

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física



Marcelle Rodrigues Lemos

**Desenvolvimento de um sistema para obtenção do índice de refração na faixa
de micro-ondas, utilizando espalhamento por cilindro**

Juiz de Fora - MG, Brasil

2020

Marcelle Rodrigues Lemos

Desenvolvimento de um sistema para obtenção do índice de refração na faixa de micro-ondas, utilizando espalhamento por cilindro

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora- UFJF, na área de concentração em Física Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: José Paulo Rodrigues Furtado de Mendonça

Coorientador: André Godim Simão

Juiz de Fora - MG, Brasil

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lemos, Marcelle Rodrigues.

Desenvolvimento de um sistema para obtenção do índice de refração na faixa de micro-ondas, utilizando espalhamento por cilindro / Marcelle Rodrigues Lemos. – 2020.

112 f. : il.

Orientador: José Paulo Rodrigues Furtado de Mendonça

Coorientador: André Godim Simão

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

1. Espalhamento eletromagnético. 2. Micro-ondas. 3. Cilindro infinito.
I. Rodrigues Furtado de Mendonça, José Paulo, orient. II. Título II. Simão, Andre Godim, coorient. III. Título.

Marcelle Rodrigues Lemos

"Desenvolvimento de um sistema para obtenção do índice de refração na faixa de micro-ondas, utilizando espalhamento por cilindro."

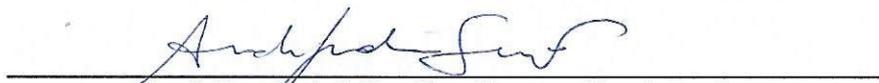
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Aprovada em 28 de fevereiro de 2020.

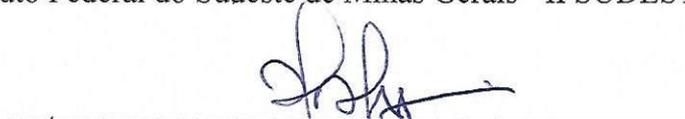
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Paulo Rodrigues Furtado de Mendonça - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dr. André Gondim Simão - Coorientador
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais - IFSUDESTEMG



Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin
Universidade Federal Fluminense - UFF



Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Dedico este trabalho a minha família e amigos que sempre estiveram comigo me apoiando.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, a Deus que é o maior mestre que alguém possa conhecer, o qual me deu força e permitiu que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida e não somente nestes últimos dois anos como aluna de mestrado em física.

Agradeço a todos os meus familiares por sempre terem acreditado em mim, apoiando-me em seguir este sonho, principalmente a minha mãe, que mesmo com toda dificuldade que passamos na vida nunca deixou de me incentivar a ser sempre a minha melhor versão. Agradeço também a tia Sonzinha, tia Gaida, tia Marina e minha vizinha Manoelina por cuidarem tão bem de mim e me acolherem a nove anos.

Ao Irenaldo Junior eu agradeço o companheirismo, carinho e amor. Obrigada por estar comigo, pelo apoio e por sempre me ouvir falar de Física mesmo não entendendo muito sobre. Eu te amo!

Aos meus amigos/irmãos por estarem comigo em mais uma etapa da vida, por acreditarem mais em mim do que eu mesma. Obrigada por serem parte da minha vida, Vitória, Lucas, Karina, Gustavo e Francys.

Aos velhos e novos amigos que estiveram comigo nestes anos. Alessandro, obrigada pelo ombro amigo, aos membros da sala 1, Andresa, Larissa, Vitor, Mário, Debora, Johnny e Felipe, obrigada por me ajudarem e pelas risadas ao longo dos dias, tornando assim a vida acadêmica um pouco mais leve.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Paulo Furtado de Mendonça pela sugestão do tema deste trabalho e por todo conhecimento e ensinamento transmitido.

Ao meu coorientador Prof. Dr. André Godim pelas sugestões no fim deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Ulysses pela disponibilidade em ajudar-me com assuntos relacionados a engenharia deste trabalho.

Aos meus colegas de laboratório de Física Aplicada, Ises, Paulo Vitor e Alaor por me guiarem no início deste trabalho e pelos conselhos; ao técnico do laboratório Pedro Paulo, obrigada por suas ideias e sugestões e ao João Paulo pela colaboração e ajuda no final deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Física da UFJF, aos Laboratórios de Física Aplicada e ao Laboratório de Simulação Computacional e ao órgão de pesquisa CAPES pelo incentivo à pesquisa científica e apoio financeiro do meu projeto de mestrado.

Agradeço também ao Domingos, secretário da Pós-graduação em Física.

Por fim, agradeço a todos que tiveram envolvidos na minha formação acadêmica direta ou indiretamente.

“Nenhum problema pode ser resolvido a partir do mesmo nível de consciência que que o criou.”

Albert Einstein

RESUMO

Lemos, M. R.. **Espalhamento de Micro-ondas por um cilindro infinito**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, 2020.

Nesta dissertação, faremos uma breve introdução sobre espalhamento eletromagnético, introduzindo os conceitos fundamentais necessários para abordarmos o problema de espalhamento. Também iremos definir os harmônicos cilíndricos vetoriais e algumas de suas propriedades. Será desenvolvido todo o setup experimental, de modo que possamos aplicar a teoria de espalhamento na faixa de micro-ondas em um cilindro infinito, de modo que através da característica da intensidade da onda espalhada possamos determinar as propriedades físicas como, por exemplo o índice de refração do cilindro nesta região do espectro. Isto será feito comparados os resultados teóricos, experimental e computacional. Além disso, faremos uma introdução a respeito do método computacional FDTD, que é capaz de resolver as equações de Maxwell numericamente descrevendo a propagação, transmissão e espalhamento das ondas eletromagnéticas em um meio qualquer. Se tornando um método muito útil para execução do resultados computacionais, presentes nesta dissertação de mestrado.

Palavras-chave: Espalhamento eletromagnético. Micro-ondas. Cilindro infinito. Índice de refração. Centro espalhador.

ABSTRACT

Lemos, M. R.. **Microwave Scattering over an infinite cylinder**. Dissertation (Master) – Faculdade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, 2020.

In this dissertation, we will make a brief introduction about electromagnetic scattering, introducing the fundamental concepts necessary to address the scattering problem. We will also define the vector cylindrical harmonics and some of their properties. The entire experimental setup will be developed, so that we can apply the scattering theory in the microwave range in an infinite cylinder, so that through the characteristic of the intensity of the scattered wave we can determine the physical properties, for example the index of refraction of the cylinder in this region of the spectrum. This will be done by comparing the theoretical, experimental and computational results. In addition, we will make an introduction about the computational method FDTD, which is capable of solving Maxwell's equations numerically describing the propagation, transmission and spreading of electromagnetic waves in any medium. Becoming a very useful method for the execution of computational results, present in this master's thesis.

Keywords: Electromagnetic Scattering. Microwave. Infinite cylinder. Refractive index. Spreading center.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Representação do campo eletromagnético incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) interagindo com um objeto de simetria qualquer dando origem a um campo eletromagnético dentro do centro espalhador ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e um campo espalhado ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) em todas as direções no meio circundante.	19
Figura 2 –	Representação da Onda Eletromagnética. Os campos, elétrico \mathbf{E} , representado pela linha azul e magnético \mathbf{H} , representado pela linha verde oscilam perpendicularmente entre si e perpendiculares à direção de propagação, z , representado pela linha vermelha.	23
Figura 3 –	Representação da propagação de onda entre dois meios distintos. Evidencie as componentes normal e tangencial entre os meios.	28
Figura 4 –	Incidência, Reflexão e Transmissão, em um material dielétrico de espessura h e com índice de refração complexo N	29
Figura 5 –	Dois tubos, um com pó de café e água e o outro com microesferas de látex em água. No primeiro destaca-se o efeito da absorção e no segundo o espalhamento.	32
Figura 6 –	A foto mostra os dois tubos sobre a lente de Fresnel de um retroprojeto. Note que a luz transmitida para cada tubo é igualmente atenuada, mas uma é devido a absorção e a outra por espalhamento.	32
Figura 7 –	Geometria do cilindro circular infinito de raio a iluminado por uma onda plana com incidência oblíqua. Os vetores unitários \hat{e}_i e \hat{e}_s indicam, as direções de propagação da onda incidente e espalhada.	43
Figura 8 –	Guia de onda retangular com dimensões arbitrárias.	55
Figura 9 –	Distribuição do campo elétrico associado ao modo TE_{10} na seção reta do guia.	57
Figura 10 –	Distribuição do campo elétrico associado ao modo TE_{10} na seção longitudinal do guia.	57
Figura 11 –	Posição que deve ficar o diodo Gunn no guia.	58
Figura 12 –	O desenho mostra a corneta com seus eixos de simetria cilíndrica.	59
Figura 13 –	Desenho do guia de onda acoplado a corneta com suas dimensões para sustentar uma frequência de 8,2GHz.	60
Figura 14 –	Vista em corte do projeto do guia de onda e da corneta, ilustrando o acoplamento do excitador (diodo Gunn).	60
Figura 15 –	A foto mostra o resultado da construção do guia já acoplado a corneta.	61
Figura 16 –	Diagrama de radiação da antena corneta de 8.2GHz, feita no Laboratório de Física Aplicada [34] a 85cm do detector.	61
Figura 17 –	Antena Corneta de 9.6GHz, usada para a realização do experimento.	62
Figura 18 –	Diagrama de radiação da antena corneta a 1.73cm do detector.	63

Figura 19 – Gerador de micro-ondas da Keysight, PSG - High Power Signal Generator E825710 (10MHz até 20GHz).	64
Figura 20 – Analisador de espectro também da Keysight/Agilent, Handheld Spectrum Analyzer N9344C	65
Figura 21 – Curva da variação da intensidade descrita no texto acima para a primeira parte do experimento. O eixo vertical informa potência em mW enquanto que o eixo horizontal informa o ângulo de varredura do sistema de detecção. Medida realizada sem a presença do cilindro.	66
Figura 22 – Variação da Intensidade espalhada devido um cilindro maciço de Teflon, descrito na segunda etaoa do experimento. O eixo vertical informa potência em mW enquanto que o eixo horizontal informa o ângulo de varredura do sistema de detecção.	67
Figura 23 – Série de medidas com o cilindro.	67
Figura 24 – Comparação das curvas de simulação teórica (para $m = 1.45; 1.50$) e experimental.	70
Figura 25 – Sinal de Intensidade captado pelo analisador. A melhoria da frente de onda pode ser visualizada pelo alargamento do pico da curva.	71
Figura 26 – Série de medidas sem o cilindro	71
Figura 27 – Gráfico sem o cilindro, com a série de três medidas, junto com a média. A curva em amarelo representa a 1 ^o medida, a curva em azul representa a 2 ^o medida e a curva em roxo representa a 3 ^o medida, já a curva preta representa a média destas três medidas.	72
Figura 28 – Medida experimental com o cilindro $a = 1.75cm$	73
Figura 29 – Série de medidas com o cilindro.	73
Figura 30 – Gráfico com o cilindro, com a série de três medidas, junto com a média. A curva em amarelo representa a 1 ^o medida, a curva em azul representa a 2 ^o medida e a curva em roxo representa a 3 ^o medida, já a curva preta representa a média destas três medidas.	74
Figura 31 – Representação 2D e 3D de uma célula Yes.	76
Figura 32 – Comparação dos dados teórico computacional usando o método FDTD para vários índices de refração com os dados experimentais.	77
Figura 33 – Comparação dos dados teórico computacional usando o método FDTD com os dados experimentais para os índices de refração $m = 1.435$ e $m = 1.52$	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFF	Universidade Federal Fluminense
TEM	Transversal Eléctromagnética
TE	Transversal Elétrica e magnética
TM	Transversal Magnética
RF	Radio Frequência
FDTD	Finite Difference Time Domain
FDM	Finite Difference Method
TLM	Teoria de Lorenz-Mie
MDR	Morphology-Dependent Resonance

LISTA DE SÍMBOLOS

\in	Pertence
μ	Permeabilidade Magnética
ε	Permissividade elétrica
σ	Condutividade Elétrica
ρ	Densidade de carga
δ	Fase
ω	Frequência angular
β	Coefficiente de atenuação
m	Índice de refração relativo
r	Raio do cilindro
\hat{n}	Vetor normal
t	Tempo
i	Complexo
k	Propagação da onda
c	Velocidade da Luz
ζ	Ângulo de incidência
π	Pi
\mathcal{Z}	Impedância Intrínseca
I	Intensidade
E	Campo Elétrico
H	Campo Magnético
D	Vetor deslocamento elétrico
B	Vetor indução magnética
J	Densidade de corrente
S	Vetor de Poyntig

S	Parametro de Stoke
W	Energia eletromagnética
C	Seção transversais
Q	Eficiência
\mathbf{M}, \mathbf{N}	Harmônicos vetoriais
ψ	Função escalar Geratriz
\hat{c}	Vetor piloto
Z_n	Qualquer Função de Bessel
J_n	Função de Bessel
Y_n	Função de Neumann
H_n	Função de Hankel
a_n, b_n, c_n, d_n	Coefficientes de Lorenz-Mie
$\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n$	Funções na interface de separação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVO	15
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	ESTADO DA ARTE	18
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	20
2.1.1	Polarização da Onda Eletromagnética e o Parâmetro de Stokes	23
2.1.2	Espalhamento, Absorção e Extinção	27
2.1.3	Introdução ao Formalismo Geral sobre Espalhamento Eletromagnético	33
2.2	EXPANSÃO DOS CAMPOS EM HARMÔNICOS VETORIAIS CILÍNDRICOS	36
3	ESPALHAMENTO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA DEVIDO A UM CILINDRO INFINITO: TEORIA.	41
3.1	CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS EM TERMOS DOS HARMÔNICOS VETORIAIS CILÍNDRICOS	41
3.2	COEFICIENTES DE LORENZ-MIE	46
3.3	DETERMINAÇÃO DA INTENSIDADE	50
4	ANTENA CORNETA	54
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	64
5.1	SETUP EXPERIMENTAL	64
5.2	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA INCIDÊNCIA NORMAL	68
5.2.1	Método FDTD	74
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A – Introdução aos Harmônicos Vetoriais	84
A.1	Potenciais e Anti-Potenciais	84
	APÊNDICE B – Procedimento para funções de onda vetorial	92
B.1	Orotgonalidade de M_n e N_n	93
B.2	Coefficientes A_n e B_n	94

	APÊNDICE C – Componentes dos campos elétrico e magnético para o cilindro homogêneo	97
C.1	Caso I: Polarização TM	97
C.2	Caso II: Polarização TE	99
C.3	Construção do sistema para os modos TM e TE	101
C.4	Solução do sistema	106
	APÊNDICE D – Medidas de intensidade e potência de uma radiação eletromagnética	111

1 INTRODUÇÃO

O espalhamento de ondas eletromagnéticas é um tema amplo, pesquisado há mais de um século. Tudo começou com o estudo de espalhamento por cilindros circulares e esferas, que são problemas clássicos no eletromagnetismo [1, 2]. Conforme a referência [1, 3], em 1881, **Rayleigh** foi quem resolveu pela primeira vez o problema do espalhamento por um cilindro circular dielétrico [4]. Já o problema de espalhamento por uma esfera dielétrica foi resolvido por **Lorenz** em 1890 [5]. Enquanto isso, a difração de ondas por corpos condutores (cilindro circular e esferas), foi expressa por **Thomson** em 1893 [6]. Apesar disso, a solução teórica para o problema do espalhamento por uma esfera é conhecida como **espalhamento Mie**, devido a famosa solução publicada por Mie em 1908 [7]. Em muitos livros textos [1], em homenagem e ao reconhecimento do trabalho de Lorenz, a teoria do espalhamento eletromagnético de uma onda plana por uma esfera dielétrica é referida como **Teoria de Lorenz-Mie (T.L.M)**.

Apesar da teoria ter sido construída no século passado, a teoria de espalhamento continua sendo uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de novos dispositivos nas áreas industrial e biológica [8, 9]. Ela permite ser aplicada em diversos campos multidisciplinares. O estudo do espalhamento eletromagnético pode ser estendido para qualquer região do espectro e a qualquer tamanho do centro espalhador. Isto fornece uma ideia do poder da técnica. Com a melhoria dos computadores, houve um grande avanço no estudo e análise das interações de ondas eletromagnéticas por vários corpos, proporcionando estudar aerossóis na atmosfera terrestre e em outros planetas, pinças ópticas aplicada a área de biologia molecular, radares etc [8, 9, 10].

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho restringe-se em resolver o problema do espalhamento devido a incidência proveniente de uma fonte de radiação de micro-ondas em um cilindro infinito. Conhecendo a intensidade da radiação espalhada em função do ângulo de espalhamento é possível determinar algumas propriedades do centro espalhador (nesta dissertação, o centro espalhador é um cilindro de Teflon) como, por exemplo, o índice de refração do material, o raio do cilindro e o meio que circunda este cilindro. Como veremos mais tarde, os cálculos dos coeficientes de espalhamento dependem do tipo de onda incidente e muitas vezes esta onda incidente está longe de ser uma onda plana. Há também uma forte dependência com a polarização da onda incidente. Todas estas análises serão discutidas ao longo desse trabalho. O conhecimento das propriedades do centro espalhador ou o meio no qual está embebido, através da medida da intensidade espalhada, permite utilizar esta técnica para o desenvolvimento de novos sensores na faixa de micro-ondas. Existem muitos trabalhos de espalhamento na faixa do visível e de infravermelho, mas

relativamente pouco na faixa de micro-ondas [2]. Existem muitas aplicações de teoria de espalhamento na faixa de micro-ondas. Com o desenvolvimento de tecnologias ligadas a telefonia celular 5G, aplicações das micro-ondas na produção e refino de petróleo e o desenvolvimento de novos metatérias [11, 12, 13], assim o interesse sobre espalhamento por micro-ondas vêm crescendo nos últimos anos.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Dividiremos esta dissertação em duas partes. Nesta primeira parte (Cap 1, 2 e 3) introduziremos conceitos sobre a física básica necessária para o estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas cujo centro espalhador é um cilindro infinito. Toda a matemática necessária para enfrentarmos este problema também será descrita. O estudo e solução para o espalhamento podem ser facilmente encontrados em diversas literaturas clássicas a respeito deste assunto, em especial nos livros e artigos: de Bohren e Huffman , Kerker, van de Huslt, Stratton, Jackson, Tsang e Wait [1, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Com todo o embasamento teórico descrito na primeira parte, partimos para a segunda parte que basicamente está relacionada ao desenvolvimento experimental. No capítulo 4 apresentamos de forma bem resumida alguns pontos sobre o transmissor e receptor de micro-ondas (antenas cornetas) que está diretamente correlacionado ao problema de espalhamento. Nesta dissertação apresentaremos dois modelos de antenas cornetas (que são nossos receptores e transmissores), onde estes operam na faixa de 8.2GHz e 9.6GHz. Os resultados e as discussões também estão contidos nesta etapa (Cap. 5 e 6).

No problema de espalhamento são necessários dois elementos básicos: a radiação incidente e o objeto (centro espalhador) com o qual a radiação interage. Vale lembrar que a radiação incidente carrega a informação da intensidade, estado de polarização e frequência. Já o centro espalhador envolve a sua geometria, tipo de material, meio que está embebido e sua dimensão quando comparado com o comprimento de onda da radiação incidente. Para o estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro infinito, partimos das equações de Maxwell [1, 14, 15], onde impomos as condições de contorno na superfície do centro espalhador, exigindo a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético, uma vez que na maioria dos casos de interesse as correntes da superfície são nulas. Vamos trabalhar com meios não magnéticos, ou seja, as permeabilidades magnéticas do material espalhador e do meio externo serão consideradas próximas [1, 14, 15, 16]. O Resultado desta consideração é que o índice de refração relativo correspondente ao centro espalhador só dependerá das permissividades elétricas dos dois meios [19]. Já para materiais ferromagnéticos como por exemplo as ferritas, onde estas possuem altos valores de permeabilidade na região de micro-ondas e radiofrequências [20] esta equivalência não é válida. Temos algumas propriedades interessantes devido ao centro espalhador possuir propriedades magnéticas na região de micro-ondas, as quais conduzem

a fenômenos tais como os picos de de ressonância morfológica (morphology-dependent resonance ou MDR [21]) e eficiência de extinção [22].

Para geometrias simples e bem definidas, como é o caso do cilindro infinito, é possível calcular as expressões analíticas dos campos espalhado e interno. Apresentaremos estas expressões de maneira clara, de modo que a formulação teórica envolva a decomposição do campo total. A princípio, o campo incidente é definido em cada ponto do espaço como sendo o campo que existe sem o material espalhador. Normalmente, descrevemos esta fonte de radiação como uma onda plana, que é a forma mais simples de uma frente de onda, onde os raios são paralelos um ao outro, mas também podemos ter uma onda que possui um formato qualquer (mais complicada que a onda plana), como por exemplo, uma onda esférica [26]. O campo espalhado e o interno são expandidos em uma série de harmônicos cilíndricos vetoriais.

Nesta dissertação, estamos interessados no espalhamento para a região de micro-ondas e, portanto, a proposta é encontrar as propriedades do centro espalhador para essa região do espectro. Isto significa dizer que vamos utilizar a intensidade espalhada para "sondar" os meios materiais sem a necessidade de entrar em contato direto com eles.

2 ESTADO DA ARTE

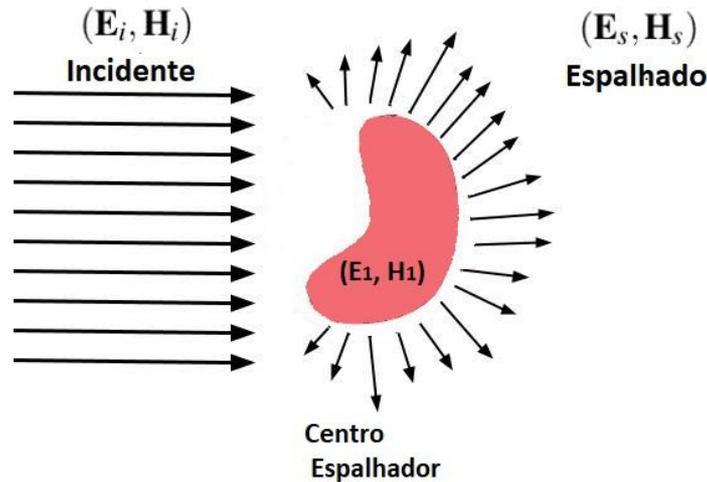
A teoria geral do espalhamento é baseada nas equações de Maxwell e das relações constitutivas. Toda vez que uma onda propagante passa de um meio para outro (meios distintos) ocorrerá uma reflexão, refração e em muitos casos absorção. A interação entre as ondas incidente, refletida e transmitida gera o que chamamos de onda espalhada. As características das ondas espalhadas vão depender de vários fatores, como comprimento de onda, geometria e dimensão do centro espalhador, estado de polarização, ângulo em que está sendo medido a intensidade espalhada etc.

Naturalmente podemos perceber o fenômeno de espalhamento da luz, seja no azul do céu, um pôr do sol alaranjado, a formação de um arco-íris e o efeito glória. Todos estes são acontecimentos naturais que se dão pelo espalhamento dos raios solares (depende do comprimento de onda) pelas moléculas que compõem nossa atmosfera [19]. Outro exemplo é a incidência de luz solar na folha de uma planta. As cores associadas ao vermelho e azul em sua maioria são absorvidas pela folha e são responsáveis pela produção de fotossíntese. Já a cor associada ao verde é em larga medida refletida ou refratada, ou seja, não sofre absorção [1]. Neste exemplo vemos que os efeitos de espalhamento, em sua maioria, estão acompanhados de absorção.

Uma forma de entendermos melhor o problema de espalhamento e absorção é lembrar que uma carga elétrica acelerada emite radiação. Ao incidirmos uma onda eletromagnética em um obstáculo, seja uma partícula sólida ou líquida, uma molécula, um átomo, ou um único elétron, as cargas elétricas que compõem este obstáculo são impulsionadas a realizar um movimento oscilatório devido ao campo elétrico da onda incidente. Essas cargas elétricas aceleradas irradiam energia eletromagnética em todas as direções, e é justamente essa radiação secundária que intitulamos espalhamento de radiação pelo obstáculo[1]. De um modo geral, a radiação emitida está em todas as direções (até mesmo interferindo com a radiação incidente), ou seja, temos uma radiação isotrópica. Podemos ver um exemplo do fenômeno do espalhamento eletromagnético na Figura 1 a qual uma fonte emite ondas eletromagnéticas planas, que viaja pelo espaço livre até encontrar um obstáculo, havendo a interação da onda incidente com o obstáculo este passa a se comportar como uma fonte de espalhamento de radiação secundária, ou seja, o espalhamento é dado pela soma da onda eletromagnética incidente com a radiação provocada pela interação com o objeto.

Quando uma onda eletromagnética incidente interage com o centro espalhador, não só ocorre o fenômeno de espalhamento, mas parte de sua energia eletromagnética incidente pode ser transformada em outras formas de energias, como por exemplo, energia térmica. Este processo é conhecido como absorção. Espalhamento e absorção não são procedimentos semelhantes [1]. Como já sabemos, em muitos casos a permissividade elétrica é uma função

Figura 1 – Representação do campo eletromagnético incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ interagindo com um objeto de simetria qualquer dando origem a um campo eletromagnético dentro do centro espalhador $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ e um campo espalhado $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ em todas as direções no meio circundante.



Fonte: Autoral, adaptada da referencia [1].

complexa e como o índice de refração está relacionado com a permissividade, concluímos que o índice também é uma função complexa. Para uma onda harmônica temos que a parte imaginária do índice de refração produz um decaimento exponencial, enquanto a parte real do índice está relacionada a propagação da onda. Assim, atribuímos a parte imaginária do índice como o responsável pela absorção, já a parte real está vinculada com grandezas de propagação dos campos [16, 23, 24]. Sendo assim, qualquer fonte incidente de radiação eletromagnética pode ser espalhada e/ou absorvida pelo meio físico que está sofrendo tal influência, isso irá depender de fatores como o comprimento de onda e o índice de refração dos meios [23]. A combinação de espalhamento e absorção é conhecido como extinção [1].

Existem duas formas de pensar no problema de espalhamento. Podemos considerar que conhecemos todas as propriedades do centro espalhador e do feixe incidente (como por exemplo forma, tamanho, comprimento de onda e índice de refração). Com isto, é possível determinar o campo espalhado. A questão é que este método não nos dá nenhuma vantagem. Este método é conhecido na literatura com método direto. Muitas vezes não temos acesso às propriedades do meio material responsável pelo espalhamento, e em muitos casos só temos acesso às ondas incidente e espalhada e queremos determinar as propriedades deste centro espalhador, então a partir de uma análise adequada do campo disperso determinaremos suas características [1]. Este método é conhecido como método indireto.

Nesta dissertação estaremos interessados no método indireto, ou seja, conhecemos

as propriedades da onda incidente e da onda espalhada, queremos determinar algumas propriedades do centro espalhador.

Com o intuito de entender melhor a teoria de espalhamento, vamos apresentar em detalhes a T.L.M [1, 14, 19]. A proposta é estudar a interação de um feixe de irradiação com comprimento de onda bem conhecido com um objeto de simetria cilíndrica.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

A teorial geral do espalhamento é baseada nas equações de Maxwell e nas realações constitutivas. Consideramos tanto o meio de propagação da onda eletromagnética quanto o objeto de simetria cilíndrica como sendo isotrópicos, homogêneos e lineares [1, 23]. Vamos considerar dois meios com suas respectivas permissividades elétricas $(\varepsilon, \varepsilon_1)$ e permeabilidades magnéticas (μ, μ_1) , que compõem o índice de refração relativo $m = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 / \varepsilon \mu}$ (ar/ meio material), e com impedância intrínseca do meio dada por $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon}$. A princípio a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética podem ser complexa.

Para geometria cilíndrica temos dois tipos de polarização das quais provêm todas as outras, que são os modos transversais ao eixo do cilindro: transversal magnético (Modo TM) e transversal elétrico (Modo TE). Então, caracterizamos a onda incidente com uma dessas polarizações [1, 18]. É importante dizer que sempre podemos escrever o campo total como a soma do campo transversal e longitudinal, conforme o principio de Helmholtz [15].

Considere uma onda harmônica plana com frequência bem definida ω e vetor de onda \mathbf{k} , cujo modulo é $k = \omega/c$. Com relação a parte temporal vamos trabalhar com o fator $e^{-i\omega t}$, essa convenção é a mesma usada nos livros como: Bohren e Huffman [1], Stratton [15], Jackson [16] e Barber [21]. Existem outros livros textos que utilizam outra forma ($e^{+i\omega t}$). É importante salientar qual é a escolha da dependência temporal harmônica dos campos complexos, pois ao compararmos grandezas calculadas, por exemplo, nos livros de van de Hulst [14], Kerker [19] ou artigos como Wait [18] e o Larkin e Churchill [22] os quais adotam $e^{+i\omega t}$, há certas diferenças de sinal para elaboração dos cálculos.

As equações de Maxwell descrevem a dinâmica do campo eletromagnético. Para um meio sem distribuição de cargas ($\rho = 0$), as equações macroscópicas de Maxwell, se reduzem a

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

Temos um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem. Com \mathbf{E} , o campo elétrico (V/m) e \mathbf{H} , o campo magnético (A/m), onde usamos as relações constitutivas para materiais lineares, isotrópicos e homogêneos, ou seja, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ [C/m^2] e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ [webers/ m^2], sendo \mathbf{D} e \mathbf{B} os vetores deslocamento elétrico e indução magnética, respectivamente. Aplicando o rotacional em (2.3) e (2.4) nas expressões acima é possível desacoplar os campos, ou seja,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Usando a identidade vetorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

então:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Identificamos 2.1 e 2.4, logo:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (2.8)$$

Utilizando a outra relação constitutiva, ou seja, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, temos,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Analogamente para o campo magnético, realizamos o mesmo procedimento com a equação 2.4 e obtemos,

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Verificamos que, ao desacoplarmos os campos elétrico, equação 2.9, e magnético, equação: 2.10, obtemos duas equações diferenciais de segunda ordem que possuem a mesma forma da equações de onda ¹ com um termo de amortecimento [16, 24].

Em uma região sem densidade de corrente ($\mathbf{J} = 0$), temos exatamente a forma da equação de onda.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.12)$$

No Vácuo, os campos elétricos \mathbf{E} e magnético \mathbf{H} , propagam-se com mesma velocidade, a da luz ². As equações acima são conhecidas como equação de onda vetorial. A resolução destas equações não são triviais, principalmente em sistemas com simetria cilindra e esféricas.

A solução mais simples para esse grupo de equações são ondas planas, onde neste caso, podemos representar os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} como uma onda monocromática propagando-se na direção z , por exemplo. Assim, os campos podem ser descritos da seguinte maneira [24],

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.13)$$

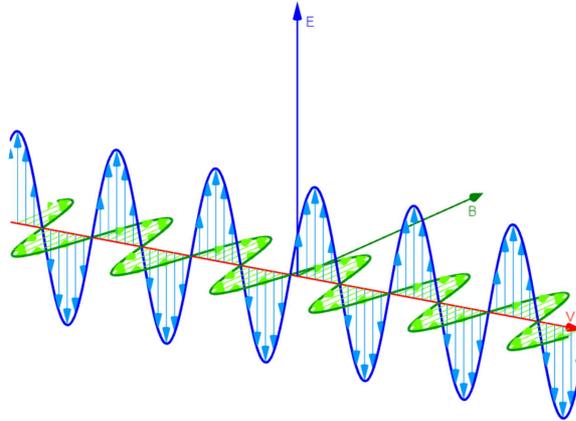
$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.14)$$

onde \mathbf{E}_0 e \mathbf{H}_0 são as amplitudes dos campos elétrico e magnético. Podemos facilmente verificar que 2.13 e 2.14 são soluções da equações 2.11 e 2.12, respectivamente.

¹ Equação de onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

² Velocidade da luz no vácuo: $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

Figura 2 – Representação da Onda Eletromagnética. Os campos, elétrico \mathbf{E} , representado pela linha azul e magnético \mathbf{H} , representado pela linha verde oscilam perpendicularmente entre si e perpendiculares à direção de propagação, z , representado pela linha vermelha.



Fonte: Autoral, feita no GeoGebra Classic.

Simulando as equações 2.11 e 2.12 com suas respectivas soluções (2.13 e 2.14) nos indicam que os campos elétrico e magnético são ondas propagando-se no espaço livre, oscilando em uma dada direção. Analisando as equações de Maxwell, verifica-se que os campos oscilam perpendiculares entre si e com relação à direção de propagação $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$, conforme à simulação ilustrada na Figura 2.

Os campos e o vetor \mathbf{k} definem direções mutuamente perpendiculares, e eles estão orientados seguindo uma convenção dextrógira na ordem $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{k}$. As ondas eletromagnéticas são ditas transversais, quando a vibração ocorre numa direção perpendicular à direção de propagação.

Mais tarde, vamos mostrar uma forma de resolver as equações de ondas vetoriais obtidas acima. Uma das características mais importantes das ondas eletromagnéticas é que elas possuem polarização. Na seção seguinte, abordaremos o estudo da polarização da luz.

2.1.1 Polarização da Onda Eletromagnética e o Parâmetro de Stokes

As soluções das equações de ondas vetoriais são ondas transversais que dão origem às polarizações. A polarização dá-se pela direção de vibração dos campos elétrico e magnético [24]. Sabemos que uma onda eletromagnética é formada por dois campos vetoriais. Se não temos materiais ferromagnéticos, a maior interação entre a onda incidente e a matéria se dá pelo campo elétrico. Assim, vamos concentrar nossa atenção na orientação do campo elétrico. Outro dado importante é que o plano formado entre a direção do campo elétrico e o vetor de onda é chamado de plano de incidência [1, 24, 26].

Vamos separar o campo elétrico em duas componentes. Assim, para uma onda plana monocromática que propaga na direção z , as componentes do campo elétrico desta onda pode ser escrita como,

$$\tilde{E}_x = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{E}_y = \tilde{B}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (2.16)$$

sendo $\tilde{A} = ae^{i\delta_x}$ e $\tilde{B} = be^{i\delta_y}$ amplitudes complexas. Com uma escolha conveniente da origem das coordenadas podemos fazer $\delta_x = 0$ e $\delta_y = \delta$. Os campos elétricos reais são dados por

$$E_x = \text{Re}\{\tilde{E}_x\} = a \cos \phi, \quad (2.17)$$

$$E_y = \text{Re}\{\tilde{E}_y\} = b \cos(\phi + \delta), \quad (2.18)$$

onde $\phi = kz - \omega t$ e δ é a fase. A expressão acima mostra que há uma diferença de fase entre as duas componentes.

Manipulando as expressões acima é possível encontrar a seguinte equação da elipse[26]

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a}\frac{E_y}{b}\cos\delta = \sin^2\delta. \quad (2.19)$$

A equação acima é inscrita em um retângulo de comprimento $2a$ por $2b$. Pode-se mostrar que para certos valores de δ , teremos uma onda circularmente, linearmente ou elipticamente polarizada. Por exemplo, para $\delta = \pm n\pi/2$, com n ímpar teremos uma elipse com semieixo maior situado ao eixo maior E_x , considerando $a > b$, por outro lado, se $a = b = E_0$, temos uma circunferência, já para $\delta = \pm n\pi$ com n inteiro temos uma equação linear.

Note que o período em que a elipse é descrita é igual ao período da onda, no caso de uma luz visível $10^{-15}s$ e isto é demasiadamente curto para ser detectado experimentalmente [26]. Embora existam detectores com esta precisão, para o nosso estudo este se torna inviável. Assim, seria interessante descrever um modelo alternativo de polarização baseado em grandezas observáveis, como por exemplo, a irradiância. Este modelo foi proposto por Sir George Gabriel Stokes em 1852. Stokes introduziu quatro quantidades observáveis, conhecida hoje como parâmetros de Stokes. Passaremos agora a descrever estes parâmetros.

No plano $z = 0$ podemos escrever as componentes do campo de forma semelhante as descrições acima, mas agora prestando a atenção na dependência temporal, ou seja,

$$E_x(t) = a(t) \cos [\omega t + \delta_x(t)], \quad (2.20)$$

$$E_y(t) = b(t) \cos [\omega t + \delta_y(t)], \quad (2.21)$$

onde $a(t)$, $b(t)$, $\delta_x(t)$ e $\delta_y(t)$ como sendo as amplitudes e fatores de fases instantâneas. Note que a variação, ou evolução das amplitudes são lentos comparados à $\cos(\omega t)$.

Seguindo os mesmos passos anteriores, podemos obter a equação da elipse semelhante a 2.19, ou seja,

$$\left(\frac{E_x(t)}{a(t)}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{b(t)}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)}{a(t)}\frac{E_y(t)}{b(t)}\cos\delta(t) = \sin^2\delta(t), \quad (2.22)$$

onde definimos $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$. Para uma onda monocromática a amplitude e o fator de fase são lentos quando comparado com $\cos(\omega t)$ e nesta aproximação podemos considerá los constante, logo podemos escrever a equação 2.22 como,

$$\left(\frac{E_x(t)}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{b}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)}{a}\frac{E_y(t)}{b}\cos\delta = \sin^2\delta. \quad (2.23)$$

O que precisamos fazer agora é tentar escrever a equação acima em função de observáveis. O primeiro passo é tomar a média temporal. Para tomar a média temporal devemos lembrar a definição de uma média temporal de uma função, ou seja,

$$\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t)E_j(t)dt. \quad (2.24)$$

$$i, j = x, y$$

Com isto é possível tomar a média temporal da equação 2.23, onde utilizaremos

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}a^2, \quad (2.25)$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}b^2, \quad (2.26)$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2}ab \cos \delta. \quad (2.27)$$

Assim, tomando a média temporal e fazendo algumas manobras algébricas a equação 2.23 pode ser escrita como,

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 - (2ab \cos \delta)^2 = (2ab \sin \delta)^2. \quad (2.28)$$

Vemos desta forma que a equação está relacionada as amplitudes quadráticas que por sua vez está relacionado a intensidade, que é justamente um observável. Note que o primeiro termo é justamente a intensidade total medida por um detector. Os termos entre parênteses são conhecidos como parâmetros de Stokes [1, 26]. Definindo os parâmetros de Stokes como,

$$I = a^2 + b^2, \quad (2.29)$$

$$Q = a^2 - b^2, \quad (2.30)$$

$$U = 2ab \cos \delta, \quad (2.31)$$

$$V = 2ab \sin \delta, \quad (2.32)$$

onde I representa a intensidade total, Q a intensidade de uma radiação linearmente polarizada seja vertical ou horizontal, U a intensidade linearmente polarizada a $\pm 45^\circ$ e finalmente V a intensidade de uma radiação circularmente polarizada à direita ou esquerda. Note que existe um vínculo entre estes parametros dado por

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (2.33)$$

A equação 2.33 representa um caso ideal, em que a radiação é totalmente polarizada (puramente monocromática e coerente), no caso real em que a radiação seja parcialmente polarizada temos a desigualdade,

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (2.34)$$

A equação 2.33 é conhecida como esfera de Poincaré [26], usada para estudo de polarização.

Os parâmetros de Stokes podem ser representados por uma matriz coluna, essa representação é uma maneira muito útil e prática de ver os quatro parâmetros. Essa representação é chamada de vetor de Stokes e é definido como,

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Uma forma alternativa de entender melhor os parâmetros de Stokes é dado nas referências [1, 26]. De forma resumida podemos pensar em uma onda plana cujo campo

elétrico pode ser quebrado em paralelo e perpendicular em relação ao plano de incidência, ou seja,

$$\mathbf{E} = E_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} + E_{\perp}\hat{e}_{\perp}, \quad (2.36)$$

onde

$$E_{\parallel} = ae^{-i\delta_{\parallel}}, \quad (2.37)$$

$$E_{\perp} = be^{-i\delta_{\perp}}. \quad (2.38)$$

Assim, a intensidade obtida será (estamos omitindo as constantes associada aos cálculos da intensidade),

$$I = E_{\parallel}E_{\parallel}^* + E_{\perp}E_{\perp}^* = (a)^2 + (b)^2. \quad (2.39)$$

Se agora considerarmos uma onda polarizada horizontalmente e verticalmente, teremos que a diferença das intensidades pode ser escrita como,

$$Q = I_{\parallel} - I_{\perp} = E_{\parallel}E_{\parallel}^* - E_{\perp}E_{\perp}^* = (a)^2 - (b)^2. \quad (2.40)$$

Um terceiro experimento pode ser produzindo, utilizando duas ondas, uma polarizada a $+45^{\circ}$ e -45° . A diferença das intensidades pode ser calculada e encontramos,

$$U = I_{+} - I_{-} = E_{\parallel}E_{\perp}^* + E_{\perp}E_{\parallel}^* = 2ab \cos \delta, \quad (2.41)$$

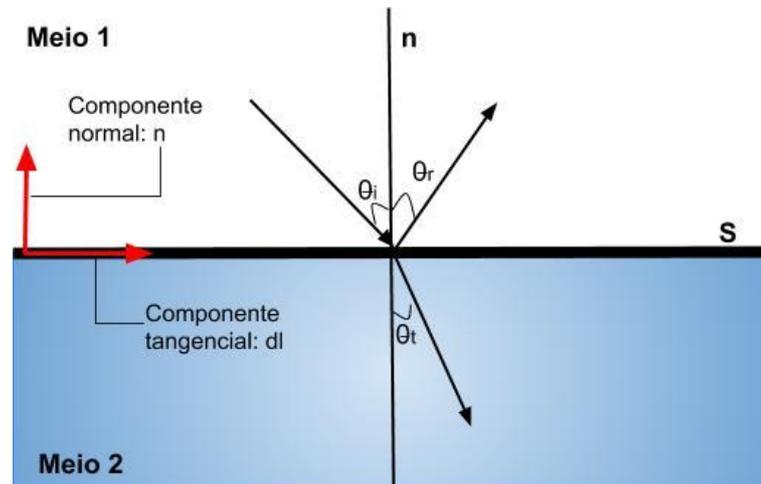
onde $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$. Finalmente, a diferença de intensidade entre um feixe circularmente polarizado a direita e a esquerda fica,

$$V = i(E_{\parallel}E_{\perp}^* - E_{\perp}E_{\parallel}^*) = 2ab \sin \delta. \quad (2.42)$$

2.1.2 Espalhamento, Absorção e Extinção

Quando uma onda eletromagnética que viaja livremente, incide sobre a superfície de separação entre dois meios, parte de sua energia retorna para o meio de onde partiu, dando origem a onda refletida, e parte é transmitida para o segundo meio, dando origem a onda transmitida ou refratada [23]. Os resultados dos campos elétrico e magnético das novas ondas (refletida e transmitida) dependem de características como, frequência, ângulo de incidência e polarização da onda. Vamos verificar o que ocorre quando uma onda incide sobre a interface de separação entre dois meios dielétricos distintos. A princípio, vamos

Figura 3 – Representação da propagação de onda entre dois meios distintos. Evidencie as componentes normal e tangencial entre os meios.



Fonte: Autoral.

definir o plano de incidência e as condições de contorno na superfície de separação entre os meios.

A Figura 3 descreve bem a interação entre os meios, onde S indica a superfície de separação entre os meios, \hat{n} é o vetor normal, $d\mathbf{l}$ é um vetor tangencial e θ_i , θ_r e θ_t são respectivamente os ângulos de incidência, reflexão e transmissão. As expressões para os campos elétrico incidente (propagando-se no sentido positivo de z), refletido e transmitido serão

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(k_1^* z - \omega t)}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{-i(k_1^* z + \omega t)}, \quad (2.44)$$

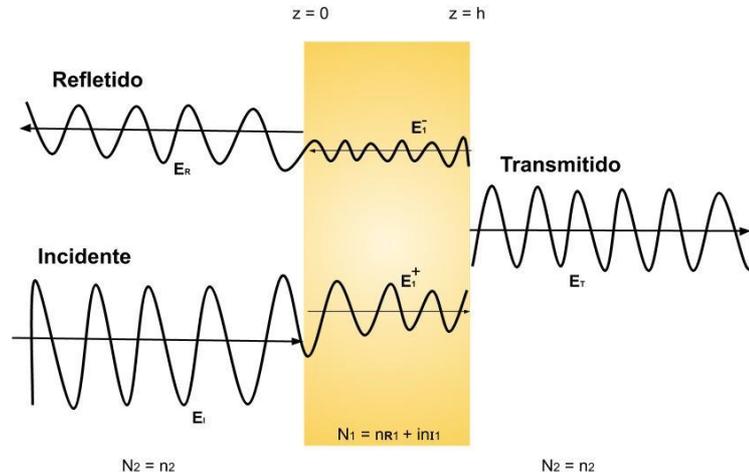
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(k_2^* z - \omega t)}. \quad (2.45)$$

Note que o número de onda k^* , pode ser complexo, isto é, $k^* = k_R + ik_I$ e como k^* se relaciona com o índice de refração, ($k^* = \omega N/c$), este também pode ser complexo ($N = n_R + in_I$).

A Figura 4, representa um caso mais geral das equações 2.43, 2.44, 2.45, o que nos dá uma ideia de múltiplas reflexões e transmissões, ou seja, a cada vez que uma onda passa de um meio para o outro ocorre uma reflexão e uma transmissão. Note que uma parte da onda refletida dentro do meio N_1 , pode sofrer infinitas reflexões e transmissões. Este exemplo mostra a complexidade do problema de espalhamento e isto se torna ainda mais complicado quando temos outras formas geométricas do centro espalhador. Devemos lembrar que não é apenas a reflexão e a transmissão que devem ser levados em conta, mas

também a absorção, que ocorre quando o índice de refração possui uma parte imaginária.

Figura 4 – Incidência, Reflexão e Transmissão, em um material dielétrico de espessura h e com índice de refração complexo N .



Fonte: Autoral.

Como já comentado, a intensidade refletida, transmitida e absorvida estão relacionadas a transição entre dois ou mais meios. Ao passar pela transição os campos sofrem uma descontinuidade que devem satisfazer as condições de contorno na interface de transição dos meios, dada pelas expressões abaixo,

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (2.46)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.47)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.48)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}, \quad (2.49)$$

onde σ e \mathbf{j} são as densidades superficiais de carga e corrente existente na interface entre os meios 1 e 2.

Assim, utilizando as equações de Maxwell e as condições de contorno na interface é possível encontrar, para a amplitude, coeficientes de reflexão dado pela razão entre o campo refletido em relação ao campo incidente. Da mesma forma é possível encontrar o coeficiente de transmissão de amplitude. Devemos lembrar que o campo incidente sempre pode ser quebrado em paralelo (Transversal magnético - TM) e perpendicular (Transversal Elétrico - TE) ao plano de incidência, isto significa que os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser divididos em paralelos (TM) e perpendiculares (TE). Estes coeficientes são conhecidos na literatura como coeficiente de Fresnel [1, 26]. Pode-se mostrar que os coeficientes de Fresnel dependem basicamente do ângulo de incidência, do

ângulo refratado e do índice de refração dos meios envolvido na reflexão e transmissão. Por exemplo, considerando dois meios dielétricos N_1 e N_2 , o campo refletido E_r e transmitido E_t para o modo TE são dados por

$$E_{r(TE)} = \left(\frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2} \right) E_i, \quad (2.50)$$

$$E_{t(TE)} = \left(\frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2} \right) E_i, \quad (2.51)$$

onde θ_1 , θ_2 , $E_{r(TE)}$ e $E_{t(TE)}$ são respectivamente, ângulos de incidência, ângulo de refração, campo incidente refletido associado ao modo TE e campo incidente transmitido associado ao modo TE. Geralmente, na maioria dos experimentos a amplitude do campo incidente (E_i) é conhecida. Assim, medindo os ângulos de incidência e conhecendo o índice de refração dos meios é possível encontrar a amplitude refletida e transmitida.

Analogamente o campo refletido $E_{r(TM)}$ e transmitido $E_{t(TM)}$ para o modo TM são,

$$E_{r(TM)} = \left(\frac{N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_2 + N_2 \cos \theta_1} \right) E_i, \quad (2.52)$$

$$E_{t(TM)} = \left(\frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_2 + N_2 \cos \theta_1} \right) E_i. \quad (2.53)$$

O conhecimento dos coeficientes de Fresnel é de suma importância para realizarmos alguma análise sobre o comportamento do campo na interface, mas ainda não é suficiente. Em um dado experimental o que se mede (observável) é a intensidade e, portanto, conhecer a intensidade refletida e transmitida é de extrema importância. Assim, o natural é definir a razão entre a energia refletida pela energia incidente e de forma semelhante para a transmissão. A razão entre a energia refletida pela incidente é conhecido na literatura como refletividade (r) e a razão entre a energia transmitida pela energia incidente é a transmissividade (t). Devemos lembrar que sempre podemos separar a refletividade e transmissividade para o modo TE e TM, onde devemos ter a conservação de energia, ou seja,

$$r + t = r^{TE} \sin^2 \alpha + r^{TM} \cos^2 \alpha + t^{TE} \sin^2 \alpha + t^{TM} \cos^2 \alpha = 1, \quad (2.54)$$

onde α é o ângulo de polarização, ou seja, o ângulo que o campo elétrico faz com o plano de incidência. A conservação de energia vale também para cada modo.

Um outro ponto que precisa ser apresentado é sobre o coeficiente de extinção. Quando uma radiação eletromagnética atravessa um meio (solução), a intensidade transmitida é, na maioria das vezes, menor do que quando comparada com a intensidade da

radiação incidente. Essa diminuição ocorre como resultado de diversos efeitos, dentre os quais destacamos a absorção e o espalhamento. Se considerarmos, então, uma radiação incidente de intensidade I_0 que percorre uma distância z em um dado meio, pode-se relacionar as intensidades I_0 e $I(z)$ por meio da equação de Lambert-Beer,

$$I(z) = I_0 e^{-\beta z}, \quad (2.55)$$

onde a unidade de β (coeficiente de atenuação), no SI é m^{-1} , é dado por

$$\beta = P(C_{abs} + C_{sca}) = NC_{ext}, \quad (2.56)$$

em que P é a densidade volumétrica de partículas presentes no meio, C_{abs} e C_{sca} são as seções de choque de absorção e espalhamento, respectivamente, e C_{ext} , é o chamado seção de choque de extinção [1]. A unidade de C_{abs} , C_{sca} e C_{ext} é m^2 . A atenuação de um feixe por um dado meio é então a soma das atenuações por absorção e por espalhamento. Assim, a seção de choque de extinção é a grandeza que quantifica diretamente a atenuação do feixe independentemente de qual dos efeitos citados prevalece. Para uma melhor compreensão desses fenômenos, vale destacar um exemplo interessante que consiste em incidir luz visível em dois tubos, contendo um deles pó de café em água e o outro microesferas de poliestireno com diâmetro de $400nm$. O pó de café absorve toda a luz que nele incide, sendo esta a razão do seu aspecto negro quando observado diretamente por reflexão. As microesferas, por outro lado, espalham a luz devido à diferença de índice de refração entre o meio e as partículas. Por isso são esbranquiçadas quando observadas por reflexão [1, 8]. A Figura 5 a seguir mostra esses dois tubos.

Se agora colocarmos estes dois tubos sobre a lente de fresnel de um retroprojektor vemos que a luz que a atravessa (transmitida) os tubos é atenuada, mas, como já explicado, por efeitos diferentes. Neste caso, o que se tem são duas situações extremas, isto é, um meio que absorve e não espalha e outro meio que espalha e não absorve. Na primeira, a seção de choque de absorção é suficiente para quantificar a atenuação do feixe de luz incidente, enquanto a segunda é expressa pela seção de choque de espalhamento apenas. Na maior parte dos casos de interesse, no entanto, ocorre uma situação mista, em que o meio espalha e absorve luz simultaneamente. Assim, usa-se a seção de choque de extinção, ao invés das seções de choque de espalhamento ou de absorção separadamente, para quantificar a luz atenuada pelo meio [1, 14, 19]. A Figura 6 mostra o que acabamos de explicar.

A seção de choque de espalhamento ou coeficiente de espalhamento está relacionada com o tamanho e a forma das partículas que estão embebidas no meio, o comprimento de onda da onda incidente e da parte real do índice de refração. Já a seção de choque de absorção está associada a efeitos da parte imaginária do índice de refração, que por sua vez também dependem do comprimento de onda usado. Assim, a intensidade da radiação espalhada depende do número de partículas presentes no meio, da natureza

Figura 5 – Dois tubos, um com pó de café e água e o outro com microesferas de látex em água. No primeiro destaca-se o efeito da absorção e no segundo o espalhamento.



Fonte: Referência [27]

Figura 6 – A foto mostra os dois tubos sobre a lente de Fresnel de um retroprojetor. Note que a luz transmitida para cada tubo é igualmente atenuada, mas uma é devido a absorção e a outra por espalhamento.



Fonte: Referência [27]

dessas partículas, de suas formas geométricas e ainda do comprimento de onda da luz incidente. Quanto maior a densidade de partículas, maior é a atenuação do feixe incidente, pois mais radiação é espalhada e absorvida. Diferentes formas geométricas espalham de formas distintas, isto é, partículas esféricas possuem uma seção de choque de extinção característica enquanto partículas cilíndricas possuem outro e assim por diante.

Outra definição importante é o chamado fator de qualidade (Q). O fator de qualidade de extinção é nada mais que o coeficiente de extinção C_{ext} normalizado pela área do objeto espalhador (G). Também podemos definir o fator de qualidade de espalhamento (Q_{sca}) e de absorção (Q_{abs}), ou seja,

$$Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{G}, \quad (2.57)$$

$$Q_{ext} = \frac{C_{ext}}{G}, \quad (2.58)$$

$$Q_{abs} = \frac{C_{abs}}{G}, \quad (2.59)$$

onde sempre devemos lembrar que

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}. \quad (2.60)$$

2.1.3 Introdução ao Formalismo Geral sobre Espalhamento Eletromagnético

Um conceito importante em problemas de espalhamento é a seção choque [1, 2]. Este termo relaciona uma quantidade com dimensões de área à energia eletromagnética espalhada ou absorvida pelo centro espalhador que interage com a onda incidente. Para um meio 2 de índice de refração N_2 , seja os campos elétricos (\mathbf{E}_{inc}) e magnéticos (\mathbf{H}_{inc}) da onda incidente, e os campos elétricos (\mathbf{E}_{sca}) e magnéticos (\mathbf{H}_{sca}) da onda espalhada. Assim $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}$ e $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca}$ são os campos elétricos e magnéticos totais na região fora do centro espalhador. Já para a região dentro do centro espalhador (meio 1), de índice de refração N_1 , considere $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{inc}$ e $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{inc}$ como sendo os campos elétrico e magnético internos. Como vimos na seção 2.1, os campos eletromagnéticos são dados pelas equações 2.13 e 2.14. A forma do campo espalhado dependerá do formato do centro espalhador. Nesta dissertação a dependência temporal dos campos ($e^{-i\omega t}$) será omitida.

Como já é bem estabelecido o valor médio do vetor Poynting é dado pela expressão abaixo [28],

$$\langle \mathbf{S} \rangle = Re\{\mathbf{S}^\dagger\} = \frac{1}{2} Re\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}, \quad (2.61)$$

onde \mathbf{S}^\dagger é o **vetor de Poynting complexo**. A expressão acima é importante, pois fornece o valor da média temporal do vetor de Poynting.

O vetor de Poynting informa-nos sobre a magnitude e direção de propagação e a densidade direcional do fluxo de energia de um campo eletromagnético em todos os pontos do espaço, ou seja, a quantidade de energia transferida por unidade de área, em Watts por metro quadrado [$W \cdot m^{-2}$] no SI. Em problemas de propagação, espalhamento

e absorção de onda eletromagnética o vetor de Poynting é de real importância [22, 2]. Podemos escrever o vetor de Poynting (utilizando a equação 2.61) como uma função dos campos incidente e dispersos, para cada meio, para o meio 2, temos,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_2 &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ (\mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}) \times (\mathbf{H}_{inc}^* + \mathbf{H}_{sca}^*) \}, \\ \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_{inc} \times \mathbf{H}_{inc}^* \} + \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}^* \} + \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_{inc} \times \mathbf{H}_{sca}^* + \mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{inc}^* \},\end{aligned}\tag{2.62}$$

onde vemos claramente na equação 2.62 que o primeiro termo representa o vetor de Poynting da onda incidente \mathbf{S}_{inc} , o segundo termo o vetor de Poynting da onda espalhada \mathbf{S}_{sca} e o último termo é o vetor de Poynting envolvendo a interação entre o campo incidente e o campo espalhado, ou seja, o termo de interferência, que vamos chamar de vetor Poynting de extinção \mathbf{S}_{ext} . No cálculo acima já estamos tomando o valor médio e para não sobre carregar a notação omitimos o símbolo $\langle \rangle$.

Para ajudar a melhor compreensão, considere um centro espalhador qualquer, e em um determinado ponto do espaço colocamos nosso detector de intensidade de radiação. A potência registrada pelo detector será [1]

$$W = \mathbf{S} \cdot \hat{n} \Delta A,\tag{2.63}$$

onde ΔA é a área do detector. Se agora considerarmos uma onda plana monocromática e o fato que não há absorção pelo centro espalhador, é possível calcular o vetor de Poynting. Se admitirmos que o detector está longe do centro espalhador ($D \gg \lambda$), podemos escrever a expressão assintótica do campo elétrico como [1],

$$E \approx \frac{e^{ikr}}{-ikr} E_o,\tag{2.64}$$

e, portanto, o vetor de Poynting fica

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{E_o^2}{\omega \mu k r^2} \hat{r},\tag{2.65}$$

com isto a taxa de energia detectada será

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_o^2}{\omega \mu k} \Delta \Omega,\tag{2.66}$$

onde $\Delta \Omega = \Delta A / r^2$ é o ângulo sólido. Vemos desta forma que a energia detectada depende do quadrado da amplitude e do ângulo sólido, que por sua vez depende de (θ, ϕ) . Esta dependência da taxa de energia com θ e ϕ estará explícita quando calcularmos a matriz de espalhamento.

Formalmente podemos determinar a taxa de energia, utilizando o vetor de Poynting, ou seja [1, 2],

$$W = \oint_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (2.67)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário perpendicular à superfície, dA é o diferencial de superfície, A é a superfície que limita o volume V . Assim, por exemplo, podemos escrever, utilizando a equação 2.62

$$W_{ext} = \oint_A \mathbf{S}_{ext} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_A \frac{1}{2} Re \{ \mathbf{E}_{inc} \times \mathbf{H}_{sca}^* + \mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{inc}^* \} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (2.68)$$

Isto mostra que a integral acima manifesta uma interferência entre a radiação incidente e a espalhada. A conservação de energia requer que a radiação removida a partir da radiação incidente por interferência seja contada pelo espalhamento em todas as direções mais a parte absorvidas pelo centro espalhador, ou seja, podemos escrever

$$W_{ext} = W_{abs} + W_{sca}, \quad (2.69)$$

Nesta linha de raciocínio e lembrando da discussão da seção anterior (seção 2.1.2), podemos escrever que,

$$W_{ext} = I_{inc} C_{ext}, \quad (2.70)$$

e utilizando a equação 2.69, recuperamos a equação 2.60. Na realidade a definição apresentada na maioria dos livros textos é

$$C_{sca} = \frac{W_{sca}}{|S_{inc}|}, \quad (2.71)$$

$$C_{abs} = \frac{W_{abs}}{|S_{inc}|}, \quad (2.72)$$

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{|S_{inc}|}, \quad (2.73)$$

lembrando que $I_{inc} = |S_{inc}|$.

Com as definições acima o próximo passo é encontrar os vetores de Poynting para determinar os coeficientes C_{ext} , C_{sca} e C_{abs} . Para encontrar o vetor de Poynting é necessário encontrar os campos. Como já discutido anteriormente, sempre podemos separar o campo elétrico em duas componentes. Por outro lado, vamos considerar que nosso detector esteja

localizado a uma grande distância do centro espalhador. Então podemos propor a seguinte equação [1]

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel,sca} \\ E_{\perp,sca} \end{pmatrix} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel,inc} \\ E_{\perp,inc} \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

A matriz quadrada acima é chamada de matriz espalhamento ou matriz S . Se lembrarmos que a intensidade está relacionada com o quadrado do campo, então podemos escrever que a intensidade espalhada pode ser escrita como [1, 14],

$$I \approx \frac{1}{k^2 r^2} F(\theta, \phi) I_0, \quad (2.75)$$

com I_0 a intensidade incidente e $F(\theta, \phi)$ a matriz de espalhamento.

Assim, utilizando as equações 2.74 e 2.75 e lembrando os parâmetros de Stokes é possível escrever

$$\begin{pmatrix} I_{sca} \\ Q_{sca} \\ U_{sca} \\ V_{sca} \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{inc} \\ Q_{inc} \\ U_{inc} \\ V_{inc} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

onde existe uma correlação entre os F_{ij} elementos da matriz acima com os S_i , por exemplo,

$$F_{11} = \frac{1}{2} [|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2]. \quad (2.77)$$

Para maiores detalhes veja a referencia [1].

As equações acima permitem encontrar os fatores de qualidade e os coeficientes de extinção em função do estado de polarização da onda incidente e do ângulo θ e ϕ . Mas para as grandezas Q e C são necessários encontrar os campos para cada modo (TE e TM). A pergunta agora é como encontrar estes campos. Na seção seguinte vamos apresentar um método para encontrarmos estes campos.

2.2 EXPANSÃO DOS CAMPOS EM HARMÔNICOS VETORIAIS CILÍNDRICOS

No Apêndice A apresentamos uma forma de obter os campos elétricos e magnéticos através dos chamados potenciais vetores de Hertz elétrico $\mathbf{\Pi}_e$ e magnético $\mathbf{\Pi}_m$. A expressão encontrada é,

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e - \mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_m + \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}, \quad (2.79)$$

onde os potenciais vetores de Hertz elétrico $\mathbf{\Pi}_e$ e magnético $\mathbf{\Pi}_m$ estão associados aos modos TM e TE respectivamente. Vale lembrar que os potenciais vetores de Hertz satisfazem a equação de Helmholtz vetorial,

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m + k^2 \mathbf{\Pi}_m = 0, \quad (2.80)$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e + k^2 \mathbf{\Pi}_e = 0. \quad (2.81)$$

Assim, resolvendo a equação vetorial para os potenciais vetores de Hertz é possível encontrar os campos elétricos e magnéticos. Note que a princípio não teria nenhuma vantagem em utilizar os potenciais (Potencial vetor de Hertz elétrico) e anti-potenciais (Potencial vetor de Hertz magnético) ao invés de resolver diretamente equação de onda vetorial para os campos, ou seja,

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.82)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2.83)$$

com o vínculo,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.84)$$

A proposta aqui é um pouco diferente. A ideia é utilizar os potenciais de Debye-Hertz (ψ), veja detalhes no Apêndice A, para escrever um campo vetorial que seja utilizado como base para expandir os campos elétricos e magnéticos. No Apêndice A é visto os potenciais e Debye-Hertz, que satisfazem a equação de Helmholtz escalar, ou seja,

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.85)$$

Considere uma função ψ e um vetor constante arbitrário \mathbf{c} , também conhecido como vetor piloto. Se definirmos um vetor \mathbf{M} de tal forma que

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi) = \nabla \psi \times \mathbf{c}, \quad (2.86)$$

onde ψ satisfaz a equação 2.85. Vemos facilmente que \mathbf{M} satisfaz o vínculo,

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (2.87)$$

Com um pouco de manipulação algébrica é possível mostrar que \mathbf{M} satisfaz a equação de Helmholtz vetorial [1, 15],

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = 0. \quad (2.88)$$

Se agora tomarmos o rotacional da equação 2.86, podemos gerar um outro vetor, ou seja,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}, \quad (2.89)$$

que também satisfaz a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0, \quad (2.90)$$

que mantem o vínculo,

$$\nabla \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.91)$$

Assim, pode-se mostrar que \mathbf{M} e \mathbf{N} são ortogonais e que por sua vez são ortogonais a $\nabla\psi$. Portanto, temos um triedro formado por \mathbf{M} , \mathbf{N} e $\mathbf{L} = \nabla\psi$. Observe que para encontrar estes vetores basta resolver a equação de Helmholtz escalar para ψ , ou seja, resolver a equação 2.85, além de definir o vetor piloto. A função ψ que é capaz de gerar os vetores \mathbf{M} , \mathbf{N} e \mathbf{L} é chamado de função geradora do vetor \mathbf{L} e dos vetores harmônicos \mathbf{M} e \mathbf{N} . A escolha de ψ vai depender da simetria, ou seja, da escolha do sistema de coordenadas. Resumindo, \mathbf{M} e \mathbf{N} satisfazem a equação de Helmholtz vetorial, possuem divergência nula, são ortogonais e ainda podemos obter \mathbf{N} tomando o rotacional de \mathbf{M} e vice-versa. Estas são exatamente as características dos campos elétricos e magnéticos, discutidos acima.

Desta forma vamos propor que o potencial vetor magnético \mathbf{A}_m possa ser expandido na base dos vetores \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} , ou seja,

$$\mathbf{A}_m = \frac{i}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n + B_n \mathbf{N}_n + c_n \mathbf{L}_n], \quad (2.92)$$

e utilizando as relações constitutivas entre os campos \mathbf{H} e \mathbf{B} e a relação de ortogonalidade entre os vetores \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} , encontramos que o campo magnético é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{N}_n + B_n \mathbf{M}_n]. \quad (2.93)$$

Uma vez conhecendo o vetor campo magnético, podemos utilizar uma das equações de Maxwell e encontrar o campo elétrico, ou seja,

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n + B_n \mathbf{N}_n]. \quad (2.94)$$

Note que as expressões acima mantem o vínculo $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. O cálculo do potencial escalar elétrico pode também ser encontrado, basta utilizar o calibre de Lorentz e neste caso temos,

$$\phi = - \sum_n c_n \psi_n. \quad (2.95)$$

Assim, conseguimos obter os campos elétricos (\mathbf{E}), o campo magnéticos (\mathbf{H}), o potencial vetor (\mathbf{A}) e o potencial escalar elétrico (ϕ) a partir do conhecimento do potencial de Debye-Hertz (ψ). Para encontrar o potencial de Debye-Hertz basta resolver a equação de Helmholtz escalar apropriada a simetria do nosso problema de interesse.

Uma forma alternativa de encontrar os campos elétricos e magnéticos é lembrar que estes campos podem ser expandidos através dos potenciais vetores de Hertz, veja equações A.70 e A.71. E como os potenciais vetores de Hertz estão conectados aos potenciais de Debye-Hertz, temos,

$$\mathbf{\Pi}_e = -\frac{1}{k} \sum_n b_n \psi_n \mathbf{c}, \quad (2.96)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \sum_n a_n \psi_n \mathbf{c}. \quad (2.97)$$

Vale salientar que as expressões para \mathbf{M} (equação 2.86) e \mathbf{N} (equação 2.89) valem para cada modo do campo. De forma resumida, podemos escrever

$$\mathbf{M}_e = \nabla \times (\mathbf{c}\psi_e), \quad (2.98)$$

$$\mathbf{M}_m = \nabla \times (\mathbf{c}\psi_m), \quad (2.99)$$

$$\mathbf{N}_e = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_e, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{N}_m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_m, \quad (2.101)$$

onde o índice e e m representa modo TM e TE respectivamente.

Assim, por exemplo, é possível encontrar a expressão do campo elétrico e magnético para o modo TM em coordenadas cilíndricas. Para isto basta utilizar as equações 2.96 e 2.97 e fazendo $\mathbf{c} = \hat{e}_z$, temos,

$$\mathbf{\Pi}_e = -\frac{i}{\omega\mu}\psi_e\hat{z}, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = 0, \quad (2.103)$$

onde

$$\psi_e = \sum_n b_n \psi_n, \quad (2.104)$$

$$\psi_m = \sum_n a_n \psi_n. \quad (2.105)$$

Se agora utilizarmos as equações 2.78 e 2.79, encontramos,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_e}{\partial \phi} \hat{\rho} - \frac{\partial \psi_e}{\partial \rho} \hat{\phi}, \quad (2.106)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \left[\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z \partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \phi \partial z} \hat{\phi} + \left(\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z^2} + k^2 \psi_e \right) \hat{z} \right] \quad (2.107)$$

e algo semelhante para o modo TE [15].

Para finalizar devemos lembrar que no problema de espalhamento teremos dois ou mais meios e, portanto, precisamos utilizar as condições de contorno na interface entre os meios. Sabemos que o campo eletromagnético tem que satisfazer as equações de Maxwell nos pontos em que ε e μ são contínuos. Porém, quando a onda eletromagnética cruza a fronteira entre partícula e meio, em geral ocorre uma mudança repentina nessas propriedades. Essa alteração ocorre em uma região de transição com espessura da ordem das dimensões atômicas. Do ponto de vista macroscópico, portanto, há uma descontinuidade na fronteira [1]. Em tais pontos de fronteira, impomos as seguintes condições nos campos elétrico e magnético

$$[\mathbf{E}_2(x) - \mathbf{E}_1(x)] \times \hat{n} = 0, \quad (2.108)$$

$$[\mathbf{H}_2(x) - \mathbf{H}_1(x)] \times \hat{n} = 0, \quad (2.109)$$

onde \hat{n} é um vetor normal à superfície de separação entre os meios interno e externo que aponta pra fora da partícula (continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético). Os índices 1 e 2 indicam os campos internos ($\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\text{interno}}$) e externos ($\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{\text{incidente}} + \mathbf{E}_{\text{espalhado}}$) respectivamente.

Uma vez obtido o campo elétrico e o campo magnético em função dos harmônicos vetoriais é possível agora encontrar os valores dos campos para um problema específico.

3 ESPALHAMENTO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA DEVIDO A UM CILINDRO INFINITO: TEORIA.

Neste capítulo, serão apresentadas as teorias para o espalhamento de ondas planas por um cilindro infinito. O problema do espalhamento eletromagnético devido a um cilindro infinito, com uma fonte de irradiação com incidência normal ao eixo do cilindro, foi resolvido inicialmente por Lord Rayleigh em 1881 [4]. Em 1955 James Wait [18] resolve o caso geral, quando o ângulo de incidência é arbitrário, desde então esta solução tem sido aplicada a diversas situações no contexto de partículas não magnéticas. Neste trabalho de dissertação de mestrado vamos nos basear nos livros texto base [1, 14, 15, 18, 53]. Levando em conta que nessas referências, os autores tratam o problema para o caso não magnético, ou seja, quando a permeabilidade magnética do meio μ é idêntica a permeabilidade magnética do centro espalhador μ_1 (no nosso caso, um cilindro).

Vamos construir a solução completa para o espalhamento devido a um cilindro infinito por ondas eletromagnéticas planas, com incidência normal ao eixo do cilindro [1, 19, 14].

3.1 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS EM TERMOS DOS HARMÔNICOS VETORIAIS CILÍNDRICOS

Como já descrito no capítulo anterior os campos elétricos e magnéticos podem ser expandidos na base dos harmônicos vetoriais, equações 2.93 e 2.94. Para encontrar os harmônicos vetoriais é preciso resolver a equação de Helmholtz escalar que tem como solução os potenciais de Debye-Hertz, equação 2.85. Como estamos interessados no problema cujo o centro espalhador é um cilindro, então vamos resolver a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Assim, a equação de Helmholtz pode ser escrita como,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + k^2 \psi = 0, \quad (3.1)$$

onde k é o número de onda e ψ é função de (r, ϕ, z) . Utilizando o método de separação de variáveis [29], $\psi(r, \phi, z) = R(r), \Phi(\phi), Z(z)$, obtemos a solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas cilíndricas, todo o desenvolvimento das equações presentes neste capítulo encontram-se no Apêndice B.

$$\psi_n(\rho, \phi, z) = Z_n(\rho) e^{in\phi} e^{ihz}, \quad (3.2)$$

onde n é um número inteiro, $Z_n(\rho = r\sqrt{k^2 + h^2})$ é qualquer função de Bessel cilíndrica J_n, Y_n (Função de Neumann), ou Hankel $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ ou $H_n^{(2)} = J_n - iY_n$ e h é um parâmetro real a ser determinado. O vetor piloto neste caso será $a = \hat{e}_z$ onde \hat{e}_z é o vetor

unitário na direção do eixo do cilindro, que escolhemos na direção z . Da definição dos harmônicos cilíndricos vetoriais, temos,

$$\mathbf{M}_n = \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{N}_n = \frac{1}{k} (\nabla \times \mathbf{M}_n), \quad (3.4)$$

para os quais as soluções são

$$\mathbf{M}_n = \sqrt{k^2 - h^2} \left[in \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r - Z'_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] e^{i(n\phi + hz)}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{N}_n = \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \left[ih Z'_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_r - nh \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \sqrt{k^2 - h^2} Z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z \right] e^{i(n\phi + hz)}, \quad (3.6)$$

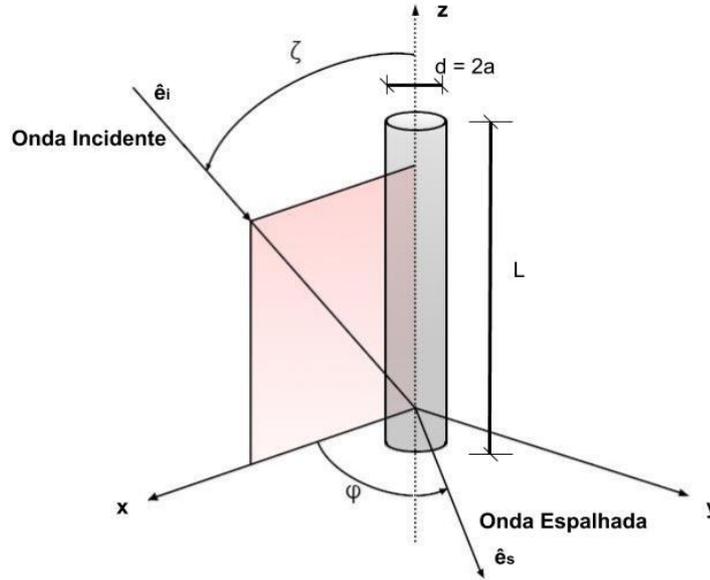
que são exatamente as equações da Ref.[1]. Assim, temos condições de expandir os campos eletromagnéticos em função dos harmônicos cilíndricos vetoriais encontrados nas equações (3.5, 3.6), em cada região do espaço. Vale ressaltar que para cada \mathbf{M} e \mathbf{N} devemos ter uma parte TE e outra TM . Escrevendo $e^{in\phi} = \cos n\phi + i \sin n\phi$, de forma mais explícita, encontramos,

$${}^e_m \mathbf{M}_n = \frac{\rho}{r} \left[\frac{n}{\rho} Z_n(\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ i \cos n\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r - Z'_n(\rho) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ i \sin n\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] e^{ihz}, \quad (3.7)$$

$${}^e_m \mathbf{N}_n = \frac{\rho}{kr} \left[h Z'_n(\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ i \cos n\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{nh}{\rho} Z_n(\rho) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ i \sin n\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\rho}{r} Z_n(\rho) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ i \sin n\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_z \right] e^{ihz}, \quad (3.8)$$

onde o superíndice e representa a parte TE de \mathbf{M} e \mathbf{N} e o subíndice m representa a parte TM de \mathbf{M} e \mathbf{N} . Com as expressões acima (equação 3.5 e 3.6) podemos agora resolver o problema do espalhamento de uma onda de micro-ondas por um cilindro dielétrico. Seja um cilindro circular infinitamente longo irradiado por uma onda plana incidente, propagando-se na direção x positiva. Se o campo elétrico é polarizado paralelo ao plano xz do cilindro temos o primeiro caso onde o campo magnético é transversal ao eixo do cilindro (Caso I- Transversal magnético TM), já se o campo elétrico é polarizado perpendicular ao plano xz do cilindro temos o segundo caso onde o campo elétrico é transversal ao eixo do cilindro (Caso II -Transversal elétrico TE) com o campo magnético paralelo ao eixo. As demais polarizações possíveis se dão como combinações dos modos TE e TM [1, 14, 21]. A irradiação com incidência normal é um caso especial do problema mais geral da iluminação na incidência oblíqua. O ângulo azimutal no sistema de coordenadas cilíndricas é o ângulo \mathbf{CE} , e a variável radial é \mathbf{r} , com \mathbf{a} sendo o raio do cilindro. A geometria do sistema para cilindro de comprimento $L \rightarrow \infty$ é dada a seguir na Figura 7.

Figura 7 – Geometria do cilindro circular infinito de raio a iluminado por uma onda plana com incidência oblíqua. Os vetores unitários \hat{e}_i e \hat{e}_s indicam, as direções de propagação da onda incidente e espalhada.



Fonte: Autoral, adaptada da Ref. [1].

Considere que o cilindro seja irradiado por uma onda plana homogênea, ou seja,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.9)$$

Sendo \mathbf{r} a variável espacial do campo em coordenadas cilíndricas \mathbf{r} como, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \phi, z) = r\hat{e}_r + \phi\hat{e}_\phi + z\hat{e}_z$ e $\mathbf{k} = k\hat{e}_i$ o vetor de onda. Como vimos temos dois estados de polarização ortogonal possíveis da onda incidente, modo TM e o modo TE. Vamos tratar cada um destes separadamente.

Caso I- Modo TM ($\mathbf{E}_i^{(I)} || xz$): Para este caso, temos a seguinte direção de propagação: $\hat{e}_i = -\sin\zeta\hat{e}_x - \cos\zeta\hat{e}_z$, onde ζ é o ângulo entre o vetor de onda \mathbf{k} incidente e o eixo z do cilindro. Assim temos o campo elétrico incidente escrito da seguinte forma,

$$\mathbf{E}_i^{(I)} = E_0(\sin\zeta\hat{e}_z - \cos\zeta\hat{e}_x)e^{-ik(rs\sin\zeta\cos\phi + z\cos\zeta)}. \quad (3.10)$$

A grandeza $\mathbf{E}_0 = E_0(\sin\zeta\hat{e}_z - \cos\zeta\hat{e}_x)e^{-i\omega t}$, possui dependência temporal harmônica $e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência angular de oscilação do campo eletromagnético. O termo E_0 é a amplitude real do campo elétrico com o $(\sin\zeta\hat{e}_z - \cos\zeta\hat{e}_x)$ sendo o vetor de polarização do campo elétrico incidente, ou seja, direção onde o campo elétrico oscila.

Assim, redefinindo os coeficientes das equações 2.93 e 2.94, podemos escrever

$$\mathbf{E}_i^{(\mathbf{I})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n^{(1)} + B_n \mathbf{N}_n^{(1)}], \quad (3.11)$$

$$\mathbf{H}_i^{(\mathbf{I})} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{N}_n^{(1)} + B_n \mathbf{M}_n^{(1)}]. \quad (3.12)$$

Assim temos, tudo que precisamos: expressão do campo elétrico incidente 3.10, expressão para os harmônicos cilíndricos vetoriais 3.5 e 3.6, expressão para a função geradora dos harmônicos cilíndricos vetoriais 3.2 e por fim temos uma expressão para o campo elétrico expandido 3.11. Em primeiro lugar, para que esta expansão seja finita na origem em $r = 0$ devemos excluir as funções de Bessel Y_n da função geradora. Na expressão 3.10, do campo elétrico incidente vemos que na variável z impõe que $h = -k \cos \zeta$ e assim a função geradora (equação 3.2) incidente é expressa da seguinte maneira,

$$\psi_n^{inc} = J_n(\rho) e^{i(n\phi + hz)}. \quad (3.13)$$

Igualando as expressões 3.10 e 3.11, dos campos elétricos incidentes, temos que determinar as constantes A_n e B_n . Usando a ortogonalidade de \mathbf{M} e \mathbf{N} , encontramos,

$$\begin{aligned} A_n &= 0, \\ B_n &= \frac{E_0 (-i)^n}{k \sin \zeta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Todo o desenvolvimento para encontrarmos A_n e B_n encontra-se no Apêndice B.2. Portanto, a expansão do campo eletromagnético incidente é,

$$\mathbf{E}_i^{(\mathbf{I})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \mathbf{N}_n^{(1)}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}_i^{(\mathbf{I})} = \frac{-ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \mathbf{M}_n^{(1)}, \quad (3.16)$$

onde $E_n(k) = B_n = \frac{E_0 (-i)^n r}{\rho}$, sendo $\rho = kr \sin \zeta$. Para encontrarmos o campo elétrico e magnético dentro do cilindro ($\mathbf{E}_1^{(\mathbf{I})}, \mathbf{H}_1^{(\mathbf{I})}$), ou seja, em $r = a$, as funções de Bessel devem ser finitas na origem, assim a função de Bessel apropriada é $J_n(\rho_1)$. Temos então a função geradora

$$\psi_n^1 = J_n(\rho_1) e^{i(n\phi + h_1 z)}. \quad (3.17)$$

Com $h_1 = h = -k \cos \zeta$, $\rho_1 = kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ e $k_1 = km$ onde m é o índice de refração relativo do cilindro em relação ao meio externo ($m = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 / \varepsilon \mu}$). As expressões correspondentes para o campo elétrico $\mathbf{E}_1^{(\mathbf{I})}$ e magnético $\mathbf{H}_1^{(\mathbf{I})}$ internos ao cilindro são,

$$\mathbf{E}_1^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k_1) \left[d_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(1)} + c_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(1)} \right], \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_1^{(I)} = \frac{-ik_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k_1) \left[d_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(1)} + c_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(1)} \right], \quad (3.19)$$

onde $E_n(k_1) = \frac{r}{\rho_1} E_0(-i)^n$. Já para os campos elétricos e magnéticos espalhados ($\mathbf{E}_s^{(I)}, \mathbf{H}_s^{(I)}$), temos que a grandes distâncias em $r > a$ a função de Bessel apropriada para compor a função geradora, seja Henkel de primeiro tipo $H_n^{(1)}(\rho)$, logo:

$$\psi_n^{esp} = H_n^{(1)}(\rho) e^{i(n\phi + hz)}, \quad (3.20)$$

o que nos dá a expressão para os campos elétrico $\mathbf{E}_s^{(I)}$ e magnético $\mathbf{H}_s^{(I)}$, espalhados

$$\mathbf{E}_s^{(I)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \left[b_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(3)} + ia_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(3)} \right], \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H}_s^{(I)} = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \left[b_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(3)} + ia_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(3)} \right]. \quad (3.22)$$

Os índices (1) e (3) referem-se ao emprego das funções cilíndricas de Bessel J_n e de Hankel de primeiro tipo $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ na composição dos harmônicos vetoriais, respectivamente.

Caso II - Modo TE ($\mathbf{E}_i^{(II)} \perp xz$): De maneira análoga ao caso anterior, no Caso II temos que \hat{e}_y é o vetor de polarização do campo elétrico incidente

$$\mathbf{E}_i^{(II)} = E_0 \hat{e}_y e^{-ik(rs \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}. \quad (3.23)$$

Seguindo exatamente o mesmo procedimento encontramos,

$$\begin{aligned} B_n &= 0, \\ A_n &= -i \frac{E_0 (-i)^n}{k \sin \zeta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De modo que podemos escrever os campos elétrico e magnético incidente ($\mathbf{E}_i^{(II)}, \mathbf{H}_i^{(II)}$), internos ($\mathbf{E}_1^{(II)}, \mathbf{H}_1^{(II)}$) e espalhados ($\mathbf{E}_s^{(II)}, \mathbf{H}_s^{(II)}$) como,

$$\mathbf{E}_i^{(\text{II})} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \mathbf{M}_n^{(1)}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{H}_i^{(\text{II})} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \mathbf{N}_n^{(1)}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E}_1^{(\text{II})} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k_1) \left[d_n^{(II)} \mathbf{M}_n^{(1)} + c_n^{(II)} \mathbf{N}_n^{(1)} \right], \quad (3.27)$$

$$\mathbf{H}_1^{(\text{II})} = \frac{-k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k_1) \left[d_n^{(II)} \mathbf{N}_n^{(1)} + c_n^{(II)} \mathbf{M}_n^{(1)} \right], \quad (3.28)$$

$$\mathbf{E}_s^{(\text{II})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \left[ia_n^{(II)} \mathbf{M}_n^{(3)} + b_n^{(II)} \mathbf{N}_n^{(3)} \right], \quad (3.29)$$

$$\mathbf{H}_s^{(\text{II})} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(k) \left[a_n^{(II)} \mathbf{N}_n^{(3)} - ib_n^{(II)} \mathbf{M}_n^{(3)} \right]. \quad (3.30)$$

Que são exatamente as expressões encontradas nas referências [15, 25]. Os coeficientes de Lorentz-Mie a_n, b_n, c_n e d_n para os dois casos são dados por meio da aplicação das condições de contorno na interface de separação entre os meios, em $r = a$ (que iremos encontrar na seção seguinte). Tendo em mãos os coeficientes das expansões podemos escrever os campos eletromagnéticos (incidente, interno e espalhado) de maneira explícita em seus componentes em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Este desenvolvimento encontra-se no Apêndice C.

3.2 COEFICIENTES DE LORENZ-MIE

Para resolvermos o problema de espalhamento impomos as condições de contorno na interface de separação (em $r = a$) entre o meio interno (ε_1, μ_1) e externo (ε, μ) ao cilindro determinando as incógnitas do problema, temos que as condições de contorno consistem na continuidade dos componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético na superfície do cilindro de modo que possam ser expressas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \text{Em } r = a, \\ & (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{e}_r = 0, \\ & (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{e}_r = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Estas condições de contorno contribuem com dois sistema (um sistema de equação para cada caso estudado) de quatro equações lineares algébricas, com os coeficientes a_n, b_n, c_n e d_n . Todo o desenvolvimento para a construção destes sistemas de equações encontra-se no Apêndice C.3.

Primeiro, vamos escrever explicitamente as componentes (r, ϕ, z) dos campos elétricos (incidente, espalhado e interno ao cilindro), de modo que esta possa satisfazer a

primeira condição de contorno, em seguida fazemos o mesmo para o campo magnético, impondo a segunda condição de contorno. Isto tudo para o primeiro caso, Modo TM. Onde obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} im\eta\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\eta\eta \cos \zeta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\eta) + m\eta\xi d_n^{(I)} J_n'(\eta) = -m\eta\eta \cos \zeta J_n(\xi) \\ m\xi b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \eta c_n^{(I)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi) \\ im\eta\eta \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi\eta b_n^{(I)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) = -m\eta\xi J_n'(\xi) \\ im\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(I)} J_n(\eta) = 0. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Sendo $\xi = x \sin \zeta$, $\eta = x\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ e $x = ka$, que é o parâmetro de tamanho.

A referência [1] trata do caso não magnético onde $\mu = \mu_1$, já nesta dissertação de mestrado, como estamos tratando de um caso mais geral, em nossas contas temos o termo $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu\varepsilon_1/\mu_1\varepsilon}$ referente a impedância relativa entre o cilindro e o meio externo, que no limite do caso não magnético se torna exatamente as expressões encontradas em [1].

Agora, semelhantemente empregando as condições de contorno 3.31 para os campos elétrico e magnético, para o segundo caso, Modo TE, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\eta\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) + im\eta\eta \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\eta) + m\eta\xi d_n^{(II)} J_n'(\eta) = m\eta\xi J_n'(\xi) \\ m\xi b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i\eta c_n^{(II)} J_n(\eta) = 0 \\ m\eta\eta \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) + im\xi\eta b_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(II)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\eta\eta \cos \zeta J_n(\xi) \\ m\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi). \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Estamos interessados em resolver cada um destes sistemas 3.32, 3.33 (o processo de solução para cada sistema se encontram no apêndice C.4) para os coeficientes: do caso TM $a_n^{(I)}$, $b_n^{(I)}$, $c_n^{(I)}$, $d_n^{(I)}$ e do caso TE $a_n^{(II)}$, $b_n^{(II)}$, $c_n^{(II)}$, $d_n^{(II)}$.

Resolvendo o sistema de Eqs.3.32, obtemos os coeficientes do modo TM (veja o apêndice C.4),

$$a_n^{(I)} = \frac{\mathcal{V}_n \mathcal{C}_n - \mathcal{D}_n \mathcal{B}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (3.34)$$

$$b_n^{(I)} = \frac{\mathcal{W}_n \mathcal{B}_n + i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (3.35)$$

$$c_n^{(I)} = \frac{-2im\xi \mathcal{W}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (3.36)$$

$$d_n^{(I)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi \mathcal{L} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}. \quad (3.37)$$

Analogamente, para o modo TE, resolvendo o sistema de Eqs.3.33 obtemos,

$$a_n^{(II)} = -\frac{\mathcal{A}_n \mathcal{V}_n - i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (3.38)$$

$$b_n^{(II)} = -i \frac{\mathcal{D}_n \mathcal{A}_n + i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (3.39)$$

$$c_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (3.40)$$

$$d_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{V}_n}{\pi \mathcal{L} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}. \quad (3.41)$$

Para o caso geral, de incidência oblíqua, no intuito de simplificarmos a notação, definimos as seguintes funções na interface de separação entre os meios, quando $r = a$,

$$\mathcal{A}_n = i\xi \left[\frac{m}{\mathcal{L}} \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi) \right], \quad (3.42)$$

$$\mathcal{B}_n = \xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi) \right], \quad (3.43)$$

$$\mathcal{C}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (3.44)$$

$$\mathcal{D}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (3.45)$$

$$\mathcal{V}_n = \xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) \right], \quad (3.46)$$

$$\mathcal{W}_n = i\xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) - \frac{m}{\mathcal{L}} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]. \quad (3.47)$$

A resolução dos dois sistemas de equações é mais complicado do que parece. No espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro com um ângulo de incidência qualquer não somos capazes de desacoplarmos os coeficientes em apenas dois sistemas de equações com duas incógnitas, afim de simplificarmos nossas contas. Esta situação acontece apenas no caso particular de incidência normal, quando $\zeta = 90^\circ$, o que nos dá um conjunto de equações semelhante ao caso do espalhamento por uma esfera, o que torna possível

o uso da teoria de Lorenz-Mie. Ou seja, no caso em que a onda eletromagnética ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) incide normalmente ao eixo cilindro, temos

$$a_n^{(I)} = b_n^{(II)} = 0, \quad (3.48)$$

$$d_n^{(I)} = c_n^{(II)} = 0. \quad (3.49)$$

Assim como,

$$a_n^{(II)} = a_n = \frac{\mathcal{L} J_n'(x) J_n(mx) - J_n(x) J_n'(mx)}{\mathcal{L} H_n^{(1)'}(x) J_n(mx) - H_n^{(1)}(x) J_n'(mx)}, \quad (3.50)$$

$$b_n^{(I)} = b_n = \frac{J_n'(x) J_n(mx) - \mathcal{L} J_n(x) J_n'(mx)}{H_n^{(1)'}(x) J_n(mx) - \mathcal{L} H_n^{(1)}(x) J_n'(mx)}, \quad (3.51)$$

$$c_n^{(I)} = c_n = \frac{-2i}{\pi x [\mathcal{L} H_n^{(1)}(x) J_n'(mx) - H_n^{(1)'}(x) J_n(mx)]}, \quad (3.52)$$

$$d_n^{(II)} = d_n = \frac{2i}{\pi x [\mathcal{L} H_n^{(1)'}(x) J_n(mx) - H_n^{(1)}(x) J_n'(mx)]}, \quad (3.53)$$

onde usamos o Wronskiano

$$H_n^{(1)'}(x) J_n(x) - J_n'(x) H_n^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}. \quad (3.54)$$

Para o caso de incidência normal percebe-se que os coeficientes a_n e b_n são análogos ao da teoria de espalhamento de Lorenz-Mie¹. Fazendo as seguintes substituições: $J_n \rightarrow \Psi_n$ e $H_n^{(1)} \rightarrow \xi_n$. Assim como para os coeficientes c_n e d_n sem a simplificação do Wronskiano, a não ser pelo fato de que temos um fator m nos denominadores para o caso da esfera. É importante verificarmos estas observações, tendo em vista que o problema da esfera é mais simples de se resolver, podemos usar argumentos semelhantes para conseguirmos resolver o problema do espalhamento por um cilindro sob incidência normal [25].

¹ Coeficientes de Lorenz-Mie para a esfera:

$$a_n = \frac{\mathcal{L} \Psi_n(mx) \Psi_n'(x) - \Psi_n(x) \Psi_n'(mx)}{\mathcal{L} \Psi_n(mx) \xi_n'(x) - \xi_n(x) \Psi_n'(mx)}$$

$$b_n = \frac{\Psi_n(mx) \Psi_n'(x) - \mathcal{L} \Psi_n(x) \Psi_n'(mx)}{\Psi_n(mx) \xi_n'(x) - \mathcal{L} \xi_n(x) \Psi_n'(mx)}$$

$$c_n = \frac{mi}{\Psi_n(mx) \xi_n'(x) - \mathcal{L} \xi_n(x) \Psi_n'(mx)}$$

$$d_n = \frac{mi}{\mathcal{L} \Psi_n(mx) \xi_n'(x) - \xi_n(x) \Psi_n'(mx)}$$

Através das relações $Z_{-n} = (-1)^n Z_n$ (onde Z_n é qualquer função de Bessel), obtemos as relações de paridade.

Para o primeiro caso, Caso TM,

$$a_{-n}^{(I)} = -a_n^{(I)}, \quad (3.55)$$

$$b_{-n}^{(I)} = b_n^{(I)}, \quad (3.56)$$

$$c_{-n}^{(I)} = c_n^{(I)}, \quad (3.57)$$

$$d_{-n}^{(I)} = -d_n^{(I)}. \quad (3.58)$$

$$(3.59)$$

Assim como para o segundo caso, Caso TE,

$$a_{-n}^{(II)} = a_n^{(II)}, \quad (3.60)$$

$$b_{-n}^{(II)} = -b_n^{(II)}, \quad (3.61)$$

$$c_{-n}^{(II)} = -c_n^{(II)}, \quad (3.62)$$

$$d_{-n}^{(II)} = d_n^{(II)}. \quad (3.63)$$

$$(3.64)$$

De modo consequente, em $n = 0$ temos $a_n^{(I)} = d_n^{(I)} = b_n^{(II)} = c_n^{(II)} = 0$, onde essas propriedades são usadas para encontrarmos as expressões explícitas para os coeficientes dos campos eletromagnéticos no Apêndice C.1 e C.2.

A cargo de curiosidade apresentamos algumas relações de igualdade das funções 3.42 a 3.46,

$$H_n(\xi)\mathcal{C}_n = J_n(\xi)\mathcal{D}_n, \quad (3.65)$$

$$H_n(\xi)\mathcal{A}_n + J_n(\xi)\mathcal{W}_n = -2\eta \frac{J_n(\eta)}{\pi}, \quad (3.66)$$

$$H_n(\xi)\mathcal{V}_n + J_n(\xi)\mathcal{B}_n = -2i\eta \frac{J_n(\eta)}{\pi}, \quad (3.67)$$

$$i[\mathcal{D}_n\mathcal{A}_n + \mathcal{C}_n\mathcal{W}] = [\mathcal{C}_n\mathcal{V}_n - \mathcal{B}_n\mathcal{D}_n]. \quad (3.68)$$

3.3 DETERMINAÇÃO DA INTENSIDADE

Tendo calculado as expressões dos campos elétrico e magnético (incidente, internos e espalhado) em termo dos harmônicos cilíndricos vetoriais \mathbf{M} (Equação 3.5) e \mathbf{N} (Equação

3.6), e dos coeficientes de Lorenz-Mie (Equação 3.34 a 3.41), seria interessante calcularmos uma grandeza que pudesse ser medida em laboratório. Como se sabe a intensidade é dada pelo modulo do vetor de Poynting, vamos nos basear no que discutimos na seção 2.1.3, para encontramos o vetor de Poynting e assim termos uma expressão para intensidade.

No Apêndice C, derivamos as expressões dos campos elétricos e magnéticos (incidente, internos e espalhado) para cada modos (*TM* e *TE*). Utilizando o conjunto de equações C.4 para o campo espalhado (para o caso I), precisamos escrever estes campos em uma expansão assintótica, para isso introduzimos a expansão assintótica para as funções de Hankel de primeira espécie [1, 15],

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} (-i)^n e^{-i\pi/4}. \quad (3.69)$$

O campo elétrico espalhado é escrito em termos das funções de Hankel de primeira espécie e suas derivadas. Fazendo a substituição da equação 3.69 em C.4, temos:

Campo elétrico espalhado.

- Componente r ,

$$\mathbf{E}_{sr}^{(I)} = \gamma e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} \left[i \cos \zeta b_0^{(I)} \frac{2i\rho - 1}{2\rho} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(i \cos \zeta b_n^{(I)} \left(\frac{2i\rho - 1}{2\rho} \right) + \frac{n}{\rho} a_n^{(I)} \right) (-i)^n \right] \hat{e}_r. \quad (3.70)$$

- Componente ϕ ,

$$\mathbf{E}_{s\phi}^{(I)} = -2\gamma e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(a_n^{(I)} \left(\frac{2i\rho - 1}{2\rho} \right) + i \cos \zeta \frac{n}{\rho} b_n^{(I)} \right) (-i)^n \hat{e}_\phi. \quad (3.71)$$

- Componente z ,

$$\mathbf{E}_{sz}^{(I)} = -\gamma \sin \zeta e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} \left[b_0^{(I)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) b_n^{(I)} (-i)^n \right] \hat{e}_z. \quad (3.72)$$

Ou seja, o campo elétrico total (para o caso I) espalhado, a grandes distâncias do cilindro ($\rho = kr \sin \zeta \gg 1$) é dado por

$$\mathbf{E}_s^{(I)} = E_{sr}^{(I)} \hat{e}_r + E_{s\phi}^{(I)} \hat{e}_\phi + E_{sz}^{(I)} \hat{e}_z, \quad (3.73)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_s^{(I)} &= E_0 e^{3i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sin \zeta}} e^{ik(r \sin \zeta - z \cos \zeta)} \\
&\quad \times \left\{ b_0^{(I)} (\cos \zeta \hat{e}_r + \sin \zeta \hat{e}_z) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left[\Phi_n(\phi) b_n^{(I)} (\cos \zeta \hat{e}_r + \sin \zeta \hat{e}_z) + i \Theta_n(\phi) a_n^{(I)} \hat{e}_\phi \right] \right\}, \\
\mathbf{E}_s^{(I)} &= E_0 e^{3i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sin \zeta}} e^{ik(r \sin \zeta - z \cos \zeta)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\Theta} \left[a_n^{(I)} \hat{e}_\phi + b_n^{(I)} (\cos \zeta \hat{e}_r + \sin \zeta \hat{e}_z) \right].
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Esta é exatamente a expressão encontrada em [1]. Para o modo TE basta substituímos $a_n^{(I)} = -a_n^{(II)}$ e $b_n^{(I)} = -b_n^{(II)}$.

Na seção 2.1.3, derivamos uma expressão geral para a matriz de espalhamento de amplitude para uma partícula arbitrária. Podemos expressar o campo espalhados por esse cilindro, resolvendo os campos incidentes e espalhados em componentes paralelos e perpendiculares aos planos determinados pelo eixo do cilindro (\hat{e}_z), veja a Figura 7. Portanto, escrevemos o campo incidente como,

$$\mathbf{E}_i^{(I)} = \left(E_{\parallel i} \hat{e}_{\parallel i} + E_{\perp i} \hat{e}_{\perp i} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \tag{3.75}$$

onde, $\hat{e}_{\parallel i} = \sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x$, $\hat{e}_i = -\hat{e}_y$, com $\hat{e}_{\perp i} \times \hat{e}_{\parallel i} = \hat{e}_i$. As componentes $E_{\parallel i}$ e $E_{\perp i}$ são exatamente as equações 3.10 e 3.23, respectivamente, para os modos TM e TE .

O campo espalhado é dado por

$$\mathbf{E}_s^{(I)} = \left(E_{\parallel s} \hat{e}_{\parallel s} + E_{\perp s} \hat{e}_s \right), \tag{3.76}$$

onde, $\hat{e}_{\parallel s} = \cos \zeta \hat{e}_r + \sin \zeta \hat{e}_z$, $\hat{e}_s = \hat{e}_\phi$, com $\hat{e}_s \times \hat{e}_{\parallel s} = \hat{e}_s$.

Deste modo, escrevendo em termos da matriz de espalhamento,

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = e^{3i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sin \zeta}} e^{ik(r \sin \zeta - z \cos \zeta)} \begin{pmatrix} T_1 & T_4 \\ T_3 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \tag{3.77}$$

Comparando as expressões 3.75 e 3.76 com 3.77, encontramos os termos da matriz de espalhamento,

$$T_1 = b_0^{(I)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(I)} \cos n\Theta, \quad (3.78)$$

$$T_2 = a_0^{(II)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(II)} \cos n\Theta, \quad (3.79)$$

$$T_3 = a_0^{(I)} - 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(I)} \sin n\Theta, \quad (3.80)$$

$$T_4 = b_0^{(II)} - 2i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(II)} \sin n\Theta. \quad (3.81)$$

Sendo que $\Theta = \pi - \phi$, onde este representa o semicírculo localizado a frente do cilindro. Para incidência normal ao eixo do cilindro ($\zeta = 90^\circ$), $T_3 = T_4 = 0$, pois $a_n^{(I)} = b_n^{(II)} = 0$. Desta maneira, somos capazes de calcular o vetor de Poynting 2.61 e respectivamente a intensidade captada a longas distâncias do cilindro.

$$I(r) = |\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle| = \frac{n}{2\mu c} (|E_{\parallel s}|^2 + |E_{\perp s}|^2). \quad (3.82)$$

Lembrando que sempre podemos separar os campos em componentes paralelo e perpendicular. Desta maneira, substituindo a equação 3.77 em 3.82,

$$I(r) = \frac{n}{2\mu c} |E_0|^2 \frac{2}{\pi k r} (|T_1|^2 + |T_2|^2), \quad (3.83)$$

onde $I_0 = (n/2\mu c)|E_0|^2$ é a intensidade da radiação incidente (W/m^2) e I é a intensidade (W/m^2) da radiação espalhada na direção ϕ a uma grande distância r do eixo do cilindro. Para um cilindro infinito a radiação diverge apenas em uma direção (para frente), I diminui com $1/r$, não com $1/r^2$ [1, 21].

Desta maneira, podemos escrever a intensidade para a polarização TM , como,

$$I(\phi, x, m) = \frac{2}{\pi k r} \left| b_0^{(I)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(I)} \cos n\phi \right|^2 I_0. \quad (3.84)$$

Já para a polarização TE , basta trocar $b_n^{(I)}$ por $a_n^{(II)}$.

Antes de darmos início às aplicações da teoria que estudamos, no capítulo seguinte, iremos fazer uma breve introdução à antenas cornetas, que é o fonte em que usamos para propagar radiação na faixa de micro-ondas no espaço aberto.

4 ANTENA CORNETA

Para trabalhar com a teoria de espalhamento na faixa de micro-ondas é imprescindível ter um transmissor de micro-ondas. Para isto no laboratório de Física Aplicada da UFJF [34], foi desenvolvido um sistema de transmissão e recepção de micro-ondas na faixa de 8,2GHz. Passaremos a apresentar alguns pontos mais relevantes sobre a teoria e a parte experimental. Para mais detalhes veja a referência [30].

Para o desenvolvimento de um transmissor de micro-ondas é importante ter uma antena e um guia de onda. A proposta é desenvolver um guia de onda, onde se determina a localização correta do excitador, no caso uma antena do tipo dipolo [30]. Este excitador é basicamente um diodo Gunn, que é um diodo que quando se passa uma corrente ele produz uma oscilação na região de micro-ondas. Assim, o primeiro passo é desenvolver um guia de onda. Podemos partir da expressão geral de um guia de onda e em seguida particularizar para um guia de onda retangular. Seguindo a referência [30], podemos escrever o seguinte resumo:

MODO TE.

$$E_z = 0.$$

$$\mathbf{E}_T = -i \frac{kc}{k_T^2} \hat{z} \times \nabla B_z, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}_T = \frac{k_z}{kc} \hat{z} \times \mathbf{E}_T. \quad (4.2)$$

MODO TM.

$$B_z = 0.$$

$$\mathbf{E}_T = i \frac{k_z}{k_T^2} \nabla E_z, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}_T = \frac{k}{k_z c} \hat{z} \times \mathbf{E}_T. \quad (4.4)$$

Onde estamos admitindo que a onda está se propagando na direção z , E_T é o campo transversal e E_z o campo longitudinal. O mesmo vale para o campo magnético H . Esta notação também vale para os vetores de onda, ou seja, k_T é o vetor de onda transversal e k_z o vetor de onda longitudinal, valendo a seguinte relação:

$$k_{zn} = \pm \sqrt{k_{Tn}^2 - k^2}. \quad (4.5)$$

As equações acima são exatamente as equações encontradas na referência [31] p. 225. Observe que para encontrar os campos transversais basta conhecer o campo longitudinal E_z . É possível mostrar que o campo longitudinal satisfaz a equação de onda escalar, ou seja,

$$\nabla^2 + k_T^2 \begin{bmatrix} E_z \\ B_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

A equação acima é a equação de Helmholtz para os campos longitudinais. Com as expressões acima é possível particularizar para o caso de um guia retangular.

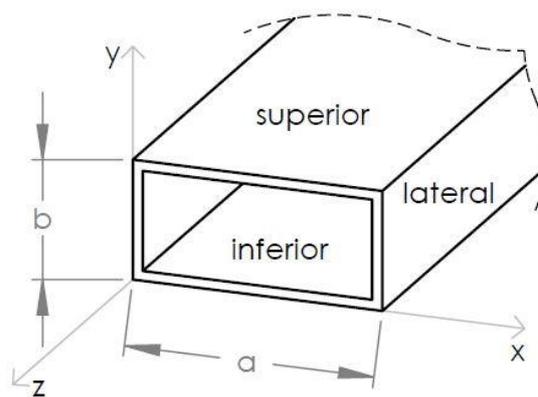
Escolheu-se um guia de onda retangular com as dimensões descritas conforme a Figura 8 com $a > b$ e utilizando as equações 4.7 e 4.8, pode-se escrever o campo elétrico transversal total, para os dois modos, ou seja;

$$\mathbf{E}_T = -i \frac{kc\mu}{k_T^2} \hat{z} \times \nabla H_z + i \frac{k_z}{k_T^2}. \quad (4.7)$$

De forma semelhante, para o campo magnético (equações 4.2 e 4.4), obtém-se:

$$\mathbf{H}_T = i \frac{k}{ck_T^2 \mu} \hat{z} \times \nabla H_z + i \frac{k_z \mu}{k_T^2} \nabla H_z. \quad (4.8)$$

Figura 8 – Guia de onda retangular com dimensões arbitrárias.



Referencia: [30].

Escolheu-se um guia de onda retangular com as dimensões descritas conforme a Figura 8 com $a > b$. Utilizando as equações acima em coordenadas cartesianas é possível encontrar os campos elétricos e magnéticos com as devidas condições de contorno para cada modo. Para o caso TE, temos [51],

$$E_{xmn} = -iA_{mn} \frac{kc}{k_T^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (4.9)$$

$$E_{ymn} = iA_{mn} \frac{kc}{k_T^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (4.10)$$

$$H_{xmn} = -iA_{mn} \frac{k_z}{k_T^2 \mu} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (4.11)$$

$$H_{ymn} = -iA_{mn} \frac{k_z}{k_T^2 \mu} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.12)$$

com $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e A_{mn} uma constante a ser determinada e possui unidade de campo magnético. É preciso lembrar que $k_T^2 = k_x^2 + k_y^2$, ou melhor,

$$k_{Tmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_{mn}} = \frac{\omega_{mn}}{c}, \quad (4.13)$$

e conseqüentemente,

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]}. \quad (4.14)$$

Note que a expressão $k_{Tmn} = \frac{2\pi}{\lambda_{mn}}$ permite determinar o comprimento de onda máximo, ou seja, o modo dominante [51].

Fazendo uma análise detalhada dos modos é possível verificar que o modo de mais fácil construção seria os modos TE_{0n} e TE_{m0} , com as seguintes expressões respectivamente:

$$E_x = H_0 \left(\frac{ikc\mu}{k_T^2}\right) \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{ik_z z}, \quad (4.15)$$

$$E_y = H_0 \left(\frac{ikc\mu}{k_T^2}\right) \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{ik_z z}. \quad (4.16)$$

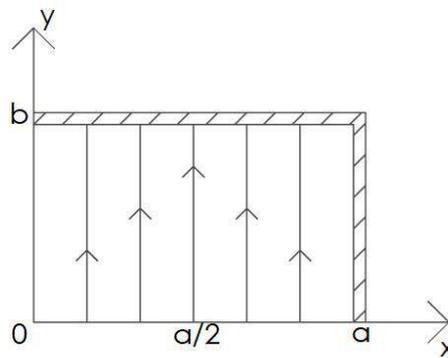
Escolhendo o modo TE_{10} e com as equações acima é possível encontrar campo elétrico dentro do guia. As Figuras 9 e 10 mostram esta distribuição do campo.

Assim, para o modo TE_{10} o comprimento de onda longitudinal é dado por:

$$\lambda_{z10} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (4.17)$$

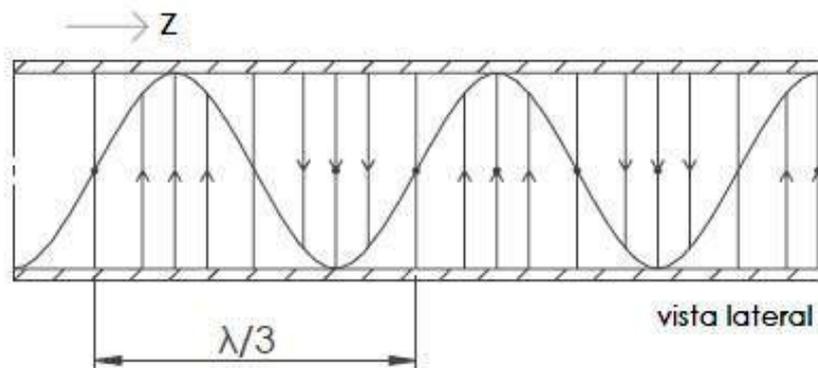
O excitador que utilizamos é um diodo Gunn [30], que trabalha com uma frequência centrada em $f = 8,2 \text{ GHz}$, isto corresponde a um comprimento de onda $\lambda = 3,66 \text{ cm}$. Como $\lambda_x = 2a > \lambda = 3,66 \text{ cm}$, isso nos leva a ter $a > 1,83 \text{ cm}$. Assim, escolhendo $a = 2,26 \text{ cm}$, por questões construtivas do guia e usando a equação acima, o comprimento

Figura 9 – Distribuição do campo elétrico associado ao modo TE_{10} na seção reta do guia.



Referencia: [30].

Figura 10 – Distribuição do campo elétrico associado ao modo TE_{10} na seção longitudinal do guia.

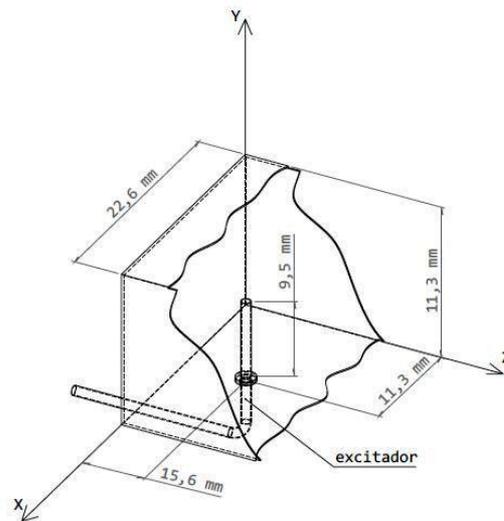


Referencia: [30].

longitudinal será $\lambda_z = 6,23 \text{ cm}$. A frequência de corte será $f_c = c/2a = 6,63 \text{ GHz}$. Fazendo $b = a/2 = 1,13 \text{ cm}$, isto permite determinar o tamanho do guia retangular, ou seja, o guia será feito de alumínio com: $x = 22,6 \text{ mm}$, $y = 11,3 \text{ mm}$ e com um comprimento próximo de $z = \lambda_z = 66,3 \text{ mm}$, como ilustra a Figura 11. Na realidade o comprimento do guia longitudinal será ajustado por uma cavidade que servirá de ajuste fino. A localização do excitador deve estar posicionada na região de maior máximo do comprimento de onda transversal e longitudinal. Na parte transversal será $x_e = \lambda_x/4 = a/2 = 11,3 \text{ mm}$ e na posição longitudinal $z_e \simeq \lambda_z/4 = 15,6 \text{ mm}$. O motivo de ser um valor aproximado é que existem vários fatores que podem entrar neste cálculo, principalmente ao tentar acoplar o guia a uma antena do tipo corneta. Para realizar o casamento de impedância entre o guia e a antena, utiliza-se uma parede móvel, que pode ser ajustada até se conseguir o casamento correto, gerando um valor aproximado para o valor de z_e . Com relação à altura da antena (L_e) é evidente que deve ser menor que b , mas seguindo a referência [32],

dados empíricos mostram que $L_e \simeq 0,14P$, onde P é o perímetro da seção reta do guia, no caso, $L_e \simeq 9,5 \text{ mm}$. Este valor também precisa ser ajustado conforme a impedância da cavidade. A Figura 11 mostra um desenho geral do guia de onda para o modo TE_{10} já com o posicionamento do excitador. No desenho a parede à esquerda da Figura 11 é móvel e isto permite encontrar a posição que possa gerar a maior intensidade de propagação do campo eletromagnético.

Figura 11 – Posição que deve ficar o diodo Gunn no guia.



Referencia: [30].

Sobre as perdas de energia na propagação da onda no guia é possível ser calculada. Os cálculos podem ser encontrados na referência [30] e o resultado é que para o caso do guia ser feito de alumínio (condutividade elétrica do alumínio $\sigma = 3,4 \times 10^7 S/m$) e com comprimento de $6,6 \text{ cm}$ a perda fica na ordem de 1%.

O próximo passo é acoplar ao guia a uma antena do tipo corneta. Os cálculos envolvendo antena do tipo corneta podem ser encontrados na referência [33]. Existem várias formas de corneta, mas será considerado um formato semelhante ao que está na Figura 12. Partindo das equações de Maxwell, sem o termo de fonte, em coordenadas cilíndricas, com a parte temporal do tipo $e^{-i\omega t}$ e fazendo a separação para cada componente, encontramos as seguintes equações [30]:

$$i\omega\mu\rho H_1 = \frac{\partial E_3}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho E_2)}{\partial y}, \quad (4.18)$$

$$-i\omega\varepsilon\rho E_1 = \frac{\partial H_3}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho H_2)}{\partial y}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_3}{\partial \rho} = i\omega\mu H_2, \quad (4.20)$$

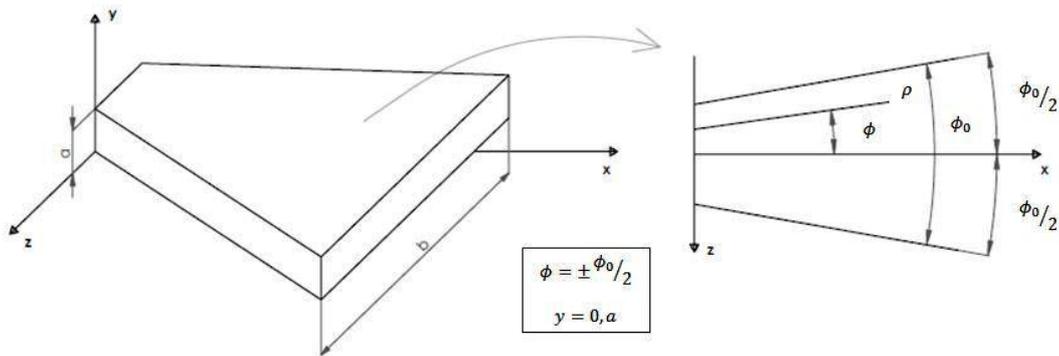
$$\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_3}{\partial \rho} = i\omega\varepsilon E_2, \quad (4.21)$$

$$i\omega\mu\rho H_3 = \frac{\partial(\rho E_3)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_1}{\partial \phi}, \quad (4.22)$$

$$-i\omega\varepsilon\rho E_3 = \frac{\partial(\rho H_3)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \quad (4.23)$$

onde as componentes (E_1, E_2, E_3) e (H_1, H_2, H_3) são funções somente da parte espacial (ρ, ϕ, z) . Estas equações podem ser resolvidas com as devidas condições de contorno e, portanto, as soluções dos campos são [30]:

Figura 12 – O desenho mostra a corneta com seus eixos de simetria cilíndrica.



Referencia: [30].

$$E_y = B \cos(m\nu\phi) H_{m\nu}^{(1)}(2\pi\rho/\lambda), \quad (4.24)$$

$$H_\rho = B \frac{m\nu}{i\omega\mu\rho} \sin(m\nu\phi) H_{m\nu}^{(1)}(2\pi\rho/\lambda), \quad (4.25)$$

$$H_\phi = -Bi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos(m\nu\phi) H_{m\nu}^{(1)}(2\pi\rho/\lambda), \quad (4.26)$$

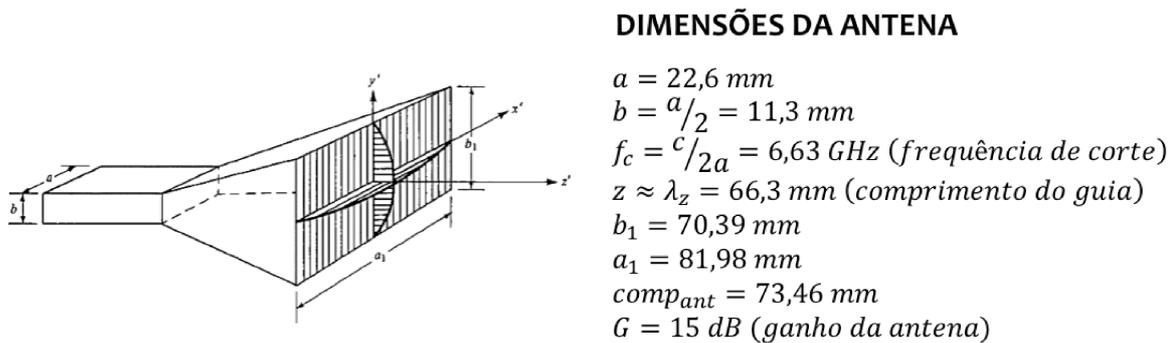
onde (\prime) é a derivada com relação ao argumento da função de Hankel e $m\nu = \frac{m\pi}{\phi_0}$, com m inteiro. Com os valores dos campos é possível encontrar a potência irradiada pelo cone. A expressão para a potência é:

$$P_\rho^{real} = \|B\|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\phi_0 a \rho}{4} [J_{m\nu}(k\rho) N'_{m\nu}(k\rho) - N_{m\nu}(k\rho) J'_{m\nu}(k\rho)] = \|B\|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\phi_0 a \lambda}{4\pi^2}, \quad (4.27)$$

onde identifica-se que, a expressão entre parêntese é justamente o Wronskiano de $J_{m\nu}$ e $N_{m\nu}$, referência [29].

Na Figura 13 é ilustrado as dimensões do guia de onda e da antena. Nota-se o posicionamento do excitador (diodo Gunn) na cavidade e o sistema para ajuste fino do comprimento da cavidade, muito importante para calibração do sistema de transmissão e recepção.

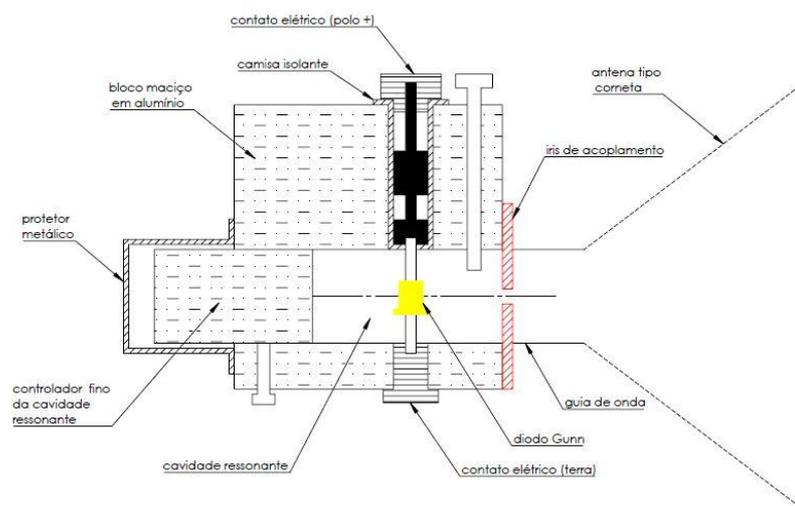
Figura 13 – Desenho do guia de onda acoplado a corneta com suas dimensões para sustentar uma frequência de 8,2GHz.



Referencia: [30].

O casamento de impedância entre o guia e a corneta é feita por um sistema RLC, conhecido como iris [30]. A Figura 14 mostra a proposta de construção de todo o sistema.

Figura 14 – Vista em corte do projeto do guia de onda e da corneta, ilustrando o acoplamento do excitador (diodo Gunn).



Referencia: [30].

Conforme descrição acima, foi construída um guia e uma corneta para transmitir uma frequência de 8,2GHz. A Figura 15 mostra o resultado da construção do guia já acoplado a corneta.

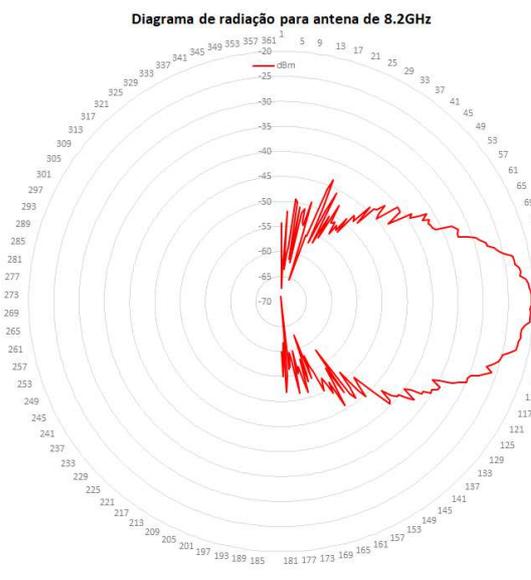
Figura 15 – A foto mostra o resultado da construção do guia já acoplado a corneta.



Referencia: [30].

Assim, com um transmissor de micro-ondas construído, iniciamos algumas medidas para verificar se há realmente uma radiação sendo propagada da corneta com frequência de $8,2\text{GHz}$. Uma das medidas é o diagrama de radiação horizontal da antenna, onde este pode ser visto na Figura 16. Para construirmos este diagrama de radiação, nós ligamos o excitador (diodo Gunn) da antenna corneta de $8,2\text{GHz}$, e a 85cm de distância da antenna corneta, nós temos uma antenna do tipo Yagi, onde esta capta o sinal e manda para um analisador de espectro. E assim nós variamos em 180° a frente da antenna corneta, de modo que possamos detectar todo sinal de intensidade que chega nesta região do espaço.

Figura 16 – Diagrama de radiação da antenna corneta de 8.2GHz , feita no Laboratório de Física Aplicada [34] a 85cm do detector.



Fonte: Autoral

A Figura 16, nos mostra em detalhes o diagrama de radiação produzido pela antena corneta fabricada no laboratório de Física Aplicada [34]. Nela podemos ver que a radiação produzida pela corneta de $8.2GHz$ possui uma distribuição de sinal bem simétrica, para uma distância de $85cm$ da antena receptora ligada ao analisador de espectro.

Na execução do experimento também utilizamos uma antena corneta já fabricada, que opera em $9.6GHz$ (Fig. 17), porém o extrator, foi fabricado por nós, no laboratório de Física Aplicada [34]. Esta antena, diferente da produzida no Laboratório de Física Aplicada, necessita de um gerador de RF para emanar micro-ondas pelo espaço aberto. Na Figura 17 é possível ver a antena corneta de $9.6GHz$ ligada ao gerador de RF.

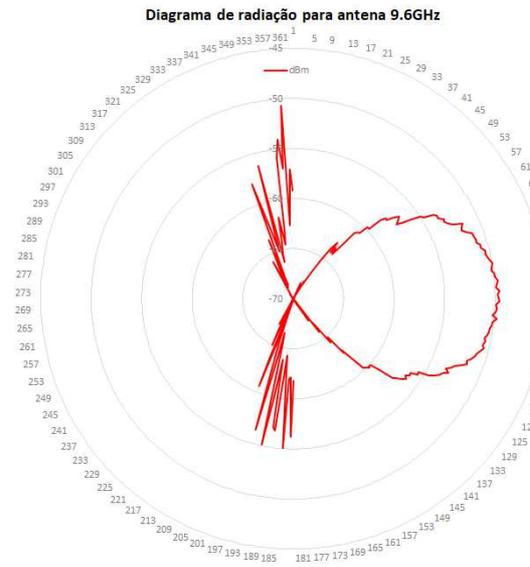
Figura 17 – Antena Corneta de $9.6GHz$, usada para a realização do experimento.



Fonte: Autoral

Assim como fizemos o diagrama de radiação da antena corneta de $8,2GHz$, também fizemos o diagrama de radiação da antena corneta (antena emissora) de $9.6GHz$ (Fig. 18), porém esta estava a uma distância de $1.73cm$ da antena receptora que é ligada ao analisador de espectro. A Figura 18, nos mostra a característica do sinal emitido pela antena corneta de $9.6GHz$, nele é possível ver que apesar de possuir alguns ruídos (em que estes podem ser atribuídos ao fato de que no laboratório temos a presença de muitos materiais de alumínio), seu diagrama de radiação possui uma simetria, e uma melhor resposta de sinal para longas distâncias.

Figura 18 – Diagrama de radiação da antena corneta a $1.73cm$ do detector.



Fonte: Autoral

Para a realização das medidas experimentais, optamos por usar a antena corneta de $9.6GHz$ já fabricada, pois a longas distâncias do analisador de espectro o diagrama de radiação desta antena apresentava uma melhor resposta.

É importante ressaltar que a escala dos gráficos de intensidade de radiação está em uma escala dBm , onde esta é apresentada com mais detalhes no Apêndice D.

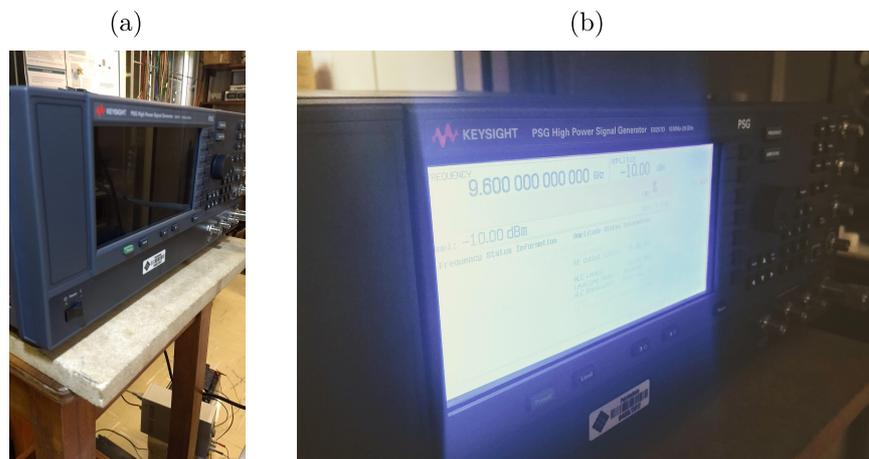
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentaremos o setup experimental tal como seu procedimento prático para a obtenção das medidas. Os resultados numéricos serão provenientes das equações exatas que calculamos analiticamente (Capítulo 3) para o espalhamento devido um cilindro infinito quando uma onda plana é incidente perpendicularmente ao eixo do cilindro. Todos os cálculos numéricos são feitos a partir de um código em Fortran seguindo as referências [1, 21]. Introduziremos o método FDTD (Finite Difference Time Domain), que será muito bom para comparação dos nossos resultados teóricos e experimental.

5.1 SETUP EXPERIMENTAL

No laboratório de Física Aplicada [34] da UFJF realizamos o teste experimental para medição de espalhamento de Micro-ondas por um cilindro infinito, a fim de desenvolvermos um novo método de medir as propriedades físicas (como sua permissividade magnética por exemplo) de diversos materiais. No Laboratório há disponibilidade de um gerador de micro-ondas da Keysight, PSG - High Power Signal Generator *E825710* (10MHz até 20GHz) Fig.19a onde geramos uma RF com 9.6GHz de frequência e $-10dBm$ de amplitude.

Figura 19 – Gerador de micro-ondas da Keysight, PSG - High Power Signal Generator *E825710* (10MHz até 20GHz).



Fonte: Autoral

Este sinal é emitido por uma antena corneta. Do outro lado da mesa, temos uma outra antena corneta receptora, onde esta capta o sinal e envia para um Analisador de espectro também da Keysight/Agilent, Handheld Spectrum Analyzer *N9344C* Fig. 20. O analisador está programado para operar em uma frequência central de 9.6GHz e tem como referência $-20dBm$ de Amplitude.

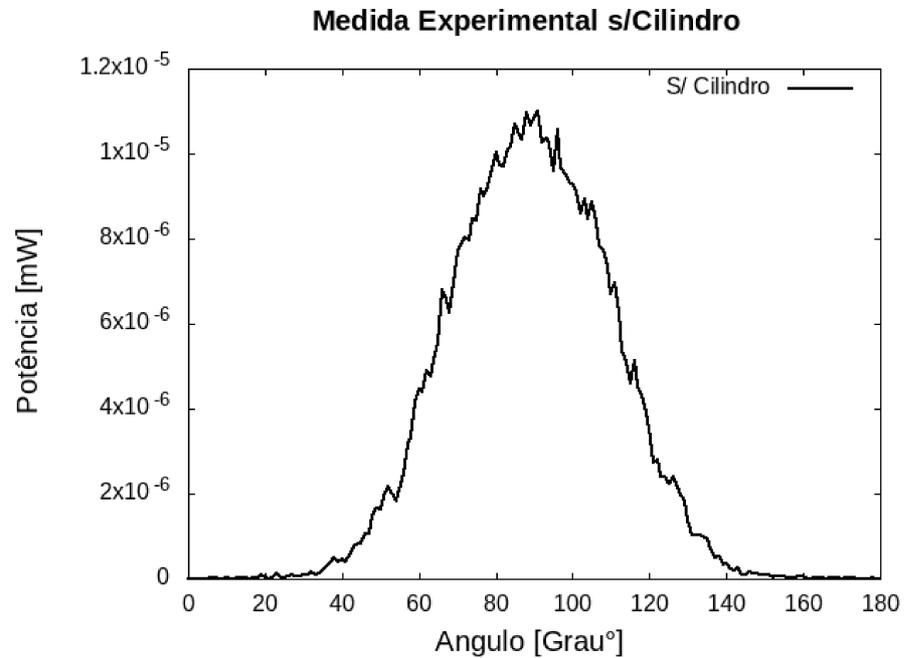
Figura 20 – Analisador de espectro também da Keysight/Agilent, Handheld Spectrum Analyzer N9344C



Fonte: Autoral

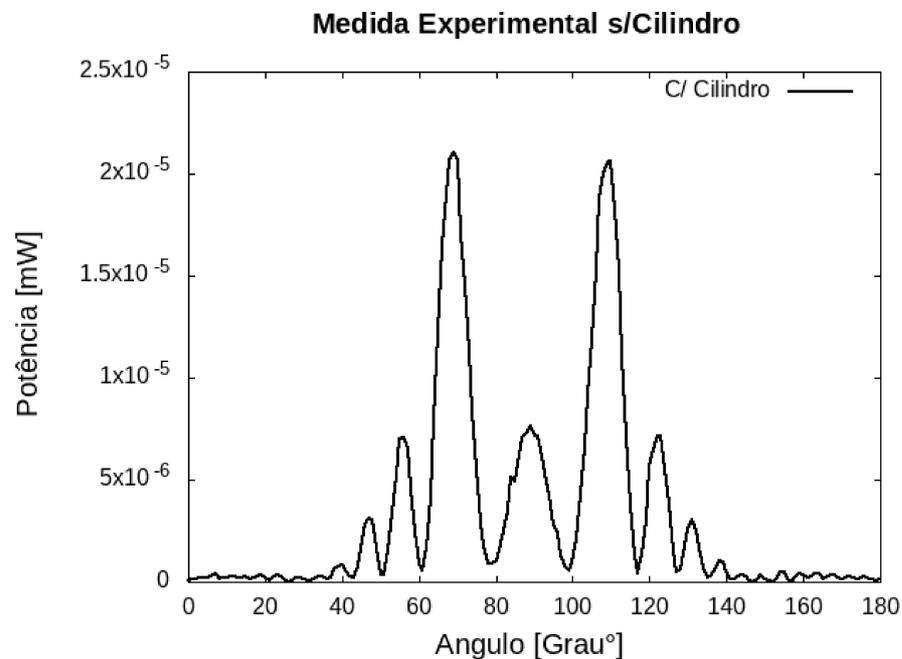
O experimento consiste em duas etapas. Inicialmente, é gerado uma frequência de saída 9.6GHz com -10dBm de amplitude, pelo gerador de RF o qual emite essas micro-ondas através da antena corneta emissora. Esta onda será propagada pelo espaço livre até a antena corneta receptora, que está localizada a 1.73cm de distância a frente da corneta emissora. A corneta receptora é móvel, e ela varre o espaço em um transferidor que vai de um ângulo $\phi = 0^\circ$ até $\phi = 180^\circ$, o sinal que chega na corneta receptora é coletado no analisador de espectro, onde está coleta é feita em ϕ de 1° em 1° da posição do transferidos. O analisador de espectro está programado para operar em uma frequência central de 9.6GHz com -20dBm como amplitude de referência. Assim temos uma variação de intensidade do sinal coletado em todo o espaço a frente. A Figura 23b, nos mostra este esquema experimental, enquanto que na Fig 21 é possível ver a característica do sinal obtido nesta primeira etapa do experimento.

Figura 21 – Curva da variação da intensidade descrita no texto acima para a primeira parte do experimento. O eixo vertical informa potência em mW enquanto que o eixo horizontal informa o ângulo de varredura do sistema de detecção. Medida realizada sem a presença do cilindro.



Na segunda etapa do experimento colocamos um cilindro maciço de Teflon com 3.5cm de diâmetro e 48.0cm de comprimento que está a 95.0cm de distância da corneta emissora e a 78cm da corneta receptora. Repetimos o mesmo procedimento, porém agora teremos o espalhamento do sinal devido o cilindro. Novamente, na Fig 22 podemos ver a característica do sinal coletado pelo analisador devido o espalhamento do cilindro.

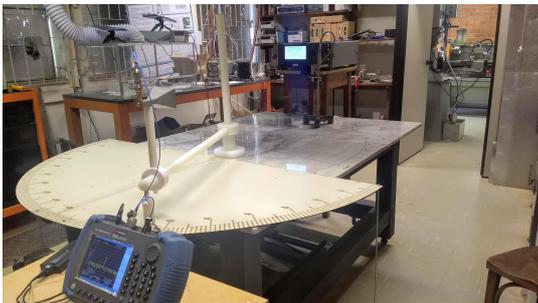
Figura 22 – Variação da Intensidade espalhada devido um cilindro maciço de Teflon, descrito na segunda etaoa do experimento. O eixo vertical informa potência em mW enquanto que o eixo horizontal informa o ângulo de varredura do sistema de detecção.



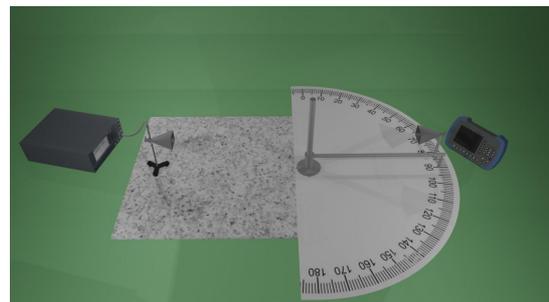
As imagens abaixo (Figura 23a e 23b) mostram o setup experimental montado.

Figura 23 – Série de medidas com o cilindro.

(a) Foto real do stap experimental.



(b) Esquemática do experimento.



Fonte: Autoral

Analisando a Figura 21, vemos que em $\phi = 90^\circ$ temos uma maior pico de intensidade, e esperávamos ter nesta região um frente de onda plana. Nas próximas seções discutiremos mais sobre esta característica do sinal obtido sem a presença do cilindro. Na Figura 22, vemos que o sinal espalhado pelo cilindro possui uma característica bem simétrica (espelhada) se compararmos o primeiro quadrantes que vai de $\phi = 0^\circ$ até $\phi = 90^\circ$ com o

segundo quadrante, que vai $\phi = 90^\circ$ até $\phi = 180^\circ$, por esta razão faremos nossas análises numéricas utilizando apenas a metade relacionada ao segundo quadrante. Feito isto, agora temos que analisar os dados.

5.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA INCIDÊNCIA NORMAL

Com a ajuda das referências [1, 21], desenvolvemos um programa para gerarmos os resultados numéricos provenientes das expressões teóricas exatas que calculamos ao longo desta dissertação. Para uma radiação com incidência normal ao eixo do cilindro, os coeficientes de espalhamento terão uma forma mais fácil. Porém, os coeficientes a_n e b_n das Eqs.3.53, ainda não estão escritos de uma forma computacionalmente adequada para os cálculos. Introduzimos a derivada logarítmica,

$$D_n(mx) = \frac{J'_n(mx)}{J_n(mx)}. \quad (5.1)$$

A derivada logarítmica satisfaz a seguinte relação de recorrência,

$$D_{n-1}(mx) = \frac{n-1}{mx} - \frac{1}{\frac{n}{mx} + D_n(mx)}, \quad (5.2)$$

e usando a relação de recorrência

$$Z'_n(x) = Z_{n-1}(x) - \frac{n}{x}Z_n(x), \quad (5.3)$$

onde Z_n é qualquer função de Bessel. Escrevemos os coeficientes de espalhamento como,

$$a_n = \frac{\left(\frac{D_n(mx)}{m} + \frac{n}{x}\right) J_n(x) - J_{n-1}(x)}{\left(\frac{D_n(mx)}{m} + \frac{n}{x}\right) H_n^{(1)}(x) - H_{n-1}^{(1)}(x)}, \quad (5.4)$$

$$b_n = \frac{\left(mD_n(mx) + \frac{n}{x}\right) J_n(x) - J_{n-1}(x)}{\left(mD_n(mx) + \frac{n}{x}\right) H_n^{(1)}(x) - H_{n-1}^{(1)}(x)}. \quad (5.5)$$

Contudo, os coeficientes 5.4 e 5.5 ainda não estão adequados para os cálculos, os índices para um programa em Fortran têm que ser obrigatoriamente números inteiros. Para isso vamos definir $G_n = D_{n-1}$ onde $(n = 1, 2, \dots)$. Cuja relação de recorrência seja,

$$G_{n-1}(mx) = \frac{n-2}{mx} - \frac{1}{\frac{n-1}{mx} + G_n(mx)}. \quad (5.6)$$

Usando a relação $Z_n = (-1)^n Z_n$, os coeficientes a_0 e b_0 podem ser escritos como,

$$a_0 = \frac{G_1(mx)BJ_1(x)/m + BJ_2(x)}{G_1(mx)BH_1(x)/m + BH_2(x)}, \quad (5.7)$$

$$b_0 = \frac{mG_1(mx)BJ_1(x) + BJ_2(x)}{mG_1(mx)BH_1(x) + BH_2(x)}. \quad (5.8)$$

onde definimos $BJ_n = J_{n-1}$ e $BH_n = H_{n-1}^{(1)}$ para $n \neq 0$

$$a_n = \frac{[G_{n+1}(mx)/m + n/x]BJ_{n+1}(x) - BJ_n(x)}{[G_{n+1}(mx)/m + n/x]BH_{n+1}(x) - BH_n(x)}, \quad (5.9)$$

$$b_n = \frac{[mG_{n+1}(mx) + n/x]BJ_{n+1}(x) - BJ_n(x)}{[mG_{n+1}(mx) + n/x]BH_{n+1}(x) - BH_n(x)}. \quad (5.10)$$

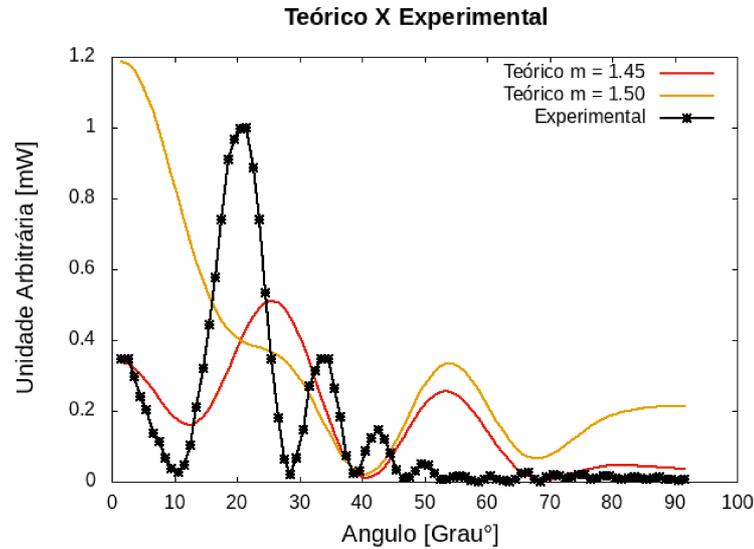
Os cálculos numéricos para as funções de Bessel são um procedimento padrão para os cálculos de espalhamento. Cálculo das funções de Bessel (J_n e Y_n) apresentam mais problemas computacionais do que a derivada logarítmica. Algoritmos para estes cálculos foram publicados nas referências [1, 35, 36] e adotamos este mesmo procedimento nesta dissertação. Testes de valores computacionais para vários n e x das funções de Bessel ($J_n(x)$ e $Y_n(x)$) foram comparados com valores tabelados na Ref. [37, 54]. Também foi comparada a derivada logarítmica com valores calculados a partir das funções de Bessel tabeladas. Conseguimos obter bons resultados, havendo concordância com tantas casas decimais quanto as dadas nas tabelas presentes na referência [54]. O que nos dá alguma confiança no algoritmo, mostrando que ele faz o que foi projetado para fazer. Pelas referências [22, 38], também é possível compararmos os resultados dos coeficiente de espalhamento, assim como, as eficiências de extinção e espalhamento. Em todos os casos, houve ótima concordância entre nossos dados e dos dados publicados.

Empregamos como limite superior $Nmx = \text{Max}(N\text{stop}, |mx|) + 15$, com o truncamento da série sendo feito após o termo $N\text{stop} = x + 4x^{1/3} + 2$ [1, 21].

Temos tudo o que precisamos para a comparação dos dados teóricos e experimentais, porém não sabemos qual o índice de refração (m) do Teflon para a frequência de microondas (na faixa de $9.6GHz$). O intuito deste trabalho de dissertação de mestrado é exatamente este; tendo a curva experimental, variamos o índice de refração na simulação computacional. Comparamos estes dados (Experimental e Teórico), e o melhor índice de refração que casar as duas curvas, este será o índice de refração do material que estamos estudando, no nosso caso o Teflon.

Em um primeiro instante obtivemos as seguintes curvas teórica é experimental (Figura 24), para $m = 1.45$ e $m = 1.50$.

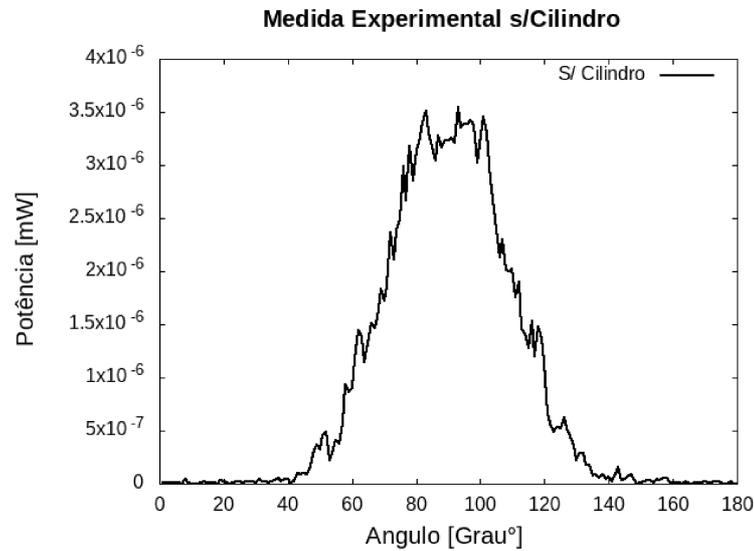
Figura 24 – Comparação das curvas de simulação teórica (para $m = 1.45$; 1.50) e experimental.



Fonte: Autoral

Claramente, nossos resultados teóricos não são compatíveis com os resultados experimentais. Podemos atribuir isso ao fato de que a teoria de espalhamento foi feita em cima do fato de termos uma onda plana, porém este não é o nosso caso. Contudo o programa está condizente com a teoria pois foi possível reproduzir os valores do artigo [40], onde o experimento é feito na faixa do visível. O espectro da onda emitida no nosso experimento é visto pela Fig. 21 onde é possível ver que de fato não temos uma frente de onda plana. A fim de resolvermos este problema aumentamos a distância da corneta emissora para $2.23m$, e o tamanho do cilindro para $88.10cm$. É possível ver uma pequena melhoria na frente de onda, tendo agora um pequeno alargamento na região central (entre 80° e 100°) contudo não é o suficiente para nos adequarmos à teoria. O resultado pode ser visto na Fig.25.

Figura 25 – Sinal de Intensidade captado pelo analisador. A melhoria da frente de onda pode ser visualizada pelo alargamento do pico da curva.

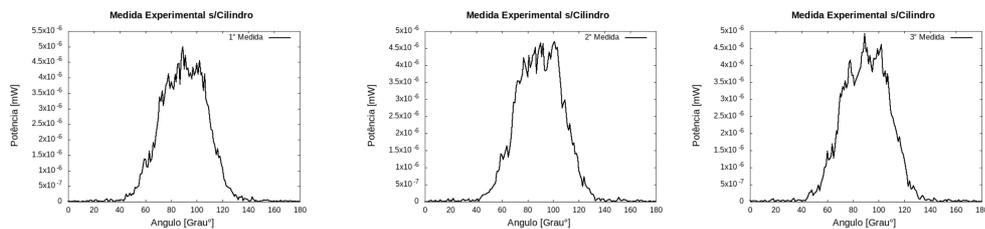


Fonte: Autoral

A fim de termos uma certa segurança no experimento, realizamos a medida de intensidade do sinal que chega até o analisador três vezes, tiramos a média e com isso temos uma boa ideia do desvio padrão do experimento, Fig. 26. Na Figura 27, é possível ver estes mesmos dados das Fig. 26 porém todos juntos, e assim termos uma ideia do qual preciso estão nossos dados.

Figura 26 – Série de medidas sem o cilindro .

(a) 1º Medida Experimental. (b) 2º Medida Experimental.(c) 3º Medida Experimental.



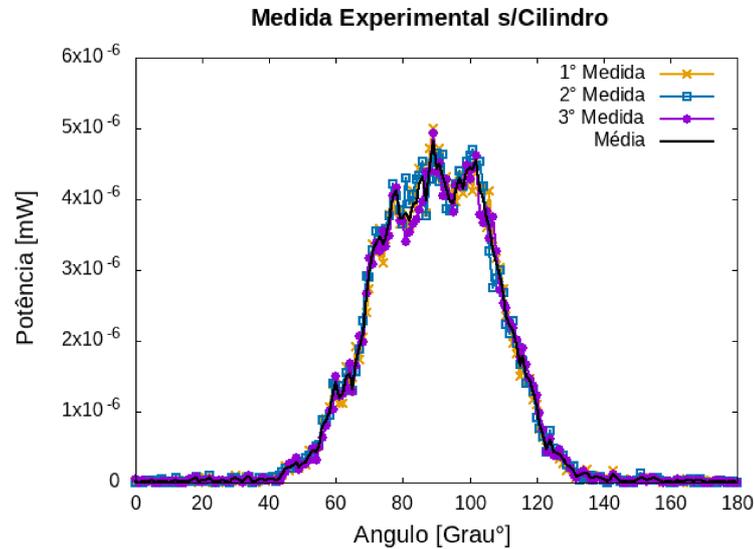
Fonte: Autoral

A tabela 1 nos mostra os valores da média variância e desvio padrão destas medidas (Figura 26 e 27) sem o cilindro.

Os resultados que tivemos do espalhamento a essa nova distância também são dados pela Figura 28.

Novamente, realizamos estas medidas três vezes e tiramos a média Fig. 29. Assim como fizemos para medida sem o cilindro, também apresentamos na Figura 30, os dados

Figura 27 – Gráfico sem o cilindro, com a série de três medidas, junto com a média. A curva em amarelo representa a 1^o medida, a curva em azul representa a 2^o medida e a curva em roxo representa a 3^o medida, já a curva preta representa a média destas três medidas.



Fonte: Autoral

Tabela 1 – S/ Cilindro [mW]

Medida	Média	Variância	Desvio Padrão
1	1.15E-06	2.56806E-12	1.60252E-06
2	1.16645E-06	2.61142E-12	1.61599E-06
3	1.1449E-06	2.49026E-12	1.57806E-06

da Fig. 29 todos juntos, e novamente garantimos a estabilidade do nosso experimento.

A tabela 2 nos mostra os valores da média, variância e desvio padrão destas medidas do espalhamento com o cilindro.

A construção e execução da parte experimental está de acordo com o que esperávamos, fizemos uma série de medidas e a margem de erro que tivemos da média (Fig. 27 e 30, curva em preto, para medida sem e com o cilindro respectivamente) foi de $D_{pSS} \approx 1.57 \times 10^{-6}$, para medidas sem o cilindro e $D_{pCS} \approx 1.95 \times 10^{-6}$, para medidas com o cilindro.

Outras maneiras de resolvermos este problema seria introduzirmos lentes para micro-onda [41] de modo que possamos "expandir o feixe". No entanto este passo do experimento ainda está em fase de estudos, e usando o método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD - Finite Difference Time Domain), que é um dos diversos métodos computacionais que tem como intuito resolver numericamente as equações de Maxwell,

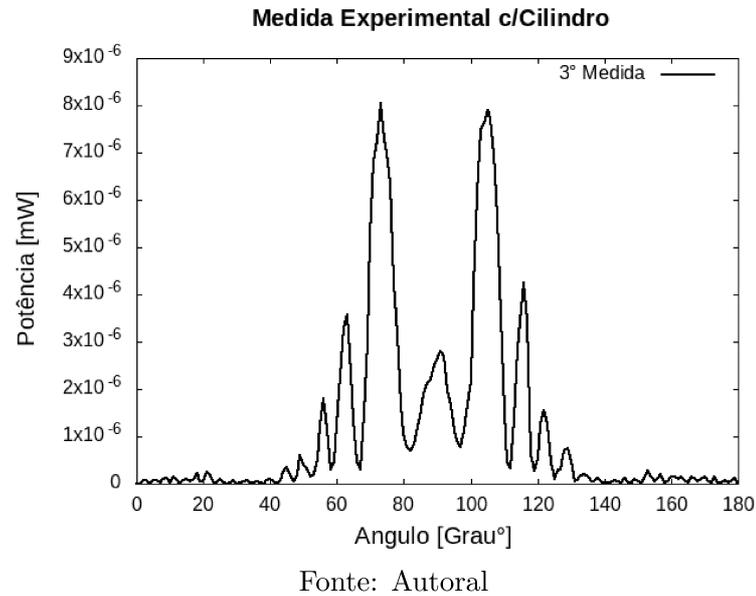
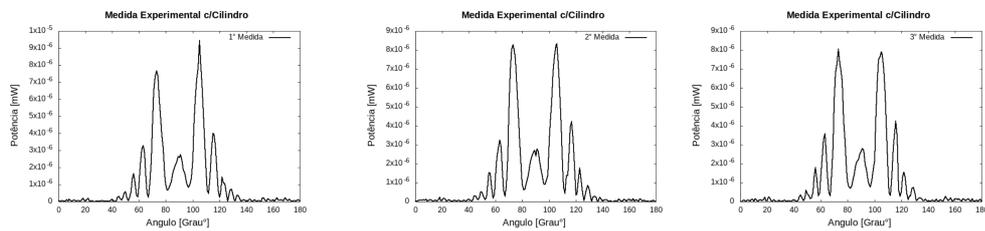
Figura 28 – Medida experimental com o cilindro $a = 1.75\text{cm}$.

Figura 29 – Série de medidas com o cilindro.

(a) 1° Medida Experimental. (b) 2° Medida Experimental.(c) 3° Medida Experimental.



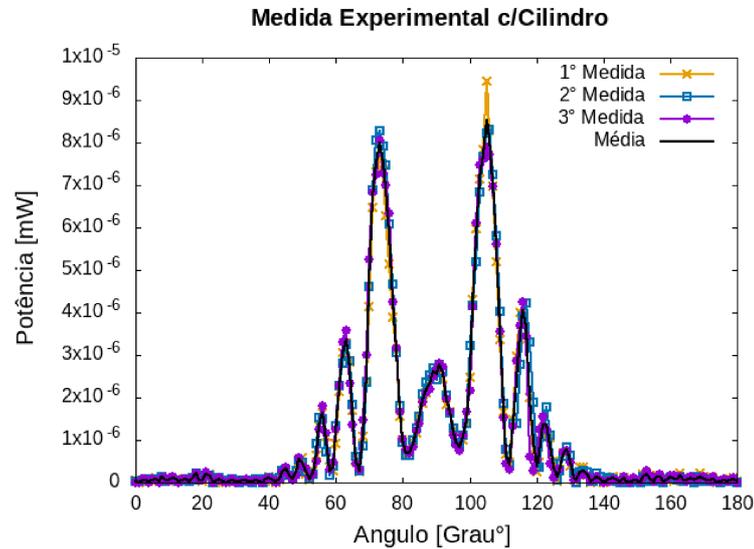
Fonte: Autoral

Tabela 2 – C/ Cilindro [mW]

Medida	Média	Variância	Desvio Padrão
1	1.14E-06	3.76825E-12	1.9412E-06
2	1.19E-06	4.02075E-12	2.00518E-06
3	1.15658E-06	3.85255E-12	1.96279E-06

descrevendo a propagação, transmissão e espalhamento das ondas eletromagnéticas em um meio qualquer e que na maioria dos casos estão submetidos a condições de contorno [42].

Figura 30 – Gráfico com o cilindro, com a série de três medidas, junto com a média. A curva em amarelo representa a 1^o medida, a curva em azul representa a 2^o medida e a curva em roxo representa a 3^o medida, já a curva preta representa a média destas três medidas.



Fonte: Autoral

5.2.1 Método FDTD

O FDTD, foi criado em 1966 por Kane Yee [43], onde este apresentou um modelo de discretização das equações de Maxwell no domínio do tempo. Seu trabalho foi baseado no método já existente, conhecido como método das diferenças finitas (FDM- Finite Difference Method) criado por Thom e Lima ([44, 45]). Para uma região do espaço que não possui fonte de corrente elétrica ou magnética, mas podendo conter materiais que absorvem energia dos campos elétrico ou magnético, temos as equações de Maxwell descritas no 2.1. Onde podemos reescrever as equações 2.3 e 2.4 como,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} \sigma \mathbf{E}. \quad (5.12)$$

Em coordenadas cartesianas teremos um sistema de seis equações diferenciais

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right), \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right), \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right), \quad (5.18)$$

onde este sistema forma a base do algoritmo numérico FDTD para interação de ondas eletromagnéticas. Estudando as equações de Maxwell na forma diferencial, verifica-se que a mudança no campo \mathbf{E} no tempo depende da mudança no campo \mathbf{H} no espaço. O que leva a relação básica de tempo do FDTD, ou seja, em qualquer ponto do espaço, o valor atualizado do campo \mathbf{E} no tempo depende do valor armazenado do campo \mathbf{E} e da ondulação numérica da distribuição local do \mathbf{H} campo no espaço [43, 46].

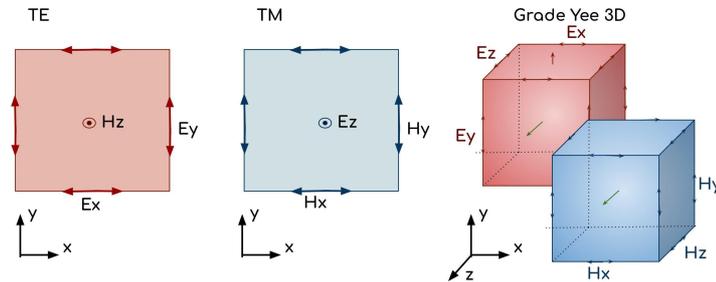
Semelhantemente, dividimos o campo \mathbf{H} em etapas. Em qualquer ponto do espaço, o valor atualizado do campo \mathbf{H} no tempo depende do valor armazenado do campo \mathbf{H} e da ondulação numérica da distribuição local do campo \mathbf{E} no espaço.

Como os campo \mathbf{E} e \mathbf{H} estão em constante atualizações, suas interações resultam em um processo de marcha no tempo, onde os dados das ondas eletromagnéticas contínuas sob consideração se propagam em uma grade numérica armazenada na memória do computador.

A Figura 31 ilustra uma célula Yee cartesiana padrão usada para FDTD, sobre a qual componentes vetoriais de campo elétrico e magnético são distribuídos. Interpretamos como um vortex cúbico, os componentes do campo elétrico formam as bordas do cubo, e os componentes do campo magnético formam os normais para as faces do cubo. Uma estrutura espacial tridimensional consiste em uma multiplicidade dessas células Yee. Uma estrutura de interação de onda eletromagnética é mapeada na estrutura espacial, atribuindo valores apropriados de permissividade a cada componente do campo elétrico e permeabilidade a cada componente do campo magnético [46].

O artigo Yee, de 1966 [43], propunha escalonar espacialmente os componentes vetoriais do campo \mathbf{E} e do campo \mathbf{H} sobre células unitárias retangulares de uma grade computacional cartesiana, de modo que cada componente vetorial do campo \mathbf{E} esteja localizado no meio do caminho entre um par de componentes vetoriais do campo \mathbf{H} , e vice-versa. Esse esquema é conhecido como grade de Yee. Além disso recomenda-se um esquema de avanço para marchar no tempo, em que as atualizações dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} são

Figura 31 – Representação 2D e 3D de uma célula Yee.



Fonte: Autoral

escalonadas para que as atualizações dos campos \mathbf{E} sejam conduzidas no meio do caminho durante cada intervalo de tempo entre sucessivas atualizações dos campos \mathbf{H} e vice-versa [43, 46]. Como ponto positivo, esse esquema explícito de escalonamento no tempo evita a necessidade de resolver equações simultaneamente. No entanto, como ponto negativo, esse esquema exige um limite superior no intervalo de tempo para garantir a estabilidade numérica [47]. Como resultado, certas simulações podem exigir muitas milhares de etapas para serem concluídas, tornando o tempo computacional cada vez maior.

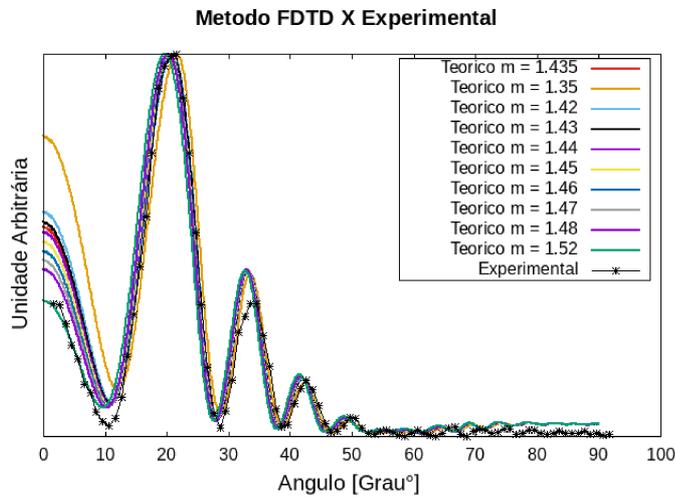
Para usarmos este método, temos que implementar uma solução FDTD das equações de Maxwell, isto é, temos que estabelecer um domínio computacional. Um domínio computacional nada mais é do que a região física sobre a qual a simulação será realizada.

Os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} são determinados em todos os pontos do espaço, assim como o material de cada célula dentro do domínio computacional. O material pode ser o espaço livre (ar), metal ou dielétrico. Qualquer material pode ser usado desde que a permeabilidade (μ), a permissividade (ε) e a condutividade (σ) sejam especificadas.

Definido o domínio computacional e os materiais da grade, agora temos que estabelecer uma fonte. O tipo de fonte pode ser, corrente em um fio, campo elétrico aplicado ou onda plana pulsante [48]. Estamos interessados no último caso, onde o FDTD pode ser usado para simular o espalhamento da onda eletromagnética em um objeto de forma cilíndrica.

Realizando os testes, com um algoritmo já escrito na biblioteca do Python (Meep) [48]. Os resultados que encontramos foram muito satisfatórios, Fig.32. A Ref. [39], usa uma outra técnica de medida de índice de refração na faixa de micro-ondas para o Teflon. Tendo como base este artigo, variamos o índice de refração, m , de 1.35 a 1.52.

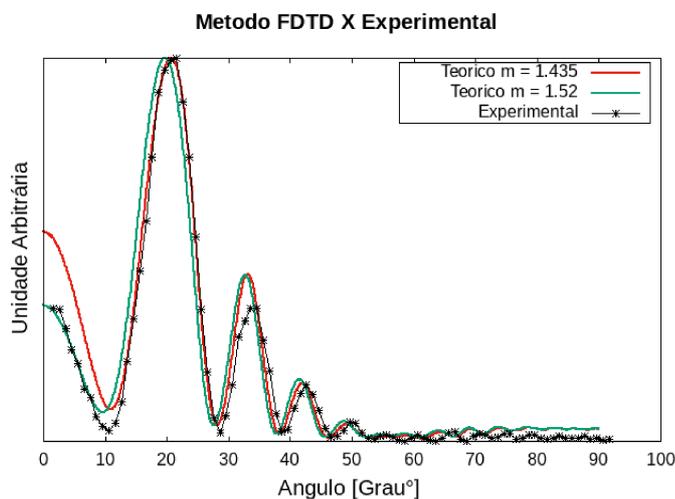
Figura 32 – Comparação dos dados teórico computacional usando o método FDTD para vários índices de refração com os dados experimentais.



Fonte: Autoral, feito em colaboração com o aluno João Paulo.

Na Figura 32, fizemos uma variação no índice de refração e é possível ver que o método teórico computacional (FDTD) casa com muita precisão com a parte experimental, sendo que as melhores curvas são, a curva verde que está relacionada com $m = 1.52$, é a curva vermelha com $m = 1.435$, veja Figura 33 . Onde a curva relacionada a $m = 1.435$, possui um melhor resultado. Tirando a diferença entre a curva experimental e a teóricas (relacionada a $m = 1.435$) uma boa estimativa para o índice de refração do teflon é: $m = (1.435 \pm 7.8 \times 10^{-2})$.

Figura 33 – Comparação dos dados teórico computacional usando o método FDTD com os dados experimentais para os índices de refração $m = 1.435$ e $m = 1.52$.



Fonte: Autoral

6 CONCLUSÃO

Em um primeiro instante, apresentamos nesta Dissertação de Mestrado, uma abordagem de aspectos relevantes para uma formulação teórica básica, capaz de resolver qualquer problema de espalhamento, lembrando que nosso intuito foi resolver o problema de espalhamento para um cilindro infinitamente longo. Discutimos sobre a interação de uma onda eletromagnética com um meio material, e como seu formato (onda plana ou não plana) pode interferir na teoria. Determinamos o conceito de seção transversal e vimos qual é a sua relação com a potência eletromagnética. Os harmônicos vetoriais foram estabelecidos, mostramos seu significado físico e sua aplicação na representação do campo eletromagnético. Ilustramos a solução para o problema de espalhamento por um cilindro infinito, e foi calculado todas as expressões analíticas para os campos elétrico e magnético, incidente, espalhado e internos. Também efetuamos os cálculos para os coeficientes de extinção, e espalhamento.

Propomos uma análise do espalhamento de micro-ondas por um cilindro infinito, a fim de compararmos os resultados teóricos, experimental e computacional e assim desenvolvermos um novo método de medir as propriedades físicas de diversos materiais na faixa de micro-ondas. A construção e execução da parte experimental está bem elaborada, diversas medidas foram feitas e tivemos uma margem de erro de $D_{pSS} \approx 1.57 \times 10^{-6}$, para medidas sem o cilindro e $D_{pCS} \approx 1.95 \times 10^{-6}$, para medidas com o cilindro. O próximo passo a ser feito na execução das medidas experimentais será automatizar o braço do detector, e assim refinarmos o intervalo entre as medidas. As comparações entre a formulação teórica e a parte experimental foram feitas. Vimos que a formulação da teoria de espalhamento não é adequada para onda não plana, e a fim de corrigirmos este problema, em colaboração com o laboratório de Simulação Computacional, introduzimos o formalismo do método computacional FDTD, o qual foi relativamente importante no nosso trabalho, assim podemos determinar o índice de refração do Teflon ($m \cong 1.435 \pm 7.8 \times 10^{-2}$) para frequência de micro-ondas, que está em concordância com a referência [47]. Todo nosso intuito foi mostrar que somos capazes de determinar índices de refração de diferentes substâncias desconhecidas na região de micro-ondas, já que temos diversas aplicações da teoria de espalhamento na faixa do visível e de infravermelho. O espalhamento por micro-ondas traz uma aplicação enorme em diversas áreas. Na área medicas [13], por exemplo podemos nos perguntar; qual seria o índice de refração dos órgãos internos dos seres humanos para fins de estudos avaliativos do impacto desta radiação em frequência de micro-ondas nos tecidos biológicos. Em telecomunicações, a frequência de celulares é em micro-ondas, como por exemplo, transferência de dados por Bluetooth. Temos também aplicação de micro-ondas na produção e refino de petróleo [12]. Em radares [10], na área de mineração e em outras infinitas áreas. Existe uma demanda muito grande de conhecer os índices de refração e os coeficientes de extinção nesta faixa de frequência de

micro-ondas. A técnica de espalhamento descrita neste trabalho também pode ser muito útil no desenvolvimento de novos metamateriais na região de micro-ondas. Com isso, estamos desenvolvendo uma técnica interessante, simples e barata capaz de determinar estes índices de refração, real e imaginário. Ainda existe muito trabalho a ser feito, mas em um primeiro instante estamos satisfeitos com nossos resultados. Um próximo passo, seria aprimorar a técnica e expandir nossos estudos para o espalhamento de micro-ondas devido múltiplos cilindros (centro espalhador), abordando a região de ressonância, o que pode nos trazer resultados e aplicações interessantes.

REFERÊNCIAS

- [1] C. F. Bohren and D. R. Huffman, Absorption and Scattering of Light by Small Particles. John Wiley, 1983.
- [2] FREZZA, Fabrizio; MANGINI, Fabio; TEDESCHI, Nicola. Introduction to electromagnetic scattering: tutorial. Journal Of The Optical Society Of America A, [s.l.], v. 35, n. 1, p.163-173, 20 dez. 2017. The Optical Society. <http://dx.doi.org/10.1364/josaa.35.000163>.
- [3] M. Kerker, The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation. Academic Press, 1969.
- [4] Lord Rayleigh, "On the electromagnetic theory of light," Philos. Mag.12(73), 81–101 (1881).
- [5] L. Lorenz, Videnskabernes Selskab Skrifter (1890), Vol. 6, p. 142. [Reprinted in L. Lorenz, Oeuvres Scientifiques, Librairie Lehmann, Copenhagen, Vol. 1, p. 405, 1896 (Reprinted by Johnson, New York, 1964).]
- [6] J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism (Oxford University, 1893).
- [7] G. Mie, "Beiträge zur Optik trüber medien, speziell kolloidaler Metallösungen," Ann. Phys. 330, 377–445 (1908).
- [8] JAIN, Prashant K. et al. Calculated Absorption and Scattering Properties of Gold Nanoparticles of Different Size, Shape, and Composition: Applications in Biological Imaging and Biomedicine. The Journal Of Physical Chemistry B, [s.l.], v. 110, n. 14, p.7238-7248, abr. 2006. American Chemical Society (ACS).
- [9] HARDING, G.. Inelastic photon scattering: Effects and applications in biomedical science and industry. Radiation Physics And Chemistry, [s.l.], v. 50, n. 1, p.91-111, jul. 1997. Elsevier BV.
- [10] FUNG, Adrian K.; KUNSHAN, Chen. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications. Artech House, 1994. 573
- [11] Boric-Lubecke, O., Lubecke, VM, Jokanovic, B., Singh, A., Shahhaidar, E., & Padasdao, B. (2015). Microwave and wearable technologies for 5G. 2015 12^a Conferência Internacional de Telecomunicações em Serviços Modernos de Satélite, Cabo e Radiodifusão (TELSIKS).
- [12] FORTUNY, Montserrat et al. Principais aplicações das microondas na produção e refino de petróleo. Química Nova, [s.l.], v. 31, n. 6, p.1553-1561, 2008. FapUNIFESP (SciELO).
- [13] Shtoda, DO, Arkusha, YV e Mustetsov, MP (2017). The microwave imaging method for express diagnostic of cancer. 2017 IEEE Primeira Conferência da Ucrânia em Engenharia Elétrica e de Computadores.
- [14] H. C. van de Hulst, Light Scattering by Small Particles. Dover Publications, 1980.

- [15] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [16] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 1999.
- [17] L. Tsang, J. A. Kong, and K. H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves: Theory and Applications* (Wiley, 2000).
- [18] J. R. Wait, “Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence,” *Can. J. Phys.*, vol. 33, pp. 189–195, 1955.
- [19] M. Kerker, D. S. Wang, and C. L. Giles, “Electromagnetic scattering by magnetic spheres,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 73, pp. 765–767, 1983.
- [20] P. Chen, R. X. Wu, J. Xu, A. M. Jiang, and X. Y. Ji, “Effects of magnetic anisotropy on the stop band of ferromagnetic electromagnetic band gap materials,” *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 19, p. 106205, 1997.
- [21] P. W. Barber, *Light Scattering by Particles: Computational Methods*. World Scientific, 1990.
- [22] Larkin, B., and S. W. Churchill, 1959. Scattering and absorption of electromagnetic radiation by infinite cylinders, *J. Opt. Soc. Am.*, 49, 188-190.
- [23] RIBEIRO, J. A. J. *Engenharia de Microondas : Fundamentos e Aplicações*. 1. ed. [S.l.]: Érica, 2008. p. 30-45.
- [24] MACHADO, kleber Daum. *Teoria do Eletromagnetismo*. 2013. ed. [S.l.]: Toda palavra editora, 2004. p. 282-337.
- [25] ARRUDA, Tiago José. *Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador*. 2010. 176 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto – Sp, 2012. Cap. 6. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/59/59135/tde-22122010-103549/publico/TiagoArrudaDissertacao.pdf>>. Acesso em: 15 out. 2019.
- [26] HECHT, E. *Optics*. New York: Adelphi University. Addison Wesley, 2002.
- [27] Otávio Gomes de Oliveira, *DESENVOLVIMENTO DE UM EQUIPAMENTO OPTICO PARA O ESTUDO DO MOVIMENTO VERTICAL DE CIANOBACTERIAS – *Cylindrospermopsis raciborskii**, Dissertação de Mestrado, março de 2007.
- [28] Papas, C. H. *Theory of electromagnetic wave propagation*, New York Dover, 1988
- [29] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Essentials of Math Methods for Physicists*. Academic Press, 2003.
- [30] Halison Silva, *Dissertação de Mestrado Janeiro de 2020. Desenvolvimento de um sistema de micro-ondas para detectar água em óleo de transformador de potencia*.
- [31] PANOFSKY, W. K. H.; PHILLIPS, M. **Classical Electricity and Magnetism: 2th**: Dover Publications, 2012.
- [32] SLATER, J. C. **Microwave Transmission: 1th**. New York: McGraw-Hill, 1942.

- [33] CHU, L.J.; BARROW, W. L. Electromagnetic Horn Design. **Transactions**, v. 58, p. 333, July 1939. Theory of the electromagnetic horn , **Proc. Ins. Radio Engineers**, v. 27, p. 51, July 1939.
- [34] UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA. Grupo de Física Aplicada da UFJF. Disponível em: <http://www.ufjf.br/labfapli>. Acesso em: 7 jan. 2020.
- [35] Stegun, I. A., and M. Abramowitz, 1957. Generation of Bessel functions on high speed computers, *Math. Tables Other Aids Comput.*, 11, 255-257.
- [36] Goldstein, M., and R. M. Thaler, 1959. Recurrence techniques for the calculation of Bessel functions, *Math. Tables Other Aids Comput.*, 13, 102-108.
- [37] Olver, F. W. J., 1964. Bessel functions of integer order, in *Handbook of Mathematical Functions*, M.Abramowitz and I. A Stegun (Eds.), National Bureau of Standards, Washington, D.C., pp.355-436.
- [38] Libelo, L. F., 1962. Light scattering by partially absorbing cylinders-coefficients, NOLTR 62-142. U.S. Naval Ordnance Lab., White Oak, Md.
- [39] KAWAMURA, J.; PAINE, S.; PAPA, D. C.. Spectroscopic Measurements of Optical Elements For Submillimeter Receivers. Seventh International Symposium On Space Terahertz Technolog, Charlottesvi, p.349-355, mar. 1996.
- [40] Application of light scattering from dielectri cylinder based upon mie and Rayleigh-gans-born theories to polymer systems. I. scattering from a glass fiber
- [41] JOHND.KRAUS. *Antennas*. 2. ed. New York: Tata Mcgraw-hill, 1997. 873 p.
- [42] WEXLER, A. Computation of Electromagnetic Fields. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 17, n. 8, August 1969.
- [43] YEE, K. S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 14, n. 3, May 1966.
- [44] A. Thom and C. J. Apelt (1961). *Field Computations in Engineering and Physics*. London: D. Van Nostrand.
- [45] LIMA, M. V. A.; LIMA, J. M. F.; LIMA, P. R. L.. Finite Difference Energy Method for nonlinear numerical analysis of reinforced concrete slab using simplified isotropic damage model. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, [s.l.], v. 7, n. 6, p.940-964, dez. 2014. FapUNIFESP (SciELO).
- [46] "Solução numérica de problemas de valor limite inicial envolvendo as equações de Maxwell em meios isotrópicos". *Transações IEEE em Antenas e Propagação* . 14 (3): 302–307. Bibcode : 1966ITAP ... 14..302Y . doi : 10.1109 / TAP.1966.1138693
- [47] TAFLOVE, A.; BRODWIN, M.e.. Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations. *Ieee Transactions On Microwave Theory And Techniques*, v. 23, n. 7, p.623-630, ago. 1975.

- [48] A. Oskooi, D. Roundy, M. Ibanescu, P. Bermel, JD Joannopoulos e SG Johnson, MEEP: Um pacote flexível de software livre para simulações eletromagnéticas pelo método FDTD , Computer Physics Communications, vol. 181, pp. 687-702, 2010 (pdf). https://meep.readthedocs.io/en/latest/Python_Tutorials/Basics/
- [49] STOKES, G. B. On the dynamical theory of diffraction. **Trans. Cambridge Phil. Soc.** v. 1, p. 1, 1849.
- [50] BALANIS, C. A. **Antenna Theory Analysis and Design:** 4th: John Wiley and Sons, 1997.
- [51] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, 2nd ed.(Wiley, 2012).
- [52] PRYAMIKOV, Andrey D.; BIRIUKOV, Alexander S.. Wood's anomalies and excitation of cyclic Sommerfeld resonances under plane wave scattering from a single dielectric cylinder at oblique incidence of light. Cornell University, Russia, v. 38, n. 32, p.1-32, 9 jun. 2012.
- [53] RAYLEIGH, Lord. XLI. The dispersal of light by a dielectric cylinder. The London, Edinburgh, And Dublin Philosophical Magazine And Journal Of Science, [s.l.], v. 36, n. 215, p.365-376, nov. 1918. Informa UK Limited.
- [54] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, 1970.

APÊNDICE A – Introdução aos Harmônicos Vetoriais

Veremos em detalhes como obter uma base adequada para expandirmos os campos (incidente, interno e espalhado), e assim resolvermos o problema de espalhamento. Iremos da início apresentando os potenciais e anti-potenciais.

A.1 Potenciais e Anti-Potenciais

A partir das equações de Maxwell com o termo de fonte, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

que para meios homogêneos, isotrópicos e lineares é possível mostrar que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{J}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (\text{A.6})$$

As equações A.5 e A.6 são conhecidas como equação de onda vetorial. A solução destas equações vão depender das condições de contorno, [28]. Note que o termo de fonte deve ser especificado para encontrarmos a solução da equação de onda vetorial. Vamos agora restringir o nosso sistema a estados harmônicos no tempo do tipo $e^{-i\omega t}$ e adotar a seguinte simbologia,

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{C_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}. \quad (\text{A.7})$$

Assim, as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\nabla \times E_\omega(\mathbf{r}) = i\omega\mu_\omega H_\omega(\mathbf{r}), \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times H_\omega(\mathbf{r}) = J_\omega - i\omega\epsilon_\omega E_\omega(\mathbf{r}), \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot B_\omega(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot E_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\rho_\omega}{\epsilon_\omega}. \quad (\text{A.11})$$

Antes de iniciar qualquer análise é importante definir o que vem a ser dualidade. Se as equações que descrevem dois diferentes fenômenos possuem a mesma forma matemática, a solução delas terão a mesma forma. Isto é chamado de dualidade. Duas equações de mesma forma matemática são chamadas de equação dual. Vamos mostrar que em uma região livre de corrente ($\mathbf{J} = 0$), as equações de Maxwell passam a ter uma certa dualidade entre \mathbf{E} e \mathbf{H} . Vamos definir dois novos vetores:

$$\mathbf{E}' = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{H}' = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}, \quad (\text{A.13})$$

então substituindo as equações A.12 e A.13 nas equações de Maxwell acima (Equações A.1 a A.4), livre de fonte encontramos:

$$\nabla \times \mathbf{H}' = -i\omega\mu\mathbf{E}', \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = +i\omega\mu\mathbf{H}', \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0, \quad (\text{A.17})$$

onde, por simplicidade de notação, adotamos $C_\omega = C$. Vemos que as equações A.14, A.15, A.16 e A.17 são semelhantes as equações A.8, A.9, A.10 e A.11. Esta dualidade pode ser estendida para regiões contendo correntes, empregando artifícios matemáticos como a criação de carga magnética e corrente magnética. Assim, vamos partir da equação de Maxwell com fonte, mas para isso, precisamos definir o vetor densidade de corrente de magnetização \mathbf{J}_m e a densidade de carga magnética ρ_m como:

$$\mathbf{J}_m = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J, \quad (\text{A.18})$$

$$\rho_m = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rho, \quad (\text{A.19})$$

com isto podemos escrever as equações de Maxwell generalizadas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m + i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (\text{A.20})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = J - i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu}, \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (\text{A.23})$$

Note que fazendo $\rho_m = \mathbf{J}_m = 0$ recuperamos a equação de Maxwell original. Com isto, fazendo a transformação dual envolvendo o campo, veja equações A.12 e A.13, e a transformação dual para as fontes, ou seja:

$$\mathbf{J}' = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{J}_m, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{J}_m = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{J}, \quad (\text{A.25})$$

$$\rho' = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \rho_m, \quad (\text{A.26})$$

$$\rho'_m = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rho, \quad (\text{A.27})$$

encontramos os campos duais,

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\mathbf{J}'_m + i\omega\mu\mathbf{H}', \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' - i\omega\varepsilon\mathbf{E}', \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = \frac{\rho'_m}{\mu}, \quad (\text{A.30})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon}. \quad (\text{A.31})$$

Assim, para cada campo \mathbf{E} , \mathbf{H} produzido por uma corrente elétrica e densidade de carga elétrica \mathbf{J} , ρ existe um campo dual \mathbf{E}' , \mathbf{H}' produzido por uma corrente magnética e densidade de carga magnética fictícia \mathbf{J}'_m , ρ'_m .

De acordo com o teorema da partição de Helmholtz [49], o campo pode ser separado em uma parte irrotacional e uma parte solenoidal, ou melhor, o campo vetorial é determinado conhecendo seu rotacional e divergente. Vamos partir do caso em que os termos de fontes são a densidade de corrente elétrica J_e e a densidade de carga elétrica ρ_e . Assim, para o caso específico do campo eletromagnético a natureza solenoidal de \mathbf{B} gera a seguinte relação:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_m. \quad (\text{A.32})$$

Esta relação envolve somente o rotacional de \mathbf{A}_m e deixa livre o divergente de \mathbf{A}_m . Isto significa que não há restrição do divergente de \mathbf{A}_m , e isto permite escolher arbitrariamente a melhor forma do divergente. Algo semelhante acontece com o campo elétrico onde temos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_e + i\omega\mathbf{A}_m. \quad (\text{A.33})$$

Manipulando estas equações é possível mostrar que:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mu \mathbf{J}_e + \nabla [\nabla \cdot \mathbf{A}_m - i\omega\mu\varepsilon\phi_e] , \quad (\text{A.34})$$

$$\nabla^2 \phi_e - i\omega \nabla \cdot \mathbf{A}_m = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (\text{A.35})$$

Como já comentado anteriormente o $\nabla \cdot \mathbf{A}_m$ é arbitrário e portanto, podemos escolher de forma mais conveniente. A escolha mais adequada é fazer a escolha que desacople as equações acima. As duas melhores escolhas poderiam ser:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_m = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi_e}{\partial t} = +i\omega\mu\varepsilon\phi_e, \quad (\text{A.36})$$

conhecida como Gauge de Lorentz, e

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_m = 0, \quad (\text{A.37})$$

conhecida como Gauge de Coulomb. Escolhendo o Gauge de Lorentz teremos:

$$\nabla^2 \phi_e + k^2 \phi_e = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mu \mathbf{J}_e. \quad (\text{A.39})$$

As equações acima são exatamente as equações de Helmholtz. Note que o Gauge de Lorentz é conveniente para desacoplar a equação entre os potenciais vetores e escalares, mas neste Gauge o campo elétrica não é completamente particionado. Se desejamos uma partição completa é preciso usar o Gauge de Coulomb, pois neste Gauge teremos:

$$\nabla^2 \phi_e = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad (\text{A.40})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mu \mathbf{J}_e - i\omega\mu \nabla \phi_e, \quad (\text{A.41})$$

e como pode se ver na Equação A.41 ainda continuamos com um acoplamento. Para desacoplar vamos escrever \mathbf{J}_e como sendo a soma de um \mathbf{J}_i irrotacional ($\nabla \times \mathbf{J}_i = 0$) e de um \mathbf{J}_s solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$), ou seja, estamos utilizando o teorema de partição de Helmholtz. Assim, $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s$ e agora vamos escolher uma função escalar ψ de tal forma que seu gradiente seja justamente \mathbf{J}_i , ou seja, $\mathbf{J}_i = \nabla\psi$ e com isto, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \nabla^2 \psi, \quad (\text{A.42})$$

que combinando com a equação da continuidade encontramos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = \nabla \cdot [\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_i] = i\omega\rho, \quad (\text{A.43})$$

ou melhor,

$$\nabla^2 \psi_e = i\omega \rho, \quad (\text{A.44})$$

que comparando com A.40 vemos que:

$$\psi_e = -i\omega \varepsilon \phi_e, \quad (\text{A.45})$$

e, portanto,

$$\mathbf{J}_i = \nabla \psi_e = -i\omega \nabla \phi_e, \quad (\text{A.46})$$

e voltando na equação A.41 temos que:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mu \mathbf{J}_s. \quad (\text{A.47})$$

Assim, no Gauge de Coulomb \mathbf{A}_m é determinado desde que se conheça a parte da densidade de corrente solenoidal. Para ϕ_e é necessário conhecer a parte da densidade da corrente que seja irrotacional.

Podemos agora realizar as mesmas análises feita anteriormente, mas agora utilizando a partição do campo eletromagnético gerado por uma densidade de corrente de magnetização \mathbf{J}_m e uma densidade de carga magnética ρ_m . Neste caso fazendo $\mathbf{J}_e = \rho_e = 0$, e partindo das equações A.20, A.21, A.22 e A.23, temos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}, \quad (\text{A.48})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m + i\omega \mathbf{B}, \quad (\text{A.49})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m. \quad (\text{A.51})$$

Note que ψ_e é o dual de ϕ_e e a unidade de $\mathbf{J}_{es} = [A/m^2]$, $\mathbf{J}_m = [V/m^2]$, $\mathbf{A}_m = [V.s/m]$, $\mathbf{A}_e = [C/m]$, $\rho_m = [V.s/m^3]$, $\phi_e = [V]$ e $\phi_m = [C/s] = [A]$. Da equação A.48 e A.50, temos respectivamente:

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m + i\omega \mathbf{A}_e, \quad (\text{A.52})$$

$$\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{A}_e, \quad (\text{A.53})$$

onde \mathbf{A}_m e ϕ_e são chamados de potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico, enquanto \mathbf{A}_e e ϕ_m são chamados de potencial vetor elétrico e potencial escalar magnético. Em muitos livros estes dois últimos potenciais são chamados de anti-potenciais.

Assim, conhecendo os termos de fontes \mathbf{J}_m , \mathbf{J}_e , ρ_m e ρ_e é possível encontrar os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em função dos potenciais (A_m, ϕ_e) e anti-potenciais (\mathbf{J}_e, ϕ_m) , ou melhor,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_e + i\omega\mathbf{A}_m - \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \mathbf{A}_e, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m + i\omega\mathbf{A}_e - \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}_m, \quad (\text{A.55})$$

onde os potenciais e anti-potenciais devem satisfazer as equações:

$$\nabla^2\mathbf{A}_e + k^2\mathbf{A}_e = -\varepsilon\mathbf{J}_{ms}, \quad (\text{A.56})$$

$$\nabla^2\mathbf{A}_m + k^2\mathbf{A}_m = -\mu\mathbf{J}_{es}, \quad (\text{A.57})$$

$$\nabla^2\phi_m = -\frac{1}{\mu}\rho_m, \quad (\text{A.58})$$

$$\nabla^2\phi_e = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_e. \quad (\text{A.59})$$

O grande problema agora é encontrar os potenciais e anti-potenciais. Os potenciais vetores são soluções das equações de Helmholtz, veja equações A.56 e A.57. Estes dois potenciais vetores estão relacionados aos chamados potenciais de Hertz e a definição é a seguinte:

$$\mathbf{A}_m = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}, \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{A}_e = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \quad (\text{A.61})$$

onde $\mathbf{\Pi}_e$ é chamado de **potencial vetor de Hertz elétrico** e $\mathbf{\Pi}_m$ é chamado de **potencial vetor de Hertz magnético**. Utilizando a equação A.60 na equação A.36 encontramos,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m + \phi_m] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m = -\phi_m, \quad (\text{A.62})$$

e de forma semelhante

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e = -\phi_e. \quad (\text{A.63})$$

Assim, substituindo as equações A.60 e A.61 nas equações A.56 e A.57 obtemos:

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_m + k^2\mathbf{\Pi}_m = -\frac{i}{\omega\mu}\mathbf{J}_{ms}, \quad (\text{A.64})$$

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_e + k^2\mathbf{\Pi}_e = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\mathbf{J}_{es}, \quad (\text{A.65})$$

onde admitimos que os potenciais vetores de Hertz são funções harmônicas no tempo do tipo $e^{-i\omega t}$. Caso contrário teremos:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m - \mu \varepsilon = -\frac{i}{\omega \mu} \mathbf{J}_{ms}, \quad (\text{A.66})$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{i}{\omega \varepsilon} \mathbf{J}_{es}. \quad (\text{A.67})$$

Se não tivermos os termos de fontes ($\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{J}_{es} = 0$) temos:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m + k^2 \mathbf{\Pi}_m = 0, \quad (\text{A.68})$$

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e + k^2 \mathbf{\Pi}_e = 0. \quad (\text{A.69})$$

Utilizando as equações A.62 e A.63 nas expressões dos campos dadas nas equações A.54 e A.55 podemos escrever os campos apenas como funções dos potenciais vetores de Hertz, ou seja,

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e - \mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_m + \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}. \quad (\text{A.71})$$

Na referência [50] (capítulo 3, problema 1), as equações acima são obtidas com a diferença que:

$$\mathbf{A}_e \equiv F,$$

$$\mathbf{A}_m \equiv A, \quad (\text{A.72})$$

e também devemos lembrar que a parte temporal não é do tipo $e^{-i\omega t}$ e sim $e^{j\omega t}$.

No caso em que a fase temporal é do tipo $e^{-i\omega t}$ e com ajuda da equação A.60 e A.61, temos:

$$\mathbf{\Pi}_e = \frac{i}{\mu \varepsilon \omega} \mathbf{A}_m, \quad (\text{A.73})$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \frac{i}{\mu \varepsilon \omega} \mathbf{A}_e, \quad (\text{A.74})$$

e, portanto, utilizando A.66 e A.67, podemos escrever:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_e + k^2 \mathbf{A}_e = -\varepsilon \mathbf{J}_{ms}, \quad (\text{A.75})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mu \mathbf{J}_{es}, \quad (\text{A.76})$$

que são exatamente as equações 3.25 e 3.14 da referência [46], respectivamente com a relação de que \mathbf{J}_{ms} é a fonte da parte magnética, ou seja a magnetização \mathbf{M} e \mathbf{J}_{es} a fonte elétrica ou seja a densidade de corrente elétrica \mathbf{J} .

A solução das equações A.75 e A.76 são:

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int J_{es}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{R} d^3r', \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{A}_e(r) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int J_{ms}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{R} d^3r', \quad (\text{A.78})$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, sendo \mathbf{r} o vetor posição da origem até o ponto que queremos calcular o campo e \mathbf{r}' o vetor posição da origem até onde está a fonte do campo.

Assim, conhecendo os potenciais vetores $\mathbf{\Pi}_e$ e $\mathbf{\Pi}_m$ é possível encontrar os campos elétricos e magnéticos, bastando utilizar as equações A.70 e A.71. Vale lembrar que as unidades dos campos e potenciais vetores são: $\mathbf{H} = [A/m]$, $\mathbf{E} = [V/m]$, $\mathbf{\Pi}_e = [V \cdot m]$ e $[\mathbf{\Pi}_m = [A \cdot m]$.

Outro dado importante que devemos chamar atenção é que os potenciais vetores de Hertz elétrico ($\mathbf{\Pi}_e$) e magnético ($\mathbf{\Pi}_m$) estão associados aos modos TM e TE, respectivamente e isto fica claro ao observar as equações A.70 e A.71, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{TM} + \mathbf{E}_{TE}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{TM} + \mathbf{H}_{TE}. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Redefinindo a equação A.63 como:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e = -\psi_e, \quad (\text{A.80})$$

e algo semelhante para o potencial vetor magnético,

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m = -\psi_m. \quad (\text{A.81})$$

Onde os potenciais escalares ψ_e e ψ_m são conhecidos como **potenciais de Debye elétrico e magnéticos**, respectivamente. Alguns livros textos chamam de potenciais de Debye-Hertz elétrico $\mathbf{\Pi}_e$ e magnético $\mathbf{\Pi}_m$. Note que as unidades dos potenciais de Debye elétrico e magnéticos são respectivamente $[Volts]$ e $[Ampere]$.

APÊNDICE B – Procedimento para funções de onda vetorial

No decorrer desta dissertação, introduzimos os harmônicos cilíndricos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} , os quais aqui suas soluções serão apresentadas detalhadamente. Seja a equação de onda escalar,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Que nas coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) + k^2 \psi = 0. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando o método de separação de variáveis $\psi(r, \phi, z) = R(r), \Phi(\phi), Z(z)$:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \lambda_1 Z(z) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} - \lambda_2 \Phi(\phi) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [(\lambda_1 + k^2) r^2 + 2] R = 0. \quad (\text{B.5})$$

Fazendo uma mudança de variável em r ($\rho = r\sqrt{k^2 + \lambda_1^2}$), vemos que esta é exatamente a Equação diferencial de Bessel de ordem m .

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left[1 - \frac{\lambda_2^2}{\rho^2} \right] P = 0. \quad (\text{B.6})$$

Assim temos a solução da equação de onda escalar,

$$\psi_n(\rho, \phi, z) = Z_n(\rho) e^{in\phi} e^{ihz}, \quad (\text{B.7})$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, h é um parametro a ser determinado, $\rho = r\sqrt{(k^2 - h^2)}$, e por fim $Z_n(\rho)$ é qualquer função de Bessel cilíndrica.

Tendo a solução de ψ podemos explicitar os harmônicos cilíndricos vetoriais, como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_n &= \nabla \times (\hat{e}_z \psi_n) \\
&= \left[in \frac{Z_n(\rho)}{r} \hat{e}_r - \frac{\rho}{r} Z_n'(\rho) \hat{e}_\phi \right] e^{i(n\phi+hz)} \\
&= \frac{\rho}{r} \left[\frac{in}{\rho} Z_n(\rho) \hat{e}_r - Z_n'(\rho) \hat{e}_\phi \right] e^{i(n\phi+hz)} \\
&= \frac{r\sqrt{k^2 - h^2}}{r} \left[\frac{in}{\rho} Z_n(\rho) \hat{e}_r - Z_n'(\rho) \hat{e}_\phi \right] e^{i(n\phi+hz)} \\
&= \sqrt{k^2 - h^2} \left[in \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r - Z_n'(\rho) \hat{e}_\phi \right] e^{i(n\phi+hz)}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_n &= \frac{1}{k} (\nabla \times \mathbf{M}_n) \\
&= \left[ih\rho \frac{Z_n'(\rho)}{kr} \hat{e}_r - nh \frac{Z_n(\rho)}{kr} \hat{e}_\phi + \frac{\rho^2}{r} \frac{Z_n(\rho)}{kr} \hat{e}_z \right] e^{i(n\phi+hz)} \\
&= \frac{\rho}{kr} \left[ihZ_n'(\rho) \frac{nh}{\rho} Z_n(\rho) \hat{e}_\phi + \frac{\rho}{r} Z_n(\rho) \hat{e}_z \right] e^{i(n\phi+hz)} \\
&= \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \left[ihZ_n'(\rho) \hat{e}_r - nh \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_\phi + \sqrt{k^2 - h^2} Z_n(\rho) \hat{e}_z \right] e^{i(n\phi+hz)}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

B.1 Ortogonalidade de \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n

Usando a ortogonalidade de \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n , temos:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{M}_m^* d\phi = \left(\frac{in}{r} J_n(\rho) \hat{e}_r - \frac{\rho}{r} J_n'(\rho) \hat{e}_\phi \right) \cdot \left(-\frac{im}{r} J_m(\rho) \hat{e}_r - \frac{\rho}{r} J_m'(\rho) \hat{e}_\phi \right) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi. \tag{B.10}$$

Onde a solução da integral é :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,n} \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{B.11}$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{M}_m^* d\phi = 0, \tag{B.12}$$

Para $m \neq n$.

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{M}_m^* d\phi = \frac{2\pi}{r^2} \left[n^2 J_n(\rho) J_n(\rho) + \rho^2 J_n'(\rho) J_n'(\rho) \right], \tag{B.13}$$

Para $m = n$.

Assim como,

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{N}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = \left(\frac{ih\rho}{kr} J'_n(\rho) \hat{e}_r - nh \frac{J_n(\rho)}{kr} \hat{e}_\phi + \frac{\rho^2}{r} \frac{J_n(\rho)}{kr} \hat{e}_z \right) \cdot \left(\frac{-ih\rho}{kr} J'_m(\rho) \hat{e}_r - mh \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_\phi + \frac{\rho^2}{r} \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_z \right) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi, \quad (\text{B.14})$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{N}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = 0. \quad (\text{B.15})$$

Para $m \neq n$.

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{N}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = \frac{2\pi}{k^2 r^2} \left[h^2 \left(n^2 J_n(\rho) J_n(\rho) + \rho^2 J'_n(\rho) J'_n(\rho) \right) + \rho^2 \frac{\rho^2}{r^2} J_n(\rho) J_n(\rho) \right]. \quad (\text{B.16})$$

Para $m = n$.

E por fim,

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = \left(\frac{in}{r} J_n(\rho) \hat{e}_r - \frac{\rho}{r} J'_n(\rho) \hat{e}_\phi \right) \cdot \left(\frac{-ih\rho}{kr} J'_m(\rho) \hat{e}_r - mh \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_\phi + \frac{\rho^2}{r} \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_z \right) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi. \quad (\text{B.17})$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = 0. \quad (\text{B.18})$$

Para $m \neq n$.

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \mathbf{N}_m^* d\phi = 4\pi \frac{nh\rho}{kr^2} J_n(\rho) J'_n(\rho). \quad (\text{B.19})$$

Para $m = n$.

B.2 Coeficientes A_n e B_n

Igualando as equações do campo elétrico incidente, para o caso I, temos:

$$E_0 (\sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x) e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n^{(1)} + B_n \mathbf{N}_n^{(1)}]. \quad (\text{B.19})$$

Temos que encontrar A_n e B_n . Onde a função geradora é: $\psi_n^{inc} = J_n(\rho) e^{i(n\phi + hz)}$.

Usando a relação de ortogonalidade descrita no Apêndice B.1, temos:

$$\int_0^{2\pi} d\phi E_0(\sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x) e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{*(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\phi \left[A_n \mathbf{M}_{\mathbf{n}}^{(1)} + B_n \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{*(1)}. \quad (\text{B.20})$$

Vamos resolver o lado esquerdo primeiro.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \left[E_0(\sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x) e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)} \right] \cdot \left[-ih\rho \frac{J'_m(\rho)}{kr} \hat{e}_r - mh \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_\phi - \frac{\rho^2}{r} \frac{J_m(\rho)}{kr} \hat{e}_z \right] e^{-i(m\phi - kz \cos \zeta)}. \quad (\text{B.21})$$

usando a relação,

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

e fazendo algumas manipulações algébricas, teremos:

$$E_0 \left[\frac{ih\rho}{kr} J'_m(\rho) \cos \zeta \int_0^{2\pi} e^{-i(m\phi + \rho \cos \phi)} \cos \zeta d\phi - \frac{mh}{kr} J_m(\rho) \cos \zeta \int_0^{2\pi} e^{-i(m\phi + \rho \cos \phi)} \sin \zeta d\phi - \frac{\rho^2}{kr^2} J_m(\rho) \sin \zeta \int_0^{2\pi} e^{-i(m\phi + \rho \cos \phi)} d\phi \right]. \quad (\text{B.23})$$

Temos as seguintes integrais,

$$\mathcal{I}_n^{(1)} = \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} d\phi, \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{I}_n^{(2)} = \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} \cos \phi d\phi, \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{I}_n^{(3)} = \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} \sin \phi d\phi. \quad (\text{B.26})$$

Sendo que a representação integral de Bessel é dada por:

$$J_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} d\phi. \quad (\text{B.27})$$

Assim, identificamos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n^{(1)} &= 2\pi(-i)^n J_n(\rho), \\ \mathcal{I}_n^{(2)} &= 2\pi i(-i)^n J'_n(\rho), \\ \mathcal{I}_n^{(3)} &= 2\pi(-i)^n \frac{n}{\rho} J_n(\rho), \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Logo,

$$-\frac{E_0}{kr} 2\pi (-i)^n \left[\frac{h}{\rho} \left(m^2 J_m(\rho) J_m(\rho) + \rho^2 J'_m(\rho) J'_m(\rho) \right) \cos \zeta + \frac{\rho^2}{r} \sin \zeta J_m(\rho) J_m(\rho) \right]. \quad (\text{B.29})$$

Agora, resolvendo o lado direito

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\phi \left[A_n \mathbf{M}_{\mathbf{n}}^{(1)} + B_n \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{*(1)}, \quad (\text{B.30})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{*(1)} d\phi + B_n \int_0^{2\pi} \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{*(1)} d\phi \right]. \quad (\text{B.31})$$

Quando $m = n$, $\delta_{m,n} = 1$. Portanto,

$$2\pi \frac{A_m}{kr^2} h \rho 2m J'_m(\rho) J'_m(\rho) + 2\pi \frac{B_m}{k^2 r^2} \left[h^2 \left(m^2 J_m(\rho) J_m(\rho) + \rho^2 J'_m(\rho) J'_m(\rho) \right) + \frac{\rho^4}{r^2} J_m(\rho) J_m(\rho) \right]. \quad (\text{B.32})$$

Comparando os lados esquerdo e direito, finalmente encontramos

$$\begin{aligned} A_n &= 0, \\ B_n &= \frac{E_0 (-i)^n}{k \sin \zeta}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Semelhantemente para o caso II, encontramos

$$\begin{aligned} B_n &= 0, \\ A_n &= -i \frac{E_0 (-i)^n}{k \sin \zeta}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Lembrando que agora o campo elétrico inicial está polarizado na direção \hat{e}_y .

APÊNDICE C – Componentes dos campos elétrico e magnético para o cilindro homogêneo

As expressões para os campos elétrico e magnético (\mathbf{E}, \mathbf{H}) são expressas em termo dos harmônicos cilíndricos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} , os quais estão descritos no Apêndice B. Neste Apêndice, apresentaremos cada componente (r, ϕ, z) dos campos elétrico e magnético, incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), espalhados ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) e internos ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) para o espalhamento devido a um cilindro homogêneo, para as polarizações TM e TE que podem ser conferidos nas referências [18, 51, 52] em especial iremos usar a notação simplificada da referência [25].

$$\begin{aligned}\gamma &= E_0 e^{-ikz \cos \zeta}, \\ \Phi_n(\phi) &= (-i)^n \cos(n\phi), \\ \Theta_n(\phi) &= (-i)^n \sin(n\phi).\end{aligned}\tag{C.1}$$

C.1 Caso I: Polarização TM

Como vimos no 3.2, temos os coeficientes das expansões $a_n^{(I)}, b_n^{(I)}, c_n^{(I)}$ e $d_n^{(I)}$ (Equações 3.34 a 3.37) dos campos eletromagnéticos em termo dos harmônicos cilíndricos vetoriais \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n para o caso I, onde $\mathbf{E}_i^{(I)} \parallel xz$. Lembrando que estes coeficientes foram encontrados a partir das condições de contorno das componentes tangenciais dos campos na superfície do centro espalhador em $r = a$

- **Campo elétrico e magnético incidente ($\mathbf{E}_i^{(I)}, \mathbf{H}_i^{(I)}$):**

Região $r \geq a$, atrás do cilindro.

$$\mathbf{E}_i^{(I)} \left\{ \begin{aligned} E_{ir}^{(I)} &= -i\gamma \cos \zeta \left(J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n'(\rho) \right) \hat{e}_r \\ E_{i\phi}^{(I)} &= 2i\gamma \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \frac{n}{\rho} J_n(\rho) \hat{e}_\phi \\ E_{iz}^{(I)} &= \gamma \sin \zeta \left(J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n(\rho) \right) \hat{e}_z. \end{aligned} \right.\tag{C.2}$$

$$\mathbf{H}_i^{(I)} \begin{cases} H_{ir}^{(I)} = \frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\rho} \Theta_n(\phi) J_n(\rho) \hat{e}_r \\ H_{i\phi}^{(I)} = \frac{ik}{\omega\mu} \gamma \left(J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n'(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\ H_{iz}^{(I)} = 0 \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Lembrando que $\rho = kr \sin \zeta$. No desenvolvimento destas equações utilizamos a relação ($J_{-n} = (-1)^n J_n = (-i)^{2n} J_n$) das funções de Bessel de modo que tenhamos um somatório que se inicia em $n = 1$.

• **Campo elétrico e magnético espalhado** ($\mathbf{E}_s^{(I)}, \mathbf{H}_s^{(I)}$):

Região $r \geq a$, à frente do cilindro.

$$\mathbf{E}_s^{(I)} \begin{cases} E_{sr}^{(I)} = \gamma \left[i \cos \zeta b_0^{(I)} H_0'^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(i \cos \zeta b_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) + \frac{n}{\rho} a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_r \\ E_{s\phi}^{(I)} = -2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(a_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) + i \cos \zeta \frac{n}{\rho} b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\ E_{sz}^{(I)} = -\gamma \sin \zeta \left(b_0^{(I)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{H}_s^{(I)} \begin{cases} H_{sr}^{(I)} = \frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(i \cos \zeta a_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) - \frac{n}{\rho} b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_r \\ H_{s\phi}^{(I)} = -\frac{k}{\omega\mu} \gamma \left[i b_0^{(I)} H_0'^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho} \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) + i b_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ H_{sz}^{(I)} = -\frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

• **Campo elétrico e magnético interno** ($\mathbf{E}_1^{(I)}, \mathbf{H}_1^{(I)}$):

Região $0 \leq r \leq a$, dentro do cilindro.

$$\mathbf{E}_1^{(I)} \begin{cases} E_{1r}^{(I)} = -\frac{i}{m}\gamma \left[\cos \zeta c_0^{(I)} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\cos \zeta c_n^{(I)} J_n'(\rho_1) - m \frac{n}{\rho_1} d_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_r \\ E_{1\phi}^{(I)} = \frac{2i}{m}\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho_1} \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\rho_1) - m d_n^{(I)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_\phi \\ E_{1z}^{(I)} = \frac{\rho_1}{k_1 r} \gamma \left(c_0^{(I)} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) c_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{H}_1^{(I)} \begin{cases} H_{1r}^{(I)} = \frac{2ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(m \frac{n}{\rho_1} c_n^{(I)} J_n(\rho_1) - \cos \zeta d_n^{(I)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_r \\ H_{1\phi}^{(I)} = \frac{ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \left[m c_0^{(I)} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m c_n^{(I)} J_n'(\rho_1) - \frac{n}{\rho_1} \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ H_{1z}^{(I)} = \frac{2\rho_1}{\omega\mu_1 r} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) d_n^{(I)} J_n(\rho_1) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Neste caso temos $\rho_1 = kr\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ onde $m = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 / \varepsilon \mu}$, que é o índice de refração relativo entre os meios.

C.2 Caso II: Polarização TE

Semelhantemente, para o modo TE temos os coeficientes das expansões $a_n^{(II)}$, $b_n^{(II)}$, $c_n^{(II)}$ e $d_n^{(II)}$ (Equações 3.38 a 3.41) dos campos eletromagnéticos onde $\mathbf{E}_i^{(II)} \perp xz$.

- **Campo elétrico e magnético incidente ($\mathbf{E}_i^{(II)}$, $\mathbf{H}_i^{(II)}$):**

Região $r \geq a$, atrás do cilindro.

$$\mathbf{E}_i^{(II)} \begin{cases} E_{ir}^{(II)} = 2i\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \frac{n}{\rho} J_n(\rho) \hat{e}_r \\ E_{i\phi}^{(II)} = i\gamma \left(J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n'(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\ E_{iz}^{(II)} = 0 \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{H}_i^{(II)} \begin{cases} H_{ir}^{(II)} = \frac{ik}{\omega\mu} \gamma \cos \zeta \left[J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n'(\rho) \right] \hat{e}_r \\ H_{i\phi}^{(II)} = -\frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\rho} \Theta_n(\phi) J_n(\rho) \hat{e}_\phi \\ H_{iz}^{(II)} = -\frac{k}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \left(J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n(\rho) \right) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

- **Campo elétrico e magnético espalhado** ($\mathbf{E}_s^{(II)}, \mathbf{H}_s^{(II)}$):

Região $r \geq a$, à frente do cilindro.

$$\mathbf{E}_s^{(II)} \begin{cases} E_{sr}^{(II)} = 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(\cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - i \frac{n}{\rho} a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_r \\ E_{s\phi}^{(II)} = \gamma \left[i a_0^{(II)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho} \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - i a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ E_{sz}^{(II)} = 2i\gamma \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{H}_s^{(II)} \begin{cases} H_{sr}^{(II)} = \frac{k}{\omega\mu} \gamma \left[-i \cos \zeta a_0^{(II)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho} b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - i \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_r \\ H_{s\phi}^{(II)} = \frac{2k}{\omega\mu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(i \cos \zeta \frac{n}{\rho} a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\ H_{sz}^{(II)} = \frac{k}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \left(a_0^{(II)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

- **Campo elétrico e magnético interno** ($\mathbf{E}_1^{(II)}, \mathbf{H}_1^{(II)}$):

Região $0 \leq r \leq a$, dentro do cilindro.

$$\mathbf{E}_1^{(II)} \begin{cases} E_{1r}^{(II)} = \frac{2i}{m} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(m \frac{n}{\rho_1} d_n^{(II)} J_n(\rho_1) - \cos \zeta c_n^{(II)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_r \\ E_{1\phi}^{(II)} = \frac{i}{m} \gamma \left[m d_0^{(II)} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m d_n^{(II)} J_n'(\rho_1) - \frac{n}{\rho_1} \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ E_{1z}^{(II)} = 2\gamma \frac{\rho_1}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) c_n^{(II)} J_n(\rho_1) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{H}_1^{(II)} \begin{cases} H_{1r}^{(II)} = \frac{ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \left[\cos \zeta d_0^{(II)} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\cos \zeta d_n^{(II)} J_n'(\rho_1) - m \frac{n}{\rho_1} c_n^{(II)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_r \\ H_{1\phi}^{(II)} = -\frac{2ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho_1} \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\rho_1) - m c_n^{(II)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_\phi \\ H_{1z}^{(II)} = -\frac{\rho_1}{\omega\mu_1 r} \gamma \left(d_0^{(II)} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) d_n^{(II)} J_n(\rho_1) \right) \hat{e}_z. \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

C.3 Construção do sistema para os modos TM e TE

Utilizando as condições de contorno na interface de separação entre dois meios (Equação 3.31), e tendo em mão as expressões explícitas dos campos incidente, interno e espalhado (Apêndice C.1), podemos escrever para cada estado de polarização (modo TM e modo TE) dois sistemas com quatro equações algébricas, com os coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n .

- **Caso I: Modo TM:** Construindo as equações relacionadas ao campo elétrico.

$$\begin{aligned} &\text{Em } r = a, \\ &(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{e}_r = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Primeiro, vamos construir o sistema para o modo TM. Substituindo em C.14 as equações C.2, C.4 e C.6 encontramos

$$\begin{aligned}
& \left[2i\gamma \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \frac{n}{\rho} J_n(\rho) \hat{e}_\phi \right. \\
& + \gamma \sin \zeta \left(J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n(\rho) \right) \hat{e}_z \\
& + (-2\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) + i \cos \zeta \frac{n}{\rho} b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\
& + (-\gamma \sin \zeta) \left(b_0^{(I)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_z \\
& - \frac{2i}{m} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho_1} \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\rho_1) - m d_n^{(I)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_\phi \\
& \left. - \frac{\rho_1}{k_1 r} \gamma \left(c_0^{(I)} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) c_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right) \hat{e}_z \right] \times \hat{e}_r = 0,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

lembrando que em $r = a$, temos $x = ka$ que é o nosso parâmetro de tamanho e $\rho = kr \sin \zeta \rightarrow \xi = x \sin \zeta$ enquanto que $\rho_1 = kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta} \rightarrow \eta = x \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$, e $k_1 = km$ logo

$$\begin{aligned}
& \left\{ 2i\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left[im\eta \xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\eta n \cos \zeta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\eta) \right. \right. \\
& + m\eta \xi d_n^{(I)} J_n'(\eta) + m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) \left. \right] \hat{e}_\phi \\
& + \left[\gamma \sin \zeta \left(m\xi J_0(\xi) - m\xi b_0^{(I)} H_0^{(1)}(\xi) - \eta c_0^{(I)} J_0(\eta) \right) \right. \\
& \left. + 2\gamma \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m\xi J_n(\xi) - m\xi b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \eta c_n^{(I)} J_n(\eta) \right) \right] \hat{e}_z \left. \right\} \times \hat{e}_r = 0,
\end{aligned} \tag{C.16}$$

fazendo o produto vetorial entre, $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = -\hat{e}_z$ e $\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\phi$ e igualando a zero, encontramos o primeiro par de equações para o modo TM,

$$\begin{aligned}
(i) \quad & im\eta \xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\eta n \cos \zeta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\eta) + m\eta \xi d_n^{(I)} J_n'(\eta) = -m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) \\
(ii) \quad & m\xi b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \eta c_n^{(I)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi).
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Construindo as equações relacionadas ao campo magnético.

Em $r = a$,

$$(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{e}_r = 0. \tag{C.18}$$

Agora, substituímos C.18 em C.3, C.5 e C.7

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{ik}{\omega\mu} \gamma \left(J'_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J'_n(\rho) \right) \hat{e}_\phi \right. \\
& + 0 \hat{e}_z \\
& + \left. \left(-\frac{k}{\omega\mu} \gamma \right) \left[i b_0^{(I)} H'_0{}^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho} \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) + i b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_\phi \right. \\
& + \left. \left(-\frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \right) \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_z \right. \tag{C.19} \\
& + \frac{ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \left[m c_0^{(I)} J'_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m c_n^{(I)} J'_n(\rho_1) - \frac{n}{\rho_1} \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_\phi \\
& - \frac{2\rho_1}{\omega\mu_1 r} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) d_n^{(I)} J_n(\rho_1) \hat{e}_z \Big] \times \hat{e}_r = 0.
\end{aligned}$$

Assim como foi para o campo elétrico, em $x = a$, temos,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[-\frac{ik\gamma}{\omega\mu} \left(m\xi\eta J'_0(\xi) + m\xi\eta b_0^{(I)} H'_0{}^{(1)}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_0^{(I)} J'_0(\eta) \right) \right. \right. \\
& - \frac{2ik\gamma}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m\xi\eta J'_n(\xi) + im\eta n \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) \right. \\
& - m\xi\eta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J'_n(\eta) + \xi \mathcal{Z} \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) \Big] \hat{e}_\phi \\
& \left. \left. - \left[\frac{2k\gamma}{\omega\mu} \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(im\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(I)} J_n(\eta) \right) \right] \hat{e}_z \right\} \times \hat{e}_r = 0, \tag{C.20}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu\varepsilon_1/\mu_1\varepsilon}$ é a impedância intrínseca do meio, e mais uma vez fazendo o produto vetorial entre, $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = -\hat{e}_z$ e $\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\phi$ e igualando a zero, encontramos o segundo par de equações para o modo TM,

$$\begin{aligned}
& (iii) \quad im\eta n \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J'_n(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) = -m\eta \xi J'_n(\xi) \\
& (iv) \quad im\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(I)} J_n(\eta) = 0. \tag{C.21}
\end{aligned}$$

De modo que temos o primeiro sistema de equações para os coeficientes de Lorentz-Mie.

$$\left\{ \begin{array}{l}
im\eta \xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\eta n \cos \zeta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\eta) + m\eta \xi d_n^{(I)} J'_n(\eta) = -m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) \\
m\xi b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \eta c_n^{(I)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi) \\
im\eta n \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J'_n(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) = -m\eta \xi J'_n(\xi) \\
im\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(I)} J_n(\eta) = 0.
\end{array} \right. \tag{C.22}$$

Seguimos exatamente os mesmos procedimentos para encontrar o segundo sistema de equações, relacionado ao modo TE.

- **Caso II: Modo TE:** Construindo as equações relacionadas o campo elétrico.

$$\begin{aligned} & \text{Em } r = a, \\ & (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{e}_r = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Agora, vamos construir o sistema para o modo TE. Substituindo em C.23 as equações C.8, C.10 e C.12 encontramos

$$\begin{aligned} & \left[i\gamma \left(J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n'(\rho) \right) \hat{e}_\phi \right. \\ & + 0\hat{e}_z \\ & + \gamma \left[i a_0^{(II)} H_0'^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho} \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - i a_n^{(II)} H_n'^{(1)}(\rho) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ & + 2i\gamma \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_z \\ & - \frac{i}{m} \gamma \left[m d_0^{(II)} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m d_n^{(II)} J_n'(\rho_1) - \frac{n}{\rho_1} \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\rho_1) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ & \left. - 2\gamma \frac{\rho_1}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) c_n^{(II)} J_n(\rho_1) \hat{e}_z \right] \times \hat{e}_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

analogamente ao anterior, em $r = a$, temos $x = ka$ que é o nosso parâmetro de tamanho e $\rho = kr \sin \zeta \rightarrow \xi = x \sin \zeta$ enquanto que $\rho_1 = kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta} \rightarrow \eta = x \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$, e $k_1 = km$ logo

$$\begin{aligned} & \left\{ i\gamma \left[m\eta \xi J_0'(\xi) + m\eta \xi a_0^{(II)} H_0'^{(1)}(\xi) - m\eta \xi d_0^{(II)} J_0'(\eta) \right. \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(m\eta \xi J_n'(\xi) - im\eta n \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - m\eta \xi a_n^{(II)} H_n'^{(1)}(\xi) \right. \\ & \left. \left. - m\eta \xi d_n^{(II)} J_n'(\eta) + n\xi \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\eta) \right) \right] \hat{e}_\phi \\ & \left. + 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(m\xi b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i\eta c_n^{(II)} J_n(\eta) \right) \hat{e}_z \right\} \times \hat{e}_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

fazendo o produto vetorial entre, $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = -\hat{e}_z$ e $\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\phi$ e igualando a zero, encontramos o primeiro par de equações para o modo TE,

$$\begin{aligned} (i) \quad & m\eta \xi a_n^{(II)} H_n'^{(1)}(\xi) + im\eta n \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\eta) + m\eta \xi d_n^{(II)} J_n'(\eta) = m\eta \xi J_n'(\xi) \\ (ii) \quad & m\xi b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i\eta c_n^{(II)} J_n(\eta) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Construindo as equações relacionadas ao campo magnético.

$$\begin{aligned} & \text{Em } r = a, \\ & (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{e}_r = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Agora, substituimos C.27 em C.9, C.11 e C.13

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\rho} \Theta_n(\phi) J_n(\rho) \hat{e}_\phi \right. \\ & - \frac{k}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \left(J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) J_n(\rho) \right) \hat{e}_z \\ & + \frac{2k}{\omega\mu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(i \cos \zeta \frac{n}{\rho} a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) - b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_\phi \\ & + \frac{k}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \left(a_0^{(II)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\rho) \right) \hat{e}_z \\ & - \left(-\frac{2ik_1}{m\omega\mu_1} \gamma \right) \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left(\frac{n}{\rho_1} \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\rho_1) - m c_n^{(II)} J_n'(\rho_1) \right) \hat{e}_\phi \\ & \left. - \left(-\frac{\rho_1}{\omega\mu_1 r} \gamma \right) \left(d_0^{(II)} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) d_n^{(II)} J_n(\rho_1) \right) \hat{e}_z \right] \times \hat{e}_r = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Assim como foi para o campo elétrico, em $x = a$, temos,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2ik}{\omega\mu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\phi) \left[-m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) + m\eta n \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) \right. \right. \\ & + im\xi \eta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\eta) - m\xi \eta \mathcal{Z} c_n^{(II)} J_n'(\eta) \left. \right] \hat{e}_\phi \\ & + \frac{k}{\omega\mu} \gamma \sin \zeta \left[-m\xi J_0(\xi) + m\xi a_0^{(II)} H_0^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_0^{(II)} J_0(\eta) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\phi) \left(-m\xi J_n(\xi) + m\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(II)} J_n(\eta) \right) \right] \hat{e}_z \left. \right\} \times \hat{e}_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

onde $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu\varepsilon_1/\mu_1\varepsilon}$ é a impedância intrínseca do meio, e mais uma vez fazendo o produto vetorial entre, $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = -\hat{e}_z$ e $\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\phi$ e igualando a zero, encontramos o segundo par de equações para o modo TE,

$$\begin{aligned} (iii) \quad & m\eta n \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + im\xi \eta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi \eta \mathcal{Z} c_n^{(II)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) \\ (iv) \quad & m\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi). \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

De modo que temos o segundo sistema de equações para os coeficientes de Lorentz-Mie.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\eta\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) + im\eta n \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\eta) + m\eta\xi d_n^{(II)} J_n'(\eta) = m\eta\xi J_n'(\xi) \\ m\xi b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i\eta c_n^{(II)} J_n(\eta) = 0 \\ m\eta n \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + im\xi\eta b_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(II)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\eta n \cos \zeta J_n(\xi) \\ m\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z}\eta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi). \end{array} \right. \quad (C.31)$$

C.4 Solução do sistema

Vamos resolver cada sistema de equações C.22 e C.31, separadamente.

• **Solução do sistema C.22, referente ao modo TM:**

Resolvendo a equação (iv) de C.21 para $d_n^{(I)}$,

$$(iv) \quad im\xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z}\eta d_n^{(I)} J_n(\eta) = 0 \quad (C.32)$$

$$d_n^{(I)} = -\frac{im\xi H_n^{(1)}(\xi)}{\mathcal{Z}\eta J_n(\eta)} a_n^{(I)}.$$

Resolvendo a equação (ii) de C.17 para $c_n^{(I)}$,

$$(ii) \quad m\xi b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) + \eta c_n^{(I)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi) \quad (C.33)$$

$$c_n^{(I)} = \frac{1}{\eta J_n(\eta)} m\xi \left(J_n(\xi) - b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) \right).$$

Resolvendo a equação (iii) de C.21 para $b_n^{(I)}$,

$$(iii) \quad im\eta n \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta b_n^{(I)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) = -m\eta\xi J_n'(\xi)$$

$$b_n^{(I)} = \frac{1}{m\xi\eta H_n^{(1)'}(\xi)} \left(m\eta\xi J_n'(\xi) + im\eta n \cos \zeta a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m\xi\eta \mathcal{Z} c_n^{(I)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(I)} J_n(\eta) \right). \quad (C.34)$$

Substituindo em $b_n^{(I)}$ C.34, os coeficientes $c_n^{(I)}$ C.33 e $d_n^{(I)}$ C.32

$$b_n^{(I)} = \frac{1}{\xi(m\xi\mathcal{Z}J_n'(\eta)H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta)H_n^{(1)'}(\xi))} \times \quad (C.35)$$

$$\left[\xi \left(m\xi\mathcal{Z}J_n'(\eta)J_n(\xi) - \eta J_n(\eta)J_n'(\xi) \right) + in \cos \zeta \eta J_n(\eta)H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) a_n^{(I)} \right],$$

e fazendo

$$\mathcal{B}_n = \xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi) \right], \quad (\text{C.36})$$

$$\mathcal{D}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (\text{C.37})$$

$$\mathcal{V}_n = \xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right], \quad (\text{C.38})$$

assim

$$b_n^{(I)} = \frac{1}{\mathcal{V}_n} \left(\mathcal{B}_n + i \mathcal{D}_n a_n^{(I)} \right). \quad (\text{C.39})$$

Resolvendo a equação (i) de C.17 para $a_n^{(I)}$,

$$(i) \quad i m \eta \xi a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - m \eta n \cos \zeta b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(I)} J_n(\eta) + m \eta \xi d_n^{(I)} J'_n(\eta) = -m \eta n \cos \zeta J_n(\xi)$$

$$a_n^{(I)} = \frac{1}{H_n^{(1)}(\xi)} \left[i \frac{n}{\xi} \cos \zeta J_n(\xi) - i \frac{n}{\xi} \cos \zeta H_n^{(1)}(\xi) b_n^{(I)} - i \frac{n}{m \eta} \cos \zeta J_n(\eta) c_n^{(I)} + i J'_n(\eta) d_n^{(I)} \right] \quad (\text{C.40})$$

Substituindo em $a_n^{(I)}$ C.40, os coeficientes $b_n^{(I)}$ C.39, $c_n^{(I)}$ C.33 e $d_n^{(I)}$ C.32

$$a_n^{(I)} \left(i \xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \frac{m}{\mathcal{L}} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right] + i n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) \frac{n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right)}{\xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]} \right)$$

$$= n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) - n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) \frac{\xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi) \right]}{\xi \left[m \mathcal{L} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]},$$

onde identificamos \mathcal{B}_n , \mathcal{D}_n , e \mathcal{V}_n , e fazendo

$$\mathcal{C}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (\text{C.41})$$

$$\mathcal{W}_n = i \xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \frac{m}{\mathcal{L}} \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right], \quad (\text{C.42})$$

temos

$$a_n^{(I)} = \frac{\mathcal{V}_n \mathcal{C}_n - \mathcal{D}_n \mathcal{B}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}. \quad (\text{C.43})$$

Desta maneira encontramos

$$b_n^{(I)} = \frac{\mathcal{W}_n \mathcal{B}_n + i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (\text{C.44})$$

$$c_n^{(I)} = \frac{-2im\xi \mathcal{W}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (\text{C.45})$$

$$d_n^{(I)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi \mathcal{Z} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}. \quad (\text{C.46})$$

onde e necessario usarmos o Wronskiano ($H_n^{(1)'}(x)J_n(x) - J_n'(x)H_n^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}$) em $c_n^{(I)}$ e $d_n^{(I)}$.

Semelhantemente a solução para o segundo sistema   descrita abaixo.

• **Solução do sistema C.31, referente ao modo TE:**

Resolvendo a equação (iv) de C.30 para $d_n^{(II)}$,

$$(iv) \quad m\xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{Z} \eta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\xi J_n(\xi) \quad (\text{C.47})$$

$$d_n^{(II)} = \frac{1}{\mathcal{Z} \eta J_n(\eta)} m\xi \left(J_n(\xi) - a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) \right).$$

Resolvendo a equação (ii) de C.26 para $c_n^{(II)}$,

$$(ii) \quad m\xi b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i\eta c_n^{(II)} J_n(\eta) = 0 \quad (\text{C.48})$$

$$c_n^{(II)} = \frac{im\xi H_n^{(1)}(\xi)}{\eta J_n(\eta)} b_n^{(II)}.$$

Resolvendo a equao (iii) de C.30 para $b_n^{(II)}$,

$$(iii) \quad m\eta n \cos \zeta a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + im\xi \eta b_n^{(II)} H_n^{(1)'}(\xi) - m\xi \eta \mathcal{Z} c_n^{(II)} J_n'(\eta) + \xi \mathcal{Z} n \cos \zeta d_n^{(II)} J_n(\eta) = m\eta n \cos \zeta J_n(\xi)$$

$$b_n^{(II)} = \frac{1}{H_n^{(1)'}(\xi)} \left(\frac{n \cos \zeta}{i\xi} J_n(\xi) - \frac{n \cos \zeta}{i\xi} H_n^{(1)}(\xi) a_n^{(II)} + \frac{\mathcal{Z}}{i} J_n'(\eta) c_n^{(II)} - \frac{\mathcal{Z} n \cos \zeta}{im\eta} J_n(\eta) d_n^{(II)} \right). \quad (\text{C.49})$$

Substituindo em $b_n^{(II)}$ C.49, os coeficientes $c_n^{(II)}$ C.48 e $d_n^{(II)}$ C.47

$$\begin{aligned} & -b_n^{(II)} \left[\xi \left(m\xi \mathcal{Z} J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) \right) \right] \\ & = i \left[n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) - n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) a_n^{(II)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

e fazendo

$$\mathcal{C}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (\text{C.51})$$

$$\mathcal{D}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (\text{C.52})$$

$$\mathcal{V}_n = \xi \left[m \mathcal{Z} \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n'^{(1)}(\xi) \right], \quad (\text{C.53})$$

assim

$$b_n^{(II)} = \frac{i}{\mathcal{V}_n} \left(\mathcal{D}_n a_n^{(I)} - \mathcal{C}_n \right). \quad (\text{C.54})$$

Resolvendo a equação (i) de C.26 para $a_n^{(II)}$,

$$(i) \quad m \eta \xi a_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) + i m \eta n \cos \zeta b_n^{(II)} H_n^{(1)}(\xi) - \xi n \cos \zeta c_n^{(II)} J_n(\eta) + m \eta \xi d_n^{(II)} J_n'(\eta) = m \eta \xi J_n'(\xi)$$

$$a_n^{(II)} = \frac{1}{H_n^{(1)}(\xi)} \left[J_n'(\xi) - \frac{i n \cos \zeta}{\xi} H_n^{(1)}(\xi) b_n^{(II)} + \frac{n \cos \zeta}{m \eta} J_n(\eta) c_n^{(II)} - J_n'(\eta) d_n^{(II)} \right] \quad (\text{C.55})$$

Substituindo em $a_n^{(II)}$ C.55, os coeficientes $b_n^{(II)}$ C.54, $c_n^{(II)}$ C.48 e $d_n^{(II)}$ C.47

$$\begin{aligned} a_n^{(II)} & \left((-i) i \xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \frac{m}{\mathcal{Z}} \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right] + \frac{\left(n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) \right)^2}{\xi \left[m \mathcal{Z} \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n'^{(1)}(\xi) \right]} \right) \\ & = -(-i) i \xi \left[\frac{m}{\mathcal{Z}} \xi J_n'(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J_n'(\xi) \right] + n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right) \frac{n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right)}{\xi \left[m \mathcal{Z} \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n'^{(1)}(\xi) \right]}, \end{aligned}$$

onde identificamos \mathcal{A}_n , \mathcal{D}_n , e \mathcal{V}_n , e fazendo

$$\mathcal{A}_n = i \xi \left[\frac{m}{\mathcal{Z}} \xi J_n'(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J_n'(\xi) \right], \quad (\text{C.56})$$

$$\mathcal{W}_n = i \xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \frac{m}{\mathcal{Z}} \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right] \quad (\text{C.57})$$

temos

$$a_n^{(II)} = - \frac{\mathcal{A}_n \mathcal{V}_n - i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}. \quad (\text{C.58})$$

Desta maneira encontramos

$$b_n^{(II)} = -i \frac{\mathcal{D}_n \mathcal{A}_n + i \mathcal{D}_n \mathcal{C}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (\text{C.59})$$

$$c_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (\text{C.60})$$

$$d_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{V}_n}{\pi \mathcal{L} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}. \quad (\text{C.61})$$

onde e necessario usarmos o Wronskiano ($H_n^{(1)}(x)J_n(x) - J_n'(x)H_n^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}$) em $c_n^{(II)}$ e $d_n^{(II)}$.

APÊNDICE D – Medidas de intensidade e potência de uma radiação eletromagnética

Vamos comentar sobre as medidas de intensidade e potência de uma radiação eletromagnética, lembrando que unidade de intensidade de radiação eletromagnética no sistema *MKS* é W/m^2 . Muitos países utilizam unidades que não seja o *MKS* e para contornar este problema uma proposta interessante é utilizar uma quantidade que normalize e ao mesmo possa alcançar grandes diferenças de magnitudes (um exemplo é a intensidade sonora). Uma quantidade interessante para expressar uma grandeza física é o decibel (*dB*). Assim, propõe-se a seguinte definição:

$$dB = 10 \log_{10} \left(\frac{X_{out}}{X_{in}} \right), \quad (D.1)$$

onde X_{out} e X_{in} representam as grandezas físicas de entrada e saída, respectivamente. Geralmente X_{in} é a grandeza de referência. Note-se que *dB* pode ser positivo ou negativo. Positivo significa que $X_{out} > X_{in}$ e isto representa um ganho, caso contrário, uma perda. Se X representa a tensão, *dB* estará associado a uma tensão, se X representa corrente, *dB* estará associado a corrente, e assim por diante. Mas se o intuito for associar *dB* à potência elétrica, é preciso tomar um certo cuidado para manter-se a coerência. Se o intuito é encontrar a razão entre potência de saída (P_{out}) com potência de entrada (P_{in}) e ainda manter a definição de *dB* para tensão e corrente, pode-se escrever:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{V_{out}^2 R_{in}}{R_{out} V_{in}^2}, \quad (D.2)$$

onde R_{in} e R_{out} são as resistências de carga de entrada e saída do circuito elétrico, respectivamente. Multiplicando o $10 \log_{10}$ em ambos os lados da expressão acima (Equação D.2) e tomando $R_{in} = R_{out}$, por questão de facilidade de cálculo, tem-se:

$$10 \log_{10} \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{V_{in}} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{V_{in}} \right). \quad (D.3)$$

Com isto, vê-se que o melhor é definir o ganho ou perda de tensão e corrente como sendo $20 \log_{10}$, e não como $10 \log_{10}$, pois desta forma não teremos inconsistência e, portanto, pode-se definir:

$$dB \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right), \quad (D.4)$$

$$dB \equiv 20 \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{V_{in}} \right), \quad (D.5)$$

$$dB \equiv 20 \log_{10} \left(\frac{I_{out}}{I_{in}} \right). \quad (D.6)$$

É comum definir os valores de referência como, por exemplo, μV e mV e, portanto, usa-se a seguinte notação:

$$P_{dB_{\mu V}} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{1\mu V} \right), \quad (D.7)$$

$$dB_{mV} = 20 \log \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{1mV} \right). \quad (D.8)$$

Assim, para o caso de potência, tem-se:

$$P_{dB_{\mu W}} \equiv dB_{\mu} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{out(\mu W)}}{1\mu W} \right), \quad (D.9)$$

$$P_{dB_{mW}} \equiv dB_m = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{out(mW)}}{1mW} \right). \quad (D.10)$$

Assim, em muitos casos os dados experimentais a potência medida de um transmissor de micro-ondas será dada em dB_m e, portanto, utilizando a expressão acima é possível encontrar a potência de saída em W .

Com as apresentações gerais descritas acima, passaremos agora a descrever sobre o formalismo envolvendo o espalhamento eletromagnético.