

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Anthony José García Guillén

O Lagrangiano de Mañé

Juiz de Fora

2022

Anthony José García Guillén

O Lagrangiano de Mañé

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria / Topologia.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Coorientador: Prof. Dr. Rafael O. Ruggiero

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Guillén, Anthony José García.

O Lagrangiano de Mañé / Anthony José García Guillén. – 2022.
60 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes

Coorientador: Rafael O. Ruggiero

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. Lagrangiano. 2. Hamiltoniano. 3. Lagrangiano de Mañé. I. Gomes,
José Barbosa, orient. II. Ruggiero, Rafael O., coorient. III. Título.

Anthony Jose Garcia Guillen

O Lagrangiano de Mañé

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em matemática. Área de concentração: Geometria / Topologia

Aprovada em 03 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. **Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez** - Coorientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro

Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Reginaldo Braz Batista

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Jailton Viana da Conceição

Universidade Federal de Lavras

Prof. Dr. Rogério Casagrande

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 07/03/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Jose Barbosa Gomes, Professor(a)**, em 07/03/2022, às 15:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jailton Viana da Conceição, Usuário Externo**, em 08/03/2022, às 16:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Reginaldo Braz Batista, Professor(a)**, em 08/03/2022, às 17:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Jorge Dias Carneiro, Usuário Externo**, em 09/03/2022, às 10:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Casagrande, Professor(a)**, em 09/03/2022, às 15:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Ruggiero, Usuário Externo**, em 16/03/2022, às 09:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0701174** e o código CRC **DF8FADC0**.

Dedico este trabalho aos meus pais Luz e Miguel.

AGRADECIMENTOS

Foi um longo caminho que me trouxe até este momento, um caminho cheio de pessoas maravilhosas que, direta ou indiretamente, com seus conselhos, palavras de encorajamento ou puxão de orelha me ajudaram a concluir esta etapa e seria impossível para mim poder agradecer a todos, mas aqui vou fazer uma tentativa.

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional desde minha graduação. Eu certamente não teria conseguido sem a sua ajuda.

Agradeço ao meu orientador professor José Barbosa pela paciência e dedicação. Ao meu co-orientador professor Rafael Ruggiero pelas correções e ideias que contribuíram para o trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFJF por me dar a oportunidade de fazer meu mestrado em sua instituição.

Aos professores que fizeram parte da minha graduação na Universidad de los Andes. Em especial ao professor Marcos Lizana que me orientou nesse caminho.

Aos meus colegas da Universidad de los Andes Carlos, Dimary, Enmanuel e Rafael pelo apoio tanto academicamente como também no emocional.

Agradeço à CAPES pela bolsa de estudos recebida.

RESUMO

Apresentamos uma introdução às dinâmicas Hamiltoniana e Lagrangiana. Após, nos concentramos no estudo de Lagrangianos de Mañé em variedades compactas, para os quais nós apresentamos exemplos, algumas propriedades básicas, seu valor crítico de Mañé e o conjunto de Aubry projetado.

Palavras-chave: Lagrangiano. Hamiltoniano. Lagrangiano de Mañé.

ABSTRACT

We present an introduction to both Hamiltonian and Lagrangian dynamics. Then, we focus on the study of Mañé's Lagrangians on compact manifolds, for which we exhibit examples, some basic properties, their Mañé's critical value, and the projected Aubry set.

Keywords: Lagrangian. Hamiltonian. Mañé's Lagrangian.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mudança de coordenadas.	11
Figura 2 – Aplicação diferenciável.	13
Figura 3 – Homotopia por caminhos com pontos fixos.	18
Figura 4 – Homotopia de caminhos fechados.	19
Figura 5 – Produto de caminhos.	19
Figura 6 – Aplicação de recobrimento.	23
Figura 7 – Colando as curvas.	40
Figura 8 – Comutatividade.	47
Figura 9 – O campo $X = \phi_u$ no toro.	53
Figura 10 – O campo $X = \phi_u$ no toro.	54
Figura 11 – Projeção da função altura na esfera.	55
Figura 12 – Ilustrando a Transformada de Fenchel.	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS, FLUXOS E ÓRBITAS	11
2.1.1	<i>Definição de variedades diferenciais e exemplos</i>	11
2.1.2	<i>Aplicações diferenciáveis, subvariedades e fibrados.</i>	12
2.1.3	<i>Fluxos e órbitas</i>	15
2.2	HOMOTOPIAS	17
2.2.1	<i>Definição de homotopia e exemplos</i>	17
2.2.2	<i>O grupo fundamental</i>	19
2.2.3	<i>Conjuntos simplesmente conexos</i>	21
3	DINÂMICA LAGRANGIANA E HAMILTONIANA	24
3.1	LAGRANGIANOS	24
3.2	HAMILTONIANOS	28
3.3	A TRANSFORMADA DE LEGENDRE	30
3.4	SUBVARIEDADES LAGRANGIANAS	37
4	O VALOR CRÍTICO DE MAÑÉ E A EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI	40
4.1	O VALOR CRÍTICO DE MAÑÉ	40
4.2	A EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI	41
5	O LAGRANGIANO DE MAÑÉ	46
6	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – Interpretação geométrica das transformadas de Legendre e Fenchel na reta	60

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica Lagrangiana surge do estudo na Física do formalismo Lagrangiano, o qual foi introduzido no começo como uma reformulação da mecânica clássica para depois ser um objeto de estudo em outros campos como mecânica relativista e eletromagnetismo. Por exemplo, o formalismo Lagrangiano permite obter a segunda lei de Newton e as equações de Maxwell através das equações de Euler-Lagrange (ver Definição 3.1.4) de um Lagrangiano específico.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e TM seu fibrado tangente. Um Lagrangiano é simplesmente uma função contínua $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Mas, ficar restritos somente nessa condição nos impediria de fazer um estudo dinâmico, esta razão nos faz definir o que é um Lagrangiano de Tonelli (ver Definição 3.1.2). A dinâmica Hamiltoniana pode ser vista como um estudo análogo à dinâmica Lagrangiana mas feita agora no fibrado cotangente T^*M aproveitando a estrutura simplética deste.

O assunto principal desta dissertação é o Lagrangiano de Mañé, o qual foi introduzido por Mañé em (1). É um tipo de Lagrangiano, que é associado a um campo X , definido em M , da seguinte maneira: $L_X : TM \rightarrow \mathbb{R}$, $L_X(x, v) = \|v - X(x)\|_x^2$. Além de ser fonte de procura de contraexemplos, esse Lagrangiano tem sua própria importância de estudo. O próprio Mañé, em (1) já utilizou esse Lagrangiano para contraexemplo, no caso em que o Lagrangiano também depende do tempo.

O valor crítico de Mañé de L pode ser caracterizado de várias maneiras, uma delas usando o Hamiltoniano associado a L (ver (2), (3), (4)). Em (4), o Teorema 4-4.1 permite ver o valor crítico de L como o ínfimo dos $k \in \mathbb{R}$ para os quais $H^{-1}(-\infty, k)$ contém um gráfico Lagrangiano exato. A Teoria KAM fraca, em que Albert Fathi é pioneiro no seu desenvolvimento e divulgação, nos permite dar um tratamento do assunto Lagrangianos e Hamiltonianos do lado de Análise, ao contrário do tratamento clássico de Lagrangianos e Hamiltonianos pelo lado de métodos variacionais ou mesmo de teoria ergódica.

Agora, vamos descrever a distribuição dos assuntos deste trabalho por capítulo. No Capítulo 2 (Preliminares), nós fixamos algumas notações e fazemos uma breve revisão de conceitos básicos de geometria e equações diferenciais, tais como: variedades diferenciáveis, fibrados vetoriais, campos vetoriais, órbitas e fluxos. No Capítulo 3 são introduzidas as dinâmicas Lagrangianas e Hamiltonianas mostrando a conexão desses conceitos dada pela transformada de Legendre (ver Teorema 3.3.6). Também são dados exemplos de Lagrangianos de Tonelli como o Riemanniano, mecânico e magnético. Por último, fazemos uma breve revisão de conceitos básicos de geometria simplética. No Capítulo 4, na primeira seção, nós vamos definir o valor crítico de Mañé $c(L)$ junto com a ação potencial de Mañé. Na segunda seção, vamos definir a equação de Hamilton-Jacobi, a Barreira de Peierls a qual permite caracterizar o conjunto de Aubry, as soluções KAM fracas e sua relação com

as soluções de viscosidade. Além disso vamos mostrar uma caracterização do valor crítico de Mañé usando o Hamiltoniano associado a L . No Capítulo 5, nós damos a definição e apresentamos alguns exemplos e propriedades de Lagrangianos de Mañé. Nós mostramos que o valor crítico de Mañé do Lagrangiano de Mañé numa variedade compacta é zero, um resultado já conhecido. Também apresentamos o seguinte resultado, devido a (5): Se L_X satisfaz a condição de desconexão de Mather, então o conjunto de Aubry projetado é o conjunto recorrente por cadeias do fluxo de X em M . No Apêndice A, damos uma interpretação geométrica das transformadas de Fenchel e Legendre na reta.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos dar os resultados básicos de variedades diferenciáveis, campos vetoriais, fluxos, órbitas e homotopia baseando-nos em (6), (7) e (8) e apresentando exemplos focando principalmente na esfera e no toro.

2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS, FLUXOS E ÓRBITAS

2.1.1 Definição de variedades diferenciais e exemplos

Seja M um espaço topológico. Dizemos M é uma **variedade topológica**, de dimensão n , quando M é localmente Euclidiana de dimensão n , isto é, para todo $p \in M$, existem abertos $U \subseteq M$, com $p \in U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow W$. Nesse caso, o homeomorfismo $\phi : U \rightarrow W$ é chamado sistema de coordenadas ou carta, às vezes denotada por (U, ϕ) .

Um atlas em M é um conjunto ou família de cartas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}.$$

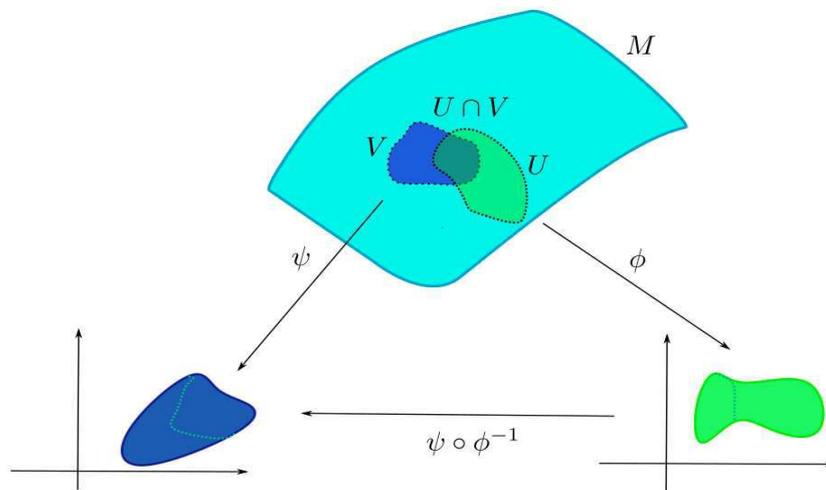
tal que a família $(U_i)_{i \in I}$ é uma cobertura de M .

Dada M uma variedade topológica de dimensão n , às vezes denotada M^n , e um atlas \mathcal{A} em M , dizemos que duas cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ são compatíveis de classe C^r quando $U \cap V = \emptyset$ ou quando a função, chamada mudança de coordenadas,

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é um difeomorfismo de Classe C^r .

Figura 1 – Mudança de coordenadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Denotamos por $\mathcal{U}^r(M)$ o conjunto de todos os atlas de classe C^r em M , munido da relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos.

Definição 2.1.1

1. Um atlas $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^r(M)$ é dito maximal quando para todo atlas $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{U}^r(M)$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, tem-se $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.
2. Uma estrutura diferenciável, de classe C^r , em M é um elemento maximal de $\mathcal{U}^r(M)$.
3. Uma **variedade diferenciável**, de classe C^r , é um par (M, \mathcal{D}) , onde M é uma variedade topológica e \mathcal{D} é uma estrutura diferenciável de classe C^r em M .

Teorema 2.1.2 *Seja M uma variedade topológica. Se $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^r(M)$, então existe uma única estrutura diferenciável $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{U}^r(M)$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$.*

Prova. Ver (6). ■

Exemplo 2.1.3 • *Para cada inteiro positivo n , o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é uma n -variedade diferenciável de classe C^∞ com a estrutura determinada pela única carta $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$.*

- *A esfera \mathbb{S}^n com a topologia induzida do \mathbb{R}^{n+1} é uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^∞ .*

Teorema 2.1.4 (Variedade Produto) *Sejam M_1, \dots, M_k variedades de dimensão n_1, \dots, n_k e classe C^{r_1}, \dots, C^{r_k} , respetivamente. O espaço produto $M = M_1 \times \dots \times M_k$ tem uma estrutura natural de variedade diferenciável, de dimensão $n_1 + \dots + n_k$ e classe C^r , onde $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$.*

Prova Ver (6), página 29. ■

Exemplo 2.1.5 (n-Toro) *Para n positivo, o n -toro é o espaço produto $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$. Pelo teorema anterior \mathbb{T}^n é uma n -variedade diferenciável de classe C^∞ . O 2-toro é chamado simplesmente de toro.*

2.1.2 Aplicações diferenciáveis, subvariedades e fibrados.

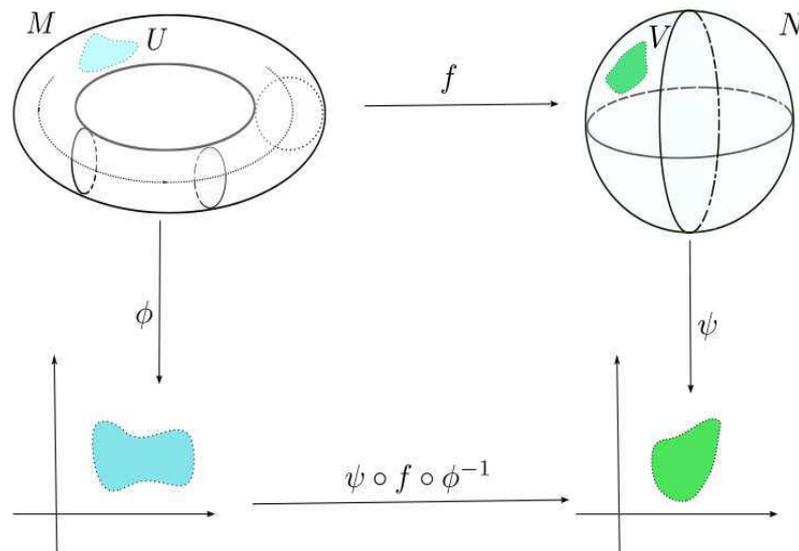
Vamos definir aplicações diferenciáveis entre variedades. Seja M^m e N^n variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f é diferenciável, de classe C^r , $r \geq 1$ se, para

cada ponto $p \in M$, existem cartas (U, ϕ) em M , $p \in U$ e (V, ψ) em N , com $f(p) \in V$, tais que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

é de classe C^r . Não é difícil provar que isto não depende da escolha das cartas.

Figura 2 – Aplicação diferenciável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em particular, uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, é diferenciável se $\psi \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, onde (ψ, U) é uma carta de M , com $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subseteq U$. O vetor tangente a α em $p = \alpha(0)$ é definido como o conjunto das curvas diferenciáveis $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tais que $\beta(0) = p$ e $(\psi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \alpha)'(0)$. Essa definição não depende da escolha da carta (ψ, U) . O **espaço tangente** a M em p , T_pM , é o conjunto dos vetores tangentes a curvas diferenciáveis passando por p . Segue-se que T_pM tem uma estrutura natural de espaço vetorial de dimensão m .

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades com $f(p) = q$, definimos $df : T_pM \rightarrow T_qN$ como a aplicação que ao vetor tangente em p à curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ associa o vetor tangente em q à curva $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$. É fácil ver que essa definição não depende da escolha da curva α e que df_p é uma transformação linear.

Definição 2.1.6 Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$, de classe C^r , $r \geq 1$, é

1. **Imersão** se df_p é injetora para todo $p \in M$.
2. **Mergulho** se é uma imersão injetora $f : M \rightarrow N$ que tenha uma inversa contínua $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$.

Definição 2.1.7 (Subvariedade) Seja M uma variedade diferenciável. Uma **subvariedade mergulhada** de M é um subconjunto $S \subseteq M$ que é uma variedade diferenciável com a topologia induzida por M , e dotado de uma estrutura diferenciável com a qual a inclusão $i : S \rightarrow M$ é uma imersão.

Definição 2.1.8 (Fibrado Tangente) Seja M uma variedade diferenciável. O **fibrado tangente** de M é o espaço TM definido como a união disjunta dos espaços tangentes a M ,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}.$$

Denotamos por $\pi : TM \rightarrow M$ a aplicação, sobrejetora, definida por $\pi(p, v) = p$, chamada **projeção sobre M** .

Teorema 2.1.9 Se M é uma variedade diferenciável, de classe C^r , $r \geq 1$, e dimensão m , então o fibrado tangente TM tem uma estrutura diferenciável natural, de classe C^{r-1} e dimensão $2m$. Além disso, com essa estrutura $\pi : TM \rightarrow M$ é de classe C^{r-1} .

Prova. Ver (6). ■

Definição 2.1.10 (Fibrado Cotangente) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m . Para cada $p \in M$, denotamos por T_p^*M o espaço dual $(T_pM)^*$, chamado

espaço cotangente em p . Os elementos $\omega \in T_p^*M$ são chamados **covetores em p** . Dado um sistema de coordenadas (U, ϕ) em M , $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, consideremos a base coordenada $\mathcal{B}_\phi = \{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de T_pM . A base de T_p^*M , dual a \mathcal{B}_ϕ é denotada por

$$\mathcal{B}_\phi^* = \{dx^1, \dots, dx^n\}.$$

O **fibrado cotangente de M** é o espaço T^*M definido como união disjunta dos espaços cotangentes a M ,

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M = \{(p, \omega) : p \in M, \omega \in T_p^*M\}.$$

A aplicação $\pi^* : T^*M \rightarrow M$, tal que $\pi(p, \omega) = p, \forall (p, \omega) \in T^*M$, é a projeção natural definida no fibrado cotangente.

Teorema 2.1.11 *O fibrado cotangente de uma variedade M de classe C^r e dimensão m , tem uma estrutura de espaço topológico e de variedade diferenciável de classe C^{r-1} e dimensão $2m$. Além disso, a aplicação $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ com essa estrutura é uma aplicação de classe C^{r-1} .*

Prova. Ver (6), página 276. ■

2.1.3 Fluxos e órbitas

Definição 2.1.12 *Uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ diferenciável é dita um **campo de vetores** em M se $\pi \circ X = I_M$. O conjunto dos campos de vetores de classe C^r em M é denotado por $\mathfrak{X}^r(M)$.*

Definição 2.1.13 *Uma curva integral de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação de classe C^{r+1} $\alpha : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. A imagem da curva integral é chamada de **órbita ou trajetória**.*

Se $f : M \rightarrow N$ um difeomorfismo de classe C^{r+1} e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, então $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = df_p X(p)$ com $q = f(p)$ é um campo de classe C^r , pois $f_*X = df_p \circ X \circ f^{-1}$. Se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva integral de X , então $f \circ \alpha : I \rightarrow N$ é uma curva integral de Y . Em particular, f leva trajetória de X em trajetória de Y . Assim, se $\phi : U \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma carta local, $Y = \phi_*X$ é um campo de classe C^r em \tilde{U} . Com essas considerações, os teoremas locais sobre existência, unicidade e diferenciabilidade de soluções estendem-se a campos em variedades.

Definição 2.1.14 (Fluxos) *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, um **fluxo local de X** , de classe C^r , é uma aplicação $\psi : D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\} \rightarrow M$, tal que $\psi(0, p) = p$ e $\psi'(t, p) = X(\psi(t, p))$. Se $D = \mathbb{R} \times M$ dizemos que ψ é um **fluxo global de X** .*

Teorema 2.1.15 *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe em M um fluxo global de classe C^r para X .*

Prova. Ver (7), página 23. ■

Corolário 2.1.16 *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de X . Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t : M \rightarrow M$, $X_t(p) = \psi(t, p)$, é um difeomorfismo de classe C^r . Além disso, $X_0 = \text{identidade}$, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Prova. Ver (7), página 23. ■

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e X_t , $t \in \mathbb{R}$ o fluxo de X . A **órbita de X** por $p \in M$ é o conjunto $o(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$. se $X(p) = 0$, a órbita de p se reduz a p . Nesse caso dizemos que p é uma singularidade de X .

2.2 HOMOTOPIAS

2.2.1 Definição de homotopia e exemplos

Definição 2.2.1 *Sejam X, Y dois espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ dizem-se homotópicas se existe outra aplicação*

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

*tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$. A aplicação H é chamada de **Homotopia** entre f e g . Nós usamos a notação $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$.*

Para cada $t \in [0, 1]$, a homotopia $H : f \simeq g$ define uma aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$, com $H_t(x) = H(t, x)$. Assim, nós podemos pensar uma homotopia como uma família $(H_t)_{t \in [0, 1]}$ de aplicações contínuas de X em Y . Onde $H_0 = f$ e $H_1 = g$; ou seja, a família $(H_t)_{t \in [0, 1]}$ começa em f e termina em g .

Exemplo 2.2.2 .

- *Seja $Y \subseteq E$, onde E é um espaço normado. dadas $f, g : X \rightarrow Y$, suponha que para cada $x \in X$, o segmento $[f(x), g(x)]$ está contido em Y . Então $f \simeq g$. Com efeito, é suficiente definir $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Esta homotopia é chamada de **homotopia linear**.*
- *Quaisquer duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$, com Y um espaço normado, são homotópicas. Isto é verdade pelo item anterior e porque todo espaço normado é convexo.*
- *Para n par, a aplicação antípoda $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $h(x) = -x$ não é homotópica à aplicação identidade. Ver (8), página 8.*

Proposição 2.2.3 *Sejam X, Y dois espaços topológicos. A relação de homotopia $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X em Y .*

Prova. Ver (8), página 5. ■

A classe de equivalência da relação de homotopia é chamada de **classe de homotopia**. A classe de homotopia de uma função $f : X \rightarrow Y$ é denotada por $[f]$.

Proposição 2.2.4 *Sejam $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f = g' \circ f'$. É dizer, a composição preserva homotopias.*

Prova. Ver (8), página 6. ■

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada de **equivalência homotópica** quando existe uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Quando isto

acontece, nós dizemos que g é a **inversa homotópica** de f e que os espaços topológicos X e Y têm o mesmo **tipo de homotopia**. Nesse caso, escrevemos $X \equiv Y$ ou $f : X \equiv Y$. Esta relação é uma relação de equivalência.

Exemplo 2.2.5 A esfera unitária \mathbb{S}^n tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Com efeito, considere a aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $i(x) = x$, e a projeção radial $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $r(y) = \frac{y}{|y|}$. Nós temos $r \circ i = id_{\mathbb{S}^n}$.

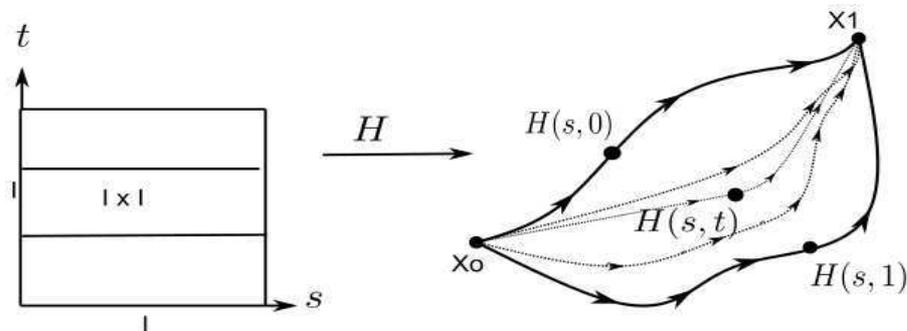
Agora vamos considerar um caso particular de homotopias, a homotopia por caminhos.

Seja $I = [0, 1]$. Nós dizemos que dois caminhos $a, b : I \rightarrow X$ são homotópicos com pontos fixos se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= a(s), \quad H(s, 1) = b(s), \\ H(0, t) &= a(0) = b(0), \\ H(1, t) &= a(1) = b(1), \end{aligned}$$

para todo $s, t \in I$.

Figura 3 – Homotopia por caminhos com pontos fixos.



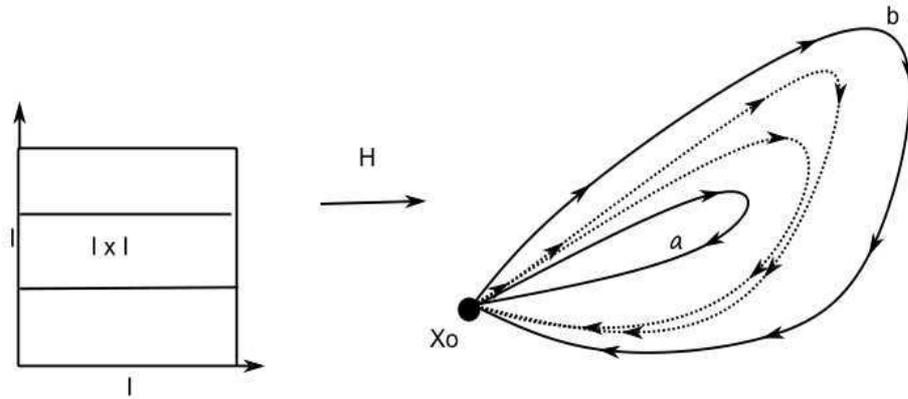
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em particular, os caminhos fechados $a, b : I \rightarrow X$ são homotópicos quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que, tomando $a(0) = a(1) = x_0 \in X$, temos

$$H(s, 0) = a(s), \quad H(s, 1) = b(s), \quad H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

para cada $s, t \in I$.

Figura 4 – Homotopia de caminhos fechados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

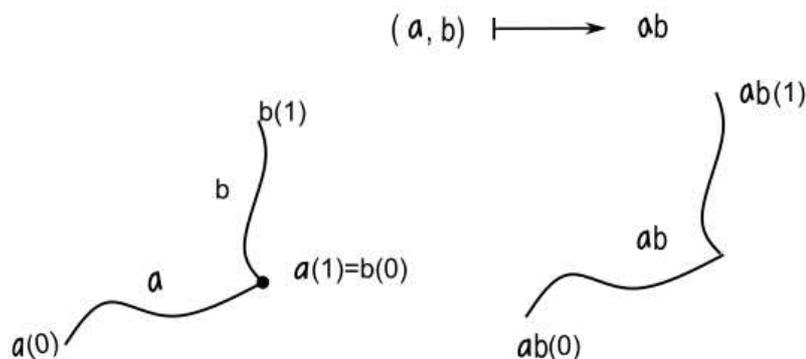
Exemplo 2.2.6 Considere um subconjunto convexo X de um espaço vetorial normado. Se $a, b : I \rightarrow X$ são caminhos que têm o mesmo ponto final, então $a \simeq b$. É suficiente considerar a homotopia linear $H : I \times I \rightarrow X$, $H(s, t) = (1 - t)a(s) + tb(s)$.

2.2.2 O grupo fundamental

Sejam $a, b : I \rightarrow X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$. Isto é, o final de a coincide com o início de b . O **produto** ab é o caminho $ab : I \rightarrow X$ definido por

$$\begin{cases} a(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ b(2s - 1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Figura 5 – Produto de caminhos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O **caminho inverso** de $a : I \rightarrow X$, é por definição, o caminho $a^{-1} : I \rightarrow X$ dado por

$$a^{-1}(s) = a(1 - s), \forall s \in [0, 1].$$

Nós vamos denotar por e_x o caminho constante, tal que $e_x(s) = x$ para cada $s \in [0, 1]$. Sua classe de homotopia é denotada por $\epsilon_x = [e_x]$.

Dado um espaço topológico X , o conjunto dos caminhos em X munido com o produto de caminhos não tem uma estrutura de grupo. [Ver (8), página 29]. Não obstante, podemos obter uma estrutura de grupo considerando as classes de homotopia. Indo nessa direção apresentamos o seguinte resultado, no caso em que $a(1) = b(0)$.

Proposição 2.2.7 *Se $a \simeq a'$, $b \simeq b'$, então $ab \simeq a'b'$ e $a^{-1} \simeq (a')^{-1}$.*

Prova. Ver (8), página 30. ■

Num espaço topológico X , considere a classe de homotopia α de um caminho que tem origem no ponto $x \in X$ e final no ponto $y \in X$, junto com a classe de homotopia β de um caminho que tem origem no ponto $y \in X$ e final no ponto $z \in X$. Nós definimos o produto $\alpha\beta = [ab]$, em que $a \in \alpha$ e $b \in \beta$. Por definição, $[a][b] = [ab]$. Pela proposição anterior, o produto $\alpha\beta$ não depende da escolha dos representantes, isto é, o produto está bem definido.

De forma similar, nós definimos $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, onde $a \in \alpha$. A classe α^{-1} é chamada de **inverso de α** .

A seguinte proposição nos dá a estrutura que procuramos.

Proposição 2.2.8 *Considere os caminhos $a, b, c : I \rightarrow X$ tais que cada um deles começa no ponto onde o outro termina. seja $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$, $\gamma = [c]$ suas classes de homotopia, $x = a(0)$, $y = a(1)$, e e_x, e_y os caminhos constantes nesses pontos. Se $\epsilon_x = [e_x]$, $\epsilon_y = [e_y]$. Nós temos:*

1. $\alpha\alpha^{-1} = \epsilon_x$;
2. $\alpha^{-1}\alpha = \epsilon_y$;
3. $\epsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\epsilon_y$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Prova. Ver (8), página 32. ■

Num espaço topológico X , o conjunto das classes de homotopias com extremos fixados, munido com o produto antes definido, é chamado de **grupóide fundamental de X** e é denotado por $\Pi(X)$.

Consideremos o par (X, x_0) , onde $x_0 \in X$ é chamado de **ponto base** do espaço topológico X . O caminho fechado $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ é chamado de **caminho fechado baseado no ponto x_0** . As homotopias que nós vamos considerar vão ser relativas a ∂I .

Pela Proposição 2.2.8, o subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupóide fundamental de um espaço topológico X que consiste das classe de homotopias de caminhos fechados baseados em x_0 , é um grupo. Ele é chamado de **grupo fundamental do** espaço topológico X baseado no ponto x_0

Proposição 2.2.9 *Se x_0 e x_1 são pontos de uma mesma componente conexa por caminhos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Prova. Ver (8), página 33. ■

Corolário 2.2.10 *Se X é um espaço topológico conexo por caminhos, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos para quaisquer $x_0, x_1 \in X$.*

Proposição 2.2.11 *Se dois espaços topológicos conexos por caminhos X, Y têm o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

Prova. Ver (8), página 39. ■

Em virtude da Proposição 2.2.11, nos espaços conexos por caminhos podemos falar do grupo fundamental do espaço sem fazer menção do ponto base.

Definição 2.2.12 *Nós dizemos que um espaço topológico X é contrátil quando ele tem o tipo de homotopia de um ponto.*

Corolário 2.2.13 *O grupo fundamental de um espaço contrátil tem um único elemento.*

Prova. Segue-se da Proposição 2.2.11. ■

Proposição 2.2.14 *O grupo fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y .*

Prova. Ver (8), página 45. ■

2.2.3 Conjuntos simplesmente conexos

Chegamos a uma das definições principais da seção.

Definição 2.2.15 *Um espaço topológico diz-se que é **simplesmente conexo** se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ para cada $x_0 \in X$.*

Exemplo 2.2.16 *Os seguintes são espaços simplesmente conexos*

- *Os espaços contráteis;*
- *Os espaços \mathbb{R}^n , $n \geq 1$.*

Proposição 2.2.17 *Se $n \geq 2$, a esfera \mathbb{S}^n é simplesmente conexa.*

Prova Ver (8), página 43. ■

Exemplo 2.2.18 *Se $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é simplesmente conexo. De fato, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de \mathbb{S}^{n-1} .*

Proposição 2.2.19 *O grupo fundamental do círculo \mathbb{S}^1 é isomorfo ao grupo aditivo \mathbb{Z} dos inteiros.*

Prova. Ver (8), página 57. ■

Corolário 2.2.20 *O grupo fundamental do toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Prova: Segue-se da Proposição 2.2.14 e a Proposição 2.2.19. ■

Por último, uma das definições mais importantes da seção.

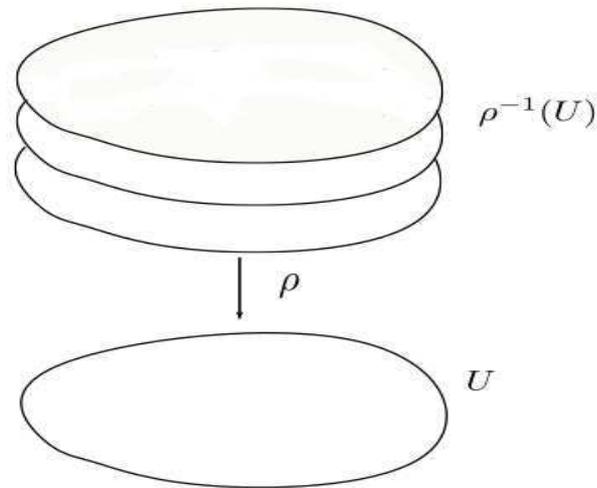
Definição 2.2.21 (Espaços e aplicações de recobrimento) *Sejam X e \tilde{X} espaços topológicos. Uma aplicação $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ é chamada de **aplicação de recobrimento** se para cada $x \in X$, existe um aberto contendo x tal que*

$$\rho^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

*é união de conjuntos disjuntos dois a dois U_α tais que, para cada α , a restrição $\rho|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$ é um homeomorfismo. O espaço \tilde{X} é chamado de **espaço de recobrimento de X** , o conjunto $\rho^{-1}(x)$ é chamado de **fibra sobre x** . Às vezes, X é chamado de **base do recobrimento**.*

Observação 2.2.22 *Às vezes nós só vamos nos referir ao espaço \tilde{X} , omitindo a aplicação $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$, quando falamos do espaço de recobrimento de um espaço X .*

Figura 6 – Aplicação de recobrimento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.2.23 A aplicação $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\rho(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

é uma aplicação de recobrimento. Podemos representar ρ como a aplicação que envolve a reta real \mathbb{R} em torno do círculo \mathbb{S}^1 e, no processo, aplica cada intervalo $[n, n + 1]$ sobre \mathbb{S}^1 .

Exemplo 2.2.24 A aplicação produto $\rho \times \rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$ é uma cobertura do toro pelo plano \mathbb{R}^2 , onde ρ é a aplicação de recobrimento do exemplo anterior.

A prova desse fato é feita em (9), página 385.

Definição 2.2.25 Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Dizemos que um recobrimento \tilde{X} de X é um **recobrimento universal**, se \tilde{X} é simplesmente conexo.

Teorema 2.2.26 Dois recobrimentos universais de um espaço topológico X são homeomorfos.

Prova. Ver (8). ■

Observação 2.2.27 Pelo teorema anterior, em caso de existir um recobrimento universal, nós dizemos que ele é o recobrimento universal de X .

Exemplo 2.2.28 O espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 é o recobrimento universal do toro \mathbb{T}^2 .

3 DINÂMICA LAGRANGIANA E HAMILTONIANA

Neste capítulo vamos dar as definições e resultados básicos da dinâmica Lagrangiana e Hamiltoniana tomando como principais referências (2), (4), (10). Na seção de Hamiltonianos, nós vamos usar alguns conceitos e resultados de cálculo sobre formas diferenciáveis. Nessa parte, as referências aconselhadas são (6) e (11).

3.1 LAGRANGIANOS

Definição 3.1.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional compacta e conexa. Um **Lagrangiano** em M é uma aplicação contínua $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$.*

Definição 3.1.2 *Nós dizemos que L é um **Lagrangiano de Tonelli** de classe C^r , $r \geq 2$, se satisfaz:*

1. **Converidade:** *O Hessiano*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$$

calculado em coordenadas lineares sobre a fibra $T_p M$, é uniformemente positivo definido para todo $(p, v) \in TM$, ou seja, existe $A > 0$ de modo que $w \cdot L_{vv}(p, v) \cdot w \geq A \|w\|_p^2$ para todo $(p, v) \in TM$ e $w \in T_p M$.

2. **Superlinearidade:**

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow \infty} \frac{L(p, v)}{\|v\|_p} = +\infty$$

uniformemente em $p \in M$.

Observação 3.1.3 .

- *A seguinte é uma condição equivalente à condição (2) acima: Para todo $A > 0$ existe $B > 0$ tal que $L(p, v) \geq A \|v\|_p - B$, para todos $(p, v) \in TM$. Com efeito, se $A \in \mathbb{R}$, pela hipótese existe $B_0 > 0$ tal que,*

$$L(p, v) \geq A \|v\|_p, \text{ se } \|v\|_p > B_0. \quad (*)$$

Seja $R = \min_{\|v\|_p \leq B_0} L(p, v)$, R existe pois M é compacta e L é contínua. Vamos tomar $B = AB_0 + |R|$.

- *Se $\|v\|_p > B_0$, por (*), $L(p, v) \geq A \|v\|_p \geq A \|v\|_p - B$.*
- *Se $\|v\|_p \leq B_0$, como $L(p, v) \geq -|R|$ e $A(\|v\|_p - B_0) \leq 0$ temos,*

$$L(p, v) \geq A \|v\|_p - AB_0 - |R| = A \|v\|_p - B.$$

Reciprocamente, seja $A > 0$. Por hipótese, existe $B_0 > 0$ tal que

$$\frac{L(p, v)}{\|v\|_p} \geq 2A - \frac{B_0}{\|v\|_p} \text{ se } v \neq 0.$$

Se tomamos os $v \in T_x M$ tais que $\|v\|_p \geq \frac{B_0}{A}$ obtemos $\frac{L(p, v)}{\|v\|_p} \geq A$ e pela arbitrariedade de A obtemos

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow +\infty} \frac{L(p, v)}{\|v\|_p} = +\infty.$$

■

- A partir de agora nós vamos considerar L como um Lagrangiano de Tonelli de classe C^2 pelo menos.

Definição 3.1.4 Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ uma curva diferenciável e absolutamente contínua. A **ação de** γ é definida por

$$A_L(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

Um dos problemas principais do cálculo variacional é encontrar as curvas que minimizam a ação. Vamos denotar $C^k(q_1, q_2; T)$ o conjunto das curvas C^k -diferenciáveis tais que $\gamma(0) = q_1$ e $\gamma(T) = q_2$.

A equação de **Euler-Lagrange** associada a L (em coordenadas locais) é

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x})$$

Teorema 3.1.5 Se a curva $x \in C^k(q_1, q_2; T)$ é um ponto crítico da ação funcional sobre $C^k(q_1, q_2; T)$, então x satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) = L_x(x(t), \dot{x}(t))$$

em coordenadas locais. Consequentemente, esta equação não depende do sistema de coordenadas.

Prova: Vamos escolher um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) sobre $x(t)$. Seja $h(t)$ uma curva diferenciável tal que $h(0) = h(T) = 0$. Então para cada ϵ suficientemente pequeno a nova curva $Y_\epsilon = x + \epsilon h \in C^k(q_1, q_2; T)$ está contida no sistema de coordenadas. Seja

$$g(\epsilon) = A_L(y_\epsilon)$$

definida numa vizinhança pequena do zero. Nossa hipótese é equivalente a dizer que a função g tem um mínimo no zero e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \frac{L(x + \epsilon h, \dot{x} + \epsilon \dot{h}) - L(x, \dot{x})}{\epsilon} dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \frac{\epsilon L_x h + \epsilon L_v \dot{h} + o(\epsilon)}{\epsilon} dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x h + L_v \dot{h}) dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T [(L_x - \frac{d}{dt} L_v) h + (\frac{d}{dt} L_v h + L_v \dot{h})] dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T [(L_x - \frac{d}{dt} L_v) h + \frac{d}{dt} (L_v h)] dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x - \frac{d}{dt} L_v) h dt + L_v h|_0^T \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x - \frac{d}{dt} L_v) h dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T (L_x - \frac{d}{dt} L_v) h dt$$

para qualquer $h \in C^k(0, 0; T)$. Isto vai implicar $\frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) = L_x(x(t), \dot{x}(t))$. ■

Definição 3.1.6 *A equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial de segunda ordem sobre M , mas a convexidade do Lagrangiano L implica que ela pode ser vista como uma equação de primeira ordem sobre TM .*

Fazendo a mudança $\dot{x} = v$ e usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \dot{v}$$

Como L é convexo, o operador $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ é invertível. Assim,

$$\dot{v} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right]$$

O campo que define a equação diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \\
\dot{v} &= \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right]
\end{aligned}$$

é dito **campo de Euler-Lagrange** e é denotado por X_L e seu fluxo, o **Fluxo Lagrangiano**, é denotado por ϕ_t^L .

Observação 3.1.7 Para garantir a existência do Fluxo Lagrangiano, o campo X_L deveria ter pelo menos classe de diferenciabilidade C^1 . Vamos ver que é suficiente que L seja de classe C^2 (Corolário 3.3.8).

A **Função Energia** do Lagrangiano L é $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L(x, v).$$

Observe que se $x(t)$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange, então

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = \left(\frac{d}{dt}L_v - L_x \right) \cdot \dot{x} = 0.$$

Então $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma integral (aplicação invariante) pelo fluxo de Euler-Lagrange ϕ_t^L e seus conjuntos de nível, chamados de **níveis de energia** são invariantes sob ϕ_t^L . Notemos que pela condição de convexidade de L existe $A > 0$ tal que

$$\frac{d}{ds}E(x, sv) = v \cdot L_{vv}(x, sv) \cdot v + L_v(x, sv) \cdot v - L_v(x, sv) \cdot v = v \cdot L_{vv}(x, sv) \cdot v \geq s A \|v\|_x^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(x, v) &= E(x, 0) + \int_0^{\|v\|_x} \frac{d}{ds}E \left(x, s \frac{v}{\|v\|_x} \right) ds \\ &\geq E_1 + \int_0^{\|v\|_x} s A ds \\ &\geq E_1 + \frac{1}{2} A \|v\|_x^2 \end{aligned} \quad (**)$$

onde $E_1 = \min\{E(x, 0) : x \in M\}$, o qual existe e é finito, pois M é compacta.

Teorema 3.1.8 O Fluxo Lagrangiano é completo.

Prova: Seja $x_0 \in TM$. Suponha que o intervalo maximal da solução $\phi_t^L(x_0)$ é (a, b) . Como E é invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $E(\phi_t^L(x_0)) = k, \forall t \in (a, b)$. Como $\phi_t^L(x_0)$ tem a forma $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, por **(**)** temos que

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} \leq \sqrt{2(k - E_1)}, \forall t \in (a, b).$$

Logo, $\phi_t^L(x_0)$ está contido no conjunto compacto

$$\{(x, v) \in TM : \|v\|_x \leq \sqrt{2(k - E_1)}\}.$$

Isto implica, pela teoria de equações diferenciais, que $(a, b) = \mathbb{R}$. ■

3.2 HAMILTONIANOS

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ , denotemos por $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ a projeção canônica no fibrado cotangente e $d\pi : TT^*M \rightarrow TM$ sua derivada. Nós vamos definir a **1-forma de Liouville**, α , que leva $(x, p) \in T^*M$ na aplicação linear $\alpha_{(x,p)} : T_{(x,p)}(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ da forma seguinte:

$$\alpha_{(x,p)}(\xi) = p[d_{(x,p)}\pi^*(\xi)], \quad \forall \xi \in T_{(x,p)}(T^*M).$$

Esta aplicação está bem definida porque $d_{(x,p)}\pi^* : T_{(x,p)}(T^*M) \rightarrow T_xM$ e $p : T_xM \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma carta local (x_1, \dots, x_n) de M induz uma carta local em T^*M da forma $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$, tal que para cada $(x, p) \in T^*M$, temos $p(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)dx_i$. Como $\pi^*(x, p) = x$, segue-se que nessas coordenadas

$$\alpha_{(x,p)} = \sum_{i=1}^n p_i dx_i. \quad (*)$$

Em particular, α é de classe C^∞ .

Definição 3.2.1 A *forma simplética canônica em T^*M* é definida por $\Omega = -d\alpha$.

Lema 3.2.2 A *forma simplética canônica tem as seguintes propriedades:*

1. Numa carta local $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$, tem a forma

$$\Omega_{(x,p)} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$$

2. É fechada.

3. É não-degenerada.

Prova:

(1) Segue de (*).

(2) Por definição, $d\Omega = d(-d\alpha) = -d^2\alpha = 0$.

(3) Vamos provar que $\Omega_{(x,p)}(\xi, \cdot) \neq 0$ se $\xi \in T_{(x,p)}(T^*M)$ é não nulo.

Com efeito, em coordenadas locais temos

$$\xi = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Assim, $\Omega_{(x,p)}(\xi, \cdot) = \sum_{i=1}^n X_i dp_i - \sum_{i=1}^n P_i dx_i$. Portanto, $\Omega_{(x,p)}(\xi, \cdot) = 0$ implica que $X_i = P_i = 0$, isto é, $\xi = 0$. ■

Definição 3.2.3 Uma estrutura simplética (2-forma simplética) numa variedade C^k -diferenciável N é uma 2-forma, C^k -diferenciável e fechada ω definida sobre N tal que, para cada $x \in N$, $\omega_x : T_x N \times T_x N \longrightarrow \mathbb{R}$ é não degenerada. O par (N, ω) é dito uma variedade simplética.

Como um exemplo simples de variedade simplética, citamos $(\mathbb{R}^{2n}, \alpha)$, em que \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ e $\alpha_{(x,p)} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$.

Teorema 3.2.4 (T^*M, Ω) é uma variedade simplética, em que Ω é a forma simplética canônica em T^*M .

Prova: Segue-se do Lema 3.2.2. ■

Um **Hamiltoniano** C^r definido em uma variedade simplética (N, Ω) é uma aplicação $H : N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $r \geq 2$.

Nós vamos considerar somente os Hamiltonianos definidos no fibrado cotangente. O **campo Hamiltoniano** X_H associado a H é definido por

$$\Omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot).$$

Como H é de classe C^r e Ω é de classe C^∞ , temos que X_H é de classe C^{r-1} . Se $r \geq 2$, podemos garantir a existência do fluxo local associado a X_H . Este último é chamado de **Fluxo Hamiltoniano** e é denotado por ϕ_t^H .

Em coordenadas locais, o campo Hamiltoniano define o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_x\end{aligned}$$

onde H_p e H_x são as derivadas parciais de H com relação a p e x . Seja $(x(t), p(t))$ uma curva integral do campo Hamiltoniano.

$$\frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) = (H_x \dot{x} + H_p \dot{p}) = 0.$$

E daí, H é invariante pelo Fluxo Hamiltoniano ϕ_t^H . O Fluxo Hamiltoniano preserva a forma simplética, $(\phi_t^H)^* \Omega = \Omega$.

Com efeito, por definição $\frac{d}{dt}[(\phi_t^H)^* \Omega] = \mathcal{L}_{X_H} \Omega$, onde $\mathcal{L}_{X_H} \Omega$ é a derivada de Lie de Ω ao longo de X_H . Por outro lado, usando a fórmula de Cartan (ver (11, p. 74) temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H} \Omega &= i_{X_H} d\Omega + di_{X_H} \Omega \\ &= i_{X_H}(0) + d\Omega(X_H, \cdot) \\ &= 0\end{aligned}$$

em que $i_X\omega = \omega(X, \cdot)$, e daí $\frac{d}{dt}[(\phi_t^H)^*\Omega] = 0$. Por último, como $(\phi_0^H)^*\Omega = \Omega$, obtemos $(\phi_t^H)^*\Omega = \Omega$.

3.3 A TRANSFORMADA DE LEGENDRE

Nós vamos trabalhar com Hamiltonianos da forma

$$H(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Esta forma particular de H é obtida considerando a transformada de Fenchel de L (ver (2, p. 11), O que nos permite herdar propriedades importantes do Lagrangiano tais como superlinearidade e convexidade.

Teorema 3.3.1 *O Hamiltoniano H é convexo e superlinear.*

Prova: Ver (4), página 13. ■

Observação 3.3.2 *Como L é superlinear e p é limitada*

$$\frac{pv}{\|v\|_x} - \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} \longrightarrow -\infty \text{ quando } \|v\|_x \longrightarrow \infty$$

E daí $pv - L(x, v) \longrightarrow -\infty$ quando $\|v\|_x \longrightarrow \infty$ e o máximo em v será atingido num compacto de $T_x M$. Isto implica

$$H(x, p) = \max_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Lema 3.3.3 *$H(x, p) = pv_0 - L(x, v_0)$ se, e somente se, $p = L_v(x, v_0)$ para algum $v_0 \in T_x M$.*

Prova: Seja $(x, p) \in T^*M$ e suponhamos que $H(x, p) = pv_0 - L(x, v_0)$, para algum $v_0 \in T_x M$. Pela definição de H , para qualquer outro $v_1 \in T_x$

$$\begin{aligned} H(x, p) &\geq pv_1 - L(x, v_1) \\ \Rightarrow pv_1 &\leq H(x, p) + L(x, v_1) \\ \Rightarrow pv_1 &\leq L(x, v_1) - L(x, v_0) + pv_0 \\ \Rightarrow p(v_1 - v_0) &\leq L(x, v_1) - L(x, v_0) \end{aligned}$$

Tomemos $v_1 = v_0 + \epsilon w$, se $\epsilon > 0$

$$pw \leq \frac{L(x, v_0 + \epsilon w) - L(x, v_0)}{\epsilon} \longrightarrow L_v(x, v_0)w \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Portanto, $pw \leq L_v(x, v_0)w$. Analogamente, tomando $\epsilon < 0$, obtemos $pw \geq L_v(x, v_0)w$. Então $p = L_v(x, v_0)$.

Reciprocamente, pela convexidade de L obtemos

$$\begin{aligned} L(x, v) - L(x, v_0) &\geq L_v(x, v_0)(v - v_0) \\ \Rightarrow L_v(x, v_0)v_0 - L(x, v_0) &\geq L_v(x, v_0)v - L(x, v) \end{aligned}$$

Esta inequação é válida para cada $v \in T_x M$. Assim,

$$L_v(x, v_0)v_0 - L(x, v_0) \geq H(x, L_v(x, v_0)).$$

E daí,

$$L_v(x, v_0)v_0 - L(x, v_0) = H(x, L_v(x, v_0)).$$

■

Definição 3.3.4 A *transformada de Legendre* é a aplicação $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ tal que

$$\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v)).$$

Observação 3.3.5 Notemos que, pelo lema anterior,

$$E = H \circ \mathcal{L}.$$

Com efeito, seja $(x, v) \in TM$.

$$H(\mathcal{L}(x, v)) = H(x, L_v(x, v)) = L_v(x, v)v - L(x, v) = E(x, v)$$

■

O seguinte é o resultado principal do capítulo que relaciona as dinâmicas Lagrangianas e Hamiltonianas.

Teorema 3.3.6 A transformada de Legendre \mathcal{L} é uma conjugação entre o Fluxo Lagrangiano ϕ_t^L e o Fluxo Hamiltoniano ϕ_t^H .

Prova:

\mathcal{L} é um difeomorfismo de classe C^{r-1} : Em coordenadas locais, temos

$$D\mathcal{L}(x, v) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ L_{vx}(x, v) & L_{vv}(x, v) \end{bmatrix}.$$

Pela convexidade de L , o operador $L_{vv}(x, v)$ é invertível e, portanto, $D\mathcal{L}(x, v)$ é um isomorfismo. Em virtude do teorema da função inversa, \mathcal{L} é um difeomorfismo local. Vamos provar que $D\mathcal{L}$ é injetiva. Se $L_v(x, u) = L_v(x, w)$, definimos ξ por

$$\xi(t) = L_v(x, tu + (1-t)w)(u - w).$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$0 = \xi(1) - \xi(0) = (u - w)L_{vv}(u^*)(u - w).$$

Da convexidade de L , $u = w$. Por último, \mathcal{L} é sobrejetora. Com efeito, se $(x, p) \in T^*M$, existe $v \in T_xM$ tal que $H(x, p) = pv - L(x, v)$ e pelo Lema 3.3.3, $p = L_v(x, v)$. Daí, $(x, p) = \mathcal{L}(x, v)$.

\mathcal{L} é uma conjugação entre ϕ_t^L e ϕ_t^H : Se $(x, p) = (x, L_v(x, v))$. Pelo Lema 3.3.3, $H_p(x, p) = v$. Além disso,

$$H(x, p) = p \cdot H_p(x, p) - L(x, H_p(x, p)).$$

Derivando com relação a x ,

$$H_x(x, p) = -L_x(x, v).$$

Pela equação de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -H_x(x, p) = L_x(x, v) = \frac{d}{dt}L_v(x, v) \\ \dot{x} &= v = H_p(x, p). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{DL} \cdot X_L = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ L_{vx} & L_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ L_{vv}^{-1}(L_x - L_{vx}v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ L_x \end{bmatrix}.$$

E assim,

$$\mathcal{DL} \cdot X_L(x, v) = X_H(\mathcal{L}(x, v))$$

Por definição do fluxo, $X_H = \frac{d}{dt}\phi_t^H$ e $X_L = \frac{d}{dt}\phi_t^L$. Daí, $\frac{d}{dt}(\phi_t^H \circ \mathcal{L}) = \frac{d}{dt}(\mathcal{L} \circ \phi_t^L)$ e, por último, $\mathcal{L} \circ \phi_t^L = \phi_t^H \circ \mathcal{L}$. ■

Corolário 3.3.7 *O Fluxo Hamiltoniano é completo.*

Prova: O Fluxo Lagrangiano é completo e conjugado ao Fluxo Hamiltoniano. ■

Corolário 3.3.8 *O Fluxo Lagrangiano é de classe C^{r-1} . Em particular, se $r = 2$, o Fluxo Lagrangiano está bem definido.*

Prova: Seguindo a demonstração do teorema anterior, temos que $\mathcal{L}^{-1} \circ \phi_t^H \circ \mathcal{L}$ é de classe C^{r-1} e

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{L}^{-1} \circ \phi_t^H \circ \mathcal{L}) = \mathcal{DL}^{-1} \circ X_H \circ \mathcal{L} = X_L.$$

Daí, mesmo que $r=2$, temos que o fluxo Lagrangiano existe e

$$\phi_t^L = \mathcal{L}^{-1} \circ \phi_t^H \circ \mathcal{L}.$$

■

Exemplo 3.3.9 *Vamos apresentar alguns exemplos básicos de Lagrangianos.*

O Lagrangiano Riemanniano: Dada uma métrica Riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sobre TM , o Lagrangiano Riemanniano sobre M é dado pela energia cinética

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2.$$

A equação de Euler-Lagrange é dada pela equação geodésica de g :

$$D_t \dot{x} = 0.$$

E o Fluxo Lagrangiano é o Fluxo Geodésico. Seu correspondente Hamiltoniano é

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \|p\|_x^2.$$

O Lagrangiano Mecânico: Também chamado Lagrangiano natural, o Lagrangiano mecânico é a energia cinética menos o potencial $U : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 - U(x).$$

A equação de Euler-Lagrange é dada pela equação:

$$D_t \dot{x} = -\nabla U(x),$$

em que D_t é a derivada covariante e ∇U é o gradiente de U em relação à métrica Riemanniana g , ou seja,

$$d_x U \cdot v = \langle \nabla U(x), v \rangle_x.$$

A Função Energia e o Hamiltoniano estão dados por

$$\begin{aligned} E(x, v) &= \frac{1}{2} \|v\|_x^2 + U(x), \\ H(x, p) &= \frac{1}{2} \|p\|_x^2 + U(x). \end{aligned}$$

Teorema 3.3.10 *Se $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangiano, seja $\hat{L} = L + \omega$, onde ω é uma 1-forma diferenciável fechada. Então L e \hat{L} têm o mesmo fluxo de Euler-Lagrange.*

Prova. Passando a coordenadas locais temos

$$\omega_x \dot{x} = \sum_{i=1}^n \omega_i \dot{x}^i.$$

Observe que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial(L - \hat{L})}{\partial \dot{x}^k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} \dot{x}^i, \\ \frac{\partial(L - \hat{L})}{\partial x^k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} \dot{x}^i.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(L - \hat{L})}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial(L - \hat{L})}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} \right\} \dot{x}^i.$$

Como ω é fechada, o termo $\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k}$ é zero para todo $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto, as equações de Euler-Lagrange de L e \hat{L} são as mesmas. ■

O Lagrangiano Magnético Generalizado: Para $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ a métrica Riemanniana, ω uma 1-forma não-fechada, ou seja, $d\omega \neq 0$, e $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave, o Lagrangiano magnético generalizado é da forma

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 + \omega_x(v) + U(x).$$

A equação de Euler-Lagrange é dada pela equação

$$D_t \gamma' = \nabla U(\gamma) + Y_{(\gamma)}(\gamma') \quad (*),$$

em que $\nabla U : M \rightarrow TM$ é o campo gradiente de U , ou seja, o único campo vetorial tal que

$$g_x(\nabla U(x), v) = d_x U(v), \forall (x, v) \in TM,$$

e $Y : TM \rightarrow TM$ é o homomorfismo do fibrado tangente tal que

$$d\omega_x(u, v) = g_x(Y_x(u), v), \forall x \in M, \forall u, v \in T_x M.$$

O operador Y é chamado de **Força de Lorentz**. As soluções da equação de Euler-Lagrange de um Lagrangiano Magnético Generalizado são chamadas de **geodésicas magnéticas**.

Neste texto, algumas vezes omitiremos a palavra "generalizado" da expressão "Lagrangiano magnético generalizado".

A Função Energia é a mesma do Lagrangiano mecânico, mas o Hamiltoniano associado muda:

$$\begin{aligned}E(x, v) &= \frac{1}{2} \|v\|_x^2 - U(x), \\ H(x, p) &= \frac{1}{2} \|p - \omega_x\|_x^2 - U(x).\end{aligned}$$

Vamos provar que a equação de Euler-Lagrange do Lagrangiano magnético tem de fato a forma de (*).

Suponhamos $\dim M = 2$ e seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva e (V, ϕ) um sistema de coordenadas com $\gamma(t) \in V, \forall t \in [a, b]$. Seja $\mathcal{B}_\phi = \{\partial x^1, \partial x^2\}$ o referencial móvel associado ao sistema de coordenadas e

$$g_{ij}(p) = g_p(\partial x^i(p), \partial x^j(p)), \quad i, j = 1, 2$$

$$\omega_i(p) = \omega_p(\partial x^i(p)), \quad i = 1, 2,$$

os coeficientes de g e ω respetivamente no sistema de coordenadas. Se $\alpha(t) = \phi(\gamma(t)) = (u^1(t), u^2(t))$ para $t \in [a, b]$, temos que

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^2 \dot{u}^i(t) \partial x^i(\gamma(t)).$$

Com estas considerações, temos

$$L(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + U(\gamma) + \sum_{i=1}^2 \omega_i \dot{u}^i.$$

Supondo que a curva γ é uma solução da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \sum_{j=1}^2 g_{kj} \dot{u}^j + \omega_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^i + \sum_{j=1}^2 g_{kj} \ddot{u}^j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j} \dot{u}^j.$$

Reorganizando os índices, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_{j=1}^2 g_{kj} \ddot{u}^j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j} \dot{u}^j.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j + \frac{\partial U(\phi^{-1})}{\partial u^k}(\phi(\gamma)) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} \dot{u}^j$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j + \partial x^k U(\gamma) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} \dot{u}^j.$$

Comparando as igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 g_{kj} \ddot{u}^j &= \frac{1}{2} \{ \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^i \dot{u}^j - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j \} + \partial x^k U(\gamma) \\ &+ \sum_{j=1}^2 \{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j} \} \dot{u}^j \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \} \dot{u}^i \dot{u}^j + \partial x^k U(\gamma) + \sum_{j=1}^2 \{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j} \} \dot{u}^j. \end{aligned}$$

Essa última igualdade é verdadeira para cada k . Multiplicando ambos lados da igualdade por g^{lk} ,

$$\sum_{j=1}^2 g^{lk} g_{kj} \ddot{u}^j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 g^{lk} \{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \} \dot{u}^i \dot{u}^j + g^{lk} \partial x^k U(\gamma) + \sum_{j=1}^2 g^{lk} \{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial u^j} \} \dot{u}^j.$$

Movendo k , obtemos

$$\sum_{j=1}^2 g^{l1} g_{1j} \ddot{u}^j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 g^{l1} \left\{ \frac{\partial g_{j1}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1i}}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^i \dot{u}^j + g^{l1} \partial x^1 U(\gamma) + \sum_{j=1}^2 g^{l1} \left\{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^u$$

$$\sum_{j=1}^2 g^{l2} g_{2j} \ddot{u}^j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 g^{l2} \left\{ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{2i}}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^i \dot{u}^j + g^{l2} \partial x^2 U(\gamma) + \sum_{j=1}^2 g^{l2} \left\{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^j.$$

Somando essas igualdades e fazendo $l = k$ temos

$$\ddot{u}^k = - \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) + \sum_{i=s} g^{ks} \partial x^s U(\gamma) + \sum_{s,j=1}^2 g^{ks} \left\{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^u.$$

Ou, equivalentemente,

$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = \sum_{s=1}^2 g^{ks} \partial x^s U(\gamma) + \sum_{s,j=1}^2 g^{ks} \left\{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^j. \quad (3.1)$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^2 (\ddot{u}^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j) \partial x^k = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 g^{ks} \partial x^s U(\gamma) \right) \partial x^k + \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{s,j=1}^2 g^{ks} \left\{ \frac{\partial \omega_j}{\partial u^s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial u^j} \right\} \dot{u}^j \right) \partial x^k$$

e, finalmente,

$$D_t \gamma' = \nabla U(\gamma) + Y_{(\gamma)}(\gamma'). \quad (3.2)$$

É importante enfatizar que podemos obter o mesmo resultado, quando $\dim M > 2$, fazendo um raciocínio análogo.

Por último, vamos mostrar que o Hamiltoniano associado ao Lagrangiano magnético generalizado tem a forma acima.

Sabemos que a métrica g induz um isomorfismo \hat{g} de TM em T^*M tal que para cada $x \in M$ e $v \in T_x M$,

$$v \mapsto \hat{g}_x(v)$$

em que $\hat{g}_x(v)(u) = g_x(v, u)$ para cada $u \in T_x M$.

Para cada $u \in T_x M$, vamos denotar $u^\flat = \hat{g}_x(u) \in T_x^* M$. Seja $X(x) \in T_x M$ tal que $\omega_x = X^\flat(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} L(x, v) &= \frac{1}{2} g_x(v, v) + g_x(X(x), v) + U(x) \\ &= \frac{1}{2} v^\flat(v) + X^\flat(x)(v) + U(x). \end{aligned}$$

Então,

$$L_v(x, v) = v^\flat + X^\flat(x).$$

Ou,

$$v^b = L_v(x, v) - X^b.$$

Logo,

$$L_u(x, v)v - L(x, v) = \frac{1}{2}v^b(v) - U(x).$$

Pelo Lema 3.3.3, existe $v_0 \in T_x M$ tal que

$$H(x, p) = \frac{1}{2}v_0^b(v_0) - U(x).$$

Por outro lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $\frac{v^b(u)}{\|u\|_x} \leq \|v\|_x$ e, como $\frac{v^b(v)}{\|v\|_x} = \|v\|_x$, temos

$$v^b(v) = \|v^b\|_x^2 = \|L_{v_0}(x, v_0) - X^b(x)\|_x^2 = \|p - \omega_x\|_x^2.$$

Portanto,

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\|p - \omega_x\|_x^2 - U(x).$$

3.4 SUBVARIEDADES LAGRANGIANAS

Definição 3.4.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão m e $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é não-degenerada se para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $\omega(v, u) \neq 0$. O par (V, ω) , em que ω é uma forma bilinear não-degenerada, é dito **espaço vetorial simplético**.*

Se (V, ω) é um espaço vetorial simplético e $S \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V , dizemos **complemento simplético de S** , denotado por S^\perp , ao subespaço vetorial

$$S^\perp = \{v \in V : \omega(v, u) = 0 \text{ para cada } u \in S\}.$$

A seguinte propriedade lembra o complemento ortogonal de um subespaço dado por algum produto interno no espaço vetorial V .

Teorema 3.4.2 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Se $S \subseteq V$ é um subespaço vetorial, então $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.*

Prova. Ver (6). ■

Teorema 3.4.3 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Se $S \subseteq V$ um subespaço linear de V então $(S^\perp)^\perp = S$.*

Prova. Ver (6). ■

Um das principais diferenças entre os espaços simpléticos e os espaços normados é a seguinte: Se $S = \langle v \rangle$ é um subespaço vetorial de dimensão 1, pelo fato de que ω é alternante $\omega(v, v) = 0$. Portanto, $S \subseteq S^\perp$. Isto diz, por exemplo, que $S \cap S^\perp \neq \{0\}$.

Definição 3.4.4 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $S \subseteq V$ um subespaço vetorial. Dizemos que S é*

1. **Simplético** se $S \cap S^\perp = \{0\}$.
2. **Isotrópico** se $S \subseteq S^\perp$.
3. **Coisotrópico** se $S^\perp \subseteq S$.
4. **Lagrangiana** se $S = S^\perp$.

Proposição 3.4.5 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético, e $S \subseteq V$ um subespaço vetorial de V .*

1. S é simplético se, e somente se S^\perp é simplético.
2. S é simplético se, e somente se $\omega|_S$ é não-degenerada.
3. S é isotrópico se, e somente se $\omega|_S = 0$.
4. S é coisotrópico se, e somente se S^\perp é isotrópico.
5. S é Lagrangiana se, e somente se $\omega|_S = 0$ e $\dim S = \frac{1}{2} \dim V$.

Prova. Ver (6), página 566. ■

Vamos lembrar a definição de variedade simplética dada na seção anterior.

Definição 3.4.6 *Seja N uma variedade diferenciável. Uma 2-forma não-degenerada sobre N é uma 2-forma ω , tal que ω_p é não-degenerada para cada $p \in N$. Além disso, se ω é uma forma fechada, dizemos que ω é **uma 2-forma simplética**. O par (N, ω) , em que ω é uma 2-forma simplética, é dito uma variedade simplética.*

Se (N_1, ω_1) e (N_2, ω_2) são variedades simpléticas, um difeomorfismo $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que $f^*\omega_2 = \omega_1$ é dito de **simplectomorfismo**. (O estudo das propriedades invariantes pelos simplectomorfismos é chamado de Geometria simplética.)

Seja (N, ω) uma variedade simplética. Uma subvariedade $S \subseteq N$ é dita uma **subvariedade simplética, isotrópica, coisotrópica, ou Lagrangiana** se $T_p S$ tem a propriedade correspondente para cada $p \in S$. Mais geralmente, um mergulho $f : L \rightarrow N$ tem alguma destas propriedades se o subespaço $df_p(T_p L) \subseteq T_p N$ tem a correspondente propriedade para cada $p \in L$. Então uma subvariedade é simplética (isotrópica,...) se, e somente se, a aplicação inclusão tem a mesma propriedade.

Exemplo 3.4.7 Sabemos da seção anterior que (T^*M, Ω) , onde Ω é a forma canônica simplética de T^*M , é uma variedade simplética. Podemos identificar M como $\Sigma_0 = \{(p, 0) : p \in M\}$, que é uma subvariedade de T^*M de dimensão m . Além disso, como a 1-forma de Liouville é zero em Σ_0 , temos que Ω também é zero restrita a Σ_0 . Portanto, M (sua representação Σ_0) é uma subvariedade Lagrangiana de T^*M .

4 O VALOR CRÍTICO DE MAÑÉ E A EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

As referências usadas neste capítulo são (2), (3) e (5).

4.1 O VALOR CRÍTICO DE MAÑÉ

Na presente seção vamos supor que todas as curvas são absolutamente contínuas. Para cada $x, y \in M$, seja

$$C_T(x, y) = \{\gamma : [0, T] \longrightarrow M \mid T > 0, \gamma(0) = x, \gamma(T) = y\}$$

e seja

$$C(x, y) = \bigcup_{T>0} C_T(x, y).$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ vamos definir a ação potencial $\Phi_k : M \times M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, por

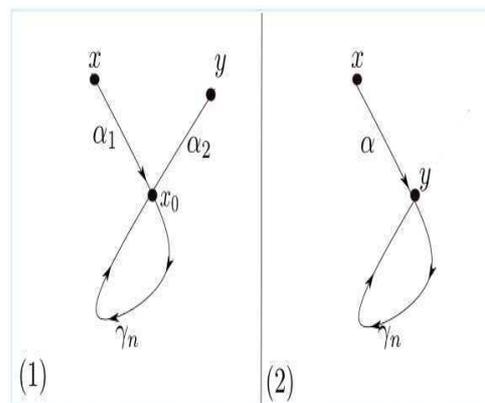
$$\Phi_k(x, y) = \inf_{\gamma \in C(x, y)} A_{L+k}(\gamma),$$

em que A_{L+k} é a ação Lagrangiana definida em 3.1.4.

Proposição 4.1.1 *Se existe uma curva fechada γ com ação $L + k$ negativa, então $\Phi_k(x, y) = -\infty$ para quaisquer $x, y \in M$.*

Prova. Seja $\gamma(0) = \gamma(T) = x_0$. Definimos $\gamma_n = \underbrace{\gamma * \gamma * \dots * \gamma}_{n\text{-vezes}} : [0, nT] \longrightarrow M$ a curva que percorre $img(\gamma)$ n -vezes. Sejam $x, y \in M$, vamos considerar dois casos.

Figura 7 – Colando as curvas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1. $y \notin \text{img}(\gamma)$, consideramos como no desenho (1) duas curvas α_1, α_2 tais que $\alpha_1(0) = x$ e $\alpha_1(T) = x_0$ e $\alpha_2(0) = x_0$ e $\alpha_2(T) = y$. A curva $\alpha_1 \gamma_n \alpha_2 : [0, (n+2)T] \rightarrow M$ que resulta de colar as curvas como em (1) da figura acima é tal que

$$\begin{aligned} A_{L+k}(\alpha_1 \gamma_n \alpha_2) &= A_{L+k}(\alpha_1) + A_{L+k}(\gamma_n) + A_{L+k}(\alpha_2) \\ &= A_{L+k}(\alpha_1) + nA_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\alpha_2). \end{aligned}$$

Logo, $\Phi_k(x, y) \leq A_{L+k}(\alpha_1) + nA_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\alpha_2)$. Como $A_{L+k}(\gamma) < 0$, fazendo n tender ao infinito, temos que $\Phi_k(x, y) = -\infty$.

2. Se $y \in \text{img}(\gamma)$, podemos supor que $y = x_0$ e fazendo um procedimento análogo ao caso anterior obtemos $\Phi_k(x, y) = -\infty$. ■

Vamos definir os conjuntos

$$D_1 = \{k \in \mathbb{R} \mid \exists \gamma \text{ fechada com } A_{L+k}(\gamma) < 0\} \text{ e } D_2 = \{k \in \mathbb{R} \mid A_{L+k}(\gamma) \geq 0, \forall \gamma \text{ fechada}\}.$$

A aplicação $k \mapsto A_{L+k}$ é crescente. Além disso, pela superlinearidade, L é limitada inferiormente. Portanto, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $L+k > 0$. Daí, D_1 é limitado superiormente e portanto existe $\sup D_1 = \inf D_1^c = \inf D_2$.

O número $c(L) = \sup D_1$ é chamada de **valor crítico de Mañé de L**.

4.2 A EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

Vamos considerar o Hamiltoniano H associado a um Lagrangiano de Tonelli L . A equação de Hamilton-Jacobi de H está dada por

$$H(x, d_x u) = c, \tag{4.1}$$

em que $c \in \mathbb{R}$. Uma solução clássica de 4.1 definida num aberto U de M é uma função $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $H(x, d_x u) = c$, para cada $x \in U$. Para nossos propósitos é preciso obter soluções globais de 4.1, mas isto não é sempre possível. Isto nos leva a definir soluções desde um ponto de vista mais geral com as quais podemos garantir a existência global.

A seguinte noção de solução de uma equação diferencial foi dada pelos matemáticos Michael G. Crandall e Pierre-Louis Lions no ano 1983.

Definição 4.2.1 (Solução de viscosidade.) *Uma função $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um aberto $V \subseteq M$ é uma*

1. **Subsolução de viscosidade de $H(x, d_x u) = c$** , se para cada função $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e todo ponto $x_0 \in V$ tal que $u - \phi$ tem um valor máximo em x_0 , temos que $H(x_0, d_{x_0} \phi) \leq c$.

2. **Supersolução de viscosidade de $H(x, d_x u) = c$** , se para cada função $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e todo ponto $x_0 \in V$ tal que $u - \psi$ tem um valor mínimo em x_0 , temos que $H(x_0, d_{x_0} \psi) \geq c$.
3. **Solução de viscosidade de $H(x, d_x u) = c$** , se é uma subsolução e supersolução de viscosidade.

O seguinte resultado nos diz que o conceito de solução de viscosidade é de fato uma extensão do conceito de solução clássica.

Teorema 4.2.2 *Uma função $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é uma solução de viscosidade de $H(x, d_x u) = c$, se, e somente se é uma solução clássica.*

Prova. Como u é uma solução de viscosidade, em particular, é uma subsolução de viscosidade. Como u é de classe C^1 , podemos tomar $\phi = u$, pois para cada $x \in V$ $u - u$ tem um máximo em x . Daí, $H(x, d_x u) \leq c$ para cada $x \in V$. Analogamente, $H(x, d_x u) \geq c$, para cada $x \in V$. Reciprocamente, se u é uma solução de $H(x, d_x u) = c$, para cada $x_0 \in V$ e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $u - \phi$ tem um valor máximo em x_0 , temos que $d_{x_0} u = d_{x_0} \phi$ e $H(x_0, d_{x_0} \phi) = H(x_0, d_{x_0} u) \leq c$. Então, u é uma subsolução de viscosidade. Analogamente, u é uma supersolução de viscosidade. ■

Definição 4.2.3 *Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, onde U é um subconjunto aberto de M . Dizemos que a curva $\gamma : I \rightarrow U$ (contínua), de classe C^1 por partes, definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é (u, L, c) calibrada, se para cada $t \leq t' \in I$, temos*

$$u(\gamma(t')) - u(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c(t' - t).$$

Definição 4.2.4 *Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto aberto $U \subseteq M$. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que u é dominada por $L + c$ em U , o qual denotamos por $u \prec L + c$, se para cada curva $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ contínua, de classe C^1 por partes temos*

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) \leq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + c(b - a).$$

Se $U = M$, vamos dizer simplesmente que u é dominada por $L + c$.

Definição 4.2.5 *Uma **solução KAM fraca de tipo negativa** (resp. de tipo positiva) é uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:*

1. *A função é dominada por $L + c$.*

2. Para cada $x \in M$ podemos encontrar uma curva $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow M$ (resp. $\gamma[0, +\infty) \rightarrow M$) (u, L, c) calibrada da classe C^1 com $\gamma(0) = x$.

Denotamos \mathcal{S}_- (resp. \mathcal{S}_+) o conjunto de soluções fracas KAM de tipo negativa (resp. positiva).

A expressão KAM vem dos nomes dos matemáticos Andrey Kolmogorov, Vladimir Arnold e Jürgen Moser, para uma teoria mais geral do que somente a tratada aqui.

Definição 4.2.6 Seja $c(H) = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \exists u : M \rightarrow \mathbb{R}, u \prec L + c\}$. O valor real $c(H)$ é chamado de **valor crítico de Mañé de H** .

Teorema 4.2.7 O valor crítico de Mañé de H é finito.

Prova. Tomando $c > c(H)$ existe $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \prec L + c$. Seja $x \in M$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a curva constante $\gamma(t) = x, \forall t \in [0, 1]$. Logo,

$$0 = u(x) - u(x) \leq \int_0^1 L(x, 0) dt + c = L(x, 0) + c,$$

e assim $c \geq -L(x, 0)$ para cada $x \in M$. Então vale $c \geq \inf_{x \in M} -L(x, 0)$ e tomando ínfimo para c obtemos $c(H) \geq -L(x, 0)$. O resultado segue da continuidade de L . ■

Teorema 4.2.8 (Weak KAM.) Existe $u_- : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução KAM fraca de tipo negativa com $c = c(H)$. Além disso, $c = c(H)$ é o único valor para o qual existe uma KAM solução fraca.

Prova. Ver (2), página 153. ■

Teorema 4.2.9 Toda solução KAM fraca de tipo negativa $u \in \mathcal{S}_-$ é uma solução de viscosidade de $H(x, d_x u) = c(H)$.

Prova. Ver (2), página 220. ■

Observação 4.2.10 Em (3) (página 62), obtemos que $c(L) = c(H)$, em que H é o Hamiltoniano associado ao Lagrangiano L .

Definição 4.2.11 Para cada $t > 0$, vamos definir a função $h_t : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_t(x, y) = \inf \int_0^t L(\gamma(s), \gamma'(s)) ds,$$

para cada $x, y \in M$, em que o ínfimo é tomado sobre o conjunto das curvas absolutamente contínuas $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) = y$.

A **Barreira de Peierls** é a função $h : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \{h_t(x, y) - c(H)t\}.$$

Como M é compacta, a função h é finita para quaisquer $x, y \in M$. Ver (2), página 190. Definimos o **conjunto de Aubry projetado** como

$$\mathcal{A} = \{x \in M \mid h(x, x) = 0\}.$$

Definição 4.2.12 As subsoluções de viscosidade que satisfazem 4.1 com $c = c(H)$ são chamadas de **subsoluções críticas**. O conjunto das subsoluções críticas é denotado por \mathcal{SS} .

Definição 4.2.13 Se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução crítica, denotamos por $\tilde{\mathcal{I}}(u)$ o subconjunto de TM dado como

$$\tilde{\mathcal{I}}(u) = \{(x, v) \in TM : \gamma_{(x,v)} \text{ é } (u, L, c(H)) \text{ calibrada}\},$$

em que $\gamma_{(x,v)}$ é a curva definida sobre \mathbb{R} por

$$\gamma_{(x,v)}(t) = \pi \phi_t^L(x, v).$$

Teorema 4.2.14 O conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$ é dado por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{u \in \mathcal{SS}} \tilde{\mathcal{I}}(u).$$

Prova. Ver (5). ■

Definição 4.2.15 Seja (X, d) um espaço métrico compacto com métrica d . Seja $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ um fluxo e sejam $x, y \in X$. Dados $\varepsilon > 0$ e $T > 0$, uma (ε, T) -cadeia de x a y é um par $\{x_0, \dots, x_{k+1}\}$ e $\{t_0, \dots, t_k\}$ de conjuntos finitos de pontos tais que $x_0 = x, x_{k+1} = y, t_i > T$ e $d(\varphi(t_i, x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, para todo $i = 0, \dots, k$. Dizemos que x é **recorrente por cadeia** quando para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ existe uma (ε, T) -cadeia de x a x . O conjunto dos pontos $x \in X$ que são recorrentes por cadeia é chamado o **conjunto recorrente por cadeia** do fluxo φ .

Definição 4.2.16 O Lagrangiano de Tonelli L em M satisfaz a condição de desconexidade de Mather se para cada par $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_-$, a imagem $(u_1 - u_2)(\mathcal{A})$ é totalmente desconexa.

Lema 4.2.17 Suponha que L satisfaça a condição de desconexidade de Mather. Para cada $u \in \mathcal{SS}$, o conjunto de pontos em $\tilde{\mathcal{I}}(u)$ que é recorrente por cadeias para a restrição $\phi_t^L|_{\tilde{\mathcal{I}}(u)}$ é precisamente o conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$.

Prova. Ver (5). ■

Teorema 4.2.18 *Se L satisfaz a condição de desconexidade de Mather, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$, ou o conjunto de Aubry projetado \mathcal{A} , é conexo.*
2. *O conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$ é recorrente por cadeias para a restrição do fluxo $\phi_t^L|_{\tilde{\mathcal{A}}}$.*
3. *Qualquer par de soluções KAM fracas diferem por uma constante.*
4. *O conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$ é igual ao conjunto de Mañé $\tilde{\mathcal{N}} = \cup_{u \in \mathcal{SS}} \tilde{\mathcal{I}}(u)$.*

Prova. Ver (5). ■

5 O LAGRANGIANO DE MAÑÉ

No presente capítulo, o principal deste trabalho, vamos usar principalmente as referências (1) e (2).

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) compacta e de classe C^∞ , e um campo vetorial $X : M \rightarrow TM$ de classe C^∞ , o **Lagrangiano de Mañé associado a X** é a aplicação $L_X : TM \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} L_X(p, v) &= \frac{1}{2} \|v - X(p)\|_x^2 \\ &= \frac{1}{2} \|v\|_p^2 + \frac{1}{2} \|X(p)\|_p^2 - \langle X(p), v \rangle, \quad \forall (p, v) \in TM. \end{aligned}$$

Observe que a aplicação escalar $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $U(p) = \frac{1}{2} \|X(p)\|_p^2$ é de classe C^∞ e o termo $\langle X(p), v \rangle$ define uma 1-forma diferencial $\xi \in \Omega^1(M)$ tal que $\xi_p v = -\langle X(p), v \rangle$.

A forma da equação de Euler-Lagrange de L_X vai depender do campo X .

Proposição 5.0.1 *Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo vetorial de classe C^∞ e $L_X : TM \rightarrow \mathbb{R}$ seu Lagrangiano de Mañé associado.*

1. *Se $\|X(p)\| = k$, para cada $p \in M$ e $d\xi = 0$, então a equação de Euler-Lagrange de L_X tem a mesma forma da Equação de Euler-Lagrange de um Lagrangiano Riemanniano.*
2. *Se $\|X(p)\|$ é não constante e $d\xi = 0$, então a equação de Euler-Lagrange de L_X tem a mesma forma da Equação de Euler-Lagrange de um Lagrangiano mecânico.*
3. *Se $\|X(p)\|$ é não constante e $d\xi \neq 0$, então a equação de Euler-Lagrange de L_X tem a mesma forma da Equação de Euler-Lagrange de um Lagrangiano magnético generalizado.*

Prova. É imediato do Teorema 3.3.10. ■

Observação. Na proposição anterior, o item (1) tem hipóteses que nem sempre são possíveis de obter em algumas variedades compactas. Por exemplo, sabemos que em qualquer esfera de dimensão par é impossível obter um campo de vetores sem singularidades (ver (9), página 417). A condição (1) pode ser obtida no toro de revolução e isto vai ser exemplificado mas para frente na seção.

Proposição 5.0.2 *Seja L_X um Lagrangiano de Mañé. As seguintes afirmações são satisfeitas:*

1. $L_X(p, v) \geq 0, \forall (p, v) \in TM$ e $L_X(p, v) = 0$ se, e somente se $v = X(p)$.

2. As curvas integrais do campo X são minimizantes da ação Lagrangiana.
3. As curvas integrais de X são soluções da equação de Euler-Lagrange.
4. O conjunto

$$\Sigma = \{(p, X(p)) : p \in M\}$$

é invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange. Além disso, o seguinte diagrama é comutativo.

Figura 8 – Comutatividade.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{graf}(X) & \xrightarrow{\phi_t^{L_X}} & \text{graf}(X) \\
 \Pi|_{\text{graf}(X)} \downarrow & & \downarrow \Pi|_{\text{graf}(X)} \\
 M & \xrightarrow{\phi_t^X} & M
 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

5. O conjunto Σ da parte anterior é uma subvariedade Lagrangiana de TM .
6. L_X é um Lagrangiano de Tonelli.

Prova:

- (1) Segue-se pelas propriedades da norma Riemanniana.
- (2) Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva diferenciável, $\gamma \in C^\infty(q_1, q_2; T)$, tal que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. Daí,

$$L_X(\gamma(t), \gamma'(t)) = 0$$

e $A_{L_X}(\gamma) = 0$. Portanto, γ é uma curva minimizante da ação em $C^\infty(q_1, q_2; T)$.

- (3) Segue-se da parte (2) e do Teorema 3.1.5.
- (4) Seja $(x_0, v_0) = (p_0, X(p_0)) \in \Sigma$. Pela unicidade das soluções da equação de Euler-Lagrange e o fato que as curvas integrais de X são soluções da equação de Euler-Lagrange, $\phi_t^L(p_0, v_0)$ tem a forma $(\gamma(t), \gamma'(t))$, em que γ é dada como em (2) acima. Daí, $\phi_t^L(p_0, v_0) = (\gamma(t), X(\gamma(t))) \in \Sigma, \forall t \in \mathbb{R}$.
- (5) Como Σ é uma variedade difeomorfa a M , $\dim \Sigma = m = \frac{1}{2} \dim TM$. Seja

$$\hat{\Omega} = \mathcal{L}^* \Omega$$

dado por $\hat{\Omega}_{(p,v)}(u_1, u_2) = \Omega_{\mathcal{L}(p,v)}(d\mathcal{L}_{(p,v)}(u_1), d\mathcal{L}_{(p,v)}(u_2))$ para cada $(p, v) \in TM$ e $u_1, u_2 \in T_{(p,v)}(TM)$. A 2-forma $\hat{\Omega}$ é chamada de **pullback de Ω** para TM por meio da

transformada de Legendre \mathcal{L} . (Para mais detalhe sobre o *pullback*, ver (6), página 360.) $\hat{\Omega}$ é não-degenerada pois Ω é não-degenerada e \mathcal{L} é um difeomorfismo. Por outro lado, como o operador *pullback* e a derivada exterior são comutativos entre eles (ver (6), página 366),

$$d\hat{\Omega} = d\mathcal{L}^*\Omega = \mathcal{L}^*d\Omega = \mathcal{L}^*0 = 0.$$

Assim, $\hat{\Omega}$ é fechada e, portanto, $(TM, \hat{\Omega})$ é uma variedade simplética. Como \mathcal{L} é um simplectomorfismo, Σ vai ser Lagrangiana em $(TM, \hat{\Omega})$ se $\mathcal{L}(\Sigma)$ é Lagrangiana em (T^*M, Ω) . Notemos que

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \{(p, L_v(p, X(p))) \in T^*M : p \in M\}.$$

Passando a cartas locais (x_1, \dots, x_n) , temos

$$L(p, v) = \sum_{i,j=1}^n (v_i - X_i)(v_j - X_j)g_{ij},$$

em que $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Portanto,

$$L_{v_k}(p, v) = \sum_{j \neq k}^n (v_j - X_j)g_{kj} + 2(v_k - X_k)g_{kk}.$$

Daí,

$$L_v(p, X(p)) = 0.$$

Assim,

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \{(p, 0) \in T^*M : p \in M\}.$$

Pelo Exemplo 4.3.7, $\mathcal{L}(\Sigma)$ é uma subvariedade Lagrangiana.

(6) **Estritamente convexo nas fibras:** Note que $L_X = f \circ h$, onde $f(y) = \frac{1}{2}y^2$ e $h(p, v) = \|v - X(p)\|$. Sejam $u, w \in T_x M$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} \|tu + (1-t)w - X(p)\| &= \|tu + (1-t)w - tX(p) - (1-t)X(p)\| \\ &\leq t\|u - X(p)\| + (1-t)\|v - X(p)\|. \end{aligned}$$

Como f é não-decrescente e convexa,

$$\begin{aligned} L(p, tu + (1-t)w) &= \frac{1}{2}\|tu + (1-t)w - X(p)\|^2 \\ &< \frac{1}{2}\{t\|u - X(p)\| + (1-t)\|v - X(p)\|\}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}t\|u - X(p)\|^2 + \frac{1}{2}(1-t)\|v - X(p)\|^2 \\ &= tL(p, u) + (1-t)L(p, w). \end{aligned}$$

L_X é **superlinear**: Seja $p \in M$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $\langle -X(p), v \rangle \geq$

$-||X(p)||$ e, assim,

$$\begin{aligned}\frac{L_X(p, v)}{||v||} &= \frac{1}{2}||v|| + \frac{1}{2} \frac{||X(p)||^2}{||v||} - \langle X(p), \frac{v}{||v||} \rangle \\ &\geq \frac{1}{2}||v|| - ||X(p)||.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{L_X(p, v)}{||v||} \longrightarrow \infty, \text{ quando } ||v|| \longrightarrow \infty.$$

■

Observação 5.0.3 Na prova do item (5), obtemos uma representação local da transformada de Legendre associada ao Lagrangiano de Mañé.

Teorema 5.0.4 O Hamiltoniano associado ao Lagrangiano de Mañé tem a forma

$$H_X(x, p) = \frac{1}{2}||p||_x^2 + p(X(x)).$$

Prova. Segue-se da página 36 do capítulo anterior que

$$H_X(x, p) = \frac{1}{2}||p + \langle X(x), \cdot \rangle_x||_x^2 - \frac{1}{2}||X(x)||_x^2.$$

Se $p = \langle p^\#, \cdot \rangle_x$, então

$$\begin{aligned}||p + \langle X(x), \cdot \rangle_x||_x^2 &= ||\langle p^\# + X(x), \cdot \rangle_x||_x^2 \\ &= ||p^\# + X(x)||_x^2 \\ &= ||p^\#||_x^2 + 2\langle p^\#, X(x) \rangle_x + ||X(x)||_x^2 \\ &= ||p||_x^2 + 2p(X(x)) + ||X(x)||_x^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$H(x, p)_X = \frac{1}{2}||p||_x^2 + p(X(x)).$$

■

Exemplo Seja $M = \mathbb{T}$ e $X : \mathbb{T} \longrightarrow T \mathbb{T}$. Vamos calcular a equação de Euler-Lagrange do Lagrangiano de Mañé L_X em uma carta local do toro.

Seja $\phi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$\phi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

com $a > r$.

$(\phi^{-1}, \phi((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)))$ é um sistema de coordenadas local no toro \mathbb{T}^2 e

$$\begin{aligned}\phi_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\ \phi_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle \\ &= \langle (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \rangle \\ &= r^2 \\ g_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ &= \langle (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \rangle \\ &= 0 \\ g_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle \\ &= \langle (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \rangle \\ &= (r \cos u + a)^2\end{aligned}$$

Daí,

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (r \cos u + a)^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(r \cos u + a)^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} [g^{11} (\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}) + g^{12} (\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v})] \\ &= \frac{1}{2} [g^{11}(0) + 0 (\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v})] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} [g^{11} (\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u}) + g^{12} (\frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v})] \\ &= \frac{1}{2} [g^{11}(0) + 0 (\frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v})] \\ &= 0 \\ &= \Gamma_{21}^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(0 + 0 - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + g^{22} (0) \right] \\
&= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \\
&= -\frac{1 - 2(r \cos u + a) r \sin u}{2 r^2} \\
&= \frac{\sin u (r \cos u + a)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \left[g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{11} (0 + 0 - 0) + 0 \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} \left[g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{22} \left(0 + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 0 \right) + 0 \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{2(r \cos u + a)(-r \sin u)}{(r \cos u + a)^2} \\
&= -\frac{r \sin u}{r \cos u + a} \\
&= \Gamma_{21}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left[g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{22} (0 + 0 - 0) + 0 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \right) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

No sistema de coordenadas, X tem a forma

$$X = x_1 \phi_u + x_2 \phi_v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \langle X, X \rangle \\
&= \frac{1}{2} x_1^2 r^2 + \frac{1}{2} x_2^2 (r \cos u + a)^2
\end{aligned}$$

e

$$\omega_{\phi(u,v)} = -x_1 r^2 du - x_2 (r \cos u + a)^2 dv.$$

Vamos seguir a prova do final da seção anterior onde calculamos a equação de Euler-Lagrange de um Lagrangiano magnético.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= \frac{\partial x_1}{\partial u} x_1 r^2 + \frac{\partial x_2}{\partial u} x_2 (r \cos u + a)^2 - x_2^2 (r \cos u + a) (r \sin u) \\ \frac{\partial U}{\partial v} &= \frac{\partial x_1}{\partial v} x_1 r^2 + \frac{\partial x_2}{\partial v} x_2 (r \cos u + a)^2 \\ D_t \gamma' &= \left(\ddot{u} + \frac{\sin u (r \cos u + a)}{r} \dot{v}^2 \right) \phi_u + \left(\ddot{v} - 2 \frac{r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \dot{v} \right) \phi_v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial u} - \frac{\partial \omega_1}{\partial v} = - \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} (r \cos u + a)^2 - 2 x_2 (r \cos u + a) (r \sin u) - \frac{\partial x_1}{\partial v} r^2 \right)$$

Por 3.2, obtemos que a equação de Euler-Lagrange tem a forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\sin u (r \cos u + a)}{r} \dot{v}^2 &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} x_1 r^2 + \frac{\partial x_2}{\partial u} x_2 (r \cos u + a)^2 - x_2^2 (r \cos u + a) (r \sin u) \right) \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} (r \cos u + a)^2 - 2 x_2 (r \cos u + a) (r \sin u) - \frac{\partial x_1}{\partial v} r^2 \right) \dot{v} \\ \ddot{v} - 2 \frac{r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \dot{v} &= \frac{1}{(r \cos u + a)^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} x_1 r^2 + \frac{\partial x_2}{\partial v} x_2 (r \cos u + a)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{(r \cos u + a)^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} (r \cos u + a)^2 - 2 x_2 (r \cos u + a) (r \sin u) - \frac{\partial x_1}{\partial v} r^2 \right) \dot{u}. \end{aligned} \right.$$

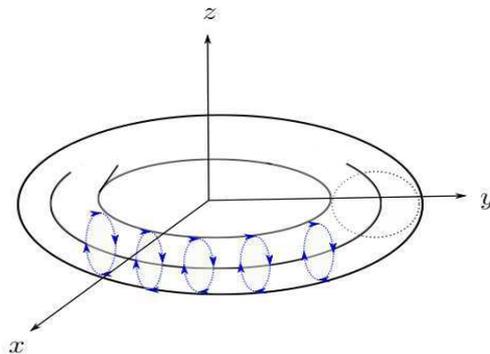
As contas feitas continuam valendo se trocamos o domínio de ϕ por $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, desta forma estaríamos cobrindo o toro todo. ■

Vamos considerar outros exemplos interessantes.

1. Seja $X = \phi_u$. O campo X é paralelo aos meridianos (que são geodésicas do toro). As equações de Euler-Lagrange têm a forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\sin u (r \cos u + a)}{r} \dot{v}^2 &= 0 \\ \ddot{v} - 2 \frac{r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \dot{v} &= 0 \end{aligned} \right.$$

que são precisamente as equações das suas geodésicas. Isto acontece pois, pela Proposição 5.0.1, como X é unitário e a forma induzida por X é fechada, o Fluxo Lagrangiano tem a forma de um fluxo de um Lagrangiano Riemanniano.

Figura 9 – O campo $X = \phi_u$ no toro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Vamos considerar o campo $X = \phi_v$. É claro que esse campo é tangente aos paralelos do \mathbb{T}^2 e que o círculo máximo e o mínimo (entre os paralelos do toro) são as únicas geodésicas que são curvas integrais de X . Nós vamos provar que essas são as únicas geodésicas que satisfazem a equação de Euler-Lagrange. Substituindo na equação geral de cima temos que a equação de Euler-Lagrange do Lagrangiano associado ao campo X é

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{\sin u (r \cos u + a)}{r} \dot{v}^2 = \frac{1}{r} (r \cos u + a) (\sin u) (2\dot{v} - 1) \\ \ddot{v} - \frac{2r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \dot{v} = -\frac{2r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \end{cases}$$

Esta equação é um caso particular de

$$D_t \gamma' = \nabla U(\gamma) + Y_{(\gamma)}(\gamma'). \quad (5.1)$$

Se β é uma geodésica magnética, então

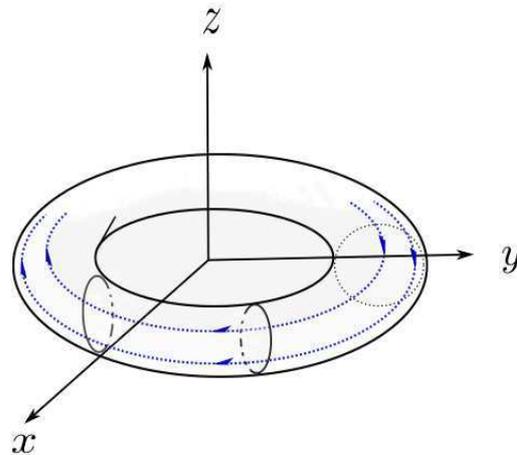
$$Y_{\beta(t)}(\beta'(t)) = \left(\frac{2}{r} (r \cos u + a) (\sin u) \dot{v}, -\frac{2r \sin u}{r \cos u + a} \dot{u} \right).$$

Quando β não é um paralelo, a segunda componente da Força de Lorentz Y é diferente do zero. Isto quer dizer que o "campo magnético está torcendo" β em relação aos paralelos do toro de tal forma que sua curvatura geodésica fica diferente do zero (pois $D_t \beta' \neq 0$). Daí, β não é uma geodésica.

3. Seja $X : \mathbf{S}^2 \rightarrow T\mathbf{S}^2$ o campo vetorial na esfera dado por

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, 1 - z^2).$$

X é o campo obtido ao projetar o vetor $(0, 0, 1)$ no plano tangente de cada ponto da esfera. Além disso, X é tangente aos meridianos da esfera tirando os pontos $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$. Para mostrar isso, é suficiente ver que para cada ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$ o vetor $X(x_0, y_0, z_0)$ está no plano Π , que passa pelos pontos (x_0, y_0, z_0) , $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 0)$. A

Figura 10 – O campo $X = \phi_u$ no toro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

equação cartesiana desse plano é $(x, y, z) \cdot (-y_0, x_0, 0) = 0$. Daí, é fácil ver que $X(x_0, y_0, z_0)$ está em Π .

Considere a parametrização da esfera $\psi : (0, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{S}^2$ dada por

$$\psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2}).$$

Logo,

$$\psi_r(r, \theta) = \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}} \right),$$

$$\psi_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

E o campo vetorial X , nesta carta, fica da forma

$$X(r, \theta) = (-r\sqrt{1 - r^2} \cos \theta, -r\sqrt{1 - r^2} \sin \theta, r^2) = -r\sqrt{1 - r^2} \cdot \psi_r.$$

O campo X é precisamente o gradiente da função altura ($f(x, y, z) = z$) na carta ψ . De fato, seja $v = v_1\psi_r + v_2\psi_\theta \in T_{\psi(r, \theta)}\mathbf{S}^2$. Daí,

$$df_{\psi(r, \theta)} \cdot v = -v_1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

e

$$\langle X(r, \theta), v \rangle = -v_1 r \sqrt{1 - r^2} \|\psi_r\|^2 = -v_1 r \sqrt{1 - r^2} \frac{1}{1 - r^2} = -v_1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Portanto, $df_{\psi(r, \theta)} \cdot v = \langle X(r, \theta), v \rangle$, para cada $v \in T_{\psi(r, \theta)}\mathbf{S}^2$. Portanto, $\nabla f = X$ na carta ψ .

Deste último, obtemos:

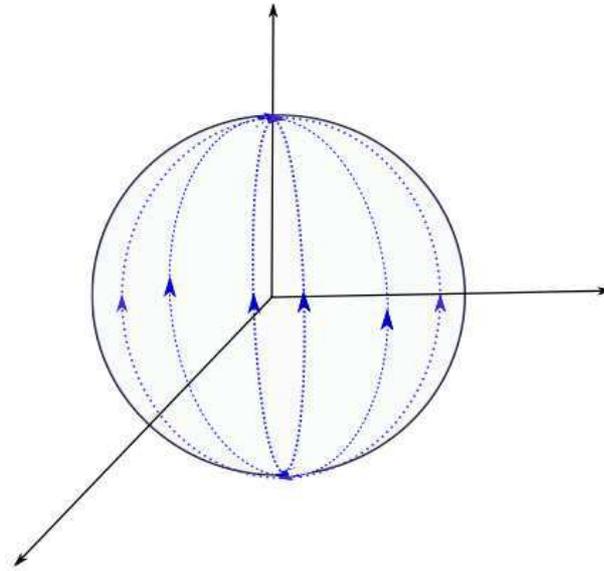
- (i) **A 1-forma ξ , induzida por X , é fechada:** Como $\xi = df$, temos que $d\xi = d(df) = d^2(f) = 0$.

(ii) **A função potencial U , induzida por X , é não-constante:** Por definição,

$$U(r, \theta) = \|X(r, \theta)\|^2 = (r\sqrt{1-r^2})^2 \psi_r \cdot \psi_r = r^2.$$

De (i) e (ii), pela Proposição 5.0.1, o Lagrangiano L_X , tem associado um fluxo de um Lagrangiano mecânico na parametrização ψ .

Figura 11 – Projeção da função altura na esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 5.0.5 *As funções constantes são soluções da equação de Hamilton-Jacobi $H_X(x, d_x u) = 0$. Mais ainda, $c(H_X) = 0$.*

Prova. Se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, então $d_x u = 0$ para cada $x \in M$. Portanto, $H_X(x, d_x u) = 0$ e pelo Teorema 4.2.8 (*Weak KAM*) temos que $c(H) = 0$. ■

Observação 5.0.6 *O conjunto $\Sigma = \text{graf}(X)$ da Proposição 5.0.2 é tal que $\text{graf}(X) = \tilde{\mathcal{I}}(0)$. Com efeito, seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva integral de X . Logo,*

$$0 = 0(\gamma(t_2)) - 0(\gamma(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} L_X(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} 0 dt = 0,$$

para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Assim, γ é $(0, L_X, 0)$ -calibrada. Como $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (\gamma(0), X(\gamma(0)))$, temos que $(\gamma(0), X(\gamma(0))) \in \tilde{\mathcal{I}}(0)$ e pela arbitrariedade de $\gamma(0)$, temos que $\text{graf}(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}(0)$. Por último, como $\tilde{\mathcal{I}}(0)$ pode ser visto como um gráfico contínuo, $\text{graf}(X) = \tilde{\mathcal{I}}(0)$.

Teorema 5.0.7 *Seja $L_X : TM \rightarrow \mathbb{R}$ o Lagrangiano de Mañé associado ao campo vetorial X de classe C^k , $k \geq 2$, sobre M . Suponha que L_X satisfaz a condição de desconexidade de Mather. Então temos o seguinte:*

1. *O conjunto de Aubry projetado é o conjunto recorrente por cadeias do fluxo de X em M .*
2. *As constantes são as únicas soluções KAM fracas se, e somente se, cada ponto de M é recorrente por cadeias sob o fluxo de X .*

Prova.

1. Pelo Lema 4.2.17, o conjunto de Aubry $\tilde{\mathcal{A}}$ é o subconjunto de $I(0) = \text{graf}(X)$ recorrente por cadeias da restrição do fluxo $\phi_t^L|_{\text{graf}(X)}$. Pelo item (4) da Proposição 5.0.2, $\Pi|_{\text{graf}(X)}$ conjugua a $\phi_t^L|_{\text{graf}(X)}$ e ϕ_t^X . Portanto, $\Pi|_{\text{graf}(X)}(\tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}$ é o conjunto recorrente por cadeias do fluxo de X sobre M .
2. Se as constantes são as únicas soluções KAM fracas, então elas diferem por uma constante. Pelo Teorema 4.2.18 temos que $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{N}$ e como $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{I}}(0) \subseteq \mathcal{N}$ temos que $\tilde{\mathcal{I}}(0) = \text{graf}(X) = \tilde{\mathcal{A}}$ e, portanto, $\mathcal{A} = \pi(\tilde{\mathcal{A}}) = \pi(\text{graf}(X)) = M$. Assim, \mathcal{A} é conexo e pelo Teorema 4.2.18 $\tilde{\mathcal{A}}$ é recorrente por cadeias para a restrição do fluxo $\phi_t^L|_{\tilde{\mathcal{A}}}$ e repetindo o raciocínio da parte (1) obtemos o desejado. Reciprocamente, se M é recorrente por cadeias do fluxo de X , isto obriga que $\mathcal{A} = M$ e pela conexidade de M temos pelo Teorema 4.2.18 que as soluções KAM fracas são todas constantes. ■

Definição 5.0.8 *Um campo vetorial X sobre M é dito **tipo-gradiente** se podemos encontrar uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que*

1. Para cada $x \in M$, temos $X \cdot f(x) = d_x f(X(x)) \leq 0$,
2. Para cada $x \in M$, temos $X \cdot f(x) = 0$ se, e somente se, $X(x) = 0$.

Como exemplo de um campo vetorial tipo-gradiente, podemos tomar $X = -\nabla f$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e seu gradiente é tomado em relação à métrica Riemanniana sobre M . Neste caso

$$X \cdot f(x) = -d_x f(\nabla f(x)) = -\|d_x f\|_x^2.$$

Teorema 5.0.9 *Seja X um campo vetorial tipo-gradiente de classe C^k . Se $k \geq 2\dim M - 2$ então L_X satisfaz a condição de desconexidade de Mather.*

Prova. Ver (1). ■

Teorema 5.0.10 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $L_X : TM \rightarrow \mathbb{R}$ o Lagrangiano de Mañé associado ao campo vetorial X . Se existe uma curva integral de X que é uma curva fechada ou se M é compacta, então $c(L_X) = 0$.*

Prova. Suponhamos que X tem uma curva integral fechada. Observemos que para cada $k \geq 0$ e cada curva fechada γ temos

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_0^T \left\{ \|\gamma'(t) - X(\gamma(t))\|_x^2 + k \right\} dt \geq 0. \quad (5.2)$$

Logo, $c(L_X) \leq 0$.

Seja $k < 0$. Pela hipótese, existe σ , uma curva integral de X fechada e

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_0^T \left\{ \|\sigma'(t) - X(\sigma(t))\|_x^2 + k \right\} dt = \int_0^T k dt = kT < 0.$$

Portanto, $c(L_X) = 0$. Suponhamos agora que M é compacta. Pela Proposição 5.0.5 temos que $c(H_X) = 0$. Conforme a Observação 4.2.10 segue-se que $c(L_X) = c(H_X) = 0$. ■

6 CONCLUSÃO

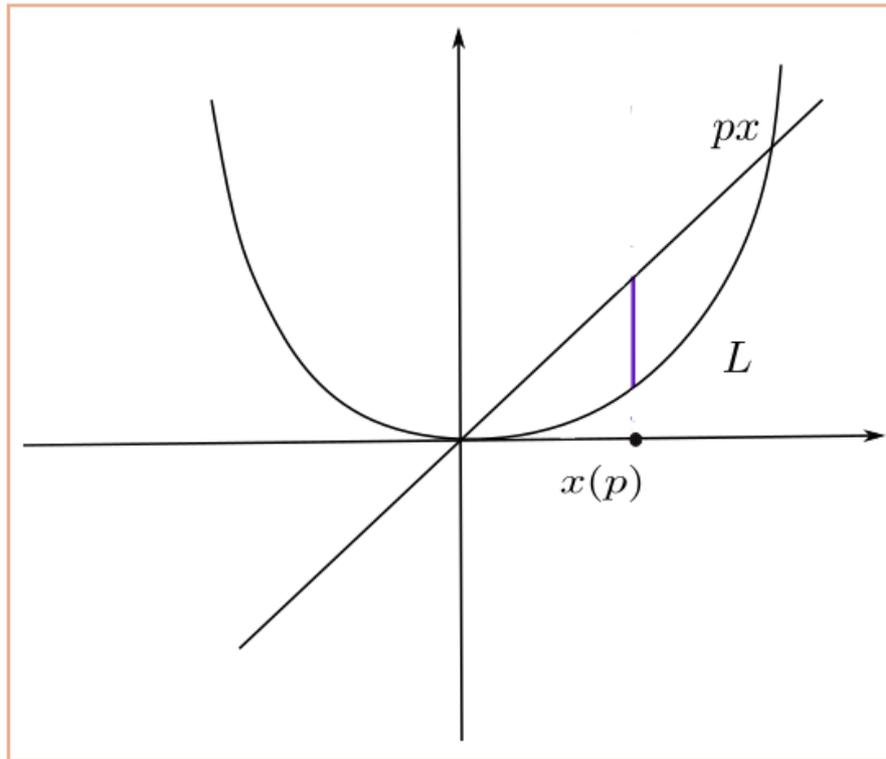
Nesta dissertação, o objetivo principal foi trabalhar com o Lagrangiano de Mañé. Apresentamos alguns exemplos, algumas propriedades e alguns resultados conhecidos. Durante o nosso trabalho, vimos que existem muitos problemas abertos no assunto. A intenção é continuar a investigação nesse assunto, a fim de resolver alguns desses problemas, ao menos parcialmente.

REFERÊNCIAS

- 1 MAÑÉ, R. On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems. **Nonlinearity**, 5(3), 623–638, 1992.
- 2 FATHI, A. **Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics**. Preliminary Version Number 10, Lyon, 2008.
- 3 SORRENTINO, A. **Lecture notes on Mather’s theory for Lagrangian systems**. arXiv preprint arXiv:1011.0590, 2010.
- 4 CONTRERAS, G.; ITURRIAGA, R. **Global Minimizers of Autonomous Lagrangians**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.
- 5 FATHI, A.; RIFFORD, L.; FIGALLI, A. On the Hausdorff dimension of the Mather quotient. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, 62(4), 445–500, 2009.
- 6 LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York: Springer, 2013.
- 7 PALIS JÚNIOR, J.; de MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- 8 LIMA, E. L. **Fundamental Groups and Covering Spaces**. Natick, MA: A K Peters, 2003.
- 9 MUNKRES, J. **Topology**. Second Edition. New York: Pearson, 2018.
- 10 ARNOL’D, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. Second Edition. New York: Springer, 2013.
- 11 MORITA, S. **Geometry of Differential Forms**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.

APÊNDICE A – Interpretação geométrica das transformadas de Legendre e Fenchel na reta

Figura 12 – Ilustrando a Transformada de Fenchel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Geometricamente, a transformada de Fenchel de uma função convexa L é aquela que para cada valor p atribui a longitude máxima que pode ter um segmento de reta vertical secante para a região delimitada por L e px .

Exemplo Seja $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vamos calcular a transformada de Fenchel de L .

Por definição, $H(p) = \max_{x \in \mathbb{R}} \{px - L(x)\}$. Derivando a função $g(x) = px - L(x)$

$$g'(x) = p - x$$

Portanto, g tem um valor máximo em $x(p) = p$. Daí, $H(p) = p^2 - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2$.