Universidade Federal de Juiz de Fora
ICE - Instituto de Ciências Exatas
Pós-graduação em Física

Obtenção da Equação de Pauli com a Presença de um Campo Gravitacional Fraco

Samuel William de Paulo Oliveira

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2022

Obtenção da Equação de Pauli com a Presença de um Campo Gravitacional Fraco

Samuel William de Paulo Oliveira

Universidade Federal de Juiz de Fora

ICE - Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Mestrado em Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

JUIZ DE FORA

AGOSTO, 2022

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Samuel William de Paulo.
Obtenção da Equação de Pauli com a Presença de um Campo Gravitacional Fraco / Samuel William de Paulo Oliveira. -- 2022.
56 f.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2022.

1. Gravitação Semiclássica. 2. Correções Gravitacionais. 3. Equação de Pauli. 4. Perturbação. I. Shapiro, Ilya Lvovich, orient. II. Título.

Samuel William de Paulo Oliveira

"Obtenção da Equação de Pauli com a Presença de um Campo Gravitacional Fraco"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 15 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilia Chapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 04/08/2022.

Aos meus pais e meu irmão, que estão sempre comigo em todos os momentos.

Resumo

Desde que Einstein desenvolveu a teoria da Relatividade Geral, muitos esforços foram gastos tentando unificar essa teoria com a Mecânica Quântica. Um passo importante nessa direção é a formulação de uma teoria semi-clássica, partindo das equações de movimento para campos de matéria no fundo métrico externo. Em particular, é interessante explorar as correções gravitacionais para a equação de Schrödinger. A primeira generalização relativística de baixa energia da equação para o elétron é chamada de equação de Pauli, como foi desenvolvida por Wolfgang Pauli em 1927, antes da equação de Dirac completamente relativística, para a qual a equação de Pauli funciona como limite não relativístico na presença de um campo eletromagnético. Na presença da gravidade, temos que ir na direção oposta porque é bem conhecido como formular a equação de Dirac. Neste trabalho, desenvolvido em colaboração com Guilherme Yoshi Oyadomari, mostramos como realizar a derivação da equação de Pauli na presença de campos eletromagnético e gravitacional fraco, de forma a mantermos uma métrica de fundo geral, respeitando a linearidade da perturbação da métrica. Os resultados podem ser aplicados ao teste de gravidade relativística em física atômica e também podem ser úteis para descrever o movimento de partículas de spin 1/2 no campo externo de uma onda gravitacional e no limite não relativístico da métrica de Schwazrschild. Essas duas formas de métricas serão especificadas no final da dissertação, como forma de teste e aplicação para os resultados obtidos.

Palavras-chave: Gravitação semiclássica, correções gravitacionais, equação de Pauli, perturbação.

Abstract

Since Einstein developed the theory of General Relativity, much effort has been spent trying to unify this theory with Quantum Mechanics. An important step in this direction is the formulation of a semi-classical theory, starting from the equations of motion for matter fields in the external metric background. In particular, it is interesting to explore the gravitational corrections to the Schrödinger equation. The first low-energy relativistic generalization of the equation for the electron is called the Pauli equation, as it was developed by Wolfgang Pauli in 1927, before the fully relativistic Dirac equation, for which the Pauli equation works as a non-relativistic limit in the presence of an electromagnetic field. In the presence of gravity, we have to go in the opposite direction because it's well known how to formulate the Dirac equation. In this work developed in collaboration with Guilherme Yoshi Oyadomari, we show how to perform the derivation of the Pauli equation in the presence of a electromagnetic and weak gravitational fields, in order to keep a general metric background, respecting the linearity of the metric perturbation.The results can be applied to the relativistic gravity test in atomic physics and can also be useful to describe the motion of 1/2 spin particles in the external field of a gravitational wave and non-relativistic limit of the Schwazrschild metric. These two forms of metrics will be specified at the end of this dissertation, as a way of test and application for the results obtained.

Keywords: Semiclassical gravity, gravitational corrections, Pauli equation, perturbation.

Agradecimentos

- Aos meus pais, Moisés Luiz de Oliveira e Vanuze Aparecida de Paulo de Oliveira, por todo o esforço e dedicação em minha criação, pelo apoio e motivação que sempre me deram ao longo dos meus anos de estudo;

- Ao meu irmão, Tiago Luiz de Paulo Oliveira, por ser sempre a minha maior motivação e fonte de inspiração;

- A todos os meus familiares e todas as gerações da minha família que se esforçaram para tornar a vida da próxima geração um pouco melhor, me concedendo a oportunidade de seguir a carreira acadêmica;

- Aos meus professores e orientadores da graduação, Ana Cláudia Monteiro e Edson Dias, pela contribuição em minha formação, discussões científicas e apoio ao longos desses anos de estudo;

- A todos os demais professores que fazem parte da minha jornada acadêmica e pela sua contribuição para a minha formação profissional;

- Ao meu orientador Prof. Ilya L. Shapiro pelo problema sugerido para resolver, orientação e discussões científicas;

- Ao meu amigo e colega de trabalho Guilherme Yoshi Oyadomari, pela colaboração na realização deste trabalho, e pela parceria ao longo de nosso caminho acadêmico;

- Aos meus amigos João Paulo Melo e Letícia Ildefonso pela grande amizade e companheirismo que desenvolvemos ao longo de todos esses anos;

- Aos meus companheiros de graduação Gabrielle Almeida, João Batista, Igor Peixoto e Thábata Lorenzetti pelo companheirismo nos estudos ao longo dos anos de curso;
- Aos meus amigos do mestrado Publio Rwany, Wagno Cesar, Guilherme Henrique, Vitor Barra e Hemily Gomes por me acompanharem nessa jornada;
- Aos meus grandes amigos Robson Morais Junior e Isabelly Andrade pela forte amizade que desenvolvemos ao longo dos anos;
- Aos meus amigos Alexandre Oliveira e Lucas Vinícius Brites, pelo companheirismo e amizade durante o início da minha jornada no meio acadêmico;
- À CAPES pelo apoio do meu projeto de mestrado.

"Assim como o aumento constante da entropia é a lei primordial do universo, lutar contra o aumento da entropia é a lei primordial da vida".

Václav Havel

Conteúdo

1 Introdução

Ao reunir relatividade restrita com teoria quântica, Dirac conseguiu apresentar uma descrição do comportamento de partículas de spin 1/2 através de uma equação diferencial de primeira ordem. Sua teoria requereu a utilização de matrizes quadridimensionais, ocasionando o surgimento de espinores para descrever os campos de partículas. Além de ter permitido a previsão da existência das antipartículas, também apresentou resultados importantes no limite não relativístico. Esse é o caso da equação de Pauli, uma modificação da equação de Schrödinger, que pode ser obtida tomando o limite não relativístico da equação de Dirac na presença de campo eletromagnético externo. Com a Relatividade Geral sendo uma teoria de gravitação, que estuda a dinâmica da métrica espaço-temporal, é natural tentarmos entender como seus efeitos modificam teorias quânticas de campos, como é o caso do campo de Dirac.

Alguns trabalhos já foram desenvolvidos tratando do limite não relativístico do campo de Dirac em um espaço-tempo curvo, como o trabalho publicado em 2001 por Obukhov [1], onde é realizada um transformação de Foldy Wouthuysen exata para separar as componentes de energia positiva e negativa da equação de Dirac acoplada com uma métrica gravitacional estática, e tomar seu limite não relativístico. Além disso, Obukhov aplica seus resultados em duas métricas distintas: o limite newtoniano da métrica de Schwarzschild e um referencial acelerado. Em 2005 Silenko e Teryaev [2] tratam do mesmo problema, porém dessa vez utilizando a transformação tradicional de Foldy Wouthuysen, obtendo resultados diferentes dos encontrados por Obukhov. Além disso eles calculam equações de movimento para o momento e o spin, aspecto que não havia sido abordado por Obukhov anteriormente.

Em artigo publicado em 2007, Gonçalves *et al.* [3] aplicam Foldy-Wouthuysen exata em um campo de fundo de onda gravitacional e campo magnético constante. Esse artigo, no entanto, apresenta de forma equivocada um termo de precessão de spin para a equação de movimento de σ^i, mesmo na ausência de campo magnético. Esse termo foi corrigido em trabalho publicado por Quach [4] em 2015, onde ele também mostrou a equivalência entre as transformações de Foldy-Wouthuysen exata e tradicional para esse caso específico de campo gravitacional.

Dessa forma, nesta dissertação será apresentada a obtenção de uma equação semelhante à de Pauli, porém com o acréscimo de termos que descrevem a contribuição de um campo gravitacional fraco. O procedimento é desenvolvido de forma a considerar uma métrica geral, desde que seja respeitado o limite de perturbação da métrica de Minkowski. Para compreendermos melhor o quão geral nosso resultado pode ser, será inserida a métrica de onda gravitacional fraca, e também a métrica de Schwarzchild no limite newtoniano, e os resultados serão comparados com [4] e [2], respectivamente.

Assim, esta dissertação será dividida nas seguintes partes. No capítulo 2 será apresentada a obtenção da equação de Pauli convencional, a partir do limite não relativístico da equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético externo. O capítulo 3 é dedicado à gravitação linearizada, onde apresentaremos os resultados de Relatividade Geral para uma métrica gravitacional fraca, caracterizada por uma perturbação linear na métrica de Minkowski. No capítulo 4 poderemos apresentar o formalismo de tetradas, ferramenta matemática necessária para o desenvolvimento da ação de Dirac em um espaço-tempo curvo, a qual será obtida no final desse capítulo. Por fim, no capítulo 5, será apresentada a dedução da equação de Pauli com correção gravitacional fraca e sua comparação com os artigos já citados. As equações de movimento provenientes de nossos resultados serão apresentadas e deduzidas na dissertação de Guilherme Yoshi Oyadomari [5], com quem este trabalho foi realizado em colaboração. Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões tiradas dos resultados e as nossas considerações finais.

2 Campo de Dirac e Equação de Pauli

Este capítulo é dedicado a apresentar a relação do campo de Dirac com a equação de Pauli. Para isso, vamos começar apresentando as equações de Schrödinger e de Dirac. Nosso intuito é inserir um campo eletromagnético na equação de Dirac, para obtermos a equação de Pauli através de seu limite não relativístico e mostrar a relação desta última com a equação de Schrödinger.

2.1 Equação de Schrödinger

Uma das formas de se obter a equação de Schrödinger é a partir da relação clássica de energia e momento

$$E = \frac{p^2}{2m} + U, \tag{2.1}$$

sendo E a energia da partícula, p^2 o módulo quadrático do seu momento, U o potencial ao qual a partícula é submetida e m a sua massa. Em seguida, transformamos energia e momento em operadores quânticos utilizando

$$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}, \qquad\qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\partial_t. \tag{2.2}$$

Aplicando isso em uma função de onda ψ, obtemos a equação de onda de Schrödinger escrita na forma hamiltoniana expressa por

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi. \tag{2.3}$$

Esta é a *equação de Schrödinger* para uma partícula sob efeito do potencial U. Para o caso de uma partícula livre, basta fazermos $U = 0$, e obtemos a expressão

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \tag{2.4}$$

que é a equação de Schrödinger para uma partícula livre.

2.2 Equação de Dirac

Para obtermos a equação de Dirac também precisaremos realizar transformações semelhantes a (2.2). Porém, antes precisamos realizar alguns passos extras, para a equação obtida ser de primeira ordem em derivadas. Assim, partimos da equação de energia relativística

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0, \tag{2.5}$$

sendo

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \qquad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right), \tag{2.6}$$

o quadrimomento relativístico, de forma que $\mu = (0, 1, 2, 3)$, e o mesmo valerá para os demais índices gregos deste capítulo. Agora fazemos a transformação

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= (\gamma^\mu p_\mu + mc)(\zeta^\nu p_\nu - mc) \\ &= \gamma^\mu\zeta^\nu p_\mu p_\nu - mc(\gamma^\mu - \zeta^\mu)p_\mu - m^2c^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

de forma que γ^μ e ζ^ν são coeficientes a serem determinados. Comparando os dois lados dessa equação, precisamos fazer $\gamma^\mu = \zeta^\mu$ para eliminar o termo linear em p_μ. Com isso, restará encontrar o valor de γ^μ que satisfaça a seguinte relação

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu. \tag{2.8}$$

Abrindo os índices em $(1+3)$ dimensões, vamos perceber que a única forma dessa relação ser satisfeita, é se as quantidades γ^μ e γ^ν forem ambas matrizes de quarta ordem, escritas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

onde I são matrizes identidades 2×2, e σ^k são matrizes de Pauli, de forma que índices latinos são utilizados para coordenadas espaciais $k = (1, 2, 3)$, e o mesmo será válido para o restante deste capítulo (excetuando o índice t que é utilizado especificamente para derivada temporal). Essas matrizes γ^μ são chamadas *matrizes de Dirac.* Além disso, as matrizes (2.9) devem satisfazer a *álgebra de Clifford* dada na expressão

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

Com essas matrizes, podemos escrever a equação de energia relativística da seguinte forma:

$$(\gamma^\nu p_\nu + mc)(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0. \tag{2.11}$$

A física da teoria independe de qual termo escolhemos para zerar e satisfazer essa igualdade. Aqui optamos pela escolha convencional, tomando o segundo parênteses. Então, montamos a equação de Dirac transformando momento em operador, conforme foi feito em (2.2), porém apresentando a forma

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = \left(\frac{i\hbar\partial_t}{c}, -(-i\hbar\vec{\nabla})\right) = i\hbar(\partial_0, \partial_k) = i\hbar\partial_\mu, \tag{2.12}$$

onde fizemos $\left(\frac{1}{c}\partial_t = \partial_0\right)$.

Assim, a equação de Dirac fica escrita como

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0, \tag{2.13}$$

onde Ψ é um espinor, e é representado por uma matriz coluna de quatro componentes. Essa equação pode ser escrita na forma Hamiltoniana

$$i\hbar\partial_t\Psi = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta)\Psi, \tag{2.14}$$

onde

$$\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

As duas primeiras das quatro componentes do espinor de Dirac dizem respeito ao comportamento de partículas com energia positiva, sendo uma para o spin *up* e outra para o spin *down*. As duas últimas representam soluções para energias negativas, também apresentando spins *up* e *down*, que levaram à descoberta das antipartículas, começando com o pósitron, que é a antipartícula do elétron, possuindo mesmas massa e spin, porém carga elétrica oposta.

2.3 Limite Não Relativístico

Agora que as equações de Dirac e de Schrödinger já foram apresentadas, podemos encontrar a equação de Pauli. Para isso, inserimos um campo eletromagnético externo na equação (2.14), utilizando a transformação

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t \to i\hbar\partial_t - e\phi, \\ \vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \dfrac{e}{c}\vec{A} = \vec{\Pi}, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde e é a carga elementar, ϕ é o potencial escalar, $\vec{A}$ é o potencial vetor eletromagnético e $\vec{\Pi}$ é o momento canonicamente conjugado. Vale salientar que aqui estamos usando o sistema de unidades gaussianas. Assim, obtemos a equação

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\phi\right]\Psi. \tag{2.17}$$

Para tomarmos seu limite não relativístico, começamos utilizando a transformação

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right), \tag{2.18}$$

Este mesmo procedimento será utilizado no capítulo 5 para o caso gravitacional, sendo φ a componente de energia positiva do espinor de Dirac (chamada *componente maior*), e χ a componente de energia negativa (chamada de *componente menor*), ambas bidimensionais devido aos spins *up* e *down*. Assim:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi &= i\hbar\begin{pmatrix}\partial_t\varphi\\ \partial_t\chi\end{pmatrix} exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right) + \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} mc^2 exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right) \\ &= \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)+\beta mc^2+e\phi\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

É evidente que as exponenciais irão desaparecer da equação. Utilizando as matrizes α e β como definidas em (2.15), podemos montar um sistema com duas equações escritas como

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi = e\phi\varphi + c\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\chi, \\ i\hbar\partial_t\chi = c\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\varphi + e\phi\chi - 2mc^2\chi. \end{cases} \tag{2.20}$$

O limite não relativístico é tomado na segunda equação de (2.20), ao considerarmos que o termo de energia de repouso é muito maior que a soma dos termos de energia cinética e potencial elétrico, de forma que podemos escrever

$$2mc^2\chi \gg e\phi\chi - i\hbar\partial_t\chi, \tag{2.21}$$

e com isso obtemos

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}}{2mc}\varphi. \tag{2.22}$$

Esta equação evidencia a razão pela qual a componente χ é chamada de *componente menor*, uma vez que o lado direito da equação possui um fator multiplicativo $\vec{\Pi}/mc$, que se torna muito pequeno no limite não relativístico, devido ao baixo valor da velocidade contida em $\vec{\Pi}$. Substituindo este valor na primeira equação de (2.20), podemos obter a equação

$$i\hbar\partial_t\varphi = e\phi\varphi + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})^2}{2m}\varphi, \tag{2.23}$$

e podemos ver que o fator $1/c$ de (2.22) não é mais um problema, devido ao fator c que multiplica o último termo da primeira equação de (2.20). A ausência desse fator evidencia o motivo de φ ser chamado de *componente maior*.

Trabalhando no primeiro termo dessa equação, vamos fazer algumas transformações algébricas para obtermos uma expressão um pouco mais amigável. Para isso, vamos utilizar

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})^2 = \vec{\Pi}^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{\Pi} \times \vec{\Pi} \right). \tag{2.24}$$

Agora resolvemos o produto vetorial no último termo, escrevendo

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} \times \vec{\Pi} &= \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \times \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \\ &= \frac{i\hbar e}{c} \nabla \times \vec{A} = \frac{i\hbar e}{c} \vec{B}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

sendo $\vec{B}$ o campo magnético externo. Substituindo os resultados (2.24) e (2.25) em (2.23), podemos escrever a equação

$$i\hbar\partial_t \varphi = H\varphi, \tag{2.26}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \tag{2.27}$$

Essa expressão é conhecida como *equação de Pauli*, e o fator multiplicativo do último termo,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}, \tag{2.28}$$

é chamado *magnéton de Bohr*.

2.4 Interação do Spin com o Campo Externo

Ao tomarmos a equação (2.27) e fazermos o campo eletromagnético igual a zero, obteremos uma equação muito semelhante à (2.4). Porém, na equação de Pauli aparece uma função de onda de duas componentes (φ), e na equação de Schrödinger de apenas uma componente (ψ). Isso acontece porque a equação de Pauli leva em conta o spin da partícula, sendo uma componente para o spin *up* e a outra componente para o spin *down*. Além disso, o fato dessas equações serem parecidas reflete o fato esperado de que partículas livres não relativísticas possuem o mesmo comportamento, independente de seu spin. Portanto, é possível inferir que a equação de Pauli funciona como uma versão da equação de Schrödinger para uma partícula de spin 1/2 na presença de um campo eletromagnético externo.

Essa diferença fica mais clara ao inserirmos o campo eletromagnético diretamente na equação (2.4), utilizando (2.16), como foi feito para a equação de Dirac, e disso obtermos o resultado

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi + e\phi\,\psi. \tag{2.29}$$

Esta expressão não apresenta o último termo de (2.27), o termo do magnéton de Bohr, que carrega a interação do spin de partículas de spin 1/2 (o qual é representado através das matrizes $\vec{\sigma}$ de Pauli) com o campo eletromagnético aplicado. O mesmo ocorre se tomarmos a equação (2.3), com o termo de potencial U, pois continuará sendo uma equação para uma função de onda de apenas uma componente, ψ, e não uma equação matricial como (2.27). Assim, as equações (2.3), (2.4) e (2.29) são válidas apenas para partículas que não possuem spin.

É importante ressaltar o fato de que a equação (2.27) foi encontrada por Pauli, de forma *ad hoc*, antes de Dirac desenvolver sua teoria completamente relativística, ao somar ao potencial U da equação de Schrödinger (2.3) o termo de interação magnética e assumir φ como uma função de onda de duas componentes. Dessa forma, é notório o fato desse resultado surgir naturalmente do limite não relativístico da teoria de Dirac. E é exatamente devido a isso que iremos utilizar esse método em nosso trabalho para calcular as correções gravitacionais para a equação de Pauli (2.27).

3

Gravitação Linearizada

Vamos começar este capítulo apresentando os principais conceitos de Relatividade Geral, para podermos utilizá-los como base para o desenvolvimento da Gravitação Linearizada.

3.1 Noções Básicas de Relatividade Geral

3.1.1 Princípio da Equivalência

Este é o principal conceito que nos permite utilizar uma métrica do espaço-tempo para descrever o campo gravitacional. Ele diz que um referencial com aceleração de módulo a, sob efeito de um campo gravitacional de intensidade g, é equivalente a um referencial inercial sob efeito de um campo gravitacional de intensidade $g' = g + a$.

Usamos isso para escolher um referencial onde a métrica seja exatamente a métrica de Minkowski, e relacioná-lo com um referencial acelerado de métrica $g_{\mu\nu}$, através da expressão

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\ \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.1}$$

de forma que x^μ são coordenadas no referencial acelerado e ξ^α as coordenadas no referencial de Minkowski. Novamente a convenção de índices gregos denotarem coordenadas espaço-temporais, e índices latinos coordenadas espaciais, será utilizada neste capítulo. A equação para uma partícula livre no referencial de Minkowski é dada por

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial s^2} = 0, \tag{3.2}$$

sendo s o parâmetro com o qual as coordenadas em ambos os referenciais variam.

Vamos relacionar as coordenadas dos dois referenciais, assumindo que um conjunto de coordenadas pode ser escrito como função do outro, de forma que

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu), \qquad x^\mu = x^\mu(\xi^\alpha), \tag{3.3}$$

e também vamos utilizar o fato da aceleração do referencial de x^μ ser diferente de zero,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} \neq 0 \tag{3.4}$$

para obter a *equação da geodésica*

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{3.5}$$

onde a grandeza, dada pela expressão

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \tag{3.6}$$

é conhecida como *conexão afim*.

O fato da equação (3.5) ser diferente de (3.2), mostra que uma partícula livre em um referencial acelerado percorre um caminho curvo. Como a partícula não está sob efeito de nenhuma força, essa curvatura é devida ao próprio espaço-tempo. Ou seja, a própria métrica $g_{\mu\nu}$ está se curvando devido a essa aceleração, a qual, pelo princípio da equivalência, atribuímos à ação de um campo gravitacional. Portanto, vemos que o princípio da equivalência é o que nos permite estender esse resultado aos campos gravitacionais, e com isso podemos construir as métricas dos espaços-tempos curvos, cujas dinâmicas representam efeitos gravitacionais.

Substituindo a equação (3.1) na equação (3.6), podemos obter uma expressão para a conexão afim em termos da métrica curva,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\mu\nu}\right) = \left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}, \tag{3.7}$$

de forma que se torna um resultado conhecido como *símbolo de Cristoffel*. Esta forma será utilizada na construção das derivadas covariantes na seção seguinte.

3.1.2 Derivada Covariante e Tensor de Curvatura

A derivada covariante de um tensor é construída ao somarmos um termo em sua derivada parcial, para que o resultado final também seja um tensor. Assim, ela é escrita da forma

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A^\lambda &= \partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu, \\ \nabla_\mu A_\lambda &= \partial_\mu A_\lambda - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a conexão afim utilizada de forma a tornar $\nabla_\mu A^\lambda$ um tensor. Como um caso especial vamos considerar:

- Simetria, ou seja, ausência de torsão: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$;
- Metricidade: $\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0$.

Com essas condições, a conexão afim assume a forma apresentada em (3.7). A quebra de qualquer uma destas duas propriedades produz teorias de gravitação modificada, as quais escapam do escopo deste trabalho. Este resultado pode facilmente ser generalizado para um tensor de ordem qualquer. Para isso, basta que (3.8) seja aplicada uma vez para cada índice que esse tensor possuir.

Construímos o tensor de curvatura aplicando o comutador de derivadas covariantes à um vetor

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha, \tag{3.9}$$

calculando estas derivadas usando (3.8)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha &= \partial_\mu (\nabla_\nu A^\alpha) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} (\nabla_\lambda A^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} (\nabla_\nu A^\lambda) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu A^\alpha + A^\lambda \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \partial_\mu A^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda A^\alpha \\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\tau\lambda} A^\tau + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \partial_\nu A^\lambda + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\tau\nu} A^\tau. \end{aligned} \tag{3.10}$$

e, por fim, considerando $[\partial_\mu, \partial_\nu] A^\alpha = 0$, podemos escrever (3.9) como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = -A^\lambda \; R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu}, \tag{3.11}$$

onde

$$R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\Gamma^{\alpha}_{\tau\mu}, \tag{3.12}$$

é o tensor de curvatura, ou *tensor de Riemann.* Analogamente, podemos escrever

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\beta = R^{\lambda}{}_{\beta\nu\mu}A_\lambda. \tag{3.13}$$

Além disso, o tensor de curvatura possui as seguintes simetrias:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}; \\ \text{(ii)} & R_{\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}; \\ \text{(iii)} & R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha}; \\ \text{(iv)} & R_{\beta\mu\nu} + R_{\nu\beta\mu} + R_{\mu\nu\beta} = 0. \end{array} \tag{3.14}$$

A partir deste tensor, podemos obter outros tensores que serão importantes para a descrição da gravitação, como o *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\nu\beta\mu} = R^{\beta}{}_{\nu\beta\mu}, \tag{3.15}$$

e a *curvatura escalar*

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}, \tag{3.16}$$

sendo que todos estes três tensores respeitam as seguintes *indentidades de Bianchi*:

$$\begin{array}{ll} \text{(v)} & \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0; \\ \text{(vi)} & \nabla_\alpha R_{\lambda\beta} - \nabla_\beta R_{\lambda\alpha} = \nabla_\tau R^{\tau}{}_{\lambda\alpha\beta}; \\ \text{(vii)} & \nabla_\alpha R^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\nabla_\beta R. \end{array} \tag{3.17}$$

3.1.3 Equações de Einstein

Uma das formas de se obter as equações do campo gravitacional, é postulando a ação da métrica. A partir dessa ação, poderemos obter as equações de Einstein para o campo gravitacional através do princípio variacional.

A ação total (S_T) é escrita como

$$S_T = S_{EH} + S_m, \tag{3.18}$$

onde S_{EH} é a *ação de Einstein-Hilbert* para o campo gravitacional (ação de vácuo), que é depende apenas da métrica, e S_m é a ação do campo massivo, que depende de ambos, do campo de matéria e da métrica.

Agora, para encontrar a equação de Einstein para o campo gravitacional, precisamos fazer a variação de (3.18) em termos da métrica e utilizar o princípio variacional. Dessa forma, começamos escrevendo

$$\delta S_T = \delta S_{EH} + \delta S_m = 0. \tag{3.19}$$

Para encontrar essas variações, vamos definir o tensor momento-energia como sendo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{3.20}$$

para podermos escrever

$$\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\, T_{\mu\nu}. \tag{3.21}$$

Agora, vamos utilizar a expressão para a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\gamma}\int d^4x\sqrt{-g}(R + 2\Lambda), \tag{3.22}$$

sendo γ uma constante que pode ser determinada no limite newtoniano, e Λ é chamada *Constante Cosmológica*. Para variarmos esta ação, vamos considerar uma perturbação infinitesimal na métrica: $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Para isso, fazemos

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{3.23}$$

Porém, a ação também depende de $g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}$ e R. Mas é suficiente obtermos as variações até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, uma vez que é uma perturbação infinitesimal, e

$|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Então, primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \\ \sqrt{-g'} &= \sqrt{g} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}h\right), \end{aligned} \tag{3.24}$$

e a partir destes resultados, podemos calcular as variações da conexão afim e da curvatura escalar como

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu h^{\alpha}_{\nu} + \nabla_\nu h^{\alpha}_{\mu} - \nabla^{\alpha} h_{\nu\mu}\right), \\ \delta R = R^{(1)} &= \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - R^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ é o traço de $h_{\mu\nu}$, e

$$\Box = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu, \tag{3.26}$$

é o *operador D'Alembertiano* em espaço-tempo plano.

Utilizando essa perturbação, podemos reescrever (3.21) como

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\; T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \tag{3.27}$$

e a equação variação da (3.22) fica

$$\delta S_{EH} = -\frac{1}{2\gamma} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h (R + 2\Lambda) + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right\}. \tag{3.28}$$

Assim, a equação (3.19) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \delta S_T = &-\frac{1}{2\gamma} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h (R + 2\Lambda) + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right\} \\ &-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Desconsiderando os termos irrelevantes de derivada total, e percebendo que as perturbações se cancelam, podemos escrever

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = \gamma T_{\mu\nu}, \tag{3.30}$$

e nos resta apenas determinar qual é o valor da constante γ.

Para isso, como dito anteriormente, precisamos tomar o limite newtoniano desta expressão, onde a métrica $g_{\mu\nu}$ possui a única componente não nula sendo

$$g_{00} = 1 + 2\Phi, \qquad \Phi = -\frac{GM}{r} \tag{3.31}$$

onde Φ é o potencial newtoniano. Além disso, utilizamos o fato do valor da constante cosmológica Λ ser relevante apenas em escala cosmológica, ou seja, em distâncias típicas do universo como um todo. Inserindo estas considerações na equação (3.30), e tomando a única componente não nula do tensor momento-energia no limite newtoniano como sendo $T_0^0 = \rho(\vec{r})$, podemos escrever

$$\nabla^2\Phi = \frac{\gamma}{2}\rho(\vec{r}), \tag{3.32}$$

e comparar com a lei de Gauss para o campo gravitacional

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho(\vec{r}), \tag{3.33}$$

sendo G a *constante de gravitação universal*. Com isso, conseguimos identificar $\gamma = 8\pi G$ e reescrever a equação (3.30), na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G\; T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \tag{3.34}$$

onde o termos $G_{\mu\nu}$ é chamado *tensor de Einstein*. Estas equações, descritas por (3.34) são as chamadas *equações de Einstein* para o campo gravitacional.

3.2 Campo Gravitacional Fraco

Para considerarmos o campo gravitacional sendo fraco, utilizamos a mesma perturbação que em (3.23). Porém, agora a perturbação não é mais em uma métrica curva $g_{\mu\nu}$, mas sim uma perturbação na métrica plana de Minkowski, de forma que (3.23) fica dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{3.35}$$

Com esta forma de escrever a métrica curva, e considerando a assinatura para a métrica de Minkowski como

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1), \tag{3.36}$$

podemos reescrever diversas grandezas importantes para Relatividade Geral. Dentre elas, o símbolo de Christoffel pode ser escrito como

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mu}h^{\alpha}_{\nu} + \nabla_{\nu}h^{\alpha}_{\mu} - \nabla^{\alpha}h_{\nu\mu}\right), \tag{3.37}$$

e a curvatura escalar pode ser escrita na forma

$$R = R^{(1)} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h^{\mu\nu} - \Box h - R^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \tag{3.38}$$

onde vemos que tanto a equação (3.37) quanto a (3.38), são simplesmente a primeira ordem de perturbação calculada na equação (3.25), uma vez que a métrica $g_{\mu\nu}$ considerada anteriormente se tornou $\eta_{\mu\nu}$, e para essa métrica de fundo tanto a curvatura quanto a conexão afim são nulas.

Agora podemos utilizar esses resultados para escrever as equações de Einstein na forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \cong \frac{1}{2}\Big[&\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + \eta^{\rho\sigma}(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}h_{\mu\rho} - \nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}h_{\nu\rho}) \\ &- \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(\nabla_{r}h\nabla_{\sigma}h - \eta^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}h_{\rho\sigma})\Big], \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde novamente utilizamos a notação $h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ para indicar o traço. Uma simplificação no campo linear pode ser realizada através de uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \\ h_{\mu\nu} &= \kappa_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\kappa, \end{aligned} \tag{3.40}$$

e também podemos escolher um sistema de coordenadas onde

$$\kappa_{\mu} = \eta^{\rho\sigma}\nabla_{\sigma}\kappa_{\mu\rho} = 0, \tag{3.41}$$

o que é similar a escolher um calibre ao resolver uma equação de onda em eletrodinâmica. Assim, podemos escrever

$$\Box \kappa_{\mu\nu} = -2\gamma T_{\mu\nu}. \tag{3.42}$$

que são chamadas *equações de Einstein linearizadas.* Com isso, vemos que gravitação linearizada nada mais é do que uma teoria de perturbação na métrica Minkowski. Isso nos dá uma simplificação muito grande, que nos permite tratar uma grande variedade de casos, como em física atômica, por exemplo, ou a construção de detectores de ondas gravitacionais.

4 Tetradas e Espinores no Espaço-tempo Curvo

Agora que já apresentamos o campo de Dirac e seu limite não relativístico (equação de Pauli), e os principais elementos de espaço-tempo curvo, vamos apresentar o principal objeto matemático que precisamos para relacioná-los: as tetrádas (ou *vierbeins*). No final deste capítulo, vamos apresentar o formato da equação de Dirac para uma métrica curva que utilizaremos para iniciar nossos cálculos no capítulo seguinte.

4.1 Definindo Tetradas

Vamos usar as tetradas para relacionar a métrica plana de Minkowski com uma métrica curva arbitrária, e utilizar um processo chamado de *covariantização* (*covariantization*, em tradução livre), que nos levará à equação de Dirac em espaço-tempo curvo. Primeiramente, a definição geral de tetradas é dada na forma

$$e^{\mu}_{a} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{a}}, \qquad e^{a}_{\nu} = \frac{\partial X^{a}}{\partial x^{\nu}}, \tag{4.1}$$

sendo x^{μ} as coordenadas em um espaço-tempo e X^{a} as coordenadas em outro espaço-tempo. Agora, relacionamos as métricas fazendo

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{a} = e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \qquad e^{a}_{\mu} e_{a\nu} &= g_{\mu\nu}, \\ e^{a}_{\mu} e^{\mu}_{b} = \delta^{a}_{b}, \qquad e^{a}_{\mu} e^{\alpha}_{a} = \delta^{\alpha}_{\mu}. & \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde assumimos que os índices latinos $(a, b, c, ...)$ são levantados e abaixados por η_{ab} e os índices gregos $(\alpha, \mu, \nu, ...)$ por $g_{\mu\nu}$.

Esse processo é simplesmente uma mudança de bases, onde saímos de uma base escrita sobre a métrica η_{ab} e vamos para uma base escrita sobre a métrica $g_{\mu\nu}$. É importante salientar que ainda não requisitamos nenhuma condição específica para nenhuma das métricas. Utilizando isso, podemos reescrever algumas grandezas importantes simplesmente, como

$$\begin{aligned} g &= \det\left(e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}\right) = \left(\det e^a_\mu\right)^2 \cdot \det \eta_{ab}, \\ g &= \det g_{\mu\nu}; \qquad \det e^a_\mu = \sqrt{|g|}, \\ A^\mu &= e^\mu_a A^a, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo A^μ e A^a um vetor qualquer, e $|g|$ o módulo do traço de $g_{\mu\nu}$. Com estas grandezas em mãos, nós podemos calcular como fica a derivada covariante de um vetor. Primeiramente, conforme feito na seção 3.1.2, vamos definir

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \tilde{\omega}^b_{\cdot ca} V^c, \tag{4.4}$$

sendo $\tilde{\omega}^b_{\cdot ca}$ a conexão afim para índices mistos. Partindo de (3.8), podemos escrever (4.4) como

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda V^\mu &= e^a_\lambda e^\mu_b \nabla_a V^b \\ &= e^a_\lambda e^\mu_b \left(\partial_a V^b + \tilde{\omega}^b_{\cdot ca} V^c\right) \\ &= e^a_\lambda e^\mu_b \partial_a (e^b_\tau V^\tau) + e^a_\lambda e^\mu_b \tilde{\omega}^b_{\cdot ca} V^c \\ &= \delta^\mu_\tau \partial_\lambda V^\tau + V^\tau e^a_\lambda e^\mu_b \partial_a e^b_\tau + e^\mu_b e^c_\tau V^\tau \tilde{\omega}^b_{\cdot c\lambda} \\ &= \partial_\lambda V^\mu + V^\tau (e^\mu_b \partial_\lambda e^b_\tau + e^\mu_b e^c_\tau \tilde{\omega}^b_{\cdot c\lambda}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da seção 3.1.2, lembramos que as derivadas covariantes de um vetor são dadas pela expressão

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} V^\tau, \tag{4.6}$$

e a partir da comparação de (4.5) e (4.6), conseguimos identificar uma expressão para $\tilde{\omega}^b_{\cdot ca}$ na forma

$$\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\cdot\lambda} = e^a_\mu e^{\tau b} \Gamma^\mu_{\tau\lambda} - e^{\tau b} \partial_\lambda e^a_\tau. \tag{4.7}$$

que possui como uma característica importante a assimetria dos índices (ab), a qual é percebida ao realizarmos a soma

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\cdot\mu} + \tilde{\omega}^{ba}_{\cdot\cdot\mu} &= e^a_\nu e^{\lambda b}\Gamma^\nu_{\lambda\mu} + e^b_\nu e^{\lambda a}\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - e^{\lambda b}\partial_\mu e^a_\lambda - e^{\lambda a}\partial_\mu e^b_\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right)\cdot\left(e^{a\nu}e^{\lambda b} + e^{a\lambda}e^{\nu b}\right) - e^{b\lambda}\partial_\mu e^a_\lambda - e^{a\lambda}\partial_\mu e^b_\lambda \\
&= e^{a\nu}e^{\lambda b}e^c_\nu\partial_\mu e_{c\lambda} + e^{a\nu}e^{\lambda b}e_{c\lambda}\partial_\mu e^c_\nu - e^{\lambda b}\partial_\mu e^a_\lambda - e^{a\lambda}\partial_\mu e^b_\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Por fim, é importante ressaltar que a metricidade considerada na seção 3.1.2 deve ser preservada, e isso nos permite calcular as derivadas covariantes da tetradas, como

$$\begin{gathered}
\nabla_\tau g_{\mu\nu} = \nabla_\tau\big(e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}\big) = 2\eta_{ab}\, e^a_\mu\big(\nabla_\tau e^b_\nu\big) = 0 \\
\therefore\ \nabla_\tau e^b_\nu = 0,
\end{gathered} \tag{4.9}$$

e também

$$\begin{gathered}
\nabla_\tau g_{\mu\nu} = \nabla_\tau\big(e^a_\mu e_{\nu b}\big) = \big(\nabla_\tau e^a_\mu\big)e_{\nu b} + e^a_\mu\big(\nabla_\tau e_{\nu b}\big) = e^a_\mu\big(\nabla_\tau e_{\nu b}\big) = 0, \\
\therefore\ \nabla_\tau e_{\nu b} = 0,
\end{gathered} \tag{4.10}$$

sendo que estes mesmos resultados podem ser encontrados utilizando (4.4), (4.7) e (4.8).

4.2 Conexão Espinorial

Vamos definir a derivada covariante de um espinor de maneira semelhante a que definimos anteriormente para um vetor. Porém, a partir deste ponto, adotaremos a notação de índices latinos para o espaço-tempo de Minkowski. Desta forma, as tetradas irão realizar a transição de uma métrica localmente plana, para uma métrica curva arbitrária. Assim, definimos

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\psi &= \partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}\sigma_{ab}\psi, \\
\nabla_\mu\bar{\psi} &= \partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}\bar{\psi}\sigma_{ab},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde a álgebra das matrizes σ^{ab} é dada pela expressão

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2}\big(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a\big), \tag{4.12}$$

sendo que as matrizes γ_a são as matrizes de Dirac no espaço-tempo de Minkowski. Para obtermos a conexão espinorial $\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}$, vamos partir da condição

$$\nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \tag{4.13}$$

e após alguns cálculos, chegamos à

$$\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab} = \frac{1}{4}(e^b_\tau e^{\lambda a} - e^a_\tau e^{\lambda b})\Gamma^\tau_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}(e^{\lambda b}\partial_\mu e^a_\lambda - e^{\lambda a}\partial_\mu e^b_\lambda). \tag{4.14}$$

4.3 Comutador das Derivadas Covariantes

Agora vamos calcular o comutador dessas derivadas covariantes, para podermos ver como o tensor de curvatura se comporta ao realizarmos essa mudança de métricas de fundo. Começamos, então, calculando

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu\nabla_\mu\Psi &= \nabla_\nu\big(\partial_\mu\Psi + \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}\sigma_{ab}\Psi\big) \\
&= \partial_\nu(\nabla_\mu\Psi) + \frac{i}{2}\,\omega_{\nu\cdot\cdot}^{\ ab}\,\sigma_{ab}\,\nabla_\mu\Psi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda\Psi \\
&= \partial_\nu\partial_\mu\Psi + \frac{i}{2}\,\partial_\nu\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}\,\sigma_{ab}\Psi + \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab}\,\sigma_{ab}\,\partial_\nu\Psi + \frac{i}{2}\,\omega_\nu^{ab}\,\sigma_{ab}\,\partial_\mu\Psi \\
&\quad - \frac{1}{4}\,\omega_{\nu\cdot\cdot}^{\ ab}\sigma_{ab}\,\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ cd}\sigma_{cd}\Psi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\Psi - \frac{i}{2}\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\omega_{\lambda\cdot\cdot}^{\ ab}\,\sigma_{ab}\Psi\,,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e usando essa expressão acompanhada de uma relação entre as matrizes γ de Dirac, que pode ser escrita como

$$\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = 2\eta_{bc}\gamma_a\gamma_d - 2\eta_{ac}\gamma_b\gamma_d + 2\gamma_c\gamma_a\eta_{bd} - 2\gamma_c\gamma_b\eta_{ad} + \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b, \tag{4.16}$$

podemos obter o valor

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \nabla_\mu\nabla_\nu\psi \;=\; -\frac{1}{4}\,R_{\mu\nu\cdot\cdot}^{\ \ ab}\,\gamma_a\gamma_b\,\psi\,, \tag{4.17}$$

para o comutador, sendo que

$$R_{\mu\nu\cdot\cdot}^{\ \ \ ab} = \partial_\mu \omega_{\nu\cdot\cdot}^{\ ab} - \partial_\nu \omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ab} + \omega_{\mu\cdot\cdot}^{\ ac}\,\omega_{\nu c\cdot}^{\ \ \ b} - \omega_{\nu\cdot\cdot}^{\ ac}\,\omega_{\mu c\cdot}^{\ \ \ b}, \tag{4.18}$$

pode ser facilmente provado ser uma consequência direta da aplicação de

$$R_{\mu\nu ab} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\, e_a^\rho\, e_b^\sigma\,. \tag{4.19}$$

4.4 Ação de Dirac com Campo Gravitacional

Agora, podemos utilizar os resultados deste capítulo, combinados com os resultados da seção 3.2, para encontrar a ação de Dirac que iremos trabalhar. O precesso que iremos utilizar, chamado de *covariantização*, consiste em tomarmos a ação de Dirac em espaço-tempo plano

$$S_f = i \int d^4x \bar{\psi}\big(\gamma^\mu \partial_\mu + im\big)\psi, \tag{4.20}$$

sendo que as matrizes γ^μ respeitam a álgebra dada pela equação (2.10), e transformarmos todos objetos dependentes da métrica, incluindo o elemento de integração, para o espaço-tempo curvo, utilizando tetradas. Essa transformação é feita utilizando

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \int d^4x \to \int d^4x\sqrt{-g}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu, \tag{4.21}$$

e também fazemos as derivadas covariantes se tornarem como definido em (4.11) e (4.14). Além disso, a álgebra das matrizes γ^μ também se tornar

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

E com isso, a equação (4.20) pode ser escrita na forma

$$S_f = i \int d^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}\big(\gamma^\mu \nabla_\mu + im\big)\psi. \tag{4.23}$$

Agora vamos considerar uma pequena variação na métrica curva, de modo a essa variação poder ser interpretada como uma perturbação na métrica $g_{\mu\nu}$, e ser descrita pela expressão

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4.24}$$

onde novamente vamos utilizar somente primeira ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$. Com isso, a ação total passa a ter uma componente devido à métrica $g_{\mu\nu}$, e uma componente devido à perturbação

$$S = S_f + \delta S_f, \tag{4.25}$$

sendo o segundo termo do lado direito desta equação, a ação devido à perturbação causada na ação (4.23) pelo fator $h_{\mu\nu}$.

Para calcular essa ação perturbada, começamos escrevendo (4.23) na sua forma hermitiana

$$S_f = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\big(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi + 2im\bar{\psi}\psi\big), \tag{4.26}$$

e então, utilizando (4.22), podemos escrever as variações

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}h, \quad \delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu};\\
\delta e^c_\mu &= \frac{1}{2}h^\nu_\mu e^c_\nu, \quad \delta e^\rho_b = -\frac{1}{2}h^\rho_\lambda e^\lambda_b;\\
\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\big(\nabla_\alpha h^\lambda_\beta + \nabla_\beta h^\lambda_\alpha - \nabla^\lambda h_{\alpha\beta}\big);\\
\delta\gamma^\mu &= -\frac{1}{2}h^\mu_\nu\gamma^\nu.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

e encontrar a perturbação na conexão espinorial sendo escrita na forma

$$\delta\omega^{ab}_{\mu\cdot\cdot} = \frac{1}{2}\big(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\big)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}. \tag{4.28}$$

Como podemos escrever

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{i}{4}\omega^{ab}_{\mu\cdot\cdot}\bar{\psi}\big(\gamma^\mu\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma^\mu\big)\psi, \tag{4.29}$$

a parte de δS_f que depende de $\delta\omega_{\mu\cdot\cdot}^{ab}$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\delta_\omega S_f &= -\frac{i}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\sigma_{ab}+\sigma_{ab}\gamma^\mu\right)\psi\delta\omega_{\mu\cdot\cdot}^{ab}\\ &= -\frac{i}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}\left(e^{a\tau}e^{b\lambda}-e^{b\tau}e^{a\lambda}\right)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}e^{\mu c}\bar{\psi}(\gamma_c\sigma_{ab}+\sigma_{ab}\gamma_c)\psi.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora integramos por partes, e usamos a expressão para σ_{ab} dada em (4.12) para obter

$$\begin{aligned}\delta_\omega S_f = &-\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}e^{\mu c}e^{\nu a}e^{\lambda b}\\ &\cdot\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}(\gamma_c\gamma_a\gamma_b-\gamma_c\gamma_b\gamma_a+\gamma_a\gamma_b\gamma_c-\gamma_b\gamma_a\gamma_c)\psi\right].\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por fim, lembrando que a álgebra das matrizes de Dirac no espaço-tempo plano é dada pela expressão

$$\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\eta_{ab}, \tag{4.32}$$

podemos escrever

$$\delta_\omega S_f = -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu-g^{\lambda\nu}\gamma^\mu)\psi\right]=0. \tag{4.33}$$

E com isso vemos que a conexão espinorial não interfere no termo perturbado da ação.

Sendo assim, a parte da ação devido à $h_{\mu\nu}$ fica sendo dada apenas por

$$\delta S_f = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{2}\left(hg^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}\right)\left(\bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi\right)+ihm\bar{\psi}\psi\Big\}, \tag{4.34}$$

e portanto, substituindo (4.23) e (4.34) em (4.25), obtemos a expressão

$$S=\int_x\left\{\overline{\psi}\left(i\gamma^\alpha\nabla_\alpha-m\right)\psi+\frac{i}{4}\left(hg^{\alpha\beta}-h^{\alpha\beta}\right)\left(\overline{\psi}\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi-\nabla_\alpha\overline{\psi}\gamma_\beta\psi\right)-\frac{mh}{2}\overline{\psi}\psi\right\}, \tag{4.35}$$

em que utilizamos a notação $\int_x=\int d^4x\sqrt{-g}$, por simplicidade. Esta expressão é a ação de Dirac para uma perturbação na métrica de fundo. No capítulo seguinte, vamos partir desta mesma expressão, e considerar um fundo métrico de Minkowski sendo perturbado.

5 Equação de Pauli com Campo Gravitacional Fraco

Agora já possuímos tudo o que precisamos para encontrar as correções gravitacionais fracas para a equação de Pauli dada em (2.27). Assim, neste capítulo vamos deduzir essa equação, e inserir as métricas de Schwarzschild e de onda gravitacional como forma de aplicação do nosso resultado e para podermos realizar comparações com os resultados obtidos nos artigos [2] e [4].

5.1 Obtendo a Equação

5.1.1 Hamiltoniana Relativística

Vamos começar com a ação deduzida no final do capítulo anterior

$$S = \int_x \left\{ \overline{\psi} \left(i\gamma^\alpha \nabla_\alpha - m \right) \psi + \frac{i}{4} \left(hg^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \right) \left(\overline{\psi} \gamma_\beta \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \overline{\psi} \gamma_\beta \psi \right) - \frac{mh}{2} \overline{\psi} \psi \right\}. \quad (5.1)$$

Como estamos trabalhando com um campo linear em $h_{\mu\nu}$, conforme mostrado na seção 3.2, podemos simplesmente trocar a métrica curva por uma métrica plana,

$$g^{\alpha\beta} \to \eta^{\alpha\beta}, \qquad \nabla_\alpha \to \partial_\alpha, \quad (5.2)$$

onde utilizamos a métrica de Minkowski com a assinatura $\eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ e a derivada covariante dada pela equação (4.11) se torna a derivada parcial devido ao fato da conexão afim encontrada em (3.7) ser nula para a métrica de Minkowski, e com isso a conexão espinorial dada pela equação (4.14) também será nula.

Assim, variando a ação (5.1) com relação ao campo $\bar{\psi}$ e integrando por partes o penúltimo termo desta equação, pelo princípio variacional podemos escrever a equação para o campo ψ como

$$\left\{i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - m + \frac{i}{2}\left(h\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\beta}\partial_{\alpha} + \frac{i}{4}\left(\partial_{\beta}h - \partial_{\alpha}h^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\beta} - \frac{mh}{2}\right\}\psi = 0. \tag{5.3}$$

Para podermos separar as derivadas temporais das espaciais, separamos em $1+3$ dimensões, e usamos $\gamma^0 = \beta$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}\Big\{i\beta\partial_t + i\gamma^k\partial_k - m - \frac{mh}{2} + \frac{i}{2}\left(h - h^{00}\right)\beta\partial_t + \frac{i}{2}\left(h\gamma^k\partial_k + h^{jk}\gamma^j\partial_k\right)&\\ + \frac{i}{2}h^{0k}\gamma^k\partial_t - \frac{i}{2}h^{k0}\beta\partial_k + \frac{i}{4}\dot{h}\beta + \frac{i}{4}\left(\partial_k h\right)\gamma^k - \frac{i}{4}\dot{h}^{00}\beta&\\ -\frac{i}{4}\left(\partial_k h^{k0}\right)\beta - \frac{i}{4}\dot{h}^{0k}\gamma^k - \frac{i}{4}\left(\partial_k h^{kj}\right)\gamma^j\Big\}\psi = 0&,\end{aligned} \tag{5.4}$$

sendo que os índices latinos são utilizados para coordenadas espaciais (exceto t, que é utilizado especificamente para derivada temporal). Então, multiplicamos a equação (5.4) por β fazendo $\beta\gamma^k = \alpha^k$. Usamos ainda

$$h^{jk} = h_{jk}; \qquad h^k_j = -h_{jk}; \qquad h^{0k} = h^{k0} = -h_{k0}; \qquad h_{0k} = -h^k_0, \tag{5.5}$$

para obter a expressão

$$\begin{aligned}\Big\{i\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right)\partial_t + i\left(\alpha^k + \frac{1}{2}h\alpha^k + \frac{1}{2}h_{kj}\alpha^j + \frac{1}{2}h_{0k}\right)\partial_k&\\ -\beta m\left(1 + \frac{1}{2}h\right) + \frac{i}{4}\dot{h} - \frac{i}{4}\dot{h}_{00} + \frac{i}{4}\partial_k h_{k0} + \frac{i}{4}\left(\partial_k h\right)\alpha^k&\\ -\frac{i}{4}\dot{h}_{0k}\alpha^k + \frac{i}{4}\left(\partial_j h_{jk}\right)\alpha^k\Big\}\psi = 0&.\end{aligned} \tag{5.6}$$

A partir deste ponto, vamos trabalhar levantando e abaixando índices com a métrica do espaço euclidiano. Com o intuito de isolar o termo de derivada temporal, para escrevermos a equação em sua forma hamiltoniana, vamos multiplicar a equação (5.6) por

$$\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k, \tag{5.7}$$

de forma que desconsideramos todos os termos $\mathcal{O}(h^2)$ ou superior, e vamos obter a expressão

$$\begin{aligned}\Big\{ i\partial_t + i\left(\alpha^k + \frac{1}{2}h_{00}\alpha^k + \frac{1}{2}h_{0j}\alpha^j\alpha^k + \frac{1}{2}h_{kj}\alpha^j + \frac{1}{2}h_{0k}\right)\partial_k \\ +\frac{i}{4}\left(\dot{h} - \dot{h}_{00} + \partial_k h_{k0}\right) - \beta m\left(1 + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right) \\ +\frac{i}{4}\left(\partial_k h\right)\alpha^k - \frac{i}{4}\dot{h}_{0k}\alpha^k + \frac{i}{4}\left(\partial_j h_{jk}\right)\alpha^k \Big\}\psi = 0.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Agora recuperamos as potências de c e $\hbar$, e vamos introduzir um campo eletromagnético conforme feito em (2.16). Estas transformações ficam escritas como

$$\begin{aligned} i\partial_t &\to i\hbar\partial_t - e\phi, \\ -i\partial_k &\to -i\hbar\partial_k = p_k, \\ p_k &\to c\Pi_k = c\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right), \end{aligned} \tag{5.9}$$

e nos permitem escrever

$$\begin{aligned}\Big\{ i\hbar\partial_t - e\phi - c\left(\alpha^k + \frac{1}{2}h_{00}\alpha^k + \frac{1}{2}h_{0j}\alpha^j\alpha^k + \frac{1}{2}h_{kj}\alpha^j + \frac{1}{2}h_{0k}\right)\Pi_k \\ +\frac{i\hbar}{4}\left(\dot{h} - \dot{h}_{00}\right) - \beta mc^2\left(1 + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right) \\ +\frac{i\hbar c}{4}\left(\partial_k h + \partial_j h_{jk}\right)\alpha^k + \frac{i\hbar}{4}\left(c\partial_k h_{k0} + \dot{h}_{0k}\alpha_k\right)\Big\}\psi = 0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Desenvolvendo o termo que possui produto das matrizes α, podemos escrever a expressão

$$\alpha^j\alpha^k = \frac{1}{2}(\alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j) + \frac{1}{2}(\alpha^j\alpha^k - \alpha^k\alpha^j) = -\delta^{jk} + i\epsilon^{jkl}\begin{pmatrix}\sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

uma vez que

$$\alpha^j = \begin{pmatrix}0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^j\alpha^k = \begin{pmatrix}\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^j\sigma^k\end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

e com isso podemos reescrever os termos

$$\frac{1}{2}h_{0j}\alpha^j\alpha^k + \frac{1}{2}h_{0k} = -\frac{1}{2}h_{0k} + \frac{i}{2}\epsilon^{jkl}h_{0j}\sigma^l + \frac{1}{2}h_{0k} = \frac{i}{2}\epsilon^{jkl}h_{0j}\sigma^l. \tag{5.13}$$

Dessa forma, a equação (5.10) se torna

$$\begin{aligned}\Big\{i\hbar\partial_t - e\phi - c\left(\alpha_k + \frac{1}{2}h_{00}\alpha^k + \frac{i}{2}\epsilon^{jkl}h_{0j}\sigma^l + \frac{1}{2}h_{jk}\alpha^j\right)\Pi_k \\ +\frac{i\hbar}{4}\left(\dot{h} - \dot{h}_{00}\right) - \beta mc^2\left(1 + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right) \\ +\frac{i\hbar c}{4}\left(\partial_k h + \partial_j h_{jk}\right)\alpha^k + \frac{i\hbar}{4}\left(c\partial_k h_{k0} + \dot{h}_{0k}\alpha_k\right)\Big\}\psi = 0,\end{aligned} \tag{5.14}$$

e pode ser escrita na forma hamiltoniana

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi, \tag{5.15}$$

onde

$$H = H_\alpha + H_\beta, \tag{5.16}$$

sendo

$$\begin{aligned}H_\beta = e\phi + \beta mc^2\left(1 + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{0k}\alpha^k\right) \\ -\frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h}) + \frac{ic}{2}h_{0j}\epsilon^{jkl}\sigma^l\Pi_k - \frac{i\hbar c}{4}\partial_k h_{k0},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$H_\alpha = c\left(\Pi_k + \frac{1}{2}h_{00}\Pi_k + \frac{1}{2}h_{jk}\Pi_j\right)\alpha_k - \frac{i\hbar c}{4}(\partial_k h + \partial_j h_{jk})\alpha^k + \frac{i\hbar}{4}\dot{h}_{0k}\alpha_k. \tag{5.18}$$

Podemos trabalhar com essa equação, mas também podemos impor uma condição de calibre para simplificar a expressão, de forma que a física do problema não seja alterada. A opção mais simples é considerar o *calibre síncrono*, dado pela expressão

$$h_{0k} = 0, \tag{5.19}$$

e a partir disso, nossa equação assume a forma

$$H' = H'_\alpha + H'_\beta, \tag{5.20}$$

$$H'_\beta = e\phi + \beta mc^2\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) - \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h}), \tag{5.21}$$

$$H'_\alpha = c\left(\Pi_k + \frac{1}{2}h_{00}\Pi_k + \frac{1}{2}h_{jk}\Pi_j\right)\alpha_k - \frac{i\hbar c}{4}(\partial_k h + \partial_j h_{jk})\alpha^k = c\alpha^k V_k, \tag{5.22}$$

onde definimos novas variáveis que carregam termos gravitacionais

$$V_k := \left(\delta_{jk} + \frac{1}{2}\omega_{jk}\right)\Pi_j + v'_k, \tag{5.23}$$

sendo

$$v'_k := -\frac{i\hbar}{4}(\partial_k h + \partial_j h_{jk}), \qquad \omega_{jk} := h_{00}\delta_{jk} + h_{jk}. \tag{5.24}$$

5.1.2 Limite Não Relativístico

No limite não relativístico não é desejável que apareça o termo de energia de repouso mc^2. Então, como um primeiro passo, vamos fazer uma transformação que nos permite absorver esse termo na equação. Portanto, transformamos a função ψ da forma

$$\psi = \psi' exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right), \tag{5.25}$$

nos permitindo escrever

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi = & \quad i\hbar\ exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\left\{\partial_t - \frac{i}{\hbar}mc^2\right\}\psi' \\ = & \quad exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\left\{H'_\beta + H'_\alpha\right\}\psi' \quad = H'\psi, \end{aligned} \tag{5.26}$$

e disso podemos escrever a expressão

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left\{e\phi + (\beta - I)mc^2 + \frac{1}{2}\beta mc^2 h_{00} - \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h}) + H'_\alpha\right\}\psi'. \tag{5.27}$$

Agora, lembramos que as matrizes β e $\vec{\alpha}$ são escritas na forma

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

e voltamos a assumir

$$\psi' = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

sendo novamente φ a componente de energia positiva (componente forte) do espinor de Dirac, e χ a componente de energia negativa (componente fraca). Dessa forma, escrevemos a equação matricial

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left\{ e\phi \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} mc^2 + \frac{1}{2}mc^2 h_{00} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + c\vec{V} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

e a partir dela, conseguimos montar um sistema de duas equações interdependentes,

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi - e\phi\varphi - \frac{1}{2}mc^2 h_{00}\varphi + \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h})\varphi = c\vec{\sigma} \cdot \vec{V}\chi, \\ i\hbar\partial_t\chi - e\phi\chi + 2mc^2 \left(1 + \frac{1}{4}h_{00}\right)\chi - \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h})\chi = c\vec{\sigma} \cdot \vec{V}\varphi. \end{cases} \tag{5.31}$$

No lado esquerdo da segunda equação, vamos utilizar a aproximação não-relativística, conforme feito em (2.21), mas aqui apresentando o formato

$$2mc^2 \left(1 + \frac{1}{4}h_{00}\right)\chi \gg i\hbar\partial_t\chi - e\varphi\chi - \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h})\chi, \tag{5.32}$$

permitindo que a segunda equação de (5.31), seja escrita como

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{V}}{2mc} \left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\varphi, \tag{5.33}$$

onde novamente temos o fator $\vec{V}/mc$ do lado direito da equação, tornando a contribuição de χ muito pequena no limite não relativístico. Substituindo este resultado na primeira equação de (5.31), vamos obter uma equação apenas em termos da função φ, que é escrita como

$$i\hbar\partial_t\varphi - e\phi\varphi - \frac{1}{2}mc^2 h_{00}\varphi + \frac{i\hbar}{4}(\dot{h}_{00} - \dot{h})\varphi = \frac{1}{2m}(\vec{\sigma} \cdot \vec{V})^2 \left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\varphi, \tag{5.34}$$

onde $\vec{V}$ é dado pela equação (5.23). Agora vamos realizar algumas transformações algébricas no lado direito da equação (5.34). Começamos com o produto escalar $(\vec{\sigma}\cdot\vec{V})^2$, que podemos desenvolver na forma

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{V})^2 &= \sigma^j V^j \sigma^k V^k \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^j\sigma^k + \sigma^k\sigma^j)V^jV^k + \frac{1}{2}(\sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j)V^jV^k \\ &= V_kV_k + i\sigma^l\epsilon^{ljk}V_jV_k,\end{aligned} \tag{5.35}$$

e disso, obtemos que o lado direito de (5.34), fica escrito na forma

$$\left\{\frac{1}{2m}V_kV_k\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right) + \frac{i}{2m}\sigma_k\epsilon^{klj}V_lV_j\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\right\}\varphi. \tag{5.36}$$

Por fim, precisamos apenas trabalhar em ambos os termos da expressão acima separadamente, utilizando as equações (5.23) e (5.24) para isso. Assim, calculando o produto escalar das funções V_k, o primeiro termo de (5.36) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2m}V_kV_k\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right) = \frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2m}\omega_{kl}\Pi_k\Pi_l + \frac{1}{m}\upsilon'_k\Pi_k, \tag{5.37}$$

onde vemos aparecer os termos de momento ao quadrado sobre a massa, condizentes com o limite não relativístico. Agora vamos calcular o produto misto presente no segundo termo de (5.36), fazendo

$$\begin{aligned}\frac{i}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{V}\times\vec{V}\right)\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right) =& \frac{i}{2m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\Pi}\times\vec{\Pi}\right)\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right) \\ &+ \frac{i}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(\Pi_k\omega_{lr}\Pi_r + \omega_{rk}\Pi_r\Pi_l\right) \\ =& -\frac{e\hbar}{2mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \\ &+ \frac{i}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(i\hbar\right)\left(\partial_k\omega_{lr}\right)\Pi_r \\ &+ \frac{i}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\omega_{lr}\left(\Pi_k\Pi_r - \Pi_r\Pi_k\right),\end{aligned} \tag{5.38}$$

onde $\vec{B}$ o campo magnético, e o último termo pode ser reescrito utilizando

$$\Pi_k\Pi_r - \Pi_r\Pi_k = \frac{ie\hbar}{c}F_{kr} = \frac{ie\hbar}{c}\epsilon_{jrk}B_j, \tag{5.39}$$

onde F_{kr} é o tensor eletromagnético. Vemos que a equação (5.38) já trás uma correção gravitacional ao magnéton de Bohr, carregada pelo fator h_{00} no primeiro termo do lado direito da equação. Finalmente, podemos utilizar os resultados obtidos em (5.37), (5.38) e (5.39), e reorganizar os termos da equação (5.34), para escrevê-la da forma

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\varphi =& \Bigg\{ e\phi + \frac{1}{2}mc^2 h_{00} - \frac{i\hbar}{4}\left(\dot{h}_{00} - \dot{h}\right) + \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\Pi}^2 \\ & - \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2m}\omega_{kl}\Pi_k\Pi_l + \frac{i\hbar}{2m}\left(\partial_k\omega_{kl}\right)\Pi_l \\ & + \frac{1}{m}v'_k\Pi_k + \frac{\hbar}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(\partial_k\omega_{lr}\right)\Pi_r - \frac{e\hbar}{4mc}\sigma_m\epsilon^{mkl}\epsilon_{jrk}\omega_{lr}B_j \Bigg\}\varphi. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Essa é a expressão para a equação de Pauli com a presença de um campo gravitacional fraco. Vale salientar que nenhum formato foi especificado para a perturbação $h_{\mu\nu}$, o que torna esse um resultado geral, desde que o limite $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ para a perturbação seja respeitado. Note também que os termos de correção gravitacional não estão misturados com os demais termos da equação, de forma que ao fazermos $h_{\mu\nu} = 0$, vamos obter exatamente a equação (2.27).

5.2 Inserindo Métricas Distintas

Nesta seção, vamos inserir dois tipos diferentes de métricas na equação (5.40), e comparar com artigos de referência. Primeiro testaremos para uma métrica estacionária, a métrica de Schwarzschild, e depois para uma métrica dinâmica de uma onda gravitacional fraca com apenas uma polarização.

5.2.1 Limite Newtoniano da Métrica de Schwarzschild

Começamos então tomando a métrica de Schwarzschild no limite newtoniano. Para isso, lembremos que essa métrica é escrita na forma

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right), -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}, -r, -\left(r\sin\theta\right)^2\right], \tag{5.41}$$

e para tomarmos o limite newtoniano, fazemos a aproximação

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}. \tag{5.42}$$

Com o intuito de identificar os termos de perturbação $h_{\mu\nu}$, vamos transformar todos os elementos da diagonal principal desta métrica usando sistemas de coordenadas isotrópicas

$$r = r'\left(1 + \frac{GM}{2r'c^2}\right)^2, \tag{5.43}$$

onde

$$\begin{aligned} x =& rcos(\phi)sen(\theta); \\ y =& rsen(\phi)sen(\theta); \\ z =& rcos(\theta). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Esta é uma transformação puramente matemática, e não altera a física do problema em questão. Assim, a métrica (5.41) pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) + \left(-\frac{2GM}{rc^2} \cdot I\right) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{5.45}$$

sendo $I = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$ e definimos

$$\Phi = \frac{GM}{r} \to h_{\mu\nu} = -\frac{2\Phi}{c^2} I. \tag{5.46}$$

Dessa forma, as componentes da perturbação da métrica são escritas, de forma explícita, como

$$h_{00} = h_{kk} = -\frac{2\Phi}{c^2}, \qquad h_{jk} = -\frac{2\Phi}{c^2}\delta_{jk}, \tag{5.47}$$

sendo δ_{jk} uma delta de Kronecker. Utilizando a equação (5.47) a equação (5.24) assume o formato

$$\begin{cases} \omega_{kl} = -\dfrac{4\Phi}{c^2}\delta_{kl}, \\ v'_k = \dfrac{5i\hbar}{2c^2}(\partial_k \Phi), \end{cases} \tag{5.48}$$

e a equação (5.40) pode ser reescrita na forma

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left\{ e\phi - m\Phi + \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{3\Phi}{2c^2}\right)\vec{\Pi}^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 + \frac{9\Phi}{2c^2}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \right. \\ \left. + \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\partial_k\Phi\right)\Pi_k - \frac{\hbar}{mc^2}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(\partial_k\Phi\right)\Pi_l \right\}\varphi. \tag{5.49}$$

Com intuito de fazer uma comparação com o artigo de Silenko e Teryaev [2], vamos fazer o campo eletromagnético igual a zero, e usar sistema de unidades naturais ($\hbar = c = e = 1$). Além disso, vamos inserir um fator m (energia de repouso), o qual foi absorvido pela transformação (5.25). Assim, a nossa hamiltoniana é dada pela expressão

$$H = m - m\Phi + \frac{p^2}{2m}\left(1 - \frac{3}{2}\Phi\right) - \frac{1}{m}\sigma^m\epsilon^{mkl}(\partial_k\Phi)p_l + \frac{i}{2m}(\partial_k\Phi)p_k. \tag{5.50}$$

Agora, tomamos a hamiltoniana encontrada por Silenko e Teryaev (a qual chamaremos de H_{ST}) através de uma transformação de Foldy-Whouthuysen tradicional,

$$H_{ST} = \beta\epsilon - \frac{\beta}{2}\left\{\frac{\epsilon^2 + p^2}{\epsilon}, \frac{GM}{r}\right\} - \frac{\beta(2\epsilon + m)}{4\epsilon(\epsilon + m)}[2\vec{\Sigma}\cdot(\vec{g}\times\vec{p}) + \nabla\cdot\vec{g}], \tag{5.51}$$

onde foi utilizado

$$\epsilon = \sqrt{m^2 + p^2}, \qquad \vec{g} = \nabla\Phi, \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

Como na equação (5.50), foi considerada uma aproximação até ordem $1/m$, precisamos fazer a mesma aproximação para a quantidade ϵ de (5.52). Para isso, vamos usar uma expansão em série de Maclaurin dada por

$$\sqrt{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n\left(\sqrt{1 + x^2}\right)}{dx^n}\bigg|_{x=0} x^n \cong 1 + \frac{1}{2}x^2. \tag{5.53}$$

Para aplicarmos esta expansão em ϵ como apresentado em (5.51), basta fazermos

$$x = \frac{p^2}{m^2}, \tag{5.54}$$

uma vez que no limite não relativístico queremos saber o que acontece quando $m \gg p$, e isso implica saber o comportamento de ϵ em torno do ponto $p = 0$. Dessa forma, podemos escrever

$$\epsilon = m\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}} \simeq m\left(1 + \frac{p^2}{2m^2}\right). \tag{5.55}$$

Para calcular os demais termos dependente de ϵ na equação (5.51), vamos utilizar outra série de Maclaurin

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \tag{5.56}$$

e com isso, vamos escrever

$$\begin{gathered} \frac{1}{\epsilon} \simeq \frac{1}{m}\left(1 - \frac{p^2}{2m^2}\right) \simeq \frac{1}{m}; \\ \epsilon^2 + p^2 = m^2 + 2p^2 \Rightarrow \frac{\epsilon^2 + p^2}{\epsilon} \simeq \frac{m^2 + 2p^2}{m}, \end{gathered} \tag{5.57}$$

e também

$$\begin{gathered} \epsilon + m \simeq 2m\left(1 + \frac{p^2}{4m}\right) \Rightarrow \frac{1}{\epsilon + m} = \frac{1}{2m} \\ \therefore \frac{2\epsilon + m}{\epsilon(\epsilon + m)} \simeq \frac{3}{2m}. \end{gathered} \tag{5.58}$$

Agora vamos inserir as equações (5.57) e (5.58) em (5.51). Além disso, vamos aplicar essa hamiltoniana em uma função de onda como (5.29), e tomar apenas a componente de energia positiva φ. Disso, obtemos a equação

$$H_{ST} = m - m\Phi + \frac{p^2}{2m}(1 - 4\Phi) - \frac{3}{4m}\sigma^l \epsilon^{lkj}(\partial_k \Phi)p_j - \frac{3}{8m}\nabla^2\Phi. \tag{5.59}$$

Por fim, vamos comparar termo a termo as equações (5.50) e (5.59). Primeiramente vemos que existem alguns termos iguais

$$m + m\Phi + \frac{p^2}{2m}, \tag{5.60}$$

mas os demais termos são diferentes. Adotando o critério de colocar os nossos termos à esquerda e os da equação de Silenko e Teryaev à direita, notamos que alguns deles possuem pequenas diferenças, como fatores multiplicativos, como podemos percebemos

em
$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{2}\Phi\frac{p^2}{2m}, &\qquad -4\Phi\frac{p^2}{2m};\\
-\frac{1}{m}\sigma^m\epsilon^{mkl}(\partial_k\Phi)p_l, &\qquad -\frac{3}{4m}\sigma^l\epsilon^{lkj}(\partial_k\Phi)p_j;
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$
e os termos restantes, não possuem correspondências entre as equações, como

$$
\frac{i}{2m}(\partial_k\Phi)p_k; \qquad -\frac{3}{8m}\nabla^2\Phi. \tag{5.62}
$$

O motivo de tais diferenças está ainda sendo investigado. Mas o fato do formato das expressões (5.61) ser parecido e haver apenas diferenças de fatores multiplicativos, pode nos dar uma orientação para essa investigação.

5.2.2 Métrica de Onda Gravitacional Fraca

Nesta seção vamos especificar a métrica para uma onda gravitacional fraca. A métrica utilizada, possui as seguintes componentes não nulas

$$
h_{yy} = -h_{zz} = -2\vartheta, \qquad h_{yz} = h_{zy} = 2u, \tag{5.63}
$$

onde $\vartheta = \vartheta(ct-x)$ and $u = u(ct-x)$ são duas funções que descrevem a onda se propagando na direção x, cada uma sendo uma possibilidade de polarização da onda gravitacional. Para fins de comparação com o resultado de Quach [4], vamos adotar a mesma simplificação ao considerar apenas uma polarização, fazendo $u = 0$. Dessa forma, a equação (5.24) pode ser escrita como
$$
\begin{cases}
\omega_{kl} = 2\vartheta T_{kl},\\
v'_k = \dfrac{i\hbar}{2}T_{jk}(\partial_j\vartheta),
\end{cases}
\tag{5.64}
$$
onde introduzimos a notação
$$
T_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.65}
$$

Assim, (5.39) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\varphi =& \Bigg\{ e\phi + \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + \frac{\vartheta}{m}T_{kl}\Pi_k\Pi_l + \frac{i\hbar}{2m}T_{kl}\left(\partial_k\vartheta\right)\Pi_l \\ &+ \frac{\hbar}{2m}\sigma_m\epsilon^{mkl}T_{lr}\Pi_r\left(\partial_k\vartheta\right) - \frac{e\hbar\vartheta}{mc}\left(\sigma_m T_{ll}B_m - \sigma_r T_{jr}B_j\right)\Bigg\}\varphi. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Agora vamos zerar o termo de potencial elétrico ($\phi = 0$), utilizar sistema natural de unidades ($\hbar = c = e = 1$) e inserir o termo m de energia de repouso, o qual foi absorvido em nosso cálculo ao realizarmos a transformação (5.25). Além disso, o quinto termo do lado direito desta equação (5.66) desaparece, uma vez que ϑ depende apenas de x, e T_{kl} é nulo na primeira linha e primeira coluna, de forma que temos

$$T_{kl}(\partial_k\vartheta) = T_{1l}(\partial_1\vartheta) = 0, \tag{5.67}$$

e, portanto, o hamiltoniano fica escrita no formato

$$\begin{aligned} H_\varphi = m &+ \frac{1}{2m}\left(\delta_{kl} + 2\vartheta T_{kl}\right)\Pi_k\Pi_l - \frac{1}{2m}\left(\delta_{kl} + 2\vartheta T_{kl}\right)\sigma_k B_l \\ &+ \frac{1}{2m}\sigma_m\epsilon^{mkl}T_{lr}\Pi_r\left(\partial_k\vartheta\right). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Agora tomamos a equação obtida em [4] através de uma transformação Foldy-Wouthuysen tradicional

$$\begin{aligned} H_Q = \beta m &+ \frac{\beta}{2m}(\delta^{ij} + 2fT^{ij})(p_i - A_i)(p_j - A_j) \\ &+ \frac{\beta}{4m}(\delta^{ij} + 2fT^{ij})\epsilon_{jkl}\Sigma^l[\partial^k A_i - \partial_i A^k] \\ &+ \frac{\beta}{2m}(\partial^i f)T^{jl}\epsilon_{ijk}\Sigma^k(p_l - A_l), \end{aligned} \tag{5.69}$$

onde H_Q significa hamiltoniana obtida por Quach, f é a mesma função que ϑ utilizada em (5.68), e $\vec{\Sigma}$ é uma matriz quadridimensional dada pela expressão

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.70}$$

Vamos agora tomar o segundo termo da equação (5.69), e realizar uma transformação de forma a obtermos fatores de campo magnético. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{4m}\delta^{ij}\epsilon_{jkl}\sigma^{l}(\partial^{k}A_{i}-\partial_{i}A^{k}) &= -\frac{\beta}{4m}\Sigma^{l}\epsilon_{lkj}\partial^{k}A_{j}-\frac{\beta}{4m}\Sigma^{l}\epsilon_{ljk}\partial_{j}A^{k} \\
&= -\frac{\beta}{4m}(\Sigma^{l}B_{l}+\Sigma^{l}B_{l}) \\
&= -\frac{\beta}{2m}\Sigma^{l}B_{l},
\end{aligned} \tag{5.71}$$

e também

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{4m}(2f)T^{ij}\epsilon_{jkl}\Sigma^{l}(\partial^{k}A_{i}-\partial_{i}A^{k}) &= -\frac{\beta}{2m}f\Sigma^{l}T^{ij}(\epsilon_{lkj}\partial^{k}A_{i})-\frac{\beta}{2m}f\Sigma^{l}T^{ij}(\epsilon_{ljk}\partial_{i}A^{k}) \\
&= -\frac{\beta}{2m}f\Sigma^{l}T^{ij}(\delta_{il}B_{j})-\frac{\beta}{2m}f\Sigma^{l}T^{ij}(\delta_{il}B_{j}) \\
&= -\frac{\beta}{2m}(2f)\Sigma^{i}T^{ij}B_{j},
\end{aligned} \tag{5.72}$$

onde usamos $\epsilon_{jkl}\partial^{k}A_{i}=\delta_{il}B_{j}$.

Por fim, aplicamos essa hamiltoniana em uma função de onda do tipo (5.29) e tomamos apenas a componente φ, a qual é correspondente à energia positiva. Assim, a equação (5.69) fica escrita como

$$\begin{aligned}
H_{Q} = m &+ \frac{1}{2m}(\delta_{ij}+2fT_{ij})\Pi_{i}\Pi_{j}-\frac{1}{2m}(\delta_{ij}+2fT_{ij})\sigma_{i}B_{j} \\
&+ \frac{1}{2m}\sigma_{k}\epsilon^{ijk}T_{jl}\Pi_{l}(\partial_{i}f),
\end{aligned} \tag{5.73}$$

que possui completa concordância com (5.68). Vale salientar que nesse artigo, Quach demonstra a equivalênci das transformações de Foldy-Wouthuysen exata e tradicional para este caso de específico de campo gravitacional, o que significa que ambos os resultados são condizentes com o resultado por nós obtido.

6 Conclusão e Considerações Finais

Neste trabalho de mestrado estudamos alguns aspectos da relação do limite não relativístico do campo de Dirac com a equação de Pauli, e sobre como um campo gravitacional fraco pode influenciar nessa equação. Para isso, estudamos os principais conceitos de Relatividade Geral e do formalismo de tetradas, que nos permitiram migrar da ação de Dirac no espaço-tempo plano para uma métrica curva descrita como uma perturbação na métrica de Minkowski. A parte original deste trabalho se concentra no capítulo 5.

O primeiro resultado original que encontramos abrange as equações que vão de (5.15) até (5.24) (excetuando a equação (5.19) que foi a condição de calibre adotada). Esses resultado ainda dizem respeito ao regime relativístico, mas o ponto importante é a ausência de qualquer exigência para o formato da perturbação $h_{\mu\nu}$, exceto que seja de intensidade muito pequena.

Quando tomamos o limite não relativístico, através do método que foi detalhado previamente na seção 2.3, obtivemos outro resultado original, que é a equação (5.40), a qual preservou a generalidade da perturbação. Nessa equação, o acoplamento com o campo gravitacional consiste em termos que não se misturam com os demais, de forma que ao serem zerados nos permite retornar à equação de Pauli tradicional. Também calculamos as equações de movimento provenientes dessa equação e os resultados estão apresentados na dissertação de Guilherme Yoshi Oyadomari [5], com quem este trabalho foi desenvolvido em colaboração.

Por fim, com intuito de fazer uma comparação dos resultados apresentados nesta dissertação com os resultados dos artigos de Silenko e Teryaev [2] e de Quach [4], na seção 5.2 inserimos dois tipos distintos de métricas de fundo. Ao inserirmos uma métrica de onda gravitacional fraca com apenas uma polarização e compararmos com os resultados presentes no artigo de Quach, obtivemos uma concordância completa dos resultados. Porém, o mesmo não se concretizou ao realizarmos uma comparação com o artigo de Silenko e Teryaev, mas os motivos para isso ainda estavam sendo investigados até o término deste documento de dissertação.

Contudo, devido à concordância dos resultados de ondas gravitacionais fracas, podemos afirmar que os resultados aqui obtidos apresentam potencial de se apresentarem como uma descrição geral para a influência de um campo gravitacional fraco no comportamento de partículas não relativísticas de spin 1/2, podendo proporcionar resultados testáveis para experimentos de física atômica.

Bibliografia

[1] Y. N. Obukhov, "Spin, Gravity, and Inertia," *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 2, pp. 192–195, 2001.

[2] A. J. Silenko and O. V. Teryaev, "Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field," *Physical Review D*, vol. 71, no. 6, p. 064016, 2005.

[3] B. Gonçalves, Y. N. Obukhov, and I. L. Shapiro, "Exact Foldy-Wouthuysen transformation for gravitational waves and magnetic field background," *Physical Review D*, vol. 75, no. 12, p. 124023, 2007.

[4] J. Q. Quach, "Foldy-Wouthuysen transformation of the generalized Dirac Hamiltonian in a gravitational-wave background," *Physical Review D*, vol. 92, no. 8, p. 084047, 2015.

[5] G. Y. Oyadomari, "Partícula não-relativística com spin-1/2 em campos eletromagnético e gravitacional," Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG.

[6] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles.* WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. kGaA, 2008.

[7] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Course of Theoretical Physics - Quantum Electrodynamics.* Pergamon Press, 1982.

[8] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill Book Company, 1964.

[9] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields.* McGraw-Hill Book Company, 1965.

[10] A. Messiah, *Quantum Mechanics.* North Holland Publishing Company, 1965.

[11] L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime - Quantized Fields and Gravity.* Cambridge University Press, 2009.

[12] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press, 1996.

[13] J. B. Neto, *Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Spinores.* Livraria da Física, 2010.

[14] M. R. Spiegel, *Análise Vetorial (com introdução à análise tensorial).* Schaum Publishing Co, 1972.

[15] E. L. Lima, *Cálculo Tensorial.* IMPA, 2012.

[16] I. L. Shapiro, *Undergraduate Lecture Notes in Physics - A Primer in Tensor Analysis and Relativity.* Springer, 2019.

[17] I. L. Buchbinder and I. L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Application to Quantum Gravity.* Oxford University Press, 2021.

[18] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.* John Wiley Sons, Inc., 1982.

[19] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, 2009.

[20] R. d'Inverno and J. Vickers, *Introduction to Einstein's Relativity - A deeper understanding.* Oxford University Press, 2021.