_x^2 + C_z^2}) \cos(\alpha) & \frac{-C_y C_z \cos(\alpha) + C_x \sin(\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin(\alpha) - C_z \cos(\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -(\sqrt{C_x^2 + C_z^2}) \sin(\alpha) & \frac{C_y C_z \sin(\alpha) + C_x \cos(\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

$$[R_{vert}] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ C_y \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [R] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [R] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [R] \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Tendo definida a matriz  $[R_T]$ , é possível encontrar as matrizes de elemento nas coordenadas globais da estrutura ( $[K_{i,g}]$ ,  $[M_{i,g}]$ ,  $[K_{G,i,g}]$ ) através das expressões dadas nas Equações A.12, A.13 e A.14.

$$[K_{i,g}] = [R_T^T][K_{i,l}][R_T] \quad (\text{A.12})$$

$$[M_{i,g}] = [R_T^T][M_{i,l}][R_T] \quad (\text{A.13})$$

$$[K_{G,i,g}] = [R_T^T][K_{G,i,l}][R_T] \quad (\text{A.14})$$

Tendo em mãos todos os elementos anteriormente definidos, é possível fazer a montagem (ou *assembler*) das matrizes  $[K]$ ,  $[M]$  e  $[K_G]$  globais da estrutura. Este processo é feito somando, a cada elemento de barra, os valores das matrizes deste elemento em cada um dos GL's presentes no seu vetor  $LM$ . É possível entender melhor este processo no pseudo-algoritmo que será apresentado no final deste Apêndice.

Como todas as matrizes e vetores definidos, é possível encontrar o resultado da análise estrutural do pórtico espacial.

O primeiro resultado de interesse são os deslocamentos nodais da estruturas. A Equação A.15 descreve o equilíbrio de um sistema de barras discreto, onde  $\{\mathbf{u}\}$  são os deslocamentos nodais e  $\{\mathbf{p}\}$  e  $[K]$  são, respectivamente, o vetor de forças e a matriz de rigidez global da estrutura, já definidos anteriormente [66]. Para encontrar os deslocamento nodais, basta multiplicar o a inversa da matriz de rigidez pelo vetor de forças, assim como mostra a Equação A.16.

$$[K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\} \quad (\text{A.15})$$

$$\{\mathbf{u}\} = [K]^{-1}\{\mathbf{p}\} \quad (\text{A.16})$$

Outro resultado relevante é o valor das frequências naturais de vibração, que são encontradas resolvendo o problema de autovalor e autovetor descrito na Equação A.17, onde  $[M]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa e rigidez já definidas nas Seções anteriores e os autovalores são as frequências naturais angulares de vibração ( $\omega_i(\mathbf{x})$ ) associadas aos autovetores que representam os modos de vibração da estrutura ( $\{\Phi_i\}(\mathbf{x})$ ). [66]

$$([K] - \omega_i(\mathbf{x})^2[M])\{\Phi_i(\mathbf{x})\} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Neste estudo, trabalhou-se com a primeira frequência natural de vibração. A partir do menor autovalor encontrado ( $\omega_1(\mathbf{x})$ ) a primeira frequência natural de vibração é encontrada pela Equação A.18:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{\omega_1(\mathbf{x})}{2\pi} \quad (\text{A.18})$$

Para determinar a estabilidade da estrutura analisada, encontra-se o fator de carga crítica ( $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$ ). Para encontrar este valor, é utilizada a Equação A.19, que descreve o problema de autovalor e autovetor que rege a análise de estabilidade estrutural em estruturas reticuladas. Nela,  $[K_G]$  é a matriz de rigidez geométrica avaliada para um dado carregamento de referência. Os autovalores ( $\lambda(\mathbf{x})$ ) correspondem aos fatores de carga e os autovetores ( $\{\Delta\}(\mathbf{x})$ ) associados são os respectivos modos de instabilidade. O fator de carga crítica ( $\lambda_{crit}(\mathbf{x})$ ) é o menor autovalor computado. [64]

$$([K] + \lambda(\mathbf{x})[K_G])\{\Delta(\mathbf{x})\} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Todo o processo explicado neste Apêndice, assim como sua implementação em um óf pode ser melhor compreendido com o pseudo-algoritmo apresentado a seguir:

```

Definir matriz de coordenadas Coord
Definir matriz de conectividades Conect
Definir vetor de forças p
N_nos = número de linhas de Coord
N_ele = número de linhas de Conect

Inicializar as matrizes com zeros. Dimensões igual número de GL's:
K=zeros(N_nos*6,N_nos*6)
M=zeros(N_nos*6,N_nos*6)
K_G=zeros(N_nos*6,N_nos*6)

Para i variando de 1 até N_ele:

    Calcular L, senos e cossenos diretores a partir de Conect e Coord
    Conhecer as características do elemento: E, G, A, I_x, I_y, I_z
    Encontrar matrizes em referenciais locais K_i_l, M_i_l, K_G_i_l
    Encontrar matriz de transformação de rotação R_T
    Definir vetor LM do elemento

    Transformar as matrizes para referenciais globais:
    K_i_g = transposta(R_T)*K_i_l*R_T
    M_i_g = transposta(R_T)*M_i_l*R_T
    K_G_i_g = transposta(R_T)*K_G_i_l*R_T

    Somar as contribuições do elementos às matrizes globais:
    K(LM,LM)=K(LM,LM)+K_i_g
    M(LM,LM)=M(LM,LM)+M_i_g
    K_G(LM,LM)=K_G(LM,LM)+K_G_i_g

Encontrar o vetor de deslocamentos  $u=K^{-1}*p$ 
Resolver o problema de auto-valor com K e M
Resolver o problema de auto-valor com K e K_G

```