

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

Estudo de Sistemas Vinculados e suas aplicações

Mateus Antônio Resende

21 DE FEVEREIRO DE 2020
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

Estudo de Sistemas Vinculados e suas aplicações

Autor: Mateus Antônio Resende

Orientador: Prof. Dr. Alexei Anatolevich Deriglazov

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

21 DE FEVEREIRO DE 2020
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedicatória

In memoriam de Vanessa e Neni.

Agradecimentos

- A Deus, pois pela fé em um mundo mais justo, me mantive forte até aqui.
- Aos meus pais, Ana Lúcia e Antônio, e meu irmão Lucas, que sempre estiveram presentes me dando todo apoio que se espera de uma família.
- Ao professor Alexei Deriglazov, pela orientação e paciência. Obrigado pelo aprendizado.
- Ao professor Bruno Rizzuti, pelos ensinamentos e pelo auxílio no desenvolvimento do artigo dessa tese.
- A Mariana, que me acompanhou durante todo o doutorado, foi suporte para que eu mantivesse minha sanidade mental e me tornasse uma pessoa melhor nesse tempo. Não existem palavras para lhe agradecer por tudo que você fez por mim. E os agradecimentos são extensíveis a sua irmã, Ana Paula, e seus pais, por quem tenho muito carinho.
- A todos os professores, funcionários e amigos do Departamento de Física da UFJF. Em especial, agradeço ao secretário de nossa Pós-Graduação, o Sr. Domingos Lopes, por realizar o seu trabalho sempre com muita eficiência e excelência.
- Agradeço também aos companheiros da sala 5: Erichardson, Diogo, Jarne, Juan, Laysa, Ramon, Tiago e Vahid, por terem compartilhado comigo esses anos de convivência.
- A Laysa e o Tiago, agradeço por terem transformado essa convivência em amizade. E por terem dividido comigo os mais diversos momentos durante esse período.
- A minha melhor, mais antiga e sempre presente amiga, Mari.

- Ao amigo e companheiro de república Thadeu. E ao ex-companheiro de república e hoje, irmão para toda a vida, Fagner.
- A Jéssica, que entrou de repente na minha vida, e do nada já se tornou tudo.
- Por fim, agradeço à CAPES por financiar o meu doutorado e ao CNPq e FAPEMIG por financiarem direta e/ou indiretamente o desenvolvimento desse projeto.

Você está entrando em uma escola de ensino superior que é vedada aos seus irmãos que têm direito. Portanto, está adquirindo uma responsabilidade social muito grande e sua função é levar esse conhecimento a quem tem direito, mas não tem acesso!

Epígrafe

Resumo

Este trabalho consiste em uma discussão sobre os aspectos fundamentais de sistemas descritos por uma Lagrangiana singular. As tentativas de lidar com tais sistemas remontam da década de 50. Inicialmente com P. G. Bergmann e colocada em métodos formais por P. A. M. Dirac, o processo de hamiltonização e quantização de sistemas vinculados continua sendo uma metodologia eficaz no estudo de modelos de física teórica até os dias atuais. A busca por equações relativísticas que descrevam a evolução dos graus de liberdade de rotação e sua influência na trajetória de uma partícula com spin, representa um desses intrigantes modelos. Essa busca está diretamente relacionada com transformações de simetrias e leis de conservação. Analisamos a estrutura do procedimento de Dirac, a relação entre os vínculos e as simetrias da teoria e sua aplicação em diversos contextos, como a Mecânica de Hertz e o modelo de Staruszkiewicz.

Palavras chaves : Teorias singulares, Procedimento de Dirac, Simetrias de Gauge, Partículas com spin.

Abstract

This paper consists of a discussion about the fundamental aspects of systems described by a singular Lagrangian. Attempts to deal with such systems go back to the 1950s. Initially with P. G. Bergmann and placed in formal methods by P. A. Dirac, the process of hamiltonization and quantization of constrained systems remains an effective methodology for studying theoretical physics models until nowadays. The search for relativistic equations that describe the evolution of the degrees of freedom of rotation and their influence on the trajectory of a spin particle represents one of these intriguing models. This search is directly related to symmetry transformations and conservation laws. We analyzed the structure of the Dirac procedure, the relationship between the constraints and symmetries of the theory and its application in various contexts, as Hertz Mechanics and the Staruszkiewicz model.

Keywords : Singular theories, Dirac procedure, Gauge symmetry, Spinning particles.

Lista de Publicações

- Rizzuti, B. F., Júnior, G. F. Vasconcelos and Resende, M. A. *To square root the Lagrangian or not: an underlying geometrical analysis on classical and relativistic mechanical models*. arXiv:physics.class-ph/1905.01177.
- Resende, M. A. e Martins, L. G. *Wolfram|Alpha: um mecanismo de busca no auxílio do processo de ensino-aprendizagem de conteúdos de matemática na educação a distância*. Boletim Online de Educação Matemática, **6** 432-448, (2018).
- Ribeiro, T. G., Senra, C. P. e Resende, M. A. *Utilização do software Audacity como recurso didático no ensino de ondas*. A Física na Escola (Online), **16** 43-50, (2018).

Notações e convenções

Ao longo de toda essa tese é utilizada a convenção de somatório de Einstein. O alcance de cada somatório é explicitamente citado ou fica claro pelo contexto. A igualdade válida na superfície de vínculos (igualdade fraca) é indicada pelo símbolo “ \approx ”, que não deve ser confundido como uma aproximação. Em grande parte do texto, salvo em situações que deixariam a leitura confusa, seguimos a notação abaixo.

$\phi_\alpha \rightarrow$ vínculos primários

$\phi_{\alpha_1}^{(1)} \rightarrow$ vínculos primários de primeira classe

$\phi_{\alpha_2}^{(2)} \rightarrow$ vínculos primários de segunda classe

$\phi_a \rightarrow$ vínculos secundários

$\phi_{a_1}^{(1)} \rightarrow$ vínculos secundários de primeira classe

$\phi_{a_2}^{(2)} \rightarrow$ vínculos secundários de segunda classe

$\Phi_{I_1}^{(1)} \rightarrow$ conjunto completo de vínculos de primeira classe

$\Phi_{I_2}^{(2)} \rightarrow$ conjunto completo de vínculos de segunda classe

Os componentes de um vetor contravariante são denotados com sobrescritos,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

enquanto componentes covariantes são denotados com subscritos,

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Os índices são levantados ou abaixados de acordo com a métrica de Minkowski

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu,$$

cuja assinatura é

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

Para contrações de índices usa-se a notação

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = \dot{x}^2, \quad \dot{x}^\mu N_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = (\dot{x} N \dot{x}), \quad N_\nu^\mu \dot{x}^\nu = (N \dot{x})^\mu$$

e assim por diante. Por fim, a delta de Kronecker em quatro dimensões

$$\delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad \delta^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

definida como igual a 1, se $\mu = \nu$ e 0, nos outros casos.

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Notação e convenções	viii
1 Introdução	1
2 Formalismo Hamiltoniano para teorias singulares	13
2.1 Teorias singulares	14
2.1.1 Procedimento de Dirac	18
2.2 Classificação dos vínculos	22
2.3 Teorias com vínculos de segunda-classe	29
2.4 Teorias com vínculos de primeira-classe	32
2.5 A partícula com spin	37
3 Simetrias	40
3.1 Introdução	41
3.2 Geodésicas	45
3.3 Invariância por reparametrização	51

3.4	Mecânica de Hertz	56
3.4.1	Formulação teórica	58
3.4.2	O oscilador harmônico na mecânica de Hertz	61
4	Busca por uma Lagrangiana para a partícula relativística com spin	64
4.1	Introdução	65
4.2	Sistema com massa zero	68
4.3	O modelo de Staruszkiewicz	70
4.4	Procedimento de Dirac	73
4.5	Problema Variacional	76
4.6	Interação eletromagnética	78
5	Conclusões e perspectivas	81
A	O grupo de Lorentz	84
B	Curvatura escalar	88
C	Produtos Educacionais	91
	Bibliografia	95

CAPÍTULO 1

Introdução

Princípio de mínima ação

Dos cursos de mecânica clássica, sabemos que a soma das energias cinética e potencial é uma importante quantidade que caracteriza um sistema físico. Curiosamente, a diferença entre essas grandezas também nos interessa e faz parte da formulação do princípio de mínima ação. Em um sistema mecânico cujas variáveis de posição são q^a , associamos uma função de Lagrange $L(q^a, \dot{q}^a, \tau)$, que em muitos casos representa a diferença citada anteriormente. Denotamos $\dot{q}^a \equiv \frac{dq^a}{d\tau}$. O cálculo da ação Lagrangiana, ao longo de uma curva qualquer $q^a(\tau)$ entre dois pontos fixos $[\tau_1, \tau_2]$ é

$$S[q] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(q, \dot{q}, \tau). \quad (1.1)$$

De acordo com o princípio de mínima ação (ou princípio de Hamilton), a um sistema mecânico pode ser associada uma função Lagrangiana L . O sistema se move entre dois pontos dados ao longo de uma curva que fornece o mínimo de energia da ação [1].

Análise variacional

O problema variacional para a ação lagrangiana pode ser formulado da seguinte forma. Considere um conjunto de curvas ligados entre dois pontos fixos q_1, q_2 ao longo de um intervalo de tempo fixo $[\tau_1, \tau_2]$ de forma que

$$q^a(\tau_1) = q_1^a, \quad q^a(\tau_2) = q_2^a. \quad (1.2)$$

O problema consiste em encontrar a curva que forneça o menor valor para a ação funcional. De acordo com o princípio de mínima ação, essa será a curva que o sistema com a Lagrangiana L escolherá como trajetória de movimento. Se $q^a(\tau)$ representa um mínimo do problema variacional (1.1) e (1.2), então

$$\delta S[q] = 0, \quad \text{para qualquer } \delta q^a(\tau). \quad (1.3)$$

Para a ação Lagrangiana (1.1) temos

$$\delta S = \int d\tau \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^a} (\delta \dot{q}^a) \right). \quad (1.4)$$

Usando a integração por partes, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\delta S = \int d\tau \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (1.5)$$

Se a variação é calculada na classe de funções (1.2), δq^a desaparece nos pontos extremos, $\delta q^a(\tau_1) = \delta q^a(\tau_2) = 0$. Dessa forma, ficamos simplesmente com

$$\delta S[q] = \int d\tau \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a. \quad (1.6)$$

Então, para que (1.3) seja satisfeito, é necessário que

$$\int d\tau \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a = 0, \quad (1.7)$$

para qualquer valor de δq^a . Para isso,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0. \quad (1.8)$$

As equações anteriores são conhecidas como equações de Euler-Lagrange e são a base do formalismo Lagrangeano na mecânica clássica. Elas formam um sistema de equações diferenciais de segunda ordem cujas variáveis descrevem a posição para um dado sistema físico. O formalismo Hamiltoniano no entanto, propõe uma descrição que seja equivalente ao formalismo Lagrangeano, porém, escrito em termos de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para variáveis que descrevem a posição e o momento do sistema [2].

Teorias singulares e não-singulares

O cálculo da derivada com relação a τ das equações de Euler-Lagrange pode ser escrito como

$$M_{ab}(q, \dot{q})\ddot{q}^b = K_a(q, \dot{q}), \quad (1.9)$$

onde

$$M_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}, \quad K_a \equiv \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} \dot{q}^b. \quad (1.10)$$

Teorias Lagrangeanas são classificadas de acordo com as propriedades da matriz Hessiana M que aparece acima [3]. Uma teoria é chamada singular se $\det M = 0$, caso contrário, ela é chamada não-singular e a matriz inversa denotada por \tilde{M} . Equações para uma teoria não-singular podem ser escritas da seguinte forma:

$$\ddot{q}^a = \tilde{M}^{ab}(q, \dot{q})K_b(q, \dot{q}). \quad (1.11)$$

Isso implica em uma relação causal para a dinâmica do sistema, como esperado para um sistema clássico. Assim, a mecânica clássica usualmente é descrita por sistemas não-singulares. No entanto, quando um sistema possui vínculos (restrições que alteram o número de graus de liberdade do sistema) é possível formulá-lo em termos de uma Lagrangiana singular. A singularidade é uma propriedade típica de teorias com invariância relativística manifesta. O formalismo da mecânica clássica para teorias singulares será discutido em detalhes no próximo capítulo.

Da Lagrangiana para as equações Hamiltonianas

Além da formulação de Lagrange, há ainda a formulação de Hamilton para a mecânica clássica. De fato, sem utilizarmos do formalismo Hamiltoniano não podemos resolver questões simples de teoria quântica, como, por exemplo, obter a fórmula de Balmer para o átomo de hidrogênio, questão que deu início à mecânica quântica [4].

Para entendermos essa formulação, consideremos a derivada total da Lagrangiana $L(q^a, \dot{q}^a, t)$,

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} d\dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a\right) - \dot{q}^a d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

que pode ser reescrita como

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a - L\right) = \dot{q}^a d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.13)$$

Definimos as quantidades $p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ e $H \equiv p_a \dot{q}^a - L$, como momento generalizado e Hamiltoniana, respectivamente. De (1.13) temos agora

$$dH = \dot{q}^a dp_a - \dot{p}_a dq^a - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.14)$$

Isso sugere considerarmos a Hamiltoniana como função de (q, p, t) em vez de (q, \dot{q}, t) . Comparando a derivada total da Hamiltoniana $dH(q, p, t)$ com àquela expressão advinda da Lagrangiana, (1.14), encontramos

$$\left(\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\right) dq^a - \left(\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) dp_a + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt = 0. \quad (1.15)$$

Considerando que coordenadas e momentos são variáveis independentes, é necessário que cada um dos parênteses se anule. Assim,

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.16)$$

As equações para \dot{q} e \dot{p} são as equações de movimento Hamiltonianas.

As considerações anteriores são válidas apenas para as teorias não-singulares, ou seja, aquelas cujo determinante da matriz hessiana é diferente de zero. Para o outro caso, é preciso utilizar um método diferente, que inclui a presença de vínculos no sistema.

Sistemas vinculados

Na formulação de Hamilton, qualquer relação entre variáveis dinâmicas, independente de velocidades, é considerada um vínculo do sistema.

$$\phi_m = \phi_m(q_i, p_i) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n \leq N, \quad (1.17)$$

onde N é a dimensão do espaço de configurações. Esses vínculos podem aparecer diretamente da definição de momento, formando um conjunto de vínculos primários, mas também podem ser gerados a partir da exigência de que o conjunto de vínculos primários não pode evoluir com o tempo, formando um conjunto de vínculos secundários.

Dentre esses dois conjuntos, há aqueles vínculos que comutam com todos os outros, ou seja, possuem parênteses de Poisson nulos entre si, os vínculos de primeira classe. E os que possuem parênteses de Poisson diferente de zero são denominados de segunda classe. É necessário então, deixar de lado a distinção entre vínculos primários e secundários em favor daquela entre primeira e segunda classe, cuja definição é baseada na estrutura fundamental do formalismo, os parênteses de Poisson [5].

A existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui invariância por transformações de Gauge. Por isso, o estudo de sistemas vinculados está diretamente ligado com as teorias de Gauge, como o Eletromagnetismo [6], a Relatividade geral [7], a teoria de Yang-Mills [8], dentre outras.

A necessidade de uma quantização canônica para sistemas vinculados

Quando tratamos de sistemas vinculados aparecem inconsistências se tentamos aplicar, diretamente, o que foi desenvolvido sobre quantização canônica para sistemas sem vínculos. Uma maneira simples de ver isto é supor que, numa determinada teoria, existe um vínculo dado por

$$\phi(q, p) = 0. \quad (1.18)$$

Nota-se que o parêntese de Poisson (que faz parte da identificação de transformações canônicas e constantes de movimento) desta quantidade com outra qualquer da teoria

pode não ser nulo. Como exemplo, temos o caso da partícula livre relativística que possui a condição de camada de massa

$$p^2 - m^2 = 0, \quad (1.19)$$

que é um vínculo. Considerando, por exemplo, o parêntese de Poisson deste vínculo com x_μ , temos

$$\begin{aligned} \{x_\mu, p^2 - m^2\} &= \{x_\mu, p^\nu p_\nu\} \\ &= \{x_\mu, p^\nu\} p_\nu + p^\nu \{x_\mu, p_\nu\} \\ &= \delta_\mu^\nu p_\nu + \delta_\mu^\nu p_\nu \\ &= 2p_\mu, \end{aligned} \quad (1.20)$$

que é, de uma maneira geral, diferente de zero. Por este motivo, em lugar de (1.18), é comum escrever

$$\phi(q, p) \approx 0, \quad (1.21)$$

em que o símbolo “ \approx ” significa igualdade fraca [9]. A relação (1.21) não vale, necessariamente, dentro dos parêntese de Poisson. Consideremos então, que exista uma certa quantidade dinâmica $A(q, p)$, cujo parêntese de Poisson com $\phi(q, p)$ seja diferente de zero, isto é,

$$\{A, \phi\} \neq 0. \quad (1.22)$$

Na passagem para a Mecânica Quântica, ϕ e A transformam-se em operadores, que chamaremos de $\hat{\phi}$ e \hat{A} . Em virtude de (1.18), $\hat{\phi}$ é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo $\hat{\phi}$ deve ser nulo. Agora, em termos quânticos, não tem sentido a denominação de fracamente nulo. Em particular,

$$[\hat{A}, \hat{\phi}] = 0. \quad (1.23)$$

Mas, pelas expressões anteriores, deveríamos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre \hat{A} e $\hat{\phi}$. Como vemos, a regra geral de quantização canônica, leva a inconsistências quando na presença de vínculos.

Foram os físicos Peter Bergmann (1915-2002) e Paul A. M. Dirac (1902- 1984) que descobriram a maneira correta de proceder quanto à quantização canônica de sistemas vinculados [4, 10].

Simetrias

Desde o advento da Relatividade geral, a invariância de Gauge tem desempenhado um papel fundamental na construção de modelos para a física teórica [11]. Seja em modelos clássicos, como a partícula livre, ou em modelos quânticos, como a equação de Schrödinger [12], a teoria de Gauge é responsável pela estrutura formal das leis de conservação perante um conjunto de transformações [13].

De forma simplificada, teorias de Gauge são caracterizadas pela presença de um grupo interno de simetrias contínuas, que definem um sistema de referência interno, cuja escolha é totalmente arbitrária para cada instante de tempo. Então, apenas quantidades independentes dessa escolha, ou seja, invariantes de gauge, serão observáveis físicos. Quando tratadas pelo formalismo Hamiltoniano, as teorias de Gauge comportam-se como teorias vinculadas, onde as condições entre as variáveis canônicas se mantêm.

As teorias que possuem invariância local são descritas por Lagrangianas singulares, por isso seu estudo é feito por meio do procedimento de Dirac para sistemas vinculados. A presença de vínculos na formulação Hamiltoniana mostra que o movimento de algumas variáveis da teoria não é independente, como descrito em [14].

Os métodos de quantização padrão não podem ser aplicados diretamente a essas teorias. Embora com algumas considerações naturais seja possível quantizar a Eletrodinâmica, uma aplicação não crítica da quantização em casos mais complicados pode produzir resultados não-físicos, como mostrado por Feynmann [15]. Enquanto que, para as teorias não-singulares, o procedimento é a conhecida transformação de Legendre, a hamiltonização de teorias singulares é às vezes uma tarefa mais difícil. A hamiltonização da teoria de Lagrange é então um importante passo para efetuar a chamada quantização canônica para sistemas singulares.

Partícula com spin

Em 1925, Pauli publicou dois trabalhos nos quais estudou o espectro de multipletos de alguns átomos e o efeito Zeeman anômalo. Como consequências desses trabalhos, ele apresentou a hipótese de que o elétron poderia ser representado por quatro números quânticos. Um desses números, o número quântico magnético estaria ligado a uma propriedade quântica desconhecida, até então. Pauli a denominou como “uma ambiguidade classicamente indescritível de algumas propriedades quânticas do elétron” [16, 17]. No mesmo ano, Uhlenbeck e Goudsmit, associaram a propriedade descoberta por Pauli a uma “rotação intrínseca do elétron”, quando então surgiu a ideia de spin [18].

Desde os tempos de Frenkel [19] e Mathisson [20], inúmeras tentativas vêm sendo feitas no intuito de encontrar uma formulação clássica para a dinâmica de uma partícula com spin. Grande parte dessas tentativas são generalizações da Lagrangiana clássica para uma partícula livre, através da introdução de termos com derivadas superiores ou variáveis auxiliares, ou ainda restringindo o número de graus de liberdade indesejados usando alguma consideração de simetria ou geometria.

Para descrever a partícula com spin $s = \frac{1}{2}$ (prótons, elétrons e neutrons) na mecânica quântica, introduzimos a função de onda Ψ_α , com $\alpha = 1, 2$. O operador de spin \hat{S}_i é definido por

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \quad (1.24)$$

onde σ_i representa as matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

cujas propriedades algébricas são

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \mathbf{1} \delta_{ij}, \quad (1.26)$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \times \mathbf{1} \delta_{ij}, \quad (1.27)$$

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i \equiv [\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (1.28)$$

$$(\sigma_i)^2 = \mathbf{1}, \quad \text{para qualquer } i \text{ fixo}, \quad (1.29)$$

$$\sum_i \sigma_i \sigma_i = 3 \times \mathbf{1}, \quad \left[\sigma_k, \sum_i \sigma_i \sigma_i \right] = 0. \quad (1.30)$$

Note que os comutadores (1.28) das matrizes σ são os mesmos que para o vetor momento angular. Os operadores de spin, sendo proporcionais as matrizes de Pauli, têm propriedades similares, em particular

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j \right] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad (1.31)$$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hbar^2 s(s+1) \times \mathbf{1} = \frac{3\hbar^2}{4} \mathbf{1}. \quad (1.32)$$

Assim, a evolução de um elétron imerso em um campo eletromagnético é descrita pela equação

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eA_0 + \frac{e(g-1)}{2m^2 c^2} \hat{\mathbf{S}} [\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{E}] - \frac{eg}{2mc} \mathbf{B} \hat{\mathbf{S}} \right) \Psi. \quad (1.33)$$

Os dois primeiros termos na Hamiltoniana correspondem à interação mínima de uma partícula pontual com um potencial eletromagnético, enquanto os dois últimos termos representam a interação de spin com o campo. O vetor $\frac{eg}{2mc} \hat{\mathbf{S}}$ é conhecido como momento magnético da partícula.

A equação está escrita na representação de Schrödinger onde se atribui a dependência com o tempo à função de onda, enquanto que nos modelos semiclássicos lidamos com variáveis dinâmicas. Passando para a representação de Heisenberg, que atribui a dependência do tempo aos operadores, podemos escrever as equações dinâmicas para os operadores básicos da teoria. A eq.(1.33) fornece a estrutura e as propriedades dos níveis de energia do átomo de hidrogênio em um bom acordo com os experimentos.

Para se construir um modelo semiclássico correspondente à equação de Pauli, é necessário que descrevamos um sistema mecânico de forma clássica que, além das variáveis

de posição x_i , contenha também graus de liberdade a mais, para que eles possam descrever o efeito do spin no sistema considerado. Na formulação Hamiltoniana o spin deve ser descrito pelos operadores S_i que implicam em (1.31) e (1.32) no processo de quantização. Dessa forma, o modelo tradicional de partículas com spin consiste em um ponto em uma linha de mundo e um conjunto de variáveis que descrevam os graus de liberdade do spin, que formam o espaço interno ligado a esse ponto [21].

A análise Hamiltoniana de modelos que possuem derivadas temporais e a presença de raízes quadradas em sua estrutura pode não ser simples. Um exemplo é o modelo de Staruszkiewicz para uma partícula com spin [22]. Pode haver problemas ao tentar se expressar as velocidades em termos dos momentos. Uma forma de remover esses empecilhos é introduzindo variáveis auxiliares (graus de liberdade extras). No entanto, essa forma não é única, mas sua escolha pode ser feita de maneira conveniente de acordo com o propósito em questão. Por consistência, as diferentes formas devem ser fisicamente equivalentes.

Em [23] apresentou-se uma ação Lagrangiana sem variáveis auxiliares para descrever a partícula com spin. Uma outra formulação variacional foi apresentada em [24], agora para um espaço-tempo curvo. O modelo fornece um exemplo interessante de uma partícula não-comutativa em um fundo curvo.

Mecânica de Hertz

Além da partícula com spin, existem outras teorias que envolvem o uso de variáveis auxiliares na descrição de sistemas dinâmicos. Uma dessas teoria é a chamada mecânica de Hertz. Heinrich Hertz reformulou a mecânica clássica newtoniana por um ponto de vista geométrico [25]. Sua ideia fundamental consistiu no fato de que os problemas da mecânica poderiam ser tratados como problemas livres (sem força) tratados no espaço-curvo. De forma mais geral, poderia se reformular o movimento de um sistema com energia potencial no espaço de N dimensões como um movimento livre no espaço de $N + 1$ dimensões. Nesta descrição, o termo cinético engloba o termo potencial, que por sua vez adquire uma origem geométrica através da escolha de uma métrica adequada.

Considere um sistema com as coordenadas generalizadas q^a , $a = 1, 2, \dots, N$ e potencial

$U(q^a)$,

$$S[q^a] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}(\dot{q}^a)^2 - U(q) \right], \quad (1.34)$$

que leva às equações

$$\ddot{q}^a = -\frac{\partial U}{\partial q^a}. \quad (1.35)$$

Sem alterar o sistema, podemos reescrever a ação (1.34) utilizando a métrica $g_{ab}(q)$, da seguinte forma:

$$S'[q'^a] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}g_{ab}(q')\dot{q}'^a\dot{q}'^b - U(q'^a) \right], \quad (1.36)$$

$$\text{com} \quad g_{ab} \equiv \sum_c \frac{\partial q^c}{\partial q'^a} \frac{\partial q^c}{\partial q'^b}, \quad U(q') \equiv U(q(q')). \quad (1.37)$$

Para compreender a mecânica de Hertz, vamos construir um espaço de $N+1$ dimensões com as coordenadas $q^i \equiv (q^a, q^{N+1})$. A ação livre do potencial é então

$$S[q^i] = \int d\tau \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j \quad (1.38)$$

$$\equiv \int d\tau \left[\frac{1}{2}(\dot{q}^a)^2 + \frac{1}{4U}\dot{q}^{N+1}\dot{q}^{N+1} \right]. \quad (1.39)$$

Essa ação é semelhante a de uma partícula livre em coordenadas generalizadas, com a métrica

$$g = \delta_{ab}dq^a \otimes dq^b + \frac{1}{2U(q^a)}dq^{N+1} \otimes dq^{N+1}. \quad (1.40)$$

Em comparação com a formulação inicial, a energia potencial agora faz parte do termo cinético. Quando impostas as condições iniciais adequadas, a formulação (1.38) leva às mesmas equações de movimento para q^a obtidas através de (1.34).

Na nova formulação, a energia potencial adquire uma origem geométrica. A métrica que aparece na equação (1.38) determina a distância entre pontos no espaço de configurações. As trajetórias de uma teoria com tal ação também têm uma interpretação geométrica: elas representam linhas de mínimo comprimento em relação à métrica g_{ij} , conhecidas por linhas geodésicas. Um caso particular são as linhas retas, no espaço euclidiano.

Na relatividade geral, as trajetórias das partículas possuem essa mesma propriedade. Por isso, o movimento da i -ésima partícula q descrita por (1.38) é análogo a um movimento de queda livre em um campo gravitacional.

Estrutura da tese

O capítulo 2 apresenta uma revisão detalhada sobre os elementos e conceitos do formalismo Hamiltoniano para teorias singulares. Apresentaremos ao leitor o procedimento de Dirac para tratar de sistemas vinculados. O método de quantização para esses sistemas é mostrado ao final, assim como o exemplo que dá origem à equação de Pauli.

O capítulo 3 analisa a diferença entre duas ações Lagrangianas que fornecem as mesmas equações de movimento. Essas ações, no entanto, são fundamentalmente diferentes. Analisamos essa diferença e, como exemplo, investigamos alguns aspectos interessantes da mecânica de Hertz.

No capítulo 4, estudamos alguns modelos afim de descrever a partícula com spin. Mostraremos que o problema variacional pode ser formulado com a ajuda de variáveis auxiliares e verificamos o caso de uma partícula de massa zero. Estudamos ainda o modelo de Stariuszkiewicz e o seu comportamento quando interagindo com um campo eletromagnético externo.

No capítulo de conclusões e perspectivas, descrevemos os resultados obtidos ao longo dessa tese e ainda apresentamos os principais projetos e perspectivas futuras associados ao presente trabalho. As referências bibliográficas são listadas no final.

Formalismo Hamiltoniano para teorias singulares

Teorias de partículas e campos frequentemente envolvem variáveis auxiliares que não possuem significado físico direto. Suas características auxiliares são fornecidas por simetrias locais apresentadas na ação Lagrangiana ou pelo caráter algébrico das equações de movimento para essas variáveis. No entanto, quando lidamos com teorias singulares via formalismo Lagrangeano, as equações de movimento podem ter uma estrutura complicada, incluindo equações diferenciais de primeira e segunda ordem, assim como equações algébricas.

O formalismo Hamiltoniano é bem adaptado para a investigação de uma teoria singular. A descrição do espaço de fase nos permite separar automaticamente a parte dinâmica das equações de movimento da parte algébrica, bem como analisar a ambiguidade presente nas soluções de equações de movimento. Além disso, a transição para a formulação Hamiltoniana é um passo necessário no processo de quantização canônica da teoria clássica.

2.1 Teorias singulares

Nas próximas páginas, vamos discutir o procedimento para a hamiltonização de uma teoria singular. Para exemplificar, consideremos dois casos simples. Eles revelam as melhorias que são necessárias quando aplicamos um procedimento de hamiltonização em uma teoria singular.

Exemplo 1- Considere a ação Lagrangiana

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau [\dot{x}^2 + 2\dot{x}y - (x - y)^2], \quad (2.1)$$

escrita para variáveis de configuração $x(\tau)$, $y(\tau)$, cujo determinante da matriz Hessiana é

$$\det M = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0, \quad (2.2)$$

de forma que temos uma teoria singular. Suas equações de movimento são

$$\ddot{x} = y - x - \dot{y}, \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = y - x. \quad (2.4)$$

A última equação relaciona a velocidade \dot{x} com as coordenadas para todo instante de tempo. Portanto, possui a forma de um vínculo. Como veremos a seguir, trata-se de um vínculo secundário. Até agora, somente \dot{x} pôde ser determinado em termos das coordenadas. Mas a consistência das duas equações acima leva a

$$\dot{y} = y - x. \quad (2.5)$$

Novamente, essa última equação não faz parte das equações de movimento advindas do formalismo de Euler-Lagrange, mas sim, pela consistência entre elas. Embora ambas as equações, (2.4) e (2.5), relacionem as velocidades com as coordenadas para tempos arbitrários, e se pareçam com vínculos, somente a primeira é um vínculo advindo do processo de Hamiltonização, como mostraremos abaixo.

Para encontrar a formulação Hamiltoniana, o primeiro passo é resolver as equações para os momentos

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + y, \quad \pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (2.6)$$

A primeira equação pode ser resolvida com respeito a \dot{x}

$$\dot{x} = p - y. \quad (2.7)$$

A equação $\pi = 0$ é chamada de vínculo primário na teoria de Dirac, já que segue diretamente da definição de momento canônico.

Como segundo passo, vamos tentar construir a Hamiltoniana de acordo com o procedimento padrão: escrevemos $H_0 = p\dot{x} + \pi\dot{y} - L$ e usamos (2.7) para excluir todas as velocidades dessa expressão. Isso fornece a Hamiltoniana $H_0 = \frac{1}{2}(p - y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2$. Usando $\dot{z} = \{z, H_0\}$, obtemos as equações

$$\dot{x} = p - y, \quad \dot{p} = y - x, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{\pi} = p - 2y + x. \quad (2.8)$$

Multiplicando a primeira equação por x , calculando a derivada da expressão resultante e usando outras equações do sistema, obtemos como consequência $\ddot{x} = y - x$. Que difere da Eq.(2.4).

Assim, o procedimento padrão não leva a Hamiltoniana correta e deve ser modificado. De acordo com o procedimento de Dirac, a modificação não é trivial. Apresentamos um espaço de fase estendido com as coordenadas x, y, p, π, v , onde $v(\tau)$ é uma variável adicional, às vezes chamado de multiplicador de Lagrange. Pela razão que ficará clara na próxima seção, chamaremos de velocidade. A Hamiltoniana correta é dada por

$$H = H_0 + v\pi, \quad (2.9)$$

isto é, nós adicionamos a H_0 o vínculo primário multiplicado por v . H é chamada de Hamiltoniana completa.

Esta é outra propriedade característica de uma teoria singular: as leis para construção da Hamiltoniana da teoria devem ser modificadas de acordo com a Eq.(2.9). Das equações Hamiltonianas obtemos agora

$$\dot{y} = v, \quad (2.10)$$

$$\dot{x} = p - y, \quad \dot{p} = y - x, \quad (2.11)$$

$$\dot{\pi} = p + x - 2y, \quad (2.12)$$

As equações (2.11) são equivalentes às equações de Lagrange para (2.1). A equação (2.4) não aparece nesse estágio. Agora, por exigência que o vínculo primário não deve evoluir com o tempo, isto é, $\dot{\pi} \approx \{\pi, H\} \approx 0$, e usando (2.12), nós geramos um novo vínculo

$$p + x - 2y = 0. \quad (2.13)$$

De acordo com a terminologia de Dirac, esse é um vínculo secundário. A equação (2.11) agora nos permite escrever a equação acima em termos das variáveis lagrangianas. Isso leva a (2.4), de modo que recuperamos o conjunto completo de equações de movimento Lagrangianas. Por outro lado, a equação (2.5) não é uma equação de Lagrange, mas sim, uma mera consequência implícita da sua consistência. Na descrição Hamiltoniana esta equação segue o princípio já citado anteriormente onde um vínculo não deve evoluir com o tempo, isto é, $\dot{p} + \dot{x} - 2\dot{y} = 0$, que juntamente com (2.11) e (2.4), leva a (2.5), que por sua vez fixa o multiplicador de Lagrange em (2.10). Assim, neste exemplo, a não evolução temporal de um vínculo secundário não leva a um novo vínculo, mas fixa o valor do multiplicador de Lagrange em termos das variáveis canônicas.

Exemplo 2- Considere agora a seguinte ação Lagrangiana [26]

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau [(\dot{q}_2 - e^{q_1})^2 + (\dot{q}_3 - q_2)^2]. \quad (2.14)$$

As equações de Lagrange fornecem

$$\begin{aligned} \ddot{q}^2 &= e^{q_1}, & \ddot{q}_3 - \dot{q}_2 &= 0, \\ (\dot{q}_2 - e^{q_1})' &= q_2 - \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Elas são equivalentes ao conjunto

$$\dot{q}_2 - e^{q_1} = 0, \quad (2.16)$$

$$\dot{q}_3 - q_2 = 0. \quad (2.17)$$

Os momentos canônicos são

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_2 &= \dot{q}_2 - e^{q_1}, \\ p_3 &= \dot{q}_3 - q_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A primeira equação de (2.18) representa um vínculo primário. Portanto, a Hamiltoniana completa é

$$H = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}p_3^2 + e^{q_1}p_2 + q_2p_3 + vp_1. \quad (2.19)$$

Teremos então, as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= v; & \dot{q}_2 &= p_2 + e^{q_1}; & \dot{q}_3 &= p_3 + q_2, \\ \dot{p}_1 &= -e^{q_1}p_2; & \dot{p}_2 &= -p_3; & \dot{p}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

juntamente com o vínculo primário $p_1 = 0$. Por consistência, devemos ter $\dot{p}_1 = 0$, e podemos concluir de (2.20) que $p_2 = 0$. Este é um vínculo secundário. Se observarmos esse novo vínculo gerado por (2.18), veremos que ele é a primeira equação de movimento Lagrangiana de (2.17), como esperado. Seguindo o procedimento de Dirac, a consistência do vínculo secundário leva, de acordo com (2.20), a um vínculo terciário, $p_3 = 0$. Novamente, fazendo uso de (2.18), isto produz a segunda equação de movimento em (2.17). O procedimento de Dirac para nesse estágio. Dessa forma, os vínculos primário, secundário e terciário produzem um conjunto completo de equações de movimento Lagrangianas, mas o multiplicador de Lagrange v nas equações de Hamilton permanece indeterminado. Essa também é uma característica de teorias singulares: somente algumas das equações que determinam os momentos podem ser resolvidas com respeito às velocidades. As equações restantes não contém velocidades, representando equações algébricas que relacionam coordenadas e momentos.

Vale ressaltar que, embora somente os vínculos primários apareçam explicitamente nas equações de Hamilton, os demais vínculos de ordem superior também deverão ser levados em consideração no processo de quantização da teoria.

Note que os dois exemplos apresentados são essencialmente diferentes em suas estruturas de equações de movimento. Quando todas as velocidades forem determinadas no procedimento de Dirac, a teoria é chamada de não degenerada [27]. Caso contrário, é chamada de teoria singular degenerada. Veremos abaixo que a diferença está codificada nas propriedades algébricas dos vínculos com respeito aos parênteses de Poisson.

2.1.1 Procedimento de Dirac

Agora estamos prontos para entrar na discussão do procedimento de Dirac para uma teoria singular arbitrária, caracterizada por

$$S = \int d\tau L(q^A, \dot{q}^A), \quad \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0, \quad \text{com } A, B = 1, \dots, [A]. \quad (2.21)$$

Importamos com a seguinte condição de classificação na matriz Hessiana M :

$$\text{rank } M_{AB} \equiv \text{rank} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i] < [A]. \quad (2.22)$$

A primeira etapa do procedimento de Dirac consiste na Hamiltonização da teoria.

Passo (1) - Introduzimos os momentos conjugados para as variáveis q^A de acordo com as equações

$$p_A = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^A}. \quad (2.23)$$

Eles são considerados como equações algébricas para determinar as velocidades \dot{q}^A . De acordo com o teorema da função implícita, a eq.(2.22) garante que algumas $[i]$ velocidades entre \dot{q}^A , leia-se \dot{q}^i , $i, j = 1, 2, \dots, [i]$, podem ser encontradas por estas equações. Denotamos então suas soluções como

$$\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha). \quad (2.24)$$

Estas expressões podem ser substituídas para o restante $[\alpha]$ das equações para os momentos (2.23). Por construção, as expressões resultantes não dependem de \dot{q}^α e representam vínculos primários $\Phi_\alpha(q, p)$ da teoria. Temos

$$\Phi_\alpha \equiv p_\alpha - f_\alpha(q^A, p_j) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, [\alpha] = [A] - [i], \quad (2.25)$$

onde

$$f_\alpha(q^A, p_j) \equiv \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)}. \quad (2.26)$$

As eqs.(2.24) e (2.25) são equivalentes ao sistema (2.23).

Passo (2) - Introduzimos agora um espaço de fase estendido parametrizado pelas coordenadas q^A, p_A, v^α , e definimos a Hamiltoniana completa H de acordo com a regra

$$\begin{aligned} H(q^A, p_A, v^\alpha) &= p_A \dot{q}^A - L(q^A, \dot{q}^A) + v^\alpha \Phi_\alpha(q^A, p_B) \\ &\equiv H_0(q^A, p_j) + v^\alpha \Phi_\alpha(q^A, p_B), \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde usamos as eqs.(2.24) e (2.25) para excluir as velocidades \dot{q}^A , ou seja,

$$H_0(q^A, p_j) = [p_A \dot{q}^A - L(q^A, \dot{q}^A)]|_{(2.24),(2.25)}. \quad (2.28)$$

H_0 é chamado de Hamiltoniana da teoria.

Passo (3) - Escrevemos então as equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{q}^A &= \{q^A, H\} = \{q^A, H_0\} + v^\alpha \{q^A, \Phi_\alpha\}, \\ \dot{p}_A &= \{p_A, H\} = \{p_A, H_0\} + v^\alpha \{p_A, \Phi_\alpha\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\Phi_\alpha(q^A, p_B) = 0, \quad (2.30)$$

onde $\{q^A, p_B\} = \delta_B^A$ representa os parênteses de Poisson. Para uso posterior, escrevemos as equações Hamiltonianas em detalhes

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\beta}{\partial p_i} v^\beta, \quad (2.31)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \frac{\partial f_\beta}{\partial q^i} v^\beta; \quad (2.32)$$

$$\dot{q}^\alpha = v^\alpha, \quad (2.33)$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha} v^\beta. \quad (2.34)$$

Esse sistema é equivalente às equações lagrangianas para a ação (2.21).

As etapas posteriores do procedimento de Dirac consistem em revelar todas as conseqüências algébricas do sistema (2.29) e (2.30).

De acordo com a eq. (2.30), todas as soluções são confinadas na superfície do espaço de fases estendido definido pela equação algébrica $\Phi_\alpha = 0$. Pode acontecer que o sistema (2.29) e (2.30) contém na realidade mais do que $[\alpha]$ equações algébricas. De fato, calculando

a derivada dos vínculos primários com relação ao tempo e usando (2.29), obtemos as consequências algébricas do sistema

$$\{\Phi_\alpha, H\} \equiv \{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}v^\beta + \{\Phi_\alpha, H_0\} = 0. \quad (2.35)$$

Daqui em diante, chamaremos de equações de segundo estágio do procedimento de Dirac. Elas podem ser adicionadas às eqs. (2.29) e (2.30), o que fornece um sistema equivalente.

O procedimento descrito acima pode agora ser repetido para os vínculos de segundo estágio, que podem produzir equações algébricas de terceiro estágio não triviais,

$$\{\Phi''_\alpha, H\} = 0. \quad (2.36)$$

Isso pode determinar algumas velocidades e produzir novos vínculos. Como acima, adicionando-as ao sistema (2.29), (2.30) e (2.35), algumas das equações dinâmicas podem ser omitidas de consideração. Se o sistema (2.36) implica em novos vínculos, começamos o quarto estágio do procedimento de Dirac, e assim por diante. Como o número de vínculos independentes não pode ser maior do que a dimensão $2[A]$ do espaço de fase, o procedimento para em algum estágio, digamos N .

O conjunto completo de vínculos de estágios superiores é denotado por $\Phi_a(q^A, p_j) = 0$ (índices latinos do início do alfabeto, a, b, c, são usados para denotar os vínculos de estágio superior). Então, o sistema com a presença de todos os vínculos é

$$\Phi_I \equiv (\Phi_\alpha, \Phi_a) = 0, \quad a = 1, 2, \dots [a]. \quad (2.37)$$

Onde I representa o número de todos os vínculos. Em seguida, todas as equações algébricas de estágios superiores são dadas pelo sistema

$$\{\Phi_I, H\} = 0. \quad (2.38)$$

Todas as soluções das eqs.(2.29) e (2.30) são confinadas à superfície definida pelas equações $\Phi_\alpha = 0$ e (2.38); como na Fig.(2.1). Por construção, depois da substituição das velocidades v^α determinadas pelo curso do procedimento de Dirac, a eq.(2.38) mantém os vínculos na superfície $\Phi_I = 0$.

Em resumo, depois de concluir completamente o procedimento de Dirac, a teoria pode ser descrita pelas equações Hamiltonianas (2.29) que são acompanhados por vínculos

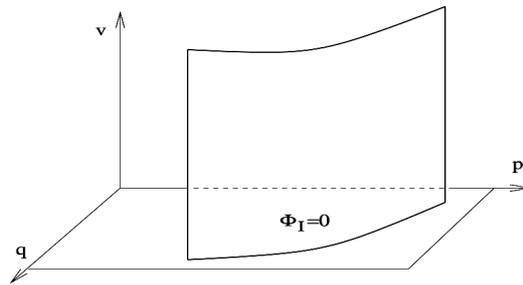


Figura 2.1: Todas as trajetórias de uma teoria singular repousam sobre a superfície $\Phi_\alpha = 0$, $\{\Phi_I, H\} = 0$, que pertence a superfície $\Phi_I = 0$ do espaço de fase estendido. Figura retirada de [1].

(2.37). Além disso, as velocidades (não necessariamente todas) foram determinadas no processo. Equivalentemente, o sistema completo de equações é dado pelas fórmulas (2.29), (2.30) e (2.38). Ressaltando que as $[I]$ equações dinâmicas, onde $[I]$ é o número total de vínculos, são consequências de outras equações do sistema completo. [1]

2.2 Classificação dos vínculos

Uma vez que encontramos todos os vínculos da teoria, estamos aptos a classificá-los [28,29].

Definição: Um vínculo é chamado de “primeira classe” se os parênteses de Poisson com todos os vínculos Φ_I são fracamente nulos.

Os vínculos de primeira classe serão denotados por $\{\Phi_{I_1}^{(1)}\}$, onde $I_1 = 1, \dots, N_1$. Explicitamente,

$$\{\Phi_{I_1}^{(1)}, \Phi_J\} \approx 0, \quad I_1 = 1, \dots, N^{(1)}; \quad J = 1, \dots, N. \quad (2.39)$$

Os vínculos restantes são representados por Φ_{I_2} e são chamados de segunda classe. Nós assumiremos que esses vínculos formam um conjunto irreduzível; ou seja, não existe uma combinação linear dos vínculos de segunda classe que seja de primeira classe. Este é o caso se

$$\det Q(q, p) \neq 0, \quad (2.40)$$

onde $Q(q, p)$ é a matriz com elementos

$$Q_{I_2, J_2} = \{\Phi_{I_2}^{(2)}, \Phi_{J_2}^{(2)}\}. \quad (2.41)$$

De fato, se o determinante fosse nulo, então o conjunto homogêneo de equações

$$\xi^{I_2} \{\Phi_{I_2}^{(2)}, \Phi_{J_2}^{(2)}\} \approx 0 \quad (2.42)$$

possuiria uma solução não trivial para ξ^{I_2} , implicando na existência de outros vínculos de primeira classe. Por outro lado, temos: um conjunto de vínculos $\{\psi_l\}$ é de segunda classe, se e somente se a matriz

$$C_{kl} = \{\psi_k, \psi_l\} \quad (2.43)$$

é invertível. De fato, vamos supor que existe uma combinação linear $\zeta^l \psi_l$ de tal modo que seja de primeira classe. Então,

$$\zeta^l \{\psi_l, \psi_k\} \approx 0 \quad (2.44)$$

tem uma solução não trivial ζ^l . Mas então segue-se que $\det \{\psi_l, \psi_k\}$ deve ser fracamente nulo.

Finalmente, observamos que desde que $Q_{I_2 J_2}(q, p)$ seja uma matriz antissimétrica, segue-se que o número de vínculos de segunda classe é necessariamente par, uma vez que o determinante de uma matriz antissimétrica em dimensões ímpares é nulo.

No que segue, será necessário então estender o conceito de “vínculos de primeira classe” para “funções de primeira classe”, definidas no espaço de fase:

Definição: Uma função $F(q, p)$ é de primeira classe, se os parênteses de Poisson com todos os vínculos desaparecem fracamente, isto é,

$$\{F, \Phi_I\} \approx 0, \quad \text{para todo } I. \quad (2.45)$$

Isso, por sua vez, implica que

$$\{F, \Phi_I\} = \sum_J f_{IJ} \Phi_J, \quad (2.46)$$

onde $\{\Phi_I\}$ é o conjunto completo de vínculos de primeira e segunda classe, e f_{IJ} são funções gerais de q e p . Agora fazemos a seguinte afirmação:

Afirmação: O parêntese de Poisson de quaisquer duas funções de primeira classe das variáveis canônicas é de primeira classe.

De fato, sejam F e G de primeira classe, isto é,

$$\{F, \Phi_I\} = \sum_J f_{IJ} \Phi_J, \quad (2.47)$$

$$\{G, \Phi_I\} = \sum_J g_{IJ} \Phi_J. \quad (2.48)$$

Como F , G e Φ_I são funções de variáveis canônicas, esse também é o caso para f e g . Usando a identidade de Jacobi, prontamente encontramos que

$$\{\{F, G\}, \Phi_I\} \approx \sum_J g_{IJ} \{\Phi_J, F\} - \sum_J f_{IJ} \{\Phi_J, G\} \approx 0. \quad (2.49)$$

Consequentemente, $\{F, G\}$ é de primeira classe.

Parênteses de Dirac

Tendo classificado os vínculos, agora reexaminamos as equações de movimento de Hamilton (2.29) e expomos explicitamente os graus de liberdade, que são associados a simetrias locais da teoria. Assim como nos exemplos discutidos anteriormente, vimos que, dependendo do modelo considerado, alguns dos multiplicadores de Lagrange v^α que aparecem em (2.27) podem, em certos casos, serem realmente determinados como funções das variáveis canônicas, e, portanto, não são arbitrários.

Os vínculos primários também podem ser classificados como de primeira e segunda classe. Nós os denotamos por $\phi_{\alpha_1}^{(1)}$ e $\phi_{\alpha_2}^{(2)}$, respectivamente. Note que, como antes, o subscrito grego é reservado para denominar os vínculos primários. A Hamiltoniana total (2.27) então assume a forma

$$H_T = H + \sum_{\alpha_1} v_{\alpha_1}^{(1)} \phi_{\alpha_1}^{(1)} + \sum_{\alpha_2} v_{\alpha_2}^{(2)} \phi_{\alpha_2}^{(2)}. \quad (2.50)$$

Tendo revelado, seguindo o algoritmo de Dirac, o conjunto completo de vínculos escondidos nas equações de Hamilton, nós agora fazemos uso delas para fixar as “velocidades” $v_{\alpha_2}^{(2)}$ associadas com os vínculos primários de segunda classe. Como pelo algoritmo de Dirac todos os vínculos são independentes do tempo, segue-se que eles satisfazem as seguintes equações

$$\{\Phi_{I_2}^{(2)}, H\} + \sum_{\alpha_2} Q_{I_2 \alpha_2} v_{\alpha_2}^{(2)} \approx 0, \quad (2.51)$$

$$\{\Phi_{I_1}^{(1)}, H\} \approx 0, \quad (2.52)$$

onde definimos

$$Q_{I_2 J_2} = \{\Phi_{J_2}^{(2)}, \Phi_{I_2}^{(2)}\}. \quad (2.53)$$

As equações (2.51) determinam as “velocidades” $v_{\alpha_2}^{(2)}$. De fato, segue que

$$\sum_{J_2} Q_{I_2 J_2}^{-1} \{\Phi_{J_2}^{(2)}, H\} \approx - \sum_{\beta_2} \delta_{I_2 \beta_2} v_{\beta_2}^{(2)}. \quad (2.54)$$

Fixando $I_2 = \alpha_2$, temos que

$$v_{\alpha_2}^{(2)} = - \sum_{J_2} Q_{\alpha_2 J_2}^{-1} \{ \Phi_{J_2}^{(2)}, H \}, \quad (2.55)$$

que definem as “velocidades” $v_{\alpha_2}^{(2)}$, associadas aos vínculos primários de segunda classe, como funções das variáveis canônicas. Novamente, definimos as velocidades por uma igualdade forte, em vez de uma igualdade fraca. Claramente, as equações clássicas do movimento são insensíveis a isso, mas se revelarão relevantes para a teoria quântica correspondente.

Resumindo as considerações feitas até agora, os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos primários de segunda classe são determinados pelas condições de persistência das funções de variáveis canônicas. Este não é o caso dos multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos primários de primeira classe. De fato, como veremos, eles permanecem indeterminados e estão associados a graus de liberdade do sistema.

Em princípio, podemos agora escrever a Hamiltoniana total, que envolverá apenas as velocidades associadas aos vínculos primários de primeira classe como parâmetros indeterminados. Uma forma simétrica particular pode, no entanto, ser obtida pela observação de que $I_2 \rightarrow a_2$ em (2.54), com o subscrito latino rotulando os vínculos secundários de segunda classe, somos levados à equação

$$\sum_{J_2} Q_{a_2 J_2}^{-1} \{ \Phi_{J_2}^{(2)}, H \} \approx 0. \quad (2.56)$$

Note que essa equação é automaticamente assegurada pelo nosso algoritmo. Fazendo uso dessa equação, bem como da expressão para $v_{\alpha_2}^{(2)}$ acima, também podemos escrever a Hamiltoniana total na forma

$$H_T = H^{(1)} + \sum_{\alpha_1} v_{\alpha_1}^{(1)} \Phi_{\alpha_1}^{(1)}, \quad (2.57)$$

com

$$H^{(1)} = H - \sum_{I_2, J_2} \Phi_{I_2}^{(2)} Q_{I_2 J_2}^{-1} \{ \Phi_{J_2}^{(2)}, H \}, \quad (2.58)$$

onde o sobrescrito (1) em $H^{(1)}$ indica que é de primeira classe. Nós provamos agora que este é realmente o caso. Ainda, notamos que pela definição de $H^{(1)}$, temos que

$$\{ \Phi_{I_2}^{(2)}, H^{(1)} \} \approx 0. \quad (2.59)$$

Além disso, como a derivada temporal de todos os vínculos desaparece fracamente, pelo procedimento de Dirac, temos em particular

$$\{\Phi_{I_1}^{(1)}, H_T\} \approx \{\Phi_{I_1}^{(1)}, H^{(1)}\} \approx 0. \quad (2.60)$$

Por isso $H^{(1)}$ também possui parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos de primeira classe.

As relações (2.57) e (2.58) sugerem a introdução da seguinte estrutura, denominada parênteses de Dirac, entre duas funções f e g das variáveis canônicas:

$$\{f, g\}_D \equiv \{f, g\} - \sum_{I_2 J_2} \{f, \Phi_{I_2}^{(2)}\} Q_{I_2 J_2}^{-1} \{\Phi_{J_2}^{(2)}, g\}. \quad (2.61)$$

As propriedades algébricas dos parênteses de Dirac são:

- $\{f, g\}_D = -\{f, g\}_D$, Anti-simetria
- $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\}_D = c_1 \{f_1, g\}_D + c_2 \{f_2, g\}_D$, Linearidade
- $\{c, f\}_D = 0$, $c = \text{constante}$
- $\{f, \{g, h\}_D\}_D + \{g, \{h, f\}_D\}_D + \{h, \{f, g\}_D\}_D = 0$, Identidade de Jacobi
- $\{fg, h\}_D = f\{g, h\}_D + \{f, h\}_D g$. Regra do produto

Que são essencialmente as mesmas que para os parênteses de Poisson. A única diferença, porém crucial, é que os parênteses de Dirac não obedecem às relações fundamentais de comutação. Logo vai se tornar claro que esta circunstância não é um problema, mas uma necessidade para a consistência da teoria quântica para sistemas vinculados. Além disso, a propriedade notável é que os parênteses de Dirac dos vínculos Φ_I com qualquer função das variáveis canônicas desaparece fortemente

$$\{\Phi_I, A\}_D = 0, \quad I = 1, 2, \dots, [I], \quad (2.62)$$

em particular

$$\{\Phi_I, \Phi_J\}_D = 0. \quad (2.63)$$

Isto implica, em particular, que os vínculos de segunda-classe podem ser levados em consideração dentro dos parênteses de Dirac (isto é, antes de calcular os parênteses).

Quantização canônica e vínculos de segunda-classe

A mecânica quântica de um sistema clássico com uma Lagrangiana não singular $L(q^A, \dot{q}^B, t)$ pode ser obtida usando o procedimento da quantização canônica. Para conseguirmos isso, reescrevemos o sistema no formalismo Hamiltoniano. As quantidades básicas são agora os parênteses de Poisson $\{q^A, p_B\} = \delta_B^A$ e a Hamiltoniana $H(q^A, p_B, t)$. De acordo com o procedimento de quantização canônica, associamos com as variáveis do espaço de fase os operadores com comutadores parecidos com os parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}\hat{q}^A \hat{p}_B - \hat{p}_B \hat{q}^A &\equiv [\hat{q}^A, \hat{p}_B] = i\hbar \delta_B^A, \\ [\hat{q}^A, \hat{q}^B] &= [\hat{p}_A, \hat{p}_B] = 0.\end{aligned}\tag{2.64}$$

Eles agem no espaço de funções de onda $\Psi(t, q^A)$. Nesta base, escrevemos a equação de *Schrödinger* para a função de onda

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p}, t).\tag{2.65}$$

Para a teoria com vínculos de segunda-classe, o procedimento (2.64) não é consistente. De fato, desde que na teoria clássica $\Phi_I = 0$, espera-se que os operadores correspondentes desapareçam nos vetores de estado físicos, $\hat{\Phi}_I \Psi_{ph} = 0$. Quantizando a teoria por meio dos parênteses de Poisson, obtemos $(\hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J - \hat{\Phi}_J \hat{\Phi}_I) \Psi_{ph} = \Delta_{IJ} \Psi_{ph}$. O lado esquerdo da expressão desaparece, mas o lado direito não.

O problema é resolvido postulando comutadores que se assemelham aos parênteses de Dirac em vez dos de Poisson

$$[\hat{q}^A, \hat{p}_B] = i\hbar \{q^A, p_B\}_D \Big|_{z \rightarrow \hat{z}} = i\hbar \Delta_{AB}.\tag{2.66}$$

devido à eq.(2.63), isso é consistente com a condição $\hat{\Phi}_I \Psi_{ph} = 0$.

Teoria quântica dos parênteses de Dirac

A realização quântica dos parênteses de Poisson pode ser alcançada de forma bem conhecida

$$\hat{q}^A = q^A, \quad \hat{p}_A = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^A}.\tag{2.67}$$

Isso implica $[\hat{q}^A, \hat{p}_B] = i\hbar\delta_B^A$, como deveria ser o caso. Para encontrar a realização quântica para os parênteses de Dirac, exploramos as variáveis fracas apresentadas acima. Vamos associar a função A_w com a função no espaço de fase $A(q, p)$ como segue:

$$A_w(q, p) = A(q, p) - \{A, \Phi_I\} \tilde{Q}^{IJ} \Phi_J, \quad (2.68)$$

onde \tilde{Q}^{IJ} é a inversa de Q^{IJ} . Na superfície de vínculos $\Phi_I = 0$ elas coincidem: $A_w = A$. Note que os parênteses de poisson de funções w na superfície de vínculos coincidem com os parênteses de Dirac das funções iniciais

$$\{A_w, B_w\}_p = \{A, B\}_D. \quad (2.69)$$

Desde que conheçamos a realização quântica dos parênteses de Poisson, podemos realizar os parênteses de Dirac, associando os seguintes operadores às quantidades clássicas $A(q, p)$

$$A(q, p) \rightarrow \hat{A}_w = A_w(q, p)|_{q \rightarrow \hat{q}, p \rightarrow \hat{p}} \quad (2.70)$$

com \hat{q}, \hat{p} especificados na Eq.(2.67). Os comutadores desses operadores se assemelham aos parênteses de Dirac.

Em particular, os operadores correspondendo ao espaço de fase são as variáveis

$$\begin{aligned} q^A \rightarrow \hat{q}_w^A &= \hat{q}^A - [\hat{q}^A, \Phi_I] \tilde{Q}^{IJ} \Phi_J, \\ p_a \rightarrow \hat{p}_{wA} &= \hat{p}_A - [\hat{p}_A, \Phi_I] \tilde{Q}^{IJ} \Phi_J. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Note também que na passagem para a teoria quântica os vínculos tornam-se operadores nulos: $\Phi_I \rightarrow \hat{\Phi}_{wI} = 0$.

2.3 Teorias com vínculos de segunda-classe

Ação Lagrangiana subjacente à Equação de Schrödinger

Como os campos elétrico e magnético podem ser obtidos do potencial vetor A_a , as partes real e imaginária da função de onda podem ser obtidas do potencial escalar ϕ . O campo real ϕ obedece à equação

$$\hbar^2 \ddot{\phi} + (\Delta - V)^2 \phi = 0, \quad (2.72)$$

que segue da ação Lagrangiana

$$S[\phi] = \int dt d^3x \left[\frac{\hbar}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2\hbar} [(\Delta - V)\phi]^2 \right], \quad (2.73)$$

onde Δ é o Laplaciano e V um potencial arbitrário. Assim, obtemos uma relação entre *Schrödinger* e o potencial escalar. Existe uma teoria Lagrangiana sujeita a vínculos de segunda-classe subjacente à equação de *Schrödinger* e a teoria clássica de campos (2.72). Essa possibilidade é baseada no fato que na teoria com vínculos de segunda-classe podemos assumir diferentes subconjuntos como variáveis independentes quando olhamos para a solução dos vínculos. Para o modelo abaixo, há duas naturais possibilidades de mudança das variáveis independentes. Por opção, elas obedecem às equações Hamiltonianas que correspondem à teoria (2.73).

Considere a seguinte teoria Lagrangiana:

$$S[\phi, \varphi] = \int dt d^3x \left[\frac{\hbar}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} + \frac{1}{2\hbar} \varphi^2 + \frac{1}{\hbar} \varphi (\Delta - V)\phi \right], \quad (2.74)$$

escrita para dois campos reais $\phi(t, x^i), \varphi(t, x^i)$ no plano de fundo externo dado por $V(x^i)$. Isso implica equações Lagrangianas

$$\hbar^2 \ddot{\phi} - (\Delta - V)\varphi = 0, \quad \varphi = -(\Delta - V)\phi. \quad (2.75)$$

Como consequência, ambos ϕ e φ obedecem à equação de segunda ordem (2.72). Após a mudança $\tilde{\phi} \equiv \varphi + (\Delta - V)\phi$, a ação adquire a forma $S[\phi, \varphi] = S[\phi] + \frac{1}{2\hbar} \int \tilde{\phi}^2$, onde $S[\phi]$ é a ação (2.73). Portanto, nessa parametrização os campos ϕ e $\tilde{\phi}$ dissociam e a única variável dinâmica é ϕ . Novamente, a evolução é governada pela eq. (2.72). Embora seja natural,

essa não é a única possibilidade de parametrização para o setor dinâmico. Para encontrar uma outra parametrização relevante, podemos construir uma formulação Hamiltoniana da teoria. Introduzimos o momento conjugado p , π para os campos ϕ , φ e definimos sua evolução de acordo com a regra padrão

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \hbar \dot{\phi}, \quad \pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0. \quad (2.76)$$

A segunda equação representa um vínculo primário da teoria. Então, a Hamiltoniana completa da teoria é

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2\hbar}(p^2 - \varphi^2) - \frac{1}{\hbar}\varphi(\Delta - V)\phi + v\pi \right]. \quad (2.77)$$

A conservação no tempo do vínculo primário, $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = 0$, implica em um vínculo secundário $\varphi + (\Delta - V)\phi = 0$. Por sua vez, a conservação no tempo determina a velocidade $v = -\frac{1}{\hbar}(\Delta - V)p$. O procedimento de Dirac para nesse estágio. A evolução das variáveis do espaço de fase é governada pelas equações Hamiltonianas

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{\hbar}p, & \dot{p} &= \frac{1}{\hbar}(\Delta - V)\varphi, \\ \dot{\varphi} &= v = -\frac{1}{\hbar}(\Delta - V)p, & \dot{\pi} &= 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

e os vínculos

$$\pi = 0, \quad \varphi + (\Delta - V)\phi = 0. \quad (2.79)$$

O sistema implica que tanto ϕ quanto φ obedecem à eq. (2.72). Calculando os parênteses de Poisson dos vínculos, obtemos um resultado $\{\varphi + (\Delta - V)\phi, \pi\} = \delta^3(x - y)$. Assim os vínculos formam um sistema de segunda-classe.

Vamos construir os parênteses de Dirac correspondente aos vínculos

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D &= \{A, B\} - \{A, \pi\}\{\varphi + (\Delta - V)\phi, B\} \\ &+ \{A, \varphi + (\Delta - V)\phi\}\{\pi, B\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Isto implica $\{\pi, p\}_D = 0$, $\{\phi, \varphi\}_D = 0$, assim como

$$\{\phi, p\}_D = \delta^3(x - y), \quad \{\phi, \phi\}_D = \{p, p\}_D = 0; \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned}\{\varphi, p\}_D &= -(\Delta - V)\delta^3(x - y), \\ \{\varphi, \varphi\}_D &= \{p, p\}_D = 0.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Note que para o par ϕ, p os parênteses de Dirac coincidem com os de Poisson.

De acordo com os vínculos (2.79), tanto φ, p quanto ϕ, p podem ser tomados como parâmetro para o setor dinâmico da teoria.

Parametrizando o setor dinâmico pelo par ϕ, p , a Eq.(2.78) reduz ao sistema $\hbar\dot{\phi} = p$, $\hbar\dot{p} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - V\right)^2\phi$, enquanto a Hamiltoniana (2.77) adquire a forma

$$H(\phi, p) = \int d^3x \frac{1}{2\hbar} [p^2 + [(\Delta - V)\phi]^2].\tag{2.83}$$

Esta é precisamente a formulação Hamiltoniana da teoria (2.72),(2.73).

2.4 Teorias com vínculos de primeira-classe

Invariância por reparametrização e Equação de Schrödinger

Nessa seção, iremos usar a notação de negrito para vetores. A saber $\mathbf{x} \equiv \vec{x}$.

Esta formulação da mecânica clássica é interessante por duas razões. Primeiro, está perto da descrição de partículas relativísticas na base do espaço de Minkowski. Segundo, essa quantidade tem uma forma elegante para a quantização canônica de sistemas clássicos. Considere uma partícula com energia potencial $U(\mathbf{x}, t)$. Seja o conjunto parametrizado por $\mathbb{V} = \{\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\}$. Considere o conjunto de funções $F(\mathbb{V}) = \{f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Assim,

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - U(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (2.84)$$

S atua sobre $F(\mathbb{V})$, levando funções em números, $S : F(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{R}$. Fazendo a mudança de variáveis $t = t(\tau)$ na integral indefinida (2.84), isso produz a expressão

$$\mathbb{W} = \{t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\}; F(\mathbb{W}); S : F(\mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad S = \int d\tau \left[\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2t} - tU(\mathbf{x}, t(\tau)) \right], \quad (2.85)$$

onde os pontos representam as derivadas com relação a τ . O novo funcional é definido em funções do espaço quadridimensional $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. A propriedade original do funcional é a invariância sobre reparametrização: a substituição $\tau = \tau(\tau')$ não muda a forma, em contraste com (2.84). Como consequência, se $t(\tau)$, $\mathbf{x}(\tau)$ é um extremo de (2.85), então $t(f(\tau)), \mathbf{x}(f(\tau))$, com uma função arbitrária $f(\tau)$, dará um extremo também. Esse novo problema variacional determina uma linha de extremo como um conjunto de pontos no $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, mas não especifica qualquer evolução definitiva ao longo da linha. Fisicamente, não existe a noção do tempo na formulação. O mesmo pode ser visto no nível de equações de movimento. Para ilustrar isto, consideremos a partícula livre, $U = 0$. Então (2.85) implica equações de movimento $\left(\frac{\dot{x}}{t}\right)' = 0$, $\left(\frac{\dot{x}^2}{t^2}\right)' = 0$. A solução geral destas equações contem, além das constantes de integração \mathbf{v} e \mathbf{x}_0 , uma função arbitrária $f(\tau)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}f(\tau) + \mathbf{x}_0, \quad t = f(\tau). \quad (2.86)$$

Estas expressões, embora determinando a linha direta, não especifica uma lei de evolução específica ao longo da linha. Mesmo assim, o novo funcional pode ser usado para descrever o sistema dinâmico (2.84). Excluindo τ da equação paramétrica (2.86), obtemos a

evolução das variáveis físicas, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0$. Além disso, podemos usar a invariância sobre reparametrização do formalismo $\tau = t$ em qualquer caso de cálculo, isso deve reproduzir o resultado correspondente da formulação original. Por exemplo, definindo $\tau = t$ em (2.85) obtemos (2.84).

Qualquer sistema mecânico-clássico pode ser reformulado na forma invariante sobre reparametrização.

Problemas variacionais dinâmicos e não-dinâmicos

Matematicamente, os problemas variacionais (2.84) e (2.85) não são equivalentes. Mesmo assim, temos visto que o segundo problema pode ser usado para descrever a dinâmica do sistema original. Nesta relação, a seguinte terminologia pode ser conveniente.

A linha parametrizada em \mathbb{R}^n é o mapa de um intervalo de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n , $\gamma : \tau \rightarrow x^i(\tau)$. A imagem do mapa (que é o conjunto de pontos do \mathbb{R}^n) é chamada de linha. Assim, a parametrização da linha é uma linha em conjunto com alguns parâmetros ao longo dela. Considere o problema variacional $S = \int d\tau L(x^i, \dot{x}^i)$ com dadas condições iniciais (fixamos os pontos inicial e final, x_0 e x_1). O problema variacional é chamado dinâmico se suas soluções são parametrizações da linha. O problema variacional é chamado não-dinâmico se suas soluções forem uma linha.

O funcional (2.85) representa um exemplo de um problema variacional não-dinâmico. Outro importante exemplo é a ação de Einstein-Hilbert que produz as equações de Einstein do campo gravitacional [30].

O problema (2.85) é definido no espaço de configurações com coordenadas x^i, t . Assim, a formulação Hamiltoniana introduz o espaço de fase parametrizado por x^i, p^i, t, p_t com parênteses de Poisson

$$\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}, \quad \{t, p_t\} = 1. \quad (2.87)$$

Os momentos são

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{\dot{t}}, \quad p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2\dot{t}^2} - U. \quad (2.88)$$

Estas equações implicam no vínculo primário

$$\Phi \equiv p_t + \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U = 0, \quad (2.89)$$

que é satisfeita para alguma solução das equações de movimento. O vínculo pode ser escrito como $p_t = -H$, onde H é a Hamiltoniana física da formulação original. Por esta razão, energia é muitas vezes chamada de momento conjugado para a variável tempo. Desde que $H_0 = p_i \dot{x}^i + p_t \dot{t} - L = 0$, a Hamiltoniana completa é composta pelo vínculo

$$\tilde{H} = v(p_t + \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + U), \quad (2.90)$$

e desaparece na superfície de vínculos.

As equações de movimento $\dot{\mathbf{x}} = \frac{v}{m} \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -v \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$, $\dot{t} = v$ e $\dot{p}_t = -v \frac{\partial U}{\partial t}$ são ambíguas devido à presença de $v(\tau)$, assim todas as variáveis não são quantidades observáveis. A última equação é uma consequência do vínculo (2.89) e pode ser omitida. Para a partícula livre a segunda equação implica $\mathbf{p} = \text{const}$. Então a primeira equação $\mathbf{x} = \mathbf{p}f(\tau) + \mathbf{x}_0$, onde $f(\tau) = \int v d\tau$. A propósito, demonstramos que (2.86) é a solução geral do problema (2.85). A invariância de reparametrização das variáveis tem equações sem ambiguidade, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{t}} = \frac{\mathbf{p}}{m}$, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\dot{t}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$.

Equação de Schrödinger

Para quantizar o sistema (2.85), substituímos o espaço de fase das variáveis por operadores que se assemelham aos parênteses (2.87)

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \hat{t} = t, & p_t &\rightarrow \hat{p}_t = -i\hbar \partial_t, \\ x^i &\rightarrow \hat{x}^i = x^i, & p^i &\rightarrow \hat{p}^i = -i\hbar \partial_i. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Desde que o vínculo Φ desapareça na teoria clássica, esperamos a correspondência entre a mecânica e a quântica dos operadores aniquilação da função de onda, $\hat{\Phi}\Psi = 0$. Isto produz a equação de *Schrödinger*

$$i\hbar \partial_t \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi. \quad (2.92)$$

Em resumo, na formulação invariante por reparametrização da mecânica clássica não há necessidade de introduzir a equação de *Schrödinger* como um dos postulados independentes da quantização canônica. Isso surge, automaticamente, como contrapartida do vínculo (2.89).

Eletrodinâmica

Lembrando que o campo eletromagnético livre pode ser descrito pela ação

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_0 A_b - \partial_b A_0)^2 - \frac{1}{4} F_{ab}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.93)$$

escrita para o potencial vetor quadridimensional A_μ . Aqui $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $a, b = 1, 2, 3$. Denotamos $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Na segunda linha separamos os termos contendo derivadas temporais.

As equações que determinam os momentos conjugados são

$$p^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad (2.94)$$

$$p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_a} = \partial_0 A_a - \partial_a A_0 = -E^a, \quad \text{então} \quad \partial_0 A_a = -p_a + \partial_a A_0. \quad (2.95)$$

Assim, (2.94) é um vínculo primário. Calculando a Hamiltoniana $H_0 = p^a \partial_0 A_a - L$ e adicionando o vínculo primário multiplicado pela velocidade v_0 , a Hamiltoniana completa lê-se

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} p_a^2 - p_a \partial_a A_0 + \frac{1}{4} F_{ab}^2 + v_0 p_0 \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + E_a \partial_a A_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Note que o campo elétrico representa o momento conjugado para o potencial vetor \mathbf{A} .

A conservação no tempo dos vínculos primários produzem vínculos de segundo estágio

$$\begin{aligned} \dot{p}^0(x) &= \{p^0(x), H\} = \{p^0(x), -\int d^3y p_a \partial_a A_0\} \\ &= \int d^3y \{p^0(x), \partial_a p_a(y) A_0(y)\} \\ &= -\int d^3x \partial_a p_a(y) \delta^3(x-y) = -\partial_a p_a(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Realizando um cálculo similar, pode-se verificar que isto é a conservação no tempo, $\{\partial_a p_a, H\} = 0$, assim, o procedimento de Dirac para no segundo estágio. No resultado, a evolução é governada pelas equações Hamiltonianas

$$\dot{A}_0 = v_0, \quad \dot{p}^0 = 0, \quad (2.98)$$

$$\dot{A}_a = -p_a + \partial_a A_0, \quad \dot{p}_b = -\partial_a F_{ab}. \quad (2.99)$$

Estas são acompanhadas pelos vínculos de primeira classe

$$p^0 = 0, \quad \partial_a p_a = 0. \quad (2.100)$$

O representante único em uma classe de trajetórias equivalentes pode ser obtido impondo duas condições de gauge. Elas podem ser tomadas como

$$A_0 = 0, \quad \partial_a A_a = 0. \quad (2.101)$$

Nesse gauge, as Eqs.(2.99) e (2.100) implicam na equação de onda para o potencial vetor tridimensional.

Quando fixamos o gauge, os vínculos de primeira classe tornam-se, juntos com as condições de gauge, vínculos de segunda-classe. Isso sugere a possibilidade de visualizar qualquer conjunto de vínculos de segunda classe como resultado da fixação do gauge de um sistema equivalente com invariância de gauge e sem vínculos de segunda-classe [31].

2.5 A partícula com spin

Para exemplificar o procedimento descrito anteriormente, vamos estudar o modelo da partícula com spin correspondente à equação de Pauli [32]. Consideremos então a seguinte ação

$$S = \int d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + b \sqrt{(D\omega)^2} - \frac{1}{\phi} (\omega^2 - a^2) \right], \quad D\omega_i = \dot{\omega}_i - \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} \omega_j B_k.$$

$x_i(\tau)$, $\omega_i(\tau)$ e $\phi(t)$ são variáveis do espaço de configurações, onde x_i representa a coordenada espacial, ω_i a variável de spin, e ϕ uma variável auxiliar. Descrevendo uma partícula com massa m , carga elétrica e , momento magnético μ , sob a interação com o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, com $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. a e b são constantes.

Para construir a formulação hamiltoniana, primeiramente calculamos os momentos conjugados,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i, \quad \pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^i} = b \frac{D\omega_i}{\sqrt{(D\omega)^2}} \quad \text{e} \quad \pi_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0. \quad (2.102)$$

As duas últimas equações de (2.102) implicam nos vínculos primários $\pi^2 - b^2 = 0$ e $\pi_\phi = 0$. Assim, a Hamiltoniana completa será

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 - \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} B_i \omega_j \pi_k + \frac{1}{\phi} (\omega^2 - a^2) + \frac{\lambda_1}{2} (\pi^2 - b^2) + \lambda_2 \pi_\phi, \quad (2.103)$$

onde λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange a serem determinados. Aplicando o procedimento de Dirac, encontramos os vínculos secundários $\omega^2 - a^2 = 0$ e $(\omega\pi) = 0$, que quando submetidos também ao procedimento, nos permitem a encontrar o multiplicador λ_1 , dado por $\lambda_1 = -\frac{2a^2}{b^2\phi}$. As equações hamiltonianas podem então ser escritas como

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right), \quad \dot{p}_i = \frac{e}{c} \dot{x}_j \partial_i A_j + \frac{\mu e}{mc} S_j \partial_i B_j \quad (2.104)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{2a^2}{b^2\phi} \pi_i + \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} \omega_j B_k, \quad \dot{\pi}_i = \frac{2}{\phi} \omega_i + \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} \pi_j B_k \quad (2.105)$$

$$\dot{\phi} = \lambda_2, \quad \dot{\pi}_\phi = 0. \quad (2.106)$$

Como consequência dessas equações, o vetor de spin $S_i = \epsilon_{ijk} \omega_j \pi_k$ tem sua equação dinâmica dada por

$$\dot{S}_i = \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} S_j B_k, \quad (2.107)$$

que é a equação clássica para a precessão do spin em um campo magnético externo. Das equações (2.104) obtemos

$$m\ddot{x}_i = \frac{e}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k + \frac{e}{mc}S_k\partial_i B_k. \quad (2.108)$$

Uma vez que $S^2 \sim \hbar^2$, o termo S desaparece quando tomamos o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$) na última equação. Dessa forma, a equação (2.108) reproduz, então, o movimento clássico de uma partícula carregada sujeita à força de Lorentz.

Quantização

Vamos agora quantizar o sistema descrito anteriormente a fim de encontrar, como esperado, a equação de Pauli.

A quantização canônica para a partícula com spin segue o procedimento de Dirac para sistemas vinculados. Os vínculos $\omega^2 - a^2 = 0$ e $(\omega\pi) = 0$ representam um sistema de vínculos de segunda classe

$$\{\omega^2 - a^2, (\omega\pi)\} = 2\omega^2 \neq 0, \quad (2.109)$$

enquanto todos os outros são vínculos de primeira classe, já que os parênteses de Poisson entre eles são nulos.

Para os parênteses de Dirac, temos

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + \{A, \omega^2\} \frac{1}{2\omega^2} \{\omega\pi, B\} - (A \longleftrightarrow B), \quad (2.110)$$

onde os parênteses para as variáveis básicas são

$$\{\omega_i, \omega_j\} = 0, \quad \{\omega_i, \pi_j\} = \delta_{ij} - \frac{\omega_i\omega_j}{\omega^2}, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = -\frac{\omega_i\pi_j - \omega_j\pi_i}{\omega^2}. \quad (2.111)$$

Para as variáveis físicas x_i, p_i e S_i , os parênteses de Dirac coincidem com os de Poisson

$$\{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij}, \quad \{S_i, S_j\}_D = \epsilon_{ijk}S_k. \quad (2.112)$$

Seguindo com o procedimento, quantizamos apenas as quantidades físicas, desprezando os termos de (2.103) que não contribuem para as equações de movimento das variáveis

físicas. Assim, a Hamiltoniana física fica escrita como

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 - \frac{\mu e}{mc} \epsilon_{ijk} B_i \omega_j \pi_k \quad (2.113)$$

A forma quântica de (2.113) é obtida substituindo as variáveis clássicas por operadores, obtendo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} A \right)^2 - \frac{\mu e}{mc} B \hat{S} \right) \Psi, \quad (2.114)$$

que é a equação de Pauli.

CAPÍTULO 3

Simetrias

Neste capítulo, analisamos o problema de uma diferença básica, mas mal interpretada, entre a Lagrangiana que descreve o comprimento do arco de uma curva e aquele análogo ao da partícula livre na mecânica clássica. Embora elas forneçam as mesmas equações de movimento e sejam amplamente utilizados na literatura como equivalentes, mostramos ao decorrer das próximas páginas que não o são. Nós exploramos essa diferença do ponto de vista da geometria diferencial, onde observamos que tal diferença não é mais do que uma questão de simetria. Na parte final do capítulo também abordamos o caso da Mecânica de Hertz. Um método desenvolvido para descrever a mecânica clássica sem o uso do conceito de força, de forma que a descrição mecânica se aproxima da ideia utilizada na Relatividade Geral.

3.1 Introdução

As bases da Geometria diferencial de curvas e superfícies foram descritas no século XIX pelo matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss. Gauss propôs uma abordagem onde através de parametrizações locais e do conceito de curvatura, estabelecia o Teorema Egregium, um resultado fundamental e um dos teoremas mais importantes do século [33]. A Geometria diferencial é muito usada como ferramenta para a descrição e resolução de diversos problemas da física teórica, uma vez que o espaço-tempo possui a estrutura de uma variedade diferenciável [34]. Sendo muito comum o seu uso na Relatividade Geral e Especial [35], também pode ser vista na Eletrodinâmica e em outras teorias de Gauge [36]. Aqui, iremos usá-la para analisar um problema de Mecânica Clássica.

Nosso primeiro objetivo é definir o conceito de variedade. Variedades são, de forma simples, conjuntos que admitem um sistema de coordenadas local. Consideremos que os espaços lineares são \mathbb{R}^n para um inteiro fixo, positivo n , que representa a dimensão da variedade. Dado um conjunto M , um mapa em M é um subconjunto aberto U de M juntamente com um mapa bijetivo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos $\phi(m)$ por (x^1, \dots, x^n) , de modo que x^i são as coordenadas do ponto $m \in U \subset M$.

Consideramos M uma variedade diferenciável se M é coberto por um conjunto de mapas, onde cada ponto da variedade é representado por pelo menos um mapa e M pode ser escrito como uma união desses mapas. A vizinhança de um ponto m em uma variedade M é definida como sendo a imagem inversa de uma vizinhança do espaço euclidiano do ponto $\phi(m)$ sob um mapa gráfico $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. As vizinhanças definem conjuntos abertos e esses conjuntos abertos em M definem uma topologia.

Duas curvas $t \rightarrow c_1(t)$ e $t \rightarrow c_2(t)$ em uma variedade M são ditas equivalentes no ponto m se

$$c_1(0) = c_2(0) = m \quad \text{e} \quad (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$$

para algum mapa ϕ . Um vetor tangente v a uma variedade M em um ponto $m \in M$ é uma classe de curvas equivalentes em m . Então, dada uma curva $c(t)$, denotamos por $c'(t)$ o vetor tangente a c definido por uma classe de equivalência de $t \rightarrow c(s+t)$ em $t=0$.

Denotamos ainda por $T_m M$ o espaço tangente de M em $m \in M$. Os componentes de v

são números v^1, \dots, v^n definidos quando tomamos a derivada dos componentes, no espaço euclidiano, da curva $\phi \circ c$:

$$v^i = \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ c)^i \right|_{t=0}, \quad (3.1)$$

onde $i = 1, \dots, n$. Pela definição, os componentes são independentes da curva representativa escolhida.

Variedades Riemannianas

O produto interno em uma variedade M é uma função $\langle -, - \rangle$ que associa a cada par de campos vetoriais contravariantes X e Y , um campo escalar $\langle X, Y \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ para todo X e Y .
- $\langle \alpha X, \beta Y \rangle = \alpha\beta \langle X, Y \rangle$ para todo X e Y , e escalares α, β .
- $\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$.
- Se $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo Y , então $X = 0$.

Uma variedade que possui essas características para o produto interno é chamada de variedade Riemanniana.

Observemos agora que, se x é um mapa qualquer, e p um ponto qualquer no domínio de x , então

$$\langle X, Y \rangle = X^i Y^j \left\langle \frac{\partial}{\partial X^i}, \frac{\partial}{\partial X^j} \right\rangle. \quad (3.2)$$

Sendo as funções suaves

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial X^i}, \frac{\partial}{\partial X^j} \right\rangle, \quad (3.3)$$

teremos

$$\langle X, Y \rangle = g_{ij} X^i Y^j, \quad (3.4)$$

que constituem os coeficientes de um tensor métrico de rank $(0, 2)$. Esse tensor é chamado de tensor fundamental ou tensor métrico da variedade Riemanniana.

Se X é um campo vetorial contravariante de M , então podemos definir a norma quadrada de X como

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = g_{ij} X^i X^j. \quad (3.5)$$

Note que $\|X\|^2$ pode ser negativa. Se $\|X\|^2 < 0$, chamamos X tipo-tempo; se $\|X\|^2 > 0$, tipo-espaço, e se $\|X\|^2 = 0$, chamamos X de nulo.

Outro assunto que nos interessa ao tratarmos de uma métrica é o cálculo do comprimento de arco. Um caminho C descrito por $x^i = x^i(t)$ é não-nulo se $\|dx^i/dt\|^2 \neq 0$. De forma que $\|dx^i/dt\|^2$ é sempre positivo (“tipo espaço”) ou negativo (“tipo tempo”). Se C for um caminho não-nulo de M , então o comprimento de arco será definido como

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{\pm g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt, \quad (3.6)$$

onde o sinal ± 1 é escolhido como $+1$ se a curva for tipo-espaço e -1 se for tipo-tempo. A equação (3.6) é independente da escolha do mapa x . Para entendermos isso, basta observarmos que a quantidade dentro da raiz quadrada é um produto de contração entre um tensor do tipo $(0, 2)$ e um tensor do tipo $(2, 0)$, que é um escalar.

Em qualquer ponto p de uma variedade Riemanniana, podemos encontrar um mapa local em p com a propriedade que o tensor métrico seja diagonal em p , com os termos diagonais sendo ± 1 . Em particular, temos o espaço de Minkowski, cujo tensor métrico possui assinatura $(-1, +1, +1, +1)$. Vale ressaltar que não há nada de especial no número 1. Poderíamos encontrar também um mapa local em qualquer ponto p , em que o tensor métrico possuísse as mesmas propriedades mas com termos diagonais (diferentes de zero) quaisquer, embora não poderíamos escolher os sinais desses termos.

Na Relatividade, por exemplo, lidamos com variedades de 4 dimensões e tomamos as três coordenadas x^1, x^2, x^3 como espaciais e a coordenada zero, x^0 como temporal. Vamos postular então que estamos em alguma variedade M de 4 dimensões. Suponhamos agora que temos uma partícula que se move em M . Podemos descrevê-la pelas coordenadas

espaciais (x^1, x^2, x^3) em cada instante de tempo (x^0) . Como as coordenadas espaciais são funções da coordenada temporal, a partícula determina um caminho em M dado por

$$\begin{aligned}x^0 &= x^0 \\x^1 &= x^1(x^0) \\x^2 &= x^2(x^0) \\x^3 &= x^3(x^0).\end{aligned}$$

Esse caminho é conhecido como linha de mundo da partícula. Podemos descrever a linha de mundo como um caminho da forma $x^i = x^i(t)$, onde t é algum parâmetro. Vale ressaltar que t não é o tempo, é um parâmetro. x^0 é o tempo. Por outro lado, se t é algum parâmetro, e $x^i = x^i(t)$ é um caminho de M , então, se x^0 é uma função invertível de t , isso é, $dx^0/dt \neq 0$, então, podemos calcular x^1, x^2, x^3 como funções suaves de x^0 , e, então imaginar a situação de uma partícula movendo-se através do espaço.

3.2 Geodésicas

Vamos analisar agora as curvas das variedades. Se uma curva não-nula C em M é parametrizada por $x^i(t)$, então, como vimos em (3.6), parametrizamos a curva usando o comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\pm g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}} du, \quad (3.7)$$

começando de um ponto a arbitrário. A razão de fazermos isso é que o vetor tangente $T^i = dx^i/ds$ é um vetor unitário, $\|\mathbf{T}\|^2 = \pm 1$.

Quando tratamos de uma curva no espaço euclideano, a derivada do vetor tangente unitário é normal a curva, e sua magnitude é a medida do quão rápido a curva está “girando”. Assim, a derivada de T^i dá a curvatura de C . Se C estiver em uma variedade, então o vetor tangente unitário será

$$T^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx^i/dt}{\sqrt{\pm g_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}}}, \quad (3.8)$$

e a curvatura, em coordenadas locais, vem da derivada covariante:

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{DT^i}{ds} \\ &= \frac{D(dx^i/ds)}{ds} \\ &= \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{ab}^i \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde os símbolos de Christoffel são definidos como:

$$\Gamma_{ab}^i \equiv \frac{1}{2} g^{il} (g_{bl,a} + g_{al,b} - g_{ab,l}). \quad (3.10)$$

Uma curva em M cuja curvatura é zero, é chamada de geodésica. Assim, uma geodésica é uma curva que satisfaz o sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{ab}^i \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} = 0. \quad (3.11)$$

Sob condições iniciais, $x^i(0) = x_0^i$ e $\dot{x}^i(0) = v_0^i$, com $|v_0^i| = \sqrt{g_{ia}v^i v^a} = 1$, a equação geodésica anterior possui solução única.

A equação (3.11) pode ainda ser escrita em parametrização arbitrária, da seguinte forma [37]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^i}{|\dot{x}|} \right) + \frac{1}{|\dot{x}|} \Gamma_{ab}^i \dot{x}^a \dot{x}^b = 0, \quad \text{com} \quad |\dot{x}| = \sqrt{g_{ia} \dot{x}^i \dot{x}^a}. \quad (3.12)$$

Essa equação possui infinitas soluções para condições iniciais dadas. Todas essas soluções são parametrizações da mesma curva geodésica. A análise dessa equação deve levar em conta como a quantidade $|\dot{x}| = \sqrt{g_{ia} \dot{x}^i \dot{x}^a}$ se relaciona com o parâmetro τ . Para isso, separamos a em dois casos distintos.

No primeiro caso, consideramos que a quantidade $|\dot{x}|$ seja função de τ . Assim, resolvendo a derivada temporal do primeiro termo da Eq.(3.12), obtemos

$$\Pi_a^i [\ddot{x}^a + \Pi_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0], \quad (3.13)$$

onde $\Pi_a^i = \delta_a^i - \frac{\dot{x}^i g_{ab} \dot{x}^b}{\dot{x} g \dot{x}}$, ou, usando a notação $\Lambda_a^i = \frac{\dot{x}^i g_{ab} \dot{x}^b}{\dot{x} g \dot{x}}$,

$$\Pi_a^i = \delta_a^i - \Lambda_a^i. \quad (3.14)$$

Segue-se então que o vetor \dot{x} , cujas componentes são dadas por \dot{x}^a , está no espaço nulo associados à matriz Π . Como o espaço nulo é não trivial e Π não é invertível, isso implica que $\det \Pi = 0$. Além disso, a matriz Hessiana, descrita no capítulo anterior, é proporcional à matriz Π ,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^a} \sim \Pi_a^i. \quad (3.15)$$

Portanto, trata-se de uma teoria singular. Podemos mostrar que isso está intimamente ligado com a invariância por reparametrização do funcional, como abordaremos abaixo. Antes de considerarmos o caso em que $|\dot{x}|$ não depende de τ , também podemos entender a ambiguidade do sistema singular em termos das propriedades algébricas dos operadores Π e Λ [1]. Esses operadores são projetores pelo que se segue:

$$\Pi^2 = \Pi, \quad \Lambda^2 = \Lambda, \quad \Pi\Lambda = 0 \quad \text{e} \quad \Pi + \Lambda = \mathbb{I}. \quad (3.16)$$

Assim, dado um vetor arbitrário v , ele será decomposto unicamente como

$$v = \Pi v + \Lambda v := v_{\perp} + v_{\parallel}. \quad (3.17)$$

Fixamos o vetor x^i que especifica o projetor Π , então

$$v_{\parallel}^i = \frac{g(\dot{x}, v)}{g(\dot{x}, \dot{x})} \dot{x}^i; \quad g(\dot{x}, v_{\perp}) = 0. \quad (3.18)$$

Podemos observar que v_{\parallel} é a projeção de v na direção de x^i enquanto v_{\perp} é a componente perpendicular correspondente. Considerando o vetor v definido por

$$v^i := \ddot{x}^i + \Gamma_{ab}^i \dot{x}^a \dot{x}^b, \quad (3.19)$$

nosso problema leva à equação de movimento (3.13) que é justamente a projeção $\Pi v = v_{\perp} = 0$. Isso restringe v_{\perp} , mas v_{\parallel} permanece arbitrário. Essa é a ambiguidade exposta anteriormente.

Agora, vamos trabalhar com $|\dot{x}|$ como se fosse uma constante em relação a τ . Então, segue da equação (3.12) que

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{ab}^i \dot{x}^a \dot{x}^b = 0. \quad (3.20)$$

Essa é a equação bem conhecida para a geodésica. Vemos então que o problema está no significado atribuído ao parâmetro de evolução [38]. Voltaremos nessa discussão na próxima seção.

Podemos mostrar também que as geodésicas nos dão extremos de uma trajetória. Ela é chamada de curva minimizante. Vamos verificar esse resultado via análise variacional. Começamos com o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (3.21)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é a métrica com $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Para encontrar a equação geodésica, usaremos o princípio variacional que afirma que uma partícula de teste em queda livre segue um caminho entre dois pontos fixos no espaço-tempo que extremiza o tempo próprio, τ .

O tempo próprio é definido por $d\tau^2 = -ds^2$. Temos então,

$$\tau_{if} = \int_i^f \sqrt{-ds^2} = \int_i^f \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}}. \quad (3.22)$$

Para escrever essa integral de uma forma que podemos calculá-la, consideremos a parametrização de linha de mundo, $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\sigma)$, onde o parâmetro $\sigma = 0$ no ponto inicial e $\sigma = 1$

no ponto final. Assim,

$$\begin{aligned}\tau_{if} &= \int_0^1 \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} d\sigma \\ &\equiv \int_0^1 L_1(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\sigma}) d\sigma.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Note que $L_1 = \frac{d\tau}{d\sigma}$. Assim, para funções $f = f(\tau(\sigma))$, temos

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{df}{d\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} = L_1 \frac{df}{d\tau}.\tag{3.24}$$

Isso será usado posteriormente para alterar as derivadas com relação ao parâmetro arbitrário σ para derivadas em relação ao tempo próprio, τ .

Usando as equações de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{\partial L_1}{\partial x^\gamma} - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L_1}{\partial (dx^\gamma/d\sigma)} \right) = 0,\tag{3.25}$$

vamos calcular passo-a-passo cada termo. Primeiramente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial x^\gamma} &= -\frac{1}{2L_1} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \\ &= -\frac{L_1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau},\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde já convertemos as derivadas em relação a σ para derivadas com relação a τ . Em seguida, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial (dx^\gamma/d\sigma)} &= -\frac{1}{2L_1} g_{\alpha\beta} \left(\frac{dx^\beta}{d\sigma} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \delta_{\beta\gamma} \right) \\ &= -\frac{1}{2L_1} \left(g_{\gamma\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma} + g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{L_1} g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma},\end{aligned}\tag{3.27}$$

onde usamos a simetria da métrica e o fato de α e β serem índices mudos. Calculando

agora a derivada desse último resultado,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L_1}{\partial(dx^\gamma/d\sigma)} \right) &= \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L_1} g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) \\
&= L_1 \frac{d}{d\tau} \left(g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\
&= L_1 \left(g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\
&= L_1 \left(g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\
&= L_1 \left[g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right], \quad (3.28)
\end{aligned}$$

onde novamente usamos a simetria da métrica e a reindexação dos índices. Combinando os resultados,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L_1}{\partial x^\gamma} - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L_1}{\partial(dx^\gamma/d\sigma)} \right) \\
&= L_1 \left[g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] - \frac{L_1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos do lado direito e alterando os índices α e δ , temos

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right] \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} \right] \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\
&= -g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Encontramos então a equação geodésica,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.31)$$

E ainda, partindo de um início diferente, é possível obter a mesma equação para a curva geodésica. Considere a seguinte Lagrangiana

$$L_2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (3.32)$$

Essa Lagrangiana é análoga a da mecânica clássica para uma partícula livre, pois estamos integrando um termo de energia cinética. Assim, da equação de Euler-Lagrange obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^l} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \right] - \frac{\partial}{\partial x^l} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} (g_{ij} \dot{x}^j \delta_{il} + g_{ij} \dot{x}^i \delta_{jl}) - g_{ij,l} \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde estamos usando a notação $g_{ij,l} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$. Prosseguindo com o cálculo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (g_{jl} \dot{x}^j + g_{il} \dot{x}^i) - g_{ij,l} \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ g_{jl} \frac{d\dot{x}^j}{d\tau} + \frac{dg_{jl}}{d\tau} \dot{x}^j + \frac{dg_{il}}{d\tau} \dot{x}^i + g_{il} \frac{d\dot{x}^i}{d\tau} - g_{ij,l} \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ 2g_{jl} \frac{d\dot{x}^j}{d\tau} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} \dot{x}^j + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{d\tau} \dot{x}^i - g_{ij,l} \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ 2g_{jl} \ddot{x}^j + g_{jl,i} \dot{x}^i \dot{x}^j + g_{il,j} \dot{x}^i \dot{x}^j - g_{ij,l} \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ 2g_{jl} \ddot{x}^j + (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ g_{jl} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Fazendo a contração com g^{kl} ,

$$\begin{aligned} g^{kl} g_{jl} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0 \\ \ddot{x}^k + \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \dot{x}^i \dot{x}^j &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A equação anterior pode então ser escrita como

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (3.36)$$

Como já foi dito anteriormente, as geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco. Entretanto, desde que $|\dot{x}^i| = \text{const.}$ podemos trabalhar com a abordagem de energia ao invés de comprimento, tornando o cálculo mais simples.

3.3 Invariância por reparametrização

O princípio de mínima ação é amplamente utilizada para expressar diversas leis da Física, incluindo as da Relatividade Geral. Por exemplo, partículas em queda livre se movem ao longo de curvas geodésicas, caminhos de menor comprimento entre dois pontos no espaço-curvo. Mudanças nas coordenadas que mantenham invariante a ação são chamadas de transformações de simetria. Simetrias contínuas geram leis de conservação (pelo teorema de Noether). As leis de conservação são fundamentais em toda a Física e, portanto, o estudo das simetrias da ação também.

É válido distinguir as simetrias em dois tipos: dinâmicas e não-dinâmicas. Simetrias dinâmicas correspondem a alguma propriedade intrínseca da matéria, ou evolução do espaço-tempo. Simetrias não-dinâmicas decorrem da maneira pela qual formulamos a ação. Enquanto simetrias dinâmicas restringem as soluções das equações de movimento, simetrias não-dinâmicas dão origem a identidades matemáticas.

Um exemplo de simetria não-dinâmica é a invariância por reparametrização do comprimento de uma trajetória. Para uma partícula qualquer em movimento, onde sua velocidade não ultrapasse a velocidade da luz, a ação para a partícula livre pode ser dada por

$$S_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j} \quad (3.37)$$

onde os valores dos parâmetros nos pontos extremos são chamados τ_1 e τ_2 , com τ sendo um parâmetro arbitrário da linha de mundo da partícula (que não necessariamente precisa ser o tempo próprio). A variação do funcional de (3.37) fornece

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad (3.38)$$

onde os coeficientes da conexão de Riemann aparecem naturalmente durante a variação. Suponha que façamos uma mudança do tipo $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$, para uma função suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$d\tau' = \dot{f}d\tau \quad (3.39)$$

e, portanto,

$$\frac{dx^i(\tau)}{d\tau} \xrightarrow{Rep.} \frac{dx^i(\tau'(\tau))}{d\tau'} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\tau}{\tau'} = \frac{\dot{x}^i}{\dot{f}}. \quad (3.40)$$

Substituindo de volta em (3.37), temos

$$S'_1 = \int d\tau' \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau'} \frac{dx^j}{d\tau'}} = \int d\tau \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}}, \quad (3.41)$$

demonstrando assim que a ação é invariante por reparametrização. Como a verificação dessa propriedade é direta, dizemos que a ação possui invariância manifesta.

A invariância de (3.37) mostra que a eq.(3.38) não especifica nenhuma lei definida para a propagação da “partícula” ao longo da linha. Isto significa que nessa teoria, o parâmetro τ não pode ser considerado um parâmetro de evolução. Por sua vez, isso implica que as soluções $x^i(\tau)$ para (3.38) não possuem significado físico. Esse fato é conhecido na literatura como mecânica pseudo-clássica, pelo fato do número de variáveis de configuração ser maior do que o número de graus de liberdade físicos [39].

Consideremos agora a seguinte ação

$$S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (3.42)$$

cuja variação funcional foi mostrada na seção anterior e também resulta em (3.38). No entanto, se para (3.37) a equação geodésica é interpretada como a curva de mínimo comprimento que conecta dois pontos, para (3.42) ela representa a equação diferencial da curva que minimiza a energia cinética de uma partícula. Nesse último caso, quando fazemos uma mudança do tipo $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$, como feito para (3.37), notamos que essa ação não é invariante por reparametrização. Ou seja, o resultado dependerá da escolha da função $f(\tau)$ e todas as coordenadas x^i da partícula terão evolução determinística dada por (3.38).

A invariância por reparametrização da equação (3.37) pode ser considerada num contexto mais geral de sistemas lagrangeanos. Considere um sistema com n graus de liberdade - com coordenadas generalizadas q^i - o parâmetro t dá a evolução da trajetória no espaço de configurações.

Teorema: Se a ação $S[q(t)]$ é invariante sobre transformações infinitesimais $t \rightarrow t + \epsilon(t)$ com $\epsilon = 0$ nos pontos extremos, então a Hamiltoniana desaparece.

Prova: Dada uma trajetória parametrizada $q^i(t)$, define-se uma nova trajetória parametrizada $\bar{q}(t) = q(t + \epsilon)$. Considerando a ação

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (3.43)$$

e linearizando $\bar{q}(t)$ para pequenos valores de ϵ ,

$$\bar{q}(t) = q + \dot{q}\epsilon, \quad \frac{d\bar{q}}{dt} = \dot{q} + \frac{d}{dt}(\dot{q}\epsilon). \quad (3.44)$$

A mudança na ação sob a transformação $t \rightarrow t + \epsilon$, até primeira ordem em ϵ , é

$$\begin{aligned} S[q(t + \epsilon)] - S[q(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial t} \epsilon + \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i \epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt}(\dot{q}^i \epsilon) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{dL}{dt} \epsilon + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \frac{d\epsilon}{dt} \right] dt \\ &= [L\epsilon]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) \frac{d\epsilon}{dt} dt. \end{aligned} \quad (3.45)$$

O termo limite desaparece porque $\epsilon = 0$ nos pontos extremos. A invariância por reparametrização significa que o termo dentro da integral deverá ser zero para qualquer valor de $\frac{d\epsilon}{dt}$. Mas o termo entre parênteses representa a Hamiltoniana, portanto

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = 0. \quad (3.46)$$

Como em nenhum momento assumimos que $q^i(t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange, a equação (3.46) é uma simetria não-dinâmica.

É fácil verificar que a Hamiltoniana H_1 obtida a partir de (3.37) também é nula. Esta simetria não significa que não exista uma formulação Hamiltoniana para o movimento geodésico, mas apenas que a ação possui graus de liberdade não-dinâmicos que devem ser eliminados durante o processo de hamiltonização. Isso pode ser feito por meio do procedimento de Dirac para sistemas vinculados, apresentado no capítulo 2. Vejamos um exemplo na próxima seção.

Partícula livre relativística

Vamos analisar o caso para uma partícula livre relativística no formalismo com invariância de Lorentz manifesta (ver Apêndice A). A ação é dada por [40]

$$S = -m \int_i^f ds \equiv -m \int_i^f \sqrt{-dx_\mu dx^\mu}, \quad (3.47)$$

ainda utilizando a métrica $g^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$. Escolhemos o parâmetro arbitrário τ para a evolução da posição da partícula ao longo da sua linha de mundo e definimos $u^\mu \equiv$

$dx^\mu(\tau)/d\tau$. Assim, a Lagrangiana é dada por

$$L = -m\sqrt{-u^\mu u_\mu}. \quad (3.48)$$

É fácil verificar que $\det(\partial^2 L/\partial u_\mu \partial u_\nu) = 0$ e, como esperado, o sistema requer o uso do procedimento de Dirac para definir a dinâmica hamiltoniana.

Os momentos canônicos são

$$p^\mu = \frac{\partial L}{\partial u_\mu} = \frac{mu^\mu}{\sqrt{-u^2}} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = m \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (3.49)$$

Das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow p^\mu(\tau) = p^\mu(0), \quad (3.50)$$

ou de forma equivalente [41],

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \rightarrow x^\mu(s) = x^\mu(0) + \frac{p^\mu(0)}{m} s, \quad (3.51)$$

onde s é o comprimento do caminho definido pela integral (3.47).

A Hamiltoniana canônica será

$$H_c = p^\mu u_\mu - L = 0, \quad (3.52)$$

como esperado para uma Lagrangiana singular. A eq.(3.49) leva ao vínculo primário

$$\phi = p^2 + m^2 \approx 0. \quad (3.53)$$

A Hamiltoniana total pode ser então escrita como

$$H = H_c + v(\tau)(p^2 + m^2) \approx 0, \quad (3.54)$$

que gera as equações de movimento hamiltonianas para um parâmetro arbitrário τ :

$$\begin{aligned} u^\mu \equiv \{x^\mu, H\} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ &= 2vp^\mu = 2mv \frac{u^\mu}{\sqrt{-u^2}}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^\mu \equiv \{p^\mu, H\} &= -\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \\ &= -\frac{\partial v}{\partial x_\mu} (p^2 + m^2) \approx 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilizando (3.55) e o vínculo da teoria, podemos expressar v em termos das velocidades u^μ e, finalmente, escrevemos a Hamiltoniana total como

$$H = \frac{1}{2m} \sqrt{-u^2} (p^2 + m^2). \quad (3.57)$$

Uma Hamiltoniana para o movimento geodésico pode também ser encontrada substituindo a Lagrangiana por uma que não seja invariante sob reparametrizações, como (3.42). Nesse caso a simetria é dinâmica, e $H_2 = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \text{constante}$ ao longo das trajetórias que satisfazem as equações de movimento [42].

3.4 Mecânica de Hertz

A Mecânica Clássica do final do século XIX foi reformulada por Heinrich Hertz. A ideia fundamental nessa teoria de Hertz é a seguinte: os problemas da mecânica podem ser relacionados aos problemas de um movimento livre (sem força) na configuração de espaços curvos. Uma breve revisão da chamada “forceless mechanics” de Hertz é descrita por Deriglazov [1] e Lanczos [43]. Nessa revisão é possível observar que a teoria da relatividade geral está relacionada com a mecânica de Hertz, embora comece a partir de considerações inteiramente diferentes. Na teoria de Einstein a força gravitacional desaparece e as partículas de teste se movem em geodésicas de um espaço-tempo curvo.

Introdução

Se uma coordenada estiver ausente na Lagrangiana isso significa que a Lagrangiana não muda se mudarmos essa coordenada, que chamamos de cíclica. A Lagrangiana é invariante sob mudanças da coordenada cíclica - dizemos que admite uma simetria. O tipo específico de simetria depende do significado da coordenada cíclica. Se é uma coordenada cartesiana falamos de simetria translacional e conservação do momento linear. Se a coordenada cíclica é uma variável angular, falamos de simetria rotacional e conservação do momento angular.

Seja uma Lagrangiana do tipo

$$L(x^a, \dot{x}^a, \dot{X}), \quad (3.58)$$

cujas equações de Euler-Lagrange fornecem

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right)' = \frac{\partial L}{\partial x^a} \quad \rightarrow \quad \dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial x^a} \quad (3.59)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right)' = \frac{\partial L}{\partial X} \quad \rightarrow \quad \dot{p}_X = 0 \quad \rightarrow \quad p_X = \text{constante}. \quad (3.60)$$

Ou seja, o momento conjugado a uma coordenada cíclica é uma constante de movimento. Dessa forma,

$$L(x_1, \dots, x_{N-1}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t) \rightarrow H(x_1, \dots, x_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}, \alpha, t). \quad (3.61)$$

Isso quer dizer que quando passamos do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano, enfrentamos então um problema em $N - 1$ variáveis, sendo α simplesmente determinada pelas condições iniciais.

As propriedades dessas variáveis formam a base da teoria de Hertz, projetada para explicar o significado mais profundo da energia potencial. Um sistema mecânico é caracterizado por um número de coordenadas de posição, mas não é certo que essas coordenadas sejam observáveis. Ele pode conter “parâmetros microscópicos” que não são diretamente evidentes. Por conta desses parâmetros, o número de graus de liberdade do sistema pode parecer muito menor do que realmente é. Por exemplo, um corpo sólido é aproximadamente rígido; mas na verdade suas moléculas oscilam sobre suas posições médias.

Esses movimentos dentro de um sistema mecânico podem ser colocados em duas categorias: aquelas expressas por variáveis cinéticas e aquelas expressas por variáveis não-cinéticas. Os movimentos associados a variáveis não-cinéticas produzem, aparentemente, forças “poligênicas” no movimento macroscópico. Um bom exemplo é a força de atrito que age microscopicamente como uma força “poligênica” mas na verdade é apenas um substituto para o movimento microscópico não-observável das moléculas.

Essa consideração levou Hertz a especulação de que possivelmente toda a energia potencial das forças impressas pode ser causada por movimentos ocultos expressos por variáveis cinéticas. O dualismo da energia cinética e potencial é um problema intrigante para o pensamento filosófico. Nós temos de um lado a propriedade inercial da matéria e do outro, a força. A propriedade inercial da matéria é algo derivável da mera existência da massa. A inércia pura faz com que a matéria se mova ao longo de uma linha reta e o mesmo se aplica ao espaço riemanniano, que retrata até mesmo o movimento dinâmico mais complicado como o movimento de um ponto único. Tem-se a impressão de que a inércia é uma qualidade inata da matéria que dificilmente pode ser reduzida a algo ainda mais simples. Assim, do ponto de vista filosófico, podemos ser reconciliados com a expressão da propriedade inercial da matéria por meio da energia cinética. Mas nenhuma explicação semelhante pode ser oferecida para a força. Se a energia cinética é definitivamente a energia de movimento da mecânica, talvez fosse possível dispensar, de alguma forma, a energia potencial e, assim, eliminar o inexplicável dualismo que se arrasta em mecânica por conta

das duas formas muito diferentes de energia, cinética e potencial. Hertz pensou em explicar a energia potencial como tendo uma origem cinética, causada pelos movimentos de variáveis ocultas ignoráveis.

As condições cinemáticas que são impostas ao movimento dos parâmetros microscópicos tomam o lugar da força na mecânica de Hertz. Esta notável hipótese embora não desenvolvida para além do início esboçado, tinha, no entanto, um significado profético. A teoria da relatividade, a partir de considerações e desenvolvendo-se ao longo de diferentes linhas, forneceu um exemplo impressionante da mecânica de Hertz. O movimento planetário em torno do Sol foi explicado como causado por pura inércia, sem qualquer força atuante. Os planetas traçam as linhas mais curtas em um espaço riemanniano, assim como Hertz imaginou para a mecânica de sistemas que estão livres da energia potencial. A única diferença é que no sistema de Hertz a curvatura riemanniana do espaço de configurações foi causada por condições cinemáticas impostas aos movimentos ocultos do sistema, enquanto no caso da teoria de Einstein a estrutura riemanniana da variedade física do espaço-tempo é uma propriedade inerente da geometria do mundo [43].

3.4.1 Formulação teórica

Com a utilização de uma variável auxiliar, podemos reformular o movimento potencial no espaço de configuração N -dimensional como uma queda livre (fictícia) no espaço $N + 1$ dimensional. Isso explica a terminologia “forceless mechanics” para a formulação desenvolvida por Hertz.

Consideremos uma partícula em uma variedade (semi)-riemanniana m dimensional (M^m, g) , com as coordenadas $x^i(\tau), i = 1, 2, \dots, m + 1$ e potencial $U(x^i)$

$$S[x^i] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^i)^2 - U(x) \right]. \quad (3.62)$$

Isso leva às equações

$$\ddot{x}^i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \quad (3.63)$$

Poderíamos também trabalhar usando as coordenadas generalizadas com a métrica

não-trivial $g_{ij}(x)$, como

$$S[x'] = \int d\tau \left[\frac{1}{2} g_{ij}(x') \dot{x}'^i \dot{x}'^j - U(q'^i) \right], \quad (3.64)$$

$$g_{ij} \equiv \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}, \quad U(x') \equiv U(x(x')), \quad (3.65)$$

isso não alteraria os resultados finais.

Segundo a abordagem de Hertz, começamos introduzindo uma variedade diferenciável em $m + 1$ dimensões, M^{m+1} . Dado uma carta (ϕ, U) e considerando os índices $a, b = 1, \dots, m, m + 1$, $x(\tau)$ é definido como

$$(\phi \circ \alpha)^a := x^a(\tau), \quad (3.66)$$

onde α é a curva correspondente à partícula na variedade M^{m+1}

$$\begin{aligned} \alpha : I \in \mathbb{R} &\rightarrow M^{m+1} \\ \tau &\rightarrow \alpha(\tau). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Assim, sendo as coordenadas $x^a \equiv (x^i, x^{m+1})$, podemos escrever a seguinte ação para uma partícula livre em M^{m+1}

$$S[x^a] = \int d\tau \frac{1}{2} g_{ab}(x) \dot{x}^a \dot{x}^b \quad (3.68)$$

$$= \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^i)^2 + \frac{1}{4U} \dot{x}^{m+1} \dot{x}^{m+1} \right]. \quad (3.69)$$

Isso se parece com a ação de uma partícula livre em coordenadas generalizadas, com a métrica

$$g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j + \frac{1}{2U(x^i)} dx^{m+1} \otimes dx^{m+1}, \quad (3.70)$$

que, de forma explícita, pode ser representada da seguinte forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2U} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Em comparação com a formulação inicial, o potencial está agora escondido no termo cinético. Impomos condições iniciais tanto para x^i quanto para x^{m+1} :

$$x^i(0) = x_0^i, \quad \dot{x}^i(0) = v_0^i, \quad x^{m+1}(0) = x_0^{m+1}, \quad \dot{x}^{m+1}(0) = 2U(x_0^i). \quad (3.72)$$

Devido à escolha especial da condição inicial para \dot{x}^{m+1} , a formulação (3.68), (3.72) leva às mesmas equações de movimento para x^i como o inicial (3.62). Para ver isso, escrevemos as equações de movimentos para (3.68)

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{4U^2} \frac{\partial U}{\partial x^i} (\dot{x}^{m+1})^2, \quad (3.73)$$

$$\left(\frac{1}{2U} \dot{x}^{m+1} \right)' = 0 \Rightarrow \dot{x}^{m+1} = 2cU(x^a). \quad (3.74)$$

A condição inicial para \dot{x}^{m+1} implica $c = 1$. Substituindo o resultado, $\dot{x}^{m+1} = 2U$, em (3.73) obtemos (3.63) da formulação inicial.

Na nova formulação, a energia potencial adquire uma origem geométrica. A métrica que aparece na equação (3.68) tem uma certa interpretação geométrica: ela determina a distância entre pontos do espaço de configurações. Trajetórias de uma teoria com tal ação também têm uma interpretação geométrica notável: elas representam linhas de mínimo comprimento em relação à métrica g_{ij} . Por isso, são semelhantes às linhas retas no espaço euclidiano e são chamadas de linhas geodésicas. Sabe-se que trajetórias de partículas na teoria da relatividade geral têm a mesma propriedade. Então, o movimento da x^i -partícula descrita por (3.68) é análoga à queda livre em um campo gravitacional.

Uma partícula fictícia x^i se move livremente ao longo de uma linha mais curta do espaço de $m + 1$ dimensões com a métrica $g_{ij}(U)$. A trajetória física é a sua projeção no espaço de configurações x^a e corresponde ao potencial de movimento, com o potencial sendo $U(x^a)$. Como x^{m+1} representa uma variável auxiliar, não podemos fixar experimentalmente a condição inicial x_0^{m+1} . Felizmente, isso não leva a uma inconsistência: desde que as equações para x^a e x^{m+1} sejam separadas, as diferentes escolhas de x_0^{m+1} implicam na mesma dinâmica física, que é dada por (3.63).

Embora tenhamos discutido o caso de um potencial escalar, a construção pode ser adaptada para um potencial vetor também. Um exemplo de uma força com potencial

vetor é a força eletromagnética (com o potencial vetor sendo A_μ). Sendo apropriadamente generalizada para esse caso, a construção leva à teoria de Kaluza-Klein, que formalmente unifica gravidade e eletromagnetismo em quatro dimensões, em uma teoria de cinco dimensões [44].

3.4.2 O oscilador harmônico na mecânica de Hertz

O oscilador harmônico simples é um dos primeiros sistemas que estudamos na Mecânica Clássica. Ele desenvolve um papel fundamental no estudo de diversos sistemas que envolvem oscilações harmônicas, que podem ser vistos até mesmo na Mecânica Quântica e na Relatividade Geral. Por isso, é comum se aplicar métodos de física teórica ao oscilador harmônico para verificar a aplicabilidade desses métodos. E é o que faremos ao longo dessa seção, aplicando o formalismo da Mecânica de Hertz ao oscilador harmônico.

Seja a Lagrangiana clássica para um oscilador harmônico em três dimensões

$$L = \frac{m}{2} [(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2] - V(x^1, x^2, x^3) \quad (3.75)$$

onde V é o potencial

$$V = \frac{m}{2} \omega_0^2 ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2), \quad (3.76)$$

sendo m a massa e ω_0 a frequência de oscilação. Da equação de Euler-Lagrange obtemos

$$m\ddot{x}^i + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0. \quad (3.77)$$

Consideremos agora a seguinte Lagrangiana

$$L' = \frac{m}{2} [(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2] + \left(\frac{1}{4V}\right) (\dot{x}^4)^2, \quad (3.78)$$

onde a coordenada x^4 não tem interpretação física. As correspondentes equações de Euler-Lagrange são

$$m\ddot{x}^i + \left(\frac{1}{4V^2}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\right) (\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (3.79)$$

e

$$\left(\frac{1}{2V}\right) \dot{x}^4 = A = \text{constante}. \quad (3.80)$$

Usando (3.80) em (3.79) podemos escrever

$$m\ddot{x}^i + A^2 \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0. \quad (3.81)$$

As equações (3.81) podem ser interpretadas como equações geodésicas da métrica

$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad g_{i4} = 0, \quad g_{44} = 1/4V; \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (3.82)$$

correspondendo à Lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2} g_{\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma; \quad \nu, \sigma = 1, 2, 3, 4. \quad (3.83)$$

Nessa interpretação as equações de movimento do oscilador harmônico são

$$\ddot{x}^i + A^2 \omega_0^2 x^i = 0. \quad (3.84)$$

Vale a pena mencionar ainda que a Lagrangiana (3.83), associada à Lagrangiana (3.75), não é única.

O oscilador harmônico na geometria do espaço-tempo de Riemann

O espaço-tempo de Riemann é definido pelo elemento de linha

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (3.85)$$

onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ e as componentes do tensor métrico que não desaparecem são

$$g_{00} = g(x^1, x^2, x^3), \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -h(x^1, x^2, x^3). \quad (3.86)$$

A Lagrangiana correspondente é

$$L = -mc^2 (g - h\dot{x}^i \dot{x}^i / c^2)^{1/2} \quad (3.87)$$

onde $\dot{x}^i = dx^i/dt$ e a soma sobre os índices $i = 1, 2, 3$ é usada. A energia total é

$$E = mc^2 g / (g - h\dot{x}^i \dot{x}^i / c^2)^{1/2}. \quad (3.88)$$

Das equações geodésicas

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) \left(\frac{dx^\beta}{ds} \right) = 0 \quad (3.89)$$

para $\sigma = 0$ temos

$$\frac{1}{g} \frac{ds}{dx^0} = B = \text{constante}. \quad (3.90)$$

Ao escolher g e h na forma

$$g = h = 1 + \omega_0^2 r^2 / c^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.91)$$

e levando em conta a equação (3.88), de (3.89) segue que

$$\ddot{x}^i + \omega^2 x^i = 0 \quad (3.92)$$

onde a notação $\omega = (mc^2/E)\omega_0$ foi usada. Das equações (3.88) e (3.90) temos $B = mc^2/E$ e a equação (3.92) pode ser reescrita como

$$\ddot{x}^i + B^2 \omega_0^2 x^i = 0. \quad (3.93)$$

As últimas equações representam as equações geodésicas da métrica

$$ds^2 = (1 + \omega_0^2 r^2 / c^2)(c^2 dt^2 - dr^2) \quad (3.94)$$

sem qualquer suposição sobre $\omega_0^2 r^2 / c^2$ ou sobre $\dot{x}^i \dot{x}^i / c^2$.

O problema do oscilador harmônico leva a algumas semelhanças matemáticas nos dois modelos apresentados. É possível observar que os dois modelos resultam em equações de conservação e que as constantes A e B aparecem nas equações de movimento (3.84) e (3.93) da mesma maneira. Embora na “mecânica sem força” a coordenada x^4 e a constante A não possuam interpretação física, parece que o modelo Riemanniano do oscilador harmônico pode ser um exemplo interessante para se ilustrar a analogia entre a Mecânica de Hertz e a Relatividade Geral.

CAPÍTULO 4

Busca por uma Lagrangiana para a partícula relativística com spin

Vamos desenvolver as formulações Hamiltoniana e Lagrangianas para uma partícula com spin, tomando como partida um problema variacional adequado. Os modelos discutidos aqui apresentam vínculos de primeira e segunda-classe, representando então, aplicações não triviais do formalismo discutido no capítulo 2. Analisamos o caso quando essa partícula possui massa zero, o modelo de Staruszkiewicz e ainda a possibilidade de interação com um campo eletromagnético externo.

4.1 Introdução

A busca por equações relativísticas que descrevam a evolução dos graus de liberdade de rotação e sua influência na trajetória de uma partícula com spin, representa um problema antigo na mecânica clássica [19, 20, 45–47]. Essa busca está diretamente relacionada com o desenvolvimento de equações clássicas que possam reproduzir a mecânica quântica de uma partícula com spin em uma aproximação semiclássica. Isso traria interpretações dos resultados obtidos pela teoria quântica de campos sobre partículas e suas interações.

Entendemos que a construção de um modelo para partícula com spin deve ser consequência de um problema variacional adequado. Esse é a primeira etapa que precisamos resolver. Como a formulação do problema variacional de forma fechada só é conhecida para um espaço de fase com parênteses de Poisson canônico, $\{\omega_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$, pode ser que o caminho mais natural seja considerar o spin como uma quantidade composta, $S_i = \epsilon_{ijk}\omega_j\pi_k$, onde ω, π são coordenadas do espaço de fase. No entanto, precisamos primeiro explicar porque S , em vez de ω e π , é que deve ser considerado para descrever os graus de liberdade de spin. Além disso, S está num espaço de 6 dimensões, enquanto a variedade de spin é bidimensional. Ou seja,

$$\mathbb{R}^6 = \{\omega_i, \pi_j; \{\omega_i, \pi_j\} = \delta_{ij}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^3 = \{S_i\}. \quad (4.1)$$

De forma que

$$f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\omega_i, \pi_j) \rightarrow S_i = \epsilon_{ijk}\omega_j\pi_k, \quad (4.2)$$

mas, como já descrito em (1.32), o quadrado do operador de spin foi fixado, de maneira que o espaço de spin está em \mathbb{R}^2 .

Assim, procuramos um problema variacional que, além de equações dinâmicas, implica também em vínculos do tipo

$$\omega\pi = 0, \quad \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} = 0, \quad (4.3)$$

onde $\alpha = 3\hbar^2/4$. Esse valor corresponde especificamente a partículas de spin 1/2 [39]. Cada vínculo é responsável por “eliminar” dois graus de liberdade, de forma que sobram

dois graus de liberdades físicos dos seis iniciais. Os vínculos implicam ainda que

$$S^2 = \omega^2 \pi^2 - (\omega \pi)^2 = \frac{3\hbar^2}{4}. \quad (4.4)$$

O espaço de configurações consiste na posição $x^\mu(\tau)$ e no vetor $\omega^\mu(\tau)$ ligado ao ponto x^μ . A ação é então ser escrita como

$$S = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int d\tau \sqrt{m^2 c^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} \left(-\dot{x} N \dot{x} - \dot{\omega} N \dot{\omega} + \sqrt{[\dot{x} N \dot{x} + \dot{\omega} N \dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x} N \dot{\omega})^2} \right)}, \quad (4.5)$$

onde a matriz $N_{\mu\nu}$ é o projetor no plano ortogonal a ω^ν

$$N_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\omega_\mu \omega_\nu}{\omega^2}, \quad \text{então} \quad N_{\mu\alpha} N^{\alpha\nu} = N_\mu{}^\nu, \quad N_{\mu\nu} \omega^\nu = 0. \quad (4.6)$$

A raiz quadrada dupla na estrutura da expressão (4.5) é comum em modelos vetoriais de spin. A Lagrangiana depende de um parâmetro livre α que determina o valor do spin. O valor $\alpha = \frac{3\hbar^2}{4}$ corresponde a partícula de spin meio. No limite da partícula sem spin a equação (4.5) se reduz a expressão padrão para partícula relativística $-mc\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$. A Lagrangiana equivalente com uma variável auxiliar $\lambda(\tau)$ é

$$L = \frac{1}{4\lambda} \left[\dot{x} N \dot{x} + \dot{\omega} N \dot{\omega} - \sqrt{[\dot{x} N \dot{x} + \dot{\omega} N \dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x} N \dot{\omega})^2} \right] - \frac{\lambda}{2} \left(m^2 c^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right). \quad (4.7)$$

Para introduzir o acoplamento da variável de posição x^μ com o campo eletromagnético adicionamos a interação mínima $\frac{e}{c} A_\mu x^\mu$. Quanto à variável de spin, o acoplamento com A^μ é feito através do termo [48]

$$D\omega^\mu \equiv \dot{\omega}^\mu - \lambda \frac{e^\mu}{c} F^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (4.8)$$

O problema variacional fornece tanto as equações de movimento como os vínculos do modelo para uma parametrização arbitrária. Usando a invariância por reparametrização do funcional, consideramos o tempo físico como o parâmetro de evolução, $\tau = \frac{x^0}{c} = t$, então

$$S_H = \int dt \left(c\tilde{P}^0 - eA^0 + p_i \dot{x}^i + \pi_\mu \dot{\omega}^\mu - \left[\frac{\lambda}{2} \left(-\tilde{P}_0^2 + P_i^2 - \frac{e^\mu}{2c} (FS) + m^2 c^2 + \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) + \lambda_2 \omega \pi + \lambda_3 P \omega + \lambda_4 P \pi \right] \right), \quad (4.9)$$

onde $\tilde{P}_0 = p_0 - \frac{e}{c}A_0$ e $P^i = p^i - \frac{e}{c}A^i$. Quando variamos a ação anterior com relação à variável auxiliar λ , encontramos mais um vínculo para o sistema,

$$\tilde{P}_0 = -\tilde{P}^0 = -\sqrt{P_i^2 - \frac{e\mu}{2c}(FS) + m^2c^2 + \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2}}, \quad (4.10)$$

que quando substituída de volta em (4.9), fornece uma forma equivalente para o funcional

$$S_H = \int dt p_i \dot{x}^i + \pi_\mu \dot{\omega}^\mu - \left[c\sqrt{P_i^2 - \frac{e\mu}{2c}(FS) + m^2c^2 + \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2}} + eA^0 + \lambda_2 \omega_\mu \pi^\mu + \lambda_3 P_\mu \omega^\mu + \lambda_4 P_\mu \pi^\mu \right]. \quad (4.11)$$

A expressão entre colchetes é a Hamiltoniana total. O prosseguimento do cálculo implica nos vínculos de primeira classe $\omega\pi = 0$ e $\pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} = 0$, que determinam as simetrias de gauge e os observáveis físicos da teoria. As quantidades $x^i(t)$, $P^i(t)$ e $S^{\mu\nu}(t)$ possuem parênteses de Poisson nulo com os vínculos e, por isso, são candidatos a observáveis físicos da teoria. As quantidades

$$P\omega = -P^0\omega^0 + P^i\omega^i = 0 \quad \text{e} \quad P\pi = -P^0\pi^0 + P^i\pi^i = 0, \quad (4.12)$$

onde

$$P^0 \equiv \sqrt{P_i^2 - \frac{e\mu}{2c}(FS) + m^2c^2}, \quad (4.13)$$

representam um par de vínculos de segunda classe. Os vínculos implicam ainda nas condições $S^{\mu\nu}P_\nu = 0$ e $S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 8\alpha$.

Para representarmos o Hamiltoniano de uma forma mais familiar, devemos levar em conta os vínculos de segunda classe. A passagem dos parênteses de Poisson para os de Dirac é descrita de forma detalhada em [49]. Como os parênteses de Dirac com qualquer quantidade de segunda classe é nulo, eles são omitidos da Hamiltoniana. Os vínculos de primeira classe também podem ser omitidos, uma vez que não contribuem para as equações de movimento das variáveis físicas. Assim, a Hamiltoniana relativística fica escrita da seguinte forma

$$H = c\sqrt{P^2 - \frac{e\mu}{2c}(FS) + m^2c^2} + eA^0. \quad (4.14)$$

A quantização do modelo anterior para elétrons livres leva à mecânica quântica relativística de uma partícula com energia positiva, descrita pelo Hamiltoniano livre $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + (mc)^2}$.

4.2 Sistema com massa zero

Nessa seção vamos trabalhar novamente com a Lagrangiana (4.7), agora para o caso de uma partícula de massa zero. Aqui, desenvolveremos todo o cálculo do procedimento de hamiltonização, seguindo o método de Dirac. A ação inicial é dada por

$$S = \int d\tau \frac{1}{4\lambda} \left[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega} - \sqrt{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2} \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega^2} \right), \quad (4.15)$$

cujos momentos são:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = \frac{1}{2\lambda} (N\dot{x})^\mu - \frac{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}] (N\dot{x})^\mu - 2(\dot{x}N\dot{\omega}) (N\dot{x})^\mu}{2\lambda \sqrt{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2}}, \\ \pi^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_\mu} = \frac{1}{2\lambda} (N\dot{\omega})^\mu - \frac{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}] (N\dot{\omega})^\mu - 2(\dot{x}N\dot{\omega}) (N\dot{\omega})^\mu}{2\lambda \sqrt{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para facilitar a notação, tomamos

$$\begin{aligned} p^\mu &= \frac{1}{2\lambda} [(N\dot{x})^\mu - A^\mu], \\ \pi^\mu &= \frac{1}{2\lambda} [(N\dot{\omega})^\mu - B^\mu], \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$A^\mu = \frac{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}] (N\dot{x})^\mu - 2(\dot{x}N\dot{\omega}) (N\dot{x})^\mu}{\sqrt{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2}}, \quad (4.18)$$

$$B^\mu = \frac{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}] (N\dot{\omega})^\mu - 2(\dot{x}N\dot{\omega}) (N\dot{\omega})^\mu}{\sqrt{[\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2}}. \quad (4.19)$$

As relações (4.18) e (4.19) seguem as identidades:

$$A^2 = \dot{x}N\dot{x}, \quad B^2 = \dot{\omega}N\dot{\omega}, \quad AB = -\dot{x}N\dot{\omega}, \quad A\dot{x} + B\dot{\omega} = C^{\frac{1}{2}}, \quad A\dot{\omega} + B\dot{x} = 0, \quad (4.20)$$

onde $C = [\dot{x}N\dot{x} + \dot{\omega}N\dot{\omega}]^2 - 4(\dot{x}N\dot{\omega})^2$. Devido à relação (4.6), as contrações dos momentos com ω^μ desaparecem, dessa forma temos os vínculos primários $\omega\pi = 0$ e $p\omega = 0$. Vindo direto da definição de momento temos $p_{\lambda_1} = 0$. Por fim, $p\pi = 0$ também é um vínculo primário, que vem de (4.20). Por isso, lidamos com uma teoria com quatro vínculos

primários. O Hamiltoniano é obtido excluindo as velocidades da expressão

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} + \pi\dot{\omega} - L + \lambda_\alpha\phi_\alpha, \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(p^2 + \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) + \lambda_1(\omega\pi) + \lambda_2(p\omega) + \lambda_3(p\pi) + \lambda_4(p_\lambda). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Seguindo o procedimento de Dirac para vínculos de ordem elevada,

$$p_\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 + \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} = 0, \quad (4.22)$$

$$(\omega\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2} = 0, \quad (4.23)$$

e de acordo com as duas últimas equações, podemos obter um novo vínculo, $p^2 = 0$. Dessa forma, p_λ , p^2 , $\omega\pi$, $p\omega$, $p\pi$ e $\pi^2 - \frac{\alpha}{\omega^2}$, formam um conjunto de vínculos de primeira classe, uma vez que os parênteses de Poisson entre eles são todos nulos.

A evolução das variáveis básicas é obtida de acordo com a regra padrão $\dot{z} = \{z, H\}$. As equações são

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \lambda p^\mu + \lambda_2 \omega^\mu + \lambda_3 \pi^\mu \\ \dot{p}^\mu &= 0 \\ \dot{\omega}^\mu &= \lambda \pi^\mu + \lambda_1 \omega^\mu + \lambda_3 p^\mu \\ \dot{\pi}^\mu &= -\lambda \frac{\pi^2}{\omega^2} \omega^\mu - \lambda_1 \pi^\mu - \lambda_2 p^\mu. \end{aligned}$$

Com

$$S^{\mu\nu} p_\nu = 0 \quad \text{e} \quad \dot{M}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.24)$$

onde $S^{\mu\nu} = 2(\omega^\mu \pi^\nu - \omega^\nu \pi^\mu)$ e $M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \omega_\mu \pi_\nu - \omega_\nu \pi_\mu$.

Para introduzir o acoplamento da variável de posição x^μ com o campo eletromagnético adicionamos a interação mínima $\frac{e}{c} A_\mu x^\mu$. Quanto à variável de spin, o acoplamento com A^μ é feito através do termo

$$D\omega^\mu \equiv \dot{\omega}^\mu - \lambda \frac{e\mu}{c} F^{\mu\nu} \omega_\nu, \quad (4.25)$$

onde $\mu = g/2$ com g sendo o raio giromagnético da partícula. No entanto, as tentativas de descrever a interação com o campo eletromagnético quebram a estrutura da álgebra dos vínculos, de forma que essa teoria, assim como muitas outras, no limite de massa zero não admite interação.

4.3 O modelo de Staruszkiewicz

Vamos considerar a noção de um corpo rígido relativístico introduzida por Hanson e Regge [21]. Segundo eles, um corpo rígido seria uma téttrade associada a uma posição e um movimento de acordo com algumas leis de movimento relativisticamente invariantes. Em outras palavras, o corpo rígido poderia ser caracterizado de forma equivalente a um sistema dinâmico descrito pela posição e três direções nulas. Isto daria nove graus de liberdade e, a priori, uma variedade enorme de possíveis ações que descrevam o modelo.

De acordo com o famoso trabalho de Wigner [50], sistemas quânticos relativísticos devem ser classificados por meio de representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré. A unitariedade é um conceito complexo que não possui análogo clássico. A irredutibilidade, no entanto, é apenas uma noção algébrica que pode ser interpretada classicamente. No contexto deste trabalho, irredutibilidade significa que ambos os invariantes de Casimir do grupo de Poincaré devem ter valores fixos, ou seja, devem ser parâmetros e não constantes de movimento.

Na mecânica quântica relativística e na teoria quântica de campos, o pseudovetor de Pauli-Lubanski é um operador definido a partir do momento angular. Utilizado na descrição quântica relativística do momento angular, descreve os estados de spin de partículas em movimento. Definido como W_μ ele é dado por

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}S^{\alpha\beta}p^\gamma, \quad (4.26)$$

onde p^γ é o momento canônico e $S^{\alpha\beta}$ é o momento angular do sistema que satisfaz à álgebra de Poincaré, dado por

$$S_{\alpha\beta} = 2(\omega_\alpha\pi_\beta - \omega_\beta\pi_\alpha). \quad (4.27)$$

Temos ainda o escalar W^2 que é um operador invariante de Lorentz, que comuta com o quadrimomento e pode, portanto, servir como rótulo para representações irredutíveis do grupo de Lorentz. Ou seja, ele pode servir como um rótulo para o spin, uma característica da estrutura do espaço-tempo da representação. Calculando esse escalar,

$$W^\mu W_\mu = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu abc}S_{\alpha\beta}p_\gamma S^{ab}p^c, \quad (4.28)$$

onde o produto dos dois tensores de Levi-Civita é

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu abc} &= \begin{vmatrix} \delta_\mu^\mu & \delta_a^\mu & \delta_b^\mu & \delta_c^\mu \\ \delta_\mu^\alpha & \delta_a^\alpha & \delta_b^\alpha & \delta_c^\alpha \\ \delta_\mu^\beta & \delta_a^\beta & \delta_b^\beta & \delta_c^\beta \\ \delta_\mu^\gamma & \delta_a^\gamma & \delta_b^\gamma & \delta_c^\gamma \end{vmatrix} \\ &= - \left[\delta_a^\alpha (\delta_b^\beta \delta_c^\gamma - \delta_c^\beta \delta_b^\gamma) - \delta_b^\alpha (\delta_a^\beta \delta_c^\gamma - \delta_c^\beta \delta_a^\gamma) + \delta_c^\alpha (\delta_a^\beta \delta_b^\gamma - \delta_b^\beta \delta_a^\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim, de (4.28) encontramos que

$$\begin{aligned} W^2 &= -\frac{1}{4} \left[\delta_a^\alpha (\delta_b^\beta \delta_c^\gamma - \delta_c^\beta \delta_b^\gamma) - \delta_b^\alpha (\delta_a^\beta \delta_c^\gamma - \delta_c^\beta \delta_a^\gamma) + \delta_c^\alpha (\delta_a^\beta \delta_b^\gamma - \delta_b^\beta \delta_a^\gamma) \right] S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{ab} p^c \\ &= -\frac{1}{4} \left[S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\alpha\beta} p^\gamma - S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\alpha\gamma} p^\beta - S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\beta\alpha} p^\gamma \right. \\ &\quad \left. + S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\gamma\alpha} p^\beta + S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\beta\gamma} p^\alpha - S_{\alpha\beta} p_\gamma S^{\gamma\beta} p^\alpha \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} p^2 + S_{\alpha\beta} S^{\gamma\alpha} p_\gamma p^\beta + S_{\alpha\beta} S^{\beta\gamma} p_\gamma p^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilizando a relação (4.27)

$$\begin{aligned} W^2 &= -\frac{1}{2} \left[4(\omega_\alpha \pi_\beta - \omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\alpha \pi^\beta - \omega^\beta \pi^\alpha) p^2 + 4(\omega_\alpha \pi_\beta - \omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\gamma \pi^\alpha - \omega^\alpha \pi^\gamma) p_\gamma p^\beta \right. \\ &\quad \left. + 4(\omega_\alpha \pi_\beta - \omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\beta \pi^\gamma - \omega^\gamma \pi^\beta) p_\gamma p^\alpha \right] \\ &= -2 \left[(\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\alpha \pi^\beta) - (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\alpha \pi^\beta) - (\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\beta \pi^\alpha) + (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\beta \pi^\alpha) \right] p^2 \\ &\quad - 2 \left[(\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\gamma \pi^\alpha) - (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\gamma \pi^\alpha) - (\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\alpha \pi^\gamma) + (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\alpha \pi^\gamma) \right] p_\gamma p^\beta \\ &\quad - 2 \left[(\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\beta \pi^\gamma) - (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\beta \pi^\gamma) - (\omega_\alpha \pi_\beta)(\omega^\gamma \pi^\beta) + (\omega_\beta \pi_\alpha)(\omega^\gamma \pi^\beta) \right] p_\gamma p^\alpha \\ &= 4 \left[(\omega \cdot \pi)^2 p^2 + \omega^2 (p \cdot \pi)^2 + (p \cdot \omega)^2 \pi^2 - 2(p \cdot \omega)(p \cdot \pi)(\omega \cdot \pi) - \omega^2 \pi^2 p^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Mais adiante ficará claro que W^2 é proporcional a $m^4 l^2$, onde m é a massa e o parâmetro l identifica a magnitude do spin e possui dimensão de comprimento.

Vamos partir agora da ação invariante relativística mais geral para um sistema descrito pela posição x e um vetor de direção nula ω . Essa ação tem a seguinte forma:

$$S = \int L d\tau = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \sqrt{1 + 2l \sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega \dot{x})^2}}} - \int d\tau \frac{1}{2\lambda} \omega^2. \quad (4.32)$$

A partícula é descrita pelas variáveis dinâmicas (x_μ, ω_μ) onde ω_μ é o vetor de spin. Sendo

a Lagrangiana

$$L = -mc\sqrt{-\dot{x}^2} \sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}} - \frac{1}{2\lambda}\omega^2. \quad (4.33)$$

Essa Lagrangiana pode ser considerada uma extensão não-trivial da forma Nambu-Goto para partículas sem spin [51], a qual (4.33) se reduz para $l = 0$, desde que o último termo não seja dinâmico e fique desacoplado do termo dinâmico $-m\sqrt{-\dot{x}^2}$ (o sinal “-” dentro da raiz aparece pela escolha da métrica). Pode-se definir diretamente os momentos conjugados

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}_\mu + \frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\sqrt{\dot{\omega}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} \omega_\mu \quad (4.34)$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^\mu} = -\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\dot{\omega}_\mu}{(\omega\dot{x})\sqrt{\dot{\omega}^2}\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} \quad (4.35)$$

$$\pi_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\omega^2}{2\lambda^2} = 0. \quad (4.36)$$

A Hamiltoniana referente a (4.33) pode ser escrita como

$$H_0 = p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_\mu \dot{\omega}^\mu + \pi_\lambda \dot{\lambda} - L. \quad (4.37)$$

Como (4.33) é invariante por reparametrização, com exceção do último termo, logo, somente esse termo permanece após o cálculo. Assim,

$$H_0 = \frac{1}{2\lambda}\omega^2. \quad (4.38)$$

Essa Hamiltoniana não descreve o sistema em questão, mas deve se tratar de um sistema vinculado, onde é necessário então que seja realizado o procedimento de Dirac, assim como descrito no capítulo 2.

4.4 Procedimento de Dirac

Iremos denominar como $\phi_{\alpha_i}(x, \omega, p, \pi) = 0$, os i vínculos primários da teoria. O primeiro vínculo pode ser obtido da eq.(4.36), dado por

$$\phi_{\alpha_1} \equiv \omega^2 = 0. \quad (4.39)$$

Da eq. (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} p^2 &= -m^2 c^2 \left(1 + 2l \sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega \dot{x})^2}} \right) + \frac{2m^2 c^2 l \sqrt{\dot{\omega}^2}}{(\omega \dot{x})} \\ &= -m^2 c^2 - \frac{2m^2 c^2 l \sqrt{\dot{\omega}^2}}{(\omega \dot{x})} + \frac{2m^2 c^2 l \sqrt{\dot{\omega}^2}}{(\omega \dot{x})} \\ &= -m^2 c^2, \end{aligned}$$

que fornece um segundo vínculo

$$\phi_{\alpha_2} \equiv p^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (4.40)$$

Novamente, da eq. (4.34),

$$\begin{aligned} (p\omega) &= \frac{mc(\omega \dot{x}) \sqrt{1 + 2l \sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega \dot{x})^2}}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \\ (p\omega)^2 &= -\frac{m^2 c^2 (\omega \dot{x})^2 \left(1 + 2l \sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega \dot{x})^2}} \right)}{\dot{x}^2} \end{aligned} \quad (4.41)$$

e de (4.35),

$$\pi^2 = -\frac{m^2 c^2 l^2 \dot{x}^2}{(\omega \dot{x})^2 \left(1 + 2l \sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega \dot{x})^2}} \right)}. \quad (4.42)$$

Multiplicando (4.42) por (4.41), obtem-se um terceiro vínculo

$$\phi_{\alpha_3} \equiv \pi^2 (p\omega)^2 - m^4 c^4 l^2 = 0. \quad (4.43)$$

Esses são os vínculos primários do sistema. Prosseguindo com o cálculo, escrevemos as equações de movimento usando as expressões para os vínculos, para os momentos e reorganizando algebricamente alguns termos. Obtemos um sistema equivalente ao inicial, dado por

$$\omega^2 = 0, \quad p^2 + m^2 c^2 = 0, \quad \pi^2 (p\omega)^2 - m^4 c^4 l^2 = 0, \quad (4.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^\mu = \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{mc\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}}p^\mu - \frac{\pi^2\sqrt{\dot{\omega}^2}}{m^2c^2l}\omega^\mu, \\ \dot{p}^\mu = 0, \\ \dot{\omega}^\mu = -\frac{(p\omega)}{m^2c^2l}\sqrt{\dot{\omega}^2}\pi^\mu, \\ \dot{\pi}^\mu = \frac{\pi^2\sqrt{\dot{\omega}^2}}{m^2c^2l}p^\mu - \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})}\omega^\mu - \frac{1}{\lambda}\omega^\mu. \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Na impossibilidade de excluir a dependência com as velocidades nas equações de movimento, realizaremos um processo intermediário para eliminar esse problema. Para isso, considere o seguinte sistema (onde $v_1 > 0$ para o limite de partículas sem spin)

$$\omega^2 = 0, \quad p^2 + m^2c^2 = 0, \quad \pi^2(p\omega)^2 - m^4c^4l^2 = 0, \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^\mu = v_1p^\mu - v_2\pi^2\omega^\mu, \\ \dot{p}^\mu = 0, \\ \dot{\omega}^\mu = -v_2(p\omega)\pi^\mu, \\ \dot{\pi}^\mu = v_2\pi^2p^\mu - \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})}\omega^\mu - \frac{1}{\lambda}\omega^\mu. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Nesse ponto, precisamos mostrar que os dois sistemas anteriores são equivalentes. Assim, a solução $x(\tau)$, $\omega(\tau)$, $p(\tau)$ e $\lambda(\tau)$ do primeiro sistema (4.44) e (4.45), também será solução do segundo sistema (4.46) e (4.47). De forma inversa, seja $x(\tau)$, $\omega(\tau)$, $p(\tau)$, $\pi(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $v_1(\tau)$ e $v_2(\tau)$, solução do segundo sistema, devemos mostrar que para que esse conjunto também seja solução do primeiro sistema, precisamos que

$$v_1(\tau) = \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{mc\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}}} \quad e \quad v_2(\tau) = \frac{\sqrt{\dot{\omega}^2}}{m^2c^2l}. \quad (4.48)$$

Prova: Da segunda equação em (4.47),

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^\mu &= -v_2(p\omega)\pi^\mu \\ \dot{\omega}^2 &= v_2^2(p\omega)^2\pi^2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

mas de (4.46), $\pi^2(p\omega)^2 = m^4 c^4 l^2$, então

$$\dot{\omega}^2 = v_2^2 m^4 c^4 l^2 \quad \text{o que implica em} \quad v_2 = \frac{\sqrt{\dot{\omega}^2}}{m^2 c^2 l}. \quad (4.50)$$

Agora, da primeira equação de (4.47), assumindo que $v_1 = \frac{(\omega\dot{x})}{(p\omega)}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \frac{(\omega\dot{x})}{(p\omega)} p^\mu - \frac{\sqrt{\dot{\omega}^2} \pi^2}{m^2 c^2 l} \omega^\mu \\ \dot{x}^2 &= \frac{(\omega\dot{x})^2}{(p\omega)^2} p^2 - \frac{2(\omega\dot{x})\sqrt{\dot{\omega}^2} \pi^2 (p\omega)}{m^2 c^2 l (p\omega)}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde pode-se usar as equações (4.46),

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \frac{(\omega\dot{x})^2}{(p\omega)^2} (-m^2 c^2) - \frac{2(\omega\dot{x})\sqrt{\dot{\omega}^2} \pi^2 (p\omega)}{m^2 c^2 l (p\omega)} \frac{m^4 c^4 l^2}{(p\omega)} \\ (p\omega)^2 &= \frac{m^2 c^2 (\omega\dot{x})^2 + 2m^2 c^2 l (\omega\dot{x}) \sqrt{\dot{\omega}^2}}{(-\dot{x}^2)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

ou

$$(p\omega) = \sqrt{\frac{m^2 c^2 (\omega\dot{x})^2 + 2m^2 c^2 l (\omega\dot{x}) \sqrt{\dot{\omega}^2}}{(-\dot{x}^2)}}. \quad (4.53)$$

Voltando com esse resultado na expressão que foi pressuposta para v_1 e fazendo algumas simplificações, encontra-se finalmente que

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(\omega\dot{x})\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{m^2 c^2 (\omega\dot{x})^2 + 2m^2 c^2 l (\omega\dot{x}) \sqrt{\dot{\omega}^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{mc\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}}}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Com estes resultados podemos concluir que os dois sistemas considerados são equivalentes e, a partir de agora, seguiremos os cálculos usando o sistema (4.46) e (4.47), uma vez que com a prova anterior sabemos que a solução desse sistema, também será solução do sistema (4.44) e (4.45).

4.5 Problema Variacional

Observa-se que o sistema de variáveis $x(\tau), \omega(\tau), p(\tau), \pi(\tau), \lambda(\tau), v_1(\tau)$ e $v_2(\tau)$, segue do problema variacional seguinte:

$$H = p\dot{x} + \pi\dot{\omega} - \left\{ \frac{1}{2}v_1(p^2 + m^2c^2) - \frac{1}{2}\frac{v_2}{(p\omega)} [\pi^2(p\omega)^2 - m^4c^4l^2] + \frac{1}{2\lambda}\omega^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})}\omega^2 \right\}. \quad (4.55)$$

As equações de movimento referente à (4.55) são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v_1} &= 0 \rightarrow p^2 + m^2c^2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v_2} &= 0 \rightarrow \pi^2(p\omega)^2 - m^4c^4l^2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= 0 \rightarrow \omega^2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p^\mu} &= 0 \rightarrow \dot{x}^\mu = v_1p^\mu - v_2\pi^2\omega^\mu \\ \frac{\partial H}{\partial x^\mu} &= 0 \rightarrow \dot{p}^\mu = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \pi^\mu} &= 0 \rightarrow \dot{\omega}^\mu = -v_2(p\omega)\pi^\mu \\ \frac{\partial H}{\partial \omega^\mu} &= 0 \rightarrow \dot{\pi}^\mu = -v_2\pi^2p^\mu - \frac{\omega^\mu}{\lambda} - \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})}\omega^\mu \end{aligned} \quad (4.56)$$

Agora, após o passo a seguir, será possível conhecer todas as equações do sistema de forma totalmente equivalente. Os últimos dois termos em S_H podem ser unificados como segue:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})} \right) \omega^2. \quad (4.57)$$

Tendo um problema variacional, há a liberdade de fazer trocas invertíveis de variáveis, portanto, $(x, p, \pi, \omega, v_1, v_2, \lambda) \rightarrow (x, p, \pi, \omega, v_1, v_2', \lambda')$, onde

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} + \left[\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})^2}}(\omega\dot{x})}} \right]^3 \frac{l\dot{\omega}^2}{(\omega\dot{x})} \quad (4.58)$$

e

$$v_2' = \frac{v_2}{(p\omega)}. \quad (4.59)$$

Assim, a Hamiltoniana final pode ser escrita como

$$H = p\dot{x} + \pi\dot{\omega} - \left\{ \frac{1}{2}v_1(p^2 + m^2c^2) - \frac{1}{2}v_2' [\pi^2(p\omega)^2 - m^4c^4t^2] + \frac{1}{2\lambda'}\omega^2 \right\}. \quad (4.60)$$

Agora, é preciso determinar os vínculos secundários, terciários, etc. É uma questão de consistência os vínculos não evoluírem com o tempo, assim, devemos ter $\dot{\phi} = \{\phi, H\} = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\alpha_1} &= \{\phi_{\alpha_1}, H\} = 0, \\ \dot{\phi}_{\alpha_2} &= \{\phi_{\alpha_2}, H\} = 0, \\ \dot{\phi}_{\alpha_3} &= \{\phi_{\alpha_3}, H\} = 0. \end{aligned}$$

Verificando assim que não existem vínculos de estágios superiores. Vale ressaltar que a quantidade $\omega\pi = 0$ que aparece durante o cálculo anterior não precisa ser considerada como um vínculo, já que ela aparece como consequência algébrica natural do vínculo ϕ_{α_1} juntamente com o momento π^μ .

Quanto à classificação dos vínculos, temos

$$\begin{aligned} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}\} &= 0 \\ \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_3}\} &= 0 \\ \{\phi_{\alpha_2}, \phi_{\alpha_3}\} &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, todos os vínculos da teoria são de primeira classe. Vamos analisar agora como esse mesmo modelo se comporta na presença de um campo eletromagnético externo.

4.6 Interação eletromagnética

Considere agora que o sistema tratado na seção anterior está na presença de um campo eletromagnético externo. Temos a partícula com massa m , carga elétrica e e momento magnético μ interagindo com um campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (F_{0i} = -E_i, F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k), \quad (4.61)$$

$$E_i = -\frac{1}{c}\partial_t A_i + \partial_i A_0, \quad \text{e} \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (4.62)$$

onde A_μ é o potencial vetor. Assim, a Lagrangiana do sistema na presença do campo externo pode ser escrita como

$$L = -mc\sqrt{-\dot{x}^2} \sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}} - \frac{1}{2\lambda}\omega^2 + \frac{e}{c}A\dot{x}, \quad (4.63)$$

onde $(\omega\dot{x}) > 0$ para todos os movimentos. As equações de movimento Lagrangianas são:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = \left[\frac{mc\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu + \frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\sqrt{\dot{\omega}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} (\omega\dot{x})^2 \omega^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right] = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \omega^\mu} = \left[-\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\dot{\omega}_\mu}{(\omega\dot{x})\sqrt{\dot{\omega}^2}\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} \right] + \frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\sqrt{\dot{\omega}^2}}{(\omega\dot{x})^2\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} \dot{x}^\mu - \frac{1}{\lambda}\omega^\mu = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda} = \omega^2 = 0 \quad (4.66)$$

Novamente, temos uma teoria no espaço estendido $(x, \omega, \lambda, p, \pi)$ onde x, ω, λ obedecem a (4.64), (4.65) e (4.66), e p, π acompanham a dinâmica deles, sendo:

$$p^\mu = \frac{mc\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu + \frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\sqrt{\dot{\omega}^2}}{\sqrt{1 + 2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} (\omega\dot{x})^2 \omega^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \quad (4.67)$$

$$\pi^\mu = -\frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\dot{\omega}_\mu}{(\omega\dot{x})\sqrt{\dot{\omega}^2}\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}} \quad (4.68)$$

A Hamiltoniana referente a (4.63) é escrita como

$$\begin{aligned} H &= p_\mu\dot{x}^\mu + \pi_\mu\dot{\omega}^\mu - L \\ &= \frac{1}{2\lambda}\omega^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

É conveniente representar o momento conjugado (4.67) na forma

$$P^\mu = \frac{mc\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\dot{x}^\mu + \frac{mcl\sqrt{-\dot{x}^2}\sqrt{\dot{\omega}^2}}{\sqrt{1+2l\sqrt{\frac{(\dot{\omega}^2)}{(\omega\dot{x})^2}}}}(\omega\dot{x})^2}\omega^\mu, \quad (4.70)$$

onde

$$P^\mu \equiv p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu, \quad (4.71)$$

é o momento canônico. Em contraste com p^μ , o momento canônico é uma quantidade invariante de gauge. Este possui os seguintes parênteses de Poisson

$$\begin{aligned} \{x^\mu, P_\nu\} &= \delta_\nu^\mu \\ \{P^\mu, P_\nu\} &= \frac{e}{c}F_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dessa forma, os vínculos agora podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha_1} &\equiv \omega^2 = 0, \\ \phi_{\alpha_2} &\equiv P^2 + m^2c^2 = 0, \\ \phi_{\alpha_3} &\equiv \pi^2(P\omega)^2 - m^4c^4l^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Quando os analisamos quanto a sua classificação, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}\} &= 0 \\ \{\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_3}\} &= 0 \\ \{\phi_{\alpha_2}, \phi_{\alpha_3}\} &= \frac{4\pi^2e}{c}(P\omega)(PF\omega). \end{aligned} \quad (4.74)$$

É possível notar então que ϕ_{α_2} e ϕ_{α_3} são vínculos de segunda classe, uma vez que o parêntese de Poisson entre eles não é, necessariamente, zero.

O formalismo desenvolvido no segundo capítulo nos deu uma distinção natural entre os vínculos de primeira e segunda classe. Os vínculos de primeira classe são responsáveis pelas transformações de gauge da teoria. Isso se deve ao fato deles formarem uma álgebra de Lie fechada com os parênteses de Poisson como operação subjacente. Assim, o resultado (4.74) quebra a álgebra de Lie da teoria, uma vez que a presença da interação eletromagnética não deveria interferir nessa estrutura.

Algumas considerações

Como a última equação difere da encontrada anteriormente, isso significa que a álgebra do problema na presença do campo eletromagnético é diferente da tratada no sistema livre de interação. Assim, a Lagrangiana na presença de um campo eletromagnético descreve outro sistema, que não é o que foi considerado no início da seção. Dessa forma, pode-se inferir que a ação (4.32) descreve um sistema de partículas com spin que não interage com um campo eletromagnético externo. Com isso, esse sistema deve descrever partículas que possuem carga elétrica neutra.

O termo de interação $\frac{e}{c}A\dot{x}$ denota a ação do campo eletromagnético no ponto de coordenada x^μ . A Lagrangiana possui ainda a coordenada de spin, ω^μ . É possível ainda estudar o que acontece quando o campo eletromagnético interage com essa variável de spin. Para tal, o acoplamento com A^μ é dado pelo termo

$$D\omega^\mu \equiv \dot{\omega}^\mu - \lambda \frac{e\mu}{c} F^{\mu\nu} \omega_\nu, \quad (4.75)$$

onde a constante de acoplamento μ é o momento magnético. Estes são os únicos termos encontrados que são compatíveis com as simetrias e vínculos presentes na teoria. No entanto, a introdução de tal termo também altera a estrutura de vínculos do sistema, inviabilizando a descrição da interação da variável de spin com o campo externo.

CAPÍTULO 5

Conclusões e perspectivas

O intuito do trabalho apresentado nestas páginas foi analisar a dinâmica de sistemas descritos por Lagrangianas singulares, através do método de Dirac, e entender a sua relação com a descrição do movimento de partículas com spin e as simetrias envolvidas nesses modelos. Uma vantagem determinante do formalismo canônico é a possibilidade de definir exatamente a interpretação física das variáveis que aparecem nas equações. Além disso, o procedimento variacional garante a consistência das equações de movimento.

Diversos sistemas de interesse por parte da física teórica são descritos por Lagrangianas singulares. O método de Dirac é responsável por fornecer uma descrição Hamiltoniana adequada para esses sistemas, uma vez que eles possuem vínculos e estes devem ser considerados durante todo o processo. A natureza desses vínculos é de suma importância para entendermos as características de cada sistema. A essa natureza estão ligadas, por exemplo, simetrias locais que devem ser respeitadas.

O estudo dessas simetrias foi brevemente analisado em um dos capítulos. A fim de elucidar algumas questões mal interpretadas na literatura, tentou-se demonstrar porque as duas Lagrangianas que fornecem as equações de movimento geodésico, são fundamen-

talmente diferentes. Nós exploramos essa diferença de um ponto de vista geométrico, onde observou-se que essa diferença nada mais é do que uma questão de simetria. Como aplicações, estudamos o modelo da partícula livre relativística e da mecânica de Hertz.

A Mecânica formulada por Hertz foi desenvolvida com base na ideia de que sistemas mecânicos poderiam ser descritos em uma abordagem livre de forças, desde que fossem descritos em um espaço curvo. Dessa maneira, os termos de energia potencial eram englobados no termo cinético da métrica, tornando o movimento semelhante à uma queda livre no espaço curvo. Assim, a mecânica de Hertz é uma descrição geométrica para esses sistemas. Se assemelhando, por exemplo, a teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde a força gravitacional desaparece e as partículas se movem ao longo de geodésicas do espaço-tempo curvo.

Estudamos também sistemas que buscam descrever a dinâmica de uma partícula com spin. No primeiro caso, analisamos o modelo apresentado em [52] e, logo após, procuramos entender como a estrutura desse sistema se comportaria na descrição de partículas de massa zero, como o fóton, por exemplo. Após aplicado o procedimento de Dirac no entanto, observou-se que o sistema de massa zero levava a vínculos de segunda classe, quando colocado para interagir com um campo eletromagnético externo. Isso não acontecia no modelo sem interação. Em outras palavras, a álgebra de vínculos não foi preservada. Dessa forma, com base em tudo que foi descrito nos capítulos 2 e 3, o fato da álgebra de vínculos de primeira classe do modelo sem interação ter sido quebrada quando ligamos a interação eletromagnética, significa que as simetrias locais também foram quebradas. Uma vez que isso acontece e não conseguimos contornar esse fato, o modelo estudado mostrou-se incapaz de descrever a dinâmica de partículas com massa zero.

Também analisamos o modelo proposto por Staruszkiewicz para descrever o movimento da partícula com spin. Em seu trabalho [22], Staruszkiewicz propôs a analogia com um relógio, onde a partícula seria a estrutura total e o spin se comportaria como um dos ponteiros. Baseado na ideia de Wigner de representações irredutíveis para sistemas da mecânica quântica relativística, ele construiu a ação mais geral que pudesse descrever um sistema com posição x e vetor de direção nula ω , como esperado para um “relógio”.

Esse modelo se mostrou complexo devido à estrutura de raízes na ação. A dificuldade

em escrever as equações de movimento independente das velocidades, levou a necessidade de descrever o sistema de uma forma equivalente, cuja validade foi discutida no capítulo 3. Entretanto, novamente obtivemos uma quebra de simetria na álgebra de vínculos do sistema quando interagindo com um campo eletromagnético.

A complexidade de um modelo clássico que descreva uma partícula com spin é verificada pela dificuldade em se encontrar uma ação que mantenha as suas simetrias quando colocada sob interação de um campo eletromagnético. Já a necessidade dessa interação é justificada pelo fato de que, experimentalmente, observa-se o movimento das partículas com spin quando colocadas sobre a ação do campo eletromagnético. Assim como também observa-se sua interação com o campo gravitacional, fato que não foi discutido neste trabalho, mas é descrito em [53].

Sendo o spin uma característica quântica das partículas a meta natural, após a análise de um modelo clássico, seria a sua quantização. No entanto, o fato dos modelos discutidos aqui não serem capazes de interagir com um campo eletromagnético, torna a quantização desses apenas um exercício matemático, uma vez que, como já dito anteriormente, essas partículas deveriam interagir com o campo.

Para explicar o spin, precisamos de um modelo clássico construído de forma sistemática, que descreva de forma relativística os graus de liberdade de rotação. As equações de Bargmann Michel Telegdi (BMT) resolveram o problema da determinação da precessão do spin de uma partícula com momento magnético em um campo homogêneo [54]. Assim, a perspectiva futura naturalmente é descrever o movimento de uma partícula com spin em um campo arbitrário que se reduza às equações BMT no limite apropriado.

APÊNDICE A

O grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é o conjunto de transformações que transforma o quadri-vetor $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$, sob “boosts” e rotações. No grupo de Lorentz existem seis geradores, três dos quais levam a um boost ao longo de um eixo e três levam a rotações em torno de um eixo fixo. As transformações de Lorentz podem ser denotadas por Λ_ν^μ e o quadri-vetor é transformado da seguinte maneira:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu,$$

onde x'^μ é o quadri-vetor no referencial S' como visto no referencial S , onde S' é o referencial que está rotacionado e se move com uma velocidade constante, v , ao longo do eixo em relação a S . Ao contrário da transformação de Galileu, a velocidade, $v \equiv |\vec{v}|$, de S' agora pode estar próxima da velocidade da luz. A transformação de Lorentz para um boost na direção x é dada por

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Onde γ é o fator de Lorentz, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, com $\beta = \frac{v}{c}$. Assim, após o boost, o quadri-vetor fica escrito como

$$\begin{aligned}
 x'^{\mu} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma t - \gamma\beta x \\ -\gamma\beta t + \gamma x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(t - \beta x) \\ \gamma(-\beta t + x) \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \dot{x}'^{\mu} &= \begin{bmatrix} \gamma(1 - \beta\dot{x}) \\ \gamma(-\beta + \dot{x}) \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Com esse resultado, podemos verificar como ação para a partícula livre se comporta sob um boost:

$$\begin{aligned}
 S' &= -m \int \sqrt{-\dot{x}'^{\mu} \dot{x}'_{\mu}} dt = -m \int \sqrt{\gamma^2(1 - \beta\dot{x})^2 - \gamma^2(-\beta + \dot{x})^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{\gamma^2(1 - 2\beta\dot{x} + \beta^2\dot{x}^2 - \beta^2 + 2\beta\dot{x} - \dot{x}^2) - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{(1 - \beta^2)^{-1}(1 - \beta^2)(1 - \dot{x}^2) - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\
 &= -m \int \sqrt{-\dot{x}^{\mu} \dot{x}_{\mu}} dt = S. \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Isso mostra que a ação para a partícula livre é invariante sobre boosts.

Se o referencial S' for girado em relação ao referencial S por um ângulo ϕ em torno de um eixo, o referencial S' foi transformado sob uma rotação.

Para a rotação ao redor do eixo z com um ângulo ϕ (constante, isto é, ϕ não depende do tempo) a transformação de Lorentz é dada por

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

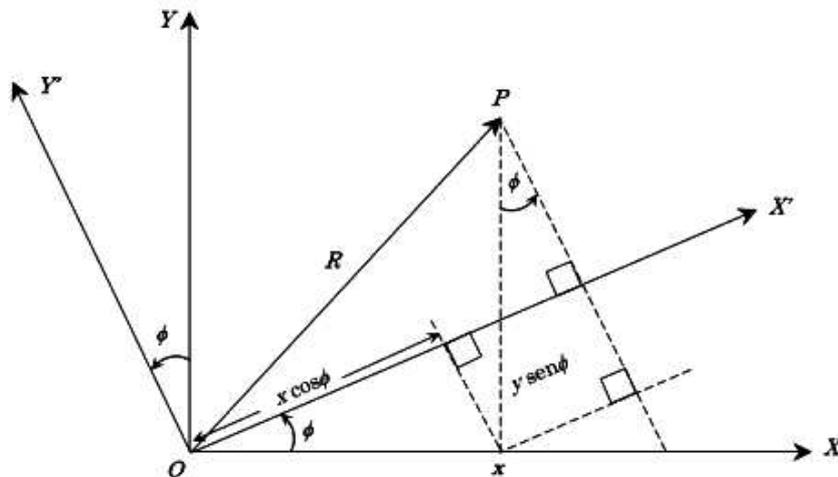


Figura A.1: Rotação sob o eixo z. Figura retirada de [55].

Após a rotação do sistema, o quadri-vetor é dado por

$$\begin{aligned}
 x'^{\mu} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \dot{x}'^{\mu} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{x} \cos \phi - \dot{y} \sin \phi \\ \dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Com esse resultado, podemos verificar como ação para a partícula livre se comporta sob uma rotação

$$\begin{aligned}
S' &= -m \int \sqrt{-\dot{x}'^\mu \dot{x}'_\mu} dt = -m \int \sqrt{1 - (\dot{x} \cos \phi \dot{y} \sin \phi)^2 - (\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi)^2 - \dot{z}^2} dt \\
&= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 \cos^2 \phi + 2\dot{x}\dot{y} \cos \phi \sin \phi - \dot{y}^2 \sin^2 \phi - \dot{x}^2 \sin^2 \phi - 2\dot{x}\dot{y} \cos \phi \sin \phi - \dot{y}^2 \cos^2 \phi - \dot{z}^2} dt \\
&= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \dot{y}^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - \dot{z}^2} dt \\
&= -m \int \sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} dt \\
&= -m \int \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}'_\mu} dt = S.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Isso mostra que a ação para a partícula livre é invariante sob rotações.

APÊNDICE B

Curvatura escalar

A métrica de um espaço qualquer de N dimensões nos dá uma forma quantitativa de como medir distâncias naquele espaço. Para o caso da Mecânica de Hertz, a métrica é dada por

$$g_{AB} = \delta_{ab} dx^a \otimes dx^b + \frac{1}{2U(x^a)} dX \otimes dX, \quad (\text{B.1})$$

que caracteriza um espaço onde a energia potencial é uma grandeza cinética.

Na geometria de Riemann, a curvatura escalar (ou escalar de curvatura) é o invariante de curvatura mais simples de uma variedade Riemanniana. Para cada ponto de uma variedade Riemanniana, ele atribui um único número real determinado pela geometria intrínseca da variedade próxima àquele ponto. Especificamente, a curvatura escalar representa a quantia pela qual a geodésica em uma variedade Riemanniana curva se desvia daquela da linha reta no espaço Euclidiano. Em duas dimensões, a curvatura escalar é duas vezes a curvatura de Gauss e caracteriza completamente a curvatura de uma superfície. Em dimensões superiores ($N > 2$), no entanto, a curvatura das variedades Riemannianas envolve mais de uma quantidade funcionalmente independente.

Na Relatividade Geral, a curvatura escalar é a densidade Lagrangiana para a ação de Einstein-Hilbert. As equações de Euler-Lagrange para esta Lagrangiana sob variações na métrica constituem as equações do campo de vácuo de Einstein, e as métricas estacionárias

são conhecidas como métricas de Einstein. A curvatura escalar é definida como o traço do tensor de Ricci e pode ser caracterizada como um múltiplo da média das curvaturas seccionais em um ponto.

Devido à importância dessa quantidade, vamos realizar o cálculo para o caso simples da curvatura escalar em 2 dimensões usando a métrica de Hertz. Em $2D$, podemos escrever (B.1) como

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2U(x^a)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

cuja inversa é

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2U(x^a) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

O cálculo do escalar de curvatura se dá então da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R = g^{AB} R_{AB} &= g^{11} R_{11} + g^{XX} R_{XX} \\ &= R_{11} + 2U(x^a) R_{XX}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$R_{11} = \Gamma_{1\mu,1}^\mu - \Gamma_{11,\mu}^\mu - \Gamma_{11}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu + \Gamma_{1\nu}^\mu \Gamma_{1\mu}^\nu \quad (\text{B.5})$$

e

$$R_{XX} = \Gamma_{X\mu,X}^\mu - \Gamma_{XX,\mu}^\mu - \Gamma_{XX}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu + \Gamma_{X\nu}^\mu \Gamma_{X\mu}^\nu. \quad (\text{B.6})$$

Abrindo todos os termos e fazendo os devidos cancelamentos, ficamos com

$$\begin{aligned} R_{11} &= \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{1X,1}^X - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{11,X}^X - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^X \Gamma_{X1}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1X}^1 \\ &\quad - \Gamma_{11}^X \Gamma_{XX}^X + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{1X}^1 \Gamma_{11}^X + \Gamma_{11}^X \Gamma_{1X}^1 + \Gamma_{1X}^X \Gamma_{1X}^X \\ &= \Gamma_{1X,1}^X - \Gamma_{11,X}^X - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1X}^1 - \Gamma_{11}^X \Gamma_{XX}^X + \Gamma_{11}^X \Gamma_{1X}^1 + \Gamma_{1X}^X \Gamma_{1X}^X. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

e

$$\begin{aligned} R_{XX} &= \Gamma_{X1,X}^1 + \Gamma_{XX,X}^X - \Gamma_{XX,1}^1 - \Gamma_{XX,X}^X - \Gamma_{XX}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{XX}^1 \Gamma_{1X}^X - \Gamma_{XX}^X \Gamma_{X1}^1 \\ &\quad - \Gamma_{XX}^X \Gamma_{XX}^X + \Gamma_{X1}^1 \Gamma_{X1}^1 + \Gamma_{XX}^1 \Gamma_{X1}^X + \Gamma_{X1}^X \Gamma_{XX}^1 + \Gamma_{XX}^X \Gamma_{XX}^X \\ &= \Gamma_{X1,X}^1 - \Gamma_{XX,1}^1 - \Gamma_{XX}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{XX}^X \Gamma_{X1}^1 + \Gamma_{X1}^1 \Gamma_{X1}^1 + \Gamma_{XX}^1 \Gamma_{X1}^X + \Gamma_{X1}^X \Gamma_{XX}^1 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Com os símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2}g^{CD}(g_{BD,A} + g_{AD,B} - g_{AB,D}), \quad (\text{B.9})$$

com Γ_{AB}^C simétrico em A e B , temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{1X}^X &= U(x^a)\partial_1\left(\frac{1}{2U(x^a)}\right), \\ \Gamma_{1X,1}^X &= \partial_1\Gamma_{1X}^X = \partial_1\left(U(x^a)\partial_1\left(\frac{1}{2U(x^a)}\right)\right), \\ \Gamma_{XX}^1 &= -\frac{1}{2}\partial_1\left(\frac{1}{2U(x^a)}\right), \\ \Gamma_{XX,1}^1 &= \partial_1\Gamma_{XX}^1 = -\frac{1}{2}\partial_1^2\left(\frac{1}{2U(x^a)}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{X1}^1 = \Gamma_{11}^X = \Gamma_{11,X}^X = \Gamma_{X1,X}^1 = 0. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo esses resultados em (B.7) e (B.8), e depois em (B.4), obtemos finalmente

$$R = \partial_1\left[U\partial_1\left(\frac{1}{2U}\right)\right] + U\partial_1^2\left(\frac{1}{2U}\right). \quad (\text{B.12})$$

Esse resultado pode ser generalizado para N dimensões.

APÊNDICE C

Produtos Educacionais

O Wolfram|Alpha, ou simplesmente Wolfram, é um mecanismo computacional de buscas online diferente da maioria dos que se apresentam disponíveis na rede. Ao entrar no ambiente interativo do Wolfram e realizar uma busca qualquer, ele lhe apresentará uma resposta extraída de uma base de dados estruturados diferentemente dos outros mecanismos de busca, os quais apresentam uma lista de páginas da Web ou documentos. Destacando ainda a possibilidade de se consultar as referências utilizadas por ele na obtenção de seus resultados. As buscas são computadas através do mecanismo de reconhecimento computacional, que possui em sua base de dados, respostas para as mais variadas áreas.

A empresa detentora dos seus direitos é a companhia internacional Wolfram Research, centro de pesquisa criado em 1987 pelos irmãos Stephen e Conrad Wolfram. O principal produto do Wolfram Research é o software Mathematica, um sistema de computação avançado amplamente utilizado em Pesquisa e Desenvolvimento nas diversas áreas das ciências exatas. Sua versão 1.0 foi lançada em 1988 e frequentemente atualizado desde então. Atualmente (dezembro de 2019), já se encontra na versão 12. Disponível também para dispositivos móveis na forma de um aplicativo, o Wolfram possui uma interface

diferenciada para celulares e tablets, com recursos especiais para cada plataforma, sem abrir mão das ferramentas do modelo online.

A linguagem utilizada no Wolfram é baseada no Mathematica, porém, o primeiro é capaz de processar informações das mais diversas áreas. Na sua plataforma online estão disponíveis conteúdos de matemática, física, química, engenharia, medicina, astronomia, música, entre muitos outros. Todos os conteúdos dispostos de uma forma clara, simples e intuitiva, de maneira que o estudante tenha a chance de interagir com os recursos mostrados na interface do site sem grandes dificuldades.

Alguns dos cálculos apresentados no decorrer desse trabalho tiveram o auxílio das seções sobre geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, transformações geométricas e curvas e superfícies, desse software. Com isso, foi desenvolvido um trabalho com o intuito de apresentar as potencialidades que esse software possui e a sua aplicação em diversos contextos didáticos [56]. Deve se destacar que o Wolfram é uma ferramenta muito útil para a representação de gráficos e figuras, inclusive em três dimensões, permitindo ao estudante visualizar com facilidade esses objetos e extrair informações importantes a seu respeito, como mostrado na figura (C.1).

Assim como o Wolfram, existem outros softwares com grande potencial pedagógico. O Audacity, por exemplo, é um programa profissional de gravação e edição de áudio com ferramentas que permitem reproduzir, importar/exportar arquivos em diferentes formatos, analisar espectros de frequências, entre outras funcionalidades. Tudo isso em um software livre, disponível gratuitamente para download com versões para Windows, Mac e Linux. Os recursos disponíveis aliados a uma interface de fácil manipulação fazem do Audacity uma tecnologia muito promissora no auxílio dos professores de Física. Principalmente no que diz respeito à demonstração e experimentação dos fenômenos relacionados às ondas sonoras [57].

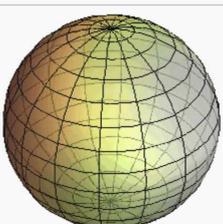
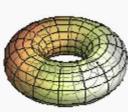


sphere vs torus

Assuming 'sphere' is a mathematical surface | Use as a mathematical solid or a geometric object instead

Input interpretation:
sphere (surface) | **torus** (surface) Open code

Plots:

<p>sphere</p> 	<p>torus</p> <p>$a = \frac{1}{2}, c = 1$</p> 
---	---

Alternate names:
 Torus: **anchor ring** | horn torus | napkin ring | ring | ring torus | spindle torus

Equations:

	sphere	torus
parametric equations	$x(u, v) = a \cos(u) \sin(v)$ $y(u, v) = a \sin(u) \sin(v)$ $z(u, v) = a \cos(v)$	$x(u, v) = \cos(u) (a \cos(v) + c)$ $y(u, v) = \sin(u) (a \cos(v) + c)$ $z(u, v) = a \sin(v)$
Cartesian equation	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2$

Surface properties:

	sphere	torus
algebraic degree	2	4
genus	$g = 0$	$g = 1$
surface area	$S = 4\pi a^2$	$S = 4\pi^2 a c$
squared line element	$ds^2 = a^2 \sin^2(v) du^2 + a^2 dv^2$	$ds^2 = (a \cos(v) + c)^2 du^2 + a^2 dv^2$
area element	$dA = a^2 \sin(v) du dv$	$dA = a c + a \cos(v) du dv$
centroid of solid	$\bar{x} = (0, 0, 0)$	$\bar{x} = (0, 0, 0)$
volume of solid	$V = \frac{4\pi a^3}{3}$	$V = 2\pi^2 a^2 c$
moment of inertia tensor of solid	$I = \begin{pmatrix} \frac{2a^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a^2}{5} \end{pmatrix}$	$I = \begin{pmatrix} \frac{5a^2}{8} + \frac{c^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5a^2}{8} + \frac{c^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3a^2}{4} + c^2 \end{pmatrix}$
Gaussian curvature	$K(u, v) = \frac{1}{a^2}$	$K(u, v) = \frac{\cos(v)}{a(a \cos(v) + c)}$

Distance properties:
 mean line segment length
 sphere $\bar{s} = \frac{4a}{3}$

Metric properties:

	sphere	torus
metric tensor	$g_{uu} = a^2 \sin^2(v)$ $g_{vv} = a^2$	$g_{uu} = (a \cos(v) + c)^2$ $g_{vv} = a^2$
Christoffel symbol of the second kind	$\Gamma^u_{uv} = \cot(v)$ $\Gamma^u_{vu} = \cot(v)$ $\Gamma^v_{uu} = \sin(v) (-\cos(v))$	$\Gamma^u_{uv} = -\frac{a \sin(v)}{a \cos(v) + c}$ $\Gamma^u_{vu} = -\frac{a \sin(v)}{a \cos(v) + c}$ $\Gamma^v_{uu} = \frac{\sin(v) (a \cos(v) + c)}{a}$
coefficients of the first fundamental form	$E(u, v) = a^2 \sin^2(v)$ $F(u, v) = 0$ $G(u, v) = a^2$	$E(u, v) = (a \cos(v) + c)^2$ $F(u, v) = 0$ $G(u, v) = a^2$
coefficients of the second fundamental form	$e(u, v) = a \sin^2(v)$ $f(u, v) = 0$ $g(u, v) = a$	$e(u, v) = -\cos(v) (a \cos(v) + c)$ $f(u, v) = 0$ $g(u, v) = -a$

Vector properties:

	sphere	torus
vector length	$\ x(u, v)\ = a$	$\ x(u, v)\ = \sqrt{a^2 + 2ac \cos(v) + c^2}$
normal vector	$\hat{N}(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v))$	$\hat{N}(u, v) = (-\cos(u) \cos(v), \text{sgn}(\cos(v) a + c), -\cos(v) \text{sgn}(\cos(v) a + c) \sin(u), -\text{sgn}(\cos(v) a + c) \sin(v))$
implicit normal vector	$\hat{N}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$	

Common properties:
algebraic surfaces | closed surfaces | surfaces of revolution

Related entities:

	filled region	cross sections
sphere	ball	circle
torus		circle

	related Wolfram Language symbols	associated people
sphere	Sphere	Euclid Archimedes

Related Queries:
 = closed surfaces = surfaces of revolution
 = algebraic degree of sphere vs torus = Gaussian curvature of sphere vs torus
 = algebraic surfaces

Figura C.1: Informações mostradas pelo Wolfram.

Os diversos softwares disponíveis permitem ao professor contextualizar e simular uma variada gama de fenômenos físicos. Muito se fala sobre inserir computadores nas escolas, utilizar ferramentas tecnológicas no ensino, mas elas precisam vir junto com a preparação do professor para utilizá-las. Vale destacar que a ferramenta utilizada, seja ela uma simulação, um jogo, ou uma ferramenta tecnológica qualquer, precisa que o professor crie condições para que os alunos possam manipular e interpretar as informações recebidas de modo a compreender a situação estudada.

Um dos principais fatores que impedem a utilização das tecnologias nas instituições de ensino, além da presença dos equipamentos e da infraestrutura adequada, é a falta de conhecimento e domínio das ferramentas tecnológicas por parte dos professores. É importante salientar que o intuito principal aqui é a apresentação desses softwares como alternativas pedagógicas e o seu potencial de utilização no ensino básico, superior e também no ensino a distância. Uma vez que a capacidade de tais ferramentas vai muito além das aplicações citadas anteriormente, esses parágrafos são pequenos demais para expô-la.

O ensino de Matemática e Física é tradicionalmente considerado maçante devido à grande quantidade de fórmulas e abstração. No entanto, podemos perceber que esse ensino pode ser encarado com mais naturalidade e de uma forma mais atual utilizando as tecnologias da informação e comunicação disponíveis. A capacidade dessas tecnologias de gerar imagens, gráficos, simulações e todo o seu dinamismo, são potenciais que acreditamos deixar o ensino mais centrado no aluno e nas descobertas e aferições que ele presenciará no decorrer do processo.

Bibliografia

- [1] Deriglazov, Alexei. *Classical mechanics*. Springer International Publishing, (2016).
- [2] Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J., *Classical mechanics*. Prentice Hall, (2002).
- [3] Rothe, H.J., Rothe, K.D. *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*, Singapore: World Scientific Publishing, (2010).
- [4] Dirac, Paul A. M., *Lectures on quantum mechanics*, Vol. 2, Courier Corporation, (2001).
- [5] Weinberg, S., *The quantum theory of fields*, Vol. 1: Foundations. Cambridge University Press, (1995) .
- [6] Jackson, J. David. *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons (2007).
- [7] Weinberg, S., *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, (1972).
- [8] Yang, C. N. and Mills, R. L., *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Physical Review, **96(1)** 191, (1954) .

- [9] Prokhorov, L. V. and Shabanov, S. V. *Hamiltonian mechanics of gauge systems*. Cambridge University Press, (2011).
- [10] Anderson, J. L., and Bergmann, P. G. *Constraints in covariant field theories*. Physical Review, **83(5)**, 1018, (1951).
- [11] Carmeli, Moshe. *Classical fields: general relativity and gauge theory*. World Scientific Publishing Company, (2001).
- [12] Deriglazov, A. A., *On singular Lagrangian underlying the Schrödinger equation*. Physics Letters A 373, (**43**) 3920-3923, (2009).
- [13] Acevedo, O. A., R. R. Cuzinatto, B. M. Pimentel, and P. J. Pompeia. *Teorias de gauge a la Utiyama*. Caderno Brasileiro de Ensino de Física **40**, no. 4, (2018).
- [14] Deriglazov, A. A. and Rizzuti, B.F., *Generalization of the extended Lagrangian formalism on a field theory and applications*. Physical Review D, **83(12)**, 125011, (2011).
- [15] Feynman, R. P. *Quantum theory of gravitation*. Acta Phys. Polon. **24** 697-722, (1963).
- [16] Pauli, W. *Über den Einfluß der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, **31(1)**, 373-385. (1925).
- [17] Pauli, W. *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, **31(1)**, 765-783. (1925).
- [18] Uhlenbeck, G. E. and Goudsmit, S. *Spinning electrons and the structure of spectra*. Nature, **117**, 264, (1926).
- [19] Frenkel, J. *Die elektrodynamik des rotierenden elektrons*, Zeitschrift für Physik, **37(4-5)**, 243-262, (1926).

- [20] Mathisson, M. *Das zitternde Elektron und seine Dynamik*, Acta Physica Polonica, **6**, 218 (1937).
- [21] Hanson A. J., Regge T., *The relativistic spherical top*. Ann. Physics **87**,498-566, (1974).
- [22] Staruszkiewicz, Andrzej, *Fundamental relativistic rotator*, Acta Physica Polonica B, **39**, 109, (2008).
- [23] Ramírez, W. G. and Deriglazov, A. A. *Lagrangian formulation for Mathisson-Papapetrou-Tulczyjew-Dixon equations*. Physical Review D, **92(12)**, 124017, (2015).
- [24] Ramírez, W.G., Deriglazov, A.A. and Pupasov-Maksimov, A.M., *Frenkel electron and a spinning body in a curved background*. Journal of High Energy Physics, **2014(3)**,109, (2014).
- [25] Hertz, Heinrich, *The principles of mechanics presented in a new form*. Courier Corporation, (2003).
- [26] Henneaux M., Teitelboim C. and Zanelli J. *Gauge invariance and degree of freedom count*. Nucl. Phys. B **332**, 169, (1990).
- [27] Bjorken, James D., and Sidney D. Drell. *Relativistic quantum mechanics*. McGraw-Hill, (1965).
- [28] Sundermeyer, K. *Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model*. Springer-Verlag, (1982).
- [29] Gitman, D. and Tyutin, I. V. *Quantization of fields with constraints*. Springer Science and Business Media, (2012).
- [30] Feynman, R. *Feynman lectures on gravitation*. CRC Press, (2018).
- [31] Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, (1994).

- [32] Deriglazov, Alexei A. *From noncommutative sphere to nonrelativistic spin*. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, **6**, 016, (2010).
- [33] Do Carmo, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated* Second Edition. Courier Dover Publications, (2016).
- [34] R. N. Sen, *Causality, Measurement Theory and the Differentiable Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, (2010).
- [35] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, San Diego, (1983).
- [36] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, (2003).
- [37] Notas de Geometria Diferencial Clássica do Prof. Alexei A. Deriglazov. Disponível em: <http://www.ufjf.br/alexeideriglazov/files/2016/11/GeometriaDiferencialStilo17.pdf> Acesso em 17 junho de 2019.
- [38] Rizzuti, B. F., Júnior, G. F. Vasconcelos and Resende, M. A. *To square root the Lagrangian or not: an underlying geometrical analysis on classical and relativistic mechanical models*. arXiv:physics.class-ph/1905.01177 (2019).
- [39] Deriglazov, A. A. *Classical-mechanical models without observable trajectories and the Dirac electron*. Physics Letters A, **377(1-2)**, 13-17, (2012).
- [40] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Elsevier, (2013).
- [41] Brink, L., P. Di Vecchia, and P. Howe. *A Lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles*. Nuclear Physics B **118**, 1-2, 76-94, (1977).

- [42] Bertschinger, E. *Symmetry transformations, the Einstein-Hilbert action and gauge invariance*. Massachusetts Institute of Technology, Department of Physics, (2002).
- [43] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*. University of Toronto Press, (1957).
- [44] Wesson, P. S., *Five-dimensional physics: classical and quantum consequences of Kaluza-Klein cosmology*. World Scientific, (2006).
- [45] L.H. Thomas, *The kinematics of an electron with an axis*. Philos. Mag. J. Sci. 3 S.7, No.13, 1 (1927).
- [46] H.C. Corben, *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles*. Holden-Day, San Francisco, (1968).
- [47] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. MacMillan, New York, (1964).
- [48] Deriglazov, A. A. and Guzmán Ramírez, W. *World-line geometry probed by fast spinning particle*. Modern Physics Letters A, **30**(21), (2015), 1550101.
- [49] Deriglazov, Alexei A., and Andrey M. Pupasov-Maksimov. *Relativistic corrections to the algebra of position variables and spin-orbital interaction*. Physics Letters B **761**, 207-212, (2016).
- [50] Wigner, E., *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of mathematics, 149-204, (1939).
- [51] Ghosh, Subir. *Anyons in an electromagnetic field and the Bargmann-Michel-Telegdi equation*. Phys. Rev. D **51** ,5827-5829, (1995).
- [52] Deriglazov, A. A. *Lagrangian for the Frenkel electron*. Physics Letters B, 736, 278-282, (2014).

- [53] Deriglazov, A. A. and Ramírez, W. G. *Recent progress on the description of relativistic spin: vector model of spinning particle and rotating body with gravimagnetic moment in General Relativity*. Advances in Mathematical Physics, (2017).
- [54] Bargmann, V., Michel, L., and Telegdi, V. L. *Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field*. Physical Review Letters, **2** (10), 435, (1959).
- [55] Dos Santos, E. B.; *Correções em Relatividade Geral advindas de modelos com violação espontânea da simetria de Lorentz por um campo bumblebee*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão. (2016)
- [56] Resende, M. A.; Martins, L. G. *Wolfram|Alpha: um mecanismo de busca no auxílio do processo de ensino-aprendizagem de conteúdos de matemática na educação a distância*. Boletim Online de Educação Matemática, **6**,432-448, (2018).
- [57] Ribeiro, T. G. ; Senra, C. P. ; Resende, M. A. *Utilização do software Audacity como recurso didático no ensino de ondas*. A Física na Escola (Online), **16**,43-50, (2018).