

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Clayton Felício da Silva

Uma análise comparativa do desempenho dos métodos Kernel Smoother e
Monte Carlo aplicados a problemas de confiabilidade estrutural

Juiz de Fora

2022

Clayton Felício da Silva

Uma análise comparativa do desempenho dos métodos Kernel Smoother e Monte Carlo aplicados a problemas de confiabilidade estrutural

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais

Orientador: Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Felicio da Silva, Clayton.

Uma análise comparativa do desempenho dos métodos Kernel Smoother e Monte Carlo aplicados a problemas de confiabilidade estrutural / Clayton Felicio da Silva. – 2022.

73 f. : il.

Orientador: Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Alexandre Abrahão Cury

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2022.

1. Confiabilidade Estrutural. 2. Simulações. 3. Meta-modelagem. I. Barbosa, Flávio de Souza, orient. II. Cury, Alexandre Abrahão, coorient. III. Título.

Clayton Felicio da Silva

Uma análise comparativa do desempenho dos métodos Kernel Smoother e Monte Carlo aplicados a problemas de confiabilidade estrutural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Aprovada em 19 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa - Orientador e Presidente da banca
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. George Oliveira Ainsworth Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. André Jacomel Torii
Universidade Federal da Integração Latino-Americana

Juiz de Fora, 20/07/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Abrahao Cury, Professor(a)**, em 19/08/2022, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **George Oliveira Ainsworth Junior, Professor(a)**, em 19/08/2022, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Jacomel Torii, Usuário Externo**, em 23/08/2022, às 08:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flavio de Souza Barbosa, Professor(a)**, em 23/08/2022, às 09:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0877331** e o código CRC **6403F178**.

Dedico este trabalho à minha mãe Neide Aparecida de Paula Costa (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Clair e Neide (in memoriam), por todos os ensinamentos e cuidados ao longo da minha vida.

Agradeço à Camila por todo o companheirismo ao longo dos anos e, principalmente, por acreditar em mim mesmo nos momentos em que eu duvidei ser capaz. Seu suporte possibilitou essa conquista e possibilita todas as outras.

Agradeço aos meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado com palavras de incentivo.

Agradeço aos meus orientadores, Flávio e Alexandre, por me conduzirem, desde a graduação, nas atividades de monitoria, iniciação científica, trabalho de conclusão de curso e pós graduação, sempre compartilhando conhecimentos valiosos e me estimulando a buscar cada vez mais. Obrigado também pela compreensão, paciência e apoio nos momentos difíceis que passei recentemente.

Agradeço ainda a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora, que proporcionaram todos os conhecimentos que me permitiram realizar a pesquisa que resultou na presente dissertação.

Finalmente, agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, por me proporcionarem a experiência de uma Pós-Graduação de qualidade e pelo fomento financeiro oferecido durante o curso.

RESUMO

Um dos grandes problemas que envolvem o dimensionamento de estruturas diz respeito às incertezas associadas às variáveis aleatórias (VA) implicadas no projeto estrutural. Ainda com considerações assertivas e rigoroso controle de qualidade, as estruturas ser expostas a incertezas oriundas do carregamento e/ou outros fenômenos não previstos. Neste contexto, a confiabilidade estrutural é uma importante ferramenta, pois permite mensurar a segurança através de indicadores como a probabilidade de falha (PF). Dentre as metodologias da confiabilidade estrutural, destacam-se métodos de transformação, como o *First Order Reliability Method* (FORM), e os métodos baseados em simulações, como Monte Carlo (MC), que estima a PF através da simulação das VA envolvidas. Alternativamente, a meta-modelagem, que descreve um modelo complexo por uma função analítica, vem evoluindo neste campo do conhecimento. O *Kernel Smoother* (KS) se mostra um meta-modelo pouco explorado e com potencial para aplicação em análise de estruturas. O presente trabalho visa estabelecer uma comparação entre diferentes métodos, (FORM, MC e KS) avaliando a precisão e os tempos computacionais desses métodos como indicadores de desempenho. Além do MC com contagem simples de cenários, foram empregadas duas técnicas de redução de variância, a saber: *Importance Sampling* (IS) e Hipercubo Latino (LHS), como uma alternativa para aumentar a eficiência do MC. Com a análise proposta, o trabalho conclui que o MC foi o método que demandou menor tempo mas se mostrou ineficaz em problemas com PF de ordem de grandeza relativamente baixa. Conclui-se ainda, que o IS e o LHS se mostraram mais precisos ao aproximar PF pequenas com amostras menores. Esses dois foram, também, os métodos que demandaram os maiores tempos computacionais.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural. Simulações. Modelagem Estatística. Meta-modelagem. Redução de variância.

ABSTRACT

A great problem on the structural design field are the uncertainties associated to random variables (RV) present on the project equations. Also, with assertive considerations and a strict quality control, the structures can be exposed to uncertainties from the load and others unexpected phenomena. In that context, the structural reliability is one important tool to measure safety through indicators, such as probability of failure (PF). Among the structural reliability methodologies, stand out the transformation methods, such as the First Order Reliability Method (FORM) and the simulation-based methods, such as Monte Carlo (MC), that estimate the PF by simulating observations of the involved RV's. Alternatively, the surrogate-models, which describes a complex model by one analytical function, are evolving in this knowledge field. Kernel Smoother (KS) is a meta-model that isn't much explored for structural reliability analysis. This work aims to stablish a comparison between different methods, (FORM, MC and KS) evaluating the precision and computational timing of those methods as performance indicators. Aside from the crude MC, two variance-reduction techniques: Importance Sampling (IS) e Latin Hipercube Sampling (LHS), as a alternative to increase MC efficacy. With the proposed analysis, this work concludes that the MC was the method that demanded less time and computational efforts, however it showed inefficient on problems with relatively low PF magnitude. It presents, yet again, that the IS and the LHS methods showed themselves as being more precisely accurate when approximating lower PF with lower samples, although those were the methods that demanded more computational efforts and time.

Keywords: Structural Reliability. Simulations. Stochastic Modeling. Surrogate Model. Variance Reduction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ciclovía Tim Maia, São Conrado, Rio de Janeiro, RJ Fonte: G1 (2016).	2
Figura 2 – Edifício residencial situado no bairro Maraponga, Fortaleza, CE. Fonte: G1 (2019).	3
Figura 3 – Desabamento de parte da pista na Marginal Tietê, São Paulo, SP. Fonte: G1 (2022).	3
Figura 4 – Linha do tempo esquemática do desenvolvimento de ferramentas computacionais voltadas à confiabilidade estrutural. Fonte: adaptado de Marek et al. [1].	6
Figura 5 – Espaço bidimensional $R \times S$. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].	23
Figura 6 – Espaço bidimensional transformado $R' \times S'$. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].	23
Figura 7 – Espaço $R \times S$ com equação de estado limite não linear. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].	24
Figura 8 – Exemplo de aplicação do FORM em problema com equação de estado limite não linear. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].	25
Figura 9 – Esquema de simulação de Monte Carlo.	27
Figura 10 – Translação imposta pela função de amostragem do IS	30
Figura 11 – LHS aplicado a duas variáveis aleatórias com distribuição normal	33
Figura 12 – Discretização do domínio de $G()$	35
Figura 13 – Diagrama de frequências das observações de $G()$	36
Figura 14 – Aproximação da PDF via <i>Kernel Smoother</i>	36
Figura 15 – Integração da PDF aproximada via <i>Kernel Smoother</i>	36
Figura 16 – PDF da variável x extraído do segundo problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].	37
Figura 17 – PDF da variável y extraído do segundo problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].	38
Figura 18 – Tempo demandado por número de observações, extraído do segundo problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].	39
Figura 19 – (a) Esquema estrutural do mastro. (b) Dispersão (deslocamento x pré-tensão). Extraído do quarto problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].	40
Figura 20 – (a) PDF aproximada pelo KS. (b) PDF aproximada pelo MC. (c) Superposição das curvas do KS e do MC com 500 e 5.000 observações respectivamente. Extraído do quarto problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].	41

Figura 21 – Modelo estrutural de viga bi-engastada.	43
Figura 22 – Diagrama de momento fletor (DMF), para carga unitária.	43
Figura 23 – Evolução da probabilidade de falha na seção A da viga para diferentes números de observações adotados.	46
Figura 24 – Evolução da probabilidade de falha na seção B da viga para diferentes números de observações adotados.	47
Figura 25 – Evolução da probabilidade de falha na seção C da viga para diferentes números de observações adotados.	48
Figura 26 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção A da viga.	50
Figura 27 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção B da viga.	51
Figura 28 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção C da viga.	51
Figura 29 – Esquema estrutural do pórtico bi-engastado.	53
Figura 30 – Seção transversal do perfil adotado para compor o pórtico. Fonte: Adaptado de Seck [4]	53
Figura 31 – Diagramas de momentos fletores para cargas unitárias do pórtico.	54
Figura 32 – Evolução da probabilidade de falha na seção A do pórtico para diferentes números de observações adotados.	56
Figura 33 – Evolução da probabilidade de falha na seção B do pórtico para diferentes números de observações adotados.	56
Figura 34 – Evolução da probabilidade de falha na seção C do pórtico para diferentes números de observações adotados.	57
Figura 35 – Evolução da probabilidade de falha na seção D do pórtico para diferentes números de observações adotados.	58
Figura 36 – Evolução da probabilidade de falha na seção E do pórtico para diferentes números de observações adotados.	58
Figura 37 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção A do pórtico.	62
Figura 38 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção B do pórtico.	62
Figura 39 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção C do pórtico.	63
Figura 40 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção D do pórtico.	63
Figura 41 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção E do pórtico.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Fatores de majoração de solicitações (γ_S) aproximados de acordo com a distribuição da variável e seu coeficiente de variação.	4
Tabela 2	–	Fatores de minoração de resistência (ϕ_R) aproximados de acordo com a distribuição da variável e seu coeficiente de variação.	4
Tabela 3	–	Parâmetros do <i>Kernel Smoother</i>	42
Tabela 4	–	Variáveis aleatórias consideradas no exemplo de viga bi-engastada	44
Tabela 5	–	<i>PFs</i> encontradas na literatura e via FORM	44
Tabela 6	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção A do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	48
Tabela 7	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção B do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	49
Tabela 8	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção C do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	49
Tabela 9	–	CV das <i>PF</i> encontradas, na seção A do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	49
Tabela 10	–	CV das <i>PF</i> encontradas, na seção B do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	49
Tabela 11	–	CV das <i>PF</i> encontradas, na seção C do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.	50
Tabela 12	–	Evolução dos tempos de processamento demandados por cada metodologia em segundos	51
Tabela 13	–	Características geométricas do perfil adotado para o pórtico. Fonte: Adaptado de Seck [4]	54
Tabela 14	–	Parâmetros das variáveis aleatórias consideradas no exemplo do pórtico	55
Tabela 15	–	<i>PFs</i> das seções do pórtico encontradas na literatura e no presente trabalho via FORM	55
Tabela 16	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção A do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	59
Tabela 17	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção B do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	59
Tabela 18	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção C do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	59
Tabela 19	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção D do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	60
Tabela 20	–	Média das <i>PF</i> encontradas, na seção E do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	60

Tabela 21 – CV das <i>PF</i> encontradas, na seção A do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	60
Tabela 22 – CV das <i>PF</i> encontradas, na seção B do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	61
Tabela 23 – CV das <i>PF</i> encontradas, na seção C do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	61
Tabela 24 – CV das <i>PF</i> encontradas, na seção D do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	61
Tabela 25 – CV das <i>PF</i> encontradas, na seção E do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.	61
Tabela 26 – Evolução da média de tempo demandado por cada metodologia em segundos	64
Tabela 27 – Mapa de número de observações por método e probabilidade de falha. Faixa de erro aceitável $\epsilon < 5\%$	67
Tabela 28 – Mapa de número de observações por método e probabilidade de falha. Faixa de erro aceitável $\epsilon < 1\%$	68
Tabela 29 – numero de observações e tempo mínimo necessário para que cada metodologia apresente erros dentro das faixas de erro aceitáveis.	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	8
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1	OBJETIVO	16
3	CÁLCULO DE PROBABILIDADE DE FALHA	18
3.1	MÉTODOS CLÁSSICOS	18
3.1.1	FOSM <i>First-order Second-moment Method</i>	19
3.1.2	AFOSM <i>Advanced First-order Second-moment Method</i> (Hasofer-Lind)	22
3.1.3	FORM <i>First Order Reliability Method</i>	24
3.2	MÉTODOS BASEADOS EM SIMULAÇÕES - simulações de Monte Carlo	25
3.2.1	Amostragem por Impotância	29
3.2.2	Hipercubo Latino	32
3.3	MÉTODOS DE META-MODELAGEM - Kernel Smoother	33
4	APLICAÇÕES	43
4.1	VIGA BI-ENGASTADA	43
4.2	PÓRTICO PLANO DE TRÊS BARRAS BI-ENGASTADO	52
5	ANÁLISES COMPLEMENTARES E CONCLUSÕES	66
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios da engenharia estrutural consiste em lidar com incertezas envolvidas no dimensionamento. Melchers e Beck [5] classificam as incertezas em dois grandes grupos: o primeiro, denominado de "incertezas intrínsecas", ou seja, aquelas oriundas da natureza das variáveis envolvidas. Esse grupo é dividido em duas subclasses, a saber: incerteza física e incerteza epistêmica.

- **Incerteza física.** É aquela oriunda da aleatoriedade natural das variáveis. Grandezas como as características físicas e geométricas dos elementos estruturais e dos carregamentos são sujeitas à aleatoriedade. Esta incerteza pode ser reduzida com a coleta de informações acerca do projeto ou com a intensificação no controle de qualidade dos processos de fabricação dos elementos estruturais. Entretanto, não pode ser eliminada, nem desprezada da análise. Esse tipo de incerteza pode ser modelada por variáveis aleatórias e processos estocásticos.

- **Incerteza epistêmica.** Pode ser dividida em quatro subclasses, a saber: i) incerteza estatística, oriunda da modelagem da aleatoriedade das variáveis ou de suas medições; ii) incerteza de decisão, que surge a partir da definição da fronteira estabelecida através da equação de estado limite e que separa os domínios seguro e de falha de um sistema; iii) incerteza de modelo, que surge das simplificações que se faz ao modelar a estrutura e, por último, iv) incerteza fenomenológica, que representa os fenômenos excepcionais inimagináveis ao projetista como acidentes ou atentados.

Ainda segundo Melchers e Beck [5], há outro tipo de incerteza que provoca grande parte das falhas em sistemas de engenharia, mas que não se enquadra na classificação supracitada. Esta incerteza é denominada de "erro humano". Este fator pode ser reduzido do problema com treinamentos da equipe e controle de qualidade.

Neste contexto, surge, portanto, o estudo da confiabilidade estrutural, área de conhecimento que visa quantificar as incertezas e riscos de cada projeto e, desta forma, servir como ferramenta auxiliar ao projetista na tomada de decisão. No início desse campo do conhecimento, datado da década de 70, suas metodologias se mostraram muito limitadas, visto que forneciam resultados precisos apenas para um rol pequeno de problemas. Casos cujas variáveis envolvidas obedeciam às distribuições probabilísticas distintas, ou aqueles em que as equações que governavam fenômenos estudados apresentavam forte não-linearidade em seus termos aleatórios poderiam levar a resultados imprecisos, o que em nada contribuía para o trabalho dos projetistas.

Entretanto, muitos foram os avanços observados nas últimas décadas na área da confiabilidade estrutural. Com a evolução e popularização dos computadores, diferentes metodologias puderam ser implementadas e testadas, trazendo melhor entendimento a projetistas e a entidades normatizadoras acerca de suas aplicações e do caráter aleatório

presente tanto na solicitação quanto na resistência das estruturas. As normas de dimensionamento também evoluíram, à medida que surgiram acidentes, atentados e desastres naturais. Tais acontecimentos evidenciaram e continuam evidenciando a demanda pelo aprofundamento nesta área do conhecimento.

As estruturas, por sua vez, tornaram-se cada vez mais robustas e resistentes a eventos adversos. Porém, ainda é fácil encontrar exemplos de colapsos estruturais devidos a cenários não previstos pelos projetistas responsáveis. Como exemplo, pode-se citar o caso da ciclovia Tim Maia, ilustrada na Figura 1, na orla da zona sul da cidade do Rio de Janeiro que desabou ao ser atingida por uma onda, resultando em dois óbitos e um ferido em abril de 2016, cerca de três meses após sua inauguração. Um outro exemplo é o caso do edifício situado no bairro de Maraponga em Fortaleza, Ceará, ilustrado na Figura 2. Em junho de 2019, desabou parcialmente um dia após a emissão de um laudo técnico ser emitido atestando a não-constatação de risco estrutural iminente. Ou ainda, mais recentemente, o desabamento na obra da linha 6 (laranja) do metrô ilustrado na Figura 3, situada na Zona Oeste da cidade de São Paulo ocorrido em fevereiro do ano corrente.

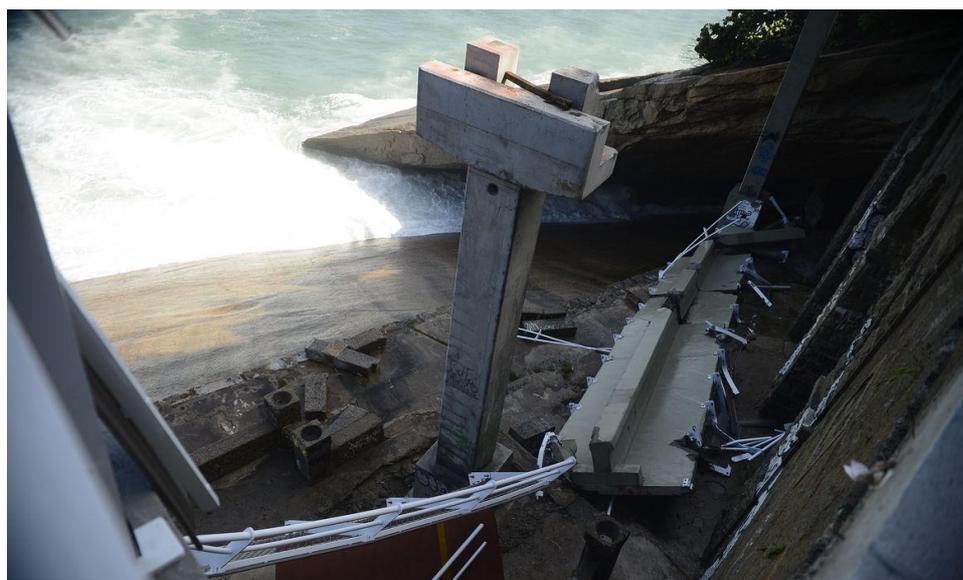


Figura 1 – Ciclovia Tim Maia, São Conrado, Rio de Janeiro, RJ Fonte: G1 (2016).



Figura 2 – Edifício residencial situado no bairro Maraponga, Fortaleza, CE. Fonte: G1 (2019).

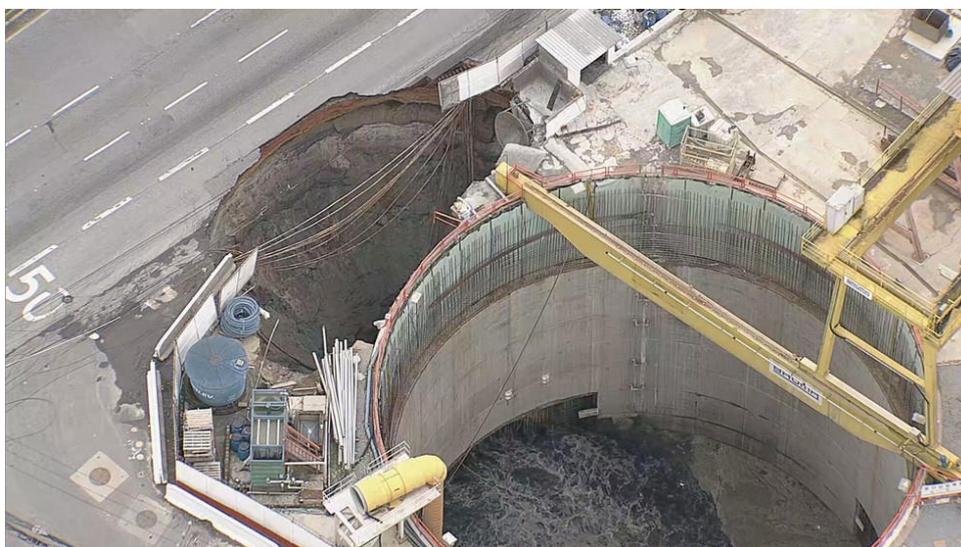


Figura 3 – Desabamento de parte da pista na Marginal Tietê, São Paulo, SP. Fonte: G1 (2022).

A principal forma encontrada pela maioria dos órgãos normatizadores para as diretrizes de projetos foi a abordagem semi-probabilística, na qual as grandezas envolvidas no dimensionamento são consideradas como valores característicos e ponderadas pela

aplicação de coeficientes parciais de segurança. Nesse caso, o dimensionamento ocorre então pela observação do Estado Limite Último (ELU) e os coeficientes parciais são responsáveis por afastar a estrutura do cenário de ruptura. Após dimensionadas, as estruturas são então verificadas quanto ao seu Estado Limite de Serviço (ELS), onde são estabelecidos limites para deslocamentos, fissuração, vibrações, entre outros, de modo a garantir seu correto funcionamento durante a vida útil. Para se definir os coeficientes parciais aplicados em cada etapa do dimensionamento, os engenheiros envolvidos na elaboração e revisões desses códigos levam em conta diversos aspectos que são aprofundados pela confiabilidade estrutural.

De posse da distribuição de uma variável aleatória, é possível determinar os fatores de majoração e minoração para um intervalo de confiança especificado em função do coeficiente de variação (C.V) dessa variável. Esses fatores são adotados pelas normas brasileiras de dimensionamento como coeficientes parciais de segurança e aplicados às grandezas relativas, às solicitações e à resistência dos materiais. Tais coeficientes buscam garantir que o valor atribuído à grandeza no dimensionamento esteja dentro de um intervalo de confiança e que a probabilidade que estes sejam extrapolados seja limitada.

As Tabelas 1 e 2 mostram valores aproximados para γ_S e ϕ_R que são, respectivamente, os fatores de majoração das solicitações e de minoração da resistência do material que garantem um intervalo de confiança de 95% para algumas distribuições com coeficientes de variação entre 0,1 e 0,5%.

Tabela 1 – Fatores de majoração de solicitações (γ_S) aproximados de acordo com a distribuição da variável e seu coeficiente de variação.

C.V.	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Normal	1,1645	1,3290	1,4935	1,6579	1,8224
Lognormal	1,1725	1,3582	1,5524	1,7498	1,9453
Weibull	1,1589	1,3209	1,4914	1,6767	1,8720
Gamma	1,1712	1,3615	1,5892	1,8385	2,0769

Tabela 2 – Fatores de minoração de resistência (ϕ_R) aproximados de acordo com a distribuição da variável e seu coeficiente de variação.

C.V.	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Normal	0,8355	0,6710	0,5065	0,3421	0,1776
Lognormal	0,8445	0,7080	0,5910	0,4927	0,4112
Weibull	0,7899	0,6291	0,4946	0,3853	0,3112
Gamma	0,8403	0,6867	0,5313	0,3994	0,3132

Nas normas brasileiras de dimensionamento, os fatores de majoração de carregamentos não são calculados com base em um intervalo de confiança de 95% mas, podem ser

obtidos de forma similar à empregada na construção da tabela 1 dado o nível de segurança que se deseja garantir. Esses coeficientes são aplicados diretamente às grandezas de solicitação para transformar o esforço interno característico em esforço de dimensionamento, conforme mostrado na equação 1.1:

$$E_{SD} = \gamma_S E_{SK}, \quad (1.1)$$

onde: E_{SD} é o valor majorado de esforço solicitante (que pode fazer referência a momento fletor, esforço normal, etc.) e E_{SK} é o valor característico da variável aleatória do esforço solicitante.

Da mesma forma, os coeficientes de minoração de resistência adotados pelas normas brasileiras de dimensionamento podem ser obtidos, para o nível de segurança adequado definido pela norma, de maneira análoga aos valores listados na Tabela 2. Diferentemente dos coeficientes de majoração de solicitações, esses são aplicados nas normas brasileiras por meio de seu inverso multiplicativo, conforme mostrado na equação 1.2:

$$\gamma_R = \frac{1}{\phi_R}, \quad (1.2)$$

onde: γ_R é o coeficiente de minoração de esforço resistente (que pode fazer referência a momento fletor, esforço normal, etc.) e ϕ_R é o valor que garante o intervalo de confiança superior da variável aleatória do esforço resistente.

A exemplo da majoração de esforços solicitantes, o coeficiente γ_R é aplicado aos esforços resistentes como mostra a equação 1.3, com a diferença que os esforços resistentes são divididos pelo coeficiente.

$$E_{RD} = \frac{E_{RK}}{\gamma_R}, \quad (1.3)$$

onde: E_{RD} é o valor minorado de esforço resistente (que pode fazer referência a momento fletor, esforço normal, etc.) e E_{RK} é o valor característico da variável aleatória do esforço resistente.

Segundo Marek et al. [1], a transição do tratamento puramente determinístico para o semi-probabilístico favoreceu um melhor entendimento acerca da estabilidade estrutural e de outros efeitos de segunda ordem, além de permitir a utilização mais consciente das reservas de resistência no regime plástico e uma melhor representação dos efeitos oriundos das combinações de carregamentos.

Contudo, Marek et al. ([1], [6] e [7]) defendem que, com os recentes avanços da computação e da tecnologia de informação, o dimensionamento de estruturas deve migrar para uma abordagem puramente probabilística baseada na filosofia dos estados limites.

Neste novo conceito, a aleatoriedade intrínseca às variáveis envolvidas é tratada diretamente nas equações normativas de dimensionamento. A Figura 4, adaptada de Marek et al. [1], mostra uma linha do tempo simplificada relacionando a evolução tecnológica aos avanços das normas de dimensionamento.

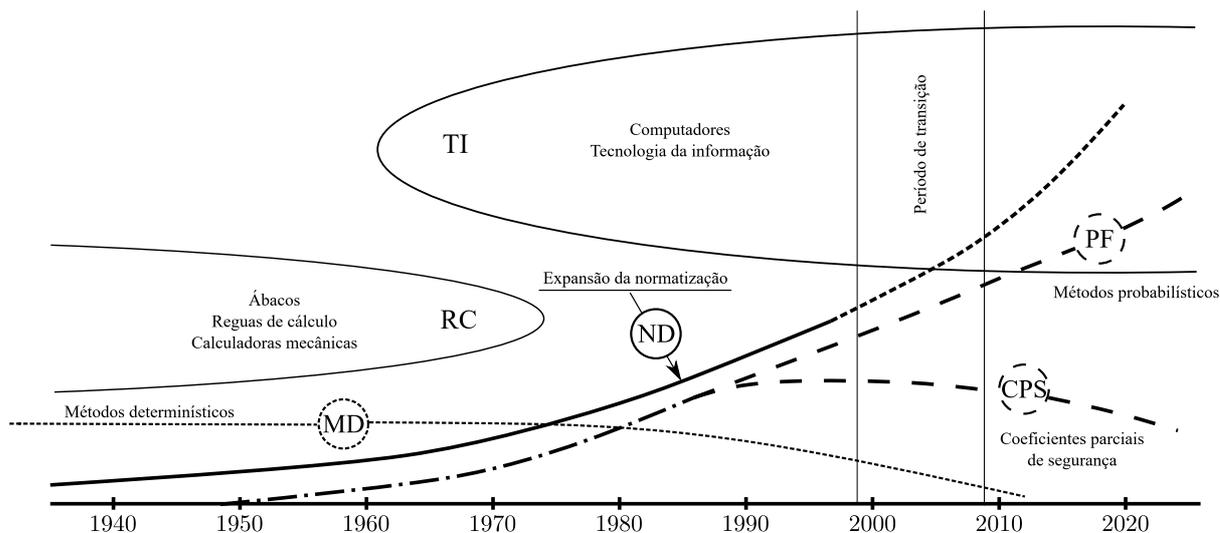


Figura 4 – Linha do tempo esquemática do desenvolvimento de ferramentas computacionais voltadas à confiabilidade estrutural. Fonte: adaptado de Marek et al. [1].

Segundo Marek et al. [1], a área referente à curva RC representa uma era em que os dimensionamentos eram feitos de forma arcaica, valendo-se de ferramentas como régua de cálculo e calculadoras mecânicas.

A era compreendida pela curva TI representa a era da tecnologia da informação, na qual os dimensionamentos são executados com o auxílio de arrojadas ferramentas computacionais.

A curva MD representa como os métodos puramente determinísticos foram abandonados com o fim da era RC. Alinhado a isto, o crescimento das curvas PF e CPS representa a evolução dos métodos probabilísticos e dos semi-probabilísticos movidos pela expansão, representada pela curva ND, dos códigos de dimensionamento. Essas duas últimas metodologias, PF e CPS, andaram alinhadas até o início da década de 90 quando os métodos semi-probabilísticos passaram a ser menos adotados, dando lugar ao tratamento puramente probabilístico.

Ao final da década de 90, o autor previa um período transitório que consolidaria os métodos probabilísticos em relação ao emprego dos coeficientes parciais de segurança.

Entretanto, em 2022, são poucas as normas vigentes que preveem um dimensionamento puramente probabilístico.

O insucesso na previsão do autor pode ser justificado pelo seu próprio alerta, indicando que para uma transição completa seria necessária uma profunda mudança na mentalidade dos engenheiros projetistas, bem como de todos os atores envolvidos na formação de novos engenheiros, o que gera uma resistência considerável aos paradigmas associados ao dimensionamento puramente probabilístico.

O *Joint Committee on Structural Safety* (JCSS) sugere a adoção de um critério de aceitação de risco baseado em confiabilidade estrutural na forma de um requisito mínimo referente ao índice de confiabilidade e, conseqüentemente, um requisito máximo referente à probabilidade de falha. Ademais, sugere que tal critério seja empregado como alvo para que, na otimização das estruturas, o material seja mais empregado em pontos de maior solicitação.

Das e Zhang [8] enumeram as vantagens de se empregar a confiabilidade estrutural como ferramenta aos engenheiros projetistas. São elas: estimativa da confiabilidade e risco de estruturas existentes; desenvolvimento de restrições normativas baseadas em probabilidades e calibração de coeficientes parciais de segurança; execução de análise de cenários de falha; comparação de projetos alternativos; análise de valor econômico das estruturas (custo \times benefício); elaboração de plano ótimo de manutenção para as estruturas e quantificação dos riscos envolvidos na construção de uma estrutura.

O estudo da confiabilidade estrutural vem desenvolvendo valiosas ferramentas na estimativa de risco para tomada de decisão. Suas metodologias consideram de forma mais realista o caráter não determinístico dos problemas de dimensionamento de modo a permitir um melhor entendimento deles. Tais métodos envolvem o cálculo de probabilidade de falha e índices relacionados à robustez da estrutura. Computacionalmente, esses métodos podem ser divididos em duas categorias, a saber: i) métodos de transformação, como os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem; ii) métodos baseados em simulações, como Monte Carlo, que analisam uma quantidade de cenários de dimensionamento suficientemente numerosos, gerados de forma aleatória, para a determinação da probabilidade de falha.

Algumas vantagens no emprego dos métodos baseados em simulações são a facilidade de sua implementação e a fácil adaptação a diferentes análises, além de serem capazes de, com poucas adaptações, lidarem com interseções de eventos, isto é, cenários em que mais de um ponto da estrutura falha simultaneamente. Entretanto, estes métodos demandam uma amostra relativamente grande para garantir suas respectivas convergências, o que pode demandar um alto esforço computacional.

Em face à grande quantidade de análises que são necessárias nos métodos baseados em simulações, estratégias de meta-modelagem, que consistem em descrever um modelo

mais complexo por uma função analítica, vêm sendo usadas com vistas a reduzir o esforço computacional demandado. São os casos das redes neurais artificiais; do método estocástico dos elementos finitos e da krigagem. Essas estratégias são abordadas no trabalho de Kroetz et al. [9], no qual as metodologias foram aplicadas a quatro problemas com as equações de estado limite puramente definidas por funções algébricas previamente determinadas e a outros dois exemplos teóricos de confiabilidade estrutural. Em todos exemplos, as três metodologias se mostraram eficazes para obter parâmetros relacionados ao caráter estocástico do problema desde que respeitadas as exigências quanto ao número de observações. As amostras usadas no trabalho de Kroetz foram geradas a partir da técnica de amostragem hipercubo latino.

Outras formas de se reduzir o tamanho das amostras de métodos baseados em simulações são as chamadas "amostragens inteligentes". Ferramentas como a amostragem adaptativa, a amostragem por importância, simulação direcional, dentre outras, são apresentadas e descritas por Santos [10]. O embasamento teórico, a implementação e as limitações dessas metodologias são apresentados de forma mais detalhada por Melchers e Beck [5].

Visando reduzir o tamanho de amostras para a análises de probabilidade de falha e a aproximação da função de densidade de probabilidades, do inglês *probability density function* (PDF), Ballaben et al. [3] apresentou um novo método que se insere no contexto da meta-modelagem: O Kernel-Smoother (KS). Este método se baseia em uma amostra, semelhante àquela usada pelos métodos baseados em simulações, e em seu respectivo diagrama de frequências para aproximar a PDF do fenômeno em estudo. Os resultados apresentados por Ballaben et al. [3] indicavam que a aplicação do KS a problemas de confiabilidade estrutural poderia levar a bons resultados ao custo de um menor esforço computacional quando comparado aos métodos baseados em simulações, como o Método de Monte Carlo (MC), por exemplo. Diante da escassez de trabalhos que fazem a avaliação do KS em problemas de confiabilidade estrutural, a presente dissertação de mestrado aborda o desempenho alcançado pelo KS quando comparado a métodos baseados em simulações e a métodos de transformação através de modelos estruturais de vigas e de pórticos.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O presente capítulo mostra uma contextualização do problema da confiabilidade estrutural e uma revisão de trabalhos relevantes encontrados na literatura. Esses trabalhos apresentam conceitos importantes, como a filosofia dos estados limites ou o SBRA (do inglês *Simulation Based Reliability Assessment*), entre outros, e alguns mostram diferentes metodologias da confiabilidade estrutural sendo aplicadas a problemas reais ou acadêmicos.

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos relevantes que

servirão de fonte de conhecimento e motivação para o presente texto.

No capítulo 3 é apresentada a equação que resulta na probabilidade de falha de um sistema, e são contextualizados os problemas de sua aplicação direta. Na sequência, as metodologias exploradas no trabalho são classificadas em numéricas, baseadas em simulações e de meta-modelagem. Tais metodologias são descritas e explicitadas, bem como aquelas cujo racional serve de pedra basilar para o entendimento do método FORM (do inglês *First ORder Reliability Analysis*).

No capítulo 4 são apresentados os sistemas estruturais tomados como exemplos numéricos para o teste das metodologias. São explicados os passos para obtenção das amostras e dos parâmetros usados na modelagem dos problemas para cada metodologia. Por fim, são apresentados os resultados obtidos com cada método, os erros proporcionais em relação ao FORM e o tempo computacional utilizado por cada método no cálculo das *PF* dos sistemas.

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões que podem ser extraídas das análises realizadas na presente dissertação.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A probabilidade de falha de um sistema estrutural pode ser resumida como a principal maneira quantitativa de se avaliar a sua confiabilidade. Segundo Hasofer e Lind [11], a utilização dos métodos de quantificação da confiabilidade estrutural data do início da década de 1970.

De fato, em uma busca pela literatura, os primeiros registros de interesse acerca da segurança de estruturas e de confiabilidade estrutural são de 1971, com a criação do *Joint Committee on Structural Safety* (JCSS) que, desde então, realiza duas reuniões por ano, nas quais são discutidos os trabalhos que abordam segurança estrutural e assuntos relacionados.

Pouco tempo depois, em 1974, Hasofer [11] explorou o uso dos momentos de primeira e segunda ordem das variáveis aleatórias de entrada para estimar um índice de confiabilidade que media a distância entre a média das variáveis de entrada e o domínio de falha. A metodologia descrita pelo artigo foi aplicada a um exemplo numérico, em que as variáveis de entrada tinham distribuição lognormal. O artigo conclui que este índice era uma medida consistente (segundo as leis da álgebra e da mecânica) da segurança da estrutura.

Durante a década seguinte, a filosofia dos estados limite ganhou espaço neste campo do conhecimento. O entendimento acerca dos vários aspectos da geometria e das características dos materiais, bem como do carregamento e do comportamento estrutural, motivou avanços e o desenvolvimento dessa filosofia. Por consequência, proporcionou um melhor entendimento acerca dos níveis de segurança das estruturas. Ellinas et al. [12] revisam o estado da arte da filosofia dos estados limite e concluem que essa seria uma valiosa ferramenta para uma melhor adequação das estruturas aos seus propósitos.

Importantes ferramentas da confiabilidade estrutural ganharam relevância na década de 80. Trabalhos científicos começavam a sumarizar e dar mais notoriedade ao MC. Não se pode definir precisamente a sua autoria ou data de criação. Contudo, Hurd [13], Eckhardt [14] e Metropolis [15] compilaram o que vinha sendo desenvolvido nesta metodologia e dão luz a possíveis campos de aplicação na ciência em geral.

Saltando para o início da década de 90, Li. K. S [16] apresentou uma metodologia de estimativa do valor esperado da função de estado limite. A dedução desse trabalho mostra que a metodologia necessita do conhecimento dos momentos de maior ordem, como assimetria e curtose, das variáveis aleatórias envolvidas. O método se mostrou capaz de estimar os momentos da função de estado limite com um número menor de observações se comparado ao método de Rosenblueth, que demanda apenas os momentos de primeira e segunda ordem das variáveis envolvidas, além de ser aplicável a casos em que a equação de estado limite apresenta não-linearidade em suas variáveis ou quando estas

são estatisticamente dependentes. Li. K. S [16] apresentou, ainda, um artifício baseado nas equações do método de Rosenblueth para a estimativa da assimetria e da curtose das variáveis de entrada. Caso estes parâmetros sejam desconhecidos, esta aproximação resulta em um erro na resposta final que cresce proporcionalmente à não-linearidade da equação de estado limite.

Ao final da década de 90, as metodologias baseadas em simulações começaram a ganhar mais espaço na confiabilidade estrutural. Marek et al. [1] indicaram o uso de metodologias baseadas em simulações, do inglês *Simulation Based Reliability Assessment*(SBRA), com lastro na filosofia dos estados limite. Foram abordados três exemplos, a saber:

i) o dimensionamento, no estado limite último, da área nominal de seção transversal de uma viga metálica segundo uma probabilidade de falha limitada pelo tipo de uso da estrutura;

ii) a verificação da segurança, também no estado limite último, de uma viga cuja área de seção transversal foi determinada por métodos semi-probabilísticos;

iii) a verificação, no estado limite de serviço, de uma terceira viga metálica. O SBRA foi aplicado à estimativa de índices relacionados à confiabilidade dos exemplos e para o dimensionamento destes sistemas. O trabalho conclui apontando os desafios inerentes à implementação de metodologias puramente probabilísticas nos códigos normativos.

Ainda dentro das metodologias baseadas em simulações, Kerjsa et al. [17] aplicaram o conceito de SBRA na verificação da segurança de uma barra de treliça cuja configuração geométrica e as combinações de carregamento permitem que a barra verificada seja solicitada tanto à tração quanto à compressão. São verificados dois perfis metálicos de diferentes áreas nominais de seção transversal. Quando trabalhando sob tração, a barra é verificada segundo à sua resistência última; quando trabalhando sob compressão, a barra é verificada segundo à sua estabilidade. O trabalho conclui que, segundo as prescrições normativas impostas pelo *Czech Standards Institute* (CSN) [18] apud Krejsa et al. [17], quanto à probabilidade de falha limite, o perfil mais robusto atende às especificações, enquanto que o perfil mais leve obteve probabilidade de falha maior que o limite normativo.

Marek et al. [7] mostraram como as incertezas devem ser modeladas por histogramas gerados por históricos de dados. O SBRA é comparado, a partir de um exemplo de pórtico plano, à metodologia semi-probabilística, preconizada por CSN [18] apud Marek et al. [7] e à metodologia puramente determinística, a partir de diferentes combinações de carga aplicadas ao pórtico. A comparação se dá pelo dimensionamento da área nominal da seção transversal dos elementos do pórtico para cada uma das combinações de carregamento pelas três metodologias. Na sequência, todas as seções dimensionadas pelo método semi-probabilístico foram verificadas quanto à probabilidade de falha, concluindo que esta cresce proporcionalmente em relação ao número de carregamentos considerados na análise.

McKay et al. [19] compararam três metodologias baseadas em simulações, a saber: amostragem aleatória simples, amostragem aleatória estratificada e hipercubo latino, para estimar os momentos de primeira e segunda ordens do fenômeno de despressurização de tubulações em função do tempo, bem como a aproximação da distribuição probabilística do mesmo fenômeno. Todas as variáveis estocásticas envolvidas na equação de estado limite foram consideradas uniformemente distribuídas. O trabalho se baseou na média e na variância da resposta de um software que resolve o problema deterministicamente diversas vezes com parâmetros aleatórios, apontando que o hipercubo latino se mostrou mais preciso que as outras metodologias.

Vukazich et al. [20] aplicaram o SBRA em três exemplos. O primeiro tratou de dimensionar uma viga metálica quanto à segurança e, posteriormente, verificar a viga dimensionada quanto à flecha máxima admitida. O segundo exemplo é o mesmo da barra de treliça tratado por Krejsa et al. [17]. O último exemplo tratou de dimensionar um tanque de reservatório suspenso e verificar a estrutura de sustentação quanto à amplitude máxima de deslocamento durante um terremoto. O trabalho concluiu que o método é eficaz em todos exemplos adotados para representar a estocasticidade das variáveis envolvidas no dimensionamento.

Dentre os trabalhos mais atuais no tema da confiabilidade estrutural, vale citar o trabalho de Mat Soom et al. [21] que analisaram a viabilidade da extensão de tempo de vida útil de uma plataforma de petróleo localizada na Malásia. A análise visou identificar a resistência remanescente da estrutura frente às solicitações geradas pelas ondas para diferentes períodos de retorno. A metodologia aplicada fornece a probabilidade de falha analítica a partir da convolução entre resistência e solicitação. O trabalho conclui atestando a segurança da extensão do tempo de operação da plataforma por vinte e cinco anos.

O trabalho de MatSoom et al. [21] lança luz a um campo com forte pesquisa na confiabilidade estrutural: estruturas *offshore* de extração de petróleo. Novas metodologias são criadas, adaptadas e testadas acerca de sua capacidade de inferir sobre a confiabilidade de estruturas existentes.

Dentre estas diversas metodologias, uma alternativa que se mostra capaz de estimar índices relativos à confiabilidade de estruturas, não restrito às estruturas *offshore*, são os meta-modelos que, em linhas gerais, buscam descrever o comportamento de algum fenômeno através de alguma função analítica. O tema meta-modelos é melhor definido e explicado na seção 3.3 do presente trabalho. Os parágrafos seguintes citam alguns trabalhos que exploraram o uso de meta-modelos empregados para inferir sobre a confiabilidade de problemas estruturais.

Mohd et al. [22] explorou o caráter aleatório do carregamento oriundo de ondas numa plataforma *offshore*. Visando descrever o comportamento aleatório do fenômeno, os autores aplicaram uma técnica denominada *Finite-Memory Nonlinear System* (FMNS)

e uma versão modificada desta técnica (MFMNS). Para validar o modelo, os resultados, obtidos com as metodologias, foram comparados àqueles obtidos via MC por meio de suas características probabilísticas. Ambos os métodos apresentaram uma boa aproximação. O MFMNS apresentou melhor acurácia quando comparado ao FMNS, embora tenha demandado um maior esforço computacional.

Uma implementação melhorada do MFMNS, o *e*MFMNS, foi testada e comparada à sua versão original e ao MC por Mukhlas et al. [23]. O autor aplicou as metodologias no cálculo da resposta linear total da estrutura de uma plataforma de extração de petróleo. Foram considerados como componentes o arrasto e a inércia induzidos pelo impacto de ondas. Foram ensaiados três diferentes níveis de elevação da superfície do mar e as respostas foram comparadas em termos da PDF obtida. O *e*MFMNS obteve melhores resultados em todos os testes realizados quando comparado ao MFMNS.

Posteriormente, Mukhlas et al. [24] testou novamente o MFMNS no cálculo da resposta total não linear do problema explorado em [23]. O trabalho conclui que o MFMNS se mostrou uma alternativa eficiente e eficaz ao MC na aproximação da resposta estocástica não linear da estrutura testada.

Entre outros trabalhos, muitos são aqueles que testam as metodologias no campo da exploração de óleo e gás. Algumas metodologias como o FMNS e suas variações já se encontram amplamente explorados. Syed et al. [25] compilam as metodologias difundidas neste campo da engenharia enumerando pontos fortes e fracos de cada uma.

Fora do âmbito da exploração de óleo e gás, a meta-modelagem também encontra aplicação na confiabilidade estrutural, mas com menor frequência.

Li. H [26] implementou duas redes de inteligência artificial para obter a probabilidade de falha de sistemas estruturais. A primeira treinada com as variáveis de entrada transformadas e tendo como alvo a probabilidade de falha calculada via FORM. A segunda treinada com as mesmas variáveis de entrada e tendo como alvo as probabilidades de falha via Monte Carlo. Foram tratados três exemplos: dois puramente numéricos e uma viga contínua com quatro apoios. O trabalho concluiu que as redes obtiveram desempenho razoável na análise de confiabilidade dos exemplos explorados.

Ballaben et al. [3] aplicou o *Kernel Smoother*, que se baseia em amostras reduzidas, porém similares àquelas analisadas pelos métodos baseados em simulações, para aproximar a função de densidade de probabilidade de quatro exemplos distintos. O trabalho de Ballaben et al. [3] mostra que o KS aproxima a PDF de saída dos problemas mais rapidamente que quando tratados com o MC inclusive com aplicação de cadeias de Markov. Além disso, Ballaben et al. [3] mostra que o KS apresenta superioridade quando considerado o tempo de processamento, sendo demandados aproximadamente 1/12 vezes aquele empregado pelo MC. Uma terceira conclusão apresentada consiste no fato de o KS demandar um número inferior de observações para aproximar razoavelmente a PDF dos problemas abordados.

Os resultados desse trabalho motivaram o presente estudo, pois mostraram uma metodologia promissora na modelagem dos processos probabilísticos com aplicação na confiabilidade estrutural. Os resultados preliminares dessa análise foram apresentados no CILAMCE 2020 por Silva et al. [27].

Além de Ballaben et al. [3], Miladinovic [28], Li. H [26], outros autores também exploraram meta-modelos para aproximar probabilidades e/ou índices relacionados à confiabilidade de sistemas estruturais, sempre obtendo resultados satisfatórios.

Num contexto nacional, também foram publicados diversos artigos científicos no tema da confiabilidade estrutural. Muitos autores têm aplicado a probabilidade de falha como heurística em problemas de otimização. Dentre os autores reconhecidos nacionalmente, pode-se citar alguns trabalhos como:

Mantovani et al. [29] usaram a PF como heurística no problema de otimização de TMD's (do inglês, *Tuned Mass Damper*, ou Amortecedores de Massa Sintonizados), amortecidos por atrito, em um edifício sujeito à excitação sísmica. Foram consideradas como variáveis aleatórias da estrutura as características físicas do aço (módulo de elasticidade e massa específica), a massa adicional por pavimento (referente às lajes e à ocupação da estrutura), o coeficiente de amortecimento dos dois primeiros modos de vibração, todos com distribuição de probabilidades Gamma. Quanto à excitação, a frequência natural e o coeficiente de amortecimento foram considerados como variáveis aleatórias normalmente distribuídas e a aceleração de pico com distribuição lognormal. O autor considerou três diferentes arranjos de TMD's no edifício, com 1, 2 e 5 TMD's instalados. As variáveis aleatórias relativas aos TMD's foram a massa dos atenuadores, a rigidez das molas e a força máxima de atrito. O valor esperado para essas duas últimas foi o objetivo da otimização. Foi definido um conjunto de valores para cada arranjo estudado. A redução da probabilidade de falha do sistema com controle de vibrações foi maior que 99% para todos os cenários testados. Foi mostrado ainda um gráfico com os desvios-padrões em termos de deslocamento máximo, por pavimento, em cada cenário. O cenário com 5 TMD's apresentou uma redução máxima de aproximadamente 30% no desvio-padrão do deslocamento.

Torii et al. [30] propôs uma metodologia chamada SAP2nd, que considera os termos de segunda ordem da PF em série de Taylor para solucionar problemas de otimização de estruturas baseada em risco e confiabilidade. A PF foi inserida explicitamente no termo relativo às variáveis aleatórias da função custo. Foi usada a sensibilidade da PF , traduzido como a derivada parcial da PF em relação a seus parâmetros, para minimizar o termo determinístico da função custo. Os sistemas otimizados foram submetidos a simulações de MC simples e a eficiência do método proposto foi medida como a diferença relativa entre as PF obtidas via MC e por expansão em polinômios de caos da equação de estado limite. Foram resolvidos exemplos com elevado grau de não linearidade. O trabalho conclui que a

melhoria proposta conferiu robustez ao método, possibilitando convergência para casos em que esta não ocorria quando estes termos eram suprimidos. O método apresentou, ainda, uma redução da ordem de 50 a 1.000% do esforço computacional demandado em relação ao método proposto por Torii et al. [31].

Posteriormente, Torii [32] explorou a acurácia de métodos baseados em simulações na estimativa da sensibilidade da probabilidade de falha. Primeiramente, é deduzida uma forma fraca de aproximação da derivada. A segunda abordagem, denominada abordagem direta, aproxima as derivadas por um esquema de diferenças finitas. Por fim, a terceira abordagem é denominada *Common Random Variable Approach* (CRV). O autor deduz o cálculo do coeficiente de variação e da raiz do erro quadrático para todas as abordagens testadas. Estas grandezas são usadas para comparar as metodologias e avaliar suas acurácias em aproximar a sensibilidade da *PF*.

Outro trabalho que compara metodologias empregadas para a obtenção de índices relacionados à confiabilidade estrutural é o de Torii e Novotny [33], no qual foi aplicado o *Score Function Method* para comparar os erros obtidos em dois exemplos, nos quais os termos determinísticos da equação influenciam apenas na distribuição das variáveis aleatórias.

Partindo para um âmbito local, no Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora (PEC-UFJF), este é o segundo trabalho que aborda o tema da confiabilidade estrutural. Orlandi [34], autor da primeira dissertação do PEC sobre o tema, apresentou uma metodologia de avaliação da vulnerabilidade e da robustez de estruturas. O trabalho é baseado em simulações numéricas e contagem de cenários, usando MC, e visa propor uma alteração no processo de mapeamento da árvore de falha de uma estrutura para a obtenção de índices relacionado à robustez estrutural probabilísticos. Esses índices se valem das probabilidades de falha dos diferentes modos de falha de uma estrutura para quantificar sua confiabilidade quanto a colapso progressivo. O autor abordou dois problemas teóricos, sugerindo uma alteração no fluxograma do referido processo, de modo a garantir que cenários que não levariam a estrutura a um nível superior da árvore de falha fossem desprezados no nível em análise. Desta maneira, a análise se torna mais verossímil, uma vez que a existência e a contagem de tais cenários introduzem erros às análises dos níveis superiores. Outra vantagem da proposta de Orlandi [34] reside no fato de que as simulações seriam realizadas apenas no início da análise, economizando esforço computacional na geração de novas amostras em cada nível da árvore.

Face ao exposto, fica claro que o estudo da confiabilidade estrutural vem desenvolvendo valiosas ferramentas na estimativa de risco para tomada de decisão. Suas metodologias consideram de forma mais realista o caráter não-determinístico dos problemas de dimensionamento de modo a permitir um melhor entendimento acerca das incertezas.

Também é possível notar a importância da probabilidade de falha como um indicador

quantitativo da confiabilidade de uma estrutura e como um parâmetro para a obtenção de outros indicadores.

Conforme mostrado ao longo desta revisão bibliográfica, muitas das metodologias já se encontram amplamente exploradas, tendo sido abordadas por diferentes autores em diversos trabalhos. Neste contexto, definem-se, a seguir, os objetivos do presente trabalho.

2.1 OBJETIVO

Objetivo geral:

- Comparar o desempenho do método Kernel Smoother aos de técnicas consagradas, como o FORM e Monte Carlo, para a avaliação de Probabilidades de Falhas em estruturas, observando a exatidão das PFs calculadas e os tempos de processamentos necessários para os seus respectivos cálculos.

Objetivos específicos:

- Fornecer um diagnóstico preciso sobre o desempenho do KS e dos demais métodos analisados, fornecendo indicações quantitativas e qualitativas que evidenciam os métodos que fornecem os melhores e os piores resultados para avaliação da PF;

- Descrever o funcionamento do KS em problemas associados a confiabilidade estrutural;

- Indicar possíveis adaptações que podem melhorar o desempenho dos métodos avaliados.

Para se alcançar os objetivos propostos, foi realizado um estudo comparativo entre os resultados obtidos para os valores de probabilidade de falha alcançados através do método de MC, com contagem de cenários por sorteio simples das variáveis aleatórias conforme suas respectivas distribuições, e com duas técnicas de redução de variância, LHS e IS, além do método de meta-modelagem, *Kernel Smoother*.

Em conjunto com as precisões dos resultados, são também analisados o número de observações necessários para que cada metodologia atinja tal precisão e os tempos computacionais necessários para os cálculos. Para tanto, foram modelados dois exemplos numéricos extraídos da literatura como base de comparações.

Os exemplos foram tratados anteriormente por Kagho-Gouadijo [35], Seck [4] e, no âmbito do PEC-UFJF, por Orlandi [34]. Parte desse último trabalho foi publicada por Orlandi et al. [36] no XLI CILAMCE 2020.

Outro método abordado no presente trabalho foi o FORM que, para os exemplos numéricos aqui explorados, fornece resultados analíticos. Além de servir como diretriz das *PF*, o FORM, ao obter a *PF*, calcula iterativamente o Índice de confiabilidade β e as coordenadas do ponto de projeto, ponto onde o domínio de falha do problema mais se

aproxima da origem das variáveis aleatórias envolvidas. Tais parâmetros são empregados para melhorar a precisão da amostragem por importância.

3 CÁLCULO DE PROBABILIDADE DE FALHA

Analicamente, a probabilidade de falha de um sistema é calculada pela integral mostrada na Eq.3.1:

$$PF = \int_{\Omega} I(\mathbf{X}) f_X(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.1)$$

onde:

\mathbf{X} é o vetor de variáveis aleatórias implicadas no problema,

$f_X(\mathbf{X})$ é a função conjunta de densidade de probabilidades e

$I(\mathbf{X})$ é a função indicadora do domínio de falha mostrada na Eq.3.2:

$$I(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{se } G_X(\mathbf{X}) \leq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde:

$G_X(\mathbf{X})$ é a função de estado limite.

Apesar da aparente facilidade em calcular a PF pela Eq.3.1 o integrando geralmente não é conhecido, seja pela dificuldade em se determinar o domínio de falha ($I(\mathbf{X})$) ou pela dificuldade em conhecer a função de densidade probabilística ($f_X(\mathbf{X})$). Das e Zhang [8] citam outros dois fatores que podem tornar o cálculo da probabilidade de falha da maioria dos problemas reais inexequível: a falta de informações sobre as componentes de (\mathbf{X}) e a complexidade associada às correlações entre as componentes de (\mathbf{X}) e pelas operações estabelecidas por $G_X(\mathbf{X})$.

Das e Zhang [8] ainda apontam estes dois motivos como os principais impulsionadores do desenvolvimento e aperfeiçoamento dos métodos de transformação. Tais métodos buscam alternativas para estimar o conteúdo de probabilidade sobre o domínio de falha, baseando-se no conceito do índice de confiabilidade (β - este índice será melhor descrito e contextualizado na próxima seção) e na expansão em série de Taylor da função de estado limite ($G_X(\mathbf{X})$), contornando os problemas relacionados à integral proposta pela Eq.3.1.

3.1 MÉTODOS CLÁSSICOS

Os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem (FORM e SORM respectivamente) são os nomes dados às metodologias que valem-se da expansão de $G_X(\mathbf{X})$ em série de Taylor para a obtenção da probabilidade de falha, do índice de confiabilidade

β e das coordenadas do ponto de projeto. Nas seções 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 serão explicitados os passos para obtenção da probabilidade de falha segundo o *Mean-value First-order Second-moment Method* (MVFOSM), o *Advanced First-order Second-moment Method* (AFOSM Hasofer-Lind) e, por fim, o FORM, respectivamente.

As deduções do MVFOSM e do AFOSM foram inseridas no presente texto pois embasam o FORM, além de contextualizar o significado do índice de confiabilidade (β), bem como estabelecem a relação geométrica entre β e as coordenadas do ponto de projeto.

3.1.1 FOSM *First-order Second-moment Method*

Tomando-se uma notação mais generalista da função de estado limite na forma mostrada na Eq.3.3:

$$G_X(\mathbf{X}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.3)$$

e expandindo-se $G_X(\mathbf{X})$ em série de Taylor até o termo de primeira ordem em torno do ponto médio, $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ chega-se na linearização da função de estado limite mostrada na Eq.3.4.

$$G_X(\mathbf{X}) \approx g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \left(\frac{\partial G_X(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}}. \quad (3.4)$$

Desta forma, o primeiro momento (μ_G) de $G_X(\mathbf{X})$ pode ser calculado conforme a Eq.3.5:

$$\mu_G \approx g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (3.5)$$

e o segundo (σ_G^2), conforme a Eq.3.6:

$$\sigma_G^2 \approx \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial G_X(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial G_X(\mathbf{X})}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \quad (3.6)$$

onde:

σ_{x_i} e σ_{x_j} são os desvios padrão de x_i e x_j respectivamente e

$\rho_{x_i x_j}$ é a matriz formada pelos coeficientes de correlação entre x_i e x_j que, para variáveis aleatórias estatisticamente independentes, torna-se δ_{ij} , conforme mostrado na Eq.3.7:

$$\rho_{x_i x_j} \rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.7)$$

O valor o primeiro momento mostrado na Eq.3.5 permanece inalterado. Porém, a Eq.3.6 se simplifica sensivelmente assumindo a forma mostrada na Eq.3.8:

$$\sigma_G^2 \approx \sum_i \left(\frac{\partial G_X(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right)^2 \Big|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \sigma_{x_i}^2. \quad (3.8)$$

Como a dedução não fez limitações quanto às distribuições das variáveis aleatórias componentes de \mathbf{X} , pode-se aplicá-la à equação de estado limite do problema fundamental da confiabilidade estrutural, cuja lei de formação é mostrada pela Eq.3.9:

$$G_X(\mathbf{X}) = Z(R, S) = R - S, \quad (3.9)$$

onde:

R é a variável aleatória de resistência com média e desvio padrão (μ_R, σ_R) ,

S é a variável aleatória de solitação com média e desvio padrão (μ_S, σ_S) e

Z é a variável aleatória da função de estado limite com média e desvio padrão (μ_Z, σ_Z) .

Restringindo, então, R e S às variáveis aleatórias com distribuição normal, assumindo que são estatisticamente independentes e aproveitando-se do fato de Z ser linear em ambas as variáveis aleatórias, pode-se calcular o índice de confiabilidade (β) como mostra a Eq.3.10:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \quad (3.10)$$

Novamente, tirando proveito da restrição imposta às distribuições de R e S , a probabilidade de falha pode ser obtida pela função de probabilidade acumulada (CDF) da distribuição normal padrão como mostra a Eq.3.11:

$$PF = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta), \quad (3.11)$$

onde:

Φ é a CDF da distribuição normal padrão com $(\mu, \sigma) = (0, 1)$.

Este método, denominado no inglês por *First Order Second Moment Method* (FOSM), ou ainda, *Mean-Value First Order Second Moment Method* (MVFOSM) aproxima a função de estado limite pelo termo de primeira ordem da expansão em série de Taylor tendo como ponto central da linearização as médias das variáveis aleatórias envolvidas.

As restrições quanto às distribuições somadas à linearidade imposta por Z em R e S trazem um último benefício à PF obtida com essa metodologia, levando-a a ser classificada como analítica.

Caso as variáveis R e S tenham distribuição lognormal e Z seja um produto das componentes R e S , essas últimas podem, com poucas operações algébricas, ser transformadas em variáveis normais equivalentes e Z continuará linear. Portanto, o raciocínio pode ser facilmente adaptado e a PF obtida também será analítica.

O raciocínio pode, ainda, ser expandido para problemas com múltiplas variáveis aleatórias, mantendo-se as restrições impostas quanto ao tipo de distribuição, à matriz de correlação entre as variáveis e à linearidade da equação de estado limite.

Para contornar o problema da correlação entre as variáveis e tornar o método mais robusto na solução de problemas reais, são empregadas técnicas da Álgebra Linear, como a decomposição ortogonal ou fatoração de Cholesky na matriz de correlação entre as componentes de \mathbf{X} que, para o problema fundamental da confiabilidade, é a matriz ρ_{RS} .

Com o objetivo de conferir ainda mais robustez ao método, outro artifício corriqueiramente empregado previamente às variáveis implicadas, diz respeito às suas respectivas distribuições. Neste contexto, vale citar a transformação de *Rosenblatt*, o princípio da aproximação normal e a transformação baseada no modelo de Nataf, que serão brevemente relatados nos próximos parágrafos.

A transformação de Rosenblatt se baseia nas distribuições de probabilidades condicionais do espaço de variáveis aleatórias \mathbb{X} , com função conjunta de probabilidade qualquer para mapear, ponto a ponto, no espaço das variáveis aleatórias \mathbb{Y} , com função de distribuição Gaussiana padrão multi-variada, de tal forma que um ponto $y_0 \in \mathbb{Y}$ preserve o conteúdo de probabilidade correspondente ao ponto $x_0 \in \mathbb{X}$. A dedução do método pode ser vista em detalhes no trabalho de Melchers e Beck [5]. Contudo, os autores afirmam que a solução das integrais, resultantes da busca pelas funções de distribuições condicionais no espaço original, podem se tornar não triviais conforme a dimensão de \mathbf{X} , ressaltando que devido a esta limitação, a transformação tem importância mais teórica que prática.

Melchers e Beck [5] introduzem a transformação composta que utiliza o modelo de Nataf como mais adequada às informações disponíveis nos problemas reais de confiabilidade. Seu nome é devido ao fato de a transformação envolver três passos distintos, a saber:

mapeamento das componentes de \mathbf{X} no espaço \mathbb{Z} , espaço das variáveis aleatórias, com distribuição normal padrão, equivalentes e potencialmente correlacionadas; determinação dos coeficientes de correlação equivalentes entre as variáveis em \mathbb{Z} e, por fim, eliminação da correlação segundo um dos métodos supracitados direcionados a tal finalidade.

Outra ferramenta que amplia o leque de problemas potencialmente solucionáveis pelo FOSM é o princípio da aproximação normal, que consiste em aproximar uma distribuição de probabilidades qualquer, em um dado ponto x_i^* , por meio de uma distribuição normal equivalente. Como a distribuição normal possui dois parâmetros, são necessárias duas equações para a determinação destes: a primeira, referente à CDF e a segunda, é arbitrária, mas comumente se adota equação referente à PDF das distribuições. Ao atender às duas equações, garante-se que o conteúdo de probabilidades da função de distribuição marginal original seja preservado na função de distribuição marginal normal equivalente. O princípio foi introduzido na literatura por Ditlevsen em 1981 e Der Kiureghian e Liu em 1986. Haldar e Mahadevan [2] apontam ainda outros três métodos que podem endereçar essa transformação, São eles: o método de Rackwitz-Fiessler; o método de Chen-Lind e o método de Wu-Wirsching.

O item 3.1.2 apresenta uma metodologia que pode ser interpretada como uma expansão do raciocínio até aqui explicitado.

3.1.2 AFOSM *Advanced First-order Second-moment Method* (Hasofer-Lind)

Com o objetivo de dar ao índice de confiabilidade uma interpretação geométrica, Hasofer e Lind [11] propuseram a aplicação de uma transformação das variáveis componentes de \mathbf{X} envolvidas no problema para as variáveis \mathbf{X}' como mostrado na Eq.3.12.

$$x'_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}. \quad (3.12)$$

Recorrendo-se ao exemplo bidimensional, $Z(R, S)$, sendo R e S variáveis aleatórias de distribuição normal e estatisticamente independentes e, ainda, Z linear em R e S , pode-se representar geometricamente o espaço formado por R e S como na Figura 5.

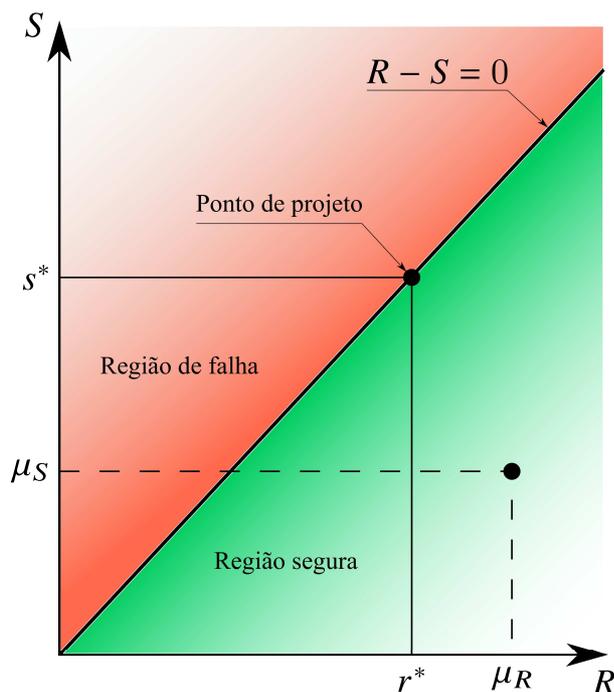


Figura 5 – Espaço bidimensional $R \times S$. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].

Ao se aplicar a transformação proposta por Hasofer e Lind [11] obtém-se o espaço mostrado na Figura 6, em que β pode ser interpretado como a distância entre a origem do espaço e a região de falha, $Z(R', S') = 0$.

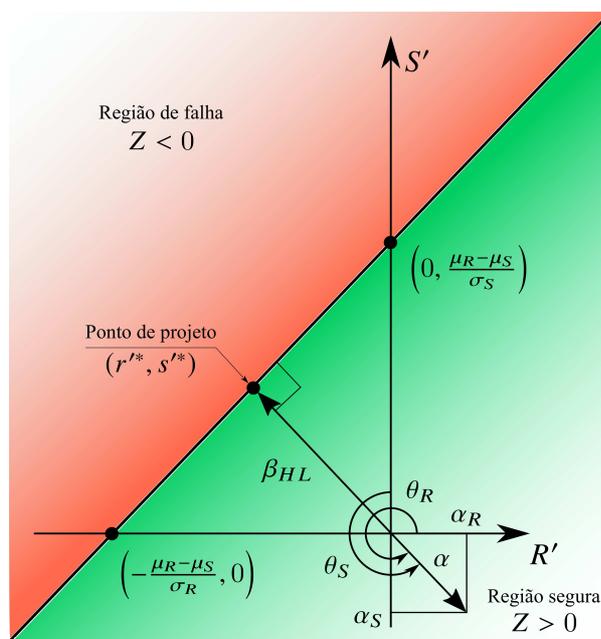


Figura 6 – Espaço bidimensional transformado $R' \times S'$. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].

O AFOSM conduz o índice de confiabilidade a uma interpretação geométrica, proporcionando potencial de aplicabilidade a uma gama maior de problemas. Esse conceito é premissa do próximo método apresentado e é explorado em sua dedução.

3.1.3 FORM *First Order Reliability Method*

Como as questões relacionadas às distribuições das variáveis foram tratadas pelas metodologias e técnicas explicitadas anteriormente, resta, ainda, lidar com problemas cuja fronteira de falha seja não linear. Para tal, pode ser aplicado o FORM que, apesar de ainda linearizar a função de estado limite pelo seu primeiro termo da série de Taylor, busca o melhor ponto para a linearização, isto é, aquele que minimiza a distância entre o domínio de falha e a origem do espaço formado pelas variáveis aleatórias do problema, iterativamente, enquanto percorre a fronteira entre os dois domínios. A Figura 7 ilustra a representação da fronteira de falha no espaço formado pelas variáveis do problema fundamental da confiabilidade.

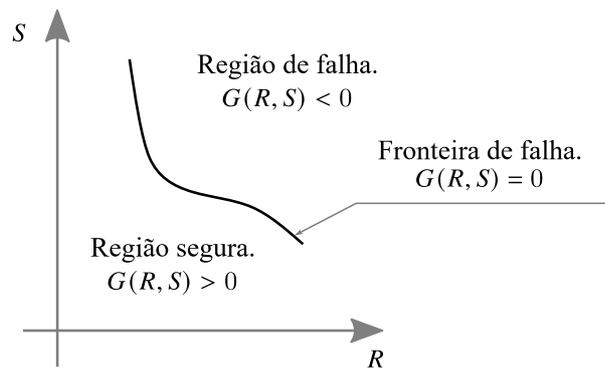


Figura 7 – Espaço $R \times S$ com equação de estado limite não linear. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].

A aplicação do FORM será brevemente descrita nos próximos parágrafos considerando o problema fundamental da confiabilidade com variáveis aleatórias de distribuição normal estatisticamente independentes, uma vez que problemas mais complexos podem ser reduzidos a essa categoria com a aplicação dos métodos previamente apresentados.

Inicialmente, arbitra-se um ponto de projeto, $\mathbf{X}_0 = (R_0, S_0)$ e uma tolerância de erro para verificar a convergência do método.

Calcula-se, então, a reta tangente (T_0) à equação de estado limite no ponto arbitrado e uma reta que seja perpendicular a T_0 e passe pela origem do espaço. Ao igualar a equação da reta perpendicular a T_0 à equação de estado limite, obtém-se o ponto $\mathbf{X}_1 = (R_1, S_1)$. Uma nova tangente é obtida no ponto \mathbf{X}_1 , e o processo é repetido novamente.

Em cada i -ésima iteração é necessário efetuar o cálculo de β_i que satisfaça $G_X(\mathbf{X}) = 0$. A convergência é verificada quando a diferença $\beta_{i+1} - \beta_i$ é menor do que a tolerância pré-

definida. A Figura 8 ilustra o processo iterativo supracitado. O algoritmo de implementação do FORM pode ser visto em Haldar e Mahadevan [2] e em Nowak e Collins [37].

Ao fim do algoritmo, são obtidos β e as coordenadas do ponto de projeto no espaço $R \times S$. A PF pode então ser calculada conforme a Eq.3.11. O ponto de projeto será empregado na aplicação da Amostragem por Importância, método de redução de variância testado nesse trabalho que será apresentado no item 3.2.1.

Haldar e Mahadevan [2] apresentam ainda um método alternativo que elimina a avaliação da função de estado limite para aplicações em equações não lineares.

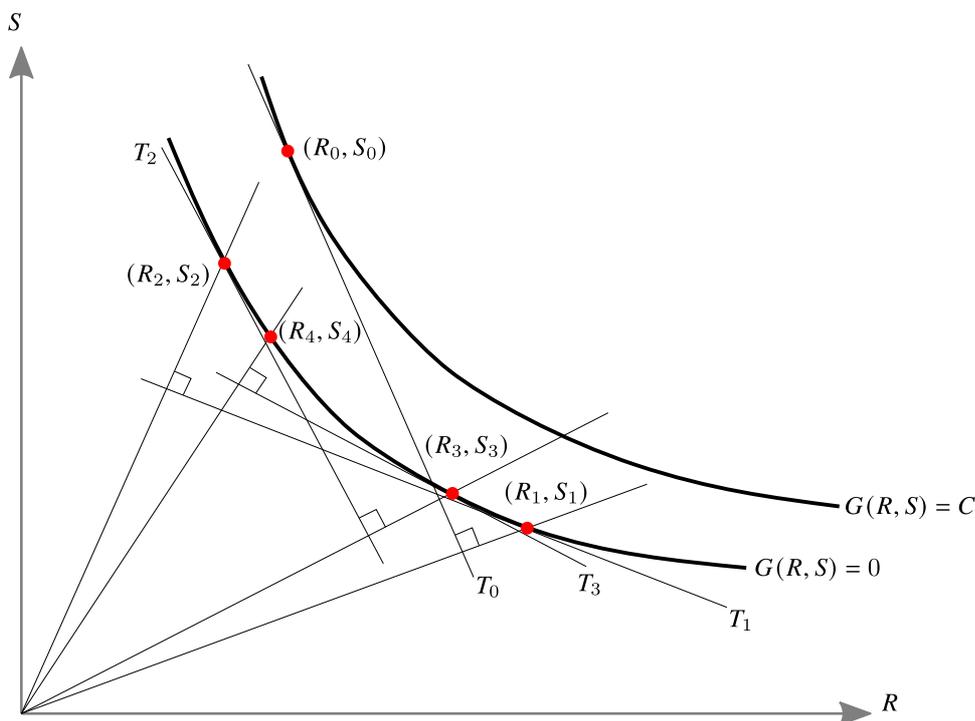


Figura 8 – Exemplo de aplicação do FORM em problema com equação de estado limite não linear. Fonte: adaptado de Haldar e Mahadevan [2].

3.2 MÉTODOS BASEADOS EM SIMULAÇÕES - simulações de Monte Carlo

O emprego dos métodos clássicos mostrados em 3.1 pode entregar respostas analíticas em uma gama muito restrita de problemas. Conforme mencionado, para problemas com não linearidade na função de estado limite ou aqueles que envolvam diferentes distribuições de probabilidades, erros de aproximação são inseridos na resposta pelas próprias metodologias e pelas considerações feitas para sua aplicação.

Outra forma de se obter diretamente a probabilidade de ocorrência de determinado evento consiste em observar a razão entre seu número de ocorrências e o universo de possíveis ocorrências. Para problemas reais envolvendo probabilidades, tal abordagem é impossível visto que os problemas, quase que em sua totalidade, podem ter infinitas

observações. Contudo, o raciocínio por trás da contagem infinita de cenários deixa abertura para introdução dos métodos de simulação.

Naylor [38] apud Rubinstein e Kroese [39] definem simulação como uma forma numérica de realizar experimentos acerca de sistemas que possam ser modelados matematicamente em um computador.

Simulações de Monte Carlo é o nome dado à metodologia observacional mais difundida e utilizada na confiabilidade estrutural. O primeiro registro de seu emprego, segundo Eckhardt et al. [14], se deu após a Segunda Guerra Mundial, em 1947, no Laboratório Nacional de Los Alamos, Novo México, onde o matemático John von Neumann, que em uma carta remetida a Robert Richtmeyer, concluiu: "Cálculos estatísticos são bem adequados à uma abordagem digital". O nome da técnica, por sua vez, vem da cidade de Monte Carlo, no principado de Mônaco, famosa por seus cassinos.

A simplicidade de sua implementação aliada à robustez desta metodologia fazem com que Haldar e Mahadevan [2] reconheçam o método como uma importante ferramenta para que engenheiros com conhecimento básico de estatística e probabilidades analisem risco e probabilidade de falha de seus projetos. Nowak e Collins [37] afirmam ainda que o método possui três indicações principais. São elas: solucionar problemas complexos que não possuem resposta exata; solucionar problemas em que a solução exata exija que se façam muitas considerações, podendo tornar a resposta encontrada menos realista; avaliar a pertinência de outras técnicas de abordagem em confiabilidade.

Outra vantagem das simulações de Monte Carlo é que não há limite no número de variáveis do problema ou na complexidade de modelo. Problemas com muitas variáveis são solucionados com relativa facilidade da mesma forma que aqueles com poucas. Porém, a capacidade computacional disponível se torna um fator dificultador ou, em alguns casos, limitante.

Para explicar a metodologia das simulações de Monte Carlo, o presente trabalho mostra um exemplo esquemático adaptado de Nowak e Collins [37]. Seja X uma variável aleatória de interesse em um determinado problema, de distribuição qualquer porém conhecida, cujo objetivo seja determinar a probabilidade de X assumir valores menores do que b .

Na Figura 9, \mathbb{U} representa o conjunto infinito com todos valores que X pode assumir. Sorteando-se aleatoriamente um valor x_1 pertencente a \mathbb{U} , obtém-se uma observação de X que é submetida a um teste lógico. As variáveis de contagem, $n_{(X<b)}$ e n , são iniciadas como nulas e o teste lógico segue como mostrado na Eq.3.13:

$$x_i \begin{cases} < b \rightarrow n_{(X<b)} = n_{(X<b)} + 1; n = n + 1; \\ > b \rightarrow n_{(X<b)} = n_{(X<b)}; n = n + 1 \end{cases} . \quad (3.13)$$

Os passos de sorteio e teste lógico são feitos repetidas vezes até que se obtenha

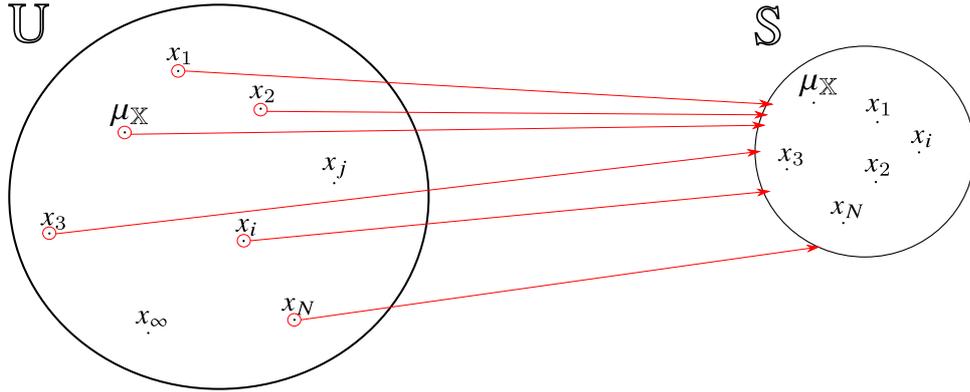


Figura 9 – Esquema de simulação de Monte Carlo.

n igual a um número pré-definido N de ciclos de simulação. Ao conjunto \mathbb{S} mostrado na Figura 9 dá-se o nome de amostra. A probabilidade de X assumir valores inferiores a b pode ser então aproximada segundo a Eq.3.14:

$$P_{(X < b)} \approx \frac{n_{(X < b)}}{N}, \quad (3.14)$$

onde:

$n_{(X < b)}$ = número total de cenários nos quais $x_i < b$,

N = número total de avaliações.

É intuitivo notar que \mathbb{S} guarda semelhança estatística com \mathbb{U} e que esta semelhança aumenta à medida que N cresce. Tomando-se como limite N tendendo para infinito, apesar de a natureza dos conjuntos serem distintas (\mathbb{S} é um conjunto enumerável enquanto que \mathbb{U} é não enumerável), as características probabilísticas da amostra \mathbb{S} tendem àquelas da população \mathbb{U} .

Tal fato deixa subentendido que a qualidade da aproximação da probabilidade de falha está diretamente ligada a um N pré-definido. Haldar e Mahadevan [2] sugerem que o número de observações deve ser ao menos dez vezes o inverso da ordem de grandeza da probabilidade de falha que se deseja detectar. Outros autores sugerem relações ainda mais conservadoras, contudo, o número de realizações que garanta a boa aproximação da PF deve ser definido pelo intervalo de confiança com o qual se deseja trabalhar.

A relação entre o tamanho da amostra e a qualidade da aproximação da probabilidade de falha se torna evidente ao tomar o erro de aproximação. Considerando PF como uma variável aleatória, pode-se calcular seu coeficiente de variação (CV) conforme a Eq.3.15:

$$CV_{PF} \approx \frac{\sqrt{Var(PF)}}{E(PF)} \approx \frac{1}{\sqrt{N} PF}. \quad (3.15)$$

Segundo Nowak e Collins [37], o valor esperado e a variância da probabilidade de falha estimada podem ser definidos respectivamente conforme a Eq. 3.16,

$$E(PF) = PF; \quad Var(PF) = \frac{PF(1 - PF)}{N}. \quad (3.16)$$

Substituindo os valores da Eq. 3.16 na Eq. 3.15, o coeficiente de variação da PF estimada pode ser obtido pela Eq. 3.17.

$$CV_{PF} \approx \frac{1}{\sqrt{N PF}}. \quad (3.17)$$

Para problemas cuja probabilidade de falha tenha ordem de grandeza suficientemente pequena, o coeficiente de variação guarda proporcionalidade com o erro estatístico da PF . Das e Zhang [8], sugerem que o erro seja estimado pela Eq.3.18:

$$erro = \sqrt{\frac{1 - PF}{N PF}} \approx \frac{1}{\sqrt{N PF}} \quad (3.18)$$

deste modo, fica evidente que quando o número de observações aumenta, a PF estimada pelo método tende a convergir para a probabilidade real do sistema.

Em problemas de confiabilidade estrutural, via de regra, não se conhece o tipo de distribuição de todas as variáveis envolvidas e seus parâmetros, e muitas vezes não se tem informação sobre a distribuição da função de estado limite. Isto se dá pelo fato de a equação de estado limite não ser necessariamente linear, podendo envolver diversas variáveis de distribuições diferentes. Desta forma, as etapas de sorteio e teste lógico apresentadas previamente são aplicadas em amostras distintas. Seja $G()$ a variável aleatória que representa a função de estado limite conforme mostra a Eq.3.19:

$$G() = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (3.19)$$

Faz-se necessário transformar os N conjuntos de m variáveis aleatórias em N observações da função de estado limite. Tal transformação se dá pela solução determinística da equação de estado limite N vezes. Para problemas na área de Engenharia Civil nos quais, via de regra, as probabilidades de falha possuem ordens de grandeza inferiores a 10^{-5} , a aplicação deste método pode se tornar demorada, ou até mesmo inviável, conforme a capacidade computacional disponível.

Uma pequena probabilidade de falha típica de problemas de confiabilidade estrutural implica em um grande número de simulações necessárias para se atingir alguns poucos

pontos no domínio de falha, o que pode tornar proibitiva do ponto de vista computacional a aplicação direta do método de Monte Carlo. Além disso, a variância dos resultados pode se tornar muito grande, o que pode ser controlado através do emprego de técnicas de redução de variância.

Neste contexto, diferentes soluções vêm sendo desenvolvidas ao longo do tempo. Vale destacar o método da amostragem por importância (IS), citado por Haldar e Mahadevan [2] e o método do Hipercubo Latino (LHS) explorado por Santos [10] que visam obter uma aproximação razoável da probabilidade de falha de um sistema efetuando um menor número de observações.

Os dois métodos supracitados foram testados no presente trabalho. O LHS e o IS buscam reduzir o número de observações da função de estado limite por meios, de certa forma, conflitantes, como será explicado nos parágrafos seguintes.

Ambas as metodologias de redução de variância abordadas neste trabalho foram aplicadas pelo emprego de uma *toolbox*, ReliabTBX R1.5, implementada em MATLAB por Christian Cremona no Laboratório Central de Pontes e Estradas (LCPC) Paris, França no ano de 2010.

3.2.1 Amostragem por Importância

A amostragem por importância, do inglês *Importance Sampling* (IS), busca reduzir o tamanho de amostra necessário a uma aproximação razoável da probabilidade de falha. Para tal, a técnica centraliza a amostragem em um ponto mais representativo do domínio de falha, em geral o ponto de projeto.

Santos [10] classifica a técnica como amostragem inteligente e ressalta que, por evitar a necessidade de se efetuar tantas observações longe do domínio de falha, essa técnica se mostra aplicável em situações como: probabilidades de falha pequenas; avaliação de sistemas mais complexos e avaliação em conjunto com métodos numéricos de modelagem, como Elementos Finitos.

Kroetz [40] cita que o emprego desta técnica usando os pontos de projeto faz com que a estimativa da probabilidade de falha apresente uma menor variância. Por consequência da diminuição da variância, a convergência do método requer menos observações.

A Figura 10 mostra um esquema de translação da amostragem, princípio basilar da amostragem por importância. É possível notar que, ao aplicar a técnica, os pontos distantes do domínio de falha (pontos pretos) não são amostrados e não farão parte do conjunto no qual se efetua a contagem de cenários.

O ponto de projeto pode ser encontrado com a aplicação dos métodos de transformação explicitados em 3.1.

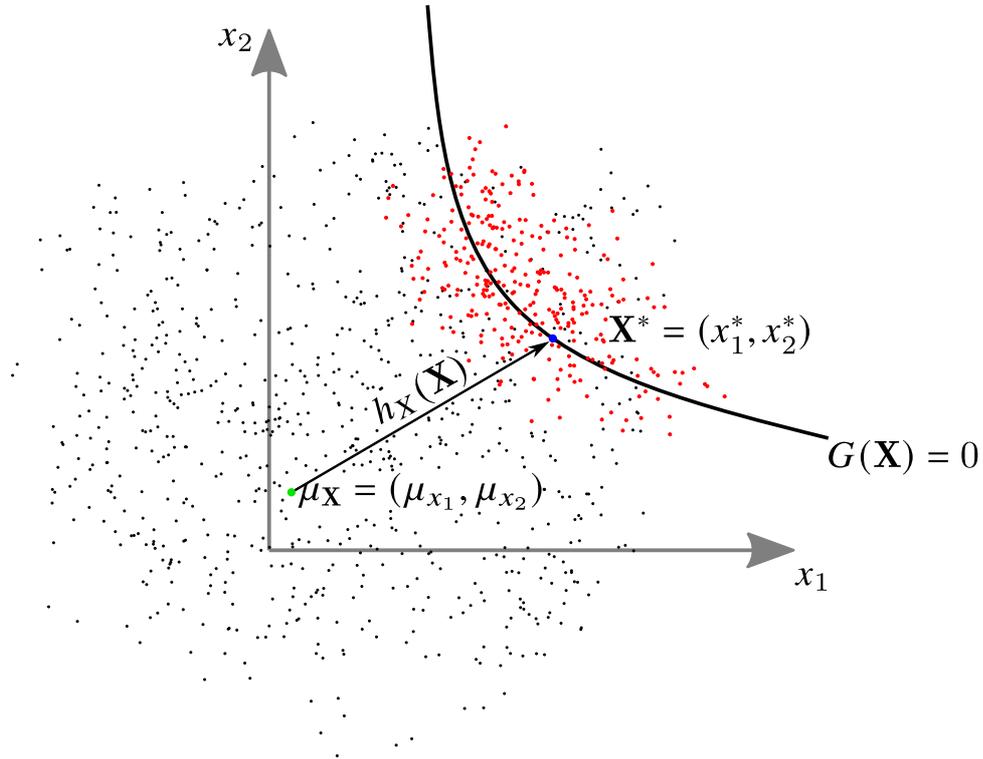


Figura 10 – Translação imposta pela função de amostragem do IS

Tal método de amostragem passa pela escolha de uma função de amostragem $h_X(\mathbf{X})$ que deve ser eleita de forma a facilitar o processo. Uma função de amostragem inadequada pode piorar os resultados, visto que a mesma interfere explicitamente na ponderação da contagem de cenários. Partindo da equação exata da probabilidade de falha (Eq.3.1), pode-se multiplicar e dividir o integrando pela função de amostragem, $h_X(\mathbf{X})$, conforme mostrado na Eq.3.20:

$$PF = \int_{\Omega} I(\mathbf{X}) \frac{f_X(\mathbf{X})}{h_X(\mathbf{X})} h_X(\mathbf{X}) d\Omega. \quad (3.20)$$

A Eq.3.20 é, por definição, a expressão do valor esperado da função mostrada pela Eq.3.21, em relação a função $h_X(\mathbf{X})$:

$$PF = E \left(I(\mathbf{X}) \frac{f_X(\mathbf{X})}{h_X(\mathbf{X})} \right). \quad (3.21)$$

Este valor esperado, para uma amostra finita de tamanho n , pode ser aproximado pelo somatório mostrado na Eq.3.22:

$$PF \approx \sum_i^n I(\mathbf{X}_i) \frac{f_X(\mathbf{X}_i)}{h_X(\mathbf{X}_i)}. \quad (3.22)$$

O valor esperado obtido pelo somatório mostrado na Eq.3.22 representa uma razoável aproximação da probabilidade de falha do sistema cuja amostragem foi feita centrada no ponto de projeto, que será obrigatoriamente maior que a probabilidade de falha do sistema original, pois ao centrar a amostragem na fronteira do domínio de falha mais observações atenderão ao critério de falha. Cada ocorrência de falha na amostra deslocada, ao ser ponderada pela função peso, w_i definida pela Eq.3.23, contribui de forma proporcional ao seu peso para o cálculo da PF do sistema original.

$$w_i = \frac{f_X(\mathbf{X}_i)}{h_X(\mathbf{X}_i)}, \quad (3.23)$$

Analisando as equações 3.20 e 3.22 nota-se que a escolha ótima para a função de amostragem é mostrada na Eq.3.24:

$$h_X(\mathbf{X}) = I(x_i) \frac{f_X(\mathbf{X})}{PF}. \quad (3.24)$$

Contudo, tal função faz uso da probabilidade que se deseja calcular, fazendo com que sua escolha fique inviável. Como a probabilidade de falha de um determinado problema é uma constante, é mais importante que a função de amostragem adotada seja proporcional à função de densidades de probabilidades conjunta no domínio de falha.

Para aplicação do método, no presente trabalho foi usado o artifício de transformar o conjunto das funções de densidade de probabilidades marginais em uma função de densidade normal padrão multi-variada, mostrada na Eq.3.25, pela transformação de Rosenblatt.

$$f_X(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}((\mathbf{X}-\mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}-\mu))}, \quad (3.25)$$

onde:

\mathbf{X} é o vetor de variáveis aleatórias, μ é o vetor formado pelas médias das variáveis aleatórias, $|\Sigma|$ é o determinante da matriz de correlação entre as variáveis aleatórias, p é o número de funções marginais implicadas no problema.

A função de amostragem usada pela *Toolbox* guarda similaridade com a função de densidade normal padrão multi-variada e está explicitada na Eq.3.26:

$$h_X(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\Sigma|}} e^{\mathbf{u}'_0 \mathbf{u} - \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)' \Sigma (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \frac{\beta^2}{2}\right)}, \quad (3.26)$$

onde:

\mathbf{u} é o vetor de aleatório de observações,

\mathbf{u}_0 é o vetor formado pelas coordenadas do ponto de projeto,

β é o índice de confiabilidade.

Substituindo as equações 3.25 e 3.26 na Eq.3.23 obtém-se a função peso usada no cálculo da probabilidade de falha mostrada na Eq.3.27:

$$w_i = e^{-\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0 - \frac{\beta^2}{2}\right)}. \quad (3.27)$$

A justificativa pela escolha do IS reside no trabalho de Santos [10], onde foram testadas e comparadas metodologias observacionais em exemplos de confiabilidade estrutural.

3.2.2 Hipercubo Latino

O método do hipercubo latino, conforme citado, busca tornar a amostra mais esparsa de modo que seja coberta a maior região possível do domínio. Para tal, o método divide o domínio das variáveis aleatórias de entrada em faixas de igual probabilidade, denominadas estratos, e sorteia pontos amostrais nestes estratos. Cada estrato é amostrado uma única vez. O emprego desta técnica diminui o número de pontos amostrais necessários para cobrir uma região do domínio, visto que cada estrato não possui mais que uma observação.

É possível entender a metodologia como um caso particular da amostragem estratificada, visto que esta última também consiste em dividir o domínio em estratos. Contudo, na amostragem estratificada, a divisão feita é arbitrária. A estratificação pode ser feita com base em alguma característica em comum dos pontos selecionados. Escolhendo-se a distribuição de probabilidades das variáveis como critério para a estratificação e limitando-se a amostragem a um ponto por estrato tem-se o hipercubo latino.

A Figura 11 mostra um esquema de estratificação para a amostragem por hipercubo latino em um plano formado por duas variáveis com distribuição normal. Como o critério de estratificação define os intervalos preservando a probabilidade de ocorrência constante, é possível notar que, quanto mais se aproximam da cauda da distribuição, maiores ficam os estratos e que, quanto mais se aproxima do valor esperado (crista da curva), menores ficam os estratos.

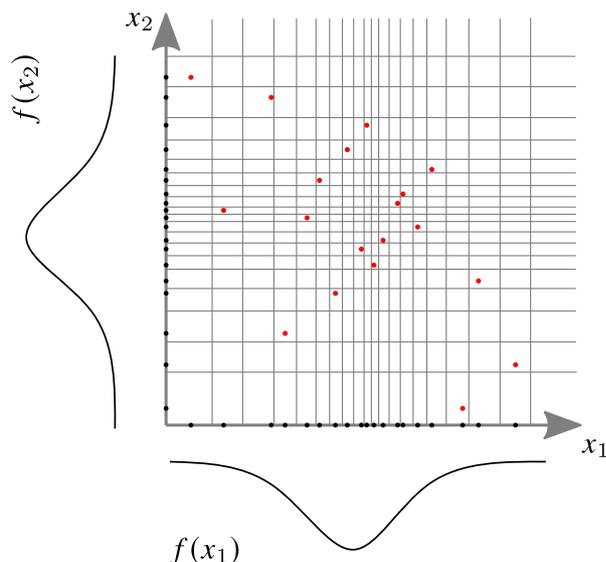


Figura 11 – LHS aplicado a duas variáveis aleatórias com distribuição normal

É imediata a conclusão de que, nos problemas abordados pelo presente trabalho para aplicação do LHS, cada variável aleatória teve seu domínio dividido em n faixas de igual probabilidade de ocorrência, onde n é o número de observações que se desejava realizar. Santos [10] apresenta o LHS antes de inserir o conceito de amostragem inteligente. Contudo, ressalta que a técnica também é classificada como inteligente.

O LHS, foi escolhido pela forma com que o método reduz o tamanho da amostra ser, conforme mencionado, antagônica àquela empregada pelo método anterior. Enquanto o IS busca condensar a amostra em um ponto mais representativo do domínio de falha, o LHS tenta garantir que esta seja mais representativa do domínio por inteiro.

3.3 MÉTODOS DE META-MODELAGEM - Kernel Smoother

As técnicas de redução de variância explicitadas anteriormente têm a capacidade de diminuir consideravelmente o número de observações necessárias para uma aproximação razoável da probabilidade de falha de alguns problemas de confiabilidade estrutural. Contudo, a solução de problemas reais mais complexos, cujos graus de liberdade sejam muitos ou a equação de estado limite possua grau elevado de não linearidade, a aproximação da probabilidade de falha pode se tornar imprecisa.

Uma alternativa que se mostra viável em problemas nos quais a redução de variância não é capaz de otimizar a solução é o emprego de meta-modelos.

Meta-modelos são definidos por Sudret [41] como uma função analítica que descreve a resposta de um modelo, numérico ou real, mais complexo. O autor especifica ainda três propriedades para que essa função seja caracterizada um meta-modelo: i) pertencer a uma

classe específica de funções sendo caracterizada pelo conjunto de parâmetros desta classe; ii) ser menos custosa computacionalmente quando comparado aos métodos observacionais clássicos, e iii) se ajustar ao modelo original através de um conjunto de experimentos computacionais do mesmo.

Segundo essa definição, diversas metodologias que são aplicadas em diferentes campos do conhecimento científico podem ser classificadas como meta-modelo. Pode-se citar o Método dos Elementos Finitos, que pode ser classificado como um meta-modelo da mecânica, ou o emprego de inteligência artificial para monitoramento da saúde estrutural.

Especificamente no campo da confiabilidade estrutural, destacam-se métodos como superfícies de resposta, que ajustam polinômios a um conjunto de observações para inferir sobre algum aspecto do fenômeno estudado e a Krigagem, que pode ser usada para inferir sobre superfícies multidimensionais através de observações discretas desta superfície.

Um método que, segundo a definição de Sudret [41], é um método de meta-modelagem ainda pouco explorado na confiabilidade estrutural e que se mostra promissor no campo das ciências relacionadas a probabilidades e estatística é o *Kernel Smoother*. Alguns trabalhos científicos, não direcionados à confiabilidade estrutural, mostram que o método aplicado a problemas diversos alcança resultados razoáveis.

Pode-se citar o trabalho de Muller [42] que demonstra a capacidade de uma metodologia baseada em KS aproximar razoavelmente uma função através de uma amostra. Mais recentemente, o trabalho de González et al. [43] discute o método e mostra a sua capacidade de cobrir, razoavelmente, em termos de probabilidade, intervalos de confiança.

Entretanto, no campo da confiabilidade estrutural, este método ainda é pouco explorado. Segundo Ballaben et al. [3] o método pode gerar uma aproximação da função de densidade de probabilidade do fenômeno em estudo valendo-se de amostras sensivelmente reduzidas. Como a *PF* pode ser aproximada como a área abaixo da FDP no domínio de falha, essa pode ser obtida a partir da integração numérica da função resultado do KS. Nos parágrafos seguintes será apresentada a ideia que embasa o KS.

O KS consiste em uma regressão que parte de uma amostra da função de estado limite, a mesma usada pelo MC na contagem de cenários, para aproximar a função de densidade de probabilidade. Para tal, faz-se necessário aplicar os passos a seguir.

Primeiramente, define-se o intervalo de busca (I) da variável aleatória $G()$, em que I é definido de forma arbitrária pelo usuário. Contudo, para que haja observações e seja possível prosseguir com o emprego do método, I deve estar contido na amostra de $G()$ como mostra a Eq.3.28:

$$I \subset [a, b], \quad (3.28)$$

onde:

$$a = \min(G()),$$

$b = \max(G())$.

Após a sua definição, o intervalo I é discretizado em pontos igualmente espaçados. A distância entre dois pontos discretos consecutivos de I é denominada largura de banda (Δ). Pontos no interior das bandas são denominados g_i^* , e são definidos pela Eq.3.29:

$$g_i^* = g_i + \xi \Delta, \quad (3.29)$$

com:

$\xi \in [0, 1]$.

A Figura 12 mostra um desenho esquemático da discretização.

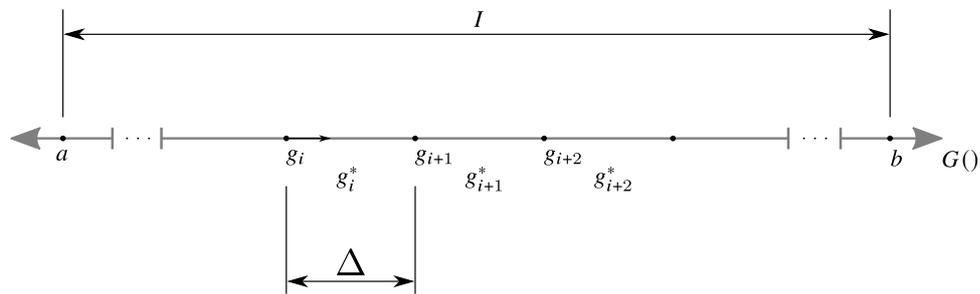


Figura 12 – Discretização do domínio de $G()$.

Construindo-se um diagrama de frequências das observações, obedecendo às bandas e aos pontos discretos, conforme mostra a figura ???. Os valores do diagrama podem ser interpretados como a probabilidade $g_i \leq G() \leq g_{i+1}$. Estas probabilidades são então associadas aos pontos discretos g_i e a função de densidade de probabilidade do fenômeno é aproximada obedecendo-se a uma lei de formação pré-estabelecida, passando pelos pontos $(g_i, f_{G()}(G() = g_i))$ como mostra a Figura 14. Por fim, a probabilidade de falha do fenômeno pode ser obtida via integração numérica da função de densidade de probabilidade aproximada conforme mostrado na figura ???.

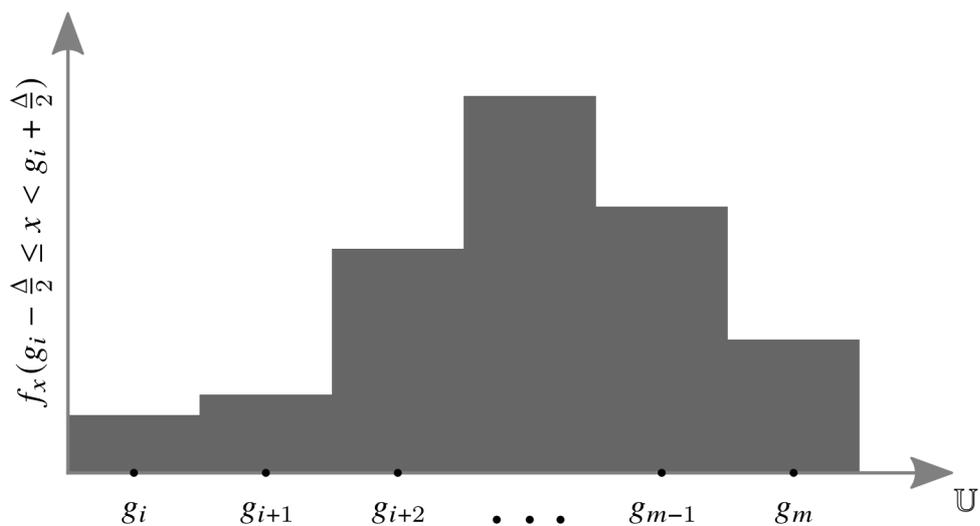


Figura 13 – Diagrama de frequências das observações de $G()$.

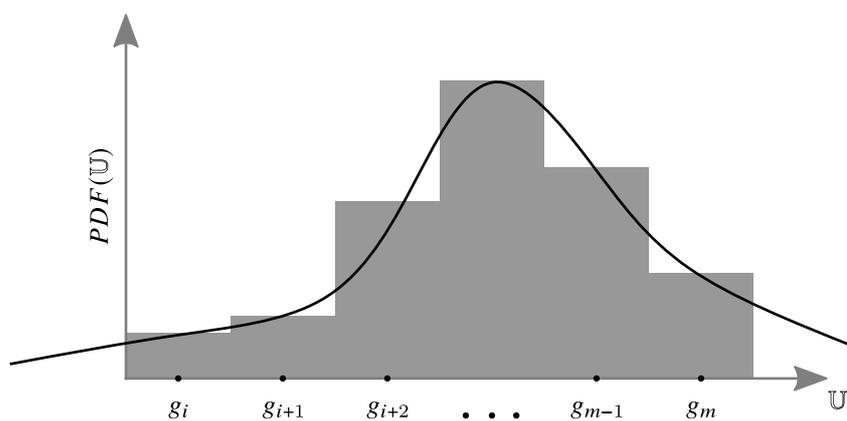


Figura 14 – Aproximação da PDF via *Kernel Smoother*.

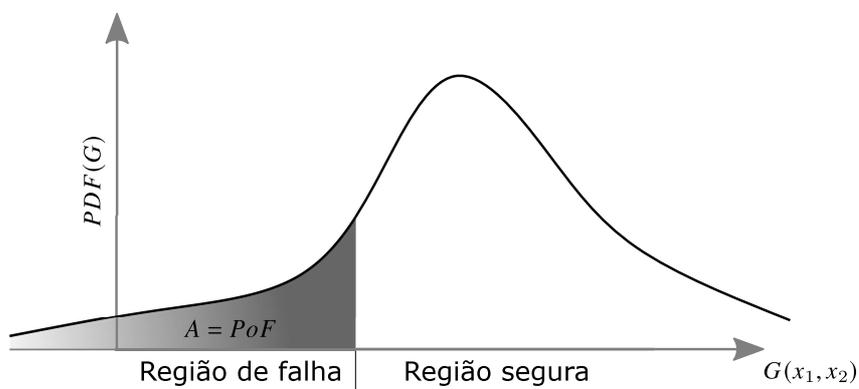


Figura 15 – Integração da PDF aproximada via *Kernel Smoother*.

Para evidenciar os resultados promissores apresentados por Ballaben et al. [3], foram extraídos dois exemplos deste trabalho.

No exemplo contínuo puramente numérico tratado no trabalho de Ballaben el al. [3], a equação de estado limite é dada pela Eq.3.30:

$$y = g(x) = 3(x - 1, 4)(x - 3, 1)(x - 4, 7)(x - 7, 7), \quad (3.30)$$

onde:

x é a variável aleatória de entrada cuja PDF é mostrada na Figura 16,
 y é a variável de saída cuja PDF se deseja aproximar com o uso do KS.

Nota-se que a equação de estado limite é um polinômio completo de quarta ordem na variável de entrada, sendo classificado como uma equação de estado limite não linear.

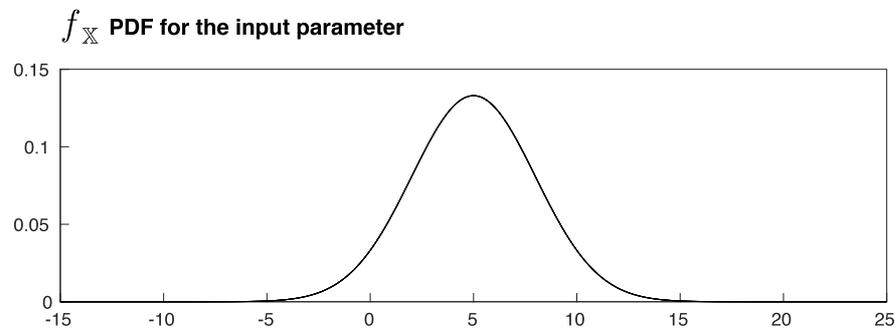


Figura 16 – PDF da variável x extraído do segundo problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].

O trabalho mostra que o KS aproxima a PDF de saída rapidamente enquanto que o MCMC só atinge a forma desejada nos dois últimos experimentos. A Figura 17 mostra a PDF obtida para os diferentes tamanhos de amostra usados, também é mostrado a sobreposição das curvas obtidas segundo as duas metodologias com 80.001 observações. No trabalho de Ballaben el al., o KS é identificado pela sigla PM, abreviado do inglês *Proposed Method*, enquanto que o MCMC é uma variação do método de Monte Carlo, abreviado do inglês *Markov-Chain Monte Carlo*.

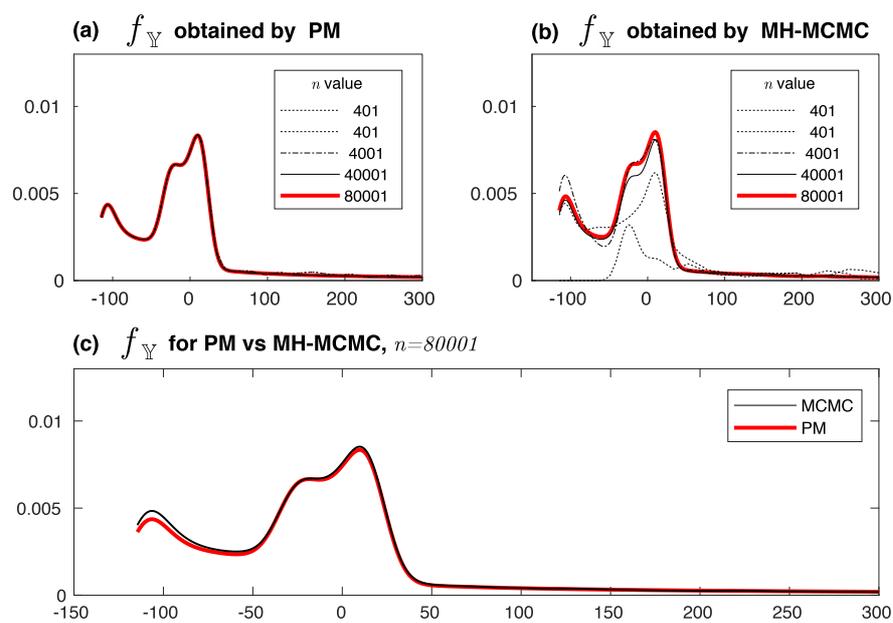


Figura 17 – PDF da variável y extraído do segundo problema tratado por Ballaben et al. [3]. Fonte: [3].

Como indicador de desempenho, o autor também acompanhou o tempo demandado por cada uma das metodologias em cada número de observações adotado. Este indicador é apresentado na Figura 18

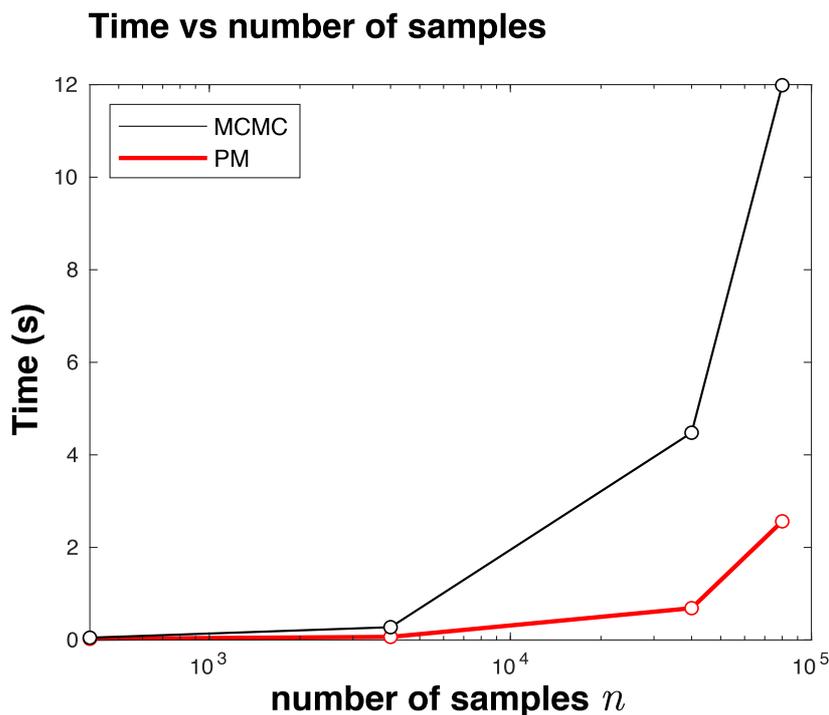


Figura 18 – Tempo demandado por número de observações, extraído do segundo problema tratado por Ballaben et al. [3]. Fonte: [3].

Nota-se uma evidente superioridade do KS em relação ao MC, levando-se em conta que o KS obteve uma aproximação razoável em 40.001 observações (curva preta sólida do gráfico (a) da Figura 17) e que o MC ainda teve variação visível entre 40.001 e 80.001 observações. Além disso, o tempo demandado pelo MC chega a ser maior que 12 vezes aquele demandado pelo KS.

Outro problema interessante tratado por Ballaben et al. [3] diz respeito à resposta dinâmica, em termos de deslocamento, na extremidade de um mastro estabilizado por três cabos inclinados. Nesse exemplo, o autor emprega o MC puro para tratar o problema e compará-lo ao KS. São consideradas variáveis aleatórias a força de tração inicial dos cabos de ancoragem, todas uniformemente distribuídas no intervalo [2.000, 3000] N. A Figura 19 (a) ilustra o esquema estrutural do problema, enquanto que a Figura 19 (b) mostra o gráfico de dispersão entre a força nos cabos e os valores de deslocamento obtidos pelas simulações.

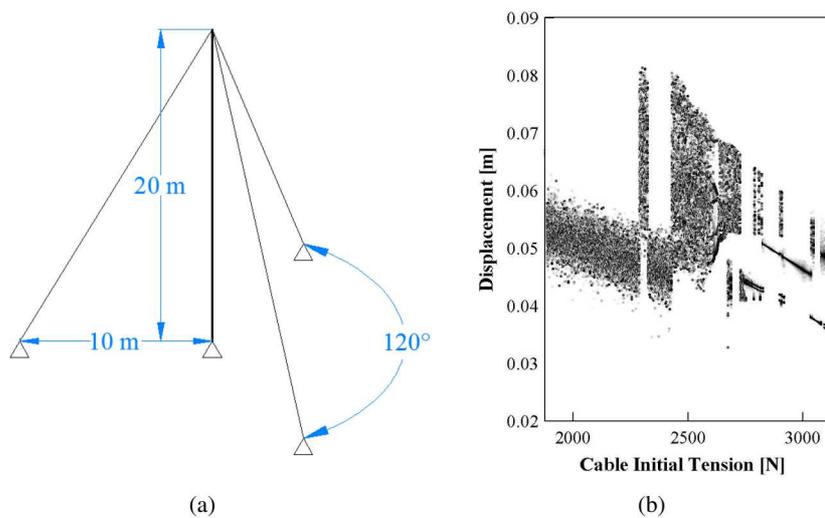


Figura 19 – (a) Esquema estrutural do mastro. (b) Dispersão (deslocamento x pré-tensão).
 Extraído do quarto problema tratado por Ballaben et al. [3]. Fonte: [3].

A Figura 20 mostra os resultados obtidos neste problema para ambas as metodologias, bem como uma comparação entre elas.

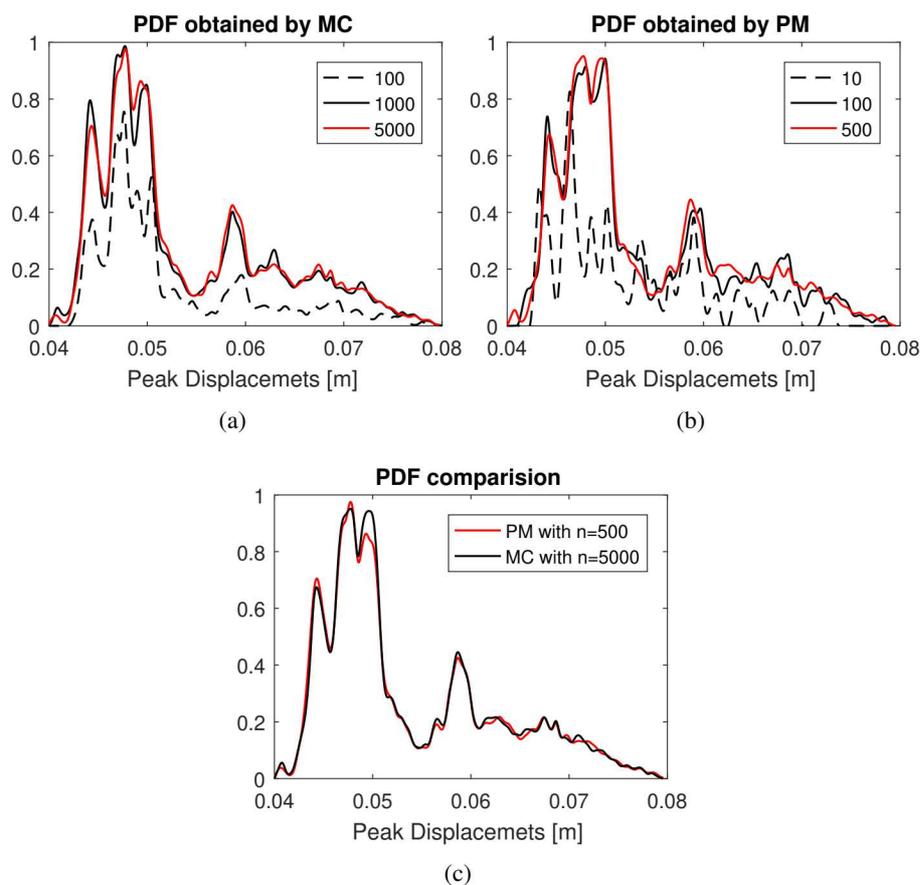


Figura 20 – (a) PDF aproximada pelo KS. (b) PDF aproximada pelo MC. (c) Superposição das curvas do KS e do MC com 500 e 5.000 observações respectivamente. Extraído do quarto problema tratado por Ballaben el al. [3]. Fonte: [3].

Nota-se, pela Figura 20 (c), que o KS obteve resultados razoáveis com cerca de dez vezes menos observações que o MC. O autor classifica a diferença entre as curvas da Figura 20 (c) como insignificante e ressalta que o tempo demandado pelo KS foi cerca de 10 vezes menor que aquele demandado pelo MC.

Ballaben el al. [3] conclui que o método é capaz de modelar a incerteza dos exemplos abordados evitando um número muito grande de observações.

Conforme mostrado pelos recortes extraídos do trabalho de Ballaben el al. [3], a função de densidade de probabilidade obtida com esta metodologia é capaz de representar bem o comportamento aleatório do fenômeno com uma amostra consideravelmente reduzida. Assim, a aplicação desse método diminuiria o esforço computacional necessário para uma aproximação razoável da probabilidade de falha do fenômeno e, conseqüentemente, o tempo requerido para esse cálculo.

Para empregar o *Kernel Smoother* no presente trabalho, a função de uma *toolbox* nativa do MATLAB, *ksdensity*, foi usada. Os parâmetros empregados são mostrados na

Tabela 3. A PDF gerada pelo KS foi integrada no domínio de falha pela aplicação da regra do trapézio.

Tabela 3 – Parâmetros do *Kernel Smoother*

Parâmetro	Valor/Tipo
Função interpoladora	Normal
Largura de banda	Unitária
Número de pontos	Determinado pela largura de banda
Intervalo de discretização	Domínio de falha

No próximo capítulo será estabelecida uma comparação em termos de precisão da *PF* obtida e tempos computacionais demandados pelos métodos aqui descritos.

4 APLICAÇÕES

Para estabelecer uma base de comparação entre as metodologias apresentadas ao longo deste trabalho, dois exemplos extraídos da literatura foram analisados. Primeiramente, uma viga bi-engastada sujeita a uma carga concentrada, tratada por Seck [4] e mais recentemente, no PEC-UFJF, por Orlandi, em [34] e [36], e, posteriormente, um pórtico plano de três barras carregado com duas forças concentradas abordado por Seck [4], Orlandi, em [34] e [36] e por Kagho-Gouadijo [35].

4.1 VIGA BI-ENGASTADA

Este exemplo tem como base o problema fundamental da confiabilidade mostrado na Eq.3.9 aplicado a uma viga. O objetivo do problema consiste em avaliar a probabilidade de falha do modelo de viga objeto de estudo.

O modelo de viga possui dois apoios do terceiro gênero, um em cada extremidade, e é solicitada por uma força concentrada, aplicada a distância de 1 metro do apoio da esquerda. A Figura 21 ilustra o esquema do modelo estrutural do problema.

O modelo é constituído por material que apresenta comportamento elastoplástico perfeito, com resistência à tração idêntica à de compressão. Além disso, a sua seção transversal e o seu momento de inércia são constantes ao longo do comprimento.

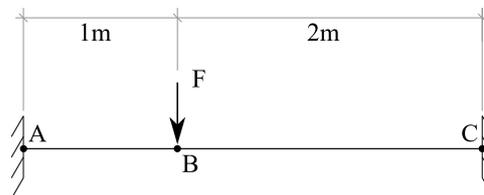


Figura 21 – Modelo estrutural de viga bi-engastada.

O primeiro passo para solução deste exemplo consiste em traçar o diagrama de momentos fletores (DMF) considerando-se uma carga unitária aplicada verticalmente, de cima para baixo, no ponto B, conforme ilustrado na Figura 22.

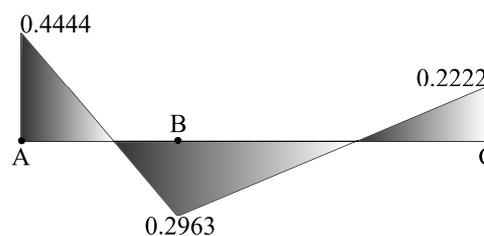


Figura 22 – Diagrama de momento fletor (DMF), para carga unitária.

São eleitas as seções de interesse, aquelas cujos valores no DMF são extremos locais. Os respectivos valores nas seções A, B e C do DMF unitário formam o vetor de influência (\mathbf{K}) da carga em cada seção de interesse, mostrado na Eq.4.1.

$$\mathbf{K} = (0, 4444 \ 0, 2963 \ 0, 2222) \quad (4.1)$$

Adotando o modelo linear para o comportamento da viga analisada, o diagrama de momentos solicitantes pode então ser obtido de forma simplificada pelo produto do diagrama unitário pelo módulo da força aplicada.

Concluída a parte referente à análise estrutural do problema, a abordagem segue para o tratamento probabilístico. São consideradas variáveis aleatórias neste problema: a força aplicada (\mathbf{F}) e os momentos resistentes das seções de interesse (M_{rA} , M_{rB} e M_{rC}), todos com distribuição normal.

Devido às características geométricas da viga e às propriedades mecânicas do material (comportamento elastoplástico perfeito) os parâmetros das variáveis de momento resistente são iguais para todas as seções. A Tabela 4 apresenta os parâmetros das variáveis aleatórias associadas ao momento resistente em cada seção de interesse. Também são apresentados na Tabela 4 os parâmetros da variável aleatória associada à força aplicada.

Tabela 4 – Variáveis aleatórias consideradas no exemplo de viga bi-engastada

Variáveis	Distribuição	Média (μ)	Desvio padrão (σ)
M_{rA}	Normal	1.600 Nm	500 Nm
M_{rB}			
M_{rC}			
F	Normal	2.800 N	1.000 N

De posse desses parâmetros e do vetor de influência pode-se, em uma primeira análise, modelar o problema com o emprego do FORM.

As PF do problema calculadas via FORM servem como valores de referência e se encontram dispostas na tabela 5. Também constam na tabela, para uma análise comparativa, os valores de PF encontradas por outros autores que trataram este mesmo problema anteriormente.

Tabela 5 – PF s encontradas na literatura e via FORM

	Trabalho	Seck [4]	Orlandi [34]	Presente trabalho
	Metodologia	FORM	MC	FORM
Seção	A	0,2967	0,2978	0,2985
	B	0,0918	0,0919	0,0929
	C	0,0358	0,0379	0,0369

Observa-se que os resultados encontrados via FORM são semelhantes àqueles encontrados na literatura. As diferenças podem ser atribuídas a pequenas variações nos algoritmos usados nos cálculos do FORM. A maior diferença encontrada foi na seção C do trabalho de Seck [4], igual a 0,0012 em termos absolutos e aproximadamente 3% em termos percentuais. As semelhanças entre os resultados para o FORM de todos os autores considerados reforçam que o problema foi tratado corretamente no presente trabalho.

Para a aplicação do MC e do KS, o vetor de influência é usado para gerar o arranjo que contém as três amostras aleatórias de momentos solicitantes a partir do produto mostrado na Eq.4.2.

$$\mathbf{M}_{s(n \times 3)} = \mathbf{F}_{(n \times 1)} \mathbf{K}_{(1 \times 3)}, \quad (4.2)$$

onde:

$\mathbf{M}_{s(n \times 3)}$ é o conjunto aleatório de momentos fletores solicitantes com n observações para cada seção,

$\mathbf{F}_{(n \times 1)}$ é o vetor composto por n valores de força sorteados aleatoriamente, respeitando-se os parâmetros da distribuição de F (ver Tabela 4)

$\mathbf{K}_{(1 \times 3)}$ é o vetor influência da carga unitária, composto pelos valores extremos do diagrama de momentos fletores.

Foi gerado um vetor aleatório contendo as realizações da força aplicada. Esse vetor é criado a partir do sorteio simples de valores oriundos de uma distribuição normal parametrizada pelos valores de média e desvio padrão mostrados na tabela 4.

Nesse ponto, foi gerada uma matriz aleatória com três colunas, cada qual contendo as realizações de momento resistente observados nas seções A, B e C. Assim como no vetor de força, cada realização de cada coluna da matriz foi obtida por sorteio simples de uma distribuição normal parametrizada pelos valores de média e desvio padrão dos momentos resistentes na tabela 4.

Com os valores de solicitação e resistência, obtém-se a amostra da função de estado limite conforme a Eq.4.3.

$$\mathbf{S}_{(n \times 3)} = \mathbf{M}_{r(n \times 3)} - \mathbf{M}_{s(n \times 3)}, \quad (4.3)$$

onde:

$\mathbf{S}_{(n \times 3)}$ é a amostra da função de estado limite e

$\mathbf{M}_{r(n \times 3)}$ é a amostra de momentos resistentes gerada aleatoriamente composta por n simulações para cada uma das três seções de interesse respeitando-se os parâmetros apresentados

na Tabela 4.

Assim, a amostra da função de estado limite pode ser processada seguindo-se as duas metodologias: MC e KS.

Para a aplicação do IS e do LHS as variáveis aleatórias são definidas por seus parâmetros, no caso de variáveis com distribuição normal, $M_{r(i)} = (\mu_{M_{r(i)}}, \sigma_{M_{r(i)}})$ e $M_{s(i)} = (\mu_{M_{s(i)}}, \sigma_{M_{s(i)}})$, e a função de estado limite é definida pela Eq.4.4 sendo o índice i relativo à seção em estudo.

$$S_{(i)} = M_{r(i)} - M_{s(i)}. \quad (4.4)$$

Diferentemente dos métodos MC e KS, cada ponto amostral é obtido e contabilizado no instante de sua realização e é feito um laço que avalia a função de estado limite n vezes. Por esse motivo, a Eq.4.4 não carrega os índices relativos à observação, mas somente aqueles que se referem à variável aleatória e à seção de interesse.

Para observar a convergência das metodologias conforme a variação do tamanho da amostra, o número de avaliações iniciou com 401 e chegou a 4.000.001 observações, assumindo os valores listados na Eq.4.5:

$$n = \{401, 4.001, 40.001, 400.001, 4.000.001\}. \quad (4.5)$$

Foram efetuadas 100 simulações para cada número de observações listado na equação 4.5. A evolução das probabilidades de falha para as seções A, B e C são mostradas nos *boxplots* das figuras 23, 24 e 25 respectivamente.

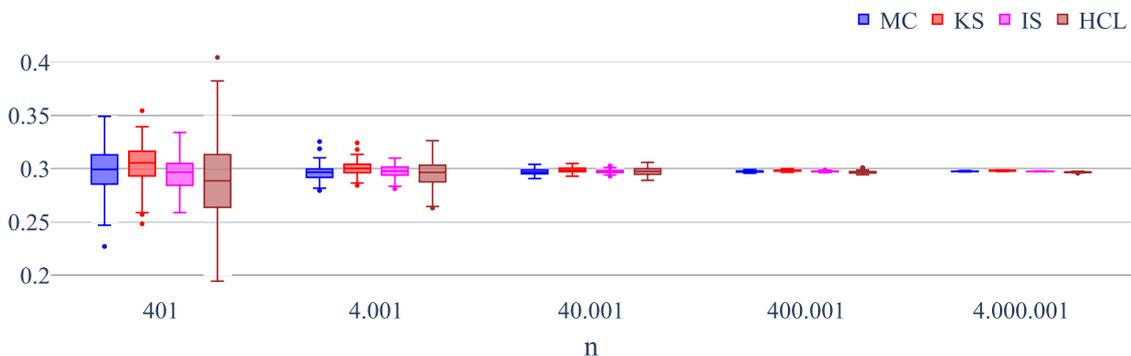


Figura 23 – Evolução da probabilidade de falha na seção A da viga para diferentes números de observações adotados.

A Figura 23 apresenta os *boxplots* com os resultados para a seção cuja PF é a maior entre as três: seção A. Observa-se que, à medida que o número de avaliações da equação de estado limite aumenta, todas as metodologias avaliadas aproximam razoavelmente a PF analítica.

A partir de 40.001 observações, nota-se que a variação nos resultados entre diferentes simulações com um mesmo número de observações, que podem ocorrer em maior intensidade para uma quantidade de observações mais reduzida, tendem a não mais acontecer, destacando que o IS apresentou variações baixas para todos os números de observações, superando as outras três metodologias.

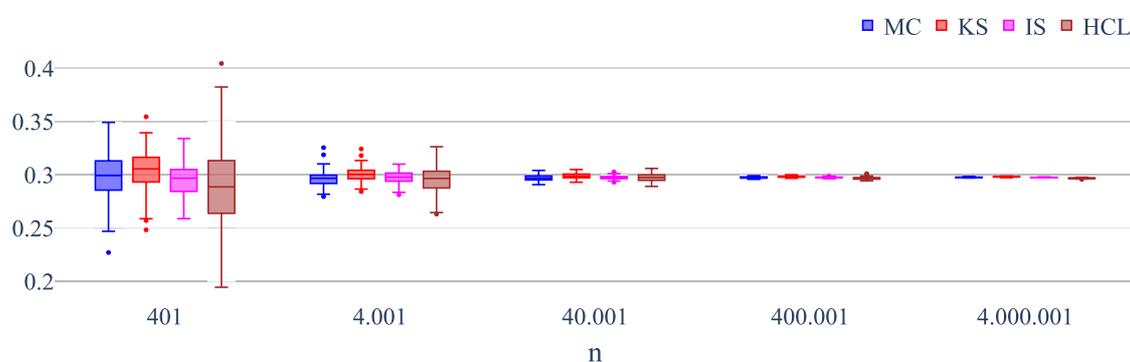


Figura 24 – Evolução da probabilidade de falha na seção B da viga para diferentes números de observações adotados.

Na Figura 24, pode-se notar o comportamento convergente em todas as metodologias, semelhante àquele observado para a seção A. Todos os métodos testados conseguiram reduzir razoavelmente a variação da PF dado um certo número de avaliações da equação de estado limite. Assim como na seção A, todas as metodologias já se encontravam bem próximas à PF de referência com que 40.001 observações.

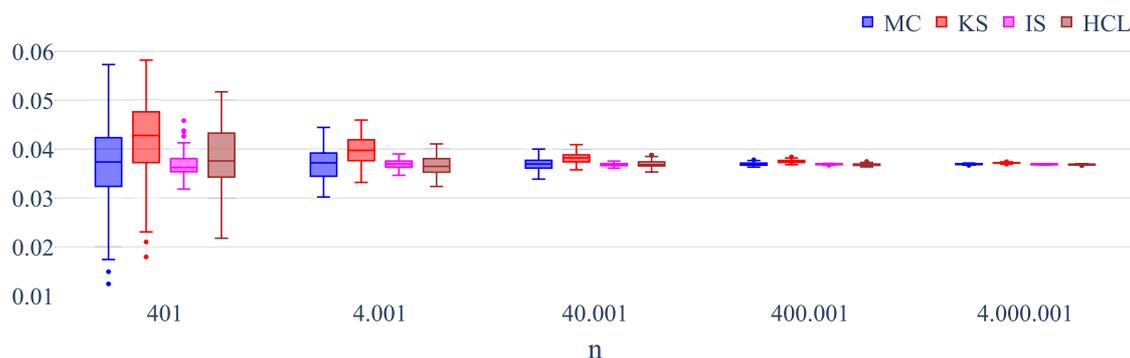


Figura 25 – Evolução da probabilidade de falha na seção C da viga para diferentes números de observações adotados.

A Figura 25, apresenta o mesmo comportamento convergente encontrado nas duas seções precedentes para todas as metodologias. Todos os métodos testados conseguiram novamente reduzir as flutuações da PF calculada dado certo número de avaliações da equação de estado limite. O método IS apresentou, novamente, a menor variabilidade em todos os números de observações. Os métodos KS, MC e LHS precisou de 400.001 observações encontrar resultados com agrupamento próximo àquele mostrado pelo IS.

Nas Tabelas 6, 7 e 8 são mostradas as médias de PF encontradas nas 100 simulações feitas para as seções A, B e C da viga respectivamente. Cada linha das tabelas corresponde ao número de observações da função de estado limite. O CV das PF das seções A, B e C da viga estão dispostos nas Tabelas 9, 10 e 11 respectivamente. Observa-se pelas Tabelas supracitadas que todas a confirmação que todas as metodologias testadas foram capazes de aproximar a PF analítica das três seções de interesse com o CV decaindo à medida que aumentava-se o número de observações. Observa-se ainda que, em todas as seções e para todos os números de observações adotados, o IS foi o método que obteve menor CV. Isso indica que o método seja aquele que obteve resultados mais precisos.

Tabela 6 – Média das PF encontradas, na seção A do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,2973	0,3033	0,2964	0,2898
4.001	0,2962	0,3001	0,2974	0,2955
40.001	0,2970	0,2987	0,2973	0,2973
400.001	0,2973	0,2982	0,2974	0,2967
4.000.001	0,2975	0,2979	0,2974	0,2967

Tabela 7 – Média das PF encontradas, na seção B do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,0934	0,1016	0,0922	0,0902
4.001	0,0922	0,0964	0,0926	0,0914
40.001	0,0924	0,0943	0,0924	0,0923
400.001	0,0924	0,0933	0,0924	0,0923
4.000.001	0,0925	0,0929	0,0924	0,0923

Tabela 8 – Média das PF encontradas, na seção C do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,0369	0,0422	0,0367	0,0381
4.001	0,0369	0,0397	0,0369	0,0364
40.001	0,0369	0,0381	0,0368	0,0370
400.001	0,0369	0,0375	0,0369	0,0368
4.000.001	0,0369	0,0372	0,0369	0,0368

Tabela 9 – CV das PF encontradas, na seção A do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,0805	0,0638	0,0506	0,1289
4.001	0,0240	0,0218	0,0183	0,0419
40.001	0,0086	0,0076	0,0056	0,0125
400.001	0,0026	0,0026	0,0016	0,0039
4.000.001	0,0008	0,0009	0,0005	0,0013

Tabela 10 – CV das PF encontradas, na seção B do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,1553	0,1346	0,0581	0,1643
4.001	0,0503	0,0457	0,0214	0,0442
40.001	0,0154	0,0145	0,0059	0,0132
400.001	0,0049	0,0045	0,0018	0,0045
4.000.001	0,0014	0,0016	0,0006	0,0013

Tabela 11 – CV das PF encontradas, na seção C do exemplo da viga, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,2534	0,1953	0,0715	0,1715
4.001	0,0826	0,0690	0,0237	0,0530
40.001	0,0280	0,0240	0,0080	0,0182
400.001	0,0082	0,0079	0,0023	0,0057
4.000.001	0,0023	0,0024	0,0007	0,0017

Tomando-se a PF obtida via FORM como referência, foram calculadas as diferenças percentuais entre a média da PF calculada por cada metodologia conforme a Eq.4.6.

$$\epsilon\% = \left| \frac{\bar{PF}_{\text{método}} - PF_{FORM}}{PF_{FORM}} \right| 100\%. \quad (4.6)$$

Os valores absolutos das diferenças nos resultados para as seções A, B e C encontram-se dispostos nas figuras 26, 27 e 28, respectivamente. A partir desses gráficos, confirma-se de uma forma mais explícita os apontamentos feitos a partir da análise dos gráficos 23, 24 e 25 e das Tabelas 6, 7, 8, 9, 10 e 11.

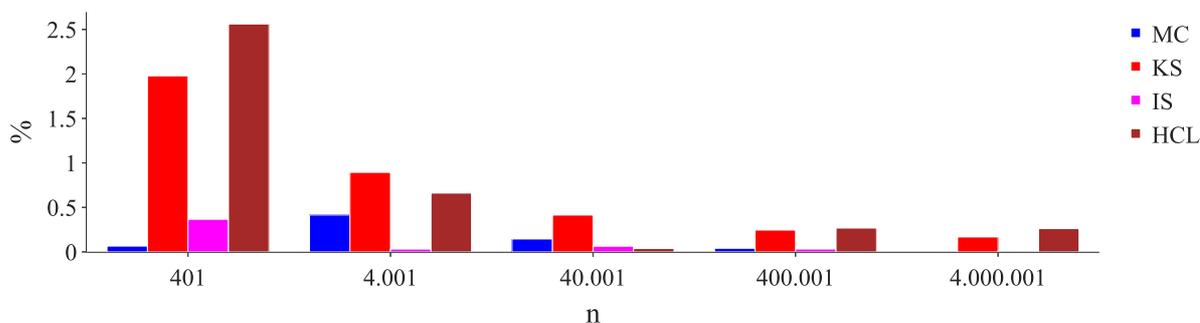


Figura 26 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção A da viga.

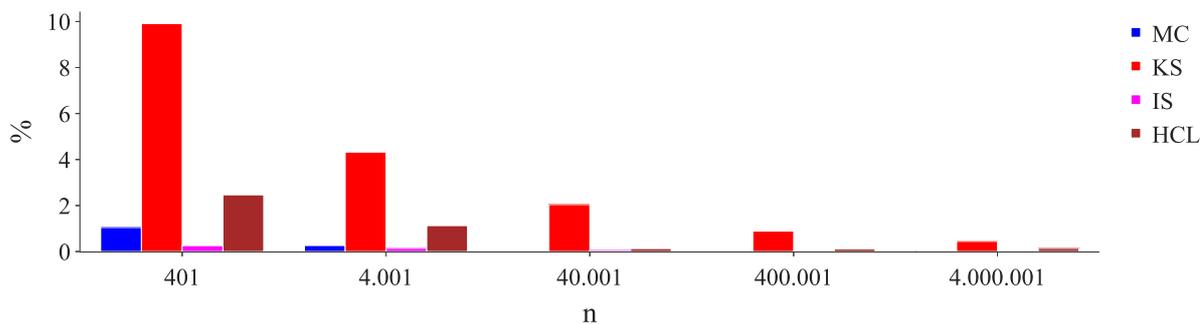


Figura 27 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção B da viga.

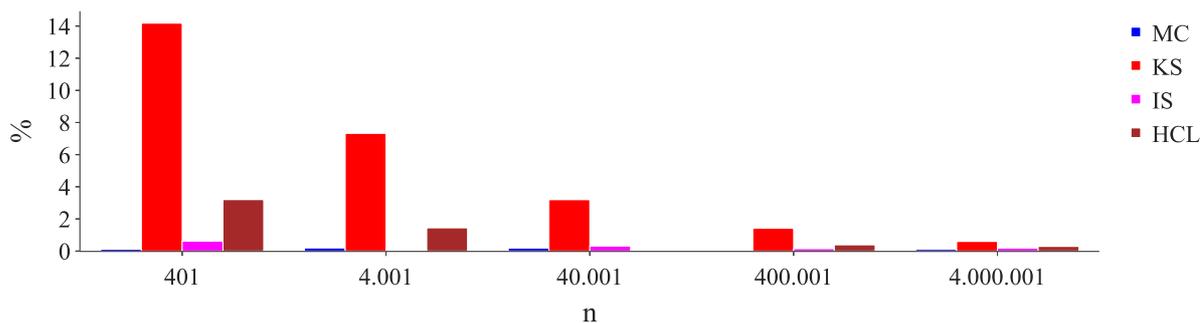


Figura 28 – Diferença percentual relativa à probabilidade de falha referência na seção C da viga.

A média dos tempos de processamento necessários para os cálculos envolvidos em cada método podem ser observados na Tabela 12.

Tabela 12 – Evolução dos tempos de processamento demandados por cada metodologia em segundos

n	MC	KS	IS	LHS
401	0.00004	0.02546	0.04071	0.04146
4.001	0.00016	0.07707	0.39365	0.39202
40.001	0.00120	0.44509	3.95436	3.93645
400.001	0.00478	2.33392	39.36342	39.22841
4.000.001	0.05541	15.11847	370.51074	359.14138

A Tabela 12 mostra que o Monte Carlo, mesmo para um número elevado de avaliações, foi o método que levou, em média, o menor tempo para encontrar as probabilidades de falha de cada seção do sistema, seguido do KS. Os tempos computacionais do IS e do LHS foram semelhantes e muito superiores aos das outras metodologias testadas. Contudo, o IS foi o método que, no geral, apresentou decaimento mais rápido do erro proporcional e do CV (vide Figuras 26, 27 e 28 e Tabelas 9, 10 e 11).

Os tempos computacionais superiores para o IS eram esperados, uma vez que resultados semelhantes foram expostos por Santos [10].

4.2 PÓRTICO PLANO DE TRÊS BARRAS BI-ENGASTADO

No exemplo apresentado anteriormente, observou-se que, de uma forma geral, todas as metodologias aproximaram razoavelmente as probabilidades de falha de todas as seções, mesmo com o número máximo de observações limitado a $n = 40.000.001$. Tal fato se justifica, pois a menor probabilidade de falha do problema tem ordem de grandeza na casa de 10^{-2} . Segundo Haldar e Mahadevan [2], para o MC, essa probabilidade de falha demandaria 10^3 observações. Tomando-se uma posição mais crítica, o exemplo anterior mostra que, com $\frac{10.000}{PF}$ observações, consegue-se chegar em erros, relativos à referência, próximos a 1%. Entretanto, para casos mais complexos, nos quais as probabilidades de falha se mostram inferiores àsquelas do exemplo da viga, há a possibilidade de as metodologias encontrarem dificuldades ou, até mesmo, não convergirem para as probabilidades de falha de referência.

Visando avaliar tal possibilidade, o segundo exemplo testa o desempenho dos métodos em casos cuja ordem de grandeza das probabilidades de falha de algumas seções de interesse se mostram inferiores àsquelas encontradas no exemplo anterior.

O modelo estrutural desse exemplo consiste em um pórtico plano formado por três barras, conforme mostrado na Figura 29. As condições de contorno do pórtico são dois apoios do terceiro gênero posicionados nas extremidades inferiores das barras verticais. O pórtico não possui rótulas em seus nós. Como solicitação, são posicionadas duas forças concentradas, uma horizontal (\mathbf{F}_1) e outra vertical (\mathbf{F}_2). Seck [4] destaca que a escolha da configuração de ações permite mobilizar toda a estrutura podendo aliviar ou penalizar de acordo com cada seção. O esquema estrutural do pórtico, bem como suas dimensões, são mostrados na Figura 29.

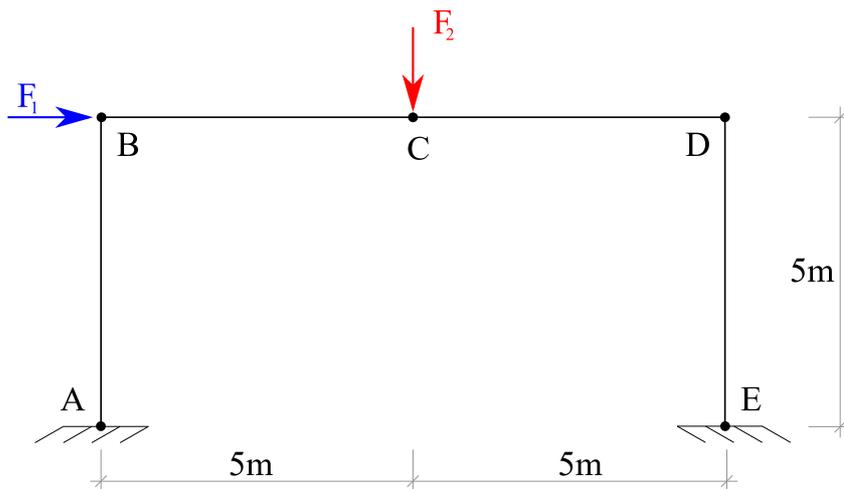


Figura 29 – Esquema estrutural do pórtico bi-engastado.

Para modelar a estrutura, Seck [4] explicita que foram adotadas as características geométricas de um perfil IPE240 que, segundo a tabela de conversão de bitolas da Gerdau, equivale ao perfil W 250 x 28,4. A seção transversal do perfil europeu é mostrada na Figura 30 e suas dimensões encontram-se dispostas na tabela 13.

Essas grandezas, bem como a posição de aplicação das cargas, são consideradas determinísticas neste problema. Deste modo, assim como no exemplo anterior, as barras que compõem o pórtico possuem características geométricas regulares.

O perfil é constituído de aço, que é um material com resistência à tração idêntica a de compressão, assim como no problema anterior. O módulo de Young E também é considerado determinístico e assumido igual a 210 GPa .

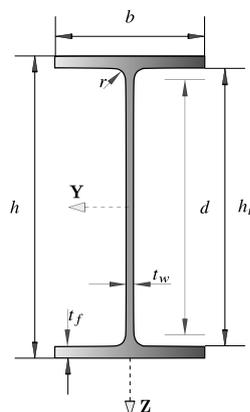


Figura 30 – Seção transversal do perfil adotado para compor o pórtico. Fonte: Adaptado de Seck [4]

Tabela 13 – Características geométricas do perfil adotado para o pórtico. Fonte: Adaptado de Seck [4]

Medidas do perfil						
$h(mm)$	$b(mm)$	$t_w(mm)$	$t_f(mm)$	$r(mm)$	$h_i(mm)$	$d(mm)$
240	120	6,2	9,8	15	220,4	190
Propriedades da seção transversal						
$A(cm^2)$	$W_{pl}(cm^3)$		$I(cm^4)$			
	y	z	y	z		
39,12	366,6	73,92	3892	283,6		

De modo análogo ao exposto no exemplo anterior, a solução do problema inicia-se pela análise estrutural.

Diferentemente da viga, este problema requer que sejam feitos dois diagramas unitários, um para cada força, de modo a determinar a contribuição de cada uma na composição do momento solicitante. Os diagramas de momentos fletores obtidos pela análise são mostrados na Figura 31. As seções de interesse do pórtico foram eleitas através dos pontos de extremos locais em ao menos um dos diagramas.

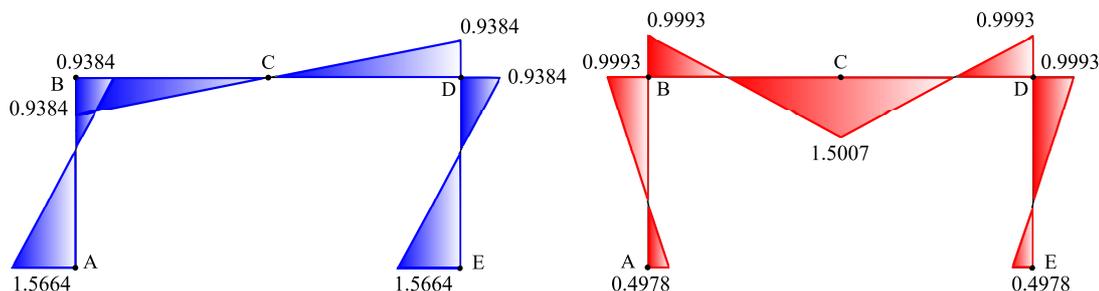


Figura 31 – Diagramas de momentos fletores para cargas unitárias do pórtico.

A exemplo do problema da viga, foram extraídos os vetores de influência (\mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2), respectivamente associados às forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , ambos são mostrados nas Eqs. 4.7 e 4.8.

$$\mathbf{K}_1 = (-1,5664 \ 0,9384 \ 0,0012 \ -0,93603 \ 1,5592), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K}_2 = (0,49786 \ -0,99929 \ -1,5007 \ -0,99929 \ 0,49786). \quad (4.8)$$

Terminada a etapa de análise estrutural, os vetores de influência dos carregamentos podem ser usados na modelagem probabilística do problema.

As forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , e o momento resistente \mathbf{M}_s em cada nó são considerados variáveis aleatórias com função de distribuição de probabilidades normal. Os parâmetros das distribuições dessas variáveis aleatórias encontram-se listados na tabela 14.

Tabela 14 – Parâmetros das variáveis aleatórias consideradas no exemplo do pórtico

Variáveis	Distribuição	Média (μ)	Desvio padrão (σ)
M_{rA}			
M_{rB}			
M_{rC}	Normal	101.292 Nm	5.064, 6 Nm
M_{rD}			
M_{rE}			
F_1	Normal	20.000 N	6.000 N
F_2	Normal	40.000 N	12.000 N

Como este modelo é carregado por duas forças, a amostra de momentos solicitantes empregada pelo MC e pelo KS, é definida por uma combinação dos carregamentos. A Eq.4.9 mostra como os vetores aleatórios de realizações das forças são ponderados pelos seus respectivos vetores de influência de modo a compor a matriz cujas colunas contêm as realizações de momento solicitante em cada seção.

$$\mathbf{M}_{s(n \times 5)} = \mathbf{F}_{1(n \times 1)} \mathbf{K}_{1(1 \times 5)} + \mathbf{F}_{2(n \times 1)} \mathbf{K}_{2(1 \times 5)}. \quad (4.9)$$

Já os parâmetros de momento resistente usados na modelagem do problema com a *Toolbox* Reliab Tbx R1.5 para uma dada seção (i), $(\mu_{M_{r(i)}}, \sigma_{M_{r(i)}})$ são obtidos segundo a Eq.4.10.

$$(\mu_{M_{(i)}}, \sigma_{M_{(i)}}) = \sum_{j=1}^2 K_{j(i)} (\mu_{F_j}, \sigma_{F_j}). \quad (4.10)$$

Neste ponto, pode-se calcular a PF via FORM, assim como foi feito para a viga. Os valores obtidos encontram-se dispostos na tabela 15 assim como aqueles encontrados na literatura.

Tabela 15 – PF s das seções do pórtico encontradas na literatura e no presente trabalho via FORM

	Trabalho	Seck [4]	Kagho-Gouadijo [35]	Orlandi [34]	Presente trabalho
	Metodologia	FORM	MC	MC	FORM
Seção	A	$1,01 \cdot 10^{-13}$	$1,08 \cdot 10^{-13}$	0	$1,0167 \cdot 10^{-13}$
	B	$8,14 \cdot 10^{-09}$	$8,5 \cdot 10^{-09}$	0	$8,1665 \cdot 10^{-9}$
	C	0,0137	0,0139	0,0126	0,0136
	D	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
	E	$1,94 \cdot 10^{-5}$	$2,02 \cdot 10^{-5}$	$1,94 \cdot 10^{-5}$	$1,9450 \cdot 10^{-5}$

Novamente, as PF calculadas pela metodologia numérica foram semelhantes às aquelas extraídas da literatura. Essas PF serão empregadas como referência para análise de precisão e convergência das metodologias testadas.

Para manter o padrão de comparação estabelecido no problema anterior, as simulações tiveram número de observações idênticos àqueles adotados no problema da viga. Os números de observações encontram-se listados na Eq.4.11:

$$n = \{401, 4.001, 40.001, 400.001, 4.000.001\}. \quad (4.11)$$

A evolução das probabilidades de falha para as seções A, B, C, D e E são mostradas nas Figuras 32, 33, 34, 35 e 36 respectivamente. Assim como no exemplo abordado anteriormente, constam nas figuras os *boxplots* com os valores observados de probabilidade de falha das seções de interesse.

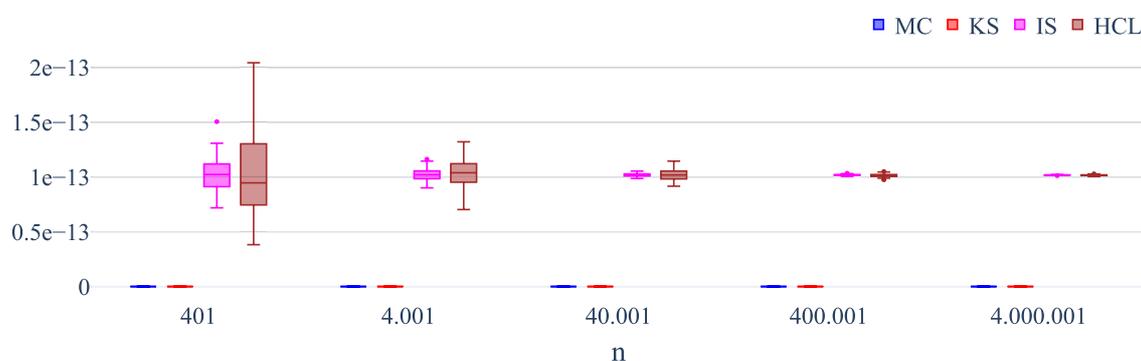


Figura 32 – Evolução da probabilidade de falha na seção A do pórtico para diferentes números de observações adotados.

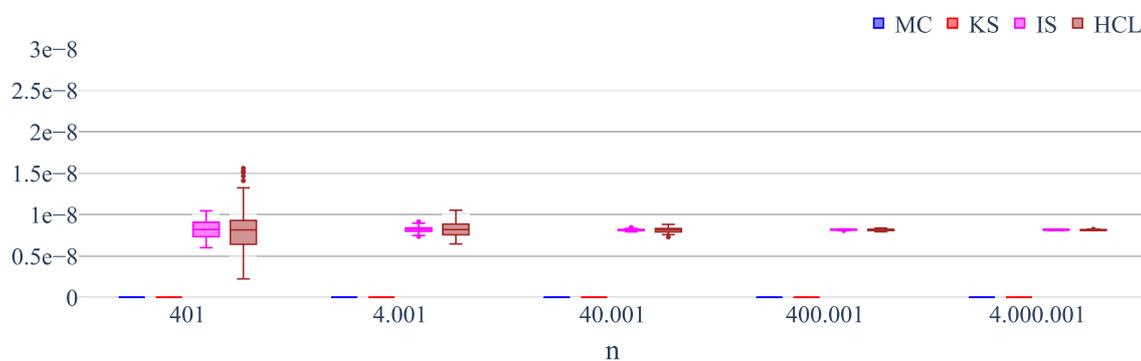


Figura 33 – Evolução da probabilidade de falha na seção B do pórtico para diferentes números de observações adotados.

Nas Figuras 32 e 33, pode-se notar comportamento convergente para o LHS e para o IS. Estes conseguiram aproximar razoavelmente a PF analítica das seções A e B do problema do pórtico. Quanto ao KS, para as seções A e B, e ao MC, para a seção A, encontraram valores nulos para a PF .

Os resultados encontrados pelo MC para as seções A e B do pórtico podem ser justificados pela ordem de grandeza da PF analítica destas seções. Lembrando-se da recomendação de Haldar e Mahadevan [2], nota-se que para a determinação de probabilidades de falha de ordem aproximada a 10^{-13} (seção A) e 10^{-9} (seção B) segundo a literatura, seriam necessárias 10^{14} e 10^{10} amostras aleatórias, respectivamente, o que não foi o caso neste trabalho, já que o número de amostras foi limitado a 10^8 . Essa limitação se deve ao recurso computacional disponível, que não foi suficiente para viabilizar análises com um número superior de amostras.

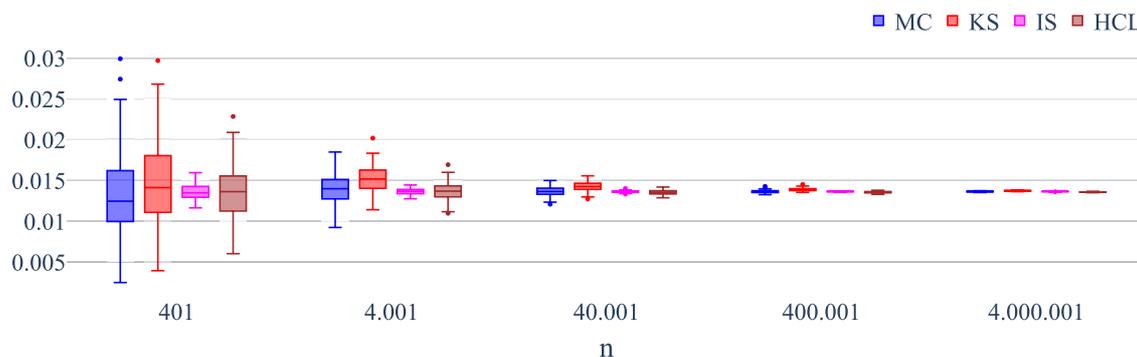


Figura 34 – Evolução da probabilidade de falha na seção C do pórtico para diferentes números de observações adotados.

Na Figura 34, nota-se que todos os métodos apresentaram comportamento convergente e, aparentemente, para número de observações superior a 400.001 pode-se dizer que o resultado foi satisfatório. todos os métodos conseguiram aproximar razoavelmente a PF analítica, uma vez que os *boxplots* referentes a essas simulações se encontram agrupados. Como a PF desta seção tem ordem de grandeza similar àquela referente a seção C do problema anterior (viga), o resultado de todas as metodologias já era previsto.

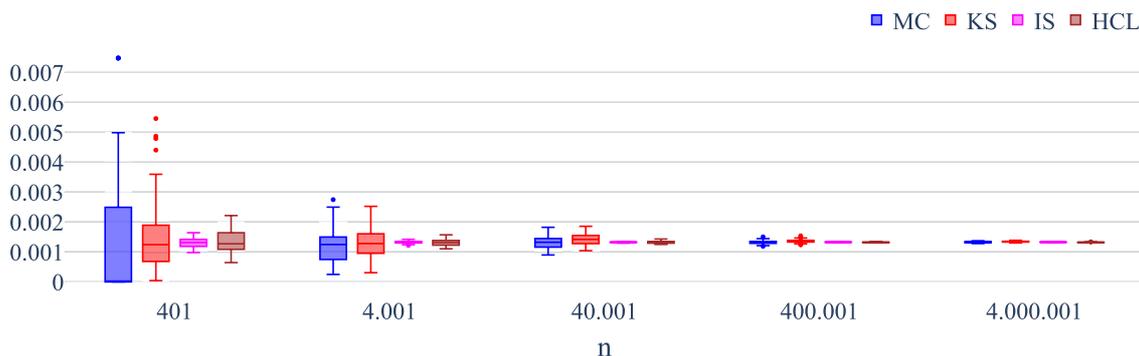


Figura 35 – Evolução da probabilidade de falha na seção D do pórtico para diferentes números de observações adotados.

Na Figura 35, nota-se novamente a convergência, e uma aproximação razoável da PF analítica, para todos os métodos. Relembrando-se das recomendações de Haldar e Mahadevan [2], assim como na seção anterior, a PF desta seção possui ordem de grandeza adequada para ser aproximada satisfatoriamente com os números de observações adotados.

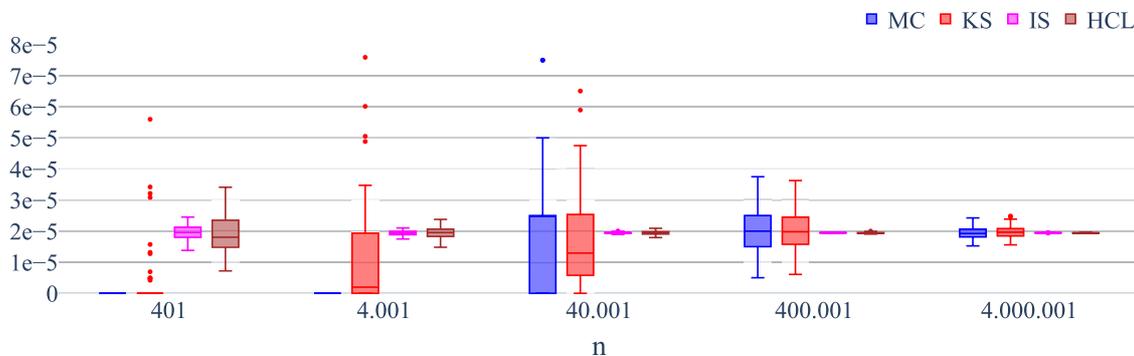


Figura 36 – Evolução da probabilidade de falha na seção E do pórtico para diferentes números de observações adotados.

Analisando-se a Figura 36, nota-se que o LHS e o IS convergiram rapidamente para as probabilidades de falha analíticas. Mesmo para números de observações reduzidos, 401 e 4.001, ambos os métodos mostram a mediana dos resultados muito próximos da PF encontrada via FORM. O MC e o KS não encontraram resultados razoáveis com menos que 400.001 observações. Contudo, pode-se dizer que aproximaram a PF analítica com 4.000.001 observações, mantendo a variabilidade dos resultados superior àquelas apresentadas pelo IS e pelo LHS.

Ressalta-se que nas figuras 33 e 36 foram omitidos alguns *outliers* para garantir a visualização dos gráficos visto que esses *outliers* se encontravam em escala muito superior à *PF* de referência.

Assim como no exemplo da viga, as Tabelas 16, 17, 18, 19 e 20 mostram as médias das *PF* encontradas por cada metodologia com cada número de observações nas seções A, B, C, D e E do pórtico respectivamente. Observa-se que, de fato, o IS e o LHS foram capazes de aproximar razoavelmente as *PF* referência de todas as seções de interesse. O MC e o KS não mostraram uma aproximação razoável da *PF* para as seções A e B.

Tabela 16 – Média das *PF* encontradas, na seção A do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0	0	$1,0195 \cdot 10^{-13}$	$1,0232 \cdot 10^{-13}$
4.001	0	0	$1,0231 \cdot 10^{-13}$	$1,0440 \cdot 10^{-13}$
40.001	0	0	$1,0179 \cdot 10^{-13}$	$1,0171 \cdot 10^{-13}$
400.001	0	0	$1,0168 \cdot 10^{-13}$	$1,0136 \cdot 10^{-13}$
4.000.001	0	0	$1,0170 \cdot 10^{-13}$	$1,0152 \cdot 10^{-13}$

Tabela 17 – Média das *PF* encontradas, na seção B do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0	0	$8,2087 \cdot 10^{-09}$	$8,1207 \cdot 10^{-09}$
4.001	0	0	$8,2024 \cdot 10^{-09}$	$8,2451 \cdot 10^{-09}$
40.001	0	0	$8,1388 \cdot 10^{-09}$	$8,1194 \cdot 10^{-09}$
400.001	$2,4999 \cdot 10^{-08}$	$1,2499 \cdot 10^{-08}$	$8,1696 \cdot 10^{-09}$	$8,1468 \cdot 10^{-09}$
4.000.001	$7,4999 \cdot 10^{-09}$	$6,9579 \cdot 10^{-09}$	$8,1674 \cdot 10^{-09}$	$8,1487 \cdot 10^{-09}$

Tabela 18 – Média das *PF* encontradas, na seção C do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,0131	0,0145	0,0136	0,0136
4.001	0,0137	0,0150	0,0136	0,0136
40.001	0,0136	0,0142	0,0136	0,0135
400.001	0,0136	0,0138	0,0136	0,0135
4.000.001	0,0136	0,0137	0,0136	0,0135

Tabela 19 – Média das *PF* encontradas, na seção D do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,0012	0,0014	0,0013	0,0013
4.001	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
40.001	0,0013	0,0014	0,0013	0,0013
400.001	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
4.000.001	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013

Tabela 20 – Média das *PF* encontradas, na seção E do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	2,4937 10^{-05}	3,2350 10^{-05}	1,9564 10^{-05}	1,9093 10^{-05}
4.001	2,2494 10^{-05}	1,8550 10^{-05}	1,9367 10^{-05}	1,9447 10^{-05}
40.001	1,8499 10^{-05}	1,6973 10^{-05}	1,9449 10^{-05}	1,9459 10^{-05}
400.001	2,0024 10^{-05}	1,9948 10^{-05}	1,9459 10^{-05}	1,9424 10^{-05}
4.000.001	1,9299 10^{-05}	1,9713 10^{-05}	1,9450 10^{-05}	1,9413 10^{-05}

As tabelas 21, 22, 23, 24 e 25 mostram os valores de CV da *PF* aproximada por cada metodologia e cada número de observações. Observa-se que, para aquelas seções em que uma metodologia aproximou razoavelmente a *PF* referência, o CV foi decaindo à medida que o número de observações foi aumentado, indicando que precisão do método é melhor quanto mais observações da função de estado limite sejam feitas. nas seções A e B, o CV encontrado pelo MC e pelo KS, mesmo com 4.000.001 observações, se mostrou elevado. A ordem de grandeza do CV nesses casos indica que o método não foi capaz de aproximar a *PF* com razoável precisão. Contudo, os valores médios de *PF* mostrados na Tabela 17, para o MS e o KS, se mostram numericamente próximos àqueles tomados como referência.

Tabela 21 – CV das *PF* encontradas, na seção A do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0	0	0,1422	0,3695
4.001	0	0	0,0487	0,1242
40.001	0	0	0,0133	0,0469
400.001	0	0	0,0049	0,0128
4.000.001	0	0	0,0016	0,0042

Tabela 22 – CV das *PF* encontradas, na seção B do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0	0	0,1302	0,3246
4.001	0	0	0,0405	0,1085
40.001	0	0	0,0117	0,0358
400.001	10,0000	10,0000	0,0046	0,0108
4.000.001	5,7148	3,5992	0,0011	0,0040

Tabela 23 – CV das *PF* encontradas, na seção C do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	0,4384	0,3455	0,0679	0,2310
4.001	0,1469	0,1185	0,0262	0,0788
40.001	0,0434	0,0404	0,0083	0,0210
400.001	0,0135	0,0122	0,0027	0,0077
4.000.001	0,0041	0,0038	0,0008	0,0025

Tabela 24 – CV das *PF* encontradas, na seção D do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	1,4070	0,7760	0,1111	0,2751
4.001	0,4256	0,3607	0,0288	0,0767
40.001	0,1505	0,1300	0,0106	0,0282
400.001	0,0418	0,0385	0,0029	0,0077
4.000.001	0,0147	0,0135	0,0009	0,0026

Tabela 25 – CV das *PF* encontradas, na seção E do exemplo do pórtico, por cada metodologia e para cada número de observações.

n	MC	KS	IS	LHS
401	10,0000	4,2849	0,1086	0,3345
4.001	3,5647	2,0709	0,0365	0,0930
40.001	1,0970	0,8368	0,0108	0,0281
400.001	0,3599	0,3237	0,0035	0,0101
4.000.001	0,0950	0,0923	0,0012	0,0029

Visando efetuar a mesma análise mostrada no exemplo anterior (viga) são mostrados nas figuras 37, 38, 39, 40 e 41 os valores absolutos das diferenças percentuais, calculados conforme a Eq.4.6, relativos à *PF* analítica das seções A, B, C, D e E respectivamente. Essas figuras, assim como no problema anterior, corroboram com as análises preliminares feitas sobre as figuras 32, 33, 34, 35 e 36.

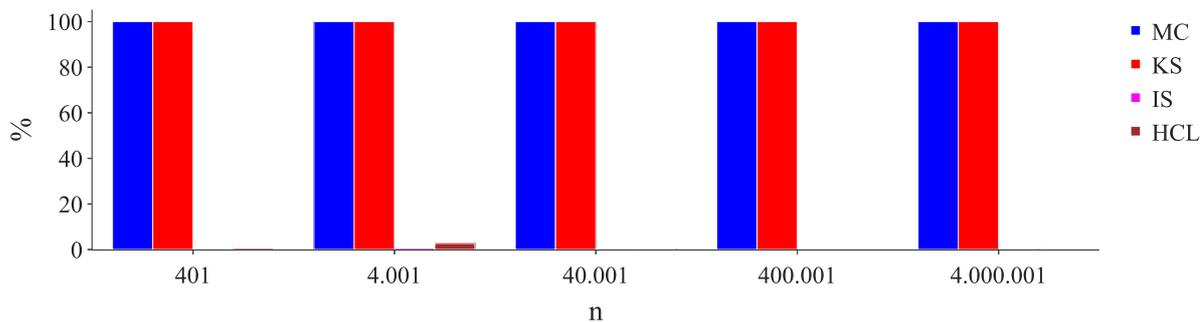


Figura 37 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção A do pórtyco.

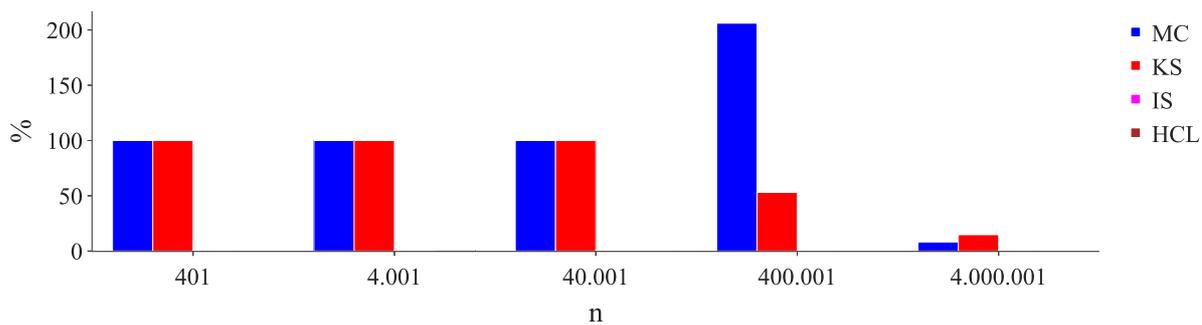


Figura 38 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção B do pórtyco.

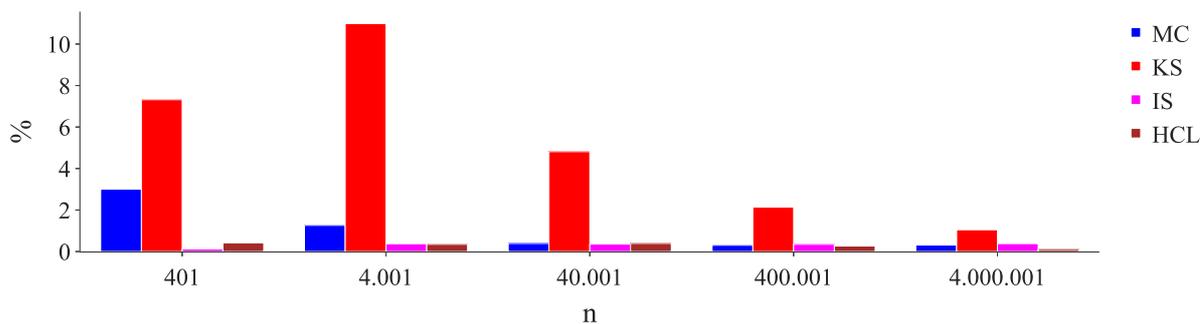


Figura 39 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção C do pórtyco.

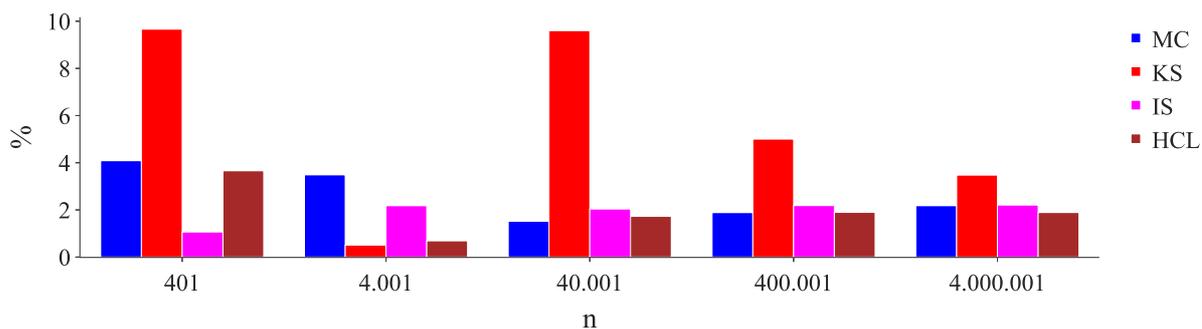


Figura 40 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção D do pórtyco.

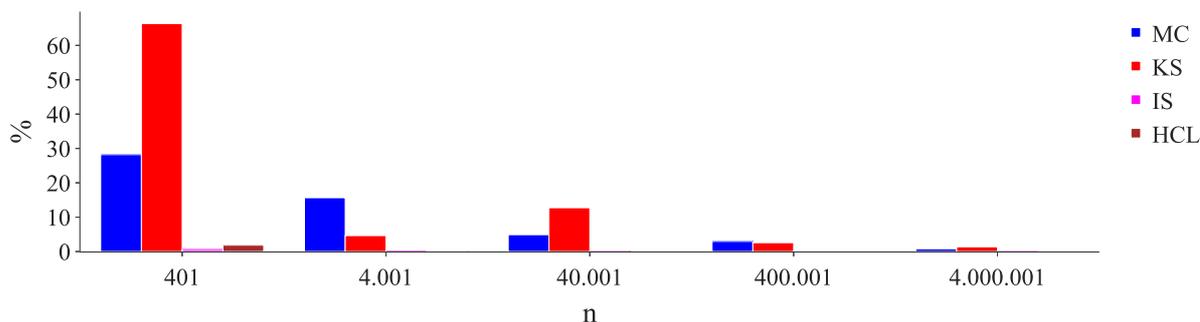


Figura 41 – Erro percentual relativo à probabilidade de falha referência na seção E do pórtico.

Nas figuras 37 e 38, nessa última até 40.001 observações, o KS apresentou erros iguais a 100%. Tal fato era esperado visto que nas figuras 32 e 33 a PF estimada por essa metodologia foram nulas para as referidas simulações. O mesmo pode ser afirmado para o MC em todas as simulações da seção A e para as três primeiras simulações da seção B.

Na seção B, com 400.001 observações, o MC encontrou demasiados cenários de falha e apresentou um erro superior a 100%, tal fato é esperado visto que se trata um experimento que explora a aleatoriedade. Quando o número de observações foi incrementado, 4.000.001, o método aproximou a PF de referência porém, como pode ser visto na tabela 22, com CV elevado, quando comparado ao IS e ao LHS. Para a mesma seção, até 40.001 observações, o KS não encontrou a área abaixo da PDF no domínio de falha. Nas simulações posteriores, onde os números de observações foram superiores a 400.001, as diferenças percentuais se mostraram decrescentes.

As médias dos tempos computacionais demandados para a execução das análises realizadas no exemplo do pórtico são mostrados na Tabela 26.

Tabela 26 – Evolução da média de tempo demandado por cada metodologia em segundos

n	MC	KS	IS	LHS
401	0.00012	0.07573	0.06742	0.06882
4.001	0.00014	0.21677	0.65580	0.65405
40.001	0.00037	0.67110	6.57605	6.56265
400.001	0.00309	3.38801	65.55526	65.40256
4.000.001	0.03941	19.26653	617.33420	598.83540

Nota-se que, de maneira semelhante ao exemplo da viga, o método de Monte Carlo demandou tempo inferior ao das outras metodologias para todos os números de amostras.

Observa-se, também, que os tempos demandados pelo IS e pelo LHS foram similares ou superiores àqueles demandados pelas outras duas metodologias em todas as simulações realizadas.

Reiterando os resultados apresentados por Santos [10], o IS se mostra um método mais lento, porém mais preciso que o MC.

No próximo capítulo serão apresentadas algumas análises complementares e as conclusões relativas ao presente trabalho.

5 ANÁLISES COMPLEMENTARES E CONCLUSÕES

Com o objetivo de estabelecer uma base comparativa entre os métodos baseados em simulações, com e sem técnicas de redução de variância, e um método de meta-modelagem pouco explorado na confiabilidade estrutural, este trabalho apresentou uma análise entre os métodos de MC, KS, IS e LHS aplicados à determinação das probabilidades de falha em dois modelos numéricos.

Os métodos foram explorados quanto à capacidade de aproximar a *PF* analítica dos problemas propostos. A convergência e o tempo de análise foram acompanhados através do incremento no número de observações da função de estado limite realizadas.

Pelo exemplo da viga, pode-se avaliar as metodologias quando aplicadas a problemas com *PF* de ordem de grandeza maiores. Segundo Orlandi [34], o Eurocode (2002) determina essa ordem de grandeza para problemas do ELS. Já no segundo exemplo foi possível avaliar um problema com *PF* de ordens de grandeza menores que, ainda segundo Orlandi [34], são associadas ao ELU de edifícios residenciais pelo Eurocode (2002).

Em ambos os exemplos analisados, os métodos IS e LHS apresentaram aproximações razoáveis da *PF* analítica e daquelas extraídas da literatura, com baixo CV da *PF* indicando boa precisão nos resultados. Esses métodos de redução de variância se mostraram mais eficazes e precisos, com os números de observações adotados, em aproximar a *PF* quando esta apresenta ordem de grandeza inferior a 10^{-5} .

O MC convergiu para as probabilidades de falha analíticas quando essas possuíam ordem de grandeza aproximável por esta metodologia com os números de observações adotados.

O KS não apresentou melhora significativa em termos de precisão quando comparado ao MC. Uma justificativa para tal observação reside no fato de que o domínio de falha dos problemas abordados se encontra na cauda da PDF da equação de estado limite.

Com relação à média dos tempos computacionais, observou-se que, para os exemplos analisados, o MC puro apresentou melhor desempenho pois, em todas as simulações, foi aquele que demandou menor tempo dentre todas as metodologias testadas. Entretanto, com base nos resultados obtidos no segundo exemplo, infere-se que para problemas cujo recurso computacional disponível não apresente capacidade de efetuar um número de observações suficiente para tratar o problema, ele pode se tornar impreciso ou, até mesmo, fornecer resultados que não se aproximam da *PF* do problema em estudo.

O KS apresentou tempo médio superior àquele demandado pelo MC em todos os testes feitos. Tal fato pode ser justificado pelo conjunto de operações que se fazem necessárias à sua aplicação, como a construção do diagrama de frequências e o ajuste da curva aos pontos do diagrama.

O IS e o HCL demandaram, em média, tempos de processamento similares entre si e superiores àqueles demandados pelo MC, cerca de 6.000 vezes maior, e pelo KS, cerca de 30 vezes maior, quando comparados com o mesmo número de observações.

Pode-se, partindo das figuras 26, 27, 28, 37, 38, 39, 40 e 41, inferir sobre qual número de observações leva cada metodologia a uma faixa preestabelecida de erro aceitável.

Primeiramente, com a faixa aceitável para o erro, na ordem dos 5%, percebe-se que o MC demandou 401 observações para as seções A, B e C da viga e C e D do pórtico. Foram necessárias 40.001 observações para a seção E do pórtico e o método não encontrou *PF* para as seções A e B desse problema.

O KS também não atingiu resultados com erros dentro dessa faixa de erro nas seções A e B do pórtico. Nas seções C e D do pórtico foram necessárias 40.001 e 4.000.001 observações e no problema da viga, o método demandou 401, 4.001 e 40.001 observações para as seções A, B e C respectivamente.

O LHS apresentou resultados nessa faixa de erro aceitável em todas as seções de ambos os problemas. Foram necessárias 401 observações para que o método apresentasse resultados nessa faixa em todas as seções estudadas.

O IS foi apresentado demanda por observações similar àquela mostrada pelo LHS. Foram necessárias 401 observações para todas as seções da viga e do pórtico.

Os resultados acima descritos encontram-se resumidos na tabela 27.

Tabela 27 – Mapa de número de observações por método e probabilidade de falha. Faixa de erro aceitável $\epsilon < 5\%$

Seção de interesse	PF	MC	KS	IS	LHS	Legenda
Viga A	0,2975					401
Viga B	0,0925					4.001
Viga C	0,0370					40.001
Pórtico A	$1,0167 \cdot 10^{-13}$					400.001
Pórtico B	$8,1665 \cdot 10^{-09}$					4.000.001
Pórtico C	0,0136					$5\% < \epsilon < 100\%$
Pórtico D	0,0013					$\epsilon \ge 100\%$
Pórtico E	$1,9450 \cdot 10^{-05}$					

Ao tomar uma faixa de erros aceitáveis um pouco mais restrita, na ordem de 1%, nota-se que o MC fornece resultados nesta faixa de diferenças percentuais para todas as seções da viga, sendo necessárias 401 para as seções A e C e 4.001 para a seção B. No pórtico foi observado resultados dentro desta faixa apenas nas seções C e E, com 40.001 e 4.000.001 observações respectivamente.

O KS demandou 4.001 observações na seção A, 400.001 observações na seção B e 4.000.001 na seção C da viga. Esse método também não conseguiu aproximar a *PF* em nenhuma das seções do pórtico, dada essa faixa de diferenças percentuais aceitável.

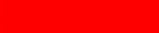
Ressalta-se que para as seções C, D e E do pórtico o método apresentou diferenças percentuais menores que 5%, como foi exposto na análise da tabela 27.

O LHS apresentou resultados dentro dessa faixa para quase todas as seções dos dois problemas. Foram necessárias 4.001 observações para a seção A da viga, 40.001 nas seções B e C da viga, 400.001 observações para a seção A do pórtico, 401 para as seções B e C do pórtico e 4.001 para a seção E do pórtico. Na seção D do pórtico o LHS não conseguiu mostrar resultados com diferenças percentuais menores que 1% com os números de observações adotados nesse trabalho.

O IS, novamente, foi o método que demandou, em geral, menor número de amostras para atingir essa faixa de erros aceitáveis. Com 401 observações apresentou erros dentro da faixa em quase todas as seções de ambos os exemplos, excetuando-se a seção D do pórtico onde o método não apresentou resultados dentro dessa faixa.

Esses resultados encontram-se dispostos na tabela 28.

Tabela 28 – Mapa de número de observações por método e probabilidade de falha. Faixa de erro aceitável $\epsilon < 1\%$

Seção de interesse	PF	MC	KS	IS	LHS	Legenda
Viga A	0,2975					 401
Viga B	0,0925					 4.001
Viga C	0,0370					 40.001
Pórtico A	$1,0167 \cdot 10^{-13}$					 400.001
Pórtico B	$8,1665 \cdot 10^{-09}$					 4.000.001
Pórtico C	0,0136					 $1\% < \epsilon < 100\%$
Pórtico D	0,0013					 $\epsilon \geq 100\%$
Pórtico E	$1,9450 \cdot 10^{-05}$					

As tabelas 27 pode dar uma ideia de quantas observações seriam necessárias para resolver os problemas aqui explorados caso não se conhecesse a PF previamente.

Adotando um erro máximo admissível de 5%, por exemplo, sabe-se que seriam necessárias 401 observações para resolver o problema da viga com emprego do LHS e do IS. Sabe-se também, que O MC e o KS não conseguiriam resolver todas as seções do pórtico visto que essas metodologias não conseguiram aproximar satisfatoriamente as seções A e B desse problema.

É possível então, comparar os tempos demandados por cada metodologia para atingir certo nível de precisão. Os tempos supracitados, bem como o número de observações, por faixa de erro aceitável e por metodologia encontram-se dispostos na tabela 29.

Tabela 29 – numero de observações e tempo mínimo necessário para que cada metodologia apresente erros dentro das faixas de erro aceitáveis.

ϵ_{max}	Exemplo	MC	KS	IS	LHS	
5%	Viga	Observações	401	40.001	401	401
		Tempo (s)	0,00004	0,44509	0,04071	0,04146
	Pórtico	Observações	-	-	401	401
		Tempo (s)	-	-	0,06742	0,06882

Para o problema da viga, é possível notar que o MC se mostrou o mais rápido entre os métodos. Tal característica o torna mais indicado para tratar problemas onde a memória RAM não seja um limitador, mas sim o tempo. Análises em conjunto com o método dos elementos finitos, para modelos com poucos graus de liberdade e PF típica de ELS, conforme tipificado pelo Eurocode (2002), são potenciais problemas endereçáveis por essa metodologia.

O problema do pórtico, por sua vez, mostra que o MC e o KS não foram eficazes e que o IS e o LHS obtiveram comportamento similar, tanto em demanda de observações quanto em tempo computacional.

Com as análises efetuadas pelo presente trabalho, pode-se concluir que, com o recurso computacional disponível, o KS se mostrou capaz de aproximar razoavelmente as PF do exemplo da viga e das seções C, D e E do exemplo do pórtico. Entretanto, para as menores PF analisadas, seções A e B do exemplo do pórtico, o método se mostrou ineficaz em encontrar uma aproximação razoável apresentando erros percentuais superiores a 100%.

A superioridade do KS com relação ao MC apresentada por Ballaben et al. [3], no que se refere ao número de observações e ao tempo computacional demandado para aproximar a PDF, não se foi constatada em nenhuma das seções estudadas. O número de observações para se atingir uma precisão mínima (vide tabelas 27 e 28) demandada pelo KS foi maior em praticamente todas as seções de interesse, com exceção da seção A da viga, onde as metodologias MC e KS obtiveram resultados semelhantes, sendo que, em termos de tempo computacional (vide tabela 29), o KS demandou maior tempo para efetuar os cálculos em ambos os exemplos analisados.

O KS se mostrou ainda menos vantajoso que o MC quando esse último é empregado em conjunto com as técnicas de redução de variância (IS e LHS). Tais artifícios de amostragem conferiram ao MC a capacidade de estimar as menores PF aqui tratadas com um número de observações inferior ao demandado pelo KS e o MC com simples contagem de cenários. Além disso, o tempo computacional do IS e do LHS, para uma dada precisão da PF , foi menor no exemplo do pórtico.

Assim, apesar dos resultados promissores apresentados por textos da literatura para a aproximação da PDF, o KS não se mostrou tão eficiente para a aproximar a

PF em problemas de confiabilidade estrutural. Os resultados obtidos para valores mais significativos de *PF* via KS são semelhantes àqueles alcançados através de todos os métodos avaliados. Entretanto, para valores menos significativos, o método fornece erros maiores que 5% ou, até mesmo, não leva a resultados corretos.

Desta forma, pelos resultados obtidos neste trabalho, recomenda-se o uso do MC para problemas de confiabilidade estrutural onde as *PF* tem valores mais significativos ou o uso de técnicas de redução de variância (IS e LHS) para o MC em situações onde as *PF* assumem valores de ordem inferior a 10^{-5} .

REFERÊNCIAS

- 1 MAREK, P. *et al.* Simulation-based reliability assessment: Tool for efficient steel design. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 46, p. 156–158, 1998.
- 2 HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability, and statistical methods in engineering design**. [S.l.]: J. Wiley & Sons, Incorporated, 2000.
- 3 BALLABEN, J. S. *et al.* An alternative to monte carlo simulation method. **Mecánica Computacional**, v. 36, n. 15, p. 631–640, 2018.
- 4 SECK, E. H. B. *et al.* **Contribution au développement d’outils analytiques et numériques pour quantifier et qualifier la robustesse des structures**. Tese (Doutorado) — Paris 10, 2018.
- 5 MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. [S.l.]: John wiley & sons, 2018.
- 6 MAREK, P. *et al.* Codified design of steel structures using monte carlo techniques. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 52, n. 1, p. 69–82, 1999.
- 7 MAREK, P. *et al.* Transition from partial factors method to simulation-based reliability assessment in structural design. **Probabilistic engineering mechanics**, Elsevier, v. 14, n. 1-2, p. 105–118, 1999.
- 8 K, D. P.; W., Z. **Guidance on Structural Reliability Analysis of Marine Structures**. [S.l.], 2003. Disponível em:
<<https://www.gla.ac.uk/external/asranet/members/shipguide/>>.
- 9 KROETZ, H. M. *et al.* Performance of global metamodeling techniques in solution of structural reliability problems. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 114, p. 394–404, 2017.
- 10 SANTOS, K. R. M. d. **Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- 11 HASOFER, A. M. An exact and invariant first order reliability format. **J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE**, v. 100, n. 1, p. 111–121, 1974.
- 12 ELLINAS, C. P. *et al.* Limit state philosophy in pipeline design. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, 1987.
- 13 HURD, C. C. A note on early monte carlo computations and scientific meetings. **IEEE Ann. Hist. Comput.**, IEEE Educational Activities Department, USA, v. 7, n. 2, p. 141–155, apr 1985. ISSN 1058-6180. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1109/MAHC.1985.10019>>.
- 14 ECKHARDT, R. *et al.* the monte carlo method. **Los Alamos Science**, Los Alamos Scientific Laboratory, n. 15, p. 131, 1987.
- 15 METROPOLIS, N. The beginning of the monte carlo method. **Los Alamos Science**, Los Alamos Scientific Laboratory, v. 15, p. 125–130, 1987.

- 16 LI, K. Point-estimate method for calculating statistical moments. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 7, p. 1506–1511, 1992.
- 17 KREJSA, M.; MAREK, P. Transition from deterministic to probabilistic structural steel reliability assessment with special attention to stability problems. In: **Proceedings of 6th International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 19–26.
- 18 ČSN, E. **1-9 (ČSN 73 1401), Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí-Část 1-9: Únava**. [S.l.]: Český normalizační institut, Praha, 1998.
- 19 MCKAY, M. D. *et al.* A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, Taylor & Francis Group, v. 42, n. 1, p. 55–61, 2000.
- 20 VUKAZICH, S.; MAREK, P. Structural design using simulation based reliability assessment. **Acta Polytechnica**, v. 41, n. 4-5, 2001.
- 21 SOOM, E. M. *et al.* Reliability-based design and assessment for lifetime extension of ageing offshore structures. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. **International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**. [S.l.], 2016. v. 49941, p. V003T02A044.
- 22 ZAKI, N. I. M. *et al.* Prediction of 100-year responses of fixed offshore structures using the modified version of finite memory nonlinear system models. In: . [S.l.: s.n.], 2016.
- 23 MUKHLAS, A. *et al.* Efficient derivation of extreme offshore structural response exposed to random wave loads. **Ships and Offshore Structures**, p. 1–15, 03 2018.
- 24 MUKHLAS, A. *et al.* Efficient derivation of extreme non-gaussian stochastic structural response using the finite-memory nonlinear system (fmns nl). part 1: model development. **Ships and Offshore Structures**, p. 1–14, 12 2021.
- 25 AHMAD, S. Z. A. S. *et al.* Offshore structural reliability assessment by probabilistic procedures—a review. **Journal of Marine Science and Engineering**, v. 9, p. 998, 09 2021.
- 26 LI, H.-s. *et al.* Support vector machine for structural reliability analysis. **Applied Mathematics and Mechanics**, Springer, v. 27, n. 10, p. 1295–1303, 2006.
- 27 SILVA, C. F. *et al.* Comparative analyses between monte carlo and kernel smoother methods to evaluate structural reliability. In: **InProceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE-2020)**, 2020. [S.l.: s.n.], 2020.
- 28 MILADINOVIC, B. Kernel density estimation of reliability with applications to extreme value distribution. 2008.
- 29 MANTOVANI, G. Z. *et al.* Failure probability minimization of structures with multiple friction tuned mass dampers under seismic excitations. 2017.

- 30 TORII, A. *et al.* A second order sap algorithm for risk and reliability based design optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 190, p. 106499, 2019. ISSN 0951-8320. Disponível em:
<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832017311092>>.
- 31 TORII, A. J. *et al.* A gradient-based polynomial chaos approach for risk and reliability-based design optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 39, n. 7, p. 2905–2915, may 2017.
- 32 TORII, A. J. On sampling-based schemes for probability of failure sensitivity analysis. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 62, p. 103099, 2020. ISSN 0266-8920. Disponível em:
<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266892020300862>>.
- 33 TORII, A. J.; NOVOTNY, A. A. A priori error estimates for local reliability-based sensitivity analysis with monte carlo simulation. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 213, p. 107749, 2021. ISSN 0951-8320. Disponível em:
<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832021002799>>.
- 34 ORLANDI, A. P. **Uma nova metodologia para avaliação da vulnerabilidade estrutural e robustez**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, Brasil., 2020.
- 35 KAGHO, N. **Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages**. Tese (Doutorado) — Ph. D thesis, University of Paris-est, France, 2013.
- 36 ORLANDI, A. P. *et al.* A new strategy to evaluate the global probability of failure and robustness index using monte carlo simulations. In: **InProceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE-2020)**, 2020. [S.l.: s.n.], 2020.
- 37 NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of structures**. [S.l.]: CRC Press, 2012.
- 38 NAYLOR, T. H. **Computer simulation techniques**. [S.l.], 1966.
- 39 RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo method**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. v. 10.
- 40 KROETZ, H. M. **Meta-modelagem em confiabilidade estrutural**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015.
- 41 SUDRET, B. Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. **arXiv preprint arXiv:1203.2062**, 2012.
- 42 MÜLLER, H. Density adjusted kernel smoothers for random design nonparametric regression. **Statistics & Probability Letters**, v. 36, p. 161–172, 12 1997.
- 43 GONZÁLEZ-MANTEIGA, W. *et al.* Kernel smoothers and bootstrapping for semiparametric mixed effects models. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 114, p. 288–302, 02 2013.