

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - UFJF

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DF



Dissertação de Mestrado

Buracos de Minhoca e Condições de Energia

Mateus Pereira dos Santos

JUIZ DE FORA - MG, BRASIL

2021

Mateus Pereira dos Santos

Buracos de Minhoca e Condições de Energia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF (área de concentração: Cosmologia), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Instituto de Ciências Exatas - ICE
Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

JUIZ DE FORA - MG, BRASIL

2021

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pereira dos Santos, Mateus.

Buracos de Minhoca e Condições de Energia / Mateus Pereira dos Santos. -- 2021.

106 p.

Orientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

1. Relatividade Geral. 2. Buraco de Minhoca. 3. Condições de Energia. 4. Matéria Exótica. I. Murilo Carvalho de Abreu, Everton, orient. II. Título.

Mateus Pereira dos Santos

"Buracos de Minhoca e as Condições de Energia".

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física Área de concentração Física

Aprovada em 30 de agosto de 2021.

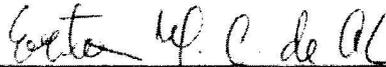
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Everton Múriilo Carvalho de Abreu - Orientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ



Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Dedico este trabalho à minha família e amigos que sempre me apoiaram.

Agradecimentos

Meus agradecimentos: A toda minha família, principalmente aos meus pais, Fátima e Augusto, e irmão Daniel, por estarem sempre ao meu lado e me apoiarem durante meu percurso; aos meus melhores amigos Grazielle Freire, Ayrton Nascimento e Jonas César por todo apoio e amizade, a todos os meus demais que me acompanharam durante o mestrado; ao meu orientador Prof. Dr. Everton M. C. Abreu pela sugestão do tema deste trabalho e por todo conhecimento transmitido; e a CAPES pelo apoio ao meu projeto de mestrado.

*"O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao
espaço-tempo como se curvar."
Jonh Wheeler*

Resumo

Neste trabalho, tratamos de buracos de minhoca com geometria esfericamente simétricas, estáticos e estacionários. Discutimos que para um buraco de minhoca ser de fato uma passagem entre dois universos assintoticamente planos, é necessário que exista um alargamento da garganta na região de raio r_0 . E mediante as equações de campo de Einstein para esse buraco de minhoca, observa-se que a matéria que gera o buraco de minhoca, satisfazendo a condição de alargamento da garganta, tem como característica violar as até então consagradas condições de energia, sendo chamada portanto de *matéria exótica*. No entanto, esse tipo de matéria não é a única fonte a violar as condições de energia. Campos escalares com acoplamento mínimo, por exemplo, já são capazes de tais violações. Além disso, apresentamos aqui outra geometria que caracteriza um buraco de minhoca, mais especificamente, um buraco de minhoca com rotação, o que ainda assim, compõe uma infinidade de métricas possíveis, sendo cada uma delas caracterizadas pela especificação das funções métricas, e tais especificações dependerão dos propósitos. Essas funções devem obedecer certas propriedades que são impostas a fim de gerarem soluções fisicamente aceitáveis das equações de campo de Einstein.

Palavras-Chave: Relatividade Geral, Buraco de Minhoca, Condições de Energia, Matéria Exótica.

Abstract

In this work we have discussed the theory about wormholes. Firtly we will describe wormholes that have spherical and symmetric geometry and that are static and stationary. It is argued that for a wormhole to actually be a passage between two asymptotically flat universes, it is necessary that we have a widening of the throat in the region of radius r_0 . And from the Einstein field equations for that wormhole, it is observed that the material that generates the wormhole, satisfying the flare out conditions of the throat, has the property of violating energy conditions and hence, is called *exotic matter*. However, this type of matter is not the only source to violate the energy conditions. For example, scalar fields with minimal coupling are able to show such violations. Futhermore, we will show another geometries that characterizes a wormhole, more specifically, a rotating wormhole, which generates an infinity of possible metrics, each of which is characterized by the specification of metric functions, and such specifications will depend on their purposes. These functions must obey certain properties that are imposed in order to generate physically acceptable solutions of Einstein field equations.

Keywords: General Relativity, Wormhole, Energy Conditions, Exotic Matter.

Lista de Figuras

4.1	(a) Diagrama de imersão para um buraco de minhoca que conecta dois universos diferentes, com a garganta em $\xi = 0$. (b) Diagrama de imersão para um buraco de minhoca que conecta duas regiões distintas do mesmo universo, com a garganta em $\xi = 0$. Essa figura é adaptada de [3], Fig. 1.	26
4.2	Diagrama de imersão de uma seção bidimensional, ao longo do plano equatorial ($\theta = \pi/2$ e $t = \text{cte}$) de um buraco de minhoca. Esta figura vem de [2].	30

Lista de Tabelas

4.1	Tabela dos Símbolos de Christoffel não nulos	31
4.2	Componentes não nulas do tensor de curvatura	31
4.3	Componentes do tensor de curvatura na nova base.	33
5.1	Componentes do tensor métrico.	42
5.2	Componentes do tensor métrico inverso.	42

Sumário

1	Introdução	1
2	Elementos de Relatividade Geral	4
2.1	Sistema de coordenadas e tensores no espaço-tempo	4
2.2	Métrica	5
2.3	Derivada covariante e Conexão Afim	7
2.4	Transporte paralelo e Geodésicas	9
2.5	Curvatura no espaço-tempo	11
2.6	Derivada exterior e Formas Diferenciais	13
2.6.1	Derivada Exterior	14
2.6.2	Método de Cartan	16
2.6.3	Exemplo para o Caso de Simetria Esférica	17
2.7	Equações de Campo de Einstein	19
3	Condições de Energia	21
3.1	Campo Escalar	23
3.2	Campo Escalar com Acoplamento Não-Mínimo	24
4	Buracos de Minhoca em Espaço-Tempo	26
4.1	Buracos de Minhoca de Schwarzschild	26
4.2	Diagramas de Imersão	28
4.3	Equações de Estrutura do Buraco de Minhoca	30
4.3.1	Símbolos de Christoffel (conexões) e Tensor de Curvatura	30
4.4	Forças Gravitacionais de Maré e Tempo de Travessia	33
4.5	Equações de Campo de Einstein	37
5	Buracos de Minhoca com Rotação	40
5.1	A Métrica de um Buraco de Minhoca com Rotação	40
5.2	Tensor de Ricci e Tensor de Einstein	41
5.3	Base de 1-formas para o Buraco de Minhoca com Rotação	47
5.4	Violação da Condição de Energia Nula (NEC)	52
5.5	Condições para um Buraco de Minhoca com Rotação Ser Atravessável	54

6	Conclusão	56
	Referências Bibliográficas	58
A	Simetrias do tensor de Riemann	60
B	Equação de Einstein e Limite Newtoniano	64
C	Curvatura 2-formas e Equação de Estrutura de Cartan	71
C.1	Vetores, 1-formas e Tensores Revisitados	71
C.1.1	Vetores Tangentes	71
C.1.2	1-formas ou, Vetores Covariantes ou Covetores	73
C.1.3	Tensores e Produto Tensorial	74
C.2	Parênteses de Lie e Derivadas de Lie	76
C.3	Derivada Covariante e as 1-formas	78
C.4	Curvatura 2-formas e Equações de Estrutura de Cartan	81

Capítulo 1

Introdução

A teoria de Einstein da gravitação, Teoria da Relatividade Geral, veio para dar uma nova descrição ao campo gravitacional em termos da geometria do espaço-tempo, e a relação entre essa geometria e a distribuição de matéria nesse espaço-tempo. Segundo a teoria, o campo gravitacional pode ser visto, não mais como um campo de forças em um espaço plano, mas agora, como uma curvatura no espaço gerada por uma distribuição de matéria ali presente.

As equações que trazem essa relação entre geometria e matéria, são as chamadas equações de Einstein, que compõem um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, cujas soluções permitem determinar a métrica que descreve o espaço-tempo em questão. Essa teoria levou a certas consequências que diferem do que, até então, era conhecido pela física newtoniana. Consequências como dilatação do tempo e desvio da frequência da radiação eletromagnética para o vermelho, ou simplesmente *redshift*, por exemplo. Fenômenos esses que têm como origem a presença do campo gravitacional, ou como é tratado pela teoria, uma curvatura do espaço-tempo, e a intensidade desses fenômenos é maior, quanto mais intenso for o campo gravitacional.

Um ano após a publicação da teoria da relatividade geral por Einstein, o físico austríaco Karl Schwarzschild, em 1916, apresentou uma solução para as equações de Einstein, que consiste de um campo gravitacional esfericamente simétrico (e também estacionário), em um espaço-tempo livre de matéria (no vácuo), a menos por uma partícula massiva na origem. Tal solução descreve aproximadamente, por exemplo, o campo gravitacional gerado pela Terra ou pelo Sol. Isso porque devemos estar a uma distância suficiente, para o corpo parecer um ponto. Essa solução de Schwarzschild, apresenta, além do ponto singular em $r = 0$, onde se encontra a partícula massiva, um segundo valor, delimitando uma região esférica de raio $r = r_S = 2MG/c^2$, que é o raio de Schwarzschild. Região essa em que fenômenos como a dilatação temporal e o redshift seriam infinitos. Essa solução deu origem ao conhecido Buraco Negro estático e esfericamente simétrico, onde a região esférica de raio igual ao raio r_S de Schwarzschild, é chamado de *Horizonte de Eventos*.

Em 1916, o físico vienense Ludwig Flamm publicou um artigo intitulado *Contribu-*

tions to Einstein's theory of gravitation (do original *Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie*) [1], onde seu objetivo era apresentar as conclusões da solução de Schwarzschild de uma maneira mais clara. Lembre-se de que Schwarzschild publicou dois artigos notáveis em 1916, em que o primeiro está relacionado a solução de vácuo estática exterior e esféricamente simétrica, e o segundo a solução interior de um fluido incompressível relativístico [2]. Flamm em seu artigo mostrou por meio de esboços de um plano equatorial que as seções espaciais da solução interior de Schwarzschild possuem a geometria de uma porção de uma esfera redonda [2]. Além disso, ele mostrou que a superfície de revolução é isométrica a uma seção plana da solução externa de Schwarzschild. Agora, ele considerou que a curva meridional é uma parábola, onde a superfície de revolução une duas lâminas assintoticamente planas, que em uma terminologia moderna podem ser consideradas um túnel. No entanto, enfatizamos que ele não estava contemplando a possibilidade de soluções do tipo ponte ou buraco de minhoca [2].

O ***Buraco de Minhoca*** consiste de uma geometria no espaço-tempo tal como uma espécie de "ponte" entre dois universos distintos, ou apenas um atalho entre duas regiões do mesmo universo. Características relacionadas ao buraco de minhoca de Schwarzschild foram tratados por Herman Weyl (1920), e também por Einstein e Nathan Rosen (1930) [3].

Posteriormente, em 1988, Morris e Thorne publicaram o artigo intitulado *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity* [3], que será amplamente discutido neste trabalho, tratando a respeito do buraco de minhoca descrito pela solução de Schwarzschild, no vácuo, estático e esféricamente simétrico. Baseado em considerações relacionadas à utilização desse buraco de minhoca como um meio de viagens interestelares, Morris e Thorne passam a considerar um segundo tipo de buraco de minhoca, ainda seguindo uma métrica de Schwarzschild, porém, estando esse não no vácuo, mas na presença de matéria. E a partir disso, é feita uma discussão de quais seriam as características desejáveis que esse buraco de minhoca, que neste trabalho será chamado de buraco de minhoca de Morris-Thorne, deveria apresentar, a fim de se tornar uma possibilidade viável de viagem interestelar.

Diante das equações de campo que descrevem esse segundo tipo de buraco de minhoca, foi analisado aqui que tipo de matéria poderia gerar a geometria necessária, e as características desejadas para esse buraco de minhoca. Foi considerado o comportamento da matéria geradora dessa geometria, com relação às chamadas *condições de energia*. Condições essas impostas ao tensor momento-energia, e que eram, por bastante tempo, tidas como razoáveis a fim de que fossem preservadas as propriedades físicas admissíveis. Essas condições garantiam propriedades tais como a positividade da massa e a validade de teoremas de singularidades.

As condições de energia consistem de um conjunto de condições impostas sobre o tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, e são elas: condição de energia fraca (WEC), a condição de

energia nula (NEC), condição de energia forte (SEC) e a condição de energia dominante (DEC). Cada uma delas apresenta uma propriedade que o tensor $T_{\mu\nu}$ deve satisfazer, como por exemplo, para o caso de um fluido puro, que a densidade de energia deve ser positiva, $\rho \geq 0$. No entanto, como será visto mais a frente, algumas dessas condições podem ser violadas em determinadas situações, e para determinados tensores momento-energia. E com isso, um caso em que ocorre violação das condições de energia, é justamente o da matéria que gera o buraco de minhoca, o que resulta na consideração da chamada *matéria exótica*, como será visto mais a frente neste trabalho.

Portanto, este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir os buracos de minhoca, as condições de energia e violação dessas pela matéria que gera o buraco de minhoca de Morris-Thorne. E também considerar outras possibilidades de geometrias que também caracterizam buracos de minhoca, mais especificamente um buraco de minhoca que apresenta rotação.

Dito isso, este trabalho expõe, no capítulo 2, uma revisão de tópicos importantes de geometria diferencial e relatividade geral, tais como as noções de métrica no espaço-tempo, geodésicas, curvatura, e como tudo isso se relaciona com gravitação por meio das equações de Einstein. Em seguida, no capítulo 3, são apresentadas explicitamente as condições de energia, e a forma que essas assumem no contexto de um fluido puro, também para o campo escalar, com acoplamento mínimo e não-mínimo, em que surge o termo $\varepsilon R\varphi^2$ na lagrangeana, e como esse campo pode violar uma dessas condições. No capítulo 4, é apresentado o buraco de minhoca de Morris-Thorne, explicitando as características que esse apresenta e as condições importantes como a *condição de alargamento* da garganta, que será a responsável por introduzir a ideia de que são necessárias fontes (matéria) que acabam por violar as condições de energia. Por fim, no capítulo 5, é descrito um buraco de minhoca com rotação, e as condições que as funções métricas devem obedecer para se obter soluções fisicamente aceitáveis, a derivação das conexões, tensores de Ricci e Einstein da forma tradicional. E em seguida, a utilização de outros métodos com o interesse em analisar a condição de energia fraca, e também algumas condições sobre as forças de maré. Finalizando o trabalho, são tiradas conclusões e discutidas perspectivas para trabalhos futuros. Esta dissertação também é acompanhada por alguns apêndices que tratam de tópicos importantes, que podem auxiliar o leitor em um maior entendimento desse trabalho.

Capítulo 2

Elementos de Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral foi responsável por introduzir a relação entre o campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo, de forma que a interação gravitacional experimentada por uma partícula presente nessa região, é consequência deste espaço-tempo apresentar uma curvatura.

Para um espaço plano, há uma geometria euclidiana correspondente. Para o espaço de Minkowski, tem-se uma geometria pseudo-euclidiana cuja métrica é induzida pela propagação de um raio luminoso. Em uma região onde existe um campo gravitacional, o espaço-tempo é curvo, portanto a geometria correspondente é não euclidiana. Isso pode ser aplicado tanto aos campos gravitacionais "verdadeiros"¹, em que o espaço-tempo é curvo, quanto nas situações em que o sistema de referência não é inercial [4].

A teoria geral da relatividade é muito bem discutida em vários livros tais como [5], [6], [7], [8] e [4]. Sendo assim, neste capítulo serão abordados os pontos que são importantes para a compreensão deste trabalho. Noções como variedades, tensores, manipulações de índices, componentes covariantes e contravariantes, dentre outros, serão tomados como familiares ao leitor.

2.1 Sistema de coordenadas e tensores no espaço-tempo

São usadas coordenadas arbitrárias de um ponto p da variedade \mathcal{M} (espaço-tempo), como resultante da aplicação $\phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^4$, com $p \in \mathcal{U}$, em que \mathcal{U} e \mathcal{V} são abertos, de modo que $\phi(p) = x^\mu(p) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Considerando uma transformação de coordenadas de um sistema x^μ a outro x'^μ , de modo que

$$x'^\mu = \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.1.1)$$

¹Campos gravitacionais verdadeiros são aqueles presentes em variedades livres de torção, como é o caso do espaço-tempo da relatividade geral.

onde ξ^μ são certas funções reais.

Considerando um campo escalar $\varphi = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, pode-se definir o gradiente desse campo como tendo componentes $\partial_\mu \varphi$, em que $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. É possível mostrar que o gradiente de uma função escalar se transforma como um vetor, neste caso, covariante:

$$\partial'_\mu \varphi(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \varphi(x). \quad (2.1.2)$$

Seja um campo vetorial com componentes contravariantes $V^\mu = V^\mu(x)$. Quando realizada uma mudança de um sistema de coordenadas para outro, este campo vetorial segue a lei de transformação

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x). \quad (2.1.3)$$

Quando as componentes são covariantes, a lei de transformação é

$$V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu(x). \quad (2.1.4)$$

Para um campo tensorial de *rank* (n, m) , sob uma mudança de sistema de referência, a lei de transformação é

$$T'^{\mu\nu\dots\sigma}_{\alpha\beta\dots\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\delta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} \cdots \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\omega} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \cdots \frac{\partial x^\phi}{\partial x'^\rho} T^{\delta\kappa\dots\omega}_{\tau\lambda\dots\phi}, \quad (2.1.5)$$

em que estão presentes n índices contravariantes e m índices covariantes.

2.2 Métrica

O espaço-tempo é uma *Variedade Riemanniana* quadridimensional. Sendo assim, o espaço-tempo admite um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que possibilita determinar, por exemplo, a distância entre dois pontos da variedade, ou no caso do espaço-tempo, determinar o intervalo espaço-temporal entre dois eventos², de forma que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2.1)$$

em que $g_{\mu\nu}$ é função das coordenadas do espaço-tempo, e simétrico nos índices μ e ν , ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

A contração $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é uma quantidade escalar e é também invariante por transformações entre sistemas de coordenadas. Sendo

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (2.2.2)$$

² ds é a versão infinitesimal de um intervalo $\Delta s = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$.

e também

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (2.2.3)$$

tudo isso aliado ao fato de que, pela regra da cadeia

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}}, \quad (2.2.4)$$

uma vez que $x^{\mu} = \xi^{\mu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$, pode-se mostrar que

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = ds^2. \quad (2.2.5)$$

Um tensor métrico é dito ser **semi-riemanniano**, ou **pseudo-riemanniano**, se é simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, e não degenerado, ou seja, $g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = 0$ se A^{μ} ou B^{ν} forem nulos. Assim, o tensor métrico possui um número de dez componentes independentes. O tensor métrico é dito ser **Riemanniano** se for não negativo, ou seja $g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} \geq 0$.

Pode-se determinar o tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ por meio da relação

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \lambda \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \lambda \end{cases}, \quad (2.2.6)$$

que é a chamada **delta de Kronecker**.

A condição de simetria sobre um tensor métrico garante que $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{e}^{\mu} \otimes \mathbf{e}^{\nu}$, possui autovalores reais, e garante a possibilidade de diagonalizá-lo em um ponto p da variedade, ou seja, para um ponto p existe uma base em $T_p \mathcal{M}^3$ tal que o operador \mathbf{g} assume uma forma diagonal. Em seguida, ordenando os elementos da diagonal obtidos e normalizando-os, chega-se, no caso do espaço-tempo da relatividade geral, sempre ao tensor métrico de Minkowski

$$\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.2.7)$$

O par (n, m) em que n é o número de autovalores positivos de \mathbf{g} , e m o número de autovalores negativos de \mathbf{g} , sempre contando a degenerescência dos autovalores, é denominado **assinatura** do tensor métrico \mathbf{g} , e é um invariante por mudança de sistema de coordenadas. Muitas vezes a assinatura (n, m) de um tensor métrico semi-riemanniano é denotado por n sinais "+" e m sinais "-"

$$\underbrace{(+, \dots, +)}_{n \text{ vezes}}, \underbrace{(-, \dots, -)}_{m \text{ vezes}}.$$

Um tensor métrico riemanniano possui assinatura $(+, \dots, +)$. Além de tensores

³ $T_p \mathcal{M}$ é o espaço vetorial tangente à variedade no ponto p . Espaços tangentes em pontos distintos da variedade, são diferentes. Assim, operações tais como soma de vetores definidos em espaços tangentes diferentes, não é possível de ser realizada.

métricos com tal assinatura, há também um interesse por tensores métricos com assinatura $(+, -, \dots, -)$ ou $(-, +, \dots, +)$ dependendo da convenção, pois são tais tensores métricos que ocorrem na descrição do espaço-tempo na relatividade geral. Tensores métricos com assinatura $(+, -, \dots, -)$ ou $(-, +, \dots, +)$ são chamados de **Lorentzianos**. No decorrer dessa dissertação, a assinatura utilizada para a métrica será $(-, +, \dots, +)$.

O tensor métrico é de grande importância para a teoria geral da relatividade. Isso se deve ao fato de $g_{\mu\nu}$ ser o responsável por refletir a geometria do espaço-tempo na presença, ou não, de uma distribuição de matéria ou energia, sendo que tal distribuição, quando presente, modifica a geometria do espaço-tempo ao seu redor. Assim, a métrica⁴ tem o papel de informar como esse espaço-tempo irá se comportar nessas condições. Portanto, diferente do que ocorre com a métrica no espaço de Minkowski na relatividade especial, a métrica $g_{\mu\nu}$ na relatividade geral é o objeto dinâmico da teoria. Ao se resolver as equações de campo de Einstein, o objetivo geral é determinar as componentes não nulas do tensor métrico. Na relatividade especial, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ é o objeto absoluto da teoria, e portanto, se mantém invariante sob transformações entre sistemas de coordenadas, isto é,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2.2.8)$$

que é uma equação matricial em que η é a matriz da métrica e Λ é a matriz da transformação de Lorentz. A equação (2.2.8) expressa o fato de que a métrica de Minkowski é um invariante por transformações de Lorentz.

2.3 Derivada covariante e Conexão Afim

Uma operação importante tanto em variedades planas quanto curvas, é a operação de derivação. Em espaços planos, a derivada de uma função é feita avaliando o valor da função em dois pontos separados infinitesimalmente, isto é, tomando o limite do intervalo dos dois pontos indo à zero. Porém, um problema que surge quando se está falando de variedades curvas, é o fato de a derivada parcial simples não se transformar adequadamente quando aplicada aos tensores. No caso de um vetor contravariante, a lei de transformação é

$$\partial'_\mu A'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\alpha A^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A^\beta. \quad (2.3.1)$$

O que se deseja é uma espécie de **Derivada Covariante**, uma operação que corresponda à uma derivada parcial simples quando a variedade em questão é plana, porém que se transforma adequadamente como um tensor em uma variedade arbitrária. Para resolver esse problema, é introduzido um objeto não tensorial, ou seja, que não se transforma adequadamente como um tensor, mas que corrige o problema levando a derivada

⁴Daqui em diante, por conveniência, o tensor métrico será chamado simplesmente de métrica, assim como o intervalo espaço-temporal ds^2 , uma vez que ambos estão relacionadas.

a se transformar da maneira desejada. Esse objeto é a chamada *Conexão Afim*, cujas componentes são $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, e sua lei de transformação é

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (2.3.2)$$

Portanto, define-se a chamada *Derivada Covariante* como sendo, no caso de um vetor contravariante

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu A^\alpha. \quad (2.3.3)$$

E para o caso de um vetor covariante,

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha. \quad (2.3.4)$$

Finalmente, considerando um tensor de rank (n, m) , a sua derivada covariante é

$$\nabla_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \partial_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{\sigma_i \mu}^{\alpha_i} T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \sigma_i \dots \alpha_n} - \sum_{j=1}^m \Gamma_{\beta_j \mu}^{\sigma_j} T_{\beta_1 \dots \sigma_j \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (2.3.5)$$

em que $T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \sigma_i \dots \alpha_n}$ significa que o índice α_i é substituído por σ_i e analogamente para $T_{\beta_1 \dots \sigma_j \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

Às vezes, uma notação muito útil de se utilizar é,

$$\partial_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \equiv T_{\beta_1 \dots \beta_m, \mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad (2.3.6)$$

e

$$\nabla_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \equiv T_{\beta_1 \dots \beta_m; \mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (2.3.7)$$

O próximo passo é encontrar uma maneira de determinar os coeficientes da conexão afim. Para isso, é preciso impor algumas condições que a variedade deve satisfazer.

Dada uma conexão especificada por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, pode-se formar imediatamente outra conexão simplesmente permutando os índices inferiores. Existe, portanto, um tensor que é associado a qualquer conexão, conhecido como *Tensor de Torção*, cujas componentes são

$$T_{\cdot, \mu\nu}^\lambda := 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (2.3.8)$$

em que $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda$ é a antissimetrização da conexão nos índices inferiores. Assim, uma conexão é dita ser uma *conexão simétrica*, ou *livre de torção*, se o tensor de torção associado for identicamente nulo. Impor que o tensor de torção seja nulo, significa impor que suas componentes são nulas em um sistema de coordenadas e portanto, em todos eles. Assim, uma conexão simétrica satisfaz, em todos os pontos da variedade

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.3.9)$$

Uma outra característica interessante que a conexão pode ter, é ser dita *métrica*, ou seja, se a derivada covariante da métrica for nula,

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3.10)$$

então a conexão afim associada é dita uma *conexão métrica*. Com isso, por meio de (2.3.10) é possível escrever as seguintes relações

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda} = 0, \quad (2.3.11)$$

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} = \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}g_{\nu\lambda} = 0, \quad (2.3.12)$$

$$\nabla_{\nu}g_{\alpha\mu} = \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\alpha\lambda} = 0. \quad (2.3.13)$$

Somando (2.3.12) com (2.3.13) e subtraindo (2.3.11), utilizando (2.3.9), e após algumas manipulações, é obtida a seguinte relação entre a conexão e a métrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}), \quad (2.3.14)$$

que coincide com os *Símbolos de Christoffel*. O mais importante é notar que segundo (2.3.14), em uma variedade livre de torção e cuja derivada covariante da métrica é nula, os coeficientes da conexão afim são univocamente determinados por meio do tensor métrico.

A formulação de Einstein da teoria da relatividade geral pressupõe uma conexão livre de torção e com $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$.

2.4 Transporte paralelo e Geodésicas

Em uma variedade arbitrária, deve-se ter cuidado ao comparar vetores que se encontram em pontos distintos da variedade, pois estes pertencem a espaços tangente diferentes. O que pode ser feito, é transportar um dos vetores até o ponto desejado. Porém, esse processo não é tão simples, pois dependendo do caminho adotado para levá-lo de um ponto à outro, o vetor pode ser modificado devido à curvatura da variedade. Em uma variedade plana, não é necessário ter esse tipo de cuidado. A razão disso é que, mover um vetor de um ponto à outro mantendo-o constante, é algo natural.

A ideia de mover um vetor ao longo de um caminho, mantendo-o constante todo o tempo é conhecida como *transporte paralelo*. Diferente de espaços planos, em espaços curvos, o resultado de transportar paralelamente um vetor de um ponto à outro desse espaço vai depender do caminho tomado entre os pontos final e inicial.

Considerando uma curva $x^{\mu}(\tau)$, em que τ é um parâmetro ao longo da curva. Em espaços planos, adotando coordenadas cartesianas, o transporte paralelo de um vetor

mantêm suas componentes constantes ao longo da curva, ou seja

$$\frac{dV^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu V^\mu = 0. \quad (2.4.1)$$

Em uma variedade curva, define-se o transporte paralelo de um vetor V^μ ao longo da curva $x^\mu(\tau)$ como

$$\frac{DV^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \nabla_\nu V^\mu = 0, \quad (2.4.2)$$

em que é definido a **derivada covariante ao longo da curva** $x^\mu(\tau)$

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu. \quad (2.4.3)$$

Assim, a condição para que um campo tensorial de *rank* (n, m) possa ser transportado paralelamente ao longo de uma curva $x^\alpha(\tau)$ é

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = 0. \quad (2.4.4)$$

Pode-se encarar a equação de transporte paralelo como uma equação diferencial de primeira ordem com valores iniciais. Dado um tensor em algum ponto ao longo do caminho, haverá uma continuação única do tensor para outro ponto nesse caminho, de forma que a continuação resolva (2.4.4) [5]. Assim, é dito que esse tensor foi transportado paralelamente.

Com tudo isso, o próximo passo é discutir o conceito de **geodésica**. A curva geodésica é uma generalização, para variedades arbitrárias, de uma linha reta em variedades planas. É conhecido que a linha reta é a menor distância entre dois pontos. Mas de uma forma mais elaborada e conveniente para essa discussão, a linha reta é a curva na qual o seu vetor tangente é transportado paralelamente. Começando por essa segunda definição, *uma geodésica é uma curva pela qual seu vetor tangente é transportado paralelamente*. O vetor tangente para um caminho $x^\mu(\tau)$ é $\frac{dx^\mu}{d\tau}$. Assim, a condição para se transportar paralelamente o vetor tangente é $\frac{D}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$, com isso, é obtida a equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.4.5)$$

Essa é a **equação da geodésica**, e se reduz a noção de linha reta em espaços euclidianos quando a conexão, assumindo coordenadas cartesianas, é $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$, e a equação (2.4.5) se reduz à

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.4.6)$$

que é a equação para uma linha reta.

2.5 Curvatura no espaço-tempo

Tendo discutido a respeito do transporte paralelo, o próximo passo é abordar a curvatura de uma variedade. A curvatura é expressa por meio do *Tensor de Riemann*, ou *Tensor de Curvatura*, que por sua vez é obtido por meio da conexão.

A derivada covariante de um tensor ao longo de uma curva, fornece a ferramenta para definir o transporte paralelo de vetores na variedade. Com isso, a derivada covariante de um tensor ao longo de uma direção, mede o quanto o tensor muda em relação ao que seria se este tivesse sido transportado paralelamente, uma vez que a derivada covariante de um tensor ao longo de uma direção em que é transportado paralelamente é zero. Assim, a relação entre este tensor de Riemann, e o transporte paralelo ao longo de um caminho fechado logo estará clara.

Definindo o comutador de duas derivadas covariantes como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu, \quad (2.5.1)$$

quando aplicado a um tensor, mede a diferença entre o transporte paralelo deste tensor primeiro de uma maneira e depois de outra, versus a ordem oposta.

Considerando um campo vetorial V^α , e sobre ele aplicado o comutador (2.5.1)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha, \quad (2.5.2)$$

após alguns cálculos, é obtida a relação

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\alpha, \quad (2.5.3)$$

em que, no segundo termo aparece o tensor de torção, e no primeiro termo o chamado tensor de Riemann, que é identificado como

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta}. \quad (2.5.4)$$

Assim, a aplicação do comutador (2.5.1) em um campo vetorial, resulta em uma parte proporcional ao campo vetorial, medida pelo tensor de Riemann, e uma segunda parte proporcional à derivada covariante do campo vetorial, que é medida pelo tensor de torção.

O tensor de Riemann (2.5.4) é determinado a partir da conexão, sendo ela qualquer, não só àquela obtida em (2.3.14), que é o próprio símbolo de Christoffel.

Para um tensor de *rank* arbitrário, a ação de $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ é computado como

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] S^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= -T^\lambda_{\alpha\beta} \nabla_\lambda S^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + R^\mu_{\lambda\alpha\beta} S^{\lambda\mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + R^\mu_{\lambda\alpha\beta} S^{\mu_1 \lambda \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \\ &+ \dots + R^\mu_{\lambda\alpha\beta} S^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_m} - R^\lambda_{\nu_1\alpha\beta} S^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} - R^\lambda_{\nu_2\alpha\beta} S^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_m} - \end{aligned}$$

$$- \dots - R_{\nu_m \alpha \beta}^\lambda S^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \lambda}. \quad (2.5.5)$$

Uma primeira propriedade que pode ser vista diretamente da expressão (2.5.4), é a sua antissimetria nos dois últimos índices

$$R_{\cdot \beta \mu \nu}^\alpha = -R_{\cdot \beta \nu \mu}^\alpha. \quad (2.5.6)$$

Existem algumas outras simetrias para o tensor de Riemann que são notáveis. Para elas, é conveniente escrever $R_{\cdot \beta \mu \nu}^\alpha$ como

$$R_{\alpha \beta \mu \nu} = g_{\alpha \lambda} R_{\cdot \beta \mu \nu}^\lambda. \quad (2.5.7)$$

Para o leitor que estiver interessado na demonstração das simetrias à seguir, consulte o apêndice A. As simetrias e identidades interessantes que valem ser mencionadas são:

$$R_{\alpha \beta \mu \nu} = -R_{\beta \alpha \mu \nu}; \quad (2.5.8)$$

$$R_{\alpha \beta \mu \nu} = -R_{\alpha \beta \nu \mu}; \quad (2.5.9)$$

$$R_{\alpha \beta \mu \nu} = R_{\mu \nu \alpha \beta}. \quad (2.5.10)$$

As identidades notáveis que também valem ser mencionadas são as chamadas ***Identidades de Bianchi***. São elas então:

$$R_{\alpha \beta \mu \nu} + R_{\alpha \mu \nu \beta} + R_{\alpha \nu \beta \mu} = 0, \quad (2.5.11)$$

$$\nabla_\lambda R_{\alpha \beta \mu \nu} + \nabla_\alpha R_{\beta \lambda \mu \nu} + \nabla_\beta R_{\lambda \alpha \mu \nu} = 0. \quad (2.5.12)$$

As demonstrações das identidades (2.5.11) e (2.5.12) podem ser encontradas também no apêndice A.

Um tensor muito importante, é aquele que é obtido ao realizar a contração no primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann. Este é o traço não nulo do tensor de Riemann

$$R_{\mu \nu} = R_{\cdot \mu \lambda \nu}^\lambda, \quad (2.5.13)$$

e é chamado de ***tensor de Ricci***. Este tensor, por sua vez é simétrico, $R_{\mu \nu} = R_{\nu \mu}$.

A partir da identidade (2.5.12), é possível obter uma relação importante. Contraíndo esta identidade com $g^{\nu \beta} g^{\mu \lambda}$, obtêm-se

$$\nabla_\mu G^{\alpha \mu} = 0, \quad (2.5.14)$$

em que

$$G_{\alpha\mu} = R_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\mu} \quad (2.5.15)$$

é chamado de *tensor de Einstein*, e R é o *Escalar de Ricci*, ou *Escalar de Curvatura*, e é o traço do tensor de Ricci, ou seja,

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.5.16)$$

É possível, para fechar esta seção, determinar um sentido geométrico para o tensor de Riemann no que diz respeito ao chamado *Desvio Geodésico*. Este aspecto da curvatura de um espaço curvo pode ser representado na seguinte equação

$$\frac{D^2\delta x^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \delta x^\nu. \quad (2.5.17)$$

Esta é a chamada *equação do desvio geodésico* e expressa de forma analítica, que as forças de maré de um campo gravitacional, que são responsáveis por causar os desvios nas trajetórias de partículas vizinhas, são representadas pela curvatura do espaço-tempo onde as partículas seguem suas respectivas geodésicas. Em outras palavras, a curvatura do espaço é responsável por causar uma aceleração relativa entre duas geodésicas próximas. Ou seja, aceleração entre as trajetórias de duas partículas próximas em queda livre.

2.6 Derivada exterior e Formas Diferenciais

Em uma variedade diferencial \mathcal{M} de dimensão n , um conjunto particularmente importante, é o conjunto dos tensores de tipo $(0, q)$, que são totalmente antissimétricos nos q índices covariantes [8]

$$\alpha_{i_1 i_2 i_3 \dots i_q} = \alpha_{[i_1 i_2 i_3 \dots i_q]}.$$

Tais tensores tipo $(0, q)$, com $q \leq n$, são chamados de *q-forma*, ou simplesmente uma *forma*, ou *forma diferencial*. É importante observar que uma função escalar é considerada uma 0-forma.

Esse conjunto de formas, formam um espaço vetorial real. Existe ainda um produto neste espaço chamado de *Produto Exterior*. Sejam, \mathbf{A} e \mathbf{B} p -forma e q -forma, respectivamente. É definida uma $(p + q)$ -forma $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, em que \wedge é um produto totalmente antissimétrico, ou ainda, um produto tensorial totalmente antissimétrico. Com isso, é obtido o tensor do tipo $(0, p + q)$, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, com componentes dadas por

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_{\mu \dots \nu \alpha \dots \beta} = A_{[\mu \dots \nu} B_{\alpha \dots \beta]}. \quad (2.6.1)$$

O produto exterior satisfaz as propriedades

$$(i) \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{B}; \quad (2.6.2)$$

$$(ii) \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}); \quad (2.6.3)$$

$$(iii) \quad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (-1)^{pq} \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}. \quad (2.6.4)$$

O produto das formas, munido do produto externo, formam a chamada *Álgebra de Grassmann* [9].

Seja $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ uma base de 1-forma. É possível construir uma base de p -formas dada por $\{\mathbf{e}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{\alpha_p}\}$, de modo que qualquer p -forma pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = A_{\alpha\dots\beta} \mathbf{e}^\alpha \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^\beta, \quad (2.6.5)$$

com $A_{\alpha\dots\beta} = A_{[\alpha\dots\beta]}$.

2.6.1 Derivada Exterior

A *Derivada Exterior* é uma operação que mapeia um campo de p -formas em um campo de $(p+1)$ -formas. Para o caso de uma função $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma 0-forma, pode ser definida a 1-forma $d\varphi$, de modo que

$$\langle d\varphi, \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V}(\varphi), \quad (2.6.6)$$

$\forall \mathbf{V} \in T_p\mathcal{M}$. Sendo a coordenatização local (x^1, \dots, x^n) , com x^α sendo função do ponto $p \in \mathcal{M}$, podemos definir a base de 1-forma como (dx^1, \dots, dx^n) , de modo que, pode-se escrever uma p -forma \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} = A_{\alpha\dots\beta} dx^\alpha \wedge \dots \wedge dx^\beta. \quad (2.6.7)$$

A derivada exterior de uma p -forma \mathbf{A} é definida como

$$d\mathbf{A} = dA_{\alpha\dots\beta} \wedge dx^\alpha \wedge \dots \wedge dx^\beta, \quad (2.6.8)$$

sendo $d\mathbf{A}$ uma $(p+1)$ -forma. Ainda, $d\mathbf{A}$ pode ser escrita como

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial A_{\alpha\dots\beta}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\alpha \wedge \dots \wedge dx^\beta. \quad (2.6.9)$$

Considerando uma segunda coordenatização local (x'^1, \dots, x'^m) , de modo que,

$$A'_{\alpha\dots\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A_{\mu\dots\nu}. \quad (2.6.10)$$

Portanto, a derivada exterior $d\mathbf{A}$ é

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A_{\mu\dots\nu} \right) dx'^\lambda \wedge dx'^\alpha \wedge \dots \wedge dx'^\beta \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial A_{\mu\dots\nu}}{\partial x'^\lambda} dx'^\lambda \wedge dx'^\alpha \wedge \dots \wedge dx'^\beta + \\ &\quad + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A_{\mu\dots\nu} dx'^\lambda \wedge dx'^\alpha \wedge \dots \wedge dx'^\beta + \\ &\quad + \dots + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\lambda \partial x'^\beta} A_{\mu\dots\nu} dx'^\lambda \wedge dx'^\alpha \wedge \dots \wedge dx'^\beta. \end{aligned}$$

Como o termo do tipo

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^b \partial x'^c} dx'^b \wedge dx'^c \quad (2.6.11)$$

consiste de um objeto simétrico contraído com um objeto antissimétrico, essa contração se anula. Com isso, o resultado é

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial A_{\mu\dots\nu}}{\partial x'^\lambda} dx'^\lambda \wedge dx'^\alpha \wedge \dots \wedge dx'^\beta \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\rho} \cdots \frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial A_{\mu\dots\nu}}{\partial x'^\tau} dx'^\gamma \wedge dx'^\rho \wedge \dots \wedge dx'^\sigma \\ &= \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu \delta_\gamma^\tau \frac{\partial A_{\mu\dots\nu}}{\partial x'^\tau} dx'^\gamma \wedge dx'^\rho \wedge \dots \wedge dx'^\sigma \\ &= \frac{\partial A_{\mu\dots\nu}}{\partial x'^\tau} dx'^\tau \wedge dx'^\mu \wedge \dots \wedge dx'^\nu, \end{aligned}$$

mostrando assim, que a $(p+1)$ -forma $d\mathbf{A}$ é independente do sistema de coordenadas.

Considerando (2.6.6), para uma função f , em um sistema de coordenadas locais, pode-se escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.6.12)$$

de modo que, aplicando uma segunda derivada exterior

$$d^2 f \equiv d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.6.13)$$

em que $\partial^2 f / \partial x^\mu \partial x^\nu$ é simétrico, e está contraído com $dx^\mu \wedge dx^\nu$, que é antissimétrico. E como anteriormente, essa contração é nula. Assim, $d(df) = 0$. Igualmente, se aplicarmos

o operador d em (2.6.9) têm-se

$$d(d\mathbf{A}) = \frac{\partial^2 A_{\alpha\dots\beta}}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} dx^\tau \wedge dx^\lambda \wedge dx^\alpha \wedge \dots \wedge dx^\beta, \quad (2.6.14)$$

de modo que o mesmo ocorre, ou seja

$$\frac{\partial^2 A_{\alpha\dots\beta}}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} dx^\tau \wedge dx^\lambda = 0. \quad (2.6.15)$$

Concluindo então que

$$d(d\mathbf{A}) = 0, \quad (2.6.16)$$

é válido para qualquer p -forma \mathbf{A} .

Considerando, agora, duas funções f e g . A regra de Leibnitz (regra do produto) é válida para essas funções, ou seja

$$d(fg) = gdf + fdg. \quad (2.6.17)$$

Essa regra continua válida para quaisquer duas p -formas, \mathbf{A} e \mathbf{B} , porém assumindo a forma

$$d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (-)^p \mathbf{A} \wedge d\mathbf{B} \quad (2.6.18)$$

que é a regra produto para as formas. Uma forma α para o qual $d\alpha$ é zero, é dita ser *fechada*; enquanto que, se $\alpha = d\beta$ para alguma forma β , é dito que α é exata.

2.6.2 Método de Cartan

O estudo que será feito a seguir, pode ser encontrado com bem mais detalhes em [9]. Sendo a variedade munida de uma métrica, pode-se escolher uma base de 1-formas de modo que todos os produtos internos entre os elementos dessa base são constantes. Supondo a base de 1-formas $\{\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$, o intervalo ds^2 pode ser escrito como

$$ds^2 = \mu_{ab} \alpha^a \alpha^b, \quad (2.6.19)$$

em que μ_{ab} é uma matriz de termos constantes. A base $\{\alpha^a\}$ é dual à base de vetores $\{e_a\}$, ou seja, a condição $\alpha_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$, com $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$, sendo os índices de elementos da base. Assim, pode-se definir a chamada *Conexão 1-forma* ω_b^a

$$\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a \alpha^c. \quad (2.6.20)$$

É possível ainda relacionar as conexões 1-formas com as derivadas exteriores $d\alpha^a$ como

$$d\alpha^a = -\omega_b^a \wedge \alpha^b. \quad (2.6.21)$$

Com isso, tendo explicitamente a base $\{\alpha^a\}$, então, pode-se resolver (2.6.21) para encontrar ω^a_b .

É de se esperar que a curvatura apareça ao se calcular a derivada exterior de ω^a_b . Considerando a combinação

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (2.6.22)$$

em que Ω^a_b pode ser pensado como uma matriz de 2-formas, também chamado de *Curvatura 2-formas*. Ainda é possível mostrar que (2.6.22) conduz à relação

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} \mathcal{R}^a_{bmn} \alpha^m \wedge \alpha^n, \quad (2.6.23)$$

com \mathcal{R}^a_{bmn} sendo as componentes do tensor de Riemann com relação a base $\{\alpha^a\}$ escolhida. As Eqs. (2.6.21) e (2.6.23) são as chamadas *Equações de Estrutura de Cartan* para o espaço-tempo livre de torção, e suas demonstrações podem ser encontradas pelo leitor no apêndice C dessa dissertação.

E para terminar, no caso particular em que μ_{ab} é simplesmente a métrica de Minkowski, as conexões 1-formas obedecem as propriedades [9]

$$\omega^0_i = \omega^i_0, \quad \omega^i_j = -\omega^j_i, \quad \text{com } i \neq j, \quad (2.6.24)$$

em que $i, j = 1, 2, 3$.

2.6.3 Exemplo para o Caso de Simetria Esférica

Para este caso, considere a métrica

$$ds^2 = -e^{2\lambda} dt^2 + e^{2\mu} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi), \quad (2.6.25)$$

onde os parâmetros λ e μ são funções apenas de r . O objetivo nesta subseção é determinar as componentes do tensor de Riemann por meio do método de Cartan [9]. Tomando a base de 1-formas dada por

$$\alpha^0 = e^\lambda dt, \quad \alpha^1 = e^\mu dr, \quad \alpha^2 = r d\theta, \quad \alpha^3 = r \sin \theta d\varphi. \quad (2.6.26)$$

Nessa base (2.6.26), o objeto μ_{ab} é a métrica de Minkowski $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, portanto, as conexões 1-forma satisfazem as propriedades (2.6.24). Primeiro, calculando as derivadas exteriores das 1-forma da base (2.6.26), o resultado é

$$d\alpha^0 = \lambda' e^\mu \alpha^1 \wedge \alpha^0, \quad d\alpha^1 = 0, \quad d\alpha^2 = \frac{1}{r} e^{-\mu} \alpha^1 \wedge \alpha^2,$$

$$d\alpha^3 = \frac{1}{r}e^{-\mu}\alpha^1 \wedge \alpha^3 + \frac{1}{r}\cot\theta\alpha^2 \wedge \alpha^3.$$

Utilizando (2.6.21), as propriedades (2.6.24) e os $d\alpha^a$ acima, as conexões 1-forma são

$$\begin{aligned}\omega_1^0 &= \omega_0^1 = \lambda'e^{-\mu}\alpha^0, \\ \omega_2^0 &= \omega_3^0 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0, \\ \omega_2^1 &= -\omega_1^2 = -\frac{1}{r}e^{-\mu}\alpha^2, \\ \omega_3^1 &= -\omega_1^3 = -\frac{1}{r}e^{-\mu}\alpha^3, \\ \omega_3^2 &= -\omega_2^3 = -\frac{1}{r}\cot\theta\alpha^3.\end{aligned}$$

O próximo passo, por meio de (2.6.22), é determinar as curvaturas 2-forma. Após cálculos não muito extensos, obtêm-se

$$\begin{aligned}\Omega_1^0 &= -(\lambda'' - (\lambda')^2 - \lambda'\mu')e^{-2\mu}\alpha^0 \wedge \alpha^1 \\ \Omega_2^0 &= -\frac{1}{r}\lambda'e^{-2\mu}\alpha^0 \wedge \alpha^2, \\ \Omega_3^0 &= -\frac{1}{r}\lambda'e^{-2\mu}\alpha^0 \wedge \alpha^3, \\ \Omega_2^1 &= -\frac{1}{r}\mu'e^{-2\mu}\alpha^1 \wedge \alpha^2, \\ \Omega_3^1 &= -\frac{1}{r}\mu'e^{-2\mu}\alpha^1 \wedge \alpha^3, \\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\mu})\alpha^2 \wedge \alpha^3.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a relação (2.6.23) entre as curvaturas 2-formas e as componentes do tensor de Riemann, é possível determinar as componentes não nulas:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{011}{}^0 &= -[\lambda'' - (\lambda')^2 - \lambda'\mu']e^{-2\mu}, \\ \mathcal{R}_{022}{}^0 &= \mathcal{R}_{033}{}^0 = -\frac{1}{r}\lambda'e^{-2\mu}, \\ \mathcal{R}_{122}{}^1 &= \mathcal{R}_{133}{}^1 = -\frac{1}{r}\mu'e^{-2\mu}, \\ \mathcal{R}_{233}{}^3 &= \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\mu}).\end{aligned}$$

A partir desse ponto, para determinar tensores de Ricci, Einstein, escalar de curvatura, e por fim, as equações de campo, pode ser feita das maneiras usuais.

Esta é uma técnica mais simples para determinar os tensores de Riemann do que

trabalhar os símbolos de Christoffel e usá-los. Para as métricas de sistemas físicos conhecidos, a escolha apropriada da base é clara e as derivadas externas são simples de calcular. Encontrar as conexões 1-forma envolve um pouco da resolução do sistema de equações e, em seguida, o cálculo da curvatura de 2 formas é novamente automático [9].

2.7 Equações de Campo de Einstein

Em relatividade geral, o campo gravitacional é caracterizado como a dinâmica que envolve a geometria do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia. As equações de campo de Einstein governam como a métrica do espaço responde à energia e matéria. As equações de campo são derivadas do princípio da ação mínima

$$\delta S = 0, \quad (2.7.1)$$

em que a ação postulada é a *ação de Einstein-Hilbert*,

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int (R + 2\Lambda) \sqrt{|g|} d^4x + S_M, \quad (2.7.2)$$

em que S_M é a ação relacionada à matéria, e Λ é a *constante cosmológica*, que em geral é desprezível em escalas de um aglomerado de galáxias, por exemplo, mas deve ser levado em consideração em escalas cosmológicas.

O princípio da ação mínima, utilizando (2.7.2), conduz às equações de campo de Einstein (a derivação pode ser vista no apêndice B)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.7.3)$$

Em que $T_{\mu\nu}$ é o *Tensor Momento-Energia*, que é definido por meio da ação referente a matéria,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.7.4)$$

Devido à identidade (2.5.14), a condição (2.3.10) e a Eq. (2.7.3), o tensor momento-energia obedece à identidade

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.7.5)$$

que tem o mesmo significado das leis de conservação.

A constante κ que aparece nas Eqs. (2.7.3) pode ser determinada por meio do limite Newtoniano, que pode ser consultado pelo leitor no apêndice B. Aqui, $\kappa = 8\pi G/c^4$, em que G é a constante universal da gravitação de Newton. Portanto, as equações (2.7.3)

podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.7.6)$$

e estas são as equações de campo de Einstein. São equações diferenciais de segundo ordem e não-homogêneas nas derivadas da métrica $g_{\mu\nu}$.

Capítulo 3

Condições de Energia

Ao lidar com problemas em relatividade geral, mais especificamente olhando para as equações de campo de Einstein, o lado esquerdo das equações são determinadas em função da métrica, o que pode ser arbitrário quando a teoria da matéria a partir da qual $T_{\mu\nu}$ é construído, não é considerada. Pensando na pergunta, *qual métrica obedece as equações de Einstein?* Em geral, não levando em consideração restrições, a resposta é, qualquer métrica. Dada uma métrica, o tensor de Einstein pode ser determinado, e a identidade (2.5.14) será satisfeita. A real preocupação é determinar soluções na presença de fontes realistas, sejam campos escalares, campos de matéria ou campos eletromagnéticos. Por outro lado, eventualmente haverá a necessidade de entender as propriedades das equações de Einstein mediante uma variedade de fontes diferentes. É conveniente, portanto, impor **condições de energia** sobre o tensor momento-energia que limitarão sua arbitrariedade [5].

Uma característica que a maioria das fontes materiais encontradas experimentalmente parecem compartilhar, é de que as densidades de energia (quase sempre) são positivas. As condições de energia em relatividade geral são um conjunto de maneiras variadas de tornar mais precisa a noção de densidade energética localmente positiva, ou pelo menos não negativas. Essas condições são invariantes por mudança de sistema de coordenadas, e consistem de criar escalares, de modo geral, por meio de contrações do tensor $T_{\mu\nu}$ com vetores arbitrários tipo-tempo ou tipo-luz.

Para fins de compreensão das condições de energia, será considerado o caso especial de um fluido perfeito cujo tensor momento-energia é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.0.1)$$

onde U_μ é a quadrivelocidade do fluido, p é a pressão e ρ a densidade de matéria. É importante observar que a partir desse capítulo, serão considerado as unidades em que $c = 1$.

São as condições de energia mais populares:

1. **Condição de Energia Fraca ou WEC:** Afirma que, para todo k^μ tipo-tempo,

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (3.0.2)$$

ou, equivalentemente que $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$.

2. **Condição de Energia Nula ou NEC:** Afirma que, para todo vetor tipo-luz ℓ^μ ,

$$T_{\mu\nu}\ell^\mu \ell^\nu \geq 0, \quad (3.0.3)$$

ou equivalentemente que $\rho + p \geq 0$.

3. **Condição de Energia Dominante ou DEC:** Inclui WEC, com a exigência de que $T^{\mu\nu}k_\mu$ não seja um vetor tipo-espaço, o que implica na condição

$$T_{\mu\nu}T^\nu_{\lambda}k^\mu k^\lambda \leq 0. \quad (3.0.4)$$

No caso de um fluido perfeito, tais condições juntas são equivalentes ao requisito $\rho \geq |p|$.

4. **Condição de Energia Forte ou SEC:** Afirma que, para todo vetor tipo-tempo k^μ ,

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda_{\lambda}k^\sigma k_\sigma, \quad (3.0.5)$$

o que é equivalente à $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

As condições acima implicam em situações razoáveis com relação a densidade de energia e pressão quando aplicadas ao fluido puro. A WEC garante que a densidade de energia medida por qualquer observador (tipo-tempo) seja não negativa, e a pressão não seja muito grande em comparação com a densidade de energia. A NEC é um caso particular da WEC em que o vetor é tipo-luz ao invés de tipo-tempo. A DEC inclui WEC, e implica que a densidade de energia precisa ser não negativa e maior ou igual a magnitude da pressão, e o fluxo de energia não é tipo-espaço. No caso de SEC, esta implica em NEC mas não implica em WEC, em geral.

Há um consenso geral de que a condição forte de energia (SEC) não é mais válida. A teoria mais simples do campo escalar que se pode escrever, o campo escalar com acoplamento mínimo, viola a SEC. Para o universo com período de inflação cosmológica, a SEC deve ser violada durante a época inflacionária. Levando em consideração os dados observacionais recentes sobre o universo em aceleração, a SEC é violada em escalas cosmológicas atualmente. Ou seja, não é interessante encarar a SEC como condição fundamental para a física. As demais condições de energia, NEC, WEC e DEC também estão prestes a serem descartadas. Recentemente, foi se tornando cada vez mais claro a existência de efeitos quânticos que são capazes de violar todas as condições de energia, mesmo as mais fracas delas como a NEC [10].

3.1 Campo Escalar

Para um campo escalar com massa nula, $m = 0$, como por exemplo o campo de Brans e Dicke [8], as condições são válidas. No entanto, seja um campo escalar massivo, $m \neq 0$, com a densidade lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (3.1.1)$$

com $(\nabla\varphi)^2 \equiv \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi$. Com isso, o tensor momento-energia para esse campo escalar é [11]

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu\varphi\nabla^\nu\varphi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]. \quad (3.1.2)$$

Considerando um vetor unitário tipo-tempo k^μ , tem-se que

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -1. \quad (3.1.3)$$

Pela condição de energia forte, para um vetor tipo-tempo qualquer, $T_{\mu\nu}$ deve satisfazer

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (3.1.4)$$

Sendo, para o tensor momento-energia (3.1.2), o traço é

$$T = \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi - 2 [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2], \quad (3.1.5)$$

então, para o vetor unitário tipo-tempo

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)k^\mu k^\nu &= \frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi)k^\mu k^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi)k^\mu(\nabla_\nu\varphi)k^\nu + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi)k^\mu(\nabla_\mu\varphi)k^\mu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu m^2\varphi^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)k^\mu k^\nu = (\mathbf{k} \cdot \nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (3.1.6)$$

o que pode ser negativo, violando facilmente a condição forte de energia.

Continuando, para um vetor nulo ℓ^μ , em que

$$g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0, \quad (3.1.7)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu &= (\nabla_\mu\varphi)\ell^\mu(\nabla_\nu\varphi)\ell^\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \\ \Rightarrow T_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu &= (\ell \cdot \nabla\varphi)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Sendo válida a condição de energia nula.

Voltando para o caso de um vetor tipo-tempo,

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = (\mathbf{k} \cdot \nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \geq 0. \quad (3.1.9)$$

Satisfazendo a condição de energia fraca.

E por fim, sendo o vetor dado pela contração

$$T_{\mu\nu}k^\nu = \nabla_\mu\varphi(\mathbf{k} \cdot \nabla\varphi) - \frac{1}{2}k_\mu [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2], \quad (3.1.10)$$

com k^ν sendo um vetor unitário tipo-tempo. A condição de energia dominante pede que

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0,$$

para todo vetor tipo-tempo, o que foi satisfeito pela condição fraca, e que o vetor (3.1.10) não seja tipo-espaço, o que pode ser expresso por

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\alpha}k^\alpha T_{\nu\beta}k^\beta \leq 0. \quad (3.1.11)$$

Desenvolvendo (3.1.11), utilizando (3.1.10), obtêm-se que

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\alpha}k^\alpha T_{\nu\beta}k^\beta = -(\mathbf{k} \cdot \nabla\varphi)^2 - \frac{1}{4} [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]^2 \leq 0, \quad (3.1.12)$$

o que satisfaz a condição (3.1.11), o que, aliado com (3.1.9), comprova a validade da condição de energia dominante, mas como visto, a condição de energia forte é violada.

3.2 Campo Escalar com Acoplamento Não-Mínimo

Para este campo escalar φ , tem-se o termo de acoplamento $\varepsilon R\varphi^2$, sendo R o escalar de curvatura, portanto, a lagrangeana para o campo escalar com acoplamento não-mínimo é [12]

$$\mathcal{L} = \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}(\nabla^\mu\varphi)(\nabla_\mu\varphi) - V(\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon R\varphi^2, \quad (3.2.1)$$

sendo m e $V(\varphi)$, respectivamente, a massa e o potencial do campo escalar φ [12]. Com isso, o tensor momento-energia á dado por [13, 14]

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\varphi)^2 - g_{\mu\nu}V(\varphi) + \varepsilon [G_{\mu\nu}\varphi^2 - 2\nabla_\mu(\varphi\nabla_\nu\varphi) - 2g_{\mu\nu}\nabla^\lambda(\varphi\nabla_\lambda\varphi)], \quad (3.2.2)$$

apresentando uma dependência com o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Utilizando $T_{\mu\nu}$ (3.2.2), e assim, agrupando todas as dependências de $G_{\mu\nu}$ no lado esquerdo das equações de Einstein, pode-se reescrevê-las, alternativamente, usando um tensor de energia-momento efetivo

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{1 - 8\pi G\varepsilon\varphi^2} \left[\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\varphi)^2 - g_{\mu\nu}V(\varphi) - \right. \\ \left. - 2\varepsilon\nabla_\mu(\varphi\nabla_\nu\varphi) + 2\varepsilon g_{\mu\nu}\nabla^\lambda(\varphi\nabla_\lambda\varphi) \right]. \quad (3.2.3)$$

De modo que as equações de Einstein agora são escritas como $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^{\text{eff}}$.

Considerando um vetor k^μ normalizado tipo-tempo, e por conveniência, k^μ satisfaz $k^\mu\nabla_\mu k^\mu = 0$. Supondo então que $x^\mu(\tau)$ seja a geodésica tipo-tempo cujo vetor tangente é $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, então

$$k^\mu\nabla_\mu\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} \equiv \dot{\varphi}.$$

Portanto, para a condição de energia forte,

$$\left(T_{\mu\nu}^{\text{eff}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\text{eff}} \right) k^\mu k^\nu = \frac{1}{1 - 8\pi G\varepsilon\varphi^2} \left\{ (\dot{\varphi})^2 - V(\varphi) - \varepsilon(\ddot{\varphi}^2) + \varepsilon\nabla^\mu(\varphi\nabla_\mu\varphi) \right\}. \quad (3.2.4)$$

De modo que, a condição de energia forte pode ser violada, como por exemplo, para valores positivos do potencial escalar $V(\varphi)$.

Para a condição de energia fraca, tem-se que

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}}k^\mu k^\nu = \frac{1}{1 - 8\pi G\varepsilon\varphi^2} \left\{ (\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) - \varepsilon(\ddot{\varphi}^2) + 2\varepsilon\nabla^\mu(\varphi\nabla_\mu\varphi) \right\}. \quad (3.2.5)$$

No caso em que $\varepsilon = 0$, essa condição é plenamente satisfeita. Porém, se o potencial for negativamente grande, por exemplo, a condição de energia fraca pode ser violada [13]. Mas outros termos, além do potencial, podem ser negativos, de modo que essa condição pode ser violada de várias maneiras.

E por fim, para a condição de energia nula, sendo ℓ^μ um vetor tangente à uma geodésica nula $x^\mu(\lambda)$, com λ sendo um parâmetro afim. Obtêm-se que

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}}\ell^\mu\ell^\nu = \frac{1}{1 - 8\pi G\varepsilon\varphi^2} \left\{ (\dot{\varphi})^2 - \varepsilon(\ddot{\varphi}^2) \right\}, \quad (3.2.6)$$

que também é satisfeita quando $\varepsilon = 0$. Porém, para $\varepsilon \neq 0$, a condição de energia nula pode ser violada de inúmeras formas [13].

Capítulo 4

Buracos de Minhoca em Espaço-Tempo

4.1 Buracos de Minhoca de Schwarzschild

Para um buraco de minhoca, uma região que conecta dois universos ou duas regiões do mesmo universo, existem algumas características que são desejáveis, como por exemplo, a métrica deve possuir uma simetria esférica e ser independente do tempo (estacionária), para ambos os universos conectados, seguindo o mesmo tratamento que foi feito em [3] e [11]. A métrica, portanto, pode ter a forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.1.1)$$

As funções $b(r)$ e $\Phi(r)$ dependem apenas da coordenada radial, e são chamadas de *função forma*, que irá determinar a forma espacial do buraco de minhoca, e *função redshift*, respectivamente. Essas funções irão atender aos requisitos necessários para um buraco de minhoca desejável. Diagramas da geometria de um buraco de minhoca pode ser vista na figura 4.1.

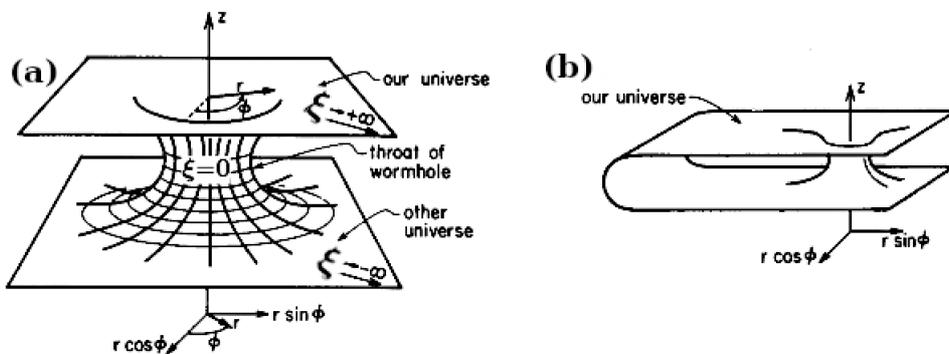


Figura 4.1: (a) Diagrama de imersão para um buraco de minhoca que conecta dois universos diferentes, com a garganta em $\xi = 0$. (b) Diagrama de imersão para um buraco de minhoca que conecta duas regiões distintas do mesmo universo, com a garganta em $\xi = 0$. Essas figura é adaptada de [3], Fig. 1.

Pode-se escrever a métrica (4.1.1) de uma forma alternativa, basta definir a chamada **distância radial própria** ξ , com $\xi \in (-\infty, +\infty)$, de modo que na garganta $\xi = 0$. Assim, tem-se ξ definido em duas partes, uma para cada universo conectado, sendo elas $+\xi$ e $-\xi$. Com isso, pode-se assumir $\xi(r)$, de forma que a métrica é escrita como

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + d\xi^2 + r^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1.2)$$

ou ainda

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}} dt^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 dr^2 + r^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.1.3)$$

Como as funções Φ e b dependem de r que por sua vez depende de $\xi \in (-\infty, +\infty)$, com $\xi = 0$ na garganta, então é possível escrever $\Phi_{\pm}(r)$ e $b_{\pm}(r)$. Por uma questão de conveniência, considera-se que $\Phi_+(r_0) = \Phi_-(r_0)$, sendo r_0 o raio da garganta. Assim, comparando (4.1.3) com (4.1.1) obtêm-se a seguinte relação entre ξ e r

$$\frac{d\xi}{dr} = \pm \left(1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r} \right)^{-1/2}, \quad (4.1.4)$$

portanto

$$\xi(r) = \pm \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{b_{\pm}(r')}{r'} \right)^{-1/2} dr', \quad (4.1.5)$$

com r_0 sendo o raio da garganta. Para que a geometria tenda à uma geometria assintoticamente plana, as funções métricas devem satisfazer os limites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{\pm}(r) = \Phi_{\pm} \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b_{\pm}(r)}{r} = 0. \quad (4.1.6)$$

sendo $r \in [r_0, +\infty)$, e Φ_{\pm} constantes. Note que não existe, *a priori*, a exigência de que $\Phi_+(\infty) = \Phi_-(\infty)$. Isso pode implicar que o tempo corre de maneiras diferentes nos dois universos conectados [11].

Horizontes de eventos são superfícies nas quais $g_{tt} = e^{2\Phi} \rightarrow 0$. No caso do buraco de minhoca de Schwarzschild, o horizonte ocorre precisamente em sua garganta, $r = 2MG$. A exigência de que o buraco de minhoca seja atravessável, inclui o requisito de que esse não apresente horizonte de eventos, e isso corresponde, então, ao fato de que $\Phi(r)$ deve ser finita em todos os lugares [2, 3].

O raio da garganta do buraco de minhoca é definido como $r_0 := \min\{r(\xi)\}$. Observando (4.1.4), o mínimo de $r(\xi)$ será quando $\frac{dr}{d\xi} = 0$, o que implica em $\frac{d\xi}{dr} \rightarrow \infty$. Para isso, deve-se ter $b_{\pm}(r_0) = r_0$. Sendo r_0 como o mínimo de r , deve haver um r_* de modo

que, para qualquer $r \in (r_0, r_*)$ obtêm-se $\frac{d^2r}{d\xi^2} > 0$ [11]. Assim,

$$\frac{d^2r}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 > 0. \quad (4.1.7)$$

Por meio de (4.1.4) em (4.1.7) obtêm-se

$$\frac{d^2r}{d\xi^2} = \frac{1}{2r} \left(\frac{b_{\pm}}{r} - b'_{\pm} \right) > 0, \quad (4.1.8)$$

sendo $b' \equiv \frac{db}{dr}$. Concluindo que, atingindo o raio r_0 referente à garganta, a propriedade para esse valor é $b'_{\pm}(r_0) < 1$ com $b(r_0) = r_0$. Portanto, o raio da garganta é considerado o maior dentre os raios que possuem tal propriedade. O que faz sentido quando é levado em consideração que, se o universo é descrito para $r > r_0$, não compreendendo a região inacessível $(r_0, 0]$, o raio mínimo, r_0 , deve ser o maior dentre os possíveis com essa mesma propriedade [15]. Assim, na garganta $b_{\pm}(r_0) = r_0$, no entanto, afastado dela $b_{\pm}(r) < r$.

Note que, na garganta, $b(r_0) = r_0$, a relação (4.1.8) simplifica-se para

$$\left. \frac{d^2r}{d\xi^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_+(r_0)] = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_-(r_0)],$$

o que implica em

$$b'_+(r_0) = b'_-(r_0). \quad (4.1.9)$$

É possível chegar à uma relação análoga para Φ [11], sendo ela

$$\Phi'_+(r_0) = \Phi'_-(r_0). \quad (4.1.10)$$

Portanto, conclui-se que $b(r) \leq r, \forall r \geq r_0$ e $b'(r_0) < 1$.

4.2 Diagramas de Imersão

Os *diagramas de imersão* podem ser úteis na compreensão da geometria gerada pelo buraco de minhoca, que pode parecer bastante complicada, uma vez que existem duas regiões assintoticamente planas no mesmo espaço-tempo. Para visualizar a geometria gerada, é de grande utilidade se valer de duas simetrias interessantes: Na primeira, proveniente de uma métrica estacionária, como é a métrica (4.1.1), todos os instantes são equivalentes, portanto, t pode ser fixado em um valor qualquer. A segunda surge do fato da métrica ser esféricamente simétrica, o que permite restringir a atenção à uma faixa equatorial, como por exemplo, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Assim, o elemento de linha obtido quando aplicada

às duas simetrias acima mencionadas é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.2.1)$$

Para uma melhor visualização, pode-se remover esta fatia do espaço-tempo a duas dimensões, e imergi-la em um espaço euclidiano tridimensional, em que a métrica é escrita em coordenadas cilíndrica (z, r, φ) . Portanto, partindo do elemento de linha em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4.2.2)$$

é possível escrever a superfície imersa como uma única função $z = z(r)$, com uma simetria axial. Para isso, escreve-se (4.2.2) como

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.2.3)$$

Assim, existe uma correspondência entre o elemento de linha (4.2.1), da fatia equatorial através do buraco de minhoca, com (4.2.3), quando se identificam os pares coordenados (r, φ) em ambos os elementos como sendo iguais, e quando a função $z(r)$ que descreve a superfície de imersão, satisfaz

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-1/2}, \quad (4.2.4)$$

portanto,

$$z(r) = \pm \int_{r_0}^r \left(\frac{r'}{b(r')} - 1\right)^{-1/2} dr'. \quad (4.2.5)$$

Relação essa que mostra como a função $b(r)$ molda a geometria do buraco de minhoca. A superfície de imersão tem a forma que pode ser vista na figura 4.2.

Na garganta do buraco de minhoca, cujo raio é $r = b(r_0) = r_0$, a superfície de imersão (4.2.5) é vertical, ou seja, $\frac{dz}{dr}\big|_{r=r_0} \rightarrow \infty$. No entanto, afastando-se da garganta, ou seja, $r \rightarrow \infty$, ocorre $\frac{dz}{dr}\big|_{r>r_0} \rightarrow 0$ (vide figura 4.2). Com isso, mais uma condição deve ser imposta; a de que a garganta se "alargue", o que é representado pela inversa da superfície de imersão satisfazer $\frac{d^2r}{dz^2} > 0$, na garganta ou próximo dela [2]. Portanto

$$\frac{d^2r}{dz^2}\bigg|_{r \simeq r_0} = \frac{b_0 - b'_0 r_0}{2b_0^2} > 0. \quad (4.2.6)$$

Esta condição será importante no momento em que for tratada a violação das condições de energia pela matéria dentro do buraco de minhoca.

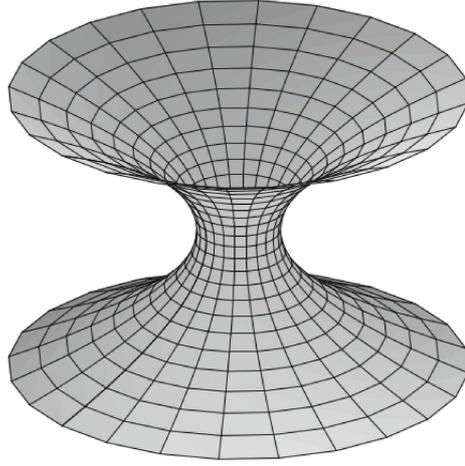


Figura 4.2: Diagrama de imersão de uma seção bidimensional, ao longo do plano equatorial ($\theta = \pi/2$ e $t = \text{cte}$) de um buraco de minhoca. Esta figura vem de [2].

4.3 Equações de Estrutura do Buraco de Minhoca

Sendo o intervalo espaço-temporal para o buraco de minhoca dado por (4.1.1), as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são

$$g_{tt} = -e^{2\Phi}, \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad \text{e} \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.3.1)$$

Portanto, as componentes do tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ são

$$g^{tt} = -e^{-2\Phi}, \quad g^{rr} = \left(1 - \frac{b}{r}\right), \quad g^{\theta\theta} = r^{-2} \quad \text{e} \quad g^{\varphi\varphi} = (r \sin \theta)^{-2}. \quad (4.3.2)$$

Com isso, o cálculo das componentes do símbolo de Christoffel e do tensor de curvatura são dados pelas relações (2.3.14) e (2.5.4), respectivamente

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu})$$

e

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}.$$

4.3.1 Símbolos de Christoffel (conexões) e Tensor de Curvatura

Por meio dos tensores métrico e métrico inverso aplicados na relação (2.3.14), as componentes não nulas do símbolo de Christoffel são determinadas, e podem ser vistas na tabela 4.1.

Para a métrica (4.1.1), as componentes do tensor de curvatura podem ser vistas na tabela 4.2. Essas componentes, juntamente com àquelas ligadas pela simetria $R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = -R^{\alpha}_{\cdot\beta\nu\mu}$, compõem o conjunto das 24 componentes não nulas do tensor de curvatura para

$\Gamma_{rr}^r = \frac{b'r - b}{2r(r - b)}$	$\Gamma_{\theta\theta}^r = b - r$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = (b - r) \sin^2 \theta$
$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta$
$\Gamma_{tt}^r = \Phi \left(1 - \frac{b}{r}\right) e^{2\Phi}$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$	$\Gamma_{rt}^t = \Phi'$

Tabela 4.1: Tabela dos Símbolos de Christoffel não nulos

a geometria gerada pelo buraco de minhoca estático e esféricamente simétrico.

$R_{.rtr}^t = -\Phi'' + \Phi' \frac{(b'r - r)}{2r(r - b)} - \Phi'^2$	$R_{.t\theta\theta}^t = \Phi'(b - r)$	$R_{. \varphi t \varphi}^t = \Phi'(b - r) \sin^2 \theta$
$R_{. \varphi r \varphi}^r = \frac{(b'r - b)}{2r} \sin^2 \theta$	$R_{. \varphi \theta \varphi}^\theta = \frac{b}{r} \sin^2 \theta$	$R_{.ttr}^r = \left(1 - \frac{b}{r}\right) e^{2\Phi} R_{.rtr}^t$
$R_{.tt\varphi}^\varphi = \frac{e^{2\Phi}}{r^2 \sin^2 \theta} R_{. \varphi t \varphi}^t$	$R_{. \theta \varphi \theta}^\varphi = \frac{R_{. \varphi \theta \varphi}^\theta}{\sin^2 \theta}$	$R_{.rr\varphi}^\varphi = \frac{R_{. \varphi r \varphi}^r}{r(b - r) \sin^2 \theta}$
$R_{. \theta r \theta}^r = \frac{b'r - b}{2r}$	$R_{.tt\theta}^\theta = \frac{e^{2\Phi}}{r^2} R_{.t\theta\theta}^t$	$R_{.rr\theta}^\theta = \frac{R_{. \theta r \theta}^r}{r(b - r)}$

Tabela 4.2: Componentes não nulas do tensor de curvatura

Essas componentes do tensor de curvatura são obtidas na base de vetores $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.

É possível escrever as componentes do tensor de curvatura na tabela 4.2 na seguinte base de 1-formas

$$\boldsymbol{\alpha}^0 = e^\Phi dt, \quad \boldsymbol{\alpha}^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} dr, \quad \boldsymbol{\alpha}^2 = r d\theta \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha}^3 = r \sin \theta d\varphi. \quad (4.3.3)$$

Vamos utilizar essa nova base, (4.3.3) para que os cálculos sejam facilitados daqui pra frente.

A base (4.3.3) é dual a base que corresponde a um referencial onde os observadores permanecem em repouso no sistema de coordenadas [3]. Invertendo a dependência da base (4.3.3), tem-se

$$dt = e^{-\Phi} \boldsymbol{\alpha}^0, \quad dr = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \boldsymbol{\alpha}^1, \quad d\theta = \frac{1}{r} \boldsymbol{\alpha}^2 \quad \text{e} \quad d\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \boldsymbol{\alpha}^3. \quad (4.3.4)$$

Nessa base, o tensor métrico toma a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Utilizando o método de Cartan visto na subseção 2.6.2, as derivadas exteriores dos

elementos da base (4.3.3) são

$$d\alpha^0 = \Phi' \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^1 \wedge \alpha^0;$$

$$d\alpha^1 = 0;$$

$$d\alpha^2 = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^1 \wedge \alpha^2;$$

$$d\alpha^3 = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^1 \wedge \alpha^3 + \frac{1}{r} \cot \theta \alpha^2 \wedge \alpha^3.$$

Por meio da relação (2.6.21) e com as propriedades (2.6.24), as conexões 1-formas são

$$\omega_1^0 = \omega_0^1 = \Phi' \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^0,$$

$$\omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0,$$

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^2,$$

$$\omega_3^1 = -\omega_1^3 = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^3,$$

$$\omega_3^2 = -\omega_2^3 = -\frac{1}{r} \cot \theta \alpha^3.$$

Seguindo o método, pela relação (2.6.22), as curvaturas 2-formas são

$$\Omega_1^0 = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ -\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \Phi' - \Phi'^2 \right\} \alpha^0 \wedge \alpha^1$$

$$\Omega_2^0 = -\frac{\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \alpha^0 \wedge \alpha^2,$$

$$\Omega_3^0 = -\frac{\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \alpha^0 \wedge \alpha^3,$$

$$\Omega_2^1 = \frac{b'r - b}{2r^3} \alpha^1 \wedge \alpha^2,$$

$$\Omega_3^1 = \frac{b'r - b}{2r^3} \alpha^1 \wedge \alpha^3,$$

$$\Omega_3^2 = \frac{b}{r^3} \alpha^2 \wedge \alpha^3.$$

E assim, utilizando a relação entre a curvatura 2-formas e as componentes do tensor de curvatura escritas na base (4.3.3), as componentes não nulas do tensor de curvatura são vistas na tabela 4.3. E como sempre, também existem àquelas que se relacionam pela

simetria $\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = -\mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu}$. Com isso, pode-se determinar o tensor de Ricci e o escalar de

$\mathcal{R}^t_{.rtr} = \mathcal{R}^r_{.ttr} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ -\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)}\Phi' - \Phi'^2 \right\}$	$\mathcal{R}^t_{.\theta t\theta} = \mathcal{R}^\theta_{.tt\theta} = -\frac{\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)$
$\mathcal{R}^t_{.\varphi t\varphi} = \mathcal{R}^\varphi_{.tt\varphi} = -\frac{\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)$	$\mathcal{R}^\theta_{.r\theta r} = \mathcal{R}^r_{.\theta r\theta} = \frac{b'r - b}{2r^3}$
$\mathcal{R}^\varphi_{.r\varphi r} = \mathcal{R}^r_{.\varphi r\varphi} = \frac{b'r - b}{2r^3}$	$\mathcal{R}^\varphi_{.\theta\varphi\theta} = \mathcal{R}^\theta_{.\varphi\theta\varphi} = \frac{b}{r^3}$

Tabela 4.3: Componentes do tensor de curvatura na nova base.

curvatura, (2.5.13) e (2.5.16), respectivamente, ou seja

$$\mathcal{R}_{tt} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{(b'r + 3b - 4r)}{2r(r - b)}\Phi' \right], \quad (4.3.6)$$

$$\mathcal{R}_{rr} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{b - b'r}{2r(r - b)}\Phi' + \frac{b - b'r}{r^2(r - b)} \right], \quad (4.3.7)$$

$$\mathcal{R}_{\theta\theta} = \mathcal{R}_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{b'r + b}{2r^2(r - b)} - \frac{\Phi'}{r} \right]. \quad (4.3.8)$$

e

$$\mathcal{R} = -2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'}{r(r - b)} - \frac{(b'r + 3b - 4r)}{2r(r - b)}\Phi' \right]. \quad (4.3.9)$$

E por fim, o tensor de Einstein, (2.5.15), tem as componentes não nulas na base nova dadas por

$$\mathcal{G}_{tt} = \frac{b'}{r^3}, \quad (4.3.10)$$

$$\mathcal{G}_{rr} = \frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \frac{b}{r^3}, \quad (4.3.11)$$

$$\mathcal{G}_{\theta\theta} = \mathcal{G}_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \Phi'' - \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)}\Phi' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{(b'r - b)}{2r^2(r - b)} \right\}. \quad (4.3.12)$$

Antes de mostrar as equações de campo para o buraco de minhoca, é preciso falar um pouco sobre algumas condições necessárias para que o buraco de minhoca seja viável para viagens interestelares.

4.4 Forças Gravitacionais de Maré e Tempo de Traves- sia

Considere que a viagem pelo buraco de minhoca comece no universo abaixo em $\xi = -\xi_1$ da distância própria, e termine em $\xi = \xi_2$ no universo acima. Sendo o movimento radial, ou seja, à valores fixos de θ e φ , de modo que a velocidade do viajante dependa apenas da coordenada radial r , medido por um observador estático em r [3]. Com isso, o

intervalo (4.1.2) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\Phi} dt^2 + d\xi^2 + r^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= -e^{2\Phi} dt^2 + d\xi^2 \\ &= -e^{2\Phi} dt^2 \left(1 - \frac{d\xi^2}{e^{2\Phi} dt^2} \right), \end{aligned}$$

ou ainda [15]

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 (1 - v^2), \quad (4.4.1)$$

com $v = \frac{d\xi}{e^\Phi dt}$. Pela invariância do intervalo ds^2 , (4.4.1) deve ser igual à $-d\tau^2$, portanto

$$-d\tau^2 = -e^{2\Phi} dt^2 (1 - v^2) = -\frac{e^{2\Phi} dt^2}{\gamma^2}, \quad (4.4.2)$$

com τ sendo o tempo próprio do viajante. De (4.4.2) conclui-se que

$$\gamma d\tau = e^\Phi dt. \quad (4.4.3)$$

Com isso, obtêm-se

$$v = \frac{d\xi}{e^\Phi dt} = \frac{d\xi}{\gamma d\tau}. \quad (4.4.4)$$

Uma preocupação que surge com respeito a viagem pelo buraco de minhoca, tem relação com a condição de que o tempo para o percurso de $-\xi_1$ à ξ_2 deve ser curto, tanto para o viajante, quanto para um observador que permanece em repouso, por exemplo, em uma estação fora do buraco de minhoca, em um espaço assintoticamente plano. Morris e Thorne em [3] consideram um tempo de percurso de 1 ano; portanto, tanto o tempo próprio medido pelo viajante, quanto o tempo medido pelo observador na estação espacial devem ser menores ou iguais à 1 ano, assim

$$\Delta\tau_{\text{viajante}} = \int_{-\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{v\gamma} \lesssim 1 \text{ ano}, \quad (4.4.5)$$

e

$$\Delta t_{\text{estação}} = \int_{-\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{v e^\Phi} \lesssim 1 \text{ ano}. \quad (4.4.6)$$

Uma segunda condição para a viagem pelo buraco de minhoca, é que a aceleração sentida pelo viajante não deve ser superior à aceleração da gravidade na Terra. Para tratar dessa questão, é introduzido uma base ortonormal para o referencial do viajante $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, dado em termos da base de um observador estático que é dual a base (4.3.1),

$$\mathbf{e}_0 = e^{-\Phi} \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_1 = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi$$

ligadas pelas transformações de Lorentz [2, 3]

$$\mathbf{e}'_0 = \gamma \mathbf{e}_0 \pm \gamma v \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_1 = \gamma v \mathbf{e}_0 \pm \gamma \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3. \quad (4.4.7)$$

Aqui, $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Os sinais \pm são para o caso do viajante estar se afastando ou se aproximando da garganta, respectivamente. Como o movimento é radial, \mathbf{e}'_1 sempre permanece paralelo à direção do movimento do viajante [15]. A velocidade do viajante na base comóvel com ele é $\mathbf{u}' = \mathbf{e}'_0$ [3, 15]. A quadri-aceleração à qual o viajante é submetido é dada por $a'^\mu = u'^\nu \nabla'_\nu u'^\mu$, que por sua vez é sempre ortogonal à quadri-velocidade, ou seja, $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}' = 0$, portanto

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{e}'_0 = a'_0 = 0, \quad (4.4.8)$$

assim $a'_0 = a'^0 = 0$. Como também $a'_2 = a'_3 = 0$ uma vez que o movimento é radial, implica que a aceleração é $\mathbf{a}' = a \mathbf{e}'_1$.

Para calcular a aceleração, considere a velocidade u^α como função de r . E assim,

$$a_t = u^\alpha \nabla_\alpha u_t = u^r \partial_r u_t - u^\alpha \Gamma_{\alpha t}^\beta u_\beta. \quad (4.4.9)$$

Para \mathbf{u}' , pode ser escrito com \mathbf{e}'_0 como

$$\mathbf{u}' = (\gamma \mathbf{e}_0 \pm \gamma v \mathbf{e}_1) = \left(\gamma e^{-\Phi} \mathbf{e}_t \pm \gamma v \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \mathbf{e}_r \right) \quad (4.4.10)$$

portanto

$$u^t = \gamma e^{-\Phi}, \quad u^r = \pm \gamma v \sqrt{1 - \frac{b}{r}}, \quad \text{e} \quad u^\theta = u^\varphi = 0, \quad (4.4.11)$$

e

$$u_t = -\gamma e^\Phi, \quad u_r = \pm \gamma v \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{e} \quad u_\theta = u_\varphi = 0, \quad (4.4.12)$$

em que os índices foram abaixados pela métrica $g_{\mu\nu}$ (4.3.1). Com isso obtêm-se

$$a_t = \mp \gamma v \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi). \quad (4.4.13)$$

Como $a_t = g_{tt} a^t$, com $a^t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^t = a(\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}^t)$, portanto

$$a_t = a g_{tt} (\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}^t) = -a \gamma v e^\Phi. \quad (4.4.14)$$

Assim, de (4.4.13) e (4.4.14), conclui-se que

$$a = \pm e^{-\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi) = e^{-\Phi} \frac{d}{d\xi} (\gamma e^\Phi), \quad (4.4.15)$$

com $d\xi = \pm \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr$. Portanto (4.4.15) deve ser menor ou igual à g_{\oplus} , que é a aceleração da gravidade na superfície da Terra,

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d}{d\xi} (\gamma e^{\Phi}) \right| \lesssim g_{\oplus}. \quad (4.4.16)$$

Uma última condição é de que as forças de maré que atuam sobre o corpo do viajante não sejam muito intensas comparadas com a da Terra, o que é o mesmo que exigir que a aceleração relativa entre duas geodésicas seja da ordem da aceleração da gravidade na superfície da Terra g_{\oplus} . Para esta condição é utilizado a noção de desvio geodésico expresso pela equação (2.5.17), que representa a aceleração relativa entre geodésicas devido a curvatura. Com isso, a equação do desvio geodésico¹

$$\delta a^{\mu} = R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \delta x^{\nu}, \quad (4.4.17)$$

pode ser escrita no referencial do viajante como

$$\delta a'^{\mu} = \eta^{\mu\sigma} R'_{\sigma\alpha\nu\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} \delta x'^{\nu}. \quad (4.4.18)$$

A quantidade $\delta x'^{\nu}$ pode ser, por exemplo, o vetor de separação entre a cabeça e o pé do viajante, que em seu sistema de referência é puramente espacial, ou seja, $\delta x'^0 = 0$ [2, 3, 15]. Por outro lado, a velocidade u'^{α} será $u'^{\alpha} = \delta_0^{\alpha}$ [3, 15]. Portanto a equação (4.4.18) se torna

$$\begin{aligned} \delta a'^{\mu} &= \eta^{\mu\sigma} R'_{\sigma\alpha\nu\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} \delta x'^{\nu} \\ &= \eta^{\mu\sigma} R'_{\sigma\alpha i\beta} \delta_0^{\alpha} \delta_0^{\beta} \delta x'^i \\ &= \eta^{\mu\sigma} R'_{\sigma 0 i 0} \delta x'^i, \end{aligned}$$

assim,

$$\delta a'^{\mu} = \eta^{\mu\sigma} R'_{\sigma 0 i 0} \delta x'^i. \quad (4.4.19)$$

Para $\mu = 0$, a equação (4.4.19) se torna

$$\delta a'^0 = \eta^{00} R'_{00 i 0} \delta x'^i = -\eta^{00} R'_{00 i 0} \delta x'^i = 0, \quad (4.4.20)$$

devido a anti-simetria nos dois primeiros índices do tensor de Riemann, o que implica em $\delta a'^0 = 0$. Com isso, tem-se apenas as componentes espaciais da aceleração, portanto

$$\delta a'^j = \eta^{jk} R'_{k 0 i 0} \delta x'^i, \quad \text{com } i, j, k = 1, 2, 3. \quad (4.4.21)$$

¹Aqui, δa^{μ} é uma notação que representa a aceleração relativa entre duas geodésicas vizinhas, e portanto, $\delta a^{\mu} \equiv \frac{D^2 \delta x^{\mu}}{ds^2}$, sendo s um parâmetro ao longo da curva $\delta x^{\mu}(s)$.

Passando do referencial de um observador estático, dual a base (4.3.1), para o referencial do viajante (4.4.7), as componentes não nulas do tensor de Riemann relevantes aqui são

$$R'_{1010} = - \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[-\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \Phi' - \Phi'^2 \right] \quad (4.4.22)$$

e

$$R'_{2020} = R'_{3030} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[v^2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) + 2(r - b)\Phi' \right]. \quad (4.4.23)$$

Assim, as equações para a aceleração relativa são

$$\delta a'^1 = R'_{.010} \delta x'^1, \quad \delta a'^2 = R'_{.020} \delta x'^2 \quad \text{e} \quad \delta a'^3 = R'_{.030} \delta x'^3. \quad (4.4.24)$$

Por uma questão de demonstração de valores concretos, serão utilizadas brevemente as unidades usuais do SI. Assumindo $|\delta \mathbf{x}'| \approx 2m$, que é a altura do viajante, com o vetor de separação orientado ao longo de qualquer das direções espaciais [3], a partir de (4.4.24), as condições desejadas são

$$|R'_{.010}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[-\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \Phi' - \Phi'^2 \right] \right| \lesssim \frac{g_{\oplus}}{c^2 \cdot 2m} \approx 10^{-16} m^{-2}, \quad (4.4.25)$$

e

$$|R'_{.020}| = |R'_{.030}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\beta^2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) + 2(r - b)\Phi' \right] \right| \lesssim \frac{g_{\oplus}}{c^2 \cdot 2m} \approx 10^{-16} m^{-2}. \quad (4.4.26)$$

Em que $\beta = v/c$. Aqui estamos impondo, também, a condição que a aceleração relativa entre as duas geodésicas, seja menor ou da ordem da aceleração gravitacional da Terra, ou seja, o interesse é de que $|\delta \mathbf{a}| \lesssim g_{\oplus}$ (gravidade na superfície da Terra).

4.5 Equações de Campo de Einstein

Para uma solução de um buraco de minhoca esféricamente simétrico, no vácuo, o teorema de Birkhoff [8] garante que a única solução possível, é a de Schwarzschild, ou seja, um buraco de minhoca não atravessável [3]. Portanto, para que um buraco de minhoca seja atravessável, esse não deve estar no vácuo.

Pela relação entre o tensor de Einstein e o tensor momento-energia dada por (2.7.6), sendo o tensor de Einstein diagonal, conclui-se que o tensor momento-energia também deve ser. As componentes não nulas são

$$\mathcal{T}_{tt} = \varrho(r), \quad \mathcal{T}_{rr} = -\mathcal{J}(r), \quad \mathcal{T}_{\theta\theta} = \mathcal{T}_{\varphi\varphi} = \mathcal{P}(r). \quad (4.5.1)$$

Como os vetores de base são aqueles utilizados por observadores estáticos, cada uma das componentes acima tem sua interpretação em função das medições feitas por esses observadores. Sendo elas, ϱ a densidade total de matéria-energia medida; \mathcal{J} a tensão por unidade de área medida na direção radial, que para um fluido perfeito, é o negativo da pressão radial; e \mathcal{P} é a pressão medida nas direções perpendiculares à direção radial (θ e φ). Por uma questão de simplicidade, é conveniente chamar $\rho = 8\pi G(\varrho)$, $\tau = 8\pi G(\mathcal{J})$ e $p = 8\pi G(\mathcal{P})$ [11, 15]. Finalmente, as equações de campo para o buraco de minhoca, com o tensor momento-energia dado por (4.5.1) e com as componentes do tensor de Einstein dadas por (4.3.10) à (4.3.12), são

$$\rho = \frac{b'}{r^2}, \quad (4.5.2)$$

$$\tau = \frac{b}{r^3} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' \quad (4.5.3)$$

e

$$p = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \Phi'' - \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \Phi' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{(b'r - b)}{2r^2(r - b)} \right\}. \quad (4.5.4)$$

Isolando Φ' em (4.5.3), tomando a derivada com relação à r , e em seguida substituindo em (4.5.4), obtêm-se a equação

$$p = \frac{r}{2} [(\rho - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau. \quad (4.5.5)$$

A forma das equações (4.5.2), (4.5.3) e (4.5.5) sugere a maneira de solucioná-las: Escolher $b(r)$ e $\Phi(r)$ a fim de produzir um buraco de minhoca que atenda aos critérios desejados; a equação (4.5.2), juntamente com as escolhas de $b(r)$ e $\Phi(r)$ deve fornecer $\rho(r)$; a equação (4.5.3), $b(r)$ e $\Phi(r)$ fornece $\tau(r)$; e, por fim, a equação (4.5.5), juntamente com o que foi determinado acima irá fornecer $p(r)$ [3].

Utilizando (4.5.2) e (4.5.3), pode-se chegar a uma característica interessante a respeito da fonte. Fazendo

$$\tau - \rho = \frac{b}{r^3} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Phi' - \frac{b'}{r^2}. \quad (4.5.6)$$

Como discutido em seções anteriores, para uma solução de um buraco de minhoca, a geometria tem um raio r_0 mínimo, que é o raio da garganta. Nesse raio, a superfície $z(r)$ (4.2.5) de imersão se torna vertical, $\frac{dz}{dr} \rightarrow \infty$. Para $r \rightarrow \infty$, afastando-se da garganta, o espaço é assintoticamente plano, ou seja, $\frac{dz}{dr} \rightarrow 0$. Também é necessário impor que a garganta se expanda. Tal condição de alargamento implica que o inverso da superfície de imersão satisfaça $\frac{d^2r}{dz^2} > 0$, na garganta ou próximo à ela, em $r = r_0$ [2]. Assim, de (4.2.6) obtêm-se que, na garganta, ou próximo

$$\left. \frac{d^2r}{dz^2} \right|_{r \simeq r_0} = \frac{b_0 - b'_0 r_0}{2b_0^2} > 0. \quad (4.5.7)$$

Portanto, reescrevendo (4.5.6) como

$$\tau - \rho = \frac{2b^2}{r^3} \left(\frac{b - b'r}{2b^2} \right) - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \Phi', \quad (4.5.8)$$

de modo que,

$$\tau - \rho = \frac{2b^2}{r^3} \frac{d^2r}{dz^2} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \Phi'. \quad (4.5.9)$$

Quando r se aproxima de r_0 , ocorre que $b \rightarrow b(r_0) = b_0 = r_0$, portanto $(1 - b/r)\Phi \rightarrow 0$. E na garganta, ou próximo,

$$\tau(r_0) - \rho(r_0) = \frac{2}{r_0} \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=r_0} > 0, \quad (4.5.10)$$

Portanto

$$\tau_0 - \rho_0 > 0. \quad (4.5.11)$$

A restrição (4.5.11) é bastante problemática; indica que a tensão radial deve exceder a densidade total de energia na garganta. A matéria restringida por essa condição é chamada *matéria exótica* [3]. Aplicando a condição de energia nula ao tensor momento-energia (4.5.1), a relação $\rho - \tau \geq 0$ deveria ser obedecida. Porém, como pode ser visto na relação (4.5.11), essa condição de energia nula é violada. Em [2] e [3], foi mostrado como que (4.5.11) permite que um conjunto particular de observadores podem medir uma densidade total de energia negativa, $T'_{00} < 0$, quando se move com velocidade suficiente, $v \rightarrow 1$, em direção a garganta, ou seja,

$$T'_{00} = -\gamma^2(v^2\tau_0 - \rho_0) < 0. \quad (4.5.12)$$

Nas décadas de 1960 e 1970, os físicos consideravam que o fato de a densidade de energia ser sempre positiva em relação à qualquer observador, era quase sagrado. Tal aspecto é expresso por meio das condições de energia fraca (WEC) e forte (SEC), como visto no capítulo 3. Essas condições são violadas por (4.5.11), e configuravam os principais fundamentos de teoremas como as de singularidade e positividade da massa [3]. Portanto, estes teoremas e outros já não seriam mais garantidos por essas condições.

Capítulo 5

Buracos de Minhoca com Rotação

Neste capítulo será considerada a classe mais geral de buracos de minhoca com rotação, estacionário e axialmente simétrico do buraco de minhoca de Morris-Thorne apresentado no capítulo anterior. Essa talvez seja a extensão mais geral que se possa considerar proveitosa.

5.1 A Métrica de um Buraco de Minhoca com Rotação

A métrica para um buraco de minhoca com rotação, axialmente simétrico e estacionário, foi proposta em [16] e tem a forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2]. \quad (5.1.1)$$

Em que as funções métricas N , K , b e ω podem apresentar dependência em r e θ .

A função N é chamada função *redshift*, que é responsável por determinar o desvio para o vermelho gravitacional. Para que o buraco de minhoca possa ser percorrido, esta função deve ser finita e diferente de zero, para assim, não ocorrerem singularidades na curvatura e/ou horizontes de eventos. A função $K(r, \theta)$ é positiva, não decrescente, adimensional e determina a **distância radial própria** $R(r, \theta) = rK$ de (r, θ) até a origem. Para esta função tem-se [16]

$$R = rK, \quad R_{,r} \equiv \frac{\partial R}{\partial r} > 0. \quad (5.1.2)$$

A função $b(r, \theta)$, assim como antes é a função forma, e determina a forma do buraco de minhoca. Satisfaz $b(r, \theta) \leq r$, e contém uma aparente singularidade em $b = r$ que corresponde à garganta do buraco de minhoca. Esta função é assumida ser independente de θ na garganta, ou seja $\left. \frac{\partial b(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=r_0} = 0$, do contrário, existiria uma singularidade na curvatura em $r = r_0$ [16]. Assim, para uma solução regular, a garganta configura uma superfície bidimensional de raio r_0 . Para que a função $b(r, \theta)$ garanta que o buraco de

minhoca tenha uma forma característica considerada por Morris-Thorne (em que ocorre um alargamento da garganta), a condição de alargamento é imposta. Essa condição surge quando a seção transversal bidimensional da solução, em um instante fixo t e uma faixa equatorial θ ,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.1.3)$$

é imersa em um espaço euclidiano tridimensional. Essa condição é garantida se a função b satisfizer a condição de que $\frac{\partial b}{\partial r}|_{r=r_0} < 1$, ou seja, na garganta [16, 17].

E por fim, a função $\omega(r, \theta)$ que está relacionada com a velocidade angular do buraco de minhoca. De modo a garantir que a métrica seja não-singular em $\theta = 0, \pi$, ou seja, no eixo de rotação, as derivadas com relação à θ das funções métricas N , K e b devem desaparecer nesse eixo [16].

A métrica proposta (5.1.1) deve se reduzir à métrica de Morris-Thorne (4.1.1), no limite em que a rotação é nula e a simetria é esférica, ou seja,

$$N(r, \theta) \rightarrow e^{\Phi(r)}, \quad b(r, \theta) \rightarrow b(r), \quad K(r, \theta) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \omega(r, \theta) \rightarrow 0. \quad (5.1.4)$$

Assim, a métrica (5.1.1) representa duas regiões planas unidas na garganta $r = b = r_0$, e a coordenada radial tem o intervalo $r_0 \leq r < \infty$. Por razões físicas, a solução para o buraco de minhoca é assumida como assintoticamente plana, portanto, quando $r \rightarrow \infty$, deve-se ter o seguinte comportamento por parte das funções métricas [17]

$$N = 1 - \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad K = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{b}{r} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{e} \quad \omega = \frac{2L}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.1.5)$$

As constantes M e L são a massa e o momento angular do buraco de minhoca, respectivamente, e correspondem às quantidades conservadas na solução.

As funções métricas N , K , b e ω podem ser escolhidas de modo que a solução obtida descreva um caso particular de buraco de minhoca com rotação, respeitando todas as restrições descritas anteriormente, a fim de garantir a regularidade e a importância física da solução.

O tensor métrico que está sendo considerado, e tensor métrico inverso, tem as componentes que podem ser vistas nas tabelas 5.1 e 5.2.

5.2 Tensor de Ricci e Tensor de Einstein

Para o cálculo do tensor de Ricci, primeiramente é necessário ter em mãos as conexões. Utilizando a relação (2.3.14) para as conexões e os tensores métrico e inverso nas

$g_{tt} = -N^2 + r^2 K^2 \omega^2 \sin^2 \theta$
$g_{rr} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1}$
$g_{\theta\theta} = r^2 K^2$
$g_{\varphi\varphi} = r^2 K^2 \sin^2 \theta$
$g_{\varphi t} = g_{t\varphi} = -\omega r^2 K^2 \sin^2 \theta$

Tabela 5.1: Componentes do tensor métrico.

$g^{tt} = -\frac{1}{N^2}$
$g^{rr} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)$
$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 K^2}$
$g^{\varphi\varphi} = \frac{N^2 - r^2 K^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{N^2 r^2 K^2 \sin^2 \theta}$
$g^{\varphi t} = g^{t\varphi} = -\frac{\omega}{N^2}$

Tabela 5.2: Componentes do tensor métrico inverso.

tabelas 5.1 e 5.2, respectivamente, obtém-se as componentes não nulas

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2r} \frac{b_{,r} r - b}{(r-b)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{K_{,\theta}}{K}, \quad \Gamma_{\theta r}^r = \frac{b_{,\theta}}{2(r-b)},$$

$$\Gamma_{tt}^r = (r-b) \left[\frac{N N_{,r}}{r} - K^2 \omega^2 \sin^2 \theta - r K K_{,r} \omega^2 \sin^2 \theta - r \omega \omega_{,r} K^2 \sin^2 \theta \right],$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = (b-r) [r K_{,r} + K] K, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = (b-r) [K + r K_{,r}] K \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{rr}^\theta = \frac{-b_{,\theta}}{2r K^2 (r-b)^2},$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{N N_{,\theta}}{r^2 K^2} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\omega^2 K_{,\theta}}{K} \sin^2 \theta - \omega \omega_{,\theta} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{K} (K_{,\theta} \sin^2 \theta + K \sin \theta \cos \theta),$$

$$\Gamma_{\theta t}^t = \frac{1}{N^2} \left[N N_{,\theta} - \frac{1}{2} \omega \omega_{,\theta} K^2 r^2 \sin^2 \theta \right], \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta + \frac{K_{,\theta}}{K} + \frac{\omega \omega_{,\theta} K^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2},$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{K + r K_{,r}}{r K}, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} + \frac{K_{,r}}{K} + \frac{\omega \omega_{,r} K^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2}, \quad \Gamma_{rt}^t = \frac{N_{,r}}{N} - \frac{r^2 K^2 \omega \omega_{,r} \sin^2 \theta}{2N^2},$$

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \frac{\omega_{,r} r^2 K^2 \sin^2 \theta}{2N^2}, \quad \Gamma_{t\varphi}^r = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{1}{r} + \frac{\omega_{,r}}{2\omega} + \frac{K_{,r}}{K} \right] \omega K^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{tr}^\varphi = \frac{N_{,r} \omega}{N} - \left[\frac{\omega}{r} + \frac{\omega_{,r}}{2} + \frac{K_{,r} \omega}{K} \right] - \frac{\omega_{,r} r^2 K^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{2N^2}, \quad \Gamma_{\varphi t}^\theta = \left(\omega \cot \theta + \frac{\omega_{,\theta}}{2} + \frac{\omega K_{,\theta}}{K} \right) \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{t\theta}^\varphi = \frac{N_{,\theta} \omega}{N} - \left[\omega \cot \theta + \frac{\omega_{,\theta}}{2} + \frac{K_{,\theta} \omega}{K} \right] - \frac{\omega_{,\theta} r^2 K^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{2N^2}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^t = \frac{\omega_{,\theta} r^2 K^2 \sin^2 \theta}{2N^2}.$$

Ainda existem aqueles ligados pela simetria $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$. As demais componentes independentes são todas nulas. E para completar, os traços não nulos da conexão que serão necessários na obtenção do tensor de Ricci, são:

$$\Gamma_{r\alpha}^\alpha = \frac{N_{,r}}{N} + \frac{b_{,r}r - b}{2r(r-b)} + \frac{2}{r} + \frac{2K_{,r}}{K} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha = \frac{N_{,\theta}}{N} + \frac{b_{,\theta}}{2(r-b)} + \cot\theta + \frac{2K_{,\theta}}{K}.$$

O tensor de Ricci, como definido em (2.5.13), é o único traço não nulo do tensor de Riemann, sendo assim obtido de forma semelhante por meio da conexão. Portanto, suas componentes não nulas são

$$\begin{aligned} R_{tt} = & (1 - b_{,r}) \left[\frac{NN_{,r}}{r} - K^2\omega^2 \sin^2\theta - rKK_{,r}\omega^2 \sin^2\theta - r\omega\omega_{,r}K^2 \sin^2\theta \right] + \\ & + (r-b) \left[\frac{NN_{,r}}{r^2} + \frac{NN_{,rr}}{r} - 3KK_{,r}\omega^2 \sin^2\theta - 3\omega\omega_{,r}K^2 \sin^2\theta - \omega^2K_{,r}^2 \sin^2\theta - rKK_{,rr}\omega^2 \sin^2\theta - \right. \\ & - 4\omega\omega_{,r}KK_{,r}\omega^2 \sin^2\theta - \frac{\omega_{,r}^2K^2r \sin^2\theta}{2} - r\omega\omega_{,rr}K^2 \sin^2\theta - \frac{N_{,r}K^2\omega^2 \sin^2\theta}{N} - \frac{N_{,r}rKK_{,r}\omega^2 \sin^2\theta}{N} + \\ & + \frac{N_{,r}rK^2\omega\omega_{,r} \sin^2\theta}{N} + \frac{NN_{,r}(b_{,r}r - b)}{2r^2(r-b)} - \frac{K^2\omega^2(b_{,r}r - b) \sin^2\theta}{2r(r-b)} - \frac{KK_{,r}\omega^2(b_{,r}r - b) \sin^2\theta}{2(r-b)} - \\ & \left. - \frac{\omega\omega_{,r}K^2(b_{,r}r - b) \sin^2\theta}{2(r-b)} + \frac{2NN_{,r}K_{,r}}{rK} - \frac{\omega_{,r}^2r^3K^4\omega^2 \sin^4\theta}{2N^2} \right] + \frac{NN_{,\theta\theta}}{r^2K^2} - 3\omega\omega_{,\theta} \sin\theta \cos\theta + \\ & + \frac{K_{,\theta}^2\omega^2}{K^2} \sin^2\theta - \frac{\omega^2K_{,\theta\theta}}{K} \sin^2\theta - \frac{2K_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega}{K} \sin^2\theta - \frac{K_{,\theta}\omega^2}{K} \sin\theta \cos\theta - \frac{\omega_{,\theta}^2}{2} \sin^2\theta - \omega\omega_{,\theta\theta} \sin^2\theta + \\ & + \frac{NN_{,\theta}b_{,\theta}}{2r^2K^2(r-b)} + \frac{NN_{,\theta} \cot\theta}{r^2K^2} - \frac{N_{,\theta}\omega^2}{N} \sin\theta \cos\theta - \frac{b_{,\theta}\omega^2 \sin\theta \cos\theta}{2(r-b)} - \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{NK} \omega^2 \sin^2\theta - \\ & - \frac{b_{,\theta}K_{,\theta}\omega^2 \sin^2\theta}{2K(r-b)} + \frac{N_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega}{N} \sin^2\theta - \frac{b_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega \sin^2\theta}{2(r-b)} - \frac{\omega_{,\theta}^2r^2K^2\omega^2 \sin^4\theta}{2N^2} + \omega^2 \sin^2\theta, \\ \\ R_{rr} = & -\frac{b_{,\theta\theta}}{2rK^2(r-b)^2} - \frac{3b_{,\theta}^2}{4rK^2(r-b)^3} - \frac{2K_{,rr}}{K} - \frac{N_{,rr}}{N} + \frac{N_{,r}(b_{,r}r - b)}{2rN(r-b)} + \frac{b_{,r}r - b}{r^2(r-b)} + \frac{K_{,r}(b_{,r}r - b)}{rK(r-b)} - \\ & - \frac{N_{,\theta}b_{,\theta}}{2rNK^2(r-b)^2} - \frac{b_{,\theta} \cot\theta}{2rK^2(r-b)^2} + \frac{\omega_{,r}^2r^2K^2 \sin^2\theta}{2N^2} - \frac{4K_{,r}}{rK}, \\ \\ R_{\theta\theta} = & (b_{,r} - 1) [rKK_{,r} + K^2] + (r-b) \left[-3KK_{,r} - rK_{,r}^2 - rKK_{,rr} - \frac{N_{,r}rK_{,r}K}{N} - \frac{KK_{,r}(b_{,r}r - b)}{2(r-b)} - \right. \\ & - \frac{N_{,r}K^2}{N} - \frac{K^2(b_{,r}r - b)}{2r(r-b)} \left. \right] - \frac{K_{,\theta\theta}}{K} - \frac{N_{,\theta\theta}}{N} - \frac{b_{,\theta\theta}}{2(r-b)} - \frac{3b_{,\theta}^2}{4(r-b)^2} + \csc^2\theta - \cot^2\theta + \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{NK} + \\ & + \frac{b_{,\theta}K_{,\theta}}{2K(r-b)} - \frac{K_{,\theta}}{K} \cot\theta + \frac{K_{,\theta}^2}{K^2} + \frac{\omega_{,\theta}^2r^2K^2 \sin^2\theta}{2N^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} = & (b_{,r} - 1) [K^2 \sin^2 \theta + rKK_{,r} \sin^2 \theta] + (r - b) [-3KK_{,r} \sin^2 \theta - rK_{,r}^2 \sin^2 \theta - \\
& - rKK_{,rr} \sin^2 \theta - \frac{K^2(b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2r(r - b)} - \frac{N_{,r}rKK_{,r}}{N} \sin^2 \theta - \frac{KK_{,r}(b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \frac{\omega_{,r}^2 r^3 K^4 \sin^4 \theta}{2N^2} - \\
& - \frac{N_{,r}K^2}{N} \sin^2 \theta] - \frac{K_{,\theta\theta}}{K} \sin^2 \theta + \frac{K_{,\theta}^2}{K^2} \sin^2 \theta - \frac{K_{,\theta}}{K} \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{NK} \sin^2 \theta - \frac{b_{,\theta}K_{,\theta} \sin^2 \theta}{2K(r - b)} - \\
& - \frac{N_{,\theta}}{N} \sin \theta \cos \theta - \frac{b_{,\theta} \sin \theta \cos \theta}{2(r - b)} - \frac{\omega_{,\theta}^2 r^2 K^2 \sin^4 \theta}{2N^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\rho t} = & (1 - b_{,r}) \left[\omega K^2 \sin^2 \theta + \frac{\omega_{,r} K^2 r \sin^2 \theta}{2} + KK_{,r} \omega r \sin^2 \theta \right] + (r - b) \left[\frac{3}{2} \omega_{,r} K^2 \sin^2 \theta + \right. \\
& + 3KK_{,r} \omega \sin^2 \theta + \frac{\omega_{,rr} K^2 r \sin^2 \theta}{2} + 2KK_{,r} \omega_{,r} r \sin^2 \theta + KK_{,rr} \omega r \sin^2 \theta + \frac{N_{,r} \omega K^2 \sin^2 \theta}{N} + \\
& + K_{,r}^2 \omega r \sin^2 \theta + \frac{\omega K^2 (b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2r(r - b)} + \frac{\omega_{,r} K^2 (b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{4(r - b)} + \frac{N_{,r} \omega KK_{,r} r \sin^2 \theta}{N} + \\
& \left. + \frac{\omega KK_{,r} (b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \frac{N_{,r} \omega_{,r} r K^2 \sin^2 \theta}{2N} + \frac{\omega \omega_{,r}^2 r^3 K^4 \sin^4 \theta}{2N^2} \right] + \frac{3}{2} \omega_{,\theta} \sin \theta \cos \theta - \omega \sin^2 \theta + \\
& + \frac{b_{,\theta} \omega \sin \theta \cos \theta}{2(r - b)} + \frac{b_{,\theta} \omega_{,\theta} \sin^2 \theta}{4(r - b)} + \frac{b_{,\theta} K_{,\theta} \omega \sin^2 \theta}{2K(r - b)} - \frac{N_{,\theta} \omega_{,\theta}}{2N} \sin^2 \theta + \frac{\omega \omega_{,\theta}^2 r^2 K^2 \sin^4 \theta}{2N^2} + \frac{N_{,\theta} K_{,\theta}}{NK} \omega \sin^2 \theta + \\
& + \frac{N_{,\theta} \omega}{N} \sin \theta \cos \theta + \frac{\omega_{,\theta\theta}}{2} \sin^2 \theta + \frac{K_{,\theta} \omega_{,\theta}}{K} \sin^2 \theta + \frac{\omega K_{,\theta\theta}}{K} \sin^2 \theta - \frac{\omega K_{,\theta}^2}{K^2} \sin^2 \theta + \frac{K_{,\theta} \omega}{K} \sin \theta \cos \theta,
\end{aligned}$$

e por último

$$\begin{aligned}
R_{r\theta} = & \frac{K_{,\theta} K_{,r}}{K^2} - \frac{K_{,r\theta}}{K} - \frac{N_{,r\theta}}{N} + \frac{N_{,r} b_{,\theta}}{2N(r - b)} + \frac{b_{,\theta}}{2r(r - b)} + \frac{b_{,\theta} K_{,r}}{2K(r - b)} + \\
& + \frac{N_{,\theta}}{rN} + \frac{N_{,\theta} K_{,r}}{NK} + \frac{\omega_{,r} \omega_{,\theta} r^2 K^2 \sin^2 \theta}{2N^2}.
\end{aligned}$$

O escalar de Ricci R , é definido como o traço do tensor de Ricci, como visto em (2.5.16). Para a geometria dada pela métrica (5.1.1), o escalar de Ricci é

$$\begin{aligned}
R = & (1 - b_{,r}) \left[-\frac{N_{,r}}{rN} - \frac{2K_{,r}}{rK} - \frac{2}{r^2} \right] + (r - b) \left[-\frac{3N_{,r}}{r^2 N} - \frac{2N_{,rr}}{rN} - \frac{4N_{,r} K_{,r}}{rNK} - \frac{4K_{,rr}}{rK} + \frac{\omega_{,r}^2 K^2 r \sin^2 \theta}{2N^2} \right. \\
& - \frac{10K_{,r}}{r^2 K} - \frac{2K_{,r}^2}{rK^2} \left. \right] - \frac{2N_{,\theta\theta}}{Nr^2 K^2} - \frac{N_{,\theta} b_{,\theta}}{r^2 K^2 N(r - b)} - \frac{2N_{,\theta} \cot \theta}{Nr^2 K^2} - \frac{b_{,\theta\theta}}{r^2 K^2 (r - b)} - \frac{3b_{,\theta}^2}{2r^2 K^2 (r - b)^2} - \\
& - \frac{b_{,\theta} \cot \theta}{r^2 K^2 (r - b)} - \frac{2K_{,\theta\theta}}{r^2 K^3} + \frac{2}{r^2 K^2} - \frac{2K_{,\theta} \cot \theta}{r^2 K^3} + \frac{2K_{,\theta}^2}{r^2 K^4} + \frac{\omega_{,\theta}^2}{2N^2} \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

O tensor de Einstein pode ser obtido pela relação (2.5.15). Utilizando as componentes do tensor de Ricci e o escalar de Ricci acima, as componentes do tensor de Einstein são:

$$\begin{aligned}
G_{tt} = & (1 - b_{,r}) \left[\frac{NN_{,r}}{2r} + \frac{N_{,r}rK^2\omega^2 \sin^2 \theta}{2N} - r\omega\omega_{,r}K^2 \sin^2 \theta - \frac{N^2}{r^2} - \frac{N^2K_{,r}}{rK} \right] + (r - b) \left[-\frac{NN_{,r}}{2r^2} + \right. \\
& + 2KK_{,r}\omega^2 \sin^2 \theta - 3\omega\omega_{,r}K^2 \sin^2 \theta + rKK_{,rr}\omega^2 \sin^2 \theta - 4r\omega\omega_{,r}KK_{,r} \sin^2 \theta - \frac{1}{4}\omega_{,r}^2K^2r \sin^2 \theta - \\
& - r\omega\omega_{,rr}K^2 \sin^2 \theta + \frac{N_{,r}K^2\omega^2 \sin^2 \theta}{2N} + \frac{N_{,r}rKK_{,r}\omega^2 \sin^2 \theta}{N} + \frac{N_{,r}r\omega\omega_{,r}K^2 \sin^2 \theta}{N} + \\
& + \frac{NN_{,r}(b_{,r}r - b)}{2r^2(r - b)} - \frac{K^2\omega^2(b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2r(r - b)} - \frac{KK_{,r}\omega^2(b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \frac{K^2\omega\omega_{,r}(b_{,r}r - b) \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \\
& - \frac{3\omega^2\omega_{,r}^2r^3K^4 \sin^4 \theta}{4N^2} - \frac{5N^2K_{,r}}{r^2K} + \frac{N_{,rr}rK^2\omega^2 \sin^2 \theta}{N} - \frac{N^2K_{,r}^2}{rK^2} - \frac{2N^2K_{,rr}}{rK} \left. \right] - 3\omega\omega_{,\theta} \sin \theta \cos \theta - \\
& - \frac{2K_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega}{K} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{,\theta}^2}{4} \sin^2 \theta - \omega\omega_{,\theta} \sin^2 \theta - \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}\omega^2}{NK} \sin^2 \theta + \frac{N_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega}{N} \sin^2 \theta - \frac{b_{,\theta}K_{,\theta}\omega^2 \sin^2 \theta}{2K(r - b)} - \\
& - \frac{b_{,\theta}\omega_{,\theta}\omega \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \frac{3\omega^2\omega_{,\theta}^2r^2K^2 \sin^4 \theta}{4N^2} - \frac{N^2K_{,\theta\theta}}{r^2K^3} + \frac{N_{,\theta\theta}\omega^2}{N} \sin^2 \theta + \frac{b_{,\theta}N_{,\theta}\omega^2 \sin^2 \theta}{2N(r - b)} + \frac{N^2K_{,\theta}^2}{r^2K^4} + \frac{N^2}{r^2K^2} - \\
& - \frac{b_{,\theta}N^2 \cot \theta}{2r^2K^2(r - b)} - \frac{b_{,\theta\theta}N^2}{2r^2K^2(r - b)} + \frac{b_{,\theta\theta}\omega^2 \sin^2 \theta}{2(r - b)} - \frac{3b_{,\theta}^2N^2}{4r^2K^2(r - b)^2} - \frac{N^2K_{,\theta} \cot \theta}{r^2K^3} + \frac{3b_{,\theta}^2\omega^2 \sin^2 \theta}{4(r - b)^2}, \\
G_{rr} = & \frac{1 - b_{,r}}{1 - \frac{b}{r}} \left[\frac{N_{,r}}{2rN} + \frac{1}{r^2} + \frac{K_{,r}}{rK} \right] + \frac{3N_{,r}}{2rN} + \frac{N_{,r}(b_{,r}r - b)}{2rN(r - b)} + \frac{2N_{,r}K_{,r}}{NK} + \frac{K_{,r}(b_{,r}r - b)}{rK(r - b)} + \frac{b_{,r}r - b}{r^2(r - b)} + \\
& + \frac{K_{,r}}{rK} + \frac{\omega_{,r}^2K^2r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} + \frac{K_{,r}^2}{K^2} + \frac{N_{,\theta\theta}}{NrK^2(r - b)} + \frac{N_{,\theta} \cot \theta}{NrK^2(r - b)} + \frac{K_{,\theta\theta}}{rK^3(r - b)} - \frac{K_{,\theta}^2}{rK^4(r - b)} - \\
& - \frac{1}{rK^2(r - b)} - \frac{\omega_{,\theta}^2r \sin^2 \theta}{4N^2(r - b)} + \frac{K_{,\theta} \cot \theta}{rK^3(r - b)}, \\
G_{\theta\theta} = & (1 - b_{,r}) \frac{N_{,r}rK^2}{2N} + (r - b) \left[\frac{N_{,rr}rK^2}{N} + 2KK_{,r} + rKK_{,rr} + \frac{N_{,r}rKK_{,r}}{N} - \frac{KK_{,r}(b_{,r}r - b)}{2(r - b)} \right] + \\
& + \frac{N_{,r}K^2}{2N} - \frac{K^2(b_{,r}r - b)}{2r(r - b)} - \frac{\omega_{,r}^2K^4r^3 \sin^2 \theta}{4N^2} \left. \right] + \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{NK} + \frac{b_{,\theta}K_{,\theta}}{2K(r - b)} + \frac{b_{,\theta}N_{,\theta}}{2N(r - b)} + \frac{N_{,\theta}}{N} \cot \theta + \\
& + \frac{b_{,\theta} \cot \theta}{2(r - b)} + \frac{\omega_{,\theta}^2r^2K^2 \sin^2 \theta}{4N^2}, \\
G_{\varphi\varphi} = & (1 - b_{,r}) \frac{N_{,r}rK^2 \sin^2 \theta}{2N} + (r - b) \left[\frac{N_{,rr}rK^2 \sin^2 \theta}{N} + 2KK_{,r} \sin^2 \theta + rKK_{,rr} \sin^2 \theta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{N_{,r} r K K_{,r} \sin^2 \theta}{N} - \frac{K K_{,r} (b_{,r} r - b) \sin^2 \theta}{2(r-b)} + \frac{N_{,r} K^2 \sin^2 \theta}{2N} - \frac{K^2 (b_{,r} r - b) \sin^2 \theta}{2r(r-b)} - \\
& - \frac{3\omega_{,r}^2 K^4 r^3 \sin^4 \theta}{4N^2} \left] - \frac{N_{\theta} K_{\theta}}{NK} \sin^2 \theta - \frac{b_{\theta} K_{\theta} \sin^2 \theta}{2K(r-b)} + \frac{N_{,\theta\theta}}{N} \sin^2 \theta + \frac{b_{\theta} N_{\theta} \sin^2 \theta}{2N(r-b)} + \frac{b_{,\theta\theta} \sin^2 \theta}{2(r-b)} + \right. \\
& \left. + \frac{3b_{\theta}^2 \sin^2 \theta}{4(r-b)^2} - \frac{3\omega_{,\theta}^2 r^2 K^2 \sin^4 \theta}{4N^2}, \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\varphi t} = & (1-b_{,r}) \left[\frac{1}{2} \omega_{,r} K^2 r \sin^2 \theta - \frac{N_{,r} \omega K^2 r \sin^2 \theta}{2N} \right] + (r-b) \left[\frac{3}{2} \omega_{,r} K^2 \sin^2 \theta - 2\omega K K_{,r} \sin^2 \theta + \right. \\
& + \frac{1}{2} \omega_{,rr} K^2 r \sin^2 \theta + 2\omega_{,r} K K_{,r} r \sin^2 \theta - \omega K K_{,rr} r \sin^2 \theta - \frac{N_{,r} \omega K K_{,r} r \sin^2 \theta}{N} + \frac{\omega K^2 (b_{,r} r - b) \sin^2 \theta}{2r(r-b)} + \\
& + \frac{\omega_{,r} K^2 (b_{,r} r - b) \sin^2 \theta}{4(r-b)} + \frac{\omega K K_{,r} (b_{,r} r - b) \sin^2 \theta}{2(r-b)} - \frac{N_{,r} \omega_{,r} K^2 r \sin^2 \theta}{2N} + \frac{3\omega \omega_{,r}^2 r^3 K^4 \sin^4 \theta}{4N^2} - \\
& \left. - \frac{N_{,r} \omega K^2 \sin^2 \theta}{2N} - \frac{N_{,rr} \omega r K^2 \sin^2 \theta}{N} \right] + \frac{3}{2} \omega_{,\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{\omega_{,\theta\theta}}{2} \sin^2 \theta + \frac{K_{,\theta} \omega_{,\theta}}{K} \sin^2 \theta + \frac{b_{,\theta} \omega_{,\theta} \sin^2 \theta}{4(r-b)} + \\
& + \frac{b_{,\theta} K_{,\theta} \omega \sin^2 \theta}{2K(r-b)} - \frac{N_{,\theta} \omega_{,\theta}}{2N} \sin^2 \theta + \frac{N_{,\theta} K_{,\theta} \omega}{NK} \sin^2 \theta - \frac{N_{,\theta\theta} \omega}{N} \sin^2 \theta - \frac{b_{,\theta} N_{,\theta} \omega \sin^2 \theta}{2N(r-b)} - \frac{b_{,\theta\theta} \omega \sin^2 \theta}{2(r-b)} - \\
& - \frac{3b_{,\theta}^2 \omega \sin^2 \theta}{4(r-b)^2} + \frac{3\omega \omega_{,\theta}^2 r^2 K^2 \sin^4 \theta}{4N^2},
\end{aligned}$$

e por último

$$\begin{aligned}
G_{r\theta} = & \frac{K_{,\theta} K_{,r}}{K^2} - \frac{K_{,r\theta}}{K} - \frac{N_{,r\theta}}{N} + \frac{N_{,r} b_{,\theta}}{2N(r-b)} + \frac{b_{,\theta}}{2r(r-b)} + \frac{b_{,\theta} K_{,r}}{2K(r-b)} + \frac{N_{,\theta}}{rN} + \\
& + \frac{N_{,\theta} K_{,r}}{NK} + \frac{\omega_{,r} \omega_{,\theta} r^2 K^2 \sin^2 \theta}{2N^2}.
\end{aligned}$$

O espaço-tempo descrito por (5.1.1), apresenta um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, cujas componentes T_{tt} , T_{rr} e $T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi}$ tem os significados físicos usuais, mas em particular, a componente $T_{\varphi t}$, que caracteriza a rotação da distribuição de matéria [16], termo que não aparecia para o buraco de minhoca de Morris-Thorne, uma vez que a distribuição era considerada estática em todas as direções.

É possível construir muitos tipos de buracos de minhoca, o que pode ser feito, particularmente, via imposição de restrições que devem ser obedecidas, ou características que o buraco de minhoca deve apresentar. No caso de Morris e Thorne em [3], restrições foram impostas a fim de tornar o buraco de minhoca viável para viagens interestelares humanas. Mas na ausência desse tipo de informações, é possível expor um exemplo de buraco de

minhoca com rotação que foi proposto por Teo em [16], em que as funções métricas são dadas por

$$N = K = 1 + \frac{16a^2 \cos^2 \theta}{r}, \quad \omega = \frac{2a}{r^3} \quad (5.2.1)$$

com a sendo o momento angular do buraco de minhoca, que pode ser considerado como constante. E para a função b , pode ser proposta como tendo a forma [15, 18]

$$b(r) = \frac{r_0^2}{r}, \quad (5.2.2)$$

que obedece todas as propriedades impostas anteriormente, como a condição de alargamento, por exemplo. Com isso, a métrica (5.1.1) do buraco de minhoca com rotação se torna

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{16a^2 \cos^2 \theta}{r} \right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + (r + 16a^2 \cos^2 \theta)^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(d\varphi - \frac{2a}{r^3} dt \right)^2 \right]. \quad (5.2.3)$$

De modo que, na ausência de rotação ($a = 0$), (5.2.3) se torna uma métrica estática, esfericamente simétrica e assintoticamente plana, assim como a métrica (4.1.1) de Morris e Thorne.

5.3 Base de 1-formas para o Buraco de Minhoca com Rotação

A partir de agora, considere uma base ortonormal $\{e_a\}$, que é dual à base de 1-formas dada pelos elementos [19]

$$\alpha^0 = N dt, \quad \alpha^1 = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-1/2} dr, \quad \alpha^2 = rK d\theta, \quad \alpha^3 = rK \sin \theta (d\varphi - \omega dt). \quad (5.3.1)$$

Com isso, pode-se escrever a base acima de modo que

$$dt = \frac{1}{N} \alpha^0, \quad dr = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \alpha^1, \quad d\theta = \frac{1}{rK} \alpha^2, \quad d\varphi = \frac{1}{rK \sin \theta} \alpha^3 + \frac{\omega}{N} \alpha^0. \quad (5.3.2)$$

Com isso, utilizando (5.3.2) em (5.1.1), o resultado consiste em uma métrica na forma

$$ds^2 = -(\alpha^0)^2 + (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2. \quad (5.3.3)$$

A métrica, agora, recai na métrica de Minkowski.

O que será feito agora, é utilizar o método de Cartan, que foi tratado na seção 2.6, para determinar a curvatura 2-formas e as componentes do tensor de Riemann [9]. Para isso, calculou-se as derivadas exteriores das 1-formas em (5.3.1):

$$\begin{aligned}
d\alpha^0 &= \frac{N,r}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^1 \wedge \alpha^0 + \frac{N,\theta}{rNK} \alpha^2 \wedge \alpha^0; \\
d\alpha^1 &= \frac{b,\theta}{2rK(r-b)} \alpha^2 \wedge \alpha^1; \\
d\alpha^2 &= \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} + \frac{K,r}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \right] \alpha^1 \wedge \alpha^2; \\
d\alpha^3 &= -\frac{rK\omega,r}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \alpha^1 \wedge \alpha^0 - \frac{\omega,\theta}{N} \sin \theta \alpha^2 \wedge \alpha^0 + \\
&\quad + \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} + \frac{K,r}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \right] \alpha^1 \wedge \alpha^3 + \\
&\quad + \left[\frac{1}{rK} \cot \theta + \frac{K,\theta}{rK^2} \right] \alpha^2 \wedge \alpha^3.
\end{aligned}$$

Utilizando a relação (2.6.21), e as propriedades (2.6.24), é possível determinar as conexões 1-forma [19]:

$$\begin{aligned}
\omega_1^0 &= \frac{rK\omega,r}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \alpha^3 + \frac{N,r}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \alpha^0; \\
\omega_2^0 &= \frac{N,\theta}{rNK} \alpha^0 + \frac{\omega,\theta}{2N} \sin \theta \alpha^3; \\
\omega_3^0 &= \frac{rK\omega,r}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \alpha^1 + \frac{\omega,\theta}{2N} \sin \theta \alpha^2; \\
\omega_1^1 &= \frac{b,\theta}{2rK(r-b)} \alpha^1 - \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} + \frac{K,r}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \right] \alpha^2; \\
\omega_3^1 &= \frac{rK\omega,r}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \alpha^0 - \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} + \frac{K,r}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \right] \alpha^3; \\
\omega_3^2 &= \frac{\omega,\theta}{2N} \sin \theta \alpha^0 - \left[\frac{1}{rK} \cot \theta + \frac{K,\theta}{rK^2} \right] \alpha^3.
\end{aligned}$$

A curvatura 2-formas é obtida diretamente da relação (2.6.22). Em posse desses resultados, utilizando a segunda relação, (2.6.23), as componentes do tensor de Riemann na

base de 1-formas (5.3.1) são determinadas:

$$\mathcal{R}_{011}^0 = -\frac{3r^2K^2\omega_r^2}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin^2 \theta + \frac{b_{,\theta}N_{,\theta}}{2Nr^2K^2(r-b)} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{N_{,rr}}{N} - \frac{N_{,r}(rb_{,r}-b)}{2rN(r-b)} \right];$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{021}^0 = & -\frac{3rK\omega_r\omega_{,\theta}}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin^2 \theta - \frac{N_{,\theta}}{Nr^2K} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \\ & - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{N_{,\theta}K_{,r}}{rNK^2} + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{N_{,\theta r}}{rNK} - \frac{b_{,\theta}N_{,r}}{2rNK(r-b)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{231}^0 = & \frac{1}{2}\omega_{,r} \left[\frac{N_{,\theta}}{N} + \frac{b_{,\theta}}{2(r-b)} \right] \frac{1}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,r}}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta \\ & - \frac{K_{,\theta}\omega_{,\theta}}{NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,r\theta}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{131}^0 = & -\frac{3K\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta - \frac{3rK_{,r}\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta - \frac{rK\omega_{,rr}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta \\ & + \frac{N_{,r}rK\omega_{,r}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{K\omega_{,r}(rb_{,r}-b) \sin \theta}{4N(r-b)} - \frac{b_{,\theta}\omega_{,\theta} \sin \theta}{4rNK(r-b)}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{031}^0 = \mathcal{R}_{121}^0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{012}^0 = & \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{N_{,\theta r}}{rNK} - \frac{N_{,r}b_{,\theta}}{2rNK(r-b)} \right] - \frac{3rK\omega_r\omega_{,\theta}}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \\ & - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{N_{,\theta}}{r^2NK} - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{N_{,\theta}K_{,r}}{rNK^2}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{022}^0 = \frac{N_{,r}}{rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{N_{,\theta\theta}}{Nr^2K^2} - \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{Nr^2K^3} + \frac{N_{,r}K_{,r}}{NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \frac{3\omega_{,\theta}^2}{4N^2} \sin^2 \theta;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{132}^0 = & -\frac{\omega_{,\theta}}{2rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,\theta r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{N_{,r}\omega_{,\theta}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \\ & + \frac{b_{,\theta}\omega_{,r}}{4N(r-b)} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta \end{aligned}$$

$$-\frac{K_{,r}\omega_{,\theta}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{K_{,\theta}\omega_{,r}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{232}^0 = & -\frac{\omega_{,\theta\theta}}{2rNK} \sin \theta + \frac{N_{,\theta}\omega_{,\theta}}{2rKN^2} \sin \theta - \frac{3\omega_{,\theta}}{2rNK} \cos \theta - \frac{K\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta \\ & - \frac{rK_{,r}\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta - \frac{K_{,\theta}\omega_{,\theta}}{rNK^2} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{032}^0 = \mathcal{R}_{122}^0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{123}^0 = & -\frac{N_{,\theta}\omega_{,r}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{N_{,r}\omega_{,\theta}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,\theta}}{2rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \\ & + \frac{\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta - \frac{K_{,r}\omega_{,\theta}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{K_{,\theta}\omega_{,r}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{033}^0 = & \frac{N_{,r}}{rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{N_{,r}K_{,r}}{NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{r^2K^2\omega_{,r}^2}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin^2 \theta \\ & + \frac{N_{,\theta}}{Nr^2K^2} \cot \theta + \frac{N_{,\theta}K_{,\theta}}{Nr^2K^3} + \frac{\omega_{,\theta}^2}{4N^2} \sin^2 \theta; \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{013}^0 = \mathcal{R}_{023}^0 = \mathcal{R}_{133}^0 = \mathcal{R}_{233}^0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{013}^1 = & \frac{3K\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta + \frac{3rK_{,r}\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta + \frac{rK\omega_{,rr}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta \\ & - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{K\omega_{,r}(rb_{,r} - b) \sin \theta}{4N(r - b)} + \frac{b_{,\theta}\omega_{,\theta} \sin \theta}{4rNK(r - b)} - \frac{N_{,r}rK\omega_{,r}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{023}^1 = & \frac{K_{,\theta}\omega_{,r}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{\omega_{,r\theta}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta}\omega_{,r} \sin \theta}{4N(r - b)} \\ & + \frac{\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta + \frac{\omega_{,\theta}}{2rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{K_{,r}\omega_{,\theta}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \\ & - \frac{N_{,r}\omega_{,\theta}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{133}^1 &= \frac{2K_{,r}}{rK} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{(rb_{,r} - b)}{2r^2(r-b)} + \frac{K_{,rr}}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{K_{,r}(rb_{,r} - b)}{2rK(r-b)} \\ &\quad + \frac{r^2 K^2 \omega_{,r}^2}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin^2 \theta + \frac{b_{,\theta} \cot \theta}{2r^2 K^2 (r-b)} + \frac{b_{,\theta} K_{,\theta}}{2r^2 K^3 (r-b)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{233}^1 &= - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta}}{2r^2 K (r-b)} + \frac{K_{,\theta r}}{rK^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta} K_{,r}}{2rK^2 (r-b)} \\ &\quad + \frac{rK\omega_{,r}\omega_{,\theta}}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin^2 \theta - \frac{K_{,r}K_{,\theta}}{rK^3} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2};\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{123}^1 = \mathcal{R}_{033}^1 = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{122}^1 &= \frac{b_{,\theta\theta}}{2r^2 K^2 (r-b)} + \frac{3b_{,\theta}^2}{4r^2 K^2 (r-b)^2} - \frac{b_{,\theta} K_{,\theta}}{2r^2 K^3 (r-b)} - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{(rb_{,r} - b)}{2r^2 (r-b)} \\ &\quad + \frac{K_{,rr}}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{K_{,r}(rb_{,r} - b)}{2rK(r-b)} + \frac{2K_{,r}}{rK} \left(1 - \frac{b}{r}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{032}^1 &= \frac{N_{,\theta}\omega_{,r}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{N_{,r}\omega_{,\theta}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \frac{\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta \\ &\quad - \frac{K_{,\theta}\omega_{,r}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{\omega_{,\theta}}{2rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{K_{,r}\omega_{,\theta}}{2NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{012}^1 = \mathcal{R}_{022}^1 = \mathcal{R}_{133}^1 = \mathcal{R}_{232}^1 = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{013}^2 &= \frac{\omega_{,\theta r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta + \frac{\omega_{,r}}{N} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \cos \theta + \frac{K_{,\theta}\omega_{,r}}{NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta \\ &\quad - \frac{N_{,\theta}\omega_{,r}}{2N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin \theta - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta}\omega_{,r} \sin \theta}{4N(r-b)};\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{023}^2 = \frac{\omega_{,\theta\theta}}{2rNK} \sin \theta + \frac{3\omega_{,\theta}}{2rNK} \cos \theta + \frac{K_{,\theta}\omega_{,\theta}}{rNK^2} \sin \theta - \frac{N_{,\theta}\omega_{,\theta}}{2rKN^2} \sin \theta$$

$$+ \frac{K\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta + \frac{rK_{,r}\omega_{,r}}{2N} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \sin \theta;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{133}{}^2 &= \frac{K_{,\theta r}}{rK^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} - \frac{K_{,r}K_{,\theta}}{rK^3} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} + \frac{rK\omega_{,r}\omega_{,\theta}}{4N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \\ &\quad - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta}}{2r^2K(r-b)} - \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \frac{b_{,\theta}K_{,r}}{2rK^2(r-b)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{233}{}^2 &= \frac{K_{,\theta}}{r^2K^3} \cot \theta - \frac{1}{r^2K^2} + \frac{K_{,\theta\theta}}{r^2K^3} - \frac{K_{,\theta}^2}{r^2K^4} + \frac{\omega_{,\theta}^2}{4N^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\quad + \frac{K_{,r}^2}{K^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{2K_{,r}}{rK} \left(1 - \frac{b}{r}\right); \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{033}{}^2 = \mathcal{R}_{123}{}^2 = 0.$$

5.4 Violação da Condição de Energia Nula (NEC)

Como ocorre para o caso do buraco de minhoca estático e esfericamente simétrico, é de se esperar que ocorra uma violação da condição de energia nula. Para tentar verificar se isso de fato acontece, será considerado um tensor momento-energia usual neste referencial que está sendo adotado. O tensor momento-energia terá as componentes \mathcal{T}_{00} , \mathcal{T}_{11} , \mathcal{T}_{22} , \mathcal{T}_{33} tendo os significados físicos usuais, os mesmos considerados em [3], mas também com a componente \mathcal{T}_{01} , que representa a rotação da distribuição de energia [16].

Usando um vetor tipo-luz $\ell^\mu = (\ell^0, \ell^1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$, para a condição de energia nula, ocorre que [19]

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = \frac{1}{8\pi G}\mathcal{G}_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = \frac{1}{8\pi G}\mathcal{R}_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = \frac{1}{8\pi G}(\mathcal{R}_{00} + \mathcal{R}_{11}). \quad (5.4.1)$$

Com $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ e $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ sendo os tensores de Einstein e Ricci, respectivamente, segundo a base de 1-formas adotada. Como, $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha$, então, por meio das componentes calculadas para o tensor de Riemann, (5.4.1) se torna

$$\begin{aligned} 8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu &= 8\pi G(\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11}) = \mathcal{R}_{00} + \mathcal{R}_{11} = \frac{2N_{,r}}{rN} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{N_{,\theta\theta}}{Nr^2K^2} + \frac{2N_{,r}K_{,r}}{NK} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\quad + \frac{N_{,\theta}}{Nr^2K^2} \cot \theta - \frac{b_{,\theta\theta}}{2r^2K^2(r-b)} - \frac{3b_{,\theta}^2}{4r^2K^2(r-b)^2} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{(rb_{,r} - b)}{r^2(r-b)} - \frac{2K_{,rr}}{K} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\omega_{,\theta}^2}{2N^2} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{K_{,r}(rb_{,r} - b)}{rK(r-b)} - \frac{4K_{,r}}{rK} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \frac{b_{,\theta} \cot \theta}{2r^2 K^2(r-b)}. \quad (5.4.2)$$

Para verificar se a condição de energia nula é ou não violada, é necessário estudar o sinal dessa equação. No entanto, essa é uma expressão longa e complicada. Olhando em perspectiva, considerando o caso esfericamente simétrico, o que sobrevive é

$$\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11} = \rho - \tau = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{2}{r}\right) \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{N_{,r}}{N} + \frac{rb_{,r} - b}{2r(r-b)}\right]. \quad (5.4.3)$$

Lembrando que a garganta do buraco de minhoca corresponde à $r = r_0$. Observando o segundo termo de (5.4.3), ao ser aplicado o limite $r \rightarrow r_0^+$, ocorre que

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} \frac{rb_{,r} - b}{2r(r-b)} = -\infty, \quad (5.4.4)$$

uma vez que $\frac{\partial b}{\partial r}|_{r=r_0} < 1$ (Condição de Alargamento da Garganta). Se $\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial r}$ for positivo e finito quando $r \rightarrow r_0^+$, a soma dentro do colchete em (5.4.3) é negativa perto da garganta [19], violando assim a condição de energia nula. Isso poderia ser evitado, se, por exemplo, $\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial r} \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow r_0^+$. Mas nesse caso, $N \rightarrow 0$, causando portanto um horizonte de eventos.

Mas em todo o caso, na garganta, o termo

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{N_{,r}}{N} \quad (5.4.5)$$

vai à zero. Com isso, resta que

$$\rho_0 - \tau_0 = \frac{b_{,r=r_0} - 1}{8\pi G r_0^2} < 0, \quad (5.4.6)$$

uma vez que pela condição de alargamento da garganta, ocorre que $\frac{\partial b}{\partial r}|_{r_0} < 1$. Reproduzindo o mesmo resultado obtido no capítulo anterior para o buraco de minhoca de Morris e Thorne. Portanto, a conclusão é: a violação da condição de energia nula está presente para o buraco de minhoca com rotação, mas essa pode se mostrar não tão intensa. Isso se deve ao fato de existir outros termos, relacionados com a rotação, que não foram considerados, e portanto, podem vir a diminuir a violação, ou até eliminá-la. Mas para analisar essa possibilidade, será necessário determinar quem são as funções métricas, e assim, determinar qual o sinal da expressão (5.4.2).

5.5 Condições para um Buraco de Minhoca com Rotação Ser Atravessável

Um outro aspecto que pode ser abordado com relação ao buraco de minhoca com rotação, são as forças de maré. Para um observador se movendo radialmente com velocidade constante v , as transformações de Lorentz são

$$\mathbf{e}'_0 = \gamma \mathbf{e}_0 \mp \gamma v \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_1 = \mp \gamma \mathbf{e}_1 + \gamma v \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3. \quad (5.5.1)$$

De modo que a nova base $\{\mathbf{e}'_a\}$, é a base para o referencial do observador, e a base $\{\mathbf{e}_a\}$, é a base dual à base de 1-formas que foi adotada.

Da mesma forma como foi feito para o caso estático e esfericamente simétrico, a equação do desvio geodésico que irá medir a influência das forças de maré sobre um observador em questão é a equação (4.4.21). Passando as componentes do tensor de curvatura que serão relevantes, para o referencial do observador por meio das transformações de Lorentz, obtêm-se

$$\mathcal{R}'_{1010} = \mathcal{R}_{011}{}^0 \quad (5.5.2)$$

$$\mathcal{R}'_{2020} = \gamma^2 \mathcal{R}_{022}{}^0 - \gamma^2 v^2 \mathcal{R}_{122}{}^1 \quad (5.5.3)$$

$$\mathcal{R}'_{3030} = \gamma^2 \mathcal{R}_{033}{}^0 - \gamma^2 v^2 \mathcal{R}_{133}{}^1. \quad (5.5.4)$$

E mais uma vez, para demonstrações de valores concretos, serão utilizadas brevemente as unidades usuais do SI. Com isso, para um observador que mede $|\delta \mathbf{x}| \approx 2m$, o interesse continua sendo que $|\delta \mathbf{a}| \lesssim g_\oplus$ (aceleração da gravidade na Terra). Assim, as condições para as forças de maré experimentadas por um observador em movimento radial são:

$$|\mathcal{R}_{011}{}^0| \lesssim \frac{g_\oplus}{c^2 \cdot 2m} \approx 10^{-16} m^{-2}, \quad (5.5.5)$$

$$\left| \gamma^2 \mathcal{R}_{022}{}^0 - \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \mathcal{R}_{122}{}^1 \right| \lesssim \frac{g_\oplus}{c^2 \cdot 2m} \approx 10^{-16} m^{-2}, \quad (5.5.6)$$

$$\left| \gamma^2 \mathcal{R}_{033}{}^0 - \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \mathcal{R}_{133}{}^1 \right| \lesssim \frac{g_\oplus}{c^2 \cdot 2m} \approx 10^{-16} m^{-2}. \quad (5.5.7)$$

Na tentativa de encontrar circunstâncias em que as forças de maré possam se mostrar não muito intensas, considere o caso do observador em questão estar se movendo na direção radial, e ao longo do eixo de rotação, ou seja, quando $\theta = 0$ ou π . Diante disso, segundo a condição imposta sobre as funções métricas N , K e b (que podem ser vistas na seção 5.1, e também em [16]), as derivadas $N_{,\theta}$, $K_{,\theta}$ e $b_{,\theta}$ devem ser nulas. Portanto, ocorre uma redução em \mathcal{R}'_{1010} :

$$\mathcal{R}'_{1010} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{N_{,rr}}{N} - \frac{N_{,r}(rb_{,r} - b)}{2rN(r-b)} \right], \quad (5.5.8)$$

Uma redução ainda maior ocorre quando o observador se aproxima da garganta. Neste caso,

$$\mathcal{R}'_{1010} \simeq \frac{N_{,r=r_0}(1 - b_{,r=r_0})}{2r_0 N_0}.$$

Como na garganta $b_{,r=r_0} \equiv \frac{\partial b}{\partial r}|_{r=r_0} < 1$ (condição de alargamento), então, conclui-se que

$$\mathcal{R}'_{1010} \simeq \frac{N_{r_0}(1 - b_{r_0})}{2r_0 N_0} < \frac{N_{r_0}}{2r_0 N_0}. \quad (5.5.9)$$

Assim, nessas circunstâncias, a condição (5.5.5) para \mathcal{R}'_{1010} , se reduz a

$$\left| \frac{N_{r_0}}{2r_0 N_0} \right| \lesssim 10^{-16} m^{-2}. \quad (5.5.10)$$

Para analisar a outra componente relevante do tensor de curvatura no referencial do observador em questão, considere que esse observador desacelere, ou até chegue a parar na garganta, de modo que sua velocidade seja muito pequena, ou até nula. Nesse caso, o termo $v/c \rightarrow 0$, e portanto, apenas o primeiro termo de \mathcal{R}'_{2020} é relevante [19]. Novamente, considere que o observador se move ao longo do eixo de rotação, $\theta = 0$ ou π . Diante disso, a componente \mathcal{R}'_{2020} se reduz à:

$$\mathcal{R}'_{2020} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{N_{,r}}{rN} + \frac{N_{,r}K_{,r}}{NK} \right].$$

Assim, a condição (5.5.6) para é reduzida à

$$\left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{N_{,r}}{rN} + \frac{N_{,r}K_{,r}}{NK} \right] \right| \lesssim 10^{-16} m^{-2}. \quad (5.5.11)$$

o que pode causar uma diminuição das forças de maré. O mesmo deveria acontecer para \mathcal{R}'_{3030} , mas nesse caso, existe um termo em sua expressão, que apresenta uma indeterminação em $\theta = 0$ ou π . Este termo é

$$\frac{N_{,\theta}}{Nr^2 K^2} \cot \theta.$$

O que pode complicar a análise nesse caso.

Capítulo 6

Conclusão

Como visto ao longo de toda essa dissertação, um buraco de minhoca é uma estrutura formada por duas regiões de um universo, ou de dois universos diferentes, assintoticamente planos unidos por uma garganta de raio r_0 . Duas geometrias foram consideradas, uma estática e esfericamente simétrica, e outra apresentando uma rotação (não sendo mais estática, mas ainda apresentando uma independência temporal).

Um buraco de minhoca estático e esfericamente simétrico no vácuo, é descrito pela solução de Schwarzschild, e este apresenta horizontes semelhantes ao de buracos negros com as mesmas condições. Portanto, foi concluído que um buraco de minhoca atravessável não deveria estar no vácuo. Porém, mediante às condições impostas para a existência do buraco de minhoca, como por exemplo, a condição de alargamento da garganta, $b'(r)|_{r \simeq r_0} < 1$, surge a necessidade de se considerar a chamada matéria exótica, matéria esta que viola as condições de energia. Uma vez que a matéria exótica aparenta ser problemática, é interessante minimizar o seu uso no que diz respeito às soluções de buraco de minhoca. Morris e Thorne [3] propõem, por exemplo, restringir o material exótico à uma pequena região central na garganta, sendo essa então cercada por matéria normal, ou seja, $\tau_0 - \rho_0 > 0$ nessa pequena região, e $\tau - \rho \leq 0$ fora dela.

Por outro lado, a violação das condições de energia é algo aceitável hoje em dia, e se mostra um aspecto presente em vários fenômenos estudados em teorias atualmente consideradas válidas. O que coloca a matéria exótica como uma fonte teoricamente possível. Algumas fontes apresentam comportamento parecido no que diz respeito à violação das condições de energia, como campos escalares. No período inflacionário do universo, ou até mesmo hoje com sua expansão acelerada, e em alguns efeitos quânticos, também existem violações dessas condições [11].

Para uma análise da segunda geometria considerada, um buraco de minhoca com rotação, é necessária uma escolha adequada das funções métricas, respeitando sempre às condições impostas para soluções fisicamente aceitáveis. Porém, analisando o buraco de minhoca com rotação em uma base de 1-formas adequada, a violação da condição de energia nula ainda se faz presente, a priori. Mas essa se mostra menos severa do que no

caso do buraco de minhoca de Morris e Thorne.

Como uma perspectiva para a continuação deste trabalho, vamos considerar buracos de minhoca descritos por uma geometria não-comutativa para analisarmos o comportamento da geometria, tanto estática e esféricamente simétrica, quanto contendo rotação, e como isso se reflete no comportamento da fonte para essa geometria, e nas condições de energia.

O buraco de minhoca não pode ser desconsiderado mediante as dificuldades que este apresenta com relação às condições necessárias para sua formação, permanecendo assim como uma possibilidade teórica aceitável. Dependendo assim, de trabalhos futuros que possam esclarecer mais sobre seu papel no universo.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Flamm, "Republications of: Contributions to Einstein's theory of gravitation", *Gen. Relativ. Gravit.* 47 (2015) 72.
- [2] F. S. N. Lobo, "Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions", Springer International Publishing, 2017.
- [3] K. S. Thorne and M. S. Morris, "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity", *Am. J. Phys.* 56 (1988) 395.
- [4] E. M. Lifshitz and L.D. Landau, "The classical theory of fields", 4 ed., vol. 2, Butterworth Heinemann, 1980.
- [5] S. M. Carroll, "Spacetime and geometry", Cambridge University Press, 2019.
- [6] C. W. Misner, J. A. Wheeler and K. S. Thorne, "Gravitation", W. H. Freeman and Company, 1973.
- [7] J. B. Hartle, "Gravity: An introduction to Einstein's general relativity", Pearson Education, 2003.
- [8] G. F. R. Ellis and S.W. Hawking, "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press, 1973.
- [9] L.P. Hughston and K. P. Tod, "An introduction to general relativity", Cambridge University Press, 1990.
- [10] C. Barcelos and M. Visser, "Twilight for the energy conditions?", *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002) 1553.
- [11] M. Visser, "Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking", American Institute of Physics, New York, 1995.
- [12] V. Faraoni, "Non-minimal coupling of the scalar field and inflation", arXiv:astro-ph/9602111.
- [13] C. Barcelos and M. Visser, "Scalar fields, energy conditions and traversible wormholes", *Class. Q. Grav.* 17 (2000) 3843.

- [14] O. Hrycyna, "What ξ ? cosmological constraints on the non-minimal coupling constant", *Phys. Lett. B* 768 (2017) 218.
- [15] F. P. Poulis, "Buracos de minhoca em modelos de universo eterno", Dissertação (Mestrado em Física). Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro 2007.
- [16] E. Teo, "Rotating traversable wormholes", *Phys. Rev. D* 58 (1998) 024014.
- [17] G. Gyulchev, P. Nedkova, S. Yazadjiev and V. Tinchev, "On the shadow of rotating traversable wormholes", *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 544.
- [18] F. S. N. Lobo, "General class of wormhole geometries in conformal Weyl gravity", *Class. Q. Grav.* 25 (2008) 175006.
- [19] P. K. Kuhfittig, "Axially symmetric rotating traversable wormholes", *Phys. Rev. D* 67 (2003) 064015.
- [20] A. Hatzinikitas, "A note on Riemann normal coordinates", arXiv: hep-th/0001078.
- [21] A. van de Ven, C. Schubert and U. Müller, "A closed formula for the Riemann normal coordinate expansion", arXiv:gr-qc/9712092.
- [22] I. L. Shapiro, "A Primer in Tensor Analysis and Relativity", Springer, 2019.
- [23] S. Chandrasekhar, "The Mathematical Theory of Black Holes", Oxford University Press, New York, 1983.

Apêndice A

Simetrias do tensor de Riemann

Para derivar as propriedades de simetria e anti-simetria do tensor de Riemann, é importante trabalhar com os índices covariantes, ou seja,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{\beta\mu\nu}. \quad (\text{A.0.1})$$

Portanto, desenvolvendo a expressão para o tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma}[\partial_{\mu}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}].$$

Utilizando (2.3.14) para a conexão

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}(\partial_{\mu}g^{\gamma\lambda})[\partial_{\nu}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\beta}] + \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\lambda}[\partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\beta\lambda} + \partial_{\mu}\partial_{\beta}g_{\nu\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\beta}] \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}(\partial_{\nu}g^{\gamma\tau})[\partial_{\mu}g_{\beta\tau} + \partial_{\beta}g_{\mu\tau} - \partial_{\tau}g_{\mu\beta}] - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\tau}[\partial_{\nu}\partial_{\mu}g_{\beta\tau} + \partial_{\nu}\partial_{\beta}g_{\mu\tau} - \partial_{\nu}\partial_{\tau}g_{\mu\beta}] \\ &\quad + g_{\alpha\gamma}[\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}] \end{aligned} \quad (\text{A.0.2})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}g_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}g_{\mu\alpha} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}g_{\mu\beta} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}g_{\nu\beta}) + \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}(\partial_{\mu}g^{\gamma\lambda})[\partial_{\nu}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\beta}] \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}(\partial_{\nu}g^{\gamma\tau})[\partial_{\mu}g_{\beta\tau} + \partial_{\beta}g_{\mu\tau} - \partial_{\tau}g_{\mu\beta}] + g_{\alpha\gamma}[\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}]. \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

Por meio de (2.3.10) é possível escrever

$$\partial_{\mu}g_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\mu}g_{\epsilon\gamma} + \Gamma^{\epsilon}_{\gamma\mu}g_{\alpha\epsilon}, \quad (\text{A.0.4})$$

mas também

$$0 = \partial_\mu \delta_\alpha^\lambda = \partial_\mu (g^{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha}) = g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\alpha}) + g_{\alpha\gamma} (\partial_\mu g^{\lambda\gamma}) = 0,$$

portanto

$$g_{\alpha\gamma} (\partial_\mu g^{\lambda\gamma}) = -g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\alpha\gamma}). \quad (\text{A.0.5})$$

Combinando então (A.0.4) com (A.0.5) obtêm-se

$$g_{\alpha\gamma} (\partial_\mu g^{\lambda\gamma}) = -g^{\lambda\gamma} (\Gamma_{\alpha\mu}^\varepsilon g_{\varepsilon\gamma} + \Gamma_{\gamma\mu}^\varepsilon g_{\alpha\varepsilon}). \quad (\text{A.0.6})$$

Assim, substituindo (A.0.6) em (A.0.3) conclui-se

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha} + \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta}) + g_{\rho\gamma} (\Gamma_{\alpha\nu}^\rho \Gamma_{\mu\beta}^\gamma - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \Gamma_{\nu\beta}^\gamma). \quad (\text{A.0.7})$$

Para facilitar as coisas, considere as componentes do tensor de Riemann acima, escritas em coordenadas inercias locais, estabelecidas em um ponto particular p da variedade. Em tais coordenadas x'^μ , no ponto p , a conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(p)$ desaparece, mas para sua primeira derivada o mesmo não acontece. Assim, com $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(p) = 0$ mas $\partial'_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda|_p \neq 0$, as componentes do tensor de Riemann são

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial'_\mu \partial'_\beta g'_{\nu\alpha} - \partial'_\nu \partial'_\beta g'_{\mu\alpha} + \partial'_\nu \partial'_\alpha g'_{\mu\beta} - \partial'_\mu \partial'_\alpha g'_{\nu\beta}). \quad (\text{A.0.8})$$

As coordenadas x'^μ são as chamadas *coordenadas normais de Riemann*. Mais sobre esse assunto pode ser encontrado em [20], [21] e [22].

Utilizando o tensor de Riemann escrito nas coordenadas x'^μ , é possível demonstrar as seguinte propriedades:

1 Fazendo a troca dos dois primeiros índices em (A.0.8)

$$\begin{aligned} R'_{\beta\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial'_\mu \partial'_\alpha g'_{\beta\nu} - \partial'_\nu \partial'_\alpha g'_{\beta\mu} + \partial'_\nu \partial'_\beta g'_{\mu\alpha} - \partial'_\mu \partial'_\beta g'_{\nu\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2} (-\partial'_\mu \partial'_\alpha g'_{\beta\nu} + \partial'_\nu \partial'_\alpha g'_{\beta\mu} - \partial'_\nu \partial'_\beta g'_{\mu\alpha} + \partial'_\mu \partial'_\beta g'_{\nu\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

quando comparado com (A.0.8) conclui-se que

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu} = -R'_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (\text{A.0.10})$$

2 De forma parecida, agora trocando os dois últimos índices em (A.0.8)

$$R'_{\alpha\beta\nu\mu} = \frac{1}{2} (\partial'_\nu \partial'_\beta g'_{\mu\alpha} - \partial'_\mu \partial'_\beta g'_{\nu\alpha} + \partial'_\mu \partial'_\alpha g'_{\nu\beta} - \partial'_\nu \partial'_\alpha g'_{\mu\beta})$$

$$= -\frac{1}{2}(-\partial'_\nu\partial'_\beta g'_{\mu\alpha} + \partial'_\mu\partial'_\beta g'_{\nu\alpha} - \partial'_\mu\partial'_\alpha g'_{\nu\beta} + \partial'_\nu\partial'_\alpha g'_{\mu\beta}), \quad (\text{A.0.11})$$

quando comparado com (A.0.8) conclui-se que

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu} = -R'_{\alpha\beta\nu\mu}. \quad (\text{A.0.12})$$

3 Trocando agora o primeiro par de índices com o segundo par de índices em (A.0.8)

$$R'_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial'_\alpha\partial'_\nu g'_{\mu\beta} - \partial'_\beta\partial'_\nu g'_{\alpha\mu} + \partial'_\beta\partial'_\mu g'_{\alpha\nu} - \partial'_\alpha\partial'_\mu g'_{\beta\nu}), \quad (\text{A.0.13})$$

quando comparado com (A.0.8) é obtido que

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu} = R'_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.0.14})$$

4 Fazendo uma troca adequada de índices em (A.0.8)

$$R'_{\alpha\mu\nu\beta} = \frac{1}{2}(\partial'_\nu\partial'_\mu g'_{\alpha\beta} - \partial'_\beta\partial'_\mu g'_{\alpha\nu} + \partial'_\beta\partial'_\alpha g'_{\nu\mu} - \partial'_\nu\partial'_\alpha g'_{\beta\mu}) \quad (\text{A.0.15})$$

e

$$R'_{\alpha\nu\beta\mu} = \frac{1}{2}(\partial'_\beta\partial'_\nu g'_{\alpha\mu} - \partial'_\mu\partial'_\nu g'_{\alpha\beta} + \partial'_\mu\partial'_\alpha g'_{\beta\nu} - \partial'_\beta\partial'_\alpha g'_{\mu\nu}). \quad (\text{A.0.16})$$

Somando (A.0.13), (A.0.15) e (A.0.16) obtêm-se

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu} + R'_{\alpha\mu\nu\beta} + R'_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (\text{A.0.17})$$

5 Para a última propriedade desta seção, é necessário lembrar que nas coordenadas atuais, a conexão é nula no ponto p . Portanto, tomar a derivada covariante de expressão (A.0.8) se torna simplesmente

$$\nabla'_\lambda R'_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial'_\lambda\partial'_\mu\partial'_\beta g'_{\nu\alpha} - \partial'_\lambda\partial'_\nu\partial'_\beta g'_{\mu\alpha} + \partial'_\lambda\partial'_\nu\partial'_\alpha g'_{\mu\beta} - \partial'_\lambda\partial'_\mu\partial'_\alpha g'_{\nu\beta}). \quad (\text{A.0.18})$$

Fazendo uma troca adequada nos índices λ , α e β na expressão (A.0.18), acima, como

$$\nabla'_\alpha R'_{\beta\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial'_\alpha\partial'_\mu\partial'_\lambda g'_{\nu\beta} - \partial'_\alpha\partial'_\nu\partial'_\lambda g'_{\mu\beta} + \partial'_\alpha\partial'_\nu\partial'_\beta g'_{\mu\lambda} - \partial'_\alpha\partial'_\mu\partial'_\beta g'_{\nu\lambda}), \quad (\text{A.0.19})$$

e

$$\nabla'_\beta R'_{\lambda\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial'_\beta\partial'_\mu\partial'_\alpha g'_{\nu\lambda} - \partial'_\beta\partial'_\nu\partial'_\alpha g'_{\mu\lambda} + \partial'_\beta\partial'_\nu\partial'_\lambda g'_{\mu\alpha} - \partial'_\beta\partial'_\mu\partial'_\lambda g'_{\nu\alpha}). \quad (\text{A.0.20})$$

Somando então (A.0.18), (A.0.19) e (A.0.20) obtêm-se

$$\nabla'_\lambda R'_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla'_\alpha R'_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla'_\beta R'_{\lambda\alpha\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.0.21})$$

Utilizando a propriedade do tensor de Riemann ser anti-simétrico nos últimos dois índices, as identidades (A.0.17) e (A.0.21) podem ser expressas nas formas

$$R'_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0, \quad (\text{A.0.22})$$

e

$$\nabla'_{[\lambda} R'_{\alpha\beta]\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.0.23})$$

respectivamente.

O fato da curvatura ser expressa por um tensor, garante que qualquer propriedade válida em um sistema de coordenadas em particular, como foi o caso aqui, também será válida em qualquer outro. Portanto, as propriedades demonstradas nesta seção, escritas no sistema de coordenadas adotado, são válidas para todo e qualquer outro sistema de coordenadas. Assim, pode-se escrever as simetrias e identidades anteriores como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \quad (\text{A.0.24})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad (\text{A.0.25})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.0.26})$$

E as identidades

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0 \quad (\text{A.0.27})$$

e

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\alpha R_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\lambda\alpha\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.0.28})$$

Fechando assim esta seção.

Apêndice B

Equação de Einstein e Limite Newtoniano

Para construir uma ação para a gravitação, a variável dinâmica envolvida será a métrica $g_{\mu\nu}$. O tratamento que será feito aqui é o mesmo encontrado em [5]. As equações de Einstein são obtidas pelo princípio da ação mínima

$$\delta(S_H + S_M) = 0, \quad (\text{B.0.1})$$

em que S_H é a ação de Hilbert para o campo gravitacional, e S_M a ação para a matéria. Partindo da ação de Hilbert

$$S_H = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g}(R + 2\Lambda)d^4x. \quad (\text{B.0.2})$$

Pelo princípio da ação mínima

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \delta \left[\frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g}(R + 2\Lambda)d^4x \right] = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g}R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g}(\delta R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\delta\sqrt{-g})(R + 2\Lambda)d^4x = 0. \end{aligned}$$

O tensor de Ricci é a contração nos primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann. A variação do tensor de Riemann com relação à métrica é dada pela variação da conexão, que por sua vez, a variação $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ é a diferença entre duas conexões, e portanto, um verdadeiro tensor. Assim, é possível tomar sua derivação covariante

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) = \partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}. \quad (\text{B.0.3})$$

Tomando as posições adequadas dos índices em (B.0.3), e substituindo na expressão da variação do tensor de Riemann

$$\delta R^\sigma_{\cdot\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda}, \quad (\text{B.0.4})$$

obtêm-se que

$$\delta R^\sigma_{\cdot\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \quad (\text{B.0.5})$$

portanto, para o tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\lambda_{\cdot\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}. \quad (\text{B.0.6})$$

Substituindo (B.0.6) no termo adequado na ação

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} d^4x &= \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} [\nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}] g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}] d^4x. \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

Trabalhando em cima de $\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ com a expressão (2.3.14) para o conexão, é possível encontrar a relação,

$$\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \delta g^{\lambda\sigma} + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \delta g^{\lambda\sigma} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma \delta g^{\alpha\beta}]. \quad (\text{B.0.8})$$

Assim, substituindo (B.0.8) em (B.0.7) obtêm-se

$$\frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}] d^4x. \quad (\text{B.0.9})$$

Aqui encontra-se uma integral de volume, do divergente de um vetor. Assim, pelo teorema de Gauss, essa integral é igual à uma contribuição de fronteira, ou seja, uma integral de superfície, que envolve o volume no infinito. Uma vez que, por definição a variação do campo é zero nos limites de integração, o termo (B.0.9) desaparece [4, 5].

Para continuar, é necessário utilizar um resultado com relação às matrizes quadradas:

$$\ln(\det \mathbf{A}) = \text{tr}(\ln \mathbf{A}). \quad (\text{B.0.10})$$

Tomando a variação da expressão (B.0.10) chega-se a

$$\frac{\delta(\det \mathbf{A})}{\det \mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}). \quad (\text{B.0.11})$$

Para o caso que está sendo considerado,

$$g^{-1} \delta g = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.12})$$

Uma vez que $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, a delta de Kronecker não se altera sob variação, portanto $\delta(g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}) = 0$. Assim,

$$g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} = -g^{\alpha\nu} \delta g_{\mu\alpha}. \quad (\text{B.0.13})$$

Substituindo então (B.0.13) em (B.0.12) obtêm-se

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.14})$$

Com isso, a variação de $\delta(\sqrt{-g})$ se torna

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

ou ainda

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.15})$$

Assim, a variação do termo correspondente da ação é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\delta\sqrt{-g})(R + 2\Lambda) d^4x &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] (R + 2\Lambda) d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (\text{B.0.16})$$

Conclui-se então que, a variação da ação (B.0.2) se torna

$$\delta S_H = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.0.17})$$

Considerando a ação em (B.0.1) como

$$S = S_H + S_M, \quad (\text{B.0.18})$$

com S_M sendo a ação referente ao campo de matéria, como já dito anteriormente. Assim, a variação (B.0.1) pode ser escrita como

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \delta S_M = 0. \quad (\text{B.0.19})$$

Portanto, definindo o chamado **Tensor Momento-Energia** como¹

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{B.0.20})$$

¹Essa é a chamada **definição dinâmica** do tensor momento-energia

de forma que (B.0.19) pode ser reescrito como

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.0.21})$$

Assim, como definido pelo princípio da ação mínima, obtêm-se as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.22})$$

Para determinar a constante κ , será considerada a chamada ***aproximação de campo fraco***. Para isso, algumas condições devem ser satisfeitas:

(i) Limites de baixas velocidade das partículas,

$$\left| \frac{dx^i}{dx^0} \right| = \left| \frac{dx^i}{dt} \right| \ll 1. \quad (\text{B.0.23})$$

(ii) Como o campo gravitacional está sendo considerado fraco, então, a métrica será assumida

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.0.24})$$

com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, e $h_{\mu\nu}$ uma pequena perturbação, ou seja, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Considerando a aproximação em primeira ordem para a conexão afim [22]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu}). \quad (\text{B.0.25})$$

Utilizando a condição (B.0.23), é possível escrever

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} u^{\mu} u^{\nu} \approx \Gamma_{00}^{\sigma} u^0 u^0, \quad (\text{B.0.26})$$

com u^{μ} sendo a quadri-velocidade de uma partícula neste campo. Assim, considerando $|u^0| = 1$, conclui-se que

$$\Gamma_{00}^{\sigma} u^0 u^0 = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (2\partial_0 h_{0\rho} - \partial_{\rho} h_{00}). \quad (\text{B.0.27})$$

Como a gravidade Newtoniana é independente do tempo, então

$$\Gamma_{00}^{\sigma} u^0 u^0 = -\frac{1}{2} \eta^{\sigma i} \partial_i h_{00}, \quad (\text{B.0.28})$$

em que é assumido que $h_{\mu\nu}$ também apresenta uma independência temporal [22]. Para o movimento de uma partícula neste campo, a parte que realmente importa na equação da

geodésica (2.4.6), é quando $\sigma \neq 0$. Com isso, usando $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ obtêm-se

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} = 0, \quad (\text{B.0.29})$$

ou ainda²

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}. \quad (\text{B.0.30})$$

Comparando com a equação newtoniana

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \varphi, \quad (\text{B.0.31})$$

o que pode ser associado à (B.0.30), portanto h_{00} é escrito como

$$h_{00} = -2\varphi, \quad (\text{B.0.32})$$

em que φ é o potencial gravitacional de Newton. Por uma questão de dimensionalidade com relação a componente g_{00} em (B.0.24), quando φ é escrito nas unidades habituais do SI, pode-se escrever $h_{00} = -\frac{2\varphi}{c^2}$. Portanto, a componente g_{00} da métrica (B.0.24) é

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right). \quad (\text{B.0.33})$$

Considerando a equação de Einstein, ignorando por hora o termo que envolve a constante cosmológica, é possível escrever

$$R^\mu_{\nu} = \kappa \left(T^\mu_{\nu} - \frac{1}{2} T \delta^\mu_{\nu} \right), \quad (\text{B.0.34})$$

com $R = -\kappa T$ e T o traço do tensor energia-momento. Considerando um fluido perfeito como fonte de energia-momento,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.35})$$

Para o limite Newtoniano, por hipótese, velocidades comparadas à luz estão sendo desconsideradas, portanto a pressão de um corpo pode ser ignorada³ [5]. Assim,

$$T_0^0 = -\rho c^2 \quad (\text{B.0.36})$$

²Como a parte da métrica que realmente atuará será espacial euclidiana, ou seja $\eta_{ij} \equiv \delta_{ij}$, então não importa se estiver sendo usado ∂_i ou ∂^i .

³a pressão de um corpo será apreciada somente quando as velocidades das partículas que constituem este corpo forem da ordem da velocidade da luz.

a única componente não nula quando se é considerado o limite da gravitação de Newton [22]. Portanto, a única componente relevante de (B.0.34) é

$$R_0^0 = -\frac{\kappa c^2}{2}\rho, \quad (\text{B.0.37})$$

em que $T = T_0^0$. prosseguindo, para a componente R_0^0 , têm-se

$$R_0^0 = \eta^{00}R_{00} = \eta^{00}[\partial_\alpha\Gamma_{00}^\alpha - \partial_0\Gamma_{0\alpha}^\alpha + \mathcal{O}(\Gamma^2)]. \quad (\text{B.0.38})$$

Tendo que a conexão é escrita como em (B.0.25), considere apenas os termos em primeira ordem na conexão. Assim, pode-se escrever

$$R_0^0 = \eta^{00}R_{00} = \eta^{00}\partial_i\Gamma_{00}^i, \quad (\text{B.0.39})$$

uma vez que a gravidade newtoniana é independente do tempo. Portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\alpha}(2\partial_0h_{0\alpha} - \partial_\alpha h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00}. \end{aligned}$$

Com o resultado (B.0.33) conclui-se então que

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2}\partial_i\varphi. \quad (\text{B.0.40})$$

Com isso, a componente R_0^0 (B.0.39) se torna

$$R_0^0 = -\frac{1}{c^2}\Delta\varphi. \quad (\text{B.0.41})$$

Substituindo (B.0.41) em (B.0.37)

$$\Delta\varphi = \frac{\kappa c^4}{2}\rho. \quad (\text{B.0.42})$$

Para a gravitação newtoniana, a equação de Poisson é

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \quad (\text{B.0.43})$$

Comparando então (B.0.42) com (B.0.43), conclui-se que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (\text{B.0.44})$$

Assim, encontrada a constante κ , as equações de Einstein (B.0.22) podem ser reescritas com

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.45})$$

Apêndice C

Curvatura 2-formas e Equação de Estrutura de Cartan

Neste apêndice é apresentado alguns elementos da geometria diferencial. No entanto, essa apresentação não tem a intenção de substituir o que foi exposto no capítulo 2 desta dissertação. A apresentação é limitada aos fundamentos mais básicos que levam às equações de estrutura de Cartan. O que foi abordado nesse apêndice teve como principais referências [8] e [23].

C.1 Vetores, 1-formas e Tensores Revisitados

C.1.1 Vetores Tangentes

Primeiramente, considere uma função f em \mathcal{M} definida como a aplicação $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, supondo que a combinação $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ definida como $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função suave das coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Definindo também uma curva suave λ em \mathcal{M} como

$$\lambda : \text{um intervalo } I(a < t < b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \lambda(t) = p \in \mathcal{M},$$

tal que,

$$(\phi_\alpha \circ \lambda)(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)], \tag{C.1.1}$$

impondo que $x^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) são funções suaves de t . Definida a função f na variedade, pode-se definir a aplicação $f \circ \lambda$ de modo que, aliado com $\phi_\alpha \circ \lambda$, conduz a consideração de que a função $f(\lambda(t)) = f(x^1(t), \dots, x^n(t))$, onde $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ são as coordenadas do ponto $p = \lambda(t)$ pelo mapeamento ϕ_α [23].

Com a definição de $f(x^1(t), \dots, x^n(t))$ em uma curva λ na variedade, considere a

derivada de f ao longo dessa curva

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\lambda(t)} \right|_{t=t_0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{f(\lambda(t_0 + \varepsilon)) - f(\lambda(t_0))\} \\ &= \sum_{j=1}^n \left. \frac{dx^j(t)}{dt} \right|_{t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{\lambda(t_0)} = \left(\frac{dx^j}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{t_0}, \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

onde $p = \lambda(t_0)$. É fato que por esse mesmo ponto passam várias curvas. Sendo assim, defini-se em espaço vetorial em p formado por vetores tangentes que são combinações lineares das derivadas $\frac{\partial}{\partial x^j}$ na forma

$$\mathbf{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (\text{C.1.3})$$

Esses vetores tangentes aparecem quando se considera as curvas λ definidas como

$$x^j(t) = x^j(p) + X^j t, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (\text{C.1.4})$$

Os vetores tangentes em p formam um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , expandidos pelas derivadas coordenadas, desde que a condição

$$(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y})f = \alpha \mathbf{X}(f) + \beta \mathbf{Y}(f), \quad (\text{C.1.5})$$

seja satisfeita por quaisquer vetores \mathbf{X} e \mathbf{Y} , sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty$.

Finalmente, a definição de \mathbf{X} como

$$\mathbf{X}(f) = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j}, \quad (\text{C.1.6})$$

para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty$ satisfaz a regra de Leibnitz

$$\mathbf{X}(fg)|_{\lambda(t)} = [f\mathbf{X}(g) + g\mathbf{X}(f)]_{\lambda(t)}, \quad (\text{C.1.7})$$

com $f(\lambda(t))$ e $g(\lambda(t))$. Os vetores tangentes podem ser considerados como derivadas direcionais, e o espaço vetorial formado por esses vetores tangentes, ou também chamados de vetores contravariantes, em uma variedade n -dimensional, é denotado por $T_p\mathcal{M}$, e é chamado de **Espaço Tangente em p** .

Dada uma base $\{\mathbf{e}_j\}$, é possível expressar qualquer vetor tangente em p na forma

$$\mathbf{X} = X^j \mathbf{e}_j, \quad (\text{C.1.8})$$

onde essas bases se relacionam com a base $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$ pelas transformações

$$\mathbf{e}_a = \Phi_a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^j} = \Phi_j^b \mathbf{e}_b, \quad (\text{C.1.9})$$

com

$$\Phi_a^k \Phi_j^a = \delta_j^k \quad \text{e} \quad \Phi_a^k \Phi_k^b = \delta_a^b, \quad (\text{C.1.10})$$

sendo $[\Phi_j^a]$ a inversa da transformação $[\Phi_a^k]$.

C.1.2 1-formas ou, Vetores Covariantes ou Covetores

Uma 1-forma ω em p , é um mapeamento linear dos vetores de $T_p\mathcal{M}$ nos reais,

$$\omega : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{C.1.11})$$

ou seja, sendo $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$, uma 1-forma associa esse vetor a um número $\omega(\mathbf{X})$, ou também escrito como

$$\omega(\mathbf{X}) = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle. \quad (\text{C.1.12})$$

A linearidade é expressa por

$$\langle \omega, \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle. \quad (\text{C.1.13})$$

é definido a multiplicação de uma 1-forma por um escalar e a soma de duas 1-formas como

$$(\alpha\omega)(\mathbf{X}) = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle \quad \text{e} \quad (\omega + \pi)(\mathbf{X}) = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \langle \pi, \mathbf{X} \rangle. \quad (\text{C.1.14})$$

Por essas regras, as 1-formas formam um espaço vetorial em p denotado por $T_p^*\mathcal{M}$, e é chamado de **Espaço Cotangente em p** , e dual ao espaço tangente. Por essa razão, as 1-formas são chamadas de vetores **cotangentes** ou **covariantes**.

Define-se uma base de 1-formas, $\{\mathbf{e}^j\}$ ($j = 1, \dots, n$), tal que

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{e}^j, X^k \mathbf{e}_k \rangle = X^k \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = X^k \delta_k^j = X^j. \quad (\text{C.1.15})$$

A base $\{\mathbf{e}^j\}$ é dual a base de vetores $\{\mathbf{e}_j\}$. Assim, as 1-formas ω podem ser expandidas como combinação linear da base $\{\mathbf{e}^j\}$, com coeficientes

$$\omega_i = \langle \omega, \mathbf{e}_i \rangle = \omega(\mathbf{e}_i). \quad (\text{C.1.16})$$

Associado com qualquer função f na variedade, é definido uma 1-forma df , de forma que

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}(f), \quad \forall \mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}. \quad (\text{C.1.17})$$

Em uma base local de coordenadas,

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j}, \quad (\text{C.1.18})$$

e, em particular,

$$\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_i^j. \quad (\text{C.1.19})$$

Portanto, as 1-formas $\{dx^j\}$ ($j = 1, \dots, n$), formam uma base de coordenadas locais para os vetores cotangentes, e é dual a base local de coordenadas $\{\partial_j\}$ para o espaço tangente.

É possível passar de uma base de 1-forma a outra por meio de transformações

$$\mathbf{e}'^j = \Phi_i^{j'} \mathbf{e}^i, \quad (\text{C.1.20})$$

onde $\Phi_i^{j'}$ é uma transformação linear não-singular [23].

C.1.3 Tensores e Produto Tensorial

Fazendo os produtos cartesianos de $T_p^* \mathcal{M}$ e $T_p \mathcal{M}$,

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times T_p^* \mathcal{M} \times \dots \times T_p^* \mathcal{M}}_{r \text{ fatores}} \times \underbrace{T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \times \dots \times T_p \mathcal{M}}_{s \text{ fatores}}, \quad (\text{C.1.21})$$

tem-se o espaço de conjuntos ordenados de r 1-formas e s vetores tangentes

$$(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \in \Pi_r^s. \quad (\text{C.1.22})$$

Um tensor de rank (r, s) é um mapeamento multilinear $\mathbf{T} : \Pi_r^s \rightarrow \mathbb{R}$. A condição de \mathbf{T} ser multilinear é expressa pela relação

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s) &= \\ &= \alpha \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s) + \beta \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s), \end{aligned} \quad (\text{C.1.23})$$

e de maneira similar para as 1-formas.

A combinação linear de tensores de rank (r, s) é definida por

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{S})(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) &= \\ &= \alpha \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) + \beta \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s). \end{aligned} \quad (\text{C.1.24})$$

Por essas regras, os tensores de rank (r, s) formam um espaço vetorial de dimensão n^{r+s} chamado de **Espaço de Produto Tensorial** [23], e é denotado por

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p\mathcal{M}}_{r \text{ fatores}} \otimes \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_p^*\mathcal{M}}_{s \text{ fatores}}. \quad (\text{C.1.25})$$

Sendo as bases $\{\mathbf{e}_j\}$ e $\{\mathbf{e}^j\}$ para os espaços tangente e cotangente, respectivamente, é possível concluir uma base para o espaço $T_s^r(p)$ dada por

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \mathbf{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}\}, \quad (\text{C.1.26})$$

com $i_r = 1, \dots, n$ e $j_s = 1, \dots, n$, sendo a atuação dessa base em um elemento de Π_r^s na forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \\ &= \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}(\omega_{k_1}^1 \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \omega_{k_r}^r \mathbf{e}^{k_r}, X_1^{l_1} \mathbf{e}_{l_1}, \dots, X_s^{l_s} \mathbf{e}_{l_s}) \\ &= \omega_{k_1}^1, \dots, \omega_{k_r}^r, X_1^{l_1}, \dots, X_s^{l_s} \langle \mathbf{e}^{k_1}, \mathbf{e}_{i_1} \rangle \dots \langle \mathbf{e}^{k_r}, \mathbf{e}_{i_r} \rangle \langle \mathbf{e}^{j_1}, \mathbf{e}_{l_1} \rangle \dots \langle \mathbf{e}^{j_s}, \mathbf{e}_{l_s} \rangle \\ &= \omega_{i_1}^1, \dots, \omega_{i_r}^r, X_1^{j_1}, \dots, X_s^{j_s}, \end{aligned} \quad (\text{C.1.27})$$

ou seja,

$$\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}(\mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_r}, \mathbf{e}_{l_1}, \dots, \mathbf{e}_{l_s}) = \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_s}^{j_s}. \quad (\text{C.1.28})$$

Assim, um tensor $\mathbf{T} \in T_s^r(p)$ pode ser expandido em termos da base (C.1.6) como

$$\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}, \quad (\text{C.1.29})$$

onde a componente $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ desse tensor é determinada como

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}). \quad (\text{C.1.30})$$

Dessa forma, com a relação (C.1.8), um produto tensorial de r vetores e s 1-formas mapeia um elemento de Π_r^s nos reais da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Y}_r \otimes \boldsymbol{\Omega}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\Omega}^s(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}^1, \mathbf{Y}_1 \rangle \dots \langle \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{Y}_r \rangle \langle \boldsymbol{\Omega}^1, \mathbf{X}_1 \rangle \dots \langle \boldsymbol{\Omega}^s, \mathbf{X}_s \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.1.31})$$

Considerando as bases $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}^j\}$, e escolhendo novas bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ e $\{\mathbf{e}'^j\}$, as componentes de um tensor \mathbf{T} nessa nova base são dadas por

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \Phi_{l_1}^{i'_1} \dots \Phi_{l_r}^{i'_r} \Phi_{j'_1}^{k_1} \dots \Phi_{j'_s}^{k_s} T^{l_1 \dots l_r}_{k_1 \dots k_s}. \quad (\text{C.1.32})$$

Vale a pena notar que se for mudado de um conjunto de coordenadas locais $\{x^i\}$ para outro $\{x'^j\}$, então as correspondentes expressões para $\Phi_{j'}^i$ e $\Phi_i^{j'}$ são

$$\Phi_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \quad \text{e} \quad \Phi_i^{j'} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}, \quad (\text{C.1.33})$$

sendo essa a forma adotada em vários momentos nessa dissertação.

C.2 Parênteses de Lie e Derivadas de Lie

Dados dois vetores tangentes \mathbf{X} e \mathbf{Y} , o *Parênteses de Lie*, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, é definido por

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)). \quad (\text{C.2.1})$$

Os parênteses de Lie de dois vetores tangentes é, por sua vez, um vetor tangente desde que

(i)

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g \quad (\text{C.2.2})$$

(ii)

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g, \quad (\text{C.2.3})$$

sendo as demonstrações:

$$\begin{aligned} (i) \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) &= (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{X}\mathbf{Y}(f) + \beta\mathbf{X}\mathbf{Y}(g) - \alpha\mathbf{Y}\mathbf{X}(f) - \beta\mathbf{Y}\mathbf{X}(g) \\ &= \alpha(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f + \beta(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})g = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} (ii) \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) &= \mathbf{X}\mathbf{Y}(fg) - \mathbf{Y}\mathbf{X}(fg) = \mathbf{X}(g\mathbf{Y}(f) + f\mathbf{Y}(g)) - \mathbf{Y}(g\mathbf{X}(f) + f\mathbf{X}(g)) \\ &= g\mathbf{X}\mathbf{Y}(f) + \mathbf{X}(g)\mathbf{Y}(f) + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}(g) + f\mathbf{X}\mathbf{Y}(g) - g\mathbf{Y}\mathbf{X}(f) - \mathbf{Y}(g)\mathbf{X}(f) - f\mathbf{Y}\mathbf{X}(g) - \mathbf{Y}(f)\mathbf{X}(g) \\ &= g\mathbf{X}\mathbf{Y}(f) - g\mathbf{Y}\mathbf{X}(f) + f\mathbf{X}\mathbf{Y}(g) - f\mathbf{Y}\mathbf{X}(g) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \end{aligned}$$

■

A componente $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^j$ com relação a base de coordenadas locais pode ser obtida pela ação sobre x^j , ou seja,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]x^j = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})x^j = \mathbf{X}(Y^j) - \mathbf{Y}(X^j) = X^k Y_{,k}^j - Y^k X_{,k}^j. \quad (\text{C.2.4})$$

Considerando os parênteses de Lie de \mathbf{X} e \mathbf{Y} como uma derivação, o que é permitido pela relação (C.2.3), chega-se a chamada *Derivada de Lie* de \mathbf{Y} na direção de \mathbf{X} ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = -\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \quad (\text{C.2.5})$$

onde $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$, ou seja, é também um vetor tangente. Sendo $f \in \mathcal{C}^\infty$, então,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}(f) = df(\mathbf{X}). \quad (\text{C.2.6})$$

Para dois tensores \mathbf{T} e \mathbf{S} , a derivada de Lie satisfaz a regra de Liebnitz

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{S}) \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}. \quad (\text{C.2.7})$$

Supondo o número real $\omega(\mathbf{Y}) = \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle$, e aplicando a derivada de Lie ao longo de \mathbf{X}

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\omega_j Y^j) = \mathbf{X}(\omega_j Y^j) = \omega_j \mathbf{X}(Y^j) + Y^j \mathbf{X}(\omega_j),$$

portanto,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = \langle \omega, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \rangle + \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega, \mathbf{Y} \rangle, \quad (\text{C.2.8})$$

ou, escrito de outra maneira,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}[\omega(\mathbf{Y})] = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{Y}) + \omega(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}). \quad (\text{C.2.9})$$

Por fim, para derivar uma identidade simples, mas importante, que relaciona a derivada exterior de uma 1-forma com a derivada de Lie, faz-se

$$\langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y}\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j Y^j - \mathbf{Y}(\omega_j X^j), \quad (\text{C.2.10})$$

onde

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j Y^j = X^k (\omega_j Y^j)_{,k} - \omega_j (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^j = X^k (\omega_{j,k} Y^j + \omega_j Y_{,k}^j) - \omega_j (X^k Y_{,k}^j - Y^k X_{,k}^j),$$

ou seja,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j Y^j = (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X_{,j}^k) Y^j. \quad (\text{C.2.11})$$

Utilizando (C.2.11) em (C.2.10),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle &= (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X_{,j}^k) Y^j - Y^j (\omega_{k,j} X^k + \omega_k X_{,j}^k) \\ &= (\omega_{j,k} - \omega_{k,j}) X^k Y^j = 2(d\boldsymbol{\omega})_{jk} X^k Y^j = 2d\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$d\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \{ \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle \}, \quad (\text{C.2.12})$$

onde $d\boldsymbol{\omega}$ é a derivada exterior da 1-forma $\boldsymbol{\omega}$, e por sua vez, $d\boldsymbol{\omega}$ é uma 2-formas. Substituindo $\langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y} \rangle$ de (C.2.8),

$$d\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle \}, \quad (\text{C.2.13})$$

ou ainda,

$$d\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{X} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle - \langle \boldsymbol{\omega}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \}, \quad (\text{C.2.14})$$

onde foi escrito $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ como $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Essa identidade (C.2.14) será importante para derivar as equações de estrutura de Cartan.

C.3 Derivada Covariante e as 1-formas

Como foi visto na seção 2.3 dessa dissertação, a derivada covariante é um tipo de derivada que requer uma estrutura adicional a variedade chamada de conexão afim. Nesta seção, esse conceito será revisitado de uma outra forma.

Para começar, pode-se definir uma aplicação $\nabla : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, que a cada par $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}$ de campos vetoriais infinitamente diferenciáveis em \mathcal{M} , associa um campo vetorial denotados por $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$. Essa aplicação ∇ é dita ser uma *conexão afim* se possuir as seguintes propriedades: para todo campo vetorial $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$ e todas as funções $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ em \mathcal{M} vale que

(i) $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ é linear no argumento \mathbf{X} , ou seja,

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \in T_p\mathcal{M}; \quad (\text{C.3.1})$$

(ii) $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ é linear no argumento \mathbf{Y} , ou seja,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}; \quad (\text{C.3.2})$$

(iii)

$$\nabla_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}(f); \quad (\text{C.3.3})$$

(iv)

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\nabla_{\mathbf{X}}f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}. \quad (\text{C.3.4})$$

Como a ação de $\nabla_{\mathbf{X}}$ no campo vetorial $\mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$ especificado pelas regras (i)-(iv), pode-se definir a **derivada covariante** $\nabla\mathbf{Y}$ de \mathbf{Y} como um campo tensorial de rank (1,1), que mapeia o campo vetorial contravariante \mathbf{X} em $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, ou seja,

$$\nabla\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \langle \nabla\mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}. \quad (\text{C.3.5})$$

Escrevendo $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ relativamente a alguma base $\{\mathbf{e}_j\}$, ou seja,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}(Y^j\mathbf{e}_j) = (\mathbf{X}Y^j)\mathbf{e}_j + Y^j\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j. \quad (\text{C.3.6})$$

Sendo $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j$, para um vetor \mathbf{e}_j particular, um campo tensorial de rank (1,1), tem-se a representação na base escolhida

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j = \omega_j^l(\mathbf{X})\mathbf{e}_l, \quad (\text{C.3.7})$$

onde ω_j^l é uma 1-forma. Assim, pode-se escrever $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ como

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}(Y^j)\mathbf{e}_j + Y^j\omega_j^l(\mathbf{X})\mathbf{e}_l. \quad (\text{C.3.8})$$

Ainda, com $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j = \nabla_{X^k\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j$, (C.3.6) pode ser reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}(Y^j)\mathbf{e}_j + Y^j\nabla_{X^k\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j = \mathbf{X}(Y^j)\mathbf{e}_j + Y^jX^k\nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j, \quad (\text{C.3.9})$$

ou, em conformidade com (C.3.8), então

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}(Y^j)\mathbf{e}_j + Y^jX^k\omega_j^l(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j. \quad (\text{C.3.10})$$

Fazendo com que

$$\omega_j^l(\mathbf{e}_k) = \omega_{jk}^l \quad (\text{C.3.11})$$

seja o coeficiente de \mathbf{e}_k na expansão de ω_j^l na base de 1-formas $\{\mathbf{e}^k\}$, e sendo n a dimensão do espaço $T_p^*\mathcal{M}$ de 1-formas, conclui-se que a conexão ∇ é especificada por n^2 1-formas ω_j^l ou, de forma equivalente, n^3 campos escalares ω_{jk}^l . Com isso, pode-se escrever (C.3.8) como

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}(Y^j) + \omega_l^j(\mathbf{X})Y^l]\mathbf{e}_j. \quad (\text{C.3.12})$$

Em uma base local de coordenadas $\{\partial_k\}$, a relação (C.3.12) se torna

$$\nabla_{\partial_k}\mathbf{Y} = [\partial_k Y^j + Y^l\omega_{lk}^j]\mathbf{e}_j \equiv (Y_{,k}^j + Y^l\omega_{lk}^j)\mathbf{e}_j. \quad (\text{C.3.13})$$

Nessa base local de coordenadas, é de costume escrever Γ_{lk}^j no lugar de ω_{lk}^j , e usando ponto e vírgula para indicar a derivada covariante, em contraste com a derivada parcial ordinária que é representada apenas com vírgula. Portanto, obtêm-se a fórmula padrão para derivada covariante

$$Y_{;k}^j = Y_{,k}^j + Y^l \Gamma_{lk}^j. \quad (\text{C.3.14})$$

Senso Ω uma 1-forma, então para todo campo vetorial \mathbf{Y} , pode ser escrito que

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega(\mathbf{Y})) = (\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)(\mathbf{Y}) + \Omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}), \quad (\text{C.3.15})$$

ou ainda, nas bases duais $\{\mathbf{e}_j\}$ e $\{\mathbf{e}^j\}$

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega_j Y^j) = (\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)_j Y^j + \Omega_j (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^j. \quad (\text{C.3.16})$$

Utilizando a propriedade (C.3.3) e a Eq. (C.3.12), encontra-se

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)_j Y^j &= \mathbf{X}(\Omega_j) Y^j + \Omega_j \mathbf{X}(Y^j) - \Omega_j [\mathbf{X}(Y^j) + Y^l \omega_l^j(\mathbf{X})] \\ &= \mathbf{X}(\Omega_j) Y^j - \Omega_l \omega_l^j(\mathbf{X}) Y^j. \end{aligned} \quad (\text{C.3.17})$$

Conclui-se que

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)_j = \mathbf{X}(\Omega_j) - \Omega_l \omega_l^j(\mathbf{X}), \quad (\text{C.3.18})$$

ou, alternativamente,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\Omega = [\mathbf{X}(\Omega_j) - \Omega_l \omega_l^j(\mathbf{X})] \mathbf{e}^j. \quad (\text{C.3.19})$$

Se o mesmo cálculo for feito a partir de (C.3.15) para $\Omega = \mathbf{e}^j$, então, obtêm-se a relação

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{e}^j(\mathbf{Y})) &= (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)(\mathbf{Y}) + \mathbf{e}^j(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)_k Y^k + \mathbf{e}^j [\mathbf{X}(Y^i) + \omega_l^i(\mathbf{X}) Y^l] \mathbf{e}_i \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)_k Y^k + \mathbf{X}(Y^j) + \omega_l^j(\mathbf{X}) Y^l, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$. Sendo

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{Y}) = \mathbf{e}^j(Y^m \mathbf{e}_m) = Y^m \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_m) = Y^m \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_m \rangle = Y^m \delta_m^j = Y^j,$$

então,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(Y^j) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)_k Y^k + \mathbf{X}(Y^j) + \omega_l^j(\mathbf{X}) Y^l,$$

ou ainda, com a propriedade (C.3.3)

$$\mathbf{X}(Y^j) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)_k Y^k + \mathbf{X}(Y^j) + \omega_l^j(\mathbf{X}) Y^l, \quad (\text{C.3.20})$$

portanto, conclui-se que

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j)_k Y^k = -\omega_l^j(\mathbf{X})Y^l, \quad (\text{C.3.21})$$

ou melhor

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^j = -\omega_l^j(\mathbf{X})\mathbf{e}^l. \quad (\text{C.3.22})$$

Portanto, a relação (C.3.22) mostra que conhecendo as n^2 1-formas ω_j^l , é suficiente para determinar as derivadas covariantes das 1-formas. E como feito anteriormente, em uma base de coordenadas locais, a equação (C.3.19) se torna

$$\Omega_{j;k} = \Omega_{j,k} - \Omega_l \Gamma_{jk}^l. \quad (\text{C.3.23})$$

Para um tensor de rank (1,1), com componentes T_j^i , a derivada covariante deste tensor é

$$T_{j;k}^i = T_{j,k}^i + T_j^l \Gamma_{lk}^i - T_l^i \Gamma_{jk}^l, \quad (\text{C.3.24})$$

e o mesmo pode ser feito para tensores de outros ranks.

C.4 Curvatura 2-formas e Equações de Estrutura de Cartan

Sendo \mathcal{M} uma variedade munida de uma conexão, é possível definir dois mapeamentos: Considerando os campos vetoriais $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$, é possível definir um mapeamento $\mathbf{T} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, chamado de **Tensor de Torção**,

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (\text{C.4.1})$$

e o mapeamento $\mathbf{R} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, chamado de **Tensor de Curvatura**,

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}. \quad (\text{C.4.2})$$

Como pode ser visto imediatamente das definições, ambos os tensores são antissimétricos nos argumentos \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

O objetivo nessa seção é derivar as equações de estrutura de Cartan. Primeiro, considere as bases duais $\{\mathbf{e}_j\}$ e $\{\mathbf{e}^j\}$. Começando com o tensor de torção(C.4.1):

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^j = \mathbf{X}(Y^j) + Y^l \omega_l^j(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{e}^j(\mathbf{Y}) + \mathbf{e}^l(\mathbf{Y})\omega_l^j(\mathbf{X}), \quad (\text{C.4.3})$$

portanto,

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}\mathbf{e}^j(\mathbf{Y}) + \omega_l^j(\mathbf{X})\mathbf{e}^l(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\mathbf{e}^j(\mathbf{X}) - \omega_l^j(\mathbf{Y})\mathbf{e}^l(\mathbf{X})] \mathbf{e}_j. \quad (\text{C.4.4})$$

Tomando o produto interno

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle &= \langle \mathbf{e}^j, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \\
&= \mathbf{X} \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{X} \rangle - \langle \mathbf{e}^j, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \\
&\quad + \omega_l^j(\mathbf{X}) \mathbf{e}^l(\mathbf{Y}) - \omega_l^j(\mathbf{Y}) \mathbf{e}^l(\mathbf{X}), \tag{C.4.5}
\end{aligned}$$

onde $\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{X} \rangle \equiv \mathbf{e}^j(\mathbf{X})$. Fazendo uso da identidade geral (C.2.14), tem-se que, sendo $\omega = \mathbf{e}^j$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle &= \langle \mathbf{e}^j, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle + 2\omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
&= 2d\mathbf{e}^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{C.4.6}
\end{aligned}$$

sendo

$$(\omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \{ \omega_l^j(\mathbf{X}) \mathbf{e}^l(\mathbf{Y}) - \omega_l^j(\mathbf{Y}) \mathbf{e}^l(\mathbf{X}) \}. \tag{C.4.7}$$

Assim, obtêm-se de (C.4.6) a relação

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle = d\mathbf{e}^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{C.4.8}$$

Sendo essa Eq. (C.4.8) válida para \mathbf{X} e \mathbf{Y} arbitrários, conclui-se que

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{T} \rangle = d\mathbf{e}^j + \omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l. \tag{C.4.9}$$

A Eq. (C.4.9) é a *primeira equação de estrutura de Cartan*. Para o caso especial em que a torção é zero, a Eq. (C.4.9) se reduz a

$$d\mathbf{e}^j = -\omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l. \tag{C.4.10}$$

Para a segunda equação, considere o tensor de curvatura (C.4.2), e calculando o termo $\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} &= \nabla_{\mathbf{X}} \{ \mathbf{Y} \mathbf{e}^j(\mathbf{Z}) + \omega_k^j(\mathbf{Y}) \mathbf{e}^k(\mathbf{Z}) \} \mathbf{e}_j \\
&= [\mathbf{Y} \mathbf{e}^l(\mathbf{Z}) + \omega_k^l(\mathbf{Y}) \mathbf{e}^k(\mathbf{Z})] \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{e}_l + \{ \mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{e}^j(\mathbf{Z}) + \mathbf{X} [\omega_l^j \mathbf{e}^l(\mathbf{Z})] \} \mathbf{e}_j \\
&= [\mathbf{Y} \mathbf{e}^l(\mathbf{Z}) + \omega_k^l(\mathbf{Y}) \mathbf{e}^k(\mathbf{Z})] \omega_l^j(\mathbf{X}) \mathbf{e}_j \\
&\quad + [\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{e}^j(\mathbf{Z}) + \mathbf{e}^l(\mathbf{Z}) \mathbf{X} \omega_l^j(\mathbf{Y}) + \omega_l^j(\mathbf{Y}) \mathbf{X} \mathbf{e}^l(\mathbf{Z})] \mathbf{e}_j,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} = [\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{e}^j(\mathbf{Z}) + \omega_l^j(\mathbf{Y}) \mathbf{X} \mathbf{e}^l(\mathbf{Z}) + \mathbf{e}^l(\mathbf{Z}) \mathbf{X} \omega_l^j(\mathbf{Y})]$$

$$+\omega_l^j(\mathbf{X})\mathbf{Y}e^l(\mathbf{Z}) + \omega_l^j(\mathbf{X})\omega_k^l(\mathbf{Y})e^k(\mathbf{Z})] e_j. \quad (\text{C.4.11})$$

Fazendo o mesmo para $\nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$ e tomando a diferença, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} = \{ & [\mathbf{X}\omega_l^j(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\omega_l^j(\mathbf{X}) + \omega_k^j(\mathbf{X})\omega_l^k(\mathbf{Y}) \\ & - \omega_k^j(\mathbf{Y})\omega_l^k(\mathbf{X})] e^l(\mathbf{Z}) + [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]e^j(\mathbf{Z})\} e_j. \end{aligned} \quad (\text{C.4.12})$$

E ainda, o termo

$$\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} = \{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]e^j(\mathbf{Z}) + \omega_l^j([\mathbf{X}, \mathbf{Y}])e^l(\mathbf{Z})\} e_j \quad (\text{C.4.13})$$

Combinando as Eqs. (C.4.12) e (C.4.13) chega-se em

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \{ & \mathbf{X} \langle \omega_l^j, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y} \langle \omega_l^j, \mathbf{X} \rangle - \langle \omega_l^j, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \\ & + \omega_k^j(\mathbf{X})\omega_l^k(\mathbf{Y}) - \omega_k^j(\mathbf{Y})\omega_l^k(\mathbf{X})\} e^l(\mathbf{Z})e_j, \end{aligned} \quad (\text{C.4.14})$$

e mais uma vez, utilizando a identidade (C.2.14), conclui-se que

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \{2d\omega_k^j + 2\omega_k^j \wedge \omega_l^k\} (\mathbf{X}, \mathbf{Y})e^l(\mathbf{Z})e_j. \quad (\text{C.4.15})$$

Sendo α uma 1-forma qualquer, e aplicando (C.4.15) tem-se

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{2d\omega_k^j + 2\omega_k^j \wedge \omega_l^k\} (\mathbf{X}, \mathbf{Y})e^l(\mathbf{Z})\alpha(e_j). \quad (\text{C.4.16})$$

Mas também, pode-se fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= R_{lkm}^j [\mathbf{e}_j \otimes e^l \otimes (e^k \wedge e^m)] (\alpha, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ &= (R_{lkm}^j e^k \wedge e^m)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})e^l(\mathbf{Z})\alpha(e_j). \end{aligned} \quad (\text{C.4.17})$$

Comparando as equações (C.4.16) e (C.4.17), obtêm-se a relação

$$\frac{1}{2}R_{lkm}^j e^k \wedge e^m = d\omega_k^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k. \quad (\text{C.4.18})$$

Definindo a 2-formas

$$\Omega_l^j := d\omega_k^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k, \quad (\text{C.4.19})$$

chega-se a *segunda equação de estrutura de Cartan*

$$\Omega_l^j = \frac{1}{2}R_{lkm}^j e^k \wedge e^m. \quad (\text{C.4.20})$$

Para o caso de uma base de coordenadas local $\{dx^m\}$,

$$\omega_l^j = \Gamma_{lm}^j dx^m, \quad (\text{C.4.21})$$

portanto,

$$d\omega_l^j = \Gamma_{l[m,n]}^j dx^n \wedge dx^m = \frac{1}{2}(\Gamma_{lm,n}^j - \Gamma_{ln,m}^j) dx^n \wedge dx^m. \quad (\text{C.4.22})$$

e também,

$$\omega_k^j \wedge \omega_l^k = \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k dx^n \wedge dx^m = \frac{1}{2}(\Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k) dx^n \wedge dx^m. \quad (\text{C.4.23})$$

Assim, pelas Eqs. (C.4.19) e (C.4.20),

$$\frac{1}{2} \{ \Gamma_{lm,n}^j - \Gamma_{ln,m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k \} dx^n \wedge dx^m = \frac{1}{2} R_{lnm}^j dx^n \wedge dx^m, \quad (\text{C.4.24})$$

de onde conclui-se que

$$R_{lnm}^j = \Gamma_{lm,n}^j - \Gamma_{ln,m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k, \quad (\text{C.4.25})$$

que é a definição convencional do tensor de curvatura.