

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**Arthur da Silva Moraes**

**UMA ANÁLISE DOS NÚMEROS REAIS EM LIVROS DIDÁTICOS POR MEIO DE  
PISTAS SEMIÓTICAS**

Juiz de Fora  
2023

**Arthur da Silva Moraes**

**UMA ANÁLISE DOS NÚMEROS REAIS EM LIVROS DIDÁTICOS POR MEIO DE  
PISTAS SEMIÓTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Willian José da Cruz

Juiz de Fora  
2023

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moraes, Arthur da Silva.

Uma análise dos números reais em livros didáticos por meio de pistas semióticas / Arthur da Silva Moraes. -- 2023.

134 p.

Orientador: Willian José da Cruz

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2023.

1. Conjuntos Numéricos. 2. Representações. 3. Complementaridade. 4. Signos. I. Cruz, Willian José da, orient. II. Título.

**Arthur da Silva Moraes**

Uma análise dos números reais em livros didáticos por meio de pistas semiótica

Dissertação apresentada ao  
PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM  
EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA da Universidade  
Federal de Juiz de Fora  
como requisito parcial à  
obtenção do título de  
Mestre em EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA. Área de  
concentração: EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA

Aprovada em 12 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Willian José da Cruz** - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lúcia Cristina Silveira Monteiro**  
Universidade Federal de Alagoas

**Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco**  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **HERNANDO JOSE ROCHA FRANCO, Usuário Externo**, em 16/05/2023, às 19:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Willian Jose da Cruz, Coordenador(a) em exercício**, em 17/05/2023, às 14:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Lúcia Cristina Silveira Monteiro, Usuário Externo**, em 18/05/2023, às 20:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1286599** e o código CRC **F4B77FC1**.

---

*Dedico este trabalho a minha mãe, Alzinéia, que mesmo não estando presente fisicamente, continua sendo a minha motivação diária para alcançar meus objetivos pessoais e profissionais. Por mim, por você e por nós. Com carinho, do seu filho amado. Te amo para além desta vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Alzinéia e Carlos por todo esforço feito para que eu pudesse ter acesso a uma educação de qualidade, e por todo sacrifício que eles fizeram para que eu pudesse ter a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos e realizar meus sonhos pessoais, acadêmicos e profissionais. Este trabalho não seria possível sem vocês e sem a fé que vocês sempre tiveram em mim. Amo vocês de todo meu coração, para todo o sempre.

Aos meus familiares e amigos que compreenderam todas as vezes que precisei abdicar de suas companhias para realizar este trabalho, mas que nunca me abandonaram nos momentos adversos. Obrigado.

Agradeço também aos colegas da turma de 2020 do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF que se fizeram muito importantes neste caminhar, e tornaram este processo mais leve. Obrigado por serem não somente companheiros de turma, mas amigos.

Aos professores e coordenadores do PPGEM, que sempre estiveram dispostos a contribuir com nossa formação, enfrentando as dificuldades impostas pelo período pandêmico para nos proporcionarem a melhor experiência acadêmica possível.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa dos Experimentos Mentais na Educação Matemática – GEPEMEM pelo companheirismo, pelas trocas e oportunidade de formação pessoal e profissional em cada encontro feito.

Aos professores membros da banca examinadora Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco e Profa. Dra. Lúcia Cristina Silveira Monteiro pelo interesse na pesquisa e pela disponibilidade.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Willian José da Cruz. Minha sincera gratidão pelo apoio contínuo, por sua paciência, motivação e por dividir seu imenso conhecimento nas discussões extremamente estimulantes que tivemos todas as vezes que nos reunimos.

Gratidão.



*“Todo o nosso pensamento é realizado sobre sinais ou algum tipo ou outro, seja imaginado ou realmente percebido. O melhor pensamento, especialmente em assuntos matemáticos, é feito experimentando na imaginação um diagrama ou outro esquema e facilita o pensamento para tê-lo, diante dos olhos”. (PEIRCE, NEM 1122)*

## RESUMO

O presente trabalho é resultado da pesquisa feita no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Nele são abordadas a Semiótica de Charles Sanders Peirce e a Complementaridade de Michael Friedrich Otte no intuito de justificar as análises feitas para entender as representações apresentadas nos livros didáticos de Matemática no que se refere ao conjunto dos números reais. As representações da conceituação ou das atividades dos livros são tratadas como pistas semióticas por darem significados àquilo que está sendo estudado. A necessidade desta pesquisa se dá por entendermos que o docente precisa ter um olhar para os aspectos formal e intuitivo, o discreto e o contínuo, o algébrico e o geométrico no ensino dos números reais. Através destas pistas semióticas, buscamos justificar uma nova possibilidade metodológica conhecida como Experimentos Mentais em Educação Matemática, a qual está proporcionando que sejam desenvolvidas as atividades do produto educacional.

**Palavras-chave:** Conjuntos Numéricos; Representações; Complementaridade; Signos.

## **ABSTRACT**

The present work is the result of an ongoing research in the Postgraduate Program in Mathematics Education of the Federal University of Juiz de Fora where Charles Sanders Peirce's Semiotics and Michael Friedrich Otte's Complementarity are approached in order to justify the analysis done to understand the representations presented in the math textbooks regarding the set of real numbers. The representations of the conceptualization and/or the activities in the textbooks are treated as semiotic clues for giving meaning to what is being studied. This research is necessary because we understand that teachers need to look at the formal and intuitive aspects, the discrete and the continuous, the algebraic and the geometric, when teaching the real numbers. Through these semiotic clues, we seek to justify a new methodological possibility known as Thoughts Experiments in Mathematics Education, which is providing the development of the activities of the educational product.

**Keywords:** Number Sets; Representations; Complementarity; Signs.



# ÍNDICE

<b>MEMORIAL.....</b>	<b>15</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
<b>2. A SEMIÓTICA DE PEIRCE.....</b>	<b>22</b>
<b>3. COMPLEMENTARIDADE.....</b>	<b>33</b>
<b>4. EXPERIMENTOS MENTAIS .....</b>	<b>37</b>
<b>5. CONCEITUANDO OS NÚMEROS REAIS – UM OLHAR SEMIÓTICO .....</b>	<b>49</b>
<b>5.1. Números reais como união dos racionais e dos irracionais.....</b>	<b>49</b>
<b>5.2. Números reais como corpo ordenado completo.....</b>	<b>51</b>
<b>5.3. Números reais como Totalidade de Números Decimais Infinitos .....</b>	<b>54</b>
<b>5.4. Números reais como pontos na reta numerada .....</b>	<b>57</b>
<b>5.5. Números reais como Cortes de Dedekind .....</b>	<b>59</b>
<b>5.6. Números reais como a Totalidade dos Números .....</b>	<b>64</b>
<b>6. EXPLORANDO ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS.....</b>	<b>69</b>
<b>6.1. A relação dialética entre o discreto e o contínuo .....</b>	<b>69</b>
<b>6.2. O infinito, o infinitésimo e a dialética entre estes conceitos .....</b>	<b>71</b>
<b>6.3. A relação entre a fluência e permanência: O que é uma variável?.....</b>	<b>76</b>
<b>7. REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>78</b>
<b>7.1. O que dizem as pesquisas sobre os livros didáticos de matemática .....</b>	<b>78</b>
<b>7.2. Descrição e Análise de Dados .....</b>	<b>81</b>
<b>7.2.1. Análise do Livro A – A Conquista da Matemática.....</b>	<b>81</b>
<b>7.2.2. Análise do Livro B – Matemática &amp; Realidade .....</b>	<b>87</b>

7.2.3. Análise do Livro C – Matemática: Realidade & Tecnologia.....	92
7.2.4. Análise do Livro D – Matemática Bianchini.....	99
7.3. Resultado das Análises.....	106
8. CONSIDERAÇÕES.....	110
9. REFERÊNCIAS.....	112
APÊNDICE A – Corpo Ordenado Completo.....	119

## MEMORIAL

Para compreender algumas motivações sob esta pesquisa, julgo necessário que minha trajetória acadêmica seja minimamente explicada. Antes mesmo de iniciar a graduação, retorno à 2008, quando ingressei no Ensino Médio e tive as minhas primeiras experiências acadêmicas.

Durante o Ensino Fundamental dos Anos Finais fui condicionado a aceitar conceitos e propriedades matemáticas, mas foi somente no Ensino Médio que pude perceber a aplicabilidade de determinadas ideias matemáticas, graças à professores que eram grandes entusiastas. A partir de feiras de ciências, mostras relacionadas a Matemática e Física – e outras, muitas vezes interdisciplinares – percebi o quanto era importante entender a Matemática para além da sala de aula, mas para o mundo-vida, e, durante o vestibular, optei por cursar, especificamente uma destas disciplinas.

Ao iniciar o curso de Matemática, fui condicionado a aceitar determinadas ideias em relação à conteúdos que eram ministrados – a discussão sobre os fatores que levavam a isso pode se tornar interessante, mas não é este o ponto agora – e ao me formar senti que sabia produzir Matemática mas não a entendia, só a aceitava. Estava revivendo um ciclo, pois esta condição de aceitação se assemelhava muito à que passei também em alguns anos da educação básica, e embora visse aplicabilidade de alguns conceitos, não entendia o cerne de muitas ideias matemáticas que eram discutidas. Teria eu, me tornado um Matemático<sup>1</sup>?

Nestes sete anos lecionando, estive durante quase quatro anos à frente de turmas específicas para concursos públicos, para turmas de pré-militar, pré-vestibular e pré-técnico cumprindo meu papel ante as necessidades dos alunos: gravar fórmulas para passar nas provas. Mas ao iniciar na Educação Básica, percebi que quando o aluno não entendia determinados conceitos, era por que faltava algo. Mas o que faltava? Faltava a quem? A eles, ou a mim?

Parecia tão óbvio que o problema estava na falta de interesse do aluno até entender que o problema talvez estivesse na minha prática enquanto profissional e também enquanto educador. Estes incômodos me levaram a entender que antes de

---

<sup>1</sup> “Para os matemáticos de profissão, que se dedicam exclusivamente à pesquisa, a questão da evolução da matemática parece ter pouco interesse. Sua preocupação é: como fazer matemática” (PAVANELLO, 1993, p. 5).

tentar diminuir os obstáculos epistemológicos, era necessário diminuir os obstáculos didáticos presentes na minha prática.

Na busca por mudanças em relação aos meus obstáculos didáticos, iniciei a jornada na Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática, onde obtive contribuições importantes no meu papel de Professor. Sinto que deixei de ser somente um Matemático, e passei a ser também um Professor de Matemática. Masurgia em mim a vontade de ser também um Educador Matemático. Porquê? Acredito que haja uma confluência entre estes três papéis, mas somente um educador matemático é capaz de “levar em conta o desenvolvimento intelectual do aluno e seus processos de raciocínio” e tem como objetivo “proporcionar oportunidades para que seus alunos tomem consciência de seus próprios processos de raciocínio” (PAVANELLO, 1993, p. 12).

Nesta “virada de chave” – por assim dizer –, conheci o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPGEM – UFJF/MG). E, ao iniciar a jornada no Mestrado Profissional em Educação Matemática, confirmei aquilo que me incomodou na minha prática: a Matemática vista pelos alunos ainda é muito técnica, acadêmica, e de certa forma, desconfortável para eles.

Pude perceber isto não somente na Educação Básica mas também no Ensino Superior, onde, durante os anos de 2021 e 2022, tive a oportunidade de lecionar na Faculdade de Educação da Baixada Fluminense (FEBF/UERJ). Era notório o quanto as dificuldades em Matemática se davam na forma que esta era apresentada. E eles carregavam estas dificuldades desde o ensino fundamental e médio.

O que se apresentava nas disciplinas da faculdade não parecia ter uma conexão com aquilo que se apresentava nas escolas, e esta falta de convergência entre os ensinoss gerava obstáculos epistemológicos, ou seja, dificuldades de captação de determinados conhecimentos, impedindo o desenvolvimento do pensamento, limitando o processo de ensino e de aprendizagem.

Mas como nós podemos superar estes obstáculos? Retificando noções, ideias, conceitos através de uma reflexão sobre os conhecimentos construídos. O que não é uma tarefa fácil, pois o documento que norteia o currículo – Base Nacional Comum Curricular - apresenta cinco grandes áreas da Matemática que precisam ser desenvolvidas. Como desenvolver as cinco? Neste trabalho não seria ideal fazer um panorama de todas elas, e por isso escolhemos trabalhar a grande área de Números.

Os números estão nas outras quatro grandes áreas, existe uma necessidade de se entender bem eles, para poder desenvolver basicamente tudo.

Por conta desta necessidade, escolhemos trabalhar a ideia de números reais por sua complexidade (não estamos falando da ideia de conjuntos reais e conjuntos complexos). A complexidade dos números reais se dá por suas relações que podem ser discutidas em diversas formas, em diversos signos e representações – que chamamos de pistas semióticas –, mas que, muitas vezes não são discutidas por existirem antirrupturas que limitam o avanço científico do pensamento matemático.

O quão complexo é entender a regra de operações dos sinais, por exemplo? O que é dízima, o que é infinito(s), o que é discreto, o que é contínuo? O que é conjunto? Um número é um ponto? Um número é um segmento?

E nos perguntamos como responder estas perguntas, visto que, muitas vezes não há clarividência em relação a todas estas formas de concepção dos números reais, nem pra nós, professores/educadores. Sempre buscamos estudar mais e mais, criar materiais e utilizar livros didáticos que são nosso grande aliado.

Os livros didáticos de Matemática dedicam boa parte do seu conteúdo na busca do entendimento sobre números reais. Mas a percepção que temos é que talvez ainda exista uma crença limitante na forma de construir o conceito ou a ideia de números reais dentro desse material didático. Por isso, buscamos desenvolver neste trabalho, uma análise dos capítulos de Números Reais em alguns livros didáticos, para refletir na forma que este conteúdo é apresentado na educação básica, seus conceitos, signos e significados. Mas quais livros escolhemos e porquê da escolha deles?

Os livros escolhidos foram: **(A)** “A Conquista da Matemática”. Autores: José Ruy Giovanni Jr. & Benedicto Castrucci. Edição: 4. Ano: 2018. Editora: FTD; **(B)** “Matemática e Realidade”. Autores: Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce & Antônio Machado. Edição: 9. Ano: 2018. Editora: Atual; **(C)** Matemática: Realidade & Tecnologia. Autor: Joamir Souza; **(D)** “Matemática – Bianchini”. Autor: Edwaldo Bianchini. Edição: 9. Ano: 2018. Editora: Moderna.

Para a escolha dos livros foi levado em consideração alguns fatores: O primeiro, foi o período que correspondem os livros didáticos em relação ao Plano Nacional do Livro Didático, que pertencem ao quadriênio 2020-2023. O segundo fator importante foi a autoria e as editora dos livros, que correspondem aqueles que são mais utilizados nas redes públicas e privadas de ensino, sendo os livros (C) e (D) os disponibilizados no ambiente de trabalho do pesquisador. E o terceiro, é os livros

pertencerem a um mesmo ano escolar, aquele o qual o pesquisador leciona atualmente, o 9º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais.

A busca por refletir e analisar a ideia de números reais enquanto pistas semióticas nos livros didáticos visa permitir que se explore as possibilidades de considerar os contextos, as situações e experienciar os números reais utilizando da complementaridade das ideias sem pô-las uma em detrimento a outra para que as dificuldades epistemológicas sejam diminuídas na educação básica em relação à apropriação deste conceito de forma que o aluno esteja inserido como ser reflexivo sobre a matemática e não condicionado a ela.

## 1. INTRODUÇÃO

A Educação Matemática busca, enquanto campo de prática profissional e científica, desenvolver diversas discussões relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem de matemática. Para Bicudo (2009), a Educação Matemática de qualidade é aquela que mantém vivo o movimento de ação-reflexão-ação nas atividades realizadas, sejam essas as atividades de pesquisa, de ensino e de aprendizagem ocorridas no âmbito escolar; sejam aquelas que ocorrem no mundo-vida, no cotidiano, ou ao que se referem às políticas públicas da educação e outras atividades que se encaixam no contexto de Educação Matemática. Nas percepções que temos da sala de aula de matemática do Ensino Fundamental, nos parece que o currículo propõe os conteúdos a serem estudados, por meio da álgebra, da aritmética e da geometria. Essas percepções foram incitadas a partir de observações de alguns livros didáticos de matemática do ensino básico.

Segundo Oliveira (2007), o livro didático é considerado a principal fonte de pesquisa de determinados conteúdos matemáticos e se constitui como um importante recurso, senão o mais importante, utilizado por professores e alunos. Costa (2017) diz que “O livro didático constitui-se num instrumento auxiliar da atividade docente, que quando utilizado de forma correta, contribui para a produção de uma melhor aprendizagem, ampliando e renovando o processo educativo” (COSTA, et al., 2017, p. 2). Por este motivo, é desejável que os livros didáticos tenham uma boa fundamentação e adaptação de seus conteúdos.

Contudo, tanto Silva (1996, p. 12) quanto Barreto (2000, apud OLIVEIRA 2007, p. 37), observavam à época que os livros didáticos não faziam mudanças substanciais em relação às abordagens dos conteúdos curriculares de acordo com as realidades em que eles seriam utilizados. Silva (1996) trouxe, ainda, críticas aos livros didáticos os quais ele definia como a “insubstituível muleta” de apoio ao professor, por entender que havia uma relação de submissão do docente àquilo que estaria imposto no livro, por sempre relacionar o conhecimento e o ensino ao material didático referido como indissociáveis. Cabe aqui um questionamento: como se dá hoje em dia esta relação do professor com o livro didático de matemática? É importante entender porque existe esta dependência tão grande que é apresentada nas literaturas de Silva (1996), Oliveira (2007) e Valente (2008), principalmente em assuntos específicos da matemática, como os números reais, por exemplo.

Atualmente, muito do que é mostrado tanto pelos professores quanto em materiais didáticos é uma matemática que pode ser caracterizada como pronta e acabada, que não estimula o aluno a pensar qual caminho foi percorrido para formular os conceitos. Para Miranda (2007), isto pode prejudicar a assimilação de conceitos que, quando não são bem assimilados podem se tornar um obstáculo didático que se propaga pelas séries escolares posteriores. E, quando este obstáculo didático se torna coletivo, dificilmente ele será superado pelos estudantes, principalmente no que tange à matemática.

Brousseau (1983) discorre sobre os diferentes tipos de obstáculos que podem ser identificados na matemática, e aqui destacamos os obstáculos didáticos e epistemológicos. Os didáticos se referem às escolhas feitas pelo professor no processo de ensino, enquanto os epistemológicos são aqueles constitutivos do conhecimento, inerentes ao saber. Estes últimos assemelham-se aos obstáculos que matemáticos encontraram ao longo da história no estudo da matemática para a criação e formalização de novos conceitos.

NETO (2016, p. 3) diz que “Considera-se como *a matemática mais antiga* aquela resultante dos primeiros movimentos do homem na direção de sistematizar conceitos como de número, forma e grandeza, não necessariamente nessa ordem.” Roque (2012) diz que os primeiros numerais não eram representados por meio de números abstratos – os símbolos – mas por sinais que indicavam medidas. Estes símbolos foram fruto de um processo de abstração que aconteceu ao longo do tempo, servindo para coisas de naturezas distintas e por ter surgido também a necessidade de se indicar o que estava sendo contado.

Em se tratando do estudo dos números, percebemos que o movimento de ação-reflexão-ação pode acontecer para mostrar as diversas percepções e significados que estes têm de maneira formal ou intuitiva. Vergnaud (2009) entende a noção de número como a mais importante da matemática ensinada nas escolas e, sem dúvidas, sabemos que eles trazem conceitos e mecanismos importantíssimos, mas enquanto estrutura mental, não somos capazes de compreender sua gênese. O conceito de números reais é muito mais amplo que o ensinado nas escolas e por isso, para seu ensino, pode ser necessário que se faça um estudo histórico e epistemológico sobre o conceito acerca de seu significado.

Por isto, a hipótese básica apresentada neste trabalho é que existem dificuldades epistemológicas no ensino e na aprendizagem de matemática – no que

tange ao estudo dos números reais e seus conceitos –, e nas ações interpretativas que se fazem a respeito de tal assunto nos livros didáticos. Estes impasses podem ser justificados supondo que a problemática se encontra na forma como esse conteúdo é apresentado.

Justificamos este estudo acerca dos livros pois, mesmo entendendo que o livro didático é apenas um apoio pedagógico, ele é um instrumento amplamente utilizado, e é necessário ressaltar que ele é o interlocutor entre professor e aluno no processo de ensino e de aprendizagem.

Levando isto em conta, surge a primeira questão relacionada à apresentação dos números reais nos livros didáticos, norteando a pesquisa: Como são abordados os números reais nos livros didáticos e qual significado eles apresentam em suas formas de representação em relação ao pensamento discreto e contínuo matemático para que a compreensão deles seja suficiente e eficaz?

Para tentar responder a esta e outras questões que surgiram ao longo deste trabalho dissertativo, traçamos como **objetivo geral**: analisar como as diferentes definições e conceitos da ideia de números reais vêm sendo discutidas nos livros didáticos da educação básica e sugerir, por meio de Experimentos Mentais, uma proposta de ensino para esses tipos de números.

Já os **objetivos específicos** são: (a) Identificar as diversas definições de números reais nos livros didáticos, bem como a conceituação e demonstrações feitas sobre esses números por meio de uma análise das pistas semióticas; (b) Identificar a complementaridade entre os aspectos formais e intuitivos na apresentação dos números reais; (c) Criar Experimentos Mentais com o intuito de desenvolver um suporte para o ensino sobre este tipo de números, principalmente no que tange às operações com esses elementos.

Esta é uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico entre a exploração e a explicação dos fenômenos estudados. A pesquisa qualitativa é vista pela necessidade de uma relação entre a pesquisa e o pesquisador, no intuito de identificar neste último o seu principal instrumento para executar e adotar a premissa da discussão do conceito de pesquisa, de modo que contemple suas especificidades, possibilidades e que tenha como enfoque o campo da educação (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

A pesquisa bibliográfica é aquela que “se realiza a partir de registros disponíveis, decorrentes de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados ou categorias teóricas já trabalhadas por

outros pesquisadores e devidamente registradas” (SEVERINO, 2007, p.122). Ela é exploratória, “pois busca levantar informações sobre determinados objetos, delimitando-se o campo de trabalho, mapeando as condições de manifestação desse objeto” (SEVERINO, 2007, p.123), se preparando para a pesquisa explicativa. Explicativa, pois “além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, por meio da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos” (SEVERINO, 2007, p.123).

## 2. A SEMIÓTICA DE PEIRCE

Cruz (2018, p. 21) afirma que “todo pensamento acontece por meio de signos”, e é a partir disto que faremos, de forma sucinta e didática, um transcorrer sobre este aporte teórico, tendo como base a perspectiva semiótica de Charles Sanders Peirce.

Peirce é um dos principais nomes da filosofia americana e, em relação aos estudos de Semiótica, ele é considerado um dos pais desta ciência, junto a Ferdinand Saussure, embora tenham estabelecido esta teoria de forma diferente, como afirma Cruz (2018).

Charles Sanders Peirce viveu entre 1839 e 1914, e foi um grande estudioso e polímata<sup>2</sup>, e desenvolveu pesquisas em diversas áreas. Graduou-se em química pela *Harvard University* em 1859 e trabalhou para a *U.S. Coast and Geodetic Survey* de 1859 a 1891. Segundo a *National Oceanic and Atmospheric Administration* – NOAA (2008, apud. PIRES, 2008, p. 148), tornou-se respeitado internacionalmente pois em 1857, foi o primeiro cidadão estadunidense a representar o país no meeting da *International Geodetical Association* e apontou um erro no método europeu de realizar observações da gravidade. Peirce também trabalhou na então recém-criada *University Johns Hopkins* de 1878 a 1883.

Para Pires (2008), Peirce foi um cientista e autor versátil, visto que ele realizou estudos relativos além da química, em áreas como astronomia, biologia, espectrologia, óptica, filologia, arquitetura, linguística e história. E, além disso, contribuiu também para a psicologia. Todavia, foi na lógica que Peirce estabeleceu seu campo de pesquisa científica de maior sucesso, onde iniciou seus estudos de

---

<sup>2</sup> indivíduo que estuda ou que conhece muitas ciências; polígrafo, polímata.

forma precoce. Aos 12 anos de idade, ele estudou o livro *Elements of Logic* de Richard Whately e, anos mais tarde esteve adentrando às teorias de Immanuel Kant, lendo *A Crítica da Razão Pura*.

Percorrendo pela perspectiva histórica de Peirce, percebe-se que ele provavelmente se tornaria um grande logicista. Santaella (1995) diz que ele exerceu e exerce grande influência sobre o pragmatismo e a lógica clássica, e teve trabalhos brilhantes sobre a lógica dos relativos, a teoria dos signos, probabilidade e indução e lógica matemática.

“Peirce considerava a Filosofia científica e a lógica, sua vocação” (CRUZ, 2018, p. 26). E tratando-se de ciência, Peirce baseava-se em sua própria experiência para conceituar e classificar, extraíndo o conceito de ciência como um “modo de vida” e não somente como um acúmulo de conhecimento organizado. A semiótica, para Peirce, era um outro nome para a lógica. Mas esta lógica difere da lógica formal quantitativa, pois ela não se restringia ao estudo de conteúdos mentais, mas o transcendia, estudando todo e qualquer tipo de signo, seja ele interno ou externo à mente humana, pensado ou não por uma consciência, não prejudicando sua capacidade de se dirigir a algo que é anterior e necessário ao processo de significação.

A semiótica pode ser considerada como a ciência que estuda todas as linguagens possíveis, ou seja, tudo que possa produzir significado e sentido, e ela se utiliza de signos para representar objetos. Enquanto Saussure estudava especificamente a linguística, que trata apenas da linguagem verbal, oral e escrita, que para Santaella (1983) é entendida como a língua nativa, materna ou pátria, Peirce buscava significar fenômenos dentro da Semiótica.

A perspectiva Semiótica de Peirce parte da necessidade imaginativa e das experiências, por meio de um processo manipulativo de tudo que se conhece (formas, cores, sons, imagens e cheiros) na intenção de estabelecer um processo comunicativo entre a sociedade. Nesta perspectiva pragmática de Peirce (*Pragmatic maxim*), é sempre enfatizado o uso que se faz das palavras e das ideias – o significado que damos a elas. Para pragmatistas, o significado se dá de acordo com cada realidade e cada interpretação da mente em potencial ou real. Isto é fortemente ligado à fenomenologia, que tem por função apresentar estas categorias. Santaella (2002 página) entende fenômeno, do grego *phaneron*), como sendo “tudo aquilo e qualquer coisa que aparece à percepção e à mente”, o que é corroborado por Cruz (2018).

Peirce distingue três elementos da fenomenologia: a primeiridade (originalidade) que se refere às qualidades não mediadas; a secundidade (obsistência) que se refere à existência ou a fatos; e a terceiridade (transuasão) que se refere ao entendimento ou à mediação de sinais (CRUZ, 2018, p. 27).

A primeiridade, segundo Peirce (2005) é aquilo que é próprio sem referência a qualquer outra coisa dentro dele, ou fora. Cruz explica que a primeiridade está relacionada a situações que ocorrem ao acaso como as possibilidades, qualidade, um sentimento, liberdade etc. Em linhas gerais, a primeiridade está ligada ao *sentir*. É uma percepção primária, onde o signo é percebido através de elementos que estão ligados à emoção, a uma sensação ou sentimento. “É ser tal como o ser é independentemente de qualquer coisa” (CRUZ, 2018, p. 28).

Para Ghizzi (2009), a primeiridade exprime uma liberdade que pode ser caracterizada quando observamos determinados fenômenos da natureza, já que esta é uma experiência que se sobrepõe a tudo que eventualmente ocupa nossas mentes, colocando-os em um estado livre, não autocontrolado. E, para o autor, “nesse libertar-se da razão tendemos a devanear por lembranças (experiências) da nossa mente as mais diversas; às vezes esquecidas no tempo” (GHIZZI, 2009, p. 15).

Através deste fenômeno causado pela primeiridade, podemos exprimir sentimentos que nos levam a associar fatos de acordo com as experiências já vivenciadas, o que leva a secundidade.

A secundidade pode ser entendida como uma busca por entendimento da primeiridade. É um conflito entre a consciência e o signo, para que se possa entender aquela mensagem inicial recebida quando se entra em contato com os sentimentos desenvolvidos pela experiência mental. De acordo com Santaella (1983, p. 47), “a secundidade é o que dá à experiência uma característica material”. Como a primeiridade é uma qualidade e apenas parte do fenômeno, para ela existir, deve estar encarnada numa matéria, que é a sua existência na corporificação material.

Um exemplo de como a secundidade age é o trazido por Ghizzi (2009), onde ele expressa os fatos externos que atingem nossos sentidos, as sensações que temos. Por exemplo, “o vermelho (qualidade) é vermelho do sangue, da rosa; daí que, o que antes era sentido como pura experiência interna da mente é percebido como propriedade do outro” (GHIZZI, 2009, p. 26).

Enquanto a consciência de primeiridade transita sem discriminação pelas meras qualidades dos fenômenos, e por ideias a elas associadas de modo livre pela mente, a consciência de secundidade é forçada a experienciar o outro (a alteridade) na sua característica material, factual, dura; que não cede à pura liberdade da mente e contra os quais ela é forçada a agir (GHIZZU, 2009, p. 16).

A secundidade emerge no momento posterior ao sentir, mas não é de fato o pensamento articulado. É anterior, uma reação à primeiridade, o que faz definir a terceiridade, aqui já mencionada, como o pensar: que é posterior à secundidade e está relacionada à percepção final e desenvolve o simbólico, e desenvolve significações completas.

A terceiridade pode ser vista como um mediador entre a primeiridade e a secundidade, ou seja, entre o que se experiencia com a liberdade, e os fenômenos e fatos. É através da terceiridade que se sintetiza pensamentos, num sentido de aprendizado através de uma consciência nova, um novo conhecimento ligado às questões cognitivas da mente real ou em potencial, e isso é essencial para tornar o que eram meras coisas em algo inteligível, ou seja, que é compreensível, fácil de entender e explicar. Segundo Peirce (CP., 1958, 1337), “é a categoria de mediação, do hábito, da memória, da continuidade, da síntese, da comunicação, da representação, da semiose e dos signos”.

Logo, em linhas gerais podemos dizer que a primeiridade é um pensamento sem relação ou análise; a secundidade é o pensamento relacionado à consciência do outro, que apresenta uma reação; e a terceiridade é a consciência sintetizadora, aquela que aprende e interpreta.

A partir do entendimento de primeiridade, secundidade e terceiridade, poderemos discutir a perspectiva semiótica de Peirce, por entendermos que estes conceitos são amplamente utilizados em toda a doutrina da conceituação de signo ou semiótica de Charles Sanders Peirce.

Cruz (2018) diz que a semiótica é a ciência que trata basicamente de como os signos de todos os tipos se relacionam com os seus objetos e com outros signos. Peirce (2005) diz que *signo (representámen)* é tudo aquilo que está relacionado com uma segunda coisa, seu *objeto*, de modo a trazer uma terceira coisa, seu *interpretante* para uma relação com o mesmo objeto:

Um signo, ou *representámen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isso é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto (PEIRCE, 2005, p. 77).

O signo pode ser qualquer coisa, de qualquer espécie e, quando posto no lugar do objeto, ele reproduz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial, que é o interpretante. Cruz (2018) diz que, para Peirce, o signo é uma relação de representação, onde ele media a relação entre os objetos e o interpretante.

Otte (2012) argumenta que quando o signo é reconhecido conscientemente pelo sujeito cognoscente, criam-se novos signos, e CRUZ (2018, p. 33) afirma ainda que “significado é uma interpretação de um signo dentro de outro sistema de signos”. Entende-se então, que o processo semiótico ocorre de forma cíclica, ou seja, a partir do momento que o sujeito reconhece o signo de forma consciente, podem ser/serão criados novos signos, novas ideias e novas interpretações. O processo interpretativo de um signo está além da interpretação feita inicialmente pelo sujeito, este processo é infinito. Peirce define este processo de significação como semiose.

A semiose é um processo dinâmico da relação solidária entre a primeiridade, a secundidade e a terceiridade: o fundamento do signo, o que é mais perceptível imediatamente; o que o signo representa, seu objeto; e o que o signo significa, ligado ao interpretante. Portanto, há a formação de uma tríade onde estão presentes o signo, o objeto e o interpretante, fazendo com que, a partir dela, possam ser mais bem compreendidos os processos de significação. Esta relação cíclica e contínua é o que Peirce chama de relação triádica entre o Interpretante, a Representação e o Objeto.

Figura 1 – Tríade da Semiótica



Fonte<sup>3</sup>: <https://amusearte.hypotheses.org/1075>

A perspectiva triádica de Peirce sobre a Semiótica traz a importância para a epistemologia e cognição em relação àquilo que se vai interpretar, ou seja, ela traz o interpretante, isto é, a ação interpretativa que visa gerar outro signo como explicação do primeiro.

Em diversos contextos semióticos que se utilizam desta base teórica para o ensino de matemática, há a presença de uma ideia de dualidade entre o meio e o objeto. A perspectiva semiótica que está sendo desenvolvida neste capítulo vem corroborar que os meios (signos) e objeto são diferentes, e que o signo serve para representar uma ideia de determinado objeto, estando, em dado momento e de certo modo, no lugar deste mas sem o ser.

Apesar desta grande importância dada ao signo e às representações, é importante ressaltar a descentralização do papel destes e frisar o que diz Otte (2012) quando afirma que existe a necessidade da cognição. Na tentativa de compreender a cognição, o autor entende que a mesma é concepta a partir do resultado de “uma contradição dialética entre o sujeito cognitivo e a realidade objetiva” (OTTE, 2012, p. 14).

Ele afirma, posteriormente, que há no modelo de Peirce um fluxo de pensamento que se expressa como uma contradição e se desdobra por meio de uma interação entre os objetos e os interpretantes (OTTE, 2012). Discorreremos um pouco sobre cada parte fundamental da Tríade Peirceana no desenvolvimento da sua perspectiva Semiótica.

O *representámen* do signo, ou “objeto perceptível” (CP, 1958, 2.330) é, para Peirce “o veículo que traz para a mente algo de fora” (CP, 1958, 2.330), sendo o signo da sua própria natureza material, ou o que representa como é a si mesmo (NÖTH, 1995). Já o objeto corresponde ao referente, à coisa (*prágma*), ou o *denotatum*, que é quando existe somente uma correspondência aproximativa (NÖTH, 1995), ou seja, há uma alusão do signo ao objeto real. Nöth (1995) destrincha também os conceitos de objetos reais e objetos mentais, que são discutidos na perspectiva de Peirce de acordo com seus manuscritos.

---

<sup>3</sup> Acesso em: 30 de abril de 2021

Peirce define que os objetos podem ser uma coisa material do mundo, ou imaginável, ou também inimaginável em certo sentido (CP, 1958). Este último, pode ser algo complexo de se pensar em um primeiro momento, mas Peirce traz um exemplo que clarifica as ideias em relação a este tipo de objeto:

(...) a palavra “*estrela*”, que é um Signo, não é imaginável, dado que não é *esta palavra em si mesma* que pode ser transposta para o papel ou pronunciada, mas apenas *um de seus aspectos*, e uma vez que é a mesma palavra quando significa “astro com luz própria” e outra totalmente distinta quando significa “artista célebre” e uma terceira quando se refere a “sorte” (CP, 1958, 2300).

Kant (2001) diz que pensar um objeto e conhecer um objeto não são a mesma coisa. Ora, um objeto pode ser considerado mediato e imediato. Os objetos mediatos, são aqueles que podem ser considerados dinâmicos, onde o signo somente indica e não exprime verdadeiramente o que é o objeto. Já os objetos imediatos são aqueles que, segundo Peirce “o signo mesmo o representa” (CP, 1958, 4536). Na perspectiva semiótica de Peirce, objetos também podem se autorreferenciar sendo um signo a partir dele próprio, onde o *representámen* e o objeto são a mesma entidade (NÖTH, 1995).

A matemática é, para nós, uma atividade semiótica, visto que, para Peirce ela é dotada de signos e representações, e para Otte (2012) ela é mais que uma linguagem ou ciência analítica, pois compreende justamente as representações indexicais (aquelas que variam de acordo com o contexto em que se aplicam) e as atividades observacionais (aquelas que mudam de acordo com a percepção da mente). Os signos auxiliam na compreensão de caracterizações distintas da matemática e de conteúdos matemáticos por justamente possibilitarem o entendimento de que, determinadas representações não são tão distintas quanto podem parecer à primeira vista. A matemática em sua natureza de ser, é constituída por uma prática de raciocínio matemático e não o contrário (OTTE, 2012).

Segundo PAULA (2014, p.134), “deparamo-nos o tempo todo com representações de objetos e conceitos abstratos”, o que nos permite afirmar, inclusive, que temos em matemática as “representações dos objetos e não os objetos em si como sua forma completa e manipulável” (PAULA, 2014, p.134).

Objetos matemáticos, no que tangem à razão pura, são norteadores e não coisas. Portanto “o signo não representa o objeto em todos os seus aspectos, mas é

uma referência a um tipo de ideia” (CRUZ, 2015, p.36). “O objeto matemático, tal como um número ou função, não existe independentemente de todas as suas possíveis representações, mas não pode ser confundido com alguma representação particular” (OTTE, 2012, p.16). De acordo com o platonismo cognitivo, os objetos matemáticos são somente crenças matemáticas daquele que interpreta, o sujeito. Eles não são capazes de desenvolver uma tautologia por si só.

Neste contexto, e pensando na perspectiva da aprendizagem em Matemática, a primeiridade pode ocorrer ao se visualizar determinada fórmula, axioma, definição, gráfico ou imagem, sem fazer relação específica a nada. A secundidade ocorre se o sujeito/mente real ou potencial relaciona aquilo que visualizou a um objeto matemático específico. E, ao relacionar este objeto a um conceito matemático específico, haverá um caminho para a terceiridade e, nessa perspectiva, haverá também a busca por explicações, análises, generalizações, interpretações e inferências.

A exemplo, se analisarmos um objeto matemático triângulo, intuitivamente nossa mente criará a figura do triângulo. Este pensamento da mente real ou potencial em relação ao triângulo o trará à tona como um signo, que pode ser escaleno, isósceles, equilátero ou retângulo. O objeto triângulo está ligado a diversas interpretações. Mas afinal, o que é um triângulo? O significado sobre o triângulo advém das suas características básicas enquanto objeto matemático, que são a quantidade de ângulos e suas propriedades, quantidade de vértices, arestas etc. Como ele vai ser interpretado enquanto signo, seja escaleno, isósceles, equilátero ou um retângulo, dependerá de como o objeto será mediado nos encadeamentos das possibilidades que permitem tais designações, a partir do interpretante.

Um exemplo numérico, que podemos discutir aqui, é em relação aos números primos. A definição “formal” de números primos diz que um número natural  $p \neq 1$  é chamado número primo se os seus únicos divisores não negativos são 1 e  $p$ , já a definição “popular” – que é amplamente utilizada –, é menos detalhada ainda: números primos são todos os números naturais que só podem ser divididos por 1 e por ele mesmo. Logo, podemos todos – professores, alunos e leitores – entender que o significado para o conjunto dos números primos é  $\{1, 2, 3, 5, 7, \dots\}$ , e de fato, esta é uma característica do objeto que inclui o 1 como primo. Mas, é necessário que a interpretação do ser pensante consiga verificar que incluir o 1 como primo é inconsistente com a unicidade da fatoração primária do Teorema Fundamental da

Aritmética<sup>4</sup>. Logo, este objeto será interpretado enquanto signo através de uma nova exploração.

Peirce dividiu os signos em três tricotomias, afim de explorar as possibilidades da semiótica através de cada etapa de sua tríade de primeiridade, secundidade e terceiridade. De acordo com Peirce, os signos se diferenciam dependendo da relação entre os elementos que compõem um signo e sua ação específica (semiose).

A segunda tricotomia nesta relação faz referência diretamente às formas de representação que estes objetos podem ter para a sua identificação enquanto signos. Nesta relação com o objeto, os signos podem ser ícones, índices ou símbolos.

Segundo Peirce (CP, 1958, 274) “um ícone é um *representámen* cuja qualidade representativa é uma sua primeiridade como primeiro”. O que o autor está nos dizendo é que existe uma qualidade no ícone que o torna apto a ser um *representámen*, e dessa forma, ele é capaz de ser um substituto para qualquer coisa com a qual se assemelhe. Os ícones, a grosso modo, são uma relação de semelhança com o objeto. Estes ícones podem ser, por exemplo, imagens, diagramas ou metáforas.

Sendo estas as maneiras de comunicar diretamente uma ideia, logo, podemos dizer que o ícone é utilizado para estabelecer todo e qualquer método de comunicação direta de uma ideia (CP, 1958). E é através do ícone e de sua observação que somos capazes de descobrir outras verdades relativas ao objeto que está sendo observado, indo além daquelas vistas inicialmente para determinar sua construção. (CP, 1958)

Um exemplo de ícone são as fotografias, pois estas representam imediatamente os aspectos ponto a ponto do objeto. Outro exemplo de ícone podem ser as estátuas, pinturas etc. Estes signos tendem a trazer um sentimento para aquele que os interpreta, logo, eles desenvolvem uma segunda coisa, afetando diretamente o interpretante (CP, 1958, 281).

E é nesta perspectiva que os ícones agem na matemática. Segundo Peirce, “o raciocínio dos matemáticos gira em torno do uso de semelhanças, que fazem uso disso para sugerir novos aspectos de supostos estados de coisas”. Os diagramas são os ícones utilizados frequentemente pelos matemáticos.

---

<sup>4</sup> (Teorema Fundamental da Aritmética) **Todo inteiro  $a \geq 2$  pode ser escrito como produto de números primos.** Esta decomposição é única exceto pela ordem dos fatores primos (GIMENES, 2013, p. 7).

Embora muitos não se assemelhem com seus objetos quanto à aparência, a semelhança entre eles consiste na relação entre duas partes. Peirce nos dá dois exemplos:

$$(1) \quad \text{Signos} \begin{cases} \text{Ícone} \\ \text{Índice} \\ \text{Símbolo} \end{cases}$$

Esta representação é um ícone onde o objeto geral “signos” está sendo assemelhado às suas classes “ícone”, “índice” e “símbolo” que se relacionam umas com as outras através de um detalhe que é a chave. A chave é o único aspecto que faz esta relação ter sentido.

O segundo exemplo trazido por Peirce trata justamente das sentenças matemáticas. Ele diz que “quando, em álgebra, escrevemos equações uma sob a outra, numa disposição regular, particularmente quando usamos letras semelhantes para coeficientes correspondentes, a disposição obtida é um ícone” (CP, 1958, p.282). Veja:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= n_1 \\ a_2x + b_2y &= n_2 \end{aligned}$$

Estamos lidando com um ícone “pelo fato de fazer com que se assemelhem quantidades que mantêm relações análogas com o problema” (CP, 1958, 282). Logo, quando as equações algébricas exibem as relações das quantidades através de signos algébricos, estas são consideradas ícones.

Os índices podem ser definidos como o *representámen* onde o seu caráter representativo consiste em ser um segundo individual. Um parâmetro que pode designar o signo como índice é a causalidade sensorial que ele pode ter para indicar seu significado (CP, 1958, 283). Logo, estamos dizendo que o signo enquanto índice é uma pequena parte de um todo, e essa parte é identificada pela experiência subjetiva ou herança cultural que foi adquirida pela mente em potencial ou real anteriormente àquilo que ele está ou estará interpretando.

Pense, por exemplo, que está andando pela rua e avista uma marca de pneus no asfalto. A partir desta marca, você pode deduzir que um carro freou bruscamente ou arrancou, também de forma brusca, daquele local. Imagine também que você

avista, pela janela de sua casa uma quantidade atípica de fumaça, e rapidamente você deduz que onde há fumaça, há fogo. Segundo Peirce (CP, 1958, 285) “tudo o que nos surpreende é índice, na medida em que assinala a junção entre duas porções de experiência”. O que estamos verificando com estes exemplos simples: que tiramos conclusões baseadas em algo que supostamente aconteceu (uma causa), transformando estes supostos acontecimentos em signos, mais especificamente em índices.

O índice pode ocorrer de duas formas: quando sua secundidade for uma relação existencial, sendo genuíno, ou quando sua secundidade for uma referência, sendo degenerado. Aqueles considerados genuínos podem conter em si uma primeiridade, ou seja, podem ser parte de um ícone no seu processo de constituição.

Consideremos um metro de madeira, por exemplo. À primeira vista, ele parece somente um ícone para a ideia de ter “um metro”, se pretendêssemos mostrar um metro da maneira mais próxima possível de como ele pode ser visto e considerado. Mas, se o verdadeiro propósito de um metro de madeira é o de mostrar um metro de uma maneira mais aproximada possível através de uma comparação entre o pedaço de madeira e a barra guardada em Paris e que se chama “metro”, conectando à realidade aquilo que era um mero ícone, este passa a ser um índice.

Um exemplo de índice é a escrita  $\Delta ABC$ , que está indicando um triângulo de vértices A, B e C. Esta é uma escrita muito comum em textos matemáticos (CRUZ, 2018).

A última forma de representação por signo é através de símbolos. Estes signos remetem ao objeto denotando uma virtude ou lei, associando ideias gerais que agem por meio de uma convenção (CRUZ, 2018). Peirce define símbolo como “um *representámen* cujo caráter representativo consiste exatamente em ser uma regra que determinará seu interpretante” (CP, 1958, 292).

E, por isso, palavras, frases, livros e outros signos convencionais são símbolos. Logo, o símbolo é aplicável a tudo o que possa ser concretizado na ideia ligada à palavra (CP, 1958, 298), e ele está conectado ao objeto por força da ideia da mente que utiliza o símbolo. A palavra “triângulo” nos faz associarmos a ela, um objeto. E de fato, associamos.

O símbolo é explicado *ad infinitum*. Nos dicionários, por exemplo, procuramos nas definições novas definições como referentes. Existem símbolos não verbais, como a cruz. A cruz pode simbolizar a religião cristã, um hospital, entre outras coisas.

Peirce vê a matemática como uma construção que depende de signos e eleva sua filosofia a um nível de investigação científica. Esta investigação científica em matemática advém de uma abordagem construtiva, onde o motivo da investigação é o objeto da atividade. Todas as atividades humanas são condicionadas pelas ações que são realizadas sobre os objetos considerados. Para autores como Barros e França (2018) e Otte (2003), a matemática é considerada uma atividade semiótica e isto permite que contextos da Educação Matemática possam ser estudados epistemologicamente utilizando o Princípio da Complementaridade.

### 3. COMPLEMENTARIDADE

Michael Otte busca, de modo inovador, apresentar respostas a questões ligadas ao fundamento do conhecimento matemático e sobre o desenvolvimento cognitivo pessoal (do indivíduo, o nosso). O pensamento sobre Complementaridade de Otte tem como perspectiva uma metodologia didática que pode funcionar como uma estratégia potencializadora às aprendizagens matemáticas, constituindo-se numa estratégia de metodologia investigativa às pesquisas em Educação Matemática (ARRUDA, *et al.*, 2015).

O estudo sobre a Complementaridade de Otte é importante, pois leva a reflexões e apontamentos na pesquisa sobre os conhecimentos matemáticos e sobre a docência em matemática, seus fundamentos e sua forma didático-metodológica no processo de ensino-aprendizagem em matemática. Tudo isso na tentativa de ampliar os olhares diferenciados, buscando contribuições para o desenvolvimento desta teoria, de forma investigativa, interdisciplinarmente presente na semiótica envolvida para o uso em diversas áreas de conhecimento além da matemática.

Todavia, para compreender a perspectiva Otteana sobre o tema referido, é necessário que se conheça o Princípio da Complementaridade antes definido pelo físico Niels Bohr<sup>5</sup>, logo, serão feitas comparações entre as duas perspectivas, no intuito de entender de forma clara o que objetiva o estudo da complementaridade.

---

<sup>5</sup> Niels Henrik David Bohr (Copenhague, 7 de outubro de 1885 — Copenhague, 18 de novembro de 1962) foi um físico dinamarquês cujos trabalhos contribuíram decisivamente para a compreensão da estrutura atômica e da física quântica.

Em linhas gerais, o físico afirma que, para caracterizar certos fenômenos ou conceitos, há a necessidade de apresentar características que, mesmo vistas como contraditórias, se complementam para que haja uma descrição completa de fenômenos. Segundo Barros e França (2018, p.3) “Bohr usou apenas ideias simples para descrever o seu ponto de vista metodológico, sem apelar a aspectos teóricos e matemáticos, mas que tinham como finalidade dar consenso à controvérsia existente entre os pontos de vista de diversos cientistas renomados da época”. Os autores afirmam ainda que Bohr defendia a ideia da dualidade presente nos experimentos, e por este motivo, acreditava que os objetos se comportavam e interagem de forma que ambos não andavam separadamente (BARROS; FRANÇA, 2018).

A Teoria da Complementaridade de Otte é baseada em Kant, onde a atividade é parte importante para o desenvolvimento do sujeito, fazendo uma conexão entre o indivíduo e o mundo. Segundo ARRUDA *et al.*, (2015), para Otte, a complementaridade está na prática (práxis) da atividade e ela direciona a elementos epistemológicos: o sujeito indagativo/questionador e o objeto inerente à teoria do conhecimento, levando à Revolução Copernicana<sup>6</sup>.

Em sua essência dinâmica, a complementaridade se fundamenta entre os meios e os objetos de conhecimento, e nenhum deles pode ser determinado sem o outro. O meio é qualquer coisa que produz uma intermediação entre o sujeito e o objeto, sejam os meios linguísticos, ferramentas ou instrumentos experimentais. Ele se torna um meio de conhecimento quando produz relações entre o sujeito e o objeto (OTTE, 1993). O autor explica ainda que, embora eles sejam determinados como atos epistemológicos individuais, podendo apresentar papéis completamente diferentes, tanto meio quanto objeto dependem um do outro para que os dois tenham sentido epistemológico.

Entendemos que a Complementaridade preza pela interação dinâmica entre o sujeito e o objeto, objetivando analisar e explicar tanto o desenvolvimento epistemológico quanto o cognitivo dos conceitos matemáticos. Os meios de

---

<sup>6</sup> Trata-se de uma proposta de inversão da metodologia predominante até o período a qual Kant está inserido, em que não mais o sujeito se regulará pela natureza do objeto, mas este que irá regular-se pela natureza do sujeito do conhecimento (o sujeito onde se recaem as ações de percepção e memória que designa a capacidade do conhecimento de modo geral).

conhecimento serão essenciais para estabelecer esta relação, confrontando o aspecto dual no estudo de matemática e seus objetos, e eles podem ser determinados de diferentes formas, vistos como uma entidade diferente tanto da consciência quanto da realidade objetiva (OTTE, 1993).

Seguindo o Princípio de Complementaridade, temos como ideia que na atividade humana, é impossível separar o sujeito do objeto. Ou seja, o objeto não tem um papel próprio dentro da atividade, e isto indica que o sujeito, a atividade e o objeto são um todo, num aspecto relacional (eles têm uma relação/ligação direta).

Tomando o pensamento Otteano sobre a complementaridade, entendemos que ele não tem aspecto dual (onde objeto e representação seriam algo em comum e seriam irreconciliáveis, convergindo apesar de diferentes), pois entendemos que objeto e representação têm cada um uma diferenciação relativa. No entendimento Otteano, a complementaridade tem uma interpretação dialética<sup>7</sup>, dinâmica e genética.

Na matemática, não há necessariamente a busca por uma complementaridade que resolva as contradições existentes na dialética entre objeto e representação, pois elas sempre existirão. Essa contradição dialética inerente na matemática e nas ciências é motor para o desenvolvimento do pensamento matemático e científico e do nosso conhecimento (PAULA, 2014). Estas estão ligadas ao desenvolvimento do conhecimento, e não podem ser apontadas como erro ou defeito do método, pois elas nos fazem perseguir as possíveis resoluções das próprias contradições e a construção de novos conhecimentos.

Isso não significa que a construção de novos conhecimentos nos faça descartar e se separar de forma absoluta do velho, mas é baseada no mesmo. Esse novo conhecimento supera o velho dialeticamente, ou seja, ele modifica o velho e o melhora, “constituindo um exemplo de negação da negação e revelando a unidade dialética entre continuidade e descontinuidade no processo de construção do conhecimento” (PAULA, 2014, p.86).

Há a necessidade de uma reflexão, onde são postas em pauta as problemáticas relacionadas ao desenvolvimento do conhecimento matemático do indivíduo em sala de aula observadas por Otte. Estas tratam “da relação entre o lado

---

<sup>7</sup> Grosso modo, dialética é a percepção de que a realidade não é constituída de uma essência imutável. Ela parte da premissa que há um constante movimento que transforma a realidade a partir das suas contradições.

objetivo (do conteúdo da matemática), e o lado psicológico (o social) do conhecimento matemático” (ARRUDA et. al. 2015. p.2). Para Otte, o conhecimento matemático não define uma relação bem consolidada entre o para quê, o porquê e o como utilizar a matemática enquanto sujeito pertencente a um universo plural.

O pensamento sobre complementaridade no conhecimento matemático nos faz entender que o caráter intensional e extensional são independentes, mas se conectam de modo cíclico. Isso mostra que o conhecimento matemático é mais que apenas uma dualidade, onde podemos observar que existe uma relação entre sujeito e objeto, não somente o objeto em si, pois não existe um objeto concreto ideal no conhecimento matemático, mas sim objetos ideais que estão na mente do interpretante.

Otte (2012) destaca também que as representações têm um papel importante, pois para que algo realmente exista para nós, este algo tem de ser representado. A matemática passa por diversos estudos, apontando que seus objetos têm caráter tanto intensional quanto extensional, e que, dessa forma, a condiciona ser conceituada como uma atividade semiótica, caracterizada pela complementaridade.

A complementaridade entre o signo e aquilo a que faz referência, serve para sanar as dúvidas que parecem existir entre os aspectos intensionais e extensionais no desenvolvimento do conhecimento matemático, a partir de um ponto de vista evolucionista do que é cognoscível. Fonseca (2010) nos mostra que existe um debate em torno das concepções intensional e extensional da matemática que atingem particular e intensamente o conceito de número e nos explica o que distingue a noção de intensão e extensão de termos matemáticos. A noção de intensão explicita as relações entre classes de objetos matemáticos e suas relações estruturais, enquanto a noção de extensão se relaciona à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria, como nos exemplos algébricos discutidos por Frege e citados por Cruz (2018). Nestes estudos dos signos, podemos entender a “extensão como o objeto (caso exista) ao qual o signo refere-se e a intensão como o conteúdo ou sentido do signo que, às vezes, é considerado como significado dos signos” (CRUZ, 2018, p. 46).

O desejo de uma abordagem complementar é para que justamente as teorias da matemática clássica e sua origem sejam preservadas, mas de forma a considerar uma base inicial para manter a visão geral da teoria, onde se pode perceber um desenvolvimento metodológico considerado construtivista ou, até mesmo idealista-construtivista. Segundo Kuyk (1977, p.146, apud Fonseca, 2010, p.99) “a natureza da

matemática não decorre simplesmente do método abstrato, formal ou axiomático, mas que mesmo as abstrações se tornam possíveis, em razão da existência do relativamente simples e claro, intuições básicas de continuidade e descontinuidade”.

#### **4. EXPERIMENTOS MENTAIS**

É desafiador pensar em uma descrição específica do que é a matemática propriamente dita, afinal, sempre surgem perguntas e uma das principais é: a matemática é um conhecimento de quê? Segundo Silva (2007), a matemática é fonte constante de questionamentos, que perpassam seus limites e requerem um contexto filosófico para serem adequadamente tratados, pois existem questões que estão além dos seus domínios, sendo estas as questões metodológicas, epistemológicas e ontológicas, que só podem ser objetos de reflexões filosóficas.

Desde que iniciado este estudo sobre números reais, entendemos que é necessário estudar acerca da produção do conhecimento matemático. Uma das possibilidades sustentadas por pesquisadores que são as principais referências teóricas deste trabalho, como Peirce, Otte e Cruz, para o entendimento e produção do conhecimento matemático, é a utilização do pensamento abduutivo e do raciocínio diagramático.

A matemática pode ser estudada de maneira dual onde procuramos entender seus aspectos internos e externos na produção de saber, assim como pelas questões relacionadas à natureza dos seus objetos, às experiências, ao seu rigor, às verdades e às direções filosóficas que buscam analisar a mesma enquanto fenômeno social e cultural.

Nosso conhecimento surge de duas fontes: da receptividade das impressões ou da espontaneidade dos conceitos. A receptividade das impressões acontece quando um objeto nos é dado, já a segunda fonte acontece quando o objeto dado é pensado em conexão com a representação que é apresentada. “Essa é a dinâmica do ciclo hermenêutico perceptivo, associar algo novo a um sistema de conhecimentos que já possuímos, para adquirirmos conhecimento sobre esse algo” (CRUZ, 2019, p.117). A respeito da forma intuitiva de pensamento é importante considerar que

Se a intuição tiver que se guiar pela natureza dos objetos, não vejo como deles se poderia conhecer algo a priori; se, pelo contrário, o objeto (como

objeto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade (KANT, 2001, p.46).

Kant dizia que existem certos juízos que são indispensáveis a todo conhecimento, e classificou-os como analíticos ou sintéticos, e a priori ou a posteriori (SILVA, 2007). Os juízos analíticos de Kant são, de forma simplória, aqueles que dependem unicamente do seu significado para ter um valor de verdade. Por sintético, entendem-se aqueles juízos que não são analíticos, ou seja, não contidos no conceito original de forma implícita, como, por exemplo, afirmar que “a bola é redonda” é uma maneira analítica de juízo, pois ser redonda está concernente à existência da bola. Já “a bola é brilhante”, é um juízo sintético porque diz sobre a bola algo além do que está contido no conceito original, da mesma forma que uma afirmação empírica, ou seja, baseado na observação e na experiência.

Este pequeno exemplo visa mostrar que juízos analíticos costumam cair na trivialidade, pois a característica principal do objeto “bola” lhe é necessária para se avaliar o valor de verdade, ou seja, de ser redonda. O que a tornará verdadeira, será a confrontação com o mundo, não apenas o significado implícito.

Além disso, a ideia de ser um juízo a priori ou a posteriori é basicamente o que Kant distingue como os conhecimentos puro e empírico. O conhecimento a priori (ou puro) é aquele que independe de uma experiência para a sua existência e está ligado à abstração. Enquanto o que chamamos de a posteriori, trata-se de um conhecimento que só acontece após a experiência, sendo empírico.

Inicialmente, para Kant, esses juízos a priori deveriam ser vistos como necessários e universais, e tinham de ser verdadeiros antes de qualquer experiência, sendo constituídos somente pelo uso da razão (STRATHEN, 1997).

Mas em relação à matemática, como podemos entendê-la? Ela é uma descoberta ou uma invenção? Ela é analítica ou sintética? Na perspectiva da concepção idealista, a realidade matemática é condicionada pelas construções que determinam esta realidade, ou seja, são humanamente inventáveis, e existem apenas por conta do pensamento de um criador. Já na perspectiva do realismo, o universo matemático é autônomo, seus objetos têm realidade e propriedades próprias que independem de um sujeito, que somente a descobre.

Na realidade do professor, tanto o realismo quanto o idealismo, embora estejam em posições contrárias e até extremas, são simultâneos. A matemática pode ser vista

como uma revelação ou uma passagem do concreto para o abstrato, mas também pode ser aplicável ao mundo físico, mesmo partindo de algo considerado inteiramente abstrato. Por isso, para Becker “O conhecimento matemático depende das percepções e não pode ser puramente intelectual” (BECKER, 1965, p.170). Segundo Ferreira (2007, p.14), para Kant os juízos matemáticos são extensivos, ou seja, informam algo de novo. Retornando a questões referentes aos juízos analíticos ou sintéticos a priori, o autor analisa que os juízos aritméticos são, para Kant, considerados sintéticos a priori.

Estes juízos, para Kant, serão suficientemente válidos quando o objeto se dá no mundo dos fenômenos, logo, poderão ser concebidos diferentemente daquilo que não se dá nem no tempo e nem no espaço. Os objetos da metafísica – Deus, alma, liberdade – são transcendentais e não pertencem ao mundo fenomenal, e estão além da nossa capacidade cognitiva, sendo concebidos de forma apriorística. Para Kant, podemos conceber, mas não podemos reconhecer objetos da metafísica e, com isso, o autor entende que existe em nós um conceito que é puro e ao mesmo tempo sintético sobre Deus e sua existência, e existe sobre os juízos sintéticos a priori da matemática e física, muito embora os objetos da matemática e física sejam perceptíveis no mundo natural, dos fenômenos.

Podemos definir esta abordagem como um quase-empirismo. Esta abordagem procura descrever e caracterizar a matemática, partindo das práticas reais dos matemáticos.

Lakatos<sup>8</sup> (1974) enfatiza que a ciência está fundamentada na experiência e na observação empírica, e que a razão deve ser usada para interpretar e analisar essas observações. Ele argumenta que a experiência é crucial para a formação do conhecimento científico, mas que a razão é necessária para avaliar e interpretar essas experiências. Portanto, a ciência, enquanto teoria deveria, ser utilizada para explicar fenômenos, obedecendo a uma estrutura lógica que permite serem feitas inferências sobre o mundo natural, a fim de avaliar com base em sua capacidade de explicar e prever observações empíricas, sendo um empreendimento racional e fundamentado

---

<sup>8</sup> Outro trabalho importante de Lakatos é "Provas e Refutações" (1976), onde ele apresenta uma abordagem histórica e filosófica da evolução do conhecimento científico, mostrando como as teorias científicas são testadas e modificadas ao longo do tempo. Nessa obra, ele enfatiza a importância da experiência na avaliação das teorias científicas, mas também reconhece o papel da razão na formação do conhecimento científico.

nestas observações. Por outro lado, Lakatos (1974) determina a existência de uma pseudociência, sendo aquela que não segue os mesmos critérios de validação empírica e racional da ciência, e pode ser, muitas vezes, baseada em crenças infundadas, afirmações não testáveis e evidências anedóticas ou pessoais, logo, sendo uma atividade irracional e não científica, que não segue os critérios de validação empírica e racional.

A abordagem quase-empirista na matemática reconhece que a matemática é baseada em axiomas e deduções, mas enfatiza a importância da experiência empírica e da intuição matemática na construção e desenvolvimento de novas teorias e conceitos matemáticos. Essa abordagem reconhece que muitas vezes as ideias e teorias matemáticas surgem a partir de problemas práticos do mundo real ou da observação empírica de padrões e relações matemáticas. Este quase-empirismo destaca que a matemática constitui uma atividade humana, individual e social, dialogando entre pessoas que visam resolver problemas. Estes produtos matemáticos podem se modificar à medida que surgem novos desafios e significados, na mudança de padrões de rigorosidade, logo, é por meio de uma discussão crítica de ideias sobre os objetos matemáticos que existe a possibilidade de reconhecer novos saberes, concepções etc.

Estas “coisas” matemáticas, que são os objetos, são apresentadas a nós na medida que se transformam em percepções graças à intuição empírica. Na matemática, por exemplo, “muito embora os conceitos puros do entendimento mesmo aplicados a intuições a priori, nos proporcionam conhecimentos na medida em que estas intuições, e portanto também os e conceitos de entendimento podem ser aplicados a intuições empíricas” (KANT, 2001, p. 173).

Logo, entendemos que por meio somente da intuição pura não se categoriza nenhum conhecimento, mas por meio da aplicação à intuição empírica a perspectiva de possibilidade de conhecimento é outra, propiciando o conhecimento empírico, ou seja, a experiência. A abordagem quase-empirista na matemática também reconhece a importância da lógica e da dedução na construção do conhecimento matemático. Os axiomas e as deduções matemáticas são fundamentais para estabelecer a validade e a consistência das teorias e conceitos matemáticos, e a abordagem quase-empirista não nega isso.

Os Experimentos Mentais se fundamentam destes processos de análise de conceitos sintéticos para suas atividades supostas. Cruz (2018, p. 164) define os

“experimentos mentais como formas que o sujeito tem para colocar seu próprio pensamento em um determinado contexto, como um objeto de consideração e por meio de uma representação”. Tais Experimentos, em Educação Matemática, passam por um processo de estruturação, onde o sujeito cognoscente desenvolve um sistema de atividades supostas afim de criar hipóteses, questionar, inferir e validar aquilo que ele está querendo provar. Para Cruz (2019, p. 24) “o pensamento intuitivo desempenha um papel importante na aplicação desses experimentos”, mas é preciso ir além da intuição para desenvolvê-lo.

Segundo Cruz (2019, p. 24) “No experimento mental, cria-se a possibilidade de construção da referência à base de um pensamento especulativo. Não é uma simples intuição, mas uma experiência à base de um contexto teórico, um pensamento abduativo, um passo intermediário”.

A matemática é uma atividade semiótica e ela acontece por meio da construção de diagramas, além das observações das relações encontradas nesta construção e não pela análise dos significados dos conceitos matemáticos. A exemplo, linguagem em matemática pode ser caracterizada de duas formas: a geométrica e a algébrica. “Elas são características complementares, que refletem diretamente da complementaridade existente na Matemática como ciência, numa relação entre os conceitos de contínuo e discreto, entre a Geometria e a Álgebra” (BARROS; FRANÇA, 2018, p. 3).

A semiótica, como meio de representar os pensamentos gerando significados, vai trazer, junto aos experimentos mentais, a construção das possíveis relações entre os aspectos intuitivos e formais que o interpretante possa utilizar no raciocínio diagramático. Entende-se que, para que estes diagramas (algébricos ou geométricos) tenham sentido, eles precisam de um sistema de representação bem definido, que seja coerente. O sistema de representação é o universo de discurso, e ele é importante porque permite que sejam comunicados ideias e resultados de maneira precisa e consistente. A definição clara e precisa de termos matemáticos e o seu contexto no universo do discurso são fundamentais para a compreensão e resolução de problemas matemáticos. Além disso, a escolha do universo do discurso em um problema matemático pode influenciar as soluções possíveis e as abordagens a serem tomadas. Por exemplo, ao resolver um problema de geometria, a escolha do universo do discurso pode levar a diferentes tipos de argumentos e técnicas de resolução.

No que tange ao trabalho, a busca por utilizar experimentos mentais – que é o que comporá nosso produto educacional –, é a de fazer pensar novas formas de atividades: que supõem, têm hipóteses, contemplem deduções e induções, apresentem novas ideias (abdução) a fim de trazer a evolução das ideias anteriores, utilizando argumentos e conhecimentos que são válidos para a comunidade científica. As hipóteses matemáticas que desencadeiam do pensamento abdutivo, não ocorrem de forma sola, pois, além de serem necessários aspectos relacionais entre as partes, estabelecendo um processo dedutivo dentro do estudo dos signos, necessitam também de indução pois nem a matemática como ciência de observação e de medidas escapa do raciocínio indutivo.

Os Experimentos Mentais são desenvolvidos seguindo características essenciais para este processo, e para Cruz (2021), estas constituem a heurística condicionante para considerar tais processos como uma possível metodologia para o ensino de matemática. “Essas características são nomeadas como: Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação” (CRUZ, 2021, p. 32).

Desta forma, cada característica da Metodologia dos Experimentos Mentais tem um objetivo, e elas podem acontecer individualmente ou simultaneamente. Verificaremos como se dá o processo de desenvolvimento de cada característica:

**Forma:** segundo Cruz (2022, p. 33), a forma “tem o significado de atividades supostas.” Ou seja, os experimentos mentais são baseados em atividades supostas, logo, elas partem de conjecturas e hipóteses que são desenvolvidas em uma representação particular de um objeto geral (CRUZ, 2022).

A forma é o processo de generalização do pensamento, logo, parte de um processo cognitivo da mente em potencial ou real que precisa significar esta atividade suposta, portanto é desenvolvida a partir de uma generalização que é direcionada a uma epistemologia matemática do ponto de vista semiótico, por meio da relação de signos e objetos.

**Estrutura:** Cruz (2021) diz que em cada experimento mental, muitas coisas são implicitamente assumidas, ou seja, estes não têm uma estrutura rígida. Assim sendo, aplica-se a síntese abdutiva, que é a introdução de novas ideias que não estavam no problema, atividade ou prova, a fim de permitir que estes sejam solucionados. No pensamento matemático formal, há a necessidade de se fazer tudo

explicitamente e de ter condições necessárias e suficientes para de fato provar o que queremos, logo, a síntese abdução busca dar ênfase ao que a mente é obrigada a fazer de forma inteligível, indo além das representações.

**Compreensão:** Cruz (2021) escreve que a compreensão é o que, nos Experimentos Mentais, combina experiências e conhecimentos que “devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções e cálculos formais quando necessários. É o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental” (CRUZ, 2022, p. 34).

Como dedução, baseados no pensamento de Peirce (2005), entende-se o modo de raciocínio que investiga o estado de informações que foram postas na premissa, e que também está ligado ao raciocínio diagramático, percepção, relação do estado das coisas que estão nesta premissa. Estas podem estar implicitamente colocadas, de forma que a dedução seja capaz de concluir a necessidade de sua utilização para uma possível verdade no que se está estudando.

**Dependência:** Os experimentos mentais dependem de um conhecimento, obviamente, e também de argumentos que sejam comuns e aceitos pela comunidade científica, mesmo que não sejam estritamente lógicos (CRUZ, 2021).

Logo, segundo Cruz (2022, p. 35), “este processo nos possibilita compreender que para aprender coisas novas, não se pode apenas contar com as relações dos conceitos e a coerência que a teoria traz, mas de que as aplicações destes conceitos ou dos objetos é na complementaridade entre teorias e fatos”.

**Revelação:** A revelação mostra que existem contradições no nosso próprio sistema de conhecimento. “Muitas vezes, porém, novas leis são descobertas desta maneira. Se existem apenas duas possibilidades e uma delas é falsa, a outra deve ser verdadeira. É claro, a nova teoria também é apenas uma teoria e não a verdade absoluta” (CRUZ, 2021, p. 17).

Os Experimentos Mentais têm a capacidade de revelar um desajuste no aparato conceitual tradicional, permitindo ao experimentador ou ao cientista utilizar seus conhecimentos da mesma forma que utilizava antes, por outro lado, esses experimentos mostram contradições e/ou confusões lógicas no

desenvolvimento da dada atividade, provas e/ou problema apresentado. (CRUZ, 2021, p. 17-18).

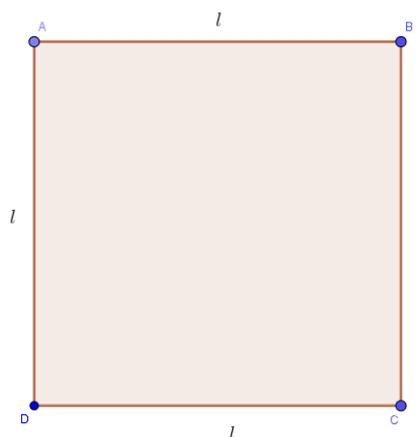
**Comparação:** é nesta característica que podemos “afirmar que é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova ou problema. Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo” (CRUZ, 2022, p. 37).

Para dinamizar o entendimento do que é um experimento mental, iremos desenvolver no produto educacional atividades de acordo com as características que são apresentadas. Abaixo, apresentaremos um experimento, onde exploramos as possibilidades e novas ideias que este pode apresentar dentro da perspectiva metodológica, utilizando o seguinte teorema:

**Proposição:** Mostre que dado qualquer quadrado, seu lado e a sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

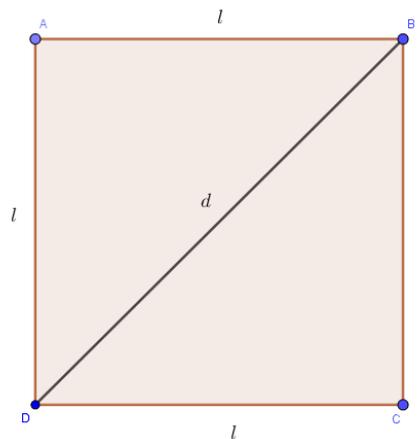
**Forma:** Tome um quadrado de lado  $l$  e em seguida, trace uma reta  $\overline{BD}$ , temos a diagonal  $d$

Figura 2 – Quadrado de lado  $l$



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 3 – Quadrado de lado  $l$  com diagonal  $d$



Fonte: (O AUTOR, 2022)

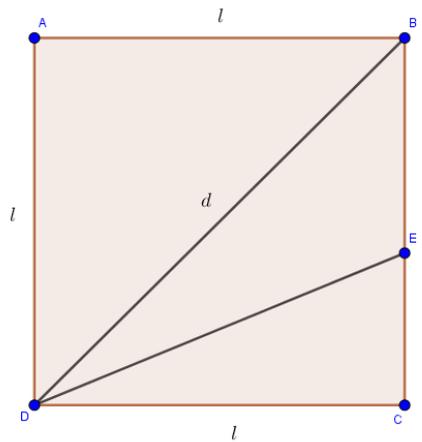
**Estrutura:** Utilizando o teorema de Pitágoras<sup>9</sup>, podemos afirmar que a medida da diagonal  $d = l\sqrt{2}$ . Podemos afirmar também, então, que  $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$ .

**Compreensão:** Suporemos que  $\sqrt{2}$  é um número racional, ou seja,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Supondo isto, estamos dizendo que, num quadrado de lado  $l$  e diagonal  $d$ , a razão  $\frac{d}{l}$  poderia ser expressa por uma fração que podemos considerar sempre irredutível. Isso significa supor que existe um quadrado em que  $d$  e  $l$  são inteiros e diferentes de zero.

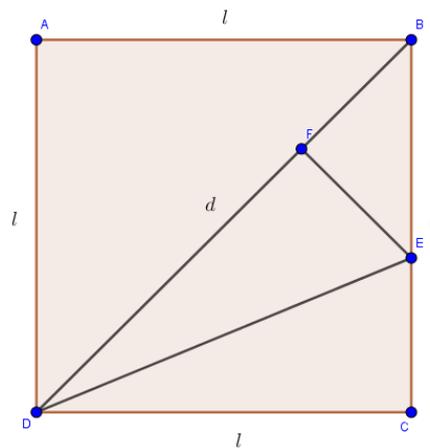
**Dependência:** Traçando esta diagonal, obtemos um triângulo  $BCD$ , tracemos agora uma bissetriz do ângulo  $B\hat{D}C$ , formando um novo ponto – que chamaremos de  $E$  – no lado  $\overline{BC}$ . Após, traçaremos um segmento de reta perpendicular à diagonal  $\overline{BD}$ , partindo dela a partir de um ponto que chamaremos de  $F$ , até o ponto  $E$ .

---

<sup>9</sup> Teorema de Pitágoras:  $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = \sqrt{2l^2} \rightarrow d = l\sqrt{2}$

Figura 4 – Bissetriz do ângulo  $\widehat{D}$ 

Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 5– Segmento perpendicular à diagonal  $d$ 

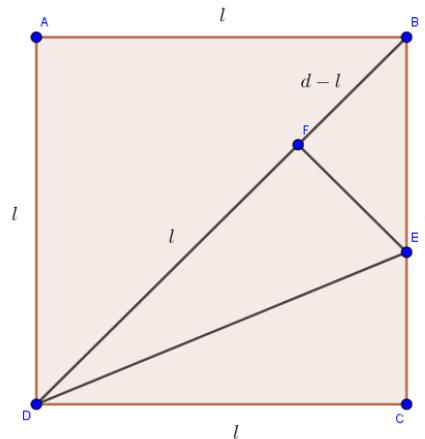
Fonte: (O AUTOR, 2022)

**Revelação e Comparação:** Podemos afirmar que os triângulos  $DEF$  e  $CDE$  são congruentes por ALA<sup>10</sup>, logo,  $CD = DF$ , então  $DF = l$ . Como  $DF = l$ , logo,  $BF = d - l$ .

Figura 6 – Tamanho dos lados dos segmentos

---

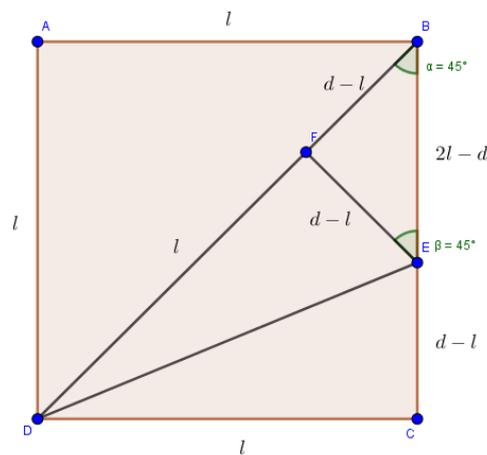
<sup>10</sup> Quando comparamos estes triângulos, temos que: DE é lado comum,  $F = C$  e  $D/2$  é ângulo correspondente ao ângulo dividido pela bissetriz DE para ambos os triângulos, logo, DEF e CDE são congruentes



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Note que, por se tratar de uma congruência, os lados  $\overline{CE}$  e  $\overline{EF}$  também são iguais, e como  $BEF$  é um triângulo cujo ângulos  $B\hat{E}F$  e  $F\hat{B}E$  tem  $45^\circ$ , o lado  $\overline{EF} = \overline{BF}$ , logo,  $\overline{EF} = d - l$ , e portanto,  $\overline{CE} = d - l$ . Como  $\overline{CE} = d - l$ , então  $\overline{BE} = l - (d - l) = l - d + l = 2l - d$ .

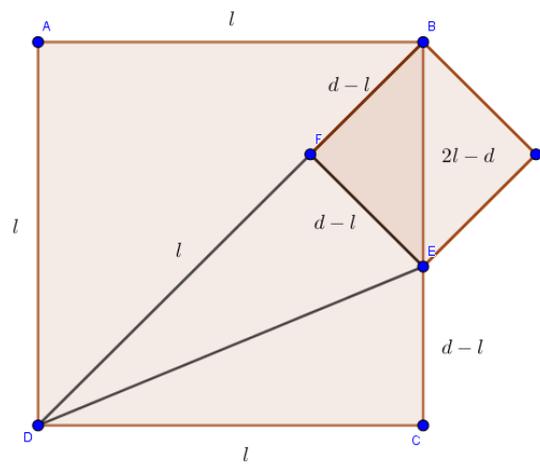
Figura 7 – Propriedades de ângulos e lados dos triângulos.



Fonte: (O AUTOR, 2022)

A partir do triângulo  $BFE$ , podemos encontrar um quadrado  $BFEG$  de lado  $d - l$ , teremos que a diagonal deste quadrado será  $2l - d$ .

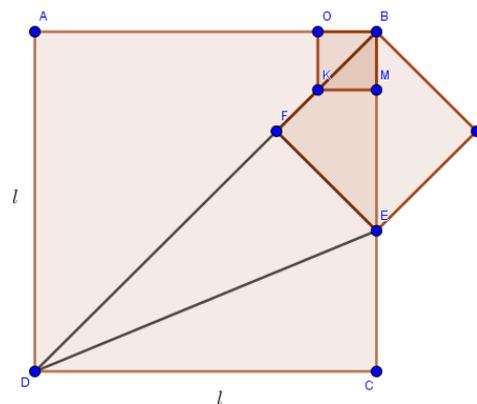
Figura 8 – Criação de novo quadrado BFEG



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Como estes quadrados são semelhantes, podemos dizer que a razão  $\frac{2l-d}{d-l} = \frac{d}{l}$ . E teremos então, duas frações equivalentes de números inteiros. Repetindo este processo, encontraremos um quadrado de lado menor, e a proporção entre as medidas da diagonal e lado deste quadrado teriam numerador e denominador ainda menores que  $\frac{2l-d}{d-l}$ .

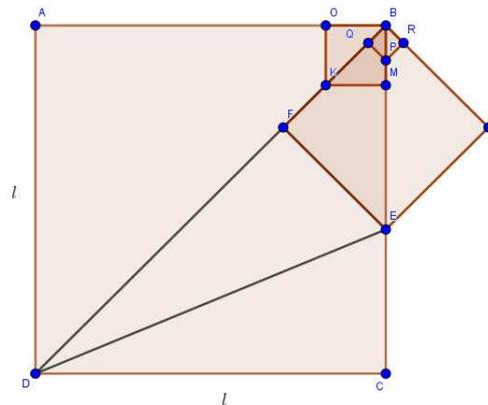
Figura 9 – Generalização do padrão



Fonte: (O AUTOR, 2022)

E toda vez que esse processo for repetido, encontraremos quadrados ainda menores.

Figura 10 – Criação de novo quadrado BMKO



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Conseqüentemente, encontramos frações equivalentes ainda menores, com denominadores e numeradores inteiros cada vez menores, infinitamente. O que é incoerente, no entanto, a diagonal de um quadrado não pode ser escrita como uma fração  $\frac{m}{n}$  com  $m$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , logo,  $d = l\sqrt{2}$  não pode ser um número racional, portanto, é irracional. Sendo assim,  $d$  e  $l$  são segmentos incomensuráveis.

## 5. CONCEITUANDO OS NÚMEROS REAIS – UM OLHAR SEMIÓTICO

Neste capítulo, trataremos das diversas abordagens e conceituações que denominamos como pistas semióticas, muitas vezes presentes no ensino dos números reais.

### 5.1. Números reais como união dos racionais e dos irracionais

A matemática atual tem praticamente todos os seus conceitos formalizados na linguagem de conjuntos. Esta é uma noção tão antiga quanto a noção de número, por exemplo. Apesar de existir aquela que é conhecida como a Teoria dos Conjuntos, com o estudo desta noção de forma mais rigorosa, aqui, será suficiente uma abordagem mais sucinta dos conjuntos. Intuitivamente, entendemos que os conjuntos podem ser vistos como uma coleção de objetos, onde estes objetos são chamados de elementos do conjunto.

Mas, para além da intuição, um conjunto é definido ou caracterizado através de uma regra de formação, que indica quais elementos pertencem ou não a ele. Este

conjunto pode ser denotado pela enumeração de seus elementos ou pela regra de formação dele. O tipo de conjunto mais utilizado, sendo o exemplo mais importante para a matemática, é aquele formado por números.

O conjunto dos **números naturais**, por exemplo, aparece como a abstração do processo de contagem ou ordenamento (número cardinal ou número ordinal) e tem como notação  $\mathbb{N}^{11}$ , onde  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

O conjunto dos **números inteiros** é constituído pelos naturais  $\mathbb{N}$  e pelos simétricos dos naturais, também denominados números negativos. O conjunto dos números inteiros tem notação  $\mathbb{Z}$ . Observe que vale que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ , logo,  $\mathbb{N}$  é subconjunto próprio de  $\mathbb{Z}$ . Logo,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Os números racionais são aqueles que, além dos inteiros, também é constituído por números que representam partes ou frações.

Enquanto o conjunto dos números inteiros possibilita que equações do tipo  $x + 3 = 2$  tenham solução, o conjunto dos **números racionais** possibilita que equações do tipo  $5x = 2$  possuam solução que não são encontradas nos inteiros. Ele é representado por  $\mathbb{Q}$ , onde  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ . Note que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , e isso pode ser verificado através da definição abaixo:

**Definição:** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  é um subconjunto de  $B$ , quando qualquer que seja o elemento de  $A$ , este também é elemento de  $B$ . Isto é,  $A \subset B$ .*

A relação que é estabelecida entre os conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  cumprem esta definição, visto que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , logo, existe a relação de inclusão, e, portanto,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Na construção do conjunto dos números reais, que denotamos como  $\mathbb{R}$ , precisamos definir o conjunto dos números não racionais.

---

<sup>11</sup> No campo da Semiótica, esta notação  $\mathbb{N}$  é um índice, pois indica que este é o conjunto de todos os números naturais. Da mesma forma, podemos dizer para os signos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e outros signos que são gerados através destes.

**Definição:** O conjunto dos números irracionais é o conjunto formado pelos números reais que não são racionais.<sup>12</sup>

Denotaremos este conjunto como  $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}; x \notin \mathbb{Q}\}$ .

Este pode ser considerado parte de um conjunto  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$  que denominamos como o conjunto dos números irracionais, e, pelas propriedades de conjuntos explicitadas anteriormente, se  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  e  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ , sendo disjuntos, então  $\mathbb{R}$  é a união de dois conjuntos próprios  $\mathbb{Q}$  e  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ , ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}).$$

## 5.2. Números reais como corpo ordenado completo

Na Teoria dos Conjuntos, dados dois conjuntos A e B, onde ambos não são conjuntos vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B todos os pares ordenados  $(x, y)$  com a em A e b em B.

De acordo com Cruz (2012, p. 11), “uma operação binária (\*) num conjunto não vazio S é uma regra para combinar dois elementos  $x, y \in S$ , produzindo um elemento  $z \in S$ , representado como  $x * y$ ”.

De outro modo, uma operação binária num conjunto não vazio é uma função  $f: S \times S \rightarrow S$ . Se  $x$  e  $y$  são elementos de S,  $f(x, y)$ , é representado como  $x * y$ .

Um conjunto no qual estão definidas e fixadas duas operações binárias, denotadas por “+” e “.”, chamadas respectivamente de adição e multiplicação, gozando dos axiomas<sup>13</sup> é chamado de corpo, denotado neste texto por K.

---

<sup>12</sup> Há um estranhamento na definição do conjunto dos irracionais e em considerá-lo como parte do conjunto dos números reais. No entanto, na construção destes números como pontos na reta, eles fazem parte dela desde que os gregos começaram a constituir a ideia de incomensurabilidade.

<sup>13</sup> Vide Apêndice A – Página 119

Este corpo  $K$  é chamado de corpo ordenado se, além de satisfazer as operações de adição e multiplicação, denotadas por "+" e "·", tiver uma relação de ordem total "<" bem estabelecida que satisfaça as seguintes propriedades:

1.  $K$  é um corpo comutativo, ou seja, para todos os  $a, b, c$  em  $K$ , temos que:
  - a)  $a + b = b + a$  (propriedade comutativa da adição);
  - b)  $a \cdot b = b \cdot a$  (propriedade comutativa da multiplicação);
  - c)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (propriedade associativa da adição);
  - d)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (propriedade associativa da multiplicação);
  - e)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (distributividade da multiplicação sobre a adição).
  
2. A relação de ordem total "<" é compatível com as operações de adição e multiplicação em  $K$ , ou seja, se  $a, b, c$  em  $C$ , então:
  - a) se  $a < b$ , então  $a + c < b + c$ ;
  - b) se  $a < b$  e  $c > 0$ , então  $ac < bc$ .
  
3.  $K$  possui um elemento mínimo (geralmente denotado por 0) e um elemento máximo (geralmente denotado por 1) em relação à ordem total "<", ou seja, para todo  $a$  em  $K$ , temos que:
  - a)  $0 < a$  ou  $a = 0$
  - b)  $a < 1$  ou  $a = 1$

Essas são as propriedades fundamentais que definem um corpo ordenado. As propriedades 1a-1e garantem que o conjunto  $K$  é um corpo, enquanto as propriedades 2 e 3 definem a ordem total sobre o conjunto  $K$ .

A ordem total "<" em um corpo ordenado pode ser interpretada como uma relação de "menor ou igual a" entre os elementos do corpo. Por exemplo, no corpo dos números reais, a relação de ordem total é dada por  $a < b$  se e somente se  $b - a$  é um número real positivo.

Um corpo ordenado completo é um corpo ordenado  $K$  que satisfaz a propriedade de completude. Essa propriedade é definida da seguinte forma:

Para todo conjunto não vazio  $S \subseteq K$  que é limitado superiormente (ou seja, existe um número real  $M$  tal que  $s \leq M$  para todo  $s$  em  $S$ ), existe um número real  $\alpha$  em  $K$  que é um supremo de  $S$  (ou seja,  $\alpha$  é o menor elemento em  $K$  que é maior ou igual a todos os elementos de  $S$ ).

Essa propriedade garante que todo conjunto limitado superiormente em um corpo ordenado completo tem um supremo, o que significa que o conjunto tem um "maior elemento" que ainda é menor ou igual a todos os elementos do conjunto.

Uma consequência importante da propriedade de completude é que todo subconjunto não vazio de  $K$ , que é limitado inferiormente também tem um ínfimo (ou seja, o menor elemento em  $K$  que é maior ou igual a todos os elementos do subconjunto). Isso ocorre porque o conjunto dos elementos negativos de um subconjunto limitado superiormente é limitado inferiormente.

Tomaremos, então, que o conjunto dos números reais é um Corpo Ordenado Completo e, portanto, todas as propriedades de corpo ordenado completo serão válidas para  $\mathbb{R}$ . “Essa completeza diferencia os números reais dos números racionais, pois é um corpo ordenado, porém não completo” (CRUZ, 2012, p. 69). Vejamos uma breve explanação sobre esta afirmação de Cruz:

Dado o conjunto  $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  de números racionais positivos, podemos verificar que este conjunto é limitado superiormente, pois todos os seus elementos são menores ou iguais a 1. Se considerarmos o corpo ordenado completo dos números reais, podemos mostrar que  $S$  tem um ínfimo que é zero e um supremo que é 1. Para isso, basta notar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $N$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Portanto, zero é o menor elemento maior ou igual a todos os elementos de  $S$ .<sup>14</sup>

Os números racionais não são corpos ordenados completos porque eles não satisfazem a propriedade de completude. De fato, a propriedade de completude é uma das propriedades que distinguem os números reais dos números racionais.<sup>15</sup>

---

<sup>14</sup> O teorema do valor intermediário afirma que se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $f(a) < 0 < f(b)$ , então existe um número  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . Esse resultado depende da propriedade de completude dos números reais, que garante a existência do supremo e do ínfimo do conjunto  $[a, b]$ .

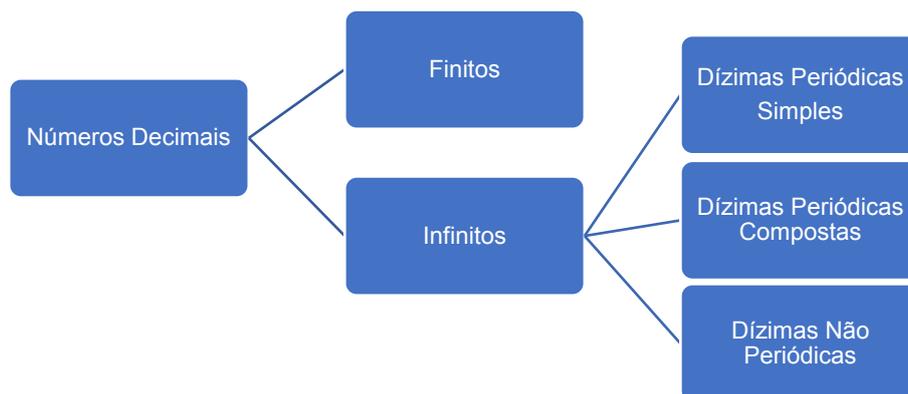
<sup>15</sup> Para entender por que os números racionais não são corpos ordenados completos, considere o conjunto  $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ . Esse conjunto é limitado superiormente em  $\mathbb{Q}$ , pois todos os seus elementos são menores do que a raiz quadrada de 2. No entanto, não existe nenhum elemento em  $\mathbb{Q}$  que seja o supremo de  $S$ . Portanto, não existe nenhum número racional que seja o supremo de  $S$  em  $\mathbb{Q}$ . No entanto, se considerarmos o corpo dos números reais, podemos mostrar que  $S$  tem um supremo, que é a raiz quadrada de 2. Isso ilustra que os números reais são um corpo ordenado completo, enquanto os racionais não são.

### 5.3. Números reais como Totalidade de Números Decimais Infinitos

No entendimento de Courant e Robbins (2000) há a possibilidade de experienciar os números reais como uma totalidade de números decimais infinitos. Eles apresentam o conceito de frações decimais e números decimais infinitos, utilizando-se de  $\frac{1}{3}$  e  $\sqrt{2}$ , para introduzir sequência e intervalos encaixantes.

Os autores afirmam que se pode definir, provisoriamente, que “um número é um número decimal finito ou infinito” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 81). Sendo assim, o diagrama da figura 11 atribui a divisão entre as categorias para a classificação de um número decimal.

Figura 11 – Mapa mental dos números decimais



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Os decimais finitos, são aqueles que estão estritamente ligados a frações decimais, ou seja, aqueles cujo denominador é 10 ou podem ser vistos como potências de 10 como  $1/10$ ,  $2/100$ ,  $20/1000$ . Além disso, as frações não decimais que podem ser transformadas em decimais através de equivalência são denominadas frações parcialmente decimais, como exemplo podemos ter  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$  e  $\frac{5}{16} = \frac{3125}{10000}$ .

É perceptível que as frações decimais, quando representados por números decimais, são finitas.

Observe que  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$  e  $\frac{5}{16} = \frac{3125}{10000} = 0,3125$ . Estes números podem ser representados na reta numérica através de subdivisões decimais – 10, 100, 1000 e assim por diante – onde se considera a divisão de segmentos de mesmo tamanho.

Seguindo o raciocínio de Courant e Robbins (2000) estes intervalos denominam-se “frações decimais”. Um exemplo é a transformação do número 0,3125 tal que  $0,3125 = \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000}$ , onde  $\frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000} = 3 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ , portanto  $0,3125 = 3 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ . Além da igualdade entre números decimais e frações decimais, estamos descrevendo o que chamaremos de expressão polinomial de um número decimal.

Qualquer número decimal com  $n$  dígitos pode ser representado por uma expressão polinomial, ou seja, um número  $f$  qualquer pode ser descrito “ $f = z + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \dots + a_n \cdot 10^{-n}$ , onde  $z$  é um inteiro qualquer e os  $a$ s são dígitos de 1 a 9, representando os décimos, centésimos e assim por diante” (COURANT: ROBBINS, 2000, p. 73).

No sistema decimal, um número  $f$  é representado por  $f = z, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ . Desta forma, podemos dizer que a fração de qualquer número decimal finito pode ser representada por  $\frac{p}{q}$ , onde  $q = 10^n$ . Além disso, que, se  $p$  e  $q$  têm divisores em comum, a fração pode ser reduzida a uma fração cujo denominador seja um divisor de  $10^n$ .

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou de 2 e 5. Se houver algum denominador que apresente pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita na forma de fração decimal. (CRUZ, 2011, p. 85).

No caso dos números que são raízes não exatas, eles não podem ser representados por qualquer fração decimal finita de  $n$  dígitos, eles vão ser pontos na reta que representam uma fração decimal infinita  $z, a_1 a_2 a_3 \dots$ , se para cada valor  $n$  o ponto  $P$  se situar no intervalo de comprimento  $10^{-n}$ , com  $z, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  como seu ponto inicial.

Seja o ponto  $P = \frac{1}{3}$ , todos os dígitos  $a_1 a_2 a_3 \dots$  serão 3. Logo, entende-se que  $P$  está contido entre um intervalo que vai de  $0,333333\dots333$  a  $0,333333\dots334$  ( $0,333333\dots333 < P < 0,333333\dots334$ ) para uma quantidade de dígitos arbitrariamente grande. Podemos dizer que a fração decimal  $0,333333\dots333$  tende a  $\frac{1}{3}$  na medida que a quantidade de dígitos aumenta, e indicamos que a fração  $\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$  cresce indefinidamente, ou seja,  $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots$

Se tomarmos o ponto  $P = \sqrt{2}$  teremos também uma fração indefinidamente continuada, porém, há uma grande diferença, visto que não há uma fórmula simples que determine os dígitos subsequentes, embora possam ser encontrados.

Intuitivamente, entendemos que  $\sqrt{2}$  está contida em um intervalo de duas raízes quadradas perfeitas, ou seja,  $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ , logo, podemos inferir que  $1 < \sqrt{2} < 2$ . Cruz (2011) desenvolve esta percepção analisando a solução da equação  $x^2 = 2$ , resultando no ponto irracional. O autor verifica que o valor 2 está entre  $x^2$  e  $(x + 1)^2$ , ou seja,  $x^2 < 2 < (x + 1)^2$ , de forma que, se consideramos  $x = 1$ , obtemos que para a equação  $x^2 = 2$ , a solução  $1 < x < 2$  é satisfeita. Logo, existem números racionais que se aproximam da solução  $x^2 = 2$ , de forma que este número esteja no intervalo (1,2).

Se dividirmos o intervalo unitário (1,2) em dez partes iguais, podemos determinar que o valor  $x^2 = 2$ , pertence a um intervalo estritamente menor que (1, 2), logo, é verificado que  $(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$ , então podemos inferir que  $x^2 = 2$  está neste novo intervalo, onde podemos dizer que 1,4 é raiz de 2 a um décimo por falta e que 1,5 é raiz de 2 a um décimo por excesso.

Estes intervalos podem ser cada vez menores, ou seja, podemos determinar as raízes de  $x^2 = 2$  para cada  $\frac{1}{100}$ , onde  $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$  tal que tanto 1,41 quanto 1,42 sejam raízes de  $x^2 = 2$ , a um centésimo por falta e por excesso, respectivamente.

E assim sucessivamente, onde  $(1,414)^2 = 1,999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,002225$ ;  $(1,4142)^2 = 1,99996164 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024449$ . Logo, por falta ou por excesso, as soluções para  $x^2 = 2$  estão constituídas nos intervalos através de decimais infinitas.

Por meio do algoritmo da divisão de Euclides, os autores explicam o processo de periodização das expressões decimais para qualquer número racional. “Em cada etapa deste processo deve haver um resto não-nulo, porque, de outra forma, a fração decimal seria finita” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 79). A exemplo, eles partem de uma dízima periódica com antiperíodo e chegam à fração geratriz correspondente. De forma inversa, “pode ser demonstrado que todas as dízimas periódicas são números racionais” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 80).

Analisando desta forma, existe um contínuo numérico que é a totalidade de decimais infinitos. O que está sendo dito é que todo e qualquer número decimal finito pode ser considerado um número especial, onde todos os seus dígitos depois de uma

determinada casa passam a ser iguais a zero, valendo-se para dízimas periódicas correspondentes a um único número onde todos os dígitos a partir de um ponto são considerados iguais a nove. Logo, conclui-se que este conjunto numérico é uma totalidade de decimais infinitos.

#### 5.4. Números reais como pontos na reta numerada

Outra forma de conceituar os números reais é como pontos na reta numerada. De acordo com Brolezzi (1996), desde a matemática do Egito Antigo se utilizava números tanto para contagem quanto para resolver problemas de medida. Portanto, utilizando a questão de comensurabilidade de segmentos de reta, estes eram suficientes para idealizar os números racionais, visto que, “os egípcios davam uma exclusividade à utilização de frações unitárias, isto é, àquelas com numerador igual a um. Nessa radical preferência, pode-se constatar o uso frequente de noções numéricas para medidas” (BROLEZZI, 1996, p. 12).

Brolezzi (1996) diz ainda que, quando o numerador era fixado em 1 (um), era possível que se trabalhasse com medidas de formas intuitivamente palpáveis, pois os egípcios “podiam considerar frações como representações de pedaços de inteiros, cuja divisão era determinada pelo denominador” (BROLEZZI, 1996, p. 12).

Portanto, se for dado um segmento  $\overline{AB}$  de tamanho  $a$ , e um segmento  $\overline{CD} = b$ . Aplicando um sobre o outro, coincidindo os extremos  $A$  e  $C$ , podemos verificar que o ponto  $D$  pertence a  $\overline{AB}$ , de modo que  $\overline{AB} > \overline{CD}$ .

Figura 12 – Segmentos AB e CD



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Desta forma, tomaremos  $\overline{AB}$  como unidade de medida e podemos tratar de quantas vezes o segmento  $\overline{CD}$  cabe em  $\overline{AB}$ . Para exprimir tais medidas com a mesma

unidade, é necessário subdividir o segmento  $\overline{AB}$  em  $n$  partes iguais do segmento  $\overline{CD}$  onde  $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$  (CARAÇA, 1951).

O que estamos dizendo é que, comparando as medidas dos dois segmentos, existe a possibilidade de  $b$  estar contido em  $a$  uma quantidade inteira  $k$  de vezes, de forma que  $a = b.k$ , porém, se o segmento  $a$  não é um múltiplo inteiro de  $b$ , logo, devemos dividir  $b$  por  $n$  segmentos de comprimentos iguais, tal que cada segmento tenha tamanho  $\frac{b}{n}$ , que, operado por um múltiplo  $m$  inteiro, é igual ao segmento  $a$ . Estas medidas seguem as propriedades operacionais dos inteiros, que levam a frações unitárias.

Estamos tratando de segmentos comensuráveis. Segundo Cruz (2011), nos tempos de Pitágoras, para cada dois segmentos quaisquer  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , sempre seria possível encontrar um terceiro segmento, um  $\overline{EF}$ , contido uma quantidade inteira de vezes no primeiro segmento e um número inteiro de vezes no segundo segmento, dizendo, assim, que o segmento  $\overline{EF}$  era submúltiplo comum de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

Estes novos números – outrora denominados racionais – eram, inicialmente, suficientes para cobrir o que conhecemos como reta numérica, sendo assim, o conjunto de todos os números, ou seja, os números reais. Courant e Robbins (2000) abordam este assunto tratando da aparência dos pontos racionais na reta, quando diz que eles cobrem a reta densamente<sup>16</sup> num primeiro momento. Cada um destes pontos, definidos pelos segmentos comensuráveis que partem do zero, estão associados a um número na reta real.

No entanto, de acordo com a evolução das relações de medida, foram descobertos números incomensuráveis, trazendo à tona que não existiam somente os números racionais. De igual modo, não somente os pontos racionais seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica, pois existiam pontos localizados na reta que não eram racionais.

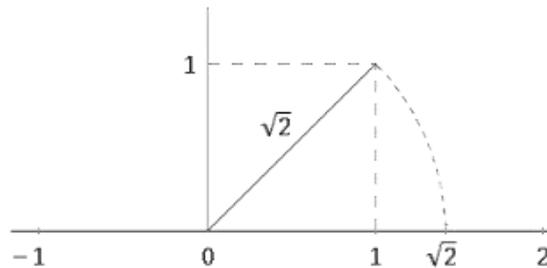
Uma das maneiras de definir estes pontos intuitivamente, onde é feita a relação de incomensurabilidade da diagonal de um quadrado de lado 1, é considerar que “se este segmento é demarcado sobre a reta numérica, por meio de um

---

<sup>16</sup> Intuitivamente falando, significa dizer que esta coleção de pontos que representam segmentos, está completamente espalhada por toda reta numerada. Ou seja, onde quer que você olhe na reta, você sempre verá pontos que têm como significado números racionais.

compasso, então o ponto assim construído não pode coincidir com nenhum dos pontos racionais.” (CRUZ, 2011, p. 48).

Figura 13 – Construção do ponto  $\sqrt{2}$



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Não admitir a existências de novos pontos na reta, além daqueles conhecidos como racionais, é admitir que a reta numérica possa ser cheia de buracos, ao contrário da reta perfeitamente contínua dos números reais admitida anteriormente.

### 5.5. Números reais como Cortes de Dedekind

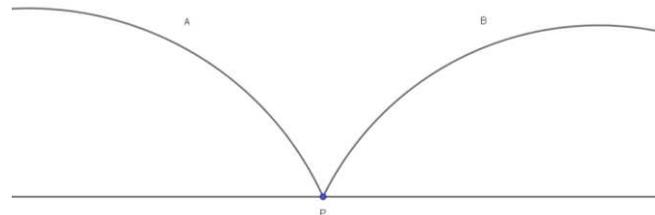
Neste subcapítulo tentaremos mostrar que, de fato, a construção dos números reais pode ser feita utilizando os Cortes de Dedekind. Os cortes de Dedekind são uma construção matemática utilizada na teoria dos números e na análise real. Eles foram introduzidos por Richard Dedekind como uma maneira de formalizar os números reais a partir dos números racionais.

Seja um ponto  $P$  sobre a reta numérica, é fácil de verificar que os pontos em relação ao ponto  $P$  são separados em duas classes: (A) para os pontos presentes à esquerda de  $P$ , e (B) para os pontos presentes à direita de  $P$ . Segundo Caraça (1951), o próprio  $P$  pode ser colocado indiferentemente em qualquer uma das classes. Como na reta existe uma partição em duas classes (A) e (B), se forem satisfeitas as condições de:

- i) Não existir ponto que escape à partição;

- ii) Todo ponto da classe  $A$  está à esquerda de todo ponto da classe  $B$ , de modo que seja considerado um corte através das classes constitutivas, chamamos este corte de  $(A, B)$ ;

Figura 14 – Ponto P como corte de classes na reta



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Podemos afirmar que todo ponto  $P$  da reta produz nela um corte.

Para um corte  $(A, B)$  são válidas as seguintes propriedades:

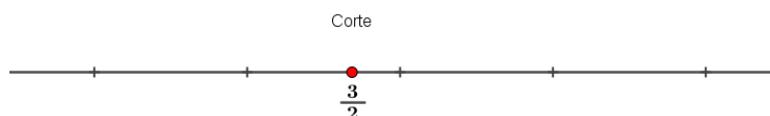
- i)* os conjuntos  $A$  e  $B$  serem não vazios de forma que  $A \cup B = \mathbb{Q}$ ;
- ii)* todo elemento de  $A$  é estritamente menor que todo elemento de  $B$ ;
- iii)* o conjunto  $A$  não possuir máximo.

Na reta numérica, os números racionais são pontos localizados entre um intervalo  $[a, b]$ . Estes intervalos pertencentes a  $\mathbb{Q}$ , são definidos como Cortes de Dedekind.

- 1) Um corte  $(A, B)$  no qual o conjunto majorante tem elemento mínimo denomina-se **corte racional**.

Tomando um  $r$  em  $\mathbb{Q}$ , onde temos  $A = \{r \in \mathbb{Q} : x < r\}$  e  $B = \{r \in \mathbb{Q} : x \geq r\}$ .  
Veamos um exemplo abaixo:

Figura 15 – Corte Racional na reta



Fonte: (O AUTOR, 2022)

$A$  e  $B$  são os conjuntos disjuntos que dividem a reta em duas partes, os quais definem o número  $\frac{3}{2}$ , o ponto de corte. Este é um par ordenado, o qual chamaremos de  $(A, B)$ .

Estamos definindo que existem dois conjuntos (ou classes)  $A$  e  $B$ , onde  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \frac{3}{2}\}$ , ou seja, todos os elementos de  $A$  são menores que  $\frac{3}{2}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \frac{3}{2}\}$  onde todos os elementos de  $B$  são maiores ou iguais a  $\frac{3}{2}$ .

De fato,  $A$  e  $B$  satisfazem a propriedade (i), não sendo vazios e, dado um número arbitrário  $r$  definido no exemplo como  $\frac{3}{2}$ , ou ele pertence a  $A$  ou a  $B$ , de modo que  $A \cup B = \mathbb{Q}$ .

Existindo qualquer  $a \in A$  e qualquer  $b \in B$ , temos que  $a < \frac{3}{2}$  e  $b \geq \frac{3}{2}$ , logo  $a < b$ . É verdade que se considerarmos  $a = 1$  e  $b = 2$ , temos que  $1 < \frac{3}{2}$  e  $2 \geq \frac{3}{2}$ , e  $1 < 2$ . Podemos, assim, aceitar que todo elemento de  $A$  é estritamente menor que os elementos de  $B$ .

É possível verificar também que  $A$  não possui elemento máximo, pois todo elemento de  $A$ , por maior que seja, será menor que o ponto de corte determinado, não possuindo assim um supremo, ou seja, para todo  $a \in A$ , temos que  $a < \frac{a+r}{2} < r$  e  $\frac{a+r}{2} \in A$ . Tomando  $a = 1$ , temos então que  $1 < \frac{1+\frac{3}{2}}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < \frac{\frac{5}{2}}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ .

Podemos inferir, através deste, que  $A$  é um corte racional, pois de fato, qualquer elemento de  $A$  pertence ao conjunto  $Q$ . Além disto, neste exemplo,  $\frac{3}{2}$  é considerada a maior das cotas inferiores de  $B$ , ou seja,  $\frac{3}{2} = \min(B)$ .

O que estamos dizendo é que todo corte racional  $(A, B)$  é determinado por um número racional, pois, se não for, este corte é, portanto, irracional.

2) Um corte  $(A, B)$  em que o conjunto majorante não tem elemento mínimo e o conjunto minorante não tem elemento máximo em  $Q$  denomina-se **corte irracional** (XAVIER, 2017, p. 14)

Esta ideia de corte irracional, segundo Caraça (1951), está muito mais ligada ao ponto de vista da continuidade, visto que, enquanto considerados somente números racionais, poderíamos determinar que os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  tinham a mesma estrutura, infinidade, ordenação e densidade. Porém, uma das formas de investigar se estes cortes satisfaziam o axioma de continuidade de Dedekind-Cantor, era verificando se todo corte de  $\mathbb{R}$  tinha elementos de  $\mathbb{Q}$ . Vejamos o exemplo abaixo:

Consideremos as classes  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ e } x \leq 0 \text{ ou } x > 0\}$  sendo definida como o conjunto dos elementos cujo quadrado é menor do que 2, e  $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2 \text{ e } x > 1\}$  sendo definida como o conjunto das classes dos elementos cujo quadrado é maior do que 2. É possível definir um corte  $(A, B)$ ?

Verificando a classe  $A$ , se considerarmos um  $x$  menor ou igual a 0, como por exemplo  $x = -\frac{1}{2}$ , de fato, temos que  $(-\frac{1}{2})^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < 2$ . Observe que se o  $x \in A$  for um número menor ou igual a zero, então  $1 > x$ , e isso mostra que 1 é um elemento de  $A$  maior do que  $x$ . Ou então, se considerarmos  $x = 1$ , temos  $1^2 < 2$  e  $1 > 0$ . Agora, se considerarmos um  $x = 2$ , teremos a classe  $A \neq \mathbb{Q}$ , pois  $2 \in \mathbb{Q}$ , mas não pertence a  $A$ , visto que  $2^2 > 2$ .

Podemos dizer, portanto, que qualquer número racional pertencente a  $A$ , terá seu quadrado menor que 2. Ou seja, dados  $x$  e  $y$  racionais em  $A$ , sua soma, que também será um número racional, será maior do que  $x$  e irá pertencer a  $A$  ( $x + y > x : x + y \in A$ ), e, além disso, o quadrado da soma também pertencerá a  $A$  sendo menor que 2, ou seja,  $(x + y)^2 < 2$ . Logo, podemos dizer que  $A$  não possui elemento máximo e pode ser considerado um Corte de Dedekind, mas não possui supremo em  $\mathbb{Q}$ .

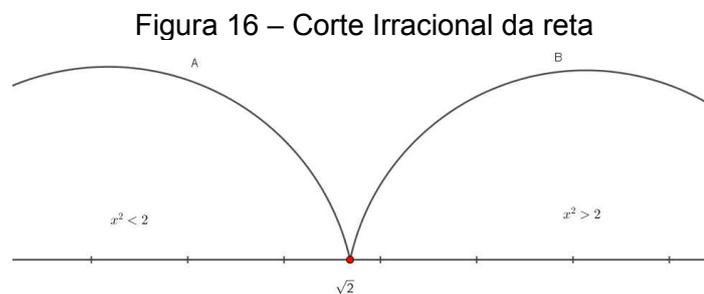
Verificando a classe  $B$ , podemos perceber que dado um  $x$  racional, é perceptível que, para quaisquer que sejam  $y \in B$ , a diferença dos dois elementos deverá ser  $x - y$ , será menor que  $x$  e pertencerá a  $B$  ( $x - y < x : x - y \in B$ ) e seu quadrado  $(x - y)^2 > 2$ . Isso mostra que  $B$  não possui elemento mínimo. Vejamos:

- (a)  $m^2 > 2$  também não pode ocorrer pois, neste caso, teríamos  $m \in B$  e como  $B$  não possui elemento mínimo, existiria  $r \in B$ ,  $r < m$  tal que  $r \geq x \forall x \in A$ , o que contradiz o fato de  $m$  ser o  $\sup(A)$ .

(b)  $m^2 = 2$  não pode ocorrer, pois, não existe um número racional cujo quadrado seja 2. Ora, intuitivamente, podemos verificar que este número escapa do critério de repartição.

Logo, verificamos que  $A$  não possui supremo em  $\mathbb{Q}$  e, além disso, definimos que existe um ponto  $m$  na reta que não pertence nem à classe  $A$ , nem à classe  $B$ . O par ordenado  $(A, B)$  é um Corte de Dedekind, porém, não possui um elemento de separação.

O que Dedekind observou é que existem cortes de  $\mathbb{Q}$ , que não possuem elementos em  $\mathbb{Q}$ . E, a estes cortes, foram associados novos números, como no caso acima, associando a  $\sqrt{2}$  e este sendo o número que separa as classes dos números  $A = x^2 < 2$ , sendo maior que a infinidade destes elementos que pertencem a esta classe e dos números  $B = x^2 > 2$ , sendo menor que a infinidade de elementos que pertencem a esta classe (CARAÇA, 1951).



Este novo número não pertencia a  $\mathbb{Q}$ , logo, não era racional, e por essa razão foi definido como irracional. Os irracionais passam a ser o conjunto dos **elementos de separação** de cortes de  $\mathbb{Q}$  que não são números racionais.

Dessa forma, podemos visualizar que o conjunto dos números racionais possui lacunas que caracterizam uma descontinuidade e, além disso, uma não densidade<sup>17</sup>. Essas lacunas serão, portanto, preenchidas por números irracionais. Intuitivamente,

---

<sup>17</sup> Dado um conjunto  $X \in \mathbb{R}$ , chama-se de denso em  $\mathbb{R}$  quando todo intervalo aberto  $(a, b)$  contém algum ponto de  $X$ . Ou seja, dados arbitrariamente  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ , é denso quando é possível encontrar  $x \in X$  tal que  $a < x < b$ .

dizer isso é o mesmo que pensar no  $R$  geometricamente, que o leva a um contínuo de pontos na reta real, mostrando a necessidade de recorrer ao conceito de infinito, levando a uma teoria satisfatória dos números racionais capaz de explicar o fenômeno da incomensurabilidade (CARAÇA, 1951).

## 5.6. Números reais como a Totalidade dos Números

Seguimos neste capítulo os passos de Maurer (1977), entendendo por números reais a totalidade de números racionais e irracionais. Nas palavras do autor, adstringindo-nos ao sistema de numeração decimal, pode-se dizer que o conjunto dos números reais é constituído pela totalidade dos números inteiros e das frações limitadas e ilimitadas. Para o autor, a base do Cálculo Infinitesimal e da Análise Matemática advém da noção de grandeza e da operação de medir, numa perspectiva prática. Já na perspectiva teórica, elas advém da noção de números e das leis formais que regem as operações numéricas (MAURER, 1977).

Os números evoluíram de acordo com as necessidades de sua utilização para a evolução da humanidade. A primeira noção de número, segundo Roque (2012), surgiu por meio de procedimentos de correspondência, onde se associavam objetos ou seres aos números, a fim de determinar uma quantidade de seres ou coisas em uma determinada coleção através de uma relação biunívoca.

Partindo da noção intuitiva de unidade e pluralidade, fruto da experiência, a elaboração dos números inteiros pode-se considerar um fato tão natural como a linguagem. A operação de contar os objetos de uma coleção ou os indivíduos de um grupo (grandezas discretas), deu origem aos chamados números naturais (inteiros positivos): 1, 2, 3, 4, 5, ...” (MAURER, 1977, p.1).

Segundo Maurer, estes números caracterizam “as grandezas discretas pelo fato de possuírem uma unidade natural, a saber, cada objeto do conjunto constitui uma unidade” (MAURER, 1977, p. 1). E, quando acrescentado o número 0 aos naturais, forma-se então, o que Maurer (1977) chama de conjunto dos números inteiros: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... “Aos números inteiros associou-se um sistema de numeração (decimal), subordinado às chamadas operações aritméticas.”(MAURER, 1977, p. 2)

Todavia, os números estavam além da unidade natural e, a partir da existência de grandezas concretas que eram apresentadas como contínuas, mas não-naturais (no sentido de não estarem presentes neste conhecido determinado conjunto),

originou-se algo diferente: uma operação mais elaborada para a ideia de medir. Se medir significa, arbitrariamente, comparar uma grandeza com outra da mesma espécie, todas as unidades deveriam ter o mesmo tamanho. Mas, uma vez que descobriu-se que uma unidade nem sempre cabe exatamente um número inteiro de vezes em uma grandeza dada a partir da primeira extensão do conceito de número, esta operação deu origem aos números fracionários.

Formalmente, os números fracionários são um subproduto da operação de dividir. Logo, quando definida no conjunto dos números inteiros, a divisão como operação inversa à multiplicação, resulta que só excepcionalmente o quociente existe na forma de um número inteiro. “Para tornar possível sem restrição a operação de dividir (excluída a divisão por 0), foi necessário incluir as frações na categoria de números” (MAURER, 1977, p. 2).

Segundo Roque (2012), a medida é um procedimento que permite reduzir grandezas a números, ou seja, a partir de um determinado segmento é possível medir seu comprimento, assim como se pode medir a área de uma superfície bidimensional plana. E, para medir, o primeiro passo é escolher uma unidade de medida.

Um progresso sensível na operação de medir consiste na determinação de um submúltiplo comum à unidade prefixada e à grandeza a medir. Quando um tal submúltiplo existe, dizemos que as duas são comensuráveis. Em outras palavras, dizem-se comensuráveis duas grandezas quando existe uma unidade, por pequena que seja, a qual cabe exatamente um número inteiro de vezes numa e noutra (MAURER, 1977, p. 2).

O que torna possível a correspondência entre grandezas e números inteiros é, de fato, a ideia de medida, estabelecendo também uma relação entre inteiros. Roque (2012) diz que quando se compara grandezas, há um processo de subdivisão de alguma delas, a fim de obter uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas comparadas.

Suponhamos que queiramos comparar os segmentos A e B. Como B não cabe um número inteiro de vezes em A, podemos dividir B em 3 e tomar a unidade como sendo um terço de B. Como essa unidade cabe 4 vezes em A, a comparação de A com B nos fornece a razão 4:3. É desse tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamamos, hoje, de “racionais” (ROQUE, 2012, p. 77).

Esta operação dá origem ao conceito de número racional (razão de dois inteiros).

Por outro lado, se duas grandezas da mesma espécie não admitem um submúltiplo comum, por menor que seja, dizemos que elas são incomensuráveis. Pitagóricos determinavam, inicialmente, que o universo pudesse ser somente aritmético, onde “tudo é número”. Mas na evolução histórica, enquanto a aritmética seguia limitada em seu conceito, a geometria evoluiu e, neste processo evolutivo, ocorreu na Grécia antiga a descoberta da existência de segmentos que não se podiam mensurar (BOYER, 1984). Foram estes fatos da natureza geométrica e aritmética que motivaram a criação dos números irracionais.

[...]dados dois segmentos A e B, é sempre possível subdividir um deles, por exemplo B, em um número finito de partes, de modo que uma dessas partes caiba um número inteiro de vezes em A? Intuitivamente, se pensamos em grandezas físicas, é lícito supor que sim. Ou seja, se as partes de B puderem ser tornadas muito pequenas, parece ser sempre possível encontrar um segmento que caiba em A um número inteiro de vezes, ainda que este seja um número muito grande. A descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que isso não é verdade; logo, nossos sentidos nos enganam quando admitem essa possibilidade (ROQUE, 2012, p. 77).

Maurer (1977) traz para definir a ideia de incomensurabilidade e também de números racionais, justamente o que foi mostrado na figura 13 do subcapítulo 5.3. Portanto, se aplicarmos a relação (Teorema) de Pitágoras no triângulo retângulo, é determinada a diagonal deste triângulo  $d^2 = 1^2 + 1^2 = \sqrt{2}$ . Logo, quando encontramos esta raiz e tentamos expressá-la de forma decimal, encontramos uma fração aperiódica ilimitadas, ou seja, por mais que prolonguemos a operação, jamais se chega a um resto nulo. Isso equivale a dizer que por menores que sejam os submúltiplos do metro tomado, sempre existirá um resto (MAURER, 1977).

Logo, não se pode exprimir um número racional por meio deste resultado, seja ele inteiro ou uma razão de inteiros e, por isso, é necessário ampliar novamente a noção de números, introduzindo os chamados números irracionais, conhecidos como a segunda extensão do conceito de números.

Além desta ideia de grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, também se entende que existem grandezas que podem ser medidas em dois sentidos contrários a partir de uma origem pré-fixada. Maurer (1977) determina que existe

nesta concepção a ideia de medida relativa e absoluta, onde ela está justamente para determinar o conteúdo da grandeza a ser medida.

Há muitos modos de distinguir os dois sentidos de medida de uma grandeza a partir de uma origem prefixada ou de qualificar os números que os medem. Assim, os romanos contavam as horas a partir do meio-dia, distinguindo-as em *ante* e *post meridiem*; os historiadores se servem dos símbolos discriminativos, A.C. e D.C. para qualificar as datas históricas; os geógrafos qualificam as latitudes em N. e S. (norte e sul) e as longitudes em E. e O. (este e oeste); o contador lança as suas contas-correntes em duas colunas intituladas haver e deve; o físico constrói as suas escalas termométricas fixando como origem a temperatura do gelo fundente e a partir desta distingue as temperaturas em positivas e negativas, etc. (MAURER, 1977, p. 4).

Como o próprio autor aborda, a última qualificação é a única que está expressa em linguagem matemática, onde um número é afetado pelo sinal que o acompanha, + ou -, sendo este ao qual se associa o sinal denominado como número relativo, sendo a terceira extensão do conceito de número. Do ponto de vista matemático, números relativos são um subproduto da subtração, isto quer dizer que estes números foram criados para tornar possível solucionar equações da forma  $x + a = b$  ou  $x = b - a$ . Estas equações, no campo dos números absolutos, só têm sentido quando  $b \geq a$  (MAURER, 1977). Portanto, a totalidade de frações próprias e impróprias positivas e negativas constitui o conjunto dos números racionais e, assim, assimilamos que os inteiros são frações próprias  $a/1 = a$ , onde 1 é o denominador de todas estas frações.

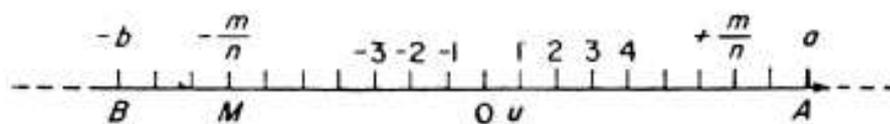
Até dado momento, as três extensões do conceito de número foram capazes de determinar os números inteiros (naturais ou inteiros positivos diferentes de zero, os inteiros positivos, os números fracionários relacionados a segmentos comensuráveis, os números aperiódicos ilimitados que são relacionados a segmentos incomensuráveis e os números inteiros negativos ou números inteiros relativos), e a junção destas três extensões é que o entendemos como números reais, ou seja, os números reais são a “totalidade dos números racionais e irracionais” (MAURER, 1977, p. 5). Isto porque a primeira e a terceira extensão se relacionam aos números racionais e a segunda se relaciona aos números irracionais.

Se focarmos na ideia dos números através de sua representação por números decimais, podemos dizer que o conjunto dos números reais é “constituído pela totalidade dos números inteiros e das frações decimais limitadas e ilimitadas” (MAURER, 1977, p. 5).

Estes números correspondem a pontos na reta numerada, visto que estão sendo associados a grandezas. Se considerarmos uma unidade de medida  $OU = 1$ , sendo  $O$  ponto de origem arbitrariamente escolhido, então podemos medir segmentos para dois sentidos, sendo o sentido de  $O$  para a direita considerado positivo e o sentido de  $O$  para a esquerda considerado negativo. Esta reta é considerada orientada, onde a unidade de medida é  $OU$ , e existem outros números tanto à esquerda (ponto  $B$ ) quanto à direita (ponto  $A$ ), e eles podem ser considerados múltiplos da unidade, ou seja, um  $\overline{OA} = a$ , pode ser  $\overline{OA} = a \cdot \overline{OU}$  e um  $\overline{OB} = -b$  pode ser  $\overline{OB} = -b \cdot \overline{OU}$ , onde, tanto  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  e  $\overline{OU}$  são unidades de medida de segmentos desta reta associadas aos números.

Da mesma forma, podem ser considerados os números racionais  $\pm$  correspondentes ao ponto  $M$  à direita ou à esquerda de  $O$ , conforme seja  $+$  ou  $-$  o sinal da fração, se a enésima parte de  $\overline{OU}$  cabe  $m$  vezes em  $OM$ . Logo, existirá na reta um único ponto correspondente ao número racional determinado. E, aqueles pontos da reta aos quais não corresponde nenhum número racional, serão números irracionais, que são relacionados a segmentos incomensuráveis.

Figura 17 – Reta Numerada



Fonte: (MAURER, 1977, p. 5)

Assim sendo, cada ponto da reta estará relacionado a somente um número, seja ele racional ou irracional, numa correspondência biunívoca. Caso dois números correspondam a um único ponto na reta orientada, estes números serão iguais – dados  $a$  e  $b$  números reais,  $a = b$ ; mas se  $a < b$ , ele estará à esquerda do ponto  $b$ ; caso  $a > b$ , ele estará à direita do ponto  $b$ . Além disso, o módulo determina o valor absoluto de um número, onde  $|a| = a$ , se  $a > 0$  e  $|a| = -a$  se  $a < 0$ .

## 6. EXPLORANDO ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS

### 6.1. A relação dialética entre o discreto e o contínuo

Os números surgiram pela necessidade de se contar e medir. Estas são atividades humanas que visam satisfazer necessidades da vida em seus mais variados aspectos, e que perpassam pela significação de grandezas discretas e contínuas.

Baseada na ideia de contagem, pensar em grandezas discretas se relaciona diretamente a coleções, sejam de objetos, pessoas etc. Já a grandeza contínua se relaciona diretamente com a constituição de determinado fenômeno/estrutura matemática, em busca de uma comparação.

Como usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos, focalizando de início o surgimento no homem primitivo do conceito de número e do processo de contar (EVES, 2004, p. 25).

Esta forma de caracterizar grandezas mostra que houve uma evolução na forma de gerar significados e de produzir pensamentos para a vida prática. Na Grécia Antiga, a forma de pensar o número passou a ser vista além da contagem, e foi com a Escola Pitagórica que os números passaram a ter um caráter mais abstrato, onde buscava-se a explicação de fenômenos. Estes, considerados místicos e esotéricos até então, passaram a ter uma base nas leis matemáticas que buscavam traduzir o Universo (CARAÇA, 1951).

Os gregos tinham como referência para infinito as ideias de Aristóteles, em que os números eram quantidades indivisíveis de unidades como representação da realidade objetiva. A divisibilidade do número se encerrava com a obtenção de sua unidade, mantendo seu caráter discreto, sendo finito. Em relação à medição, entendia-se que estava relacionado a uma divisão que poderia ser feita em uma quantidade infinita, tendo característica contínua. De acordo com Silva (2007), é de Aristóteles a distinção fundamental entre o infinito atual (ou real) e o infinito potencial, ou seja,

“entre a noção de uma totalidade finita em que sempre cabe mais um indefinidamente – o infinito potencial – e uma totalidade infinita acabada” (SILVA, 2007, p. 51).

Neste contexto, as quantidades contínuas e as quantidades discretas parecem formar classes disjuntas e independentes, trazendo para si a ideia de que seus estudos jamais podem se complementar, seguindo uma tradição platônica onde a geometria trata do estudo das grandezas, enquanto a álgebra (aritmética) trata dos números, sem nenhuma conexão<sup>18</sup>. É justamente esta separação entre o discreto e o contínuo – ou seja, entre a Álgebra e a Geometria – que impulsiona e desenvolve o pensamento matemático, que fora marcado pela crise dos incomensuráveis.

Segundo ROQUE; PITOMBEIRA (2012, p. 61), “o problema da incomensurabilidade parece ter surgido no seio da própria matemática, mais precisamente, da geometria, sem a relevância filosófica que lhe é atribuída”, sendo um dos primeiros exemplos a medição da diagonal de um quadrado. Porém, segundo os mesmos autores, há outras hipóteses para a descoberta dos incomensuráveis, ligadas à aritmética, como o extrato tirado do livro *Os elementos de Euclides*:

[...] se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas (EUCLIDES, 300 a.C., I.23 apud ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 63).

Ainda segundo Roque e Pitombeira (2012), era por meio desta afirmação que os gregos expressavam que o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis, levando à contradição de que um número deveria ser par e ímpar ao mesmo tempo. “Contudo, a demonstração apresentada para este fato faz uso de uma linguagem algébrica que não poderia ter sido usada pelos gregos antigos” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 63). Fora em um apêndice ao Livro X de *Os elementos de Euclides* que, de acordo com os autores, provavelmente interpolou-se, em uma época posterior, que se encontram provas geométricas levando à contradição de que números ímpares e pares são iguais (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

---

<sup>18</sup> Exceto no caso particular das grandezas comensuráveis, onde os resultados da aritmética podem ser aplicados, pois essas grandezas podem ser pensadas como números, segundo Armella e Waldegg (1995).

Há, então, uma relação entre o discreto e o contínuo – que estabelece relações entre o comensurável e o incomensurável – consolidadas pela ligação histórica e de conceitos para se apropriar da continuidade, gerando uma grande rede de significados para a constituição destes conceitos.

## **6.2. O infinito, o infinitésimo e a dialética entre estes conceitos**

O infinito é um conceito intuitivo e parte daquilo que cada ser humano entende como infinito. O conceito de infinito é um tema complexo e amplo. Ele é mencionado em muitas das principais escolas filosóficas ao longo da História, incluindo a antiga filosofia grega, a filosofia medieval e a filosofia moderna. Podemos vê-lo na Matemática, Física, na Filosofia e até na Religião. Além disso, o infinito é um tema importante na metafísica, teologia e cosmologia, e é frequentemente discutido com relação à ideia de eternidade e ao conceito de Deus como ser infinito. Etimologicamente, o termo infinito surgiu da palavra *Infinitas* (latim) e que advém de *Apeiros* (grego), que significa “sem fim” (ALVAREZ, 2012).

Segundo a perspectiva de Alvarez (2012), na antiga filosofia grega, Platão e Aristóteles discutiram o conceito de infinito. Platão argumentava que o infinito é algo real e existe fora do mundo sensível. Aristóteles, por outro lado, argumentou que o infinito é apenas um conceito abstrato e não existe na realidade. Na filosofia medieval, Santo Agostinho e São Tomás de Aquino discutiram o infinito em relação à existência de Deus. Ambos argumentavam que Deus é infinito em sua natureza e existência.

Ainda de acordo com Alvarez (2012), na filosofia moderna o infinito é discutido em relação às ideias de Immanuel Kant e Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Kant argumentou que o infinito é apenas uma ideia pura da razão, enquanto Hegel argumentou que o infinito é uma realidade objetiva e existe na natureza.

As culturas ancestrais tinham visões diferentes sobre o infinito onde, inicialmente, predominavam as perspectivas filosóficas e religiosas. Na visão de Aristóteles, os gregos helenísticos distinguiram o infinito de duas formas: potencial e real. Para o filósofo, o infinito estava ligado a algo indeterminado (ilimitado). De acordo com HILBERT (1925, p. 236) “a clarificação definitiva da natureza do infinito tornou-se necessária, não apenas por interesse especial das diversas ciências particulares, mas antes para a honra do próprio conhecimento humano”.

De acordo com Alvarez (2012), Zenão de Eleia (490 – 430 a.C., filósofo pré-socrático, paradoxo), fora um dos primeiros a utilizar o conceito de infinito na matemática. Utilizando paradoxos, Zenão argumentava para provar a inconsistência de conceitos como multiplicidade, divisibilidade e movimento.

Através dos Paradoxos da Pluralidade, Zenão argumenta sobre densidade e tamanho finitos. No argumento da densidade, temos que: imaginando uma fila de coisas em um espaço, como dados enfileirados, por exemplo, entre dois destes objetos, existe um terceiro; em meio a estes três, existem outros dois; e por consequência, há outros quatro entre esses cinco e assim sucessivamente. Neste argumento, a tese defendida é de que não pode haver mais de uma coisa pois, havendo muitas coisas, elas são limitadas e ilimitadas ao mesmo tempo, chegando à conclusão de que não existe a pluralidade (PESSOA JR., 2020)

No argumento sobre o tamanho finito, entende-se que todos os objetos que ocupam lugar em algum espaço possuem duas partes: a parte da frente e a de trás. Estas partes possuem também partes, e assim sucessivamente, seguindo infinitamente. Deste modo, o argumento de Zenão discute que a extensão de um objeto é infinita, ao passo que os objetos são numericamente determináveis e, novamente, chega à contradição entre a condição finita e infinita das coisas.

Segundo Carneiro (2020), um dos paradoxos mais conhecidos de Zenão é o de Aquiles e a Tartaruga. Este paradoxo diz que, Aquiles, conhecido pela sua velocidade decide apostar corrida com uma tartaruga. Como a velocidade de Aquiles é maior, a tartaruga recebe uma vantagem podendo iniciar a corrida um pouco à frente da linha de largada. De acordo com o paradoxo, a tartaruga nunca seria alcançada por Aquiles, pois quando ele chegar à posição inicial da tartaruga, esta se encontrará mais a frente, noutra posição. E quando Aquiles chegar à próxima posição, a tartaruga já caminhou para uma nova posição e assim infinitamente.

Imagine uma distância de 100 metros, onde, a tartaruga tem uma vantagem de 10 metros. Dentro destes 10 metros existem 10 intervalos de 1 metro, onde existem consecutivamente, intervalos de 0,1 metros e assim sucessivamente em intervalos cada vez menores, *ad infinitum*. Aquiles teria que percorrer todos estes espaços para alcançar a tartaruga. As ideias de Zenão se configuram na incapacidade de relacionar o discreto ao contínuo, onde, esta associação só será feita com a elaboração do Cálculo.

BOYER (1949, p. 20, apud SILVA, 2019, p. 136-137) questiona “se não houver um segmento finito tão pequeno que a diagonal e o lado possam ser expressos em termos dele, não haverá uma unidade de tal natureza que um número indefinido deles seja necessário para a diagonal e para o lado do quadrado?”

O infinito real, caracteriza o que Hegel chama de “infinito verdadeiro”. Para Aristóteles o infinito real não é um processo temporal, mas deve existir em ato (a manifestação atual do ser, aquilo que ele já é) e em potência (a possibilidade que ele pode vir a ser) a um dado momento. O infinito real da natureza, para Leibniz, também contém os infinitos números, em que utilizava-se uma ideia de contínuo na perspectiva do número. Portanto, este é um conceito matemático que se refere a algo que é realmente sem fim, como a série numérica dos números inteiros ou o conjunto dos números reais. Esses conjuntos são considerados infinitos reais porque eles contêm uma quantidade infinita de elementos e nunca chegam a um fim.

O infinito potencial é uma infinidade realizada, uma sucessão infinita discreta, que sempre pode ser reconduzida a se repetir infinitamente, onde sempre existe mais um elemento, indefinidamente. De acordo com Aristóteles (1996 [350 a.C.], livro III, p. 71-88), a ideia de infinito potencial remete ao que está para além da compreensão, que só pode existir potencialmente porque está para além da realidade. É um conceito que se refere a algo que pode ser feito sem fim, como adicionar um número a outro ou subtrair um número de outro. Essas operações podem ser realizadas infinitas vezes, mas nunca chegarão a um resultado final. Hilbert (1925) discute a concepção de infinito potencial como algo que nunca acaba. Ele argumenta que, embora esta seja uma ideia comum na matemática popular, ela é imprecisa e pode levar a contradições.

O paradoxo do "Hotel Infinito" ou "Paradoxo de Hilbert" é uma analogia matemática criada por David Hilbert para ilustrar algumas propriedades do infinito. Imagine que você é o gerente de um hotel com um número infinito de quartos numerados de 1 a infinito. O hotel está completamente cheio, com um hóspede em cada quarto. Agora, um novo hóspede chega ao hotel e pede um quarto. O que você faz?

De acordo com o paradoxo de Hilbert, é possível acomodar o novo hóspede, mesmo que o hotel já esteja completamente cheio. Para isso, basta mover todos os hóspedes para o quarto imediatamente superior ao seu número original. Dessa forma, o hóspede do quarto 1 se move para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 se move para

o quarto 3 e assim por diante, liberando o quarto 1 para o novo hóspede. Essa ideia pode parecer absurda, mas é um exemplo do comportamento não-intuitivo do infinito.

Na matemática, “o conceito de infinito era utilizado para qualificar ações mentais, como: estender, subdividir, continuar, adicionar, aproximar etc. Utilizar o infinito desta forma, tem a ver com o que conhecemos como infinito potencial, ou seja, quando o processo pode ser continuado indefinidamente” (MORENO; WALDEGG, 1991, p. 120, apud SILVA, 2019, p. 140).

Apesar do paradoxo, a matemática moderna lida com o infinito de forma rigorosa e consistente, utilizando conceitos como a teoria dos conjuntos e a análise matemática. A ideia do hotel infinito é apenas uma ilustração das propriedades não-intuitivas do infinito e não é uma base para a matemática moderna.

O infinito real e o infinito potencial são conceitos importantes, visto que, segundo Armella e Waldegg (1995), a ideia de infinito real se estabeleceu através da análise infinitesimal e, operar através do infinito potencial possibilitou que se desenvolvessem procedimentos matemáticos para quadratura de curvas, cálculo de comprimentos, área e volume, sendo o precursor de métodos como as integrais e cálculo diferencial. “Isso permitiu o avanço ao entendimento sobre processos de prolongamento indefinido e divisibilidade sucessivas, ou seja, na aceitação de expressões como “tão grande ou tão pequeno quanto se queira”” (SILVA, 2019, p. 141).

Segundo Silva (2019), foram estas compreensões que possibilitaram a ideia de construção de Limite por D’Alambert e Cauchy. A busca pelo infinitesimal e por sua objetificação, através de operações, possibilitou a construção de uma teoria de Limites baseado no conceito de variável e percorrendo a sucessão numérica a ela atribuída.

Para Leibniz, de acordo com Silva (2019), tanto as quantidades infinitas quanto as infinitésimas eram ideais à época, diferindo das quantidades apreciáveis, mas tendo a mesma propriedade. Elas estão conceitualmente ligadas à ideia de ser “infinitamente grande” e de ser “infinitamente pequeno”.

Ser “infinitamente grande” significa que algo não tem limites (de maneira geral) ou não tem limites conhecidos em sua grandeza. Isso é diferente de algo que é simplesmente muito grande, mas ainda tem limites definidos. Algo que é infinitamente grande é, por definição, sem fim e não pode ser medido ou quantificado de maneira precisa. Na matemática, o infinito real é usado para expressar quantidades que não podem ser contadas ou medidas, como os elencados abaixo:

- a) O conjunto dos números inteiros é infinitamente grande, pois tem uma quantidade infinita de elementos;
- b) O conjunto dos números reais também é infinitamente grande, pois tem uma quantidade infinita de elementos entre quaisquer dois números reais;
- c) O conjunto dos números complexos é infinitamente grande, pois tem uma quantidade infinita de elementos;
- d) O conjunto dos números transcendentais, como  $\pi$  e  $e$ , também é infinitamente grande, pois não podem ser expressos como frações;
- e) O conjunto dos números transfinitos<sup>19</sup>, como *aleph – nul*, é infinitamente grande, pois é maior do que qualquer número finito.

Esses conjuntos são considerados infinitos reais porque eles contêm uma quantidade infinita de elementos e nunca chegam a um fim.

Falar em "infinitamente pequeno" na matemática e na física significa falar sobre um número ou quantidade que é tão pequeno que é considerado como tendo valor zero. Na matemática, essa ideia é usada na teoria dos conjuntos infinitos e na análise, enquanto na física, é usada na mecânica quântica e na teoria da relatividade geral. É importante notar que isso é uma convenção matemática e que, na realidade, não existe nenhuma coisa realmente infinitamente pequena. Há vários exemplos de utilização do conceito de infinitamente pequeno, sendo algum deles os elencados abaixo:

- a) Diferenças finitas: nas equações diferenciais, onde uma diferença finita é um valor infinitamente pequeno que é usado para aproximar a variação de uma função;

---

<sup>19</sup> Os números transfinitos são uma extensão dos números naturais para incluir tamanhos de conjuntos além do infinito. Eles foram desenvolvidos por Georg Cantor no século XIX como uma forma de descrever conjuntos infinitos que não podem ser contados (isto é, que correspondem a um número natural). Cada número transfinito é representado por uma letra grega, como *Aleph* ( $\aleph$ ), que é usado para representar o menor conjunto infinito. Existem vários outros números transfinitos, como *Aleph – um* ( $1\aleph$ ), *Aleph – dois* ( $2\aleph$ ) etc. Esses números transfinitos são usados para descrever a cardinalidade (ou tamanho) de diferentes conjuntos infinitos.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais tem cardinalidade *Aleph – nul* ( $0\aleph$ ), o conjunto dos números reais tem cardinalidade *Aleph – um* ( $1\aleph$ ), e o conjunto de todas as funções de um conjunto para outro tem cardinalidade *Aleph – dois* ( $2\aleph$ ) e assim por diante.

- b) Símbolos como  $\Delta$  (delta) e  $\varepsilon$  (épsilon): são utilizados para representar valores infinitamente pequenos como em limites, por exemplo.  $\varepsilon$  representa o valor infinitamente pequeno que se aproxima de zero;
- c) Infinitesimais: na teoria das infinitesimais, as infinitesimais são valores infinitamente pequenos usados para descrever funções contínuas;
- d) Infinitesimais no cálculo infinitesimal: no cálculo infinitesimal, os infinitesimais são usados para descrever variações contínuas e para calcular derivadas e integrais;
- e) Números complexos: no cálculo complexo, infinitamente pequeno pode ser usado para descrever números complexos com parte imaginária proporcionalmente pequena.

Existe, então, uma dialética no que tange à relação de infinito e infinitésimo, que se configura através da produção de conhecimentos entre o infinitamente grande (o infinito) e o infinitamente pequeno (infinitésimo), através da promoção e transformação de suas concepções quando ambas se relacionam (SILVA, 2019).

### **6.3. A relação entre a fluência e permanência: O que é uma variável?**

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes: ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras contradições, outras dúvidas... A ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinada às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social... A matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens... (CARAÇA, 1951, PREFÁCIO, XIII)

Estes problemas eram ligados à vida social, e embora entendamos que a matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com a vida social, também entendemos que os seus fundamentos também estão tão mergulhados na vida real tanto quanto qualquer outro ramo da ciência. “Mas não há dúvida de que os fundamentos (da matemática) mergulham, tanto como os de outro qualquer ramo da ciência, na vida real” (CARAÇA, 1951, PREFÁCIO, XIII).

De acordo com Caraça (1951), existia, na sociedade grega uma incapacidade de conceber qualquer conceito relacionado à fluência, como o de variável, e por consequência, o de função. A partir daí, foram abandonados estudos quantitativos dos fenômenos naturais, levando a uma separação da geometria e da aritmética, que, Descartes entende mais tarde ser uma obscuridade e embaraço na forma que os antigos lidavam com a não relação da aritmética e geometria, em não utilizar os termos de uma na outra.

Isso gerou a exclusão da geometria e de tudo que lembrasse a ideia de movimento, fluência, mecânico e manual. A tendência era fugir de tudo que estivesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas, e, em particular, do conceito de infinito, não quanto ao âmbito filosófico, mas por renunciar a abordagem quantitativa, priorizando o método de exaustão, que, segundo Caraça (1951), não tem outro objetivo.

Foi somente com o desenvolvimento da álgebra, que a ideia de variabilidade na matemática pôde ser explorada, onde o conceito de variável pôde ser desgarrado do contexto geométrico, sendo concebido como uma extensão algébrica de um número desconhecido. Para CARAÇA (1951, p. 211), “o número é, em última análise, o que constitui a substância do conceito de variável e, portanto, de função” e, tendo um papel importante como uma primeira plana da explicação científica, tem destaque sobre a figura, resultando no fim da separação da aritmética e da geometria.

Newton chama de fluentes aquilo que conhecemos hoje como função. Esta nomenclatura está diretamente ligada à fluência, movimento. A introdução do conceito de função como um instrumento para o estudo da nova realidade da ciência, traz consigo um conjunto de ideias e concepções que lhe são essenciais. Uma variável, em seu conceito está ligada à filosofia da fluência (CARAÇA, 1951). Para o autor,

A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado - o conjunto - superior ao do número, é ela própria, de uma natureza

superior [...]; no entanto, o caráter contraditório do conceito - a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto - deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial - síntese do ser e não ser -, ela sai daquele quadro de ideias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente do pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na fluência, a primeira das suas características. Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa - a sua substância, o seu domínio [...]. (CARAÇA, 1951, p. 127).

Segundo SILVA (2019, p. 145), “somente com a ressignificação entre a Geometria (reino do contínuo) e a Aritmética (reino do discreto), e com o auxílio do pensamento abstrato algébrico, é que se pôde aprimorar o conceito de Variável e, conseqüentemente, criar o de Função.” Para Armella e Waldegg (1995), o conceito de variável foi importante para que surgisse a geometria analítica.

A geometria analítica abriu a possibilidade de passar de uma representação analítica (a equação) a uma representação geométrica. O estudo da geometria se viu enriquecido pela interação entre estas formas de representação; se geraram as condições para aprofundar os conceitos envolvidos (ARSELLA; WALDEGG, 1995, p. 27).

De fato, quando se estabelecem novas conexões entre os conceitos, são gerados novos significados. O encontro das representações visuais e analíticas nesta nova versão de geometria, tornou possível a transformação do estudo da fluência, assim como foi iniciado na escola Escolástica. Foi a concepção do espaço geometrizado que resultou na criação do Cálculo Infinitesimal.

## **7. REVISÃO DE LITERATURA**

### **7.1. O que dizem as pesquisas sobre os livros didáticos de matemática**

Os livros didáticos de Matemática sofreram um processo evolutivo, onde foram inseridos o ensino de geometria e também parte da história da matemática a fim de complementar o aprendizado do aluno (ROMANO; SCHIMIGUEL, 2019). Em relação à utilização dos livros em sala de aula, Pereira *et al.* (2006) diz que muitos professores e alunos os têm como recurso principal para estudo e como fonte de pesquisa. Mesmo com o avanço tecnológico, o livro didático ainda é o instrumento que pode ser

considerado mais democrático como fonte de pesquisa, devido às leis de acesso do PNLD.

Para Pereira *et al.* (2006) os livros, enquanto recurso didático, são de grande importância e, antes que fossem adotados, deveriam passar por um processo de escolha criteriosa, no entanto, em geral, não é isto que acontece. Quando isso não ocorre, surgem equívocos didáticos e pedagógicos, e obstáculos epistemológicos podem ser desencadeados a partir do uso inadequado e indiscriminado deste material.

Para Costa e Allevato (2010), o livro didático tem função de contribuir para o ensino-aprendizagem e é considerado um interlocutor entre o professor e os alunos. Para Brandão (2013), o livro didático é um material importante no cotidiano escolar, que influencia diretamente nos processos de ensino do professor e de aprendizagem do aluno. Ele é, de fato, um instrumento de apoio pedagógico para o docente, visto que auxilia sua prática, e também o é para o aluno em relação ao auxílio que presta na resolução das atividades e trabalhos.

Percebe-se que houve uma melhora em relação aos conteúdos presentes nos livros didáticos, visto que o próprio Ministério da Educação disponibiliza em seus guias uma descrição de como as atividades estão sendo elaboradas dentro do material que será disponibilizado para a aprendizagem do aluno. Brandão (2013) diz que um bom livro didático deve levar o aluno a compreender os conteúdos, investigar, refletir, concluir, generalizar e aplicar seus conhecimentos, e que serve também de suporte ao aluno.

O que percebemos, ao longo dos anos, é que os livros didáticos têm buscado trazer contextos sociais, culturais, políticos, ambientais e de inclusão para o ensino de matemática, em que:

O ensino de Matemática está associado ao estabelecimento de diversos tipos de articulações entre objetos de conhecimento, inclusive das diferentes áreas de conhecimento do Ensino Fundamental. Nesse contexto, o livro didático deve zelar pela apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, visando à garantia do desenvolvimento das competências específicas e gerais pelo(a) estudante, como previsto na BNCC. Tais articulações permitem ao(à) estudante perceber que os conhecimentos matemáticos não são isolados em campos estanques e/ou autossuficientes (BRASIL, 2020, p. 7).

Azevedo (2017) traz em seu trabalho uma análise crítica de livros do EJA (Educação de Jovens e Adultos). Nesta análise, o autor percebe uma articulação entre os conteúdos matemáticos a algumas diferentes profissões, buscando transitar entre o formal e o intuitivo. Porém, ainda na análise, ele percebe que há nesta mobilização uma inversão:

Destacamos que essa inversão, quando da escrita dos livros, pode ser notada, uma vez que para alguns conteúdos poucas relações são estabelecidas com o campo das profissões, mas o contrário não acontece, ou seja apresentar atividades próprias de uma profissão independente se tinham relação ou não com o currículo de Matemática (AZEVEDO, 2017, p. 86).

Melo *et al.* (2014), fazem uma análise do livro em relação aos aspectos gráficos e ao conteúdo. Nesta análise, os autores destacam que o livro de Luís Roberto Dante apresenta uma linguagem simples, clara e objetiva, mas, apesar disto, existem equívocos em relação ao conteúdo do livro, logo, ao profissional que utilizará o livro didático como suporte, sugerimos que faça uma organização na busca por corrigir na apresentação do conteúdo em sala aqueles erros contidos nos livros didáticos.

Silva e Resende (2016) trazem um ponto de vista um pouco mais amplo sobre as análises feitas em livros didáticos. As autoras percebem que, no campo algébrico, há sempre a utilização de conceitos imagens para dar suporte ao conceito definição. Ainda afirmam que há uma recorrência, no momento da contextualização, de não explorar o conceito, onde “há um desvio da contextualização que desvaloriza os conteúdos como elementos mediadores do desenvolvimento humano” (SILVA; RESENDE, 2016, p. 400). Nesta análise, as autoras ainda dizem que “a análise dos dados aponta indícios de maior ênfase à linguagem em detrimento do pensamento algébrico, assim, a relação dialética entre eles, que depende dos nexos internos dos conceitos, pode não se efetivar” (SILVA; RESENDE, 2016, p. 405). Ou seja, estas abordagens podem não generalizar e nem apresentar os conceitos de abstração que são fundamentais para o desenvolvimento teórico do sujeito cognoscente. De acordo com Lopes (2000, apud Macedo *et. al.*, 2018), é comum que se encontrem erros em livros didáticos, e que é necessário ao professor fazer de fato uma leitura criteriosa do material tanto no momento da escolha – se lhe for dada a opção – quanto no preparo da aula a fim de não reproduzir erros para os alunos.

O próprio Guia do MEC (BRASIL, 2020) comenta sobre a fragilidade de determinados conteúdos abordados dentro de determinados livros didáticos, e destacaremos aqui este trecho que diz especificamente sobre números: “observam-se fragilidades em algumas obras no que diz respeito à articulação da unidade temática números com as demais unidades temáticas, assim como o trabalho superficial com os números irracionais” (BRASIL, 2020, p. 23).

Logo, o ideal é que a escolha do livro didático fosse feita de forma consciente, crítica e sistematizada, buscando sempre utilizar materiais didáticos que irão estar conectados à realidade, cultura e aos conhecimentos dos alunos que utilizarão o livro. O livro didático é o material que será utilizado por pelo menos três anos, logo, é extremamente significativo que haja dentro das unidades escolares, entre os professores, um debate claro sobre qual material utilizar, para que esta seja uma escolha acertada.

## **7.2. Descrição e Análise de Dados**

A análise das pistas semióticas é necessária para que possamos identificar as possíveis lacunas referentes ao entendimento completo do que são os números reais, através da complementaridade entre os conceitos que podem ser apresentados, sejam eles discretos ou contínuos.

O que estamos chamando de pistas semióticas? As pistas semióticas são os significados que podem ser produzidos na representação dos conceitos e atividades no livro didático, relacionados ao entendimento dos números reais, como as propriedades de corpo ordenado completo, de totalidade de decimais infinitos, dos pontos na reta numerada, cortes de Dedekind, união de conjuntos e totalidade dos números.

As pistas abordadas no texto dissertativo e que estão sendo analisadas nos livros, são baseados no estudo de autores como Courant e Robins, Lima, Novaes e outros.

### **7.2.1. Análise do Livro A – A Conquista da Matemática**

A primeira unidade desta obra é inteiramente dedicada aos números reais, sendo subdividida em 4 capítulos. O capítulo 1 é iniciado por um pequeno resumo sobre números naturais, inteiros e racionais. O que percebemos, inicialmente, é que os autores não buscaram destrinchar estes conjuntos, apenas fazer lembrar deles, como quando diz que os números inteiros são os opostos aos naturais e os números racionais são aqueles que agregaram ao conjunto dos inteiros os números na forma de  $a/b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros e  $b$  é diferente de zero.

A não retomada destes, como constatado e posto inicialmente pelos próprios autores, se deu por eles estarem presentes nos livros dos anos escolares anteriores a este do 9º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais. Mas, independentemente disto, julgamos necessário uma reflexão maior sobre estes conjuntos para que o aluno possa retomar aquele conhecimento/aprendizado e dar continuidade aos estudos.

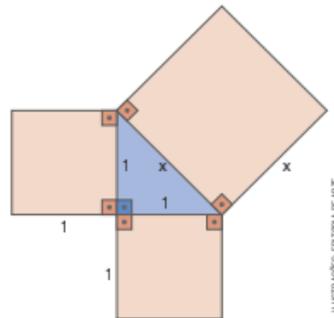
Voltar a refletir sobre os números desde o seu contexto de utilização para contagem, sobre a ideia de números relativos e também sobre as frações através de concepções geométricas de comensurabilidade, mesmo que fossem através de atividades propostas já no início do capítulo, esta poderia ser uma maneira interessante de complementar os estudos dos alunos, traçando um caminho de descobrimento de novas propriedades, como a que o autor claramente foca em desvendar posteriormente, que diz respeito ao não pertencimento de determinados números dentro do conjunto dos números racionais. Para tanto, os autores afirmam que nem com a existência de novos conjuntos, como os inteiros ou racionais, eles não seriam capazes de agregar todos os números existentes.

Há uma apresentação do número  $\pi$ , um número clássico na formalização dos números irracionais, mas entendemos que esta apresentação, neste momento do livro, pode ser um equívoco por gerar uma quebra de raciocínio que não leva à ideia de formalização do conjunto dos números irracionais. Poderiam ser discutidas diversas pistas semióticas neste momento: pontos na reta numerada, intervalos e cortes, corpo ordenado, totalidade dos decimais infinitos e totalidade dos números.

Apesar disto, este é um material que esmiúça o conjunto dos números irracionais. Percebemos que pode ter ocorrido uma inversão de caminhos, pois a maioria dos materiais trabalham basicamente toda a construção dos números naturais, inteiros e racionais, de forma mais ampla, enquanto o conjunto dos números irracionais costuma ser pouco discutido.

No primeiro capítulo, após a introdução, percebemos a presença de uma pista semiótica que é a construção geométrica para a descoberta do número irracional como ponto na reta numerada. Ali faz-se a associação à área de quadrados cuja propriedades advém do teorema de Pitágoras.

Figura 18 – Construção de raiz de 2 através de áreas

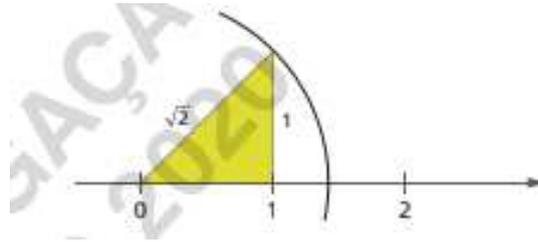


Fonte: (GEOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2018, p. 16)

Logo, chegamos a  $x^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow x^2 = 1 + 1 \rightarrow x^2 = 2$ . E como  $x$  é a medida do maior lado do triângulo, e  $x > 0$ , então, para a equação segue que  $x = \sqrt{2}$ . Este capítulo é bem estruturado neste sentido, mas talvez fosse importante uma abordagem sobre os aspectos presentes em outras pistas semióticas, como as propriedades de corpo ordenado completo, principalmente no que tange às propriedades de potência e raiz, que estão presentes nos capítulos 3 e 4 da unidade que estudamos. Uma sugestão que poderia ser feita para o leitor, seja docente ou discente, seria visitar os capítulos que tratam das propriedades, o que tornaria o estudo mais dinâmico dentro do próprio livro didático, não deixando pontas soltas nas informações que são apresentadas no material, mas criando conexões entre elas. Mesmo que entendamos que os alunos já tenham visto este conteúdo, não rerepresentar determinadas ideias pode ser analisado, talvez, como um julgamento de que a turma que está no processo de ensino e aprendizagem é uma turma ideal. Este é um trabalho que pode e deve ser feito pelo professor.

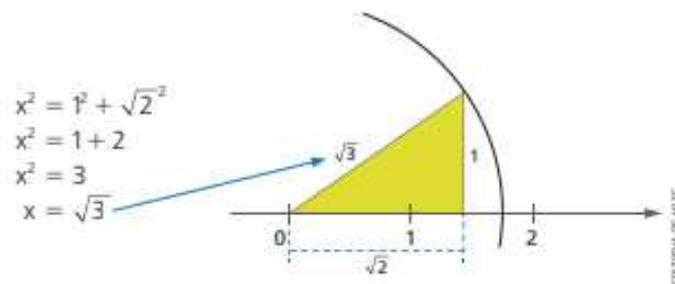
A pista semiótica de ponto na reta numerada é utilizada pelos autores. Assim, eles apresentam a construção do segmento incomensurável  $\sqrt{2}$  e posteriormente constroem um outro segmento incomensurável, o  $\sqrt{3}$ .

Figura 19 – Construção do segmento  $\sqrt{2}$ .



Fonte: (GEOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2018, p. 16)

Figura 20 – Construção do segmento  $\sqrt{3}$ .



Fonte: (GEOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2018, p. 17)

Os autores afirmam que, com as construções geométricas é possível perceber que  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  são números que estão entre 1 e 2, e então, determinam estes dois números como intervalos, onde:

→ O número 2 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois  $1 = 1^2$  e  $4 = 2^2$

$$(1,1)^2 = 1,21 \text{ e } 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 \text{ e } 1,44 < 2$$

$$(1,3)^2 = 1,69 \text{ e } 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 \text{ e } 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 \text{ e } 2,25 > 2$$

Observamos, portanto, que  $\sqrt{2}$  está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, temos:

$$(1,41)^2 = 1,9881 \text{ e } 1,9881 < 2$$

$$(1,42)^2 = 2,0164 \text{ e } 2,0164 > 2$$

Então,  $\sqrt{2}$  está entre 1,41 e 1,42. Prosseguindo com o cálculo, temos:

$$(1,411)^2 = 1,990921 \text{ e } 1,990921 < 2$$

$$(1,412)^2 = 1,993744 \text{ e } 1,993744 < 2$$

$$(1,413)^2 = 1,996569 \text{ e } 1,996569 < 2$$

$$(1,414)^2 = 1,999396 \text{ e } 1,999396 < 2$$

$$(1,415)^2 = 2,002225 \text{ e } 2,002225 > 2$$

Desse modo, verificamos que 2 está entre 1,414 e 1,415. Então, podemos considerar que um valor aproximado para 2 é 1,414.

→ O número 3 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois  $1 = 1^2$  e  $4 = 2^2$ . Para descobrir o valor de 3, vamos fazer:

$$(1,1)^2 = 1,21$$

$$(1,2)^2 = 1,44$$

$$(1,3)^2 = 1,69$$

$$(1,4)^2 = 1,96$$

$$(1,5)^2 = 2,25$$

$$(1,6)^2 = 2,56$$

$$(1,7)^2 = 2,89$$

$$(1,8)^2 = 3,24$$

Vemos, então, que 3 está entre 1,7 e 1,8. Vamos continuar o cálculo:

$$(1,71)^2 = 2,9241$$

$$(1,72)^2 = 2,9584$$

$$(1,73)^2 = 2,9929$$

$$(1,74)^2 = 3,0276$$

Vemos que 3 está entre 1,73 e 1,74. Prosseguindo com o cálculo, temos:

$$(1,731)^2 = 2,996361$$

$$(1,732)^2 = 2,999824$$

$$(1,733)^2 = 3,003289$$

Pelos últimos cálculos, vemos que 3 está entre 1,732 e 1,733. Então, podemos considerar que um valor aproximado para 3 é 1,732.

A utilização destes dois números nos provoca a pensar intuitivamente na pista semiótica de números por Cortes de Dedekind, visto que, são criados cortes dentro do corte inicial que não estão contidos uns nos outros, criando a possibilidade de termos uma infinidade de novos números dentro de cada novo corte, onde seus pontos não pertencem ao conjunto dos números racionais.

No capítulo 2 deste mesmo livro, para definir de fato o conjunto dos números reais, é utilizada a pista semiótica de números reais como união dos racionais e irracionais: “Reunindo-se, em um mesmo conjunto, todos os números racionais e todos os números irracionais, formamos o conjunto dos números reais, representado por R” (GEOVANNI JR, CASTRUCCI, 2018, p. 21). Logo abaixo, os autores fazem outra afirmação, onde dizem que “os conjuntos numéricos N, Z e Q são subconjuntos de R, pois todos os elementos de cada um deles pertencem a R” (GEOVANNI JR, CASTRUCCI, 2018, p. 21), e posteriormente, após apresentarem outros subconjuntos, como  $R^*$ ,  $R^+$ ,  $R^-$ ,  $R^{*+}$ ,  $R^{*-}$ , afirmam ainda que

em uma reta numérica, podem ser representados todos os números racionais e todos os números irracionais, ou seja, podem ser representados todos os números reais; e cada ponto dessa reta pode ser associado a um número racional ou a um número irracional (GEOVANNI JR, CASTRUCCI, 2018, p. 21).

Todas essas citações estão na mesma página e, o que observamos em relação à segunda, é que ela pode ser vista como uma contradição à primeira, gerando dúvidas em relação à ideia de números irracionais. Enquanto a primeira e terceira tratam os números racionais e irracionais como números reais para ambas as pistas tratadas nelas – reunião de racionais e irracionais e reais como pontos na reta numerada –, a segunda não considera o conjunto dos irracionais (representado por  $I$  ou  $R-Q$ ) como subconjunto de  $R$ . Assim sendo, seus elementos não seriam números reais. Se eles não fazem parte dos reais, qual o intuito de apresentá-los? Pode parecer que este tipo de informação não seja relevante para o ensino e a aprendizagem sobre números reais, mas há uma divergência de informações que pode criar uma confusão conceitual em relação ao conjunto dos irracionais e também dos reais.

Nos capítulos posteriores – 3 e 4 – são discutidas as propriedades e operações de potências e raízes dos números reais. A forma como estes conteúdos são apresentados pelo autor é mais formal, desenvolvida com aspectos que são vistos na pista semiótica de corpo ordenado completo, por exemplo. A generalização de expressões como  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$  e  $\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$  é apresentada inicialmente, enquanto outros autores apresentam primeiro situações para desenvolver estas generalizações.

A busca por significado do que são as potências e raízes quadradas, cúbicas e afins nos exercícios tem em parte um apelo geométrico, onde de fato, os autores prezam por associações entre o discreto e contínuo numérico. Além disso, a criação de novos signos com o tratamento de informações que utilizam destes aspectos dentro do livro é bastante positiva.

### 7.2.2. Análise do Livro B – Matemática & Realidade

O livro analisado faz o estudo dos números em dois capítulos, 1 e 2. O capítulo 1 trata, especificamente, de números, propriedades de potências e raízes, enquanto o capítulo 2 trata das operações com radicais. E o porquê deste capítulo abordar somente as propriedades de operações com radicais será discutido posteriormente.

O capítulo 1 traz, inicialmente, um experimento mostrando que a diagonal de um quadrado de lado 1 e a diagonal de um retângulo cujo medidas são 2 por 1 valem,

respectivamente, raiz de 2 e raiz de 5. Entendemos que, por se tratar de um livro do 9º ano do ensino fundamental, esta introdução apresentando estes números provavelmente se deu por todos os outros conjuntos já terem sido vistos nos livros anteriores. Há no livro esta associação dos números à ideia de segmentos, através de uma complementaridade entre os aspectos algébricos e geométricos na construção deles. Percebemos também, que o autor busca **sempre** associar este sistema de medida, onde o número 1 é uma unidade e, por conseguinte, outros números, ao que é visto em duas pistas semióticas: a de conjuntos numéricos e também de pontos na reta numerada.

O livro diz que “o número  $\sqrt{2}$ , medida da diagonal de um quadrado unitário, e o número  $\sqrt{5}$ , medida da diagonal de um retângulo de dimensões 2 por 1 são exemplos de números reais” (IEZZI, et. al., 2018, p. 13). Esta informação é vista novamente mais adiante, onde são feitas as associações destes números com pontos na reta numerada. Inclusive, os autores afirmam que estes números podem ser representados como pontos na reta numerada, de forma que cada número corresponda a um ponto e vice-versa.

Os autores buscam trabalhar os reais a partir da construção de números que não são usuais, pois, como afirmamos anteriormente, provavelmente os alunos já conheceram os números de outros conjuntos numéricos. No entanto, como notamos uma forte tendência na leitura do mesmo para a construção da ideia de números reais e sua conceituação a partir da ideia da pista semiótica de números reais como união dos racionais e irracionais, há uma disponibilidade dos autores de mostrar os outros conjuntos além dos irracionais. Há um breve resumo referente aos números naturais, inteiros e racionais.

No resumo dos números naturais, é apresentada a formalização do conjunto através de  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ , como feito em outros livros didáticos. Mas o mais interessante é que o livro busca explicar a insuficiência dos números pertencentes a este conjunto, onde  $(9 - 4)$  resulta em um número natural, porém  $(4 - 9)$  não, logo, não existe um número natural cujo resultado de  $(4 - 9)$  seja válido. Partindo deste ponto, o livro afirma que o conjunto dos números inteiros se faz necessário, onde existem os números que satisfazem operação de subtração como  $(4 - 9)$ , ou seja, operações onde  $b - a$  serão válidas onde  $a > b$ .

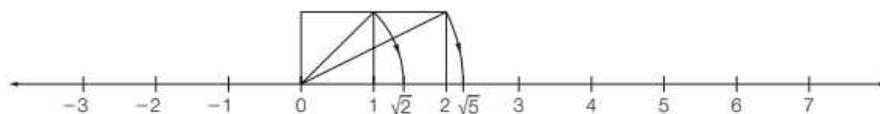
A explicação para o conjunto dos inteiros traz a formalização dos conjuntos, onde  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  e mostra estes números localizados na reta numerada. Além disso, ele justifica que estes números agora são suficientes para operações  $b - a$  onde  $a > b$ , mas não são para resolver a operação de divisão, visto que  $a/b$  não é possível nos inteiros se  $a < b$ .

Intuitivamente, o livro faz com que o leitor perceba que  $N \subset Z \subset Q$ , dadas as informações apresentadas sobre conjuntos e também a partir da reta numerada. Os racionais são definidos como aqueles que podem ser representados na forma de fração ou decimal, e o livro afirma que “quando adicionamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos dois números racionais, o resultado, quando existe, é sempre um número racional” (IEZZI, et. al., 2018, p. 14). Ou seja, ele demonstra de forma simples o que a pista semiótica de corpo ordenado completo apresenta em relação a  $Q$ , que ele é um corpo ordenado bem definido nas operações de  $(Q, +, \cdot)$ .

Esta afirmativa, no entanto, poderia ser melhor explorada dentro do material, visto que as operações são mencionadas, mas sequer discutidas de forma demonstrativa para que o leitor possa observá-las ocorrendo na prática. Experimentos relacionando às operações da pista semiótica de corpo ordenado completo associados às de pontos na reta numerada poderiam ser trabalhados a fim de discutir a ideia de decimais finitos, infinitos periódicos e, então, introduzir os não periódicos. Esta introdução dos não periódicos serviria para explicar que existem números que são não racionais, que já é feita pelo livro, mas de forma diferente.

Para esta apresentação dos não racionais, os autores associam alguns números a pontos na reta, através dos segmentos  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$ , sendo eles diagonais de um quadrado de lado 1 e de um retângulo de dimensões 2 por 1.

Figura 21 – Construção dos segmentos  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$



Fonte : (IEZZI et. al., 2018, p. 14)

Logo abaixo, é afirmado que  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$  não são números racionais, pois não existem números  $m$  e  $n$  em  $Z$  que  $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ . E também que não existe um  $\frac{m}{n} = \sqrt{5}$ , com  $m$  e  $n$  inteiros. Portanto, existem pontos na reta que não correspondem a números racionais e, por este motivo, eles não pertencerão ao conjunto dos números racionais. Em consequência disso, infere-se que os números racionais não preenchem toda a reta numérica. Esta é uma consequência explicada de forma simples sobre a densidade de  $Q$  e da necessidade de novos números para além daqueles conhecidos até agora.

O que tinha sido visto, até então, era que  $N \subset Z \subset Q \subset R$  seriam suficientes, até a descoberta de números incomensuráveis. Todavia, este contexto histórico relacionando estes segmentos incomensuráveis e explorando sua existência não fora bem explicado, dando origem a perguntas como: se estes números não pertencem ao conjunto dos racionais, eles pertencem a qual conjunto?

Logo, poderia gerar o entendimento de que estes números são não racionais, pertencem a  $R$  mas não a  $Q$ , logo, seriam elementos de  $R - Q$ , e para ter todos os elementos de  $R$ , seria necessária uma união entre racionais e não racionais (irracionais), portanto

$$R = Q \cup (R - Q).$$

E para definir os reais, o livro diz que

$$R = \{x \mid x \text{ é racional ou irracional}\}$$

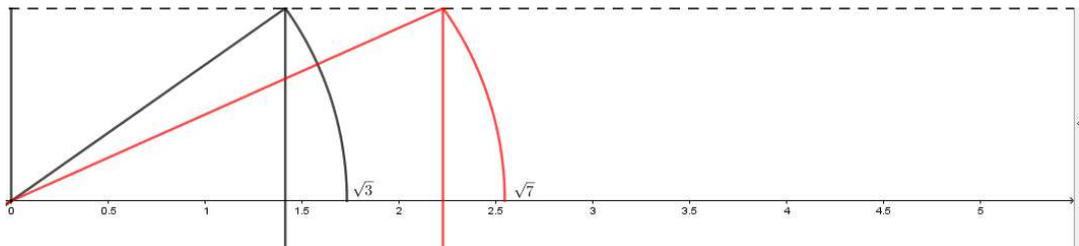
e que, todo número corresponde somente a um ponto na reta, e além disso os números reais preenchem toda a reta numérica, ou seja,  $R$  é denso e completo.

Retornando rapidamente aos irracionais, o livro trabalha a ideia de aproximação decimal finita para representar os irracionais de forma correta, sem que haja qualquer confusão em relação a isto, visto que, para localizar estes números na reta numerada, se tratarmos da questão semiótica de intervalos, estes serão cada vez menores.

Em relação aos exercícios que trazem operações entre os números irracionais, o que chama atenção é que há sempre a conversão destes números para suas aproximações racionais. Na localização da reta, o autor poderia explorar por exemplo a localização destes números como segmentos de retas. No exercício onde pede-se para localizar  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{7}$ , e suas operações de soma e subtração há a possibilidade de

fazer a construção através de experimentos mentais, onde a construção poderia ser feita inicialmente da mesma forma que os autores constroem os números  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$ . Logo, teríamos inicialmente que:

Figura 22 – Localização de  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{7}$  na reta numerada



Fonte: (O AUTOR, 2022)

A partir disto, a exploração através de um experimento pode ser feita<sup>20</sup>. Vejamos o que alguns exercícios na sequência pedem aos alunos:

Exercício 5: Determinar a fração geratriz de  $0,4444\dots$  e de  $\sqrt{0,4444\dots}$ ;

Exercício 6: Verificar se a afirmativa  $(0,3333\dots)^2 = 0,1111\dots$  é verdadeira ou falsa;

Exercício 7: Representar o número  $(1 - \frac{1}{2}) + (1/2 - 1/3) + \dots + (1 - 1/100)$  em forma decimal;

Exercício 8: Representar o número  $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 1/3) \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot (1 - 1/100)$  em forma decimal;

Exercício 9: Calcular o valor de  $(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + 1/3) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot (1 + 1/9999)$ ;

Exercício 10: Calcular o valor de  $\frac{2+4+6+8+\dots+2000}{1+2+3+4+\dots+1000}$

<sup>20</sup> Essa atividade será desenvolvida no Produto Educacional.

Os exercícios de 5 a 10 deste livro exploram os números decimais e representações por suas frações geratrizes através de propriedades que estão presentes em duas pistas semióticas, sendo elas as de corpo ordenado completo e de totalidade de decimais infinitos.

### 7.2.3. Análise do Livro C – Matemática: Realidade & Tecnologia.

Diferentemente dos outros livros analisados, este é o primeiro a desenvolver a ideia de conjuntos na concepção do dia a dia, sem necessariamente tratar dos conjuntos numéricos da matemática diretamente.

Para iniciar esta unidade, o livro traz algumas curiosidades sobre as línguas indígenas no Brasil, falando sobre a quantidade e sobre as semelhanças entre elas, que, analisadas por especialistas por terem origens comuns, podem ser organizadas em troncos ou famílias linguísticas.

Esta introdução serve principalmente para mostrar que esta ideia de agrupamento surge, principalmente para uma questão organizacional, e, além disso, para uma organização que é feita além da questão matemática, mas social. A necessidade de se transcrever em dados numéricos fora algo que surgiu posteriormente, e a partir dela que se entende estes agrupamentos como conjuntos numéricos.

No livro, as formas de representar conjuntos são por diagrama e por chaves. Além disso, o livro traz a lei de formação de conjuntos, onde são apresentados alguns conjuntos finitos:

$$A = \{x \mid x \text{ é divisor de } 12\}$$

E traz também a ideia de pertencimento a este conjunto, logo o 4 pertence à A e 5 não pertence a este conjunto. Como exemplo, traz também os conjuntos:

$$B = \{x \mid x \text{ é um número negativos maior que zero}\};$$

$$C = \{x \mid x \text{ é um número ímpar}\};$$

$$D = \{1, 3, 6\}.$$

Observamos que, nesta introdução, além desta ideia de conjunto finito, ao apresentar o conjunto B ele introduz a ideia de vazio, e em C de elementos que podem ser contados infinitamente. Após a introdução, o livro inicia a conceituação de conjuntos numéricos, e parte dos números naturais, onde a tirinha da figura 23 é apresentada:

Figura 23 – Ideia de contagem



Fonte: (SOUZA., 2018, p. 16)

Os personagens discutem através dela, a ideia de contagem que foi a primeira percepção de elementos numéricos naturais, abordada nas pistas semióticas de Números Reais como totalidade dos números e como união de racionais e irracionais. O livro diz que os números naturais são utilizados há muito tempo pela humanidade, como fora explicada nas pistas semióticas detalhadas no capítulo 5 deste texto através de autores como Caraça, Courant e Robbins, e Roque. A definição do conjunto é feita através de  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

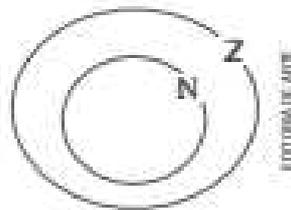
Além disso, o livro apresenta os números negativos, onde o autor diz “No decorrer da história, surgiram diversas outras situações que não podiam ser expressas apenas pelos números naturais, como nos casos que envolviam débitos, dívidas, entre outros.” (SOUZA, 2018, p. 16). Portanto, a partir desta ideia, surgiram os números negativos, que, compostos aos números naturais, formavam um novo conjunto: o dos números inteiros, onde  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Além desta ideia de conjuntos, o autor determina que estes números podem ser representados a partir de pontos de uma reta numerada. Aqui, poderiam ser exploradas as ideias de números absolutos e relativos, e o zero como referencial para determinar sua posição e sentido (negativo ou positivo). Isto é então explorado da seguinte forma: no sentido dos números negativos, -6 é antecessor de -5 e -5 sucessor

de -6, ou seja,  $-6 < -5$ . É assim que, de forma simples, apresenta a questão de ordenação intuitivamente.

No estudo dos conjuntos, o livro também traz a representação dos inteiros através de um diagrama, onde todo elemento natural está dentro do conjunto dos números inteiros, ou seja,  $N \subset Z$ , onde  $N$  é subconjunto de  $Z$ . Observe a figura 24:

Figura 24 – Números naturais como subconjunto dos números inteiros



Fonte: (SOUZA, 2018, p. 16)

Este foi o único livro que apresentou o diagrama para representar os conjuntos. Veremos mais adiante como esta forma de representação evoluiu e discutiremos sobre o tema posteriormente. Para apresentar números racionais, o livro mostra a seguinte imagem:

Figura 25 – Jarra com medidas fracionárias e decimais



Fonte: (SOUZA, 2018, p. 17)

Além dos números inteiros, também são vistos números em forma de fração na mesma medida em que estão os números decimais finitos. Desta forma, o autor dá a ideia de que números racionais podem ser representados de duas formas: através de frações ou números decimais. Portanto, estes são os números que podem ser escritos da forma  $a/b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros e  $b$  é diferente de zero. Logo,  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$ .

O livro coloca como observação que os números inteiros também podem ser escritos da forma  $a/b$ , logo, estes números fazem parte do conjunto dos racionais, ou seja,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . E, com isto, a representação do diagrama apresentado na figura 26 passa a ser:

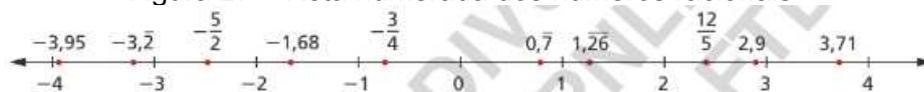
Figura 26 – Diagrama de subconjuntos dos números racionais



Fonte: (SOUZA, 2018, p. 17)

E também é explorada a pista semiótica de pontos na reta numerada

Figura 27 – Reta numerada dos números racionais



Fonte: (SOUZA, 2018, p. 17)

O autor aborda também as transformações de decimais em frações e vice-versa.  $\frac{7}{5}$  é um exemplo da divisão onde o resultado decimal é 1,4 e tem como resto 0, logo, nessa divisão, temos um número decimal finito, que o autor define como número decimal exato. O autor traz como observação que este número pode ser escrito como uma fração equivalente  $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$ .

Posteriormente, o número  $\frac{8}{3}$  é apresentado e sua divisão resulta em 2,666.... Logo, se continuarmos essa divisão, obteremos indefinidamente o algarismo 6 no quociente e não será possível ter resto igual a zero. Nesse caso, dizemos que esse quociente está na forma de dízima periódica. Os algarismos que se repetem indefinidamente são chamados período.

Na transformação de racional para fração, o livro traz dois exemplos onde,  $1,25 = 1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 2,777 \dots$  é igual a  $\frac{25}{9}$ . No primeiro exemplo, não é explorado como se transforma este decimal em fração, mas no segundo, ele determina uma equação onde

$$x = 2,777\dots \rightarrow \text{Consideramos essa igualdade.}$$

$$10x = 27,777 \rightarrow \text{Multiplicamos cada membro da igualdade por 10.}$$

$$10x - x = 27 - \underbrace{2,777\dots}_x \rightarrow \text{Subtraímos } x \text{ de cada membro da igualdade.}$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{25}{9} \rightarrow \text{Dividimos cada membro da igualdade obtida por 9.}$$

$$x = \frac{25}{9} \rightarrow \text{Obtemos o resultado.}$$

$$\text{Assim, temos que } 2,777 \dots = \frac{25}{9}.$$

Neste momento, e também nos exercícios, poderiam ser explorados métodos de transformação das representações que são vistas na pista semiótica de números reais como totalidade dos decimais infinitos. As operações entre os racionais não foram vistas, nem sequer citadas. Se, por exemplo, fosse feita uma subtração  $1,4 - 0,666\dots$  seria necessário que se aumentassem as casas decimais, logo,  $1,4 = 1,400\dots$  ou seja, poderia ser escrito como um decimal infinito.

Para explicar o conjunto dos irracionais, é utilizado o que conhecemos como exemplo clássico para se obter números que não são parte dos racionais: a  $\sqrt{2}$ . O livro inicia falando da importância dos racionais na medição e sua até então suficiência em relação ao que a humanidade necessitava, até que, um determinado grupo de pensadores, os Pitagóricos, identificaram situações em que os números racionais não eram suficientes para determinar valores numéricos, como, por exemplo, na medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

Para explicitar isto, o livro utiliza o método de demonstração por contradição. Nesse método, é suposto que  $\sqrt{2}$  é racional e utilizam-se argumentações válidas até chegar a uma contradição que indica que esse número não é racional. Veja:

“Como supomos  $\sqrt{2}$  racional, temos que ele pode ser escrito como uma fração irredutível  $a/b$ , com  $a$  e  $b$  inteiros e  $b \neq 0$ .” (SOUZA, 2018, p. 20)

A partir disto, os autores seguem a afirmativa, e determinam que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 2 \cdot b^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot b^2 \rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2.$$

Em seguida, dizem que “Como  $2b^2 = a^2$ , temos que  $a^2$  é um número par e, por consequência,  $a$  também é par. Assim, podemos escrever o número  $a$  da seguinte maneira:  $a = 2m$ , sendo  $m$  um número inteiro” (SOUZA, 2018, p. 20). Logo, substituindo  $a$  por  $2m$ , tem-se que:

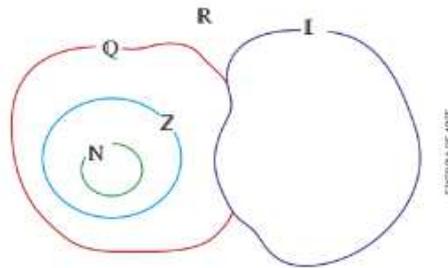
$$2 \cdot b^2 = (2m)^2 \rightarrow 2 \cdot b^2 = 4m^2 \rightarrow \frac{2b^2}{2} = \frac{4m^2}{2} \rightarrow b^2 = 2m^2$$

“Com base no resultado acima, podemos afirmar que  $b$  também é um número par. Como  $a$  e  $b$  são números pares, a fração  $a/b$  pode ser simplificada por 2. Isso, no entanto, é uma contradição, pois supomos inicialmente que essa fração era irredutível” (SOUZA, 2018, p. 20).

Os autores utilizam propriedades que são discutidas na pista semiótica de corpo ordenado completo, através do método da contradição, e determinam que existem raízes, assim como  $\sqrt{2}$  que não podem ser escritas da forma  $a/b$ , logo, não são elementos racionais, portanto, são considerados irracionais I.

Abordados os conjuntos dos números racionais e irracionais, o livro determina que o conjunto dos números reais é a união entre estes dois conjuntos, o que converge com a pista semiótica de números reais como união dos racionais e irracionais. No diagrama da figura 28 temos:

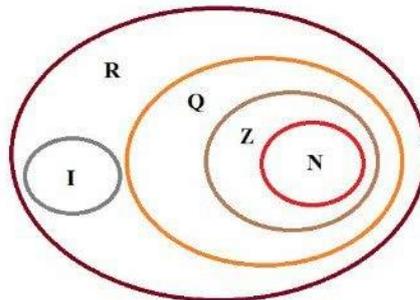
Figura 28 – Diagrama do conjunto dos números reais como a união de racionais e irracionais



Fonte: (SOUZA, 2018, p. 24)

Apesar dos outros livros não apresentarem diagramas para relacionar esta ideia de união de conjuntos, iremos discutir sobre este por nos parecer a forma mais correta, talvez, de representação do que é esta união. Em determinados livros, de outras PNLD, que não estão sendo apresentados aqui, sempre vemos o diagrama da seguinte forma apresentada na figura 29:

Figura 29 – Diagrama comumente visto nos livros didáticos



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/numeros-reais/>

Esta representação, que era apresentada anteriormente na maioria dos livros didáticos, cria uma ideia de que o conjunto dos números irracionais é limitado e menor que o conjunto dos números racionais e, além disso, visualmente não representa uma união onde  $R = Q \cup I$ . E, a representação anterior a esta, na figura 29, traz mesmo que de forma simples, uma ideia de que estes conjuntos estão atrelados, unidos e com seus elementos em “movimento” para criar o conjunto dos números reais.

Há, também a representação destes números na reta numérica e, para tanto, afirma-se assim como nos outros livros que cada ponto na reta numerada corresponde a um número real e vice-versa. O autor traz também que para representar números irracionais na reta numérica deve-se localizar sua aproximação decimal.

Na discussão sobre propriedades de raízes e potências, o livro é bem estruturado, trazendo todas as propriedades que são vistas na pista semiótica de corpo ordenado completo, sendo o primeiro a tratar sobre raízes de números negativos, onde, para um número negativo como -25 não se pode determinar um número real  $p$  onde  $p^2 = p \cdot p$ , logo, a  $\sqrt{-25}$  não está definida nos números reais. Porém, para raízes  $\sqrt[n]{k}$ , com  $k$  negativo,  $n > 0$  e  $n$  for ímpar, esta raiz poderá ser definida em  $\mathbb{R}$ .

Os exercícios do livro didático tratam, em sua maioria, da localização de determinados números na reta real. Apesar de termos quase que exclusivamente os racionais trabalhados com frações decimais finitas, o livro também apresenta alguns que resultam em dízimas periódicas.

#### **7.2.4. Análise do Livro D – Matemática Bianchini.**

O livro contém dois capítulos para tratar dos números reais. O capítulo 1 visa explicar os números reais, enquanto o capítulo 2 visa explicar as operações destes números. Numa primeira observação, esta divisão parece buscar facilitar o entendimento do processo de criação dos números reais. No entanto, analisando posteriormente, entendemos que ela pode ser mais bem contextualizada quando suas operações são explicadas dentro deste processo de criação. As operações aconteceram naturalmente neste processo de criação, logo, elas não podem ser “deixadas pra trás”. Outra observação interessante é que o autor busca fazer este processo de descoberta dos números reais de forma intuitiva e menos formal do ponto de vista teórico, mas que talvez fosse necessário definir em determinados momentos as leis que valem para definir algumas propriedades acerca destes números.

No capítulo 1 – Números Reais, o livro inicia fazendo um pequeno resumo sobre a história dos números, onde Bianchini aborda a ideia de contagem para o surgimento dos mesmos. Nesse sentido, é apresentada a ideia de números naturais logo abaixo e a informação de que “os números naturais são números que expressam o resultado de uma contagem” (BIANCHINI, 2018, p. 11).

O que o autor chama de números naturais  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  é abordado por Maurer (1977), mas, diferentemente de Bianchini, Maurer traz a ideia de inteiros

com o zero, assim, associando a estes, um sistema de numeração decimal para contagem. Apesar desta distinção, entendemos a ideia de inteiros com zero como o conjunto dos números naturais.

O livro afirma que com os números naturais é possível efetuar qualquer operação de adição e multiplicação, mas que não é possível utilizar somente números naturais para efetuar problemas cujas operações são de subtração e divisão. Este pequeno trecho pode gerar questionamentos que podem fazer com que o leitor tenha interesse em procurar a existência de novos números. O próprio livro poderia levantar questionamentos e respondê-los posteriormente, de forma que citasse o que entendemos como axiomas presentes na pista semiótica de corpo ordenado completo: elemento neutro e simétrico da adição, simétrico da multiplicação e elemento neutro da multiplicação. Dentre os exercícios propostos, ele coloca duas questões: “Por que é impossível efetuar a divisão exata  $7:3$  dispondo apenas de números naturais” e “E  $3-7$ ? Por que é impossível efetuá-lo?” (BIANCHINI, 2018, p. 13).

Os questionamentos são realmente interessantes e podem trazer ao leitor a ideia de que estas operações necessitam de novos elementos que não estão presentes nos números naturais, logo, necessitam de novos conjuntos. Mas o que chama atenção aqui são as possibilidades de interpretação. Quando o primeiro questionamento é feito, podemos interpretar que não se pode fazer a operação através de números naturais, mas que existe uma forma de fazê-la. Enquanto o segundo questionamento pode fazer o leitor interpretar que é impossível realizar esta operação. Todavia, no subtópico logo abaixo, começa a explicar números inteiros, onde a operação pode ser realizada, pois há neste conjunto o elemento cuja operação  $3 - 7$  satisfaz, que é  $-4$ .

Ademais, para introduzir os números inteiros, há uma menção à números relativos, que está presente na pista semiótica relacionada à totalidade dos números, onde Maurer (1977) entende este como um subproduto da subtração e aborda a necessidade de representar estes números em situações cotidianas, de forma que dê a ideia de distinguir os dois sentidos, dentre os quais existe um para os números com valores absolutos e outro para os números relativos. Mesmo que de forma não intencional, tanto Maurer quanto Bianchini tentam fazer esta conexão a fim de trazerem os aspectos intuitivos desta pista abordada. Bianchini traz como exemplo inicial a medição de temperaturas, onde os números inteiros negativos são aqueles cujo termômetro marca abaixo de zero, logo, dá ao zero o papel de referencial de

neutralidade, que é uma das diversas abordadas por Maurer. O livro também traz como exemplo uma movimentação bancária, onde o saldo credor é positivo, o saldo devedor negativo e o zero referencial de neutralidade, como pode ser visto na figura 30:

Figura 30 – Tabela de movimentação financeira

Movimentação de conta-corrente (valores em reais)				
Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
22/3	saldo anterior			+70,00
22/3	cheque 900392	-200,00		-130,00
22/3	depósito		+100,00	-30,00

Dados fictícios.

Fonte: (BIANCHINI, 2018, p. 14)

Além desta tabela, uma das maneiras de mostrar estes números pelo autor, poderia ser através de uma reta cujo zero é referencial, trazendo estes números como pontos na reta numerada, de forma a explorar esta pista semiótica.

Ao final, o autor pode utilizar o que conhecemos como experimento mental, com o zero como referencial, e iniciar o estudo dos números localizados numa reta numerada. Com isto, poderão ser exploradas a soma e subtração de números através da comensurabilidade.

Tornando aos números inteiros, o autor define, então, este como o conjunto de números  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , onde as posições dos números variam de acordo com o sinal que os acompanha, trazendo, neste momento, mais uma menção a algo discutido na pista semiótica de números reais como totalidade dos números (através da terceira extensão de números abordada por Maurer). Uma observação sobre esta forma de definir o conjunto dos inteiros é que, em momento algum o autor faz menção ao conjunto dos números naturais como subconjunto próprio dos inteiros, onde  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ , logo, o autor poderia também explorar a pista semiótica dos números reais como a união dos racionais e irracionais, aqui, inicialmente e ir desdobrando isso ao longo do capítulo.

A partir do que ele define como números inteiros, o autor diz que a partir do surgimento destes foi possível efetuar a subtração onde o minuendo é menor que o subtraendo. O autor poderia explorar as equações que são possibilitadas de serem

resolvidas graças ao surgimento dos inteiros, e poderia ainda explorar a propriedade de módulo, onde se discute a distância através do estudo dos números relativos e absolutos ao ponto referencial zero. logo, podendo retornar para resolver problemas de subtração como o  $3 - 7$  que ele diz erroneamente serem impossíveis de resolver.

Sobre não abordar a ideia de distância, justamente por não trabalhar com números inteiros na reta numérica, existe uma perda de conceito que pode ser trabalhado através de outras pistas semióticas como em relação às propriedades de módulo que são vistas na pista de números reais como corpo ordenado completo.

A partir deste ponto no livro, o autor passar a afirmar que nem os números inteiros são suficientes para operar determinadas divisões. O que chama atenção é que, mesmo com essa afirmação, o autor não busca explorar ou introduzir a ideia de que estas divisões podem ser feitas através de números ainda desconhecidos. Há uma quebra de continuidade entre os conjuntos que os faz parecer sempre dissociados, quando, na realidade, estes pertencem exatamente ao mesmo conjunto, que é, por ora, dos racionais.

A formalização do que são números racionais se dá da seguinte maneira:

1,25                      0,777...                      -13                      - 0,75

Como ele associa que os números racionais são aqueles que podem ser escritos de forma de fração  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  é inteiro e  $b$  um inteiro não nulo, ele traz alguns exemplos como -13, 3, -8 que podem ser escritos como  $\frac{-13}{1}$ ,  $\frac{3}{1}$  e  $\frac{-8}{1}$ , respectivamente. Intuitivamente, o aluno percebe que qualquer número natural ou inteiro é também racional. Observe a imagem da figura 31:

Figura 31 – Tabela de classificação de números

	Número natural	Número inteiro	Número racional
3	X	X	X
-8		X	X
$\frac{1}{3}$			X
-0,3			X

Fonte: (BIANCHINI, 2018, p. 15)

A primeira ideia de localização de números na reta numerada aparece no livro didático somente após a introdução dos números racionais. Esta pista semiótica é utilizada de maneira simplória, cremos que o autor poderia começar a utilizar a noção de intervalos e cortes, dado que entre dois números inteiros  $a$ ,  $b$ , existe um  $c$  de forma que  $a < c < b$ , no intuito de obter novas descobertas sobre os números reais através destas duas pistas semióticas (Propriedades de ordem e intervalo num Corpo Ordenado e Cortes de Dedekind).

Figura 32 – Reta numerada com números racionais



Fonte: (BIANCHINI, 2018, p. 15)

As formas de representar os números racionais são bem exploradas. Inicialmente, o autor apresenta um quadro onde estão lado a lado o número racional e suas formas de representação, como vemos na figura 33:

Figura 33 – As representações de números racionais

Número racional	Algumas representações	
-2	$-\frac{18}{9}$	-2,0
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}$	0,25
$\frac{4}{11}$	$\frac{8}{22}$	0,3636...
-5,3	$-\frac{53}{10}$	-5,300
$\frac{32}{15}$	$2\frac{2}{15}$	2,1333...
6	$\frac{12}{2}$	6,000

Fonte: (BIANCHINI, 2018, p. 16)

No quadro da figura 33, dois números chamam atenção por conta da pista semiótica que pode ser explorada com eles, que são o -2 e o 6. O autor os representa

da seguinte forma:  $-2 = \frac{-18}{9} = -2,0$  e  $6 = \frac{12}{2} = 6,000$ . Estes estão definidos aqui como decimais finitos, mas podem ser explorados como decimais infinitos pelo leitor. Para tanto, seria interessante se o autor explorasse esta pista através de questionamentos e exercícios. Há, assim como em outros livros, o desenvolvimento dos números racionais para frações iniciando em frações decimais, logo após explicitando que as frações não decimais têm como representação a dízima periódica, trazendo exemplos de dízimas periódicas simples e compostas. Esta é a primeira ideia de decimais infinitos explorada, onde o autor diz que o período se repete “pra sempre” (BIANCHINI, 2018).

Os exercícios exploram a ideia de dízima periódica, a mudança de representação de fração para números decimais e também operações entre estes números. A representação de números decimais em relação a sua conversão para frações é bem trabalhada. O autor trata as frações geratrizes através de equações, o que é usualmente apresentado ao aluno no ensino da conversão de decimais para frações.

Até então, entendemos que o autor tem como objetivo apresentar as características dos conjuntos e de seus elementos, sem se aprofundar sobre as propriedades que podem ser desenvolvidas em relação aos números até então racionais. A primeira propriedade abordada, além das operações básicas, é a de potenciação, através de quadrados perfeitos, onde afirma-se que “a) 4 é quadrado perfeito pois  $4 = 2^2$ . b) 81 é quadrado perfeito pois  $81 = 9^2$ . O número 32 não é quadrado perfeito, pois ele não é quadrado de nenhum número natural” (BIANCHINI, 2018, p. 24).

No desenvolvimento deste subcapítulo, há a primeira evidência de intervalos utilizada no livro quando ele diz: “Observe que 32 está entre dois quadrados perfeitos:  $25 < 32 < 36$ , em que  $25 = 5^2$ ,  $36 = 6^2$ , e entre 5 e 6 não há nenhum número natural” (BIANCHINI, 2018, p. 24). Logo, existe um número  $c^2 = 32$ , onde  $5^2 < c^2 < 6^2$ , onde  $c$  não é um número natural. A partir desta constatação, são abertas outras possibilidades de estudo de raízes e quadrados que não são considerados perfeitos, e vem a introdução da ideia de raiz quadrada de números racionais não negativos.

Uma observação em relação aos racionais é o tratamento de informações que poderia ser discutida ainda neste capítulo. No capítulo 2, onde as operações com números reais são trabalhadas, o autor utiliza para contextualizar potenciação o

Sistema Internacional de Unidades, bem como as potências das medidas astronômicas, subatômicas e informáticas. Esta contextualização poderia, neste momento, fazer conexão com a pista semiótica na qual Courant e Robbins discutem que um número  $f = z, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = z + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = z + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \dots + a_n \cdot 10^{-n}$ .

Retornando a discussão sobre raízes quadradas de números racionais, o autor se limita em exemplos que são inteiros positivos, frações decimais e números decimais finitos. Estes, independentes de sua forma/representação, também são quadrados perfeitos. Os exercícios também convergem nesse sentido e a ideia de que um número  $c$  pode ser resultado da multiplicação de dois números quaisquer  $a$  e  $b \in \mathbb{R}^+$  não é sequer mencionada, mesmo sabendo que o aluno já aprendeu esta propriedade nos anos anteriores. Não é um erro de conceito, mas uma supressão de informação que é mencionada no capítulo posterior.

A ideia de números que não são quadrados perfeitos, e também não possuem raízes racionais não exatas começa a ser introduzida a partir das aproximações de raízes quadradas, onde o livro mostra que “o número 31 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 25 e 36” (BIANCHINI, 2018, p. 29). De fato,  $25 < 31 < 36$ , portanto, as raízes destes números serão  $\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$ , e a raiz de 31 está compreendida entre as raízes de 25 e 36, e como  $\sqrt{25} = 5$  e  $\sqrt{36} = 6$ , então,  $5 < \sqrt{31} < 6$ .

Logo, 5 é a raiz quadrada aproximada de 31 por falta, a menos de uma unidade e 6 é a raiz quadrada aproximada de 31 por excesso, a menos de uma unidade. Esta ideia é apresentada na pista semiótica de totalidade de decimais infinitos através de um número clássico utilizado para introduzir números irracionais, o  $\sqrt{2}$ . E ela também é apresentada no livro para desenvolver esta ideia de aproximação de uma raiz quadrada. O desenvolvimento é basicamente o mesmo feito no subcapítulo 5.2. Além disso, o autor apresenta o número  $\sqrt{3}$ , e também faz sua aproximação decimal. É a partir deste momento que percebemos a maior utilização de pistas semióticas, o que pode tornar o estudo dos números mais completo. A partir deste trecho, percebemos uma utilização da ideia de Corpo Ordenado, de Decimais Infinitos, Pontos na reta e Cortes.

Além disso, o autor deixa como sugestão ao leitor a análise de intervalos cada vez menores dentre os números racionais. Esta análise tem como objetivo fazer com

que quem explora – docente ou discente – perceba as raízes de números que não são quadrados perfeitos. A ideia é que se note que, quando aumentam suas casas decimais, estes números estão cada vez menores, e cada vez menores, de forma que estes só poderiam ser decimais infinitos e, além disso, dízimas não periódicas. Portanto, deduzir que estes não podem ser escritos em forma de fração, e então não poderiam ser considerados racionais, logo, seriam números não racionais, introduzindo a ideia de números irracionais.

A respeito dos números reais, o autor os define como “a união do conjunto dos números racionais (no qual estão contidos o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros) com o conjunto dos números irracionais forma um novo conjunto chamado conjunto dos números reais, representado por  $\mathbb{R}$ ” (BIANCHINI, 2018, p. 33).

Poderia ser feita, através de experimentos, a exploração destas definições a fim de levar os alunos a entenderem a ideia de densidade da reta, união de conjuntos racionais e irracionais, ou seja, mais pistas semióticas. Elas chegam a ser apresentadas no livro didático, mas não são exploradas com profundidade.

O tópico logo após a definição de números reais e reta real no material didático é intitulado “Localização exata de alguns números irracionais na reta real”. Neste momento, fica um questionamento: A localização destes números é de fato exata ou uma aproximação? Por questões estéticas e de representação na prática, o ponto irracional na reta está localizado em um lugar geométrico que nos parece comensurável, mas ele não é de fato, exato. O autor mesmo afirma anteriormente que num número como a raiz de 2 na reta, sua localização aproximada é entre 1,4 e 1,5. Logo, utilizar esta ideia de localização exata pode gerar uma confusão conceitual e também de significado.

### 7.3. Resultado das Análises

**Tabela 1:** Pista Semiótica – Conceituação de números reais nos livros didáticos

LIVRO/PISTA	Corpo ordenado completo	Totalidade de número	Totalidade de números	Cortes de Dedekind	Reunião dos conjuntos

		decimais infinitos			racionais e irracionais.
Livro A					x
Livro B					x
Livro C					x
Livro D					x

Fonte: (O AUTOR, 2021)

**Tabela 2:** Pista Semiótica 2 – Números Irracionais

LIVRO/PISTA	Número que não pode ser escrito na forma de fração.	Decimais infinitos e não periódicos.	Representação de segmento incomensurável com a unidade.	Como aproximação de frações decimais.
Livro A	x			x
Livro B	x	x		x
Livro C	x	x		x
Livro D	x	x	x	x

Fonte: (O AUTOR, 2021)

**Tabela 3:** Pista Semiótica 3 – Contínuo numérico

Livros\pistas	Números reais como pontos da reta.	Completeza dos números reais	Densidade
Livro A	x	x	
Livro B	x	x	x
Livro C	x	x	

Livro D	x	x	x
---------	---	---	---

Fonte: (O AUTOR, 2021)

Os livros analisados, embora tenham estruturas diferentes, buscam trabalhar o máximo de conceitos e propriedades que existem na construção da ideia de números reais. Todos os livros utilizam principalmente o conceito de união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais como a principal forma de se definir o que é o conjunto dos números reais.

Nas representações, o que chama atenção é o fato de somente um livro trazer diagramas para mostrar a ideia de subconjuntos e união dos conjuntos  $Q$  e  $R - Q$ , algo que era amplamente utilizado nos livros didáticos e gerava discussões sobre sua forma errônea de representar os números reais quando visto na perspectiva de conjuntos. A estrutura deste diagrama apresentado no livro C, talvez seja a forma mais correta de representação imagética que tenhamos hoje para a ideia de  $R = Q \cup (R - Q)$ .

Os livros A, B e C fazem resumos sobre os conjuntos naturais, inteiros e racionais, enquanto o livro D traz todo um estudo sobre este conjunto. Entendemos que isso se dá por estes conjuntos já terem tido sua estrutura estudada de forma mais minuciosa nos anos anteriores do Ensino Fundamental Anos Finais, no entanto, julgamos como importante a retomada mais detalhada no livro D, para reafirmar a importância destes conjuntos numéricos tanto quanto do conjunto dos irracionais que, inclusive, é bastante explorado por todos os livros.

Tratando-se dos números racionais, todos os livros desenvolvem sobre dízimas periódicas e suas frações geratrizes. Consideramos este um assunto de suma importância para mostrar na prática o que são as dízimas periódicas e que suas representações decimais podem ser escritas na forma de frações. Outro fator importante é a ideia de que os números irracionais não podem ser decimais exatos ou dízimas periódicas, que é apresentado nos livros B, C e D.

Quanto ao contexto geométrico e à localização dos números na reta real, os livros tratam sobre a correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos na reta, em especial o livro D, que traz a ideia de infinitos racionais na reta para complementar este conceito, e, além disso, a ideia de que entre estes números racionais, existe uma infinidade de números irracionais que completam a reta

numérica. Além disso, este livro traz a localização de números irracionais entre os números racionais, utilizando-se da demonstração dos números que, aproveita de uma forma mais simples o contínuo numérico através da densidade, pondo à vista a necessidade de números não-rationais para justificar os pontos da reta que não pertencem ao conjunto  $Q$ , construindo geometricamente a diagonal de quadrados e retângulos não coincidindo com nenhum ponto irracional.

Todos os livros buscam desenvolver melhor a conceituação sobre números irracionais, ao passo que livros dos PNL D anteriores basicamente resumiam-se a tratar de números clássicos, como a  $\sqrt{2}$  e  $\pi$  para generalização do conjunto. Percebemos um cuidado maior para o tratamento deste conjunto, embora ainda se utilize estes exemplos, outros números incomensuráveis estiveram presentes no desenvolvimento da ideia de irracionalidade e nas atividades. O livro D, por exemplo, trouxe sentido para a irracionalidade destes números quando traz a ideia de segmento incomensurável que é discutida no contexto histórico através dos Pitagóricos.

## 8. CONSIDERAÇÕES

O conhecimento matemático é, inicialmente, o fruto de buscas para solucionar problemas e contextos diversos do cotidiano, tanto no passado quanto atualmente. No entanto, o conhecimento matemático também é fruto da abstração, da observação e da investigação racional e lógica sobre as propriedades e relações entre os números, as formas, as estruturas e os padrões. A matemática se desenvolveu ao longo de milhares de anos, desde as civilizações antigas até os dias de hoje, e é fundamental para compreender e modelar fenômenos naturais e sociais. A formalização do conceito de números reais advém do mesmo processo.

Estes, inclusive, fazem parte de um conteúdo extremamente importante para a formalização de outros conceitos, seja na vida real ou dentro da matemática. E embora saibamos de sua importância, o estudo de números reais ainda não é uma questão bem-resolvida no ensino. Muitas pesquisas ainda levantam problemas em relação aos números reais, à continuidade, completeza etc., quando trata de seu ensino e aprendizagem (isso acontece no ensino fundamental, médio e superior). Existem muitos problemas na formalização e entendimento deste objeto.

Esta pesquisa buscou em todo momento verificar como são tratados os números reais dentro dos livros didáticos de matemática da Educação Básica, para compreender como são aplicados os conceitos e propriedades deste objeto e as metodologias que podem ser abordadas neste processo. Buscou-se também construir um conjunto de tarefas, por meio de experimentos mentais, que visam a explorar as pistas semióticas que são pouco trabalhadas na discussão sobre o objeto números reais.

Analisamos cada livro por meio de uma perspectiva semiótica, por entendermos que, na conceituação deste objeto, podem ser explorados diversos signos e significados, e não somente uma definição ou conceituação que se mostre particularizada a ponto de tornar a compreensão da ideia de números reais parcial e, por vezes, até titubeante.

O que percebemos é que, em relação aos conjuntos, muitas vezes parece que ocorre um salto em relação à continuidade e completude dos números reais, pois a formalização a partir do conjunto dos números racionais para os reais não costuma

explorar as possibilidades de construção do novo conjunto que está em  $\mathbb{R}$  e não está em  $\mathbb{Q}$ , no caso, o  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  que conhecemos como irracionais.

É justamente neste “algo que falta”, este ponto que pode diminuir dúvidas e obstáculos no aprendizado dos números reais que buscamos desenvolver os Experimentos Mentais como metodologia para explorar as pistas semióticas e, através dela, mostrar que a síntese do campo dos reais não se concebe por uma particularidade e sim de um grande grupo de conceitos que se envolvem, trabalham juntos e que são complementares entre si. Este estudo das pistas semióticas relacionadas ao campo real é o que nos permite refletir sobre a forma lógica na construção deste conceito, e que norteia o processo de desenvolvimento das atividades orientadas no produto educacional; que visam compor uma proposta pedagógica que busca diminuir dúvidas e questionamentos em relação à ideia de números reais tanto para o aluno, quanto para o professor.

## 9. REFERÊNCIAS

ALVAREZ, G. B. **O que é o infinito?** Volta Redonda: EEIMVR/UFF, 2012. 42 slides, color. Disponível em: [https://www.professores.uff.br/gbenitez/wp-content/uploads/sites/98/2017/08/Infinito\\_UFF\\_2012.pdf](https://www.professores.uff.br/gbenitez/wp-content/uploads/sites/98/2017/08/Infinito_UFF_2012.pdf). Acesso em: 10 fev. 2023.

ARMELLA, L. E. M.; WALDEGG, G. Variación y representación: del número al continuo. **Educación Matemática**, Ciudad de Mexico, v. 7, n 1, p 12-28. Disponível em <http://funes.uniandes.edu.co/9773/1/Variacion1995Moreno.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2023.

ARISTÓTELES. **Física**. Texto revisado y traduzido por J. L. Calvo Martinez. Madrid:Consejo superior de investigaciones científicas, 1996 [350 a.C.] (Colección hispánica de autores griegos e latinos).

ARRUDA, E. J. de; PAULA, J. B.; DARSIE, M. M. P.. O pensamento Otteano: O fenômeno da complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do conhecimento matemático e sobre os seus fundamentos. **Latin american journal of science education**, Ciudad de Mexico, v. 2, n. 1, p.1-16, maio 2015. Semestral. Disponível em: [www.lajse.org](http://www.lajse.org). Acesso em: 11 mar. 2020.

AZEVEDO, D. P. **Uma análise de livros didáticos de Matemática da coleção EJA – Mundo do Trabalho**. 2017. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017. Disponível em [http://www2.fc.unesp.br/ghoem/trabalhos/79\\_3\\_Danilo\\_Pires\\_de\\_Azevedo.pdf](http://www2.fc.unesp.br/ghoem/trabalhos/79_3_Danilo_Pires_de_Azevedo.pdf). Acesso em: 12 fev. 2021

BARROS, L. G. X., FRANÇA, S. M. (2018). A complementaridade entre criação e descoberta na construção do conhecimento matemático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. X, p 40-46, 2018. Disponível em: <https://fatecpg.edu.br/revista/index.php/ps/article/view/53>. Acesso em 14 abr. 2021.

BECKER, O. **O pensamento matemático**. São Paulo: Herder, 1965.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini: 9º ano: ensino fundamental: anos finais / Edwaldo Bianchini – 9. Ed. – São Paulo: Moderna, 2018.**

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática: por quê? – **Bolema**, Rio Claro – SP, 2009, p.229 - 240. Disponível em <http://www.mariabicudo.com.br/resources/ARTIGOS/Filosofia%20da%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Matem%C3%A1tica%20por%20qu%C3%AA.pdf>. Acesso em: 28 out. 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher – Editora da Universidade de São Paulo, 1984. Tradução: Elza F. Gomide.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **O Papel do Livro Didático no Processo de Ensino Aprendizagem: uma introdução do conceito de função**. 2013. 86 f. Monografia (Especialização) - Curso de Educação Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013. Disponível

em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/2079/1/PDF%20-%20Jefferson%20Dagmar%20Pessoa%20Brand%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 20 maio 2022.

BRASIL a. **Base Nacional Comum Curricular** – 2018, p. 567. Disponível em [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_sit e.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit e.pdf). Acesso em 30 out. 2020.

BRASIL b. **Guia do Plano Nacional do Livro Didático 2020**. Disponível em <https://www.fnnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/13410-guia-pnld-2020>. Acesso em 11 mai. 2022.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématique** in Rechercher em Didatiques des Mathématiques, 4/2, 1983.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, 1951.

CARNEIRO, A. **Zenão de Eleia**: o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. 2020. Disponível em: <https://www.netmundi.org/filosofia/2020/zenao-de-eleia-o-paradoxo-de-aquiles-e-a-tartaruga/>. Acesso em: 11 fev. 2023.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

COSTA, M. H. C. *et al.* O Papel do Livro Didático no Processo Educativo. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 4., 2017, Campina Grande. **Anais [...]** Campina Grande: Realize, 2017. p. 1-12. Disponível em: [http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2017/TRABALHO\\_EV073\\_MD1\\_SA2\\_ID7225\\_26092017152510.pdf](http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2017/TRABALHO_EV073_MD1_SA2_ID7225_26092017152510.pdf). Acesso em: 12 jun. 2021.

COSTA, M.S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71 - 80, 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/312/285>. Acessado em 12 fev. 2022.

CRUZ, W. J. **Os números reais**: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. 2011. 121 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3470>. Acesso em: 29 abr. 2020.

CRUZ, W. J. **Corpo ordenado completo**: um convite ao professor de matemática/ Willian José da Cruz (Lukinha) – Barbacena MG: Ed. do Autor, 2012. 76p.

CRUZ, W. J. O Que É Um Texto De Matemática No Livro Didático? reflexões teóricas. **Coinspiração** -: Revista de professores que Ensinam Matemática, Barra do Bugres, v. 2, n. 1, p. 113-126, 30 jun. 2019. Semestral. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/64/57>. Acesso em: 03 maio 2022.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais na Educação Matemática**: uma analogia com provas matemáticas formais / Willian José da Cruz. – 1. ed. – Curitiba: Appris, 2018. 211 p.: 23cm (Ensino de Ciências)

CRUZ, W. J. O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina, v. 16, p. 1-26, 28 maio 2021. Universidade Federal de Santa Catarina. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e79205>.

DEDEKIND, R. **Essays on the theory of numbers**: Continuity and Irrational Numbers, The Nature and Meaning of Numbers. Dover Publications. 1964. New York, USA.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** Campinas: Ed. da Unicamp, 1997.

FERREIRA, I. L. **A Distinção Analítico - Sintético**: um estudo comparativo entre Frege e Kant. 2007. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Estudos Pós Graduação em Filosofia, Filosofia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11738>. Acesso em: 16 maio 2020.

FONSECA, R. F. **A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway**. 2010. 180 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

GALASTRI, L. **História Bizarra da Matemática** / Luciana Galastri. São Paulo: Planeta do Brasil, 2020. 256 p.

GHIZZI, E. B. **Introdução à semiótica filosófica de Charles Peirce**: texto de apoio didático. Campo Grande, UFMS: 2009. (reprografia)

GIMENES, Luciene Parron *et al.* **Cálculo Diferencial e Integral**: um kit de sobrevivência. um KIT de Sobrevivência. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit>. Acesso em: 10 ago. 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**: 9° ano: ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

GRAÇA, J. S. D.; MAYNARD, D. C. S. Programa Nacional do Livro Didático: breve contexto histórico. In: ENCONTRO INTERNACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E FÓRUM PERMANENTE DE INOVAÇÃO EDUCACIONAL, 9., 2016, Aracaju. **Anais 2016**. Aracaju, Se: Unit, 2016. v. 9, p. 1-10. Disponível em: <https://eventos.set.edu.br/enfope/index>. Acesso em: 01 fev. 2021.

HILBERT, D. Sobre o Infinito. **Mathematische Annalen**. Berlim, p. 161-190. 24 jun. 1925. Disponível em: <http://www.mat036.ufba.br/hilbert2.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2023. Tradução: Marcelo Papini.

IEZZI, G. **Matemática e realidade** 9° ano / Gelson Iezzi, Antônio Machado, Osvaldo Dolce. – 9. ed. – São Paulo: Atual Editora, 2018.

PESSOA JR., O. **Filosofia da física**, FFLCH/USP, 2012. Textos e programa do curso disponíveis em: <<http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-12.htm>>. Acesso em: 13 jan. de 2017.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. 694 p. Tradução: Manuela Pinto dos Santos.

LAKATOS, I. (1974). Science and pseudoscience. In Godfrey Vesey (Ed.), **Philosophy in the Open** (pp. 91-196). Open University Press. Disponível em <http://www.inf.fu-berlin.de/lehre/pmo/eng/Lakatos-Science.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2023.

LIMA, E.L. **Análise Real**. vol. 1, 8a. edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, EPU, 1986.

MACÊDO, J. *et al.* Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, [S.L.], v. 3, n. 7, p. 68-86, 2 jan. 2019. Universidade Estadual de Montes Claros (UNIIMONTES). <http://dx.doi.org/10.24116/emd.v3n7a04>.

MAURER, W. A. **Curso de Cálculo Diferencial e Integral: fundamentos geométricos e físicos**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1977. 379 p.

MELO, A. R. A. *et al.* **Análise Crítica do Livro Didático "Matemática Contexto e Aplicação"**: 3ª série do ensino médio. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2014. (PROJETO UFCG NA EDUCAÇÃO BÁSICA: "OLHARES – DIÁLOGOS – INTERAÇÕES"). SUBPROJETO PIBID/MATEMÁTICA – CAMPINA GRANDE. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/pibid/wp-content/uploads/sites/4/2016/03/An%C3%A1lise-Cr%C3%ADtica-Matem%C3%A1tica-Contexto-e-Aplica%C3%A7%C3%B5es-3%C2%BA-ano.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2021.

MIRANDA, W. S. **Erros e Obstáculos: os conteúdos matemáticos do ensino fundamental no processo de avaliação**. 2007. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ciências e Matemática, UFPA, Belém, 2007. Disponível em: [http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3104/1/Dissertacao\\_ErrosObstaculosConteudos.pdf](http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3104/1/Dissertacao_ErrosObstaculosConteudos.pdf). Acesso em: 03 ago. 2021

NETO, J. E. **História da matemática** / João Eichenberger Neto. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. 224p.

NÖTH, W. Panorama da Semiótica: de Platão a Peirce. Winfried Nöth. – São Paulo: Annablume, 1995 – (Coleção E; 3).

NOVAES, G. P. **Introdução à teoria dos Conjuntos**. 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018. 460p.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação

em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4542>. Acesso em 14 abr. 2021.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo**: uma introdução à filosofia e à didática da matemática / Michael Otte; tradução Raul Fernando Neto – São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993. – (Encyclopaideia).

OTTE, M. **A realidade das ideias**: uma perspectiva epistemológica para educação matemática / Michael Otte ; organização e tradução Alexandre Silva Abido... [et al], participação especial na tradução André Jefferson Marinho dos Santos ... [et al]. – Cuiabá: EduFMT, 2012. 190 p.: il.

PAULA, J. B. **O termo ‘axioma’ no tempo, considerando a relação entre a filosofia e a matemática alicerçada no pensamento sobre complementaridade ‘otteano’**. 2014. 539 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação, Instituto de Educação, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: [https://ri.ufmt.br/bitstream/1/3320/1/TESE\\_2014\\_Jacqueline%20Borges%20de%20P aula.pdf](https://ri.ufmt.br/bitstream/1/3320/1/TESE_2014_Jacqueline%20Borges%20de%20P aula.pdf). Acesso em: 08 set. 2022.

PAVANELLO, R. M.. Matemática e educação matemática. Boletim da SBEM – SP, ano 7, n. 1, p.4-14, out/1992- mar/1993. Disponível em: <https://www.sbempaulista.org.br/boletim>. Acesso em: 20 mar 2023.

PEIRCE, C. S. The Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Harvard University Press, Cambridge, 1958. Vol. 1–8.

PEIRCE, C. S. **The New Elements of Mathematics**. 1. Humanities Press Inc. Atlantics Highlands, N. J. 07716, 1976. 258p.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. Ed. São Paulo: Perspectiva, 2005. 348p. (Coleção Estudos). Tradução: José Teixeira Coelho Neto.

PEREIRA, A. C. C. Uma Análise da Abordagem de Alguns Conceitos Matemáticos nos Livros Didáticos de Matemática para o Segundo Segmento do Ensino Fundamental nos últimos 30 anos. In: **Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2004, São Paulo. MATEMÁTICA NA ESCOLA: CONTEÚDOS E CONTEXTOS, 2004.

PEREIRA, A.C.C.; PEREIRA, D.E.; MELO, E. A. P. Livros Didáticos de Matemática; uma discussão sobre seu uso em alguns segmentos educacionais. In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007, Belo Horizonte: UFMG, 2007. V. 01. P. 1-8.

PESSOA JUNIOR, O. **Filosofia da Física**. São Paulo: USP, 2020. 94 p. Disponível em: <https://opessoa.fflch.usp.br/FiFi-20>. Acesso em: 26 fev. 2023.

PIRES, J. B. Vida e obra de Charles Sanders Peirce e as bases para o estudo da linguagem fotográfica. **Discursos Fotográficos**, Londrina, v. 4, n. 4, p. 145-160, 15 dez. 2008. Universidade Estadual de Londrina. <http://dx.doi.org/10.5433/1984-7939.2008v4n4p145>.

ROMANO, G. O.; SHIMIGUEL, J. Uma Revisão Bibliográfica e Pesquisa SOBRE Livros Didáticos de Matemática, Tecnologia e Ensino de Geometria no Ensino

Fundamental e Médio. **Revista de Ensino de Ciência e Matemática**, São Paulo, SP. v. 10, n. 4. p. 212-226, julho 2019. Trimestral. Edição Especial. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/indes.php/rencima/article/view/2408/1156>. Acesso em: 16 mar. 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar. 2012.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos da História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 301 p.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. São Paulo: Editora Brasiliense, 1983.

SANTAELLA, L. **A Teoria Geral dos Signos**: semiose e autogeração. São Paulo: Ática, [1995]. 199 p.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23 ed. Revista Atual: SP, 2007.

SILVA, E. T. LIVRO DIDÁTICO: do ritual de passagem à ultrapassagem. **Em Aberto**: Livro didático e qualidade de ensino, Brasília, v. 16, n. 69, p. 11-15, mar. 1996. Trimestral. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/issue/view/210>. Acesso em: 12 abr. 2021.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, R. S. **Um estudo sobre o movimento lógico-histórico do conceito de continuidade**. 2019. 219 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Departamento de Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/12220/Tese%20Doutorado%20-%20Rafael%20Siqueira%20Silva%20-%20Vers%C3%A3o%20Biblioteca.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2023.

SILVA, J. T.; RESENDE, M. R. Didático e Apropriação de Conceitos Algébricos: uma análise na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Perspectiva em Educação Matemática**, Pioneiros, Ms, v. 9, n. 20, p. 388-408, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2147/3102>. Acesso em: 02 mar. 2021.

SOARES, Jandson Bernardo; SOUZA, Wendell de Oliveira. Memorial do PNLD: elaboração, natureza e funcionalidade. In: SEMANA DE HUMANIDADES, 8., 2011, Natal. **Anais [...] .Natal**: UFRN, 2011. p. 1-7. Disponível em: <http://www.cchla.ufrn.br/shXIX/anais/GT23/ARTIGO%20-.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2021.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade & tecnologia**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais / Joamir Roberto de Souza. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2018.

STRATHEN, Paul. **Kant (1724 - 1804)**: em 90 minutos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997. 43 p. Tradução: Maria Helena Geordane.

VALENTE, W. R. **Oswaldo Sangiorgi**: um professor moderno. São Paulo: Annablume, 2008.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Ed. 3. Curitiba: UFPR, 2009.

XAVIER, V. H. N.. **Construção do corpo dos números reais via cortes de Dedekind**. 2017. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Centro de Ciências e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/12804/1/Arquivototal.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2022.

## APÊNDICE A – Corpo Ordenado Completo

O conjunto  $R$  cumpre, para seus elementos, os axiomas de adição **(A)** e multiplicação **(M)**, descritos abaixo:

**A1.** Associatividade: Quaisquer que sejam  $a, b, c \in R$ , tem-se

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

**A2.** Comutatividade: Quaisquer que sejam  $a, b \in R$ , tem-se

$$a + b = b + a.$$

**A3.** Elemento neutro: Existe  $0 \in R$  tal que

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

qualquer que seja  $a \in R$ .

**A4.** Simétrico: Todo elemento  $a \in R$  possui um simétrico em  $R$ , denotado por  $-a$ , tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

**M1.** Associatividade: Quaisquer que sejam  $a, b, c \in R$ , tem-se

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

**M2.** Comutatividade: Quaisquer que sejam  $a, b \in R$ , tem-se

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

**M3.** Elemento neutro: Existe  $1 \in R$  tal que  $1 \neq 0$  e  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , qualquer que seja  $a \in R$ .

**M4.** Inverso multiplicativo: Todo elemento  $a \neq 0$  em  $R$  possui um inverso multiplicativo em  $R$ , denotado por  $a^{-1}$  ou  $\frac{1}{a}$ , tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Além do axioma da distributividade, que relaciona as duas operações:

**D1.** - Distributividade: Quaisquer que sejam  $a, b, c \in R$ , tem-se

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ e } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Logo, determinamos que o conjunto  $R$  é um **corpo**<sup>21</sup>, pois ele cumpre a seguinte proposição: *“Um conjunto  $K$  munido de duas operações satisfazendo aos nove axiomas anteriores é denominado corpo”*.

Através dos axiomas **A4** e **M4**, é possível definir duas novas operações dos números reais: a subtração e a divisão.

A subtração determina que, se  $a, b$  são números reais, então a diferença entre esses números, denotada como  $a - b$  é definida por  $a - b = a + (-b)$ . Logo, a operação que associa a cada par de elementos  $a, b \in R$ , sua diferença  $a - b \in R$  é conhecida como **subtração**.

A divisão determina que, se  $a$  e  $b$  são números reais e  $b \neq 0$ , o quociente de  $a$  por  $b$ , denotado por  $\frac{a}{b}$ , é definido por  $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$ . Logo, a operação que associa a cada par de elementos  $a, b \in R$ , com  $b \neq 0$ , o quociente  $\frac{a}{b} \in R$  chama-se **divisão**.

Algumas propriedades podem ser deduzidas através dos axiomas que definem um corpo, vejamos abaixo:

**Propriedade 1** – O elemento neutro na operação de adição em  $R$  é único.

Suponhamos que existam dois elementos neutros da adição em  $R$ , sendo eles  $0$  e  $0'$ . Como  $0$  é neutro e  $0' \in R \Rightarrow 0 + 0' = 0'$ . Agora, como  $0'$  é neutro e  $0 \in R \Rightarrow 0 + 0' = 0$ . Logo, temos que  $0' = 0$ . Portanto, podemos afirmar que existe um único elemento neutro da adição em  $R$ .

**Propriedade 2** – O elemento simétrico na operação de adição em  $R$  é único.

Suponhamos que existam dois elementos em  $R$ , sendo eles  $-a$  e  $a'$ , simétricos ao  $a \in R$ . Então,  $a' = a' + 0 = a' + [a + (-a)] = (a' + a) + (-a) = 0 + (-a) = -a$ . Portanto, o elemento simétrico de  $a \in R$  é único.

---

<sup>21</sup> Além disso, outros conjuntos podem ser definidos como corpos, visto que cumprem os nove axiomas das operações de soma, multiplicação e distributividade, sendo eles o conjunto dos números racionais ( $Q$ ) e complexos ( $C$ ).

**Propriedade 3** – O elemento neutro da multiplicação em  $R$  é único.

Se fossem dois, como por exemplo,  $1$  e  $1'$  elementos neutros da multiplicação em  $R$ , teríamos que: Sendo o  $1$  neutro e  $1' \in R$ , então  $1 \cdot 1' = 1'$  e, sendo o  $1'$  neutro e  $1 \in R$ , então  $1 \cdot 1' = 1$ . Logo,  $1' = 1$ .

**Propriedade 4** – O elemento inverso em  $R$  é único.

Suponhamos que existam dois elementos inversos de  $a \in R, a \neq 0$ , sendo eles  $a^{-1}$  e  $a'$ . Então:  $a' = a' \cdot 1 = a'$ .  $a' = a' \cdot 1 = a' \cdot (a \cdot a^{-1}) = (a' \cdot a) \cdot a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}$ . Portanto, o elemento inverso de  $a \in R, a \neq 0$ , é único.

Além destas proposições, há algumas noções que se fazem necessárias para entender o processo de formalização do corpo real. Abaixo, segue um trecho interessante sobre este assunto, no qual Cruz disserta:

Numa visão de sala de aula, muitos questionamentos podem surgir na aplicação e na validade de algumas operações, por exemplo, quanto é  $0 \cdot 2$ ? Algumas confusões podem levar os estudantes a responderem  $2$ , trocando o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação, o professor, por sua vez, deve buscar alternativas que possam responder a esses questionamentos, mas, para isso, acredita-se ser necessário conhecer o porquê que todo número multiplicado por zero é igual a zero (CRUZ, 2012, p. 18-19).

De fato, existe um **teorema** onde: dado um  $a \in R$  então  $a \cdot 0 = 0$ . Temos:  
 $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] = a \cdot 0 + a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] \Rightarrow$   
 $0 = a \cdot 0$ . Logo,  $a \cdot 0 = 0$ .

Também podemos determinar que, dados  $a, b \in R$  tais que  $a \cdot b = 0$  então  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Se  $a = 0$ , não temos nada a mostrar. Suponhamos, então,  $a \neq 0$ . Assim existe  $a^{-1} \in R$  e obtemos:  $a \cdot b = 0 \Rightarrow a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$ .

Além disso, ressaltamos a importância dos elementos simétricos de um corpo, onde, dados  $a \in R$  então,  $-a = (-1) \cdot a$ . De fato, suponha  $(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = [(-1) + 1] \cdot a = 0 \cdot a = 0$ ; logo, o simétrico de  $a$  é  $(-1) \cdot a$ , ou seja,  $-a = (-1) \cdot a$ .

Portanto, se dados dois elementos  $a, b \in R$  tal que  $b + (-a)$ , representaremos por  $b - a$ , que definirá a operação de subtração dos números  $b$  por  $a$ , utilizando o elemento simétrico de  $a$  que pertence ao conjunto dos números reais.

Seguem abaixo duas propriedades importantes para o desenvolvimento dos elementos simétricos dentro do grupo dos números reais. A primeira, segue em relação à multiplicação de números negativos e positivos. Dados dois números  $a, b \in R$  tal que  $(-a).b + a.b = [(-a) + a].b = 0.b = 0$ ; logo  $(-a).b$  é o simétrico de  $a.b$ , isto é,  $(-a).b = -(a.b)$ .  $a.(-b) + a.b = a. [(-b) + b] = a.0 = 0$ ; logo  $a.(-b)$  é o simétrico de  $a.b$ , ou seja,  $a.(-b) = -(a.b)$ .

De fato, se multiplicarmos dois números, como por exemplo,  $-1$  e  $2$ , teremos  $(-1).2 = -(1.2) = -(2) = -2$ , sendo  $-2$  o elemento simétrico a  $2$  no conjunto dos números reais, justificado através da proposição descrita acima.

A segunda regra, é referente à multiplicação de dois números simétricos à  $a$  e  $b$ , ou seja, entre dois números negativos  $(-a).(-b) = -[a(-b)] = -[-(a.b)] = a.b$ , desde que  $a$  e  $b$  sejam positivos. Cruz diz que:

Para alcançar a liberdade nas operações, e preservar ao mesmo tempo as leis fundamentais da Aritmética, podem e devem ser provadas essas regras, apenas com base nas definições das leis comutativas, associativas e distributivas da estrutura de corpo (CRUZ, 2012, p. 21).

De fato, se multiplicarmos  $-1$  por ele mesmo, o resultado será  $1$  pois  $(-1).(-1) = -(-1) = 1$ , justificada pela proposição descrita acima.

Estas proposições servem também para justificar uma confusão que se cria quando afirmamos que a raiz quadrada de um determinado número  $a$  pode ser mais ou menos um número  $b$ , ou seja, quando dados dois números  $a, b \in R$ ,  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$ .

Se tivermos dois números  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 0$  e segue que, ou  $a + b = 0$  ou  $a - b = 0$ , logo, temos que isso acontecerá se e somente se ou o  $a = -b$  ou  $a = b$ .

Utilizamos também parte daquilo que conhecemos como o princípio da equivalência, onde temos um **teorema** que diz que: Dado um corpo  $R$ , e sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $R$ . Tem-se que  $a = b$ , se e somente se,  $a - b = 0$ .

No conjunto dos números reais, existe um subconjunto que denominamos como o conjunto dos números positivos, que satisfaz algumas condições, como: **(i)** na existência de um elemento  $a$  no conjunto dos números reais, ou este  $a$  é igual a zero, ou  $a$  é positivo, ou  $-a$  é positivo; **(ii)** a soma de dois números positivos é positiva e **(iii)** o produto de dois números positivos é positivo. Por definição, temos que este número  $a$  será negativo, se e somente se  $-a$  for positivo.

Para tanto, temos como definição também que dados dois números  $a, b$  em  $R$ , se  $b$  for maior do que  $a$ , então  $b - a$  é positivo, sendo a recíproca verdadeira. Utilizaremos  $>$  como símbolo para “maior que”. Se  $b$  for menor que  $a$ , então  $a - b$  é positivo, sendo a recíproca verdadeira. Utilizaremos  $<$  como símbolo para “menor que”. O que estamos tentando, aqui, minimamente, é estabelecer uma ideia de ordem. Esta relação se estabelece através dos símbolos  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$  e  $\leq$ , que são chamados de desigualdades (estritas e não estritas).

$\mathbb{R}$  é **Corpo Ordenado** quando está contido um subconjunto próprio  $A \subset R$  para o qual valem as seguintes condições:

(i)  $\mathbb{R}$  é fechado com relação a adição e a multiplicação, isto é, se  $a, b \in A$  então  $a + b \in A$  e  $a \cdot b \in A$ .

(ii) Dado um elemento qualquer de  $\mathbb{R}$ , então: ou  $a = 0$  ou  $a \in A$  ou  $-a \in A$ , onde  $0$  é o elemento neutro da adição.

Definimos  $\mathbb{R}$  como um corpo ordenado. Temos como propriedade que, se  $a \neq 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  então  $a^2 \in A$ . De fato, sendo  $a \neq 0$  então  $a \in A$  ou  $-a \in A$ . Daí  $a \cdot a \in A$  ou  $(-a) \cdot (-a) \in A$ . Como  $a \cdot a = (-a) \cdot (-a)$ , segue que  $a \cdot a = a^2 \in A$ .

Dado o corpo  $\mathbb{R}$ , e dois elementos  $a, b \in A$ , temos que  $-b \notin A$ . Logo,  $a + (-b)$  pode não ser um elemento de  $A$ , e, caso isto ocorra, diremos que  $a - b \notin A$ .

Esta relação de não pertinência será simbolizada por  $a < b$  ou  $b > a$ . Estamos dizendo que “ $a$  é menor que  $b$ ” ou “ $b$  é maior que  $a$ ”, quando dados  $a, b$  como elementos do corpo  $\mathbb{R}$  e  $a - b \notin A$ .

Sendo  $0$  o elemento neutro de  $R$  em relação à adição, dado um  $a \in \mathbb{R}$ , para dizermos se ele pertence ou não a  $A$ , diremos que se  $a \in A$ , então  $a > 0$ , mas se  $a \notin A$ , então  $a < 0$ . Logo, podemos dizer que  $A$  é o conjunto dos elementos positivos de  $R$ . Assim sendo, o conjunto dos elementos negativos de  $R$  será denotado como  $-A$ .

Desta forma, temos que todo  $a \in R$ , onde  $a > 0$  é positivo e, todo  $a \in R$ , tal que  $a < 0$  é negativo.

Temos, então, que o conjunto  $\mathbb{R}$  pode ser descrito como a união entre os elementos negativos, o elemento neutro e os elementos positivos em  $R$ :

$$\mathbb{R} = A \cup \{0\} \cup -A .$$

Assim teremos  $a > b$  e  $b < a$  como **relações de ordem** no conjunto  $R$ . Resumidamente, uma relação de ordem é uma relação binária que tem como objetivo captar o sentido intuitivo das relações como “maior”, “menor”, “antecessor/anterior”, “sucessor/posterior”, e esta relação deve satisfazer as propriedades de transitividade<sup>22</sup>, tricotomia<sup>23</sup>, monotonicidade<sup>24</sup> na adição e na multiplicação, onde todas estas propriedades também são válidas para a relação de ordem  $a \geq b$  em  $\mathbb{R}$  e se desenvolvem de maneira análoga à  $a \leq b$ .

Nesta relação de ordem  $a \leq b$  que pode ser observada em  $R$ , estamos indicando que ou  $a = b$  ou  $a < b$ . Isso significa que  $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in A \cup \{0\}$ . Diremos então que  $A \cup \{0\}$  é o conjunto dos elementos não negativos de  $R$ , e, como as propriedades são análogas para  $a \geq b$ , diremos também que  $-A \cup \{0\}$  é o conjunto dos elementos não positivos de  $R$ , e os chamaremos de  $R_+$  e  $R_-$ , respectivamente. Logo, podemos afirmar que

$$R = R_+ \cup R_-$$

embora  $\{R_+, R_-\}$  não seja uma partição de  $R$ , pois não são conjuntos disjuntos. Esta relação satisfaz as propriedades de transitividade, reflexividade, antissimetria<sup>25</sup> e monotonicidade da adição e da multiplicação.

Além disso, temos que todo elemento do corpo ordenado  $R$ , quando multiplicado por zero, será igual a zero. De fato, dado um  $a \in \mathbb{R}$ , onde  $a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot b - (a \cdot b) = 0$ .

Também temos que o elemento neutro da multiplicação pertence ao subconjunto dos reais positivos diferentes de zero, ou seja, é um elemento positivo.

<sup>22</sup> Se  $m < n$  e  $n < p$ , então  $m < p$ .

<sup>23</sup> Dados  $m, n \in N$ , qualquer das afirmações  $m < n, m = n, n < m$  exclui as outras duas.

<sup>24</sup> Se  $m < n$ , então  $m + p < n + p$  e  $m \cdot p < n \cdot p$ .

<sup>25</sup> É uma relação binária  $R$  em um conjunto  $X$  quando não há um par de elementos distintos de  $X$ , cada um deles relacionado por  $R$  ao outro. Mais formalmente,  $R$  é antissimétrica precisamente se para todos  $a$  e  $b$  em  $X$ .

Se supormos, por absurdo que  $1 \leq 0$ , dado um  $a > 0$ , temos que  $x = 1 \cdot a \leq 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a \leq 0$ , logo  $a \notin \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .

Um exemplo de corpo ordenado é o conjunto dos números racionais  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)^{26}$ . De fato, consideremos o subconjunto dos números racionais positivos denotado por  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{N}\}$ . Para provar que  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo ordenado deve-se verificar as propriedades axiomáticas expostas anteriormente:

Se considerarmos um  $A = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, ; p, q \in \mathbb{N}\}$  e tomarmos  $a, b$  como elementos quaisquer em  $\mathbb{Q}$ , temos:

(i)  $a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$ . Sendo  $(ps + rq)(qs) = pqs^2 + rsq^2$  e  $pq, rs \in \mathbb{N}$ , logo,  $(ps + rq)(qs) \in \mathbb{N}$ , um vez que  $s^2 \in \mathbb{N}$ . Logo  $a + b \in \mathbb{Q}$ .

$a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$ . Como  $(pr) \cdot (qs) = (pq) \cdot (rs)$ , e  $pq, rs \in \mathbb{N}$  segue que  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ .

(ii) Seja  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , e suponhamos que  $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$ . Então  $p \cdot q \notin \mathbb{N}$ , isto é  $p \cdot q \leq 0$ . Desta forma,  $p \cdot q = 0$  ou  $p \cdot q < 0$ . Se  $p \cdot q < 0$ , então  $(-p) \cdot q > 0$ , ou seja,  $(-p) \cdot q \in \mathbb{N}$  e, portanto,  $\frac{(-p)}{q} \in A$ . Logo,  $-(\frac{p}{q}) \in A$ .

Observemos ainda que o conjunto  $A$  é justamente o conjunto dos racionais positivos diferentes de zero, ou seja,  $A = \mathbb{Q}_+^*$ . Também é fácil perceber que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é o menor subcorpo ordenado de  $\mathbb{R}$ .

Ademais, retornaremos ao corpo ordenado dos números reais. Os subcorpos de  $\mathbb{R}$ , são justamente seus subconjuntos, que pertencem a determinados intervalos, e estes têm um papel importante para a construção do conjunto dos números reais.

Sejam  $a$  e  $b$  números reais, com  $a \leq b$ . Os nove subconjuntos de  $\mathbb{R}$  definidos a seguir são chamados intervalos:

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{R} / a \leq c \leq b\};$$

---

<sup>26</sup> Além deste conjunto, podemos pensar no conjunto dos números complexos, aqui denotado como  $\mathbb{C}$ , para tentar entender mais sobre ordenação. Neste caso podemos dizer que o conjunto dos números complexos não é um corpo ordenado, visto que, em particular, num corpo ordenado, qualquer elemento multiplicado por ele mesmo resulta num número positivo, o elemento  $-1$  não é quadrado de elemento algum.

$$(a, b) = \{c \in R / a < c < b\};$$

$$[a, b) = \{c \in R / a \leq c < b\};$$

$$(a, b] = \{c \in R / a < c \leq b\};$$

$$(-\infty, b] = \{c \in R / c \leq b\};$$

$$(-\infty, b) = \{c \in R / c < b\};$$

$$[a, +\infty) = \{c \in R / a \leq c\};$$

$$(a, +\infty) = \{c \in R / a < c\};$$

$$(-\infty, +\infty) = R.$$

Os quatro primeiros intervalos são limitados e possuem extremos  $a$  e  $b$ :  $[a, b]$  é um intervalo fechado,  $(a, b)$  é aberto,  $[a, b)$  é fechado à esquerda e  $(a, b]$  é fechado à direita. Os cinco próximos intervalos são ilimitados, onde  $(-\infty, b]$  é a semirreta esquerda fechada de origem  $b$ ;  $(-\infty, b)$  é a semirreta esquerda aberta de origem  $b$ ;  $[a, +\infty)$  é a semirreta direita fechada de origem  $a$ ;  $(a, +\infty)$  é a semirreta direita fechada de origem  $a$ ; já o intervalo  $(-\infty, +\infty)$  pode ser considerado aberto ou fechado. Observe que, quando  $a = b$ , o intervalo  $[a, b]$  pode ser reduzido a um único elemento  $[a, a] = \{a\}$ , e chamamos este de intervalo degenerado, fazendo assim com que os outros três intervalos subsequentes a ele sejam vazios.

De acordo com Cruz (2012), não é difícil mostrar que todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito. Se num corpo ordenado, dados  $a < b$ , então  $a < \frac{a+b}{2} < b$ , ou seja, sempre entre dois números racionais, vai existir um número racional que é maior que  $a$  e menor que  $b$ .

Suponhamos um intervalo  $[a, b]$  onde  $a = \frac{1}{4}$  e  $b = \frac{1}{3}$ . Sabemos que  $a < b$ , e vamos agora, encontrar um elemento  $c$ , de forma que  $a < c < b$ :

$$c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow c = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\frac{7}{12}}{2} \Rightarrow c = \frac{7}{24}.$$

Se quisermos, por exemplo, encontrar novos elementos pertencentes a este intervalo, basta continuarmos operando entre estes elementos que pertencem ao intervalo. Por exemplo, para acharmos um  $d$ , de forma que  $a < d < c < b$ , temos:

$$d = \frac{a+c}{2} \Rightarrow d = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{24}}{2} \Rightarrow d = \frac{\frac{52}{96}}{2} \Rightarrow d = \frac{13}{48}.$$

E assim sucessivamente para outros elementos deste novo intervalo. Ou seja, pode haver uma infinidade de elementos entre um intervalo  $[a, b]$ . Desta forma, se considerarmos um intervalo  $I$  entre  $a$  e  $b$ , com  $a < b$ , podemos obter esta infinidade de elementos  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ , em  $I$ , logo, cada elemento será a estritamente maior que o elemento anterior na sequência, de forma que

$$c_1 = \frac{a+b}{2}; c_2 = \frac{a+c_1}{2}, c_3 = \frac{a+c_2}{2}, \dots, c_{n+1} = \frac{a+c_n}{2} \dots$$

e então  $a < \dots < c_3 < c_2 < c_1 < b$ .

Neste corpo  $R$ , podemos definir o valor absoluto de um número qualquer pertencente a ele, sendo escrito como: Dado um  $a \in R$ , definimos o seu valor absoluto como  $|a| = a$ , se  $a \geq 0$  ou  $-a$ , se  $a < 0$ .

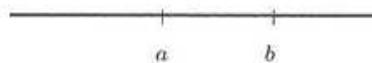
Da definição,  $|a| = a \geq 0$  ou  $|a| = -a > 0$ . Portanto,  $|a| \geq 0$  para todo  $a \in R$ . Note que,  $|a| = a$  (se  $a \geq 0$ ) ou  $|a| = -a > a$  (se  $a < 0$ ). Ou seja,  $|a| = \max\{a, -a\}$ . Temos, portanto,  $|a| \geq a$  e  $|a| \geq -a$ . Esta última desigualdade pode ser escrita  $-a \leq |a|$  e obtemos  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Tomando novamente a ideia geométrica, podemos perceber que o valor absoluto de um número  $a \in R$ , é a distância entre este número e o ponto de origem, ou seja, o 0 (zero).

Para encontrar a distância entre dois pontos,  $a$  e  $b$ , é necessário que se pense em três situações:

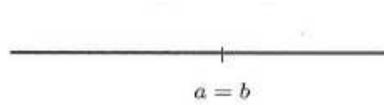
- 1) A distância entre  $a$  e  $b$  é  $b - a$ ;

Figura 34 – Distância entre  $a$  e  $b$  como  $b - a$ .

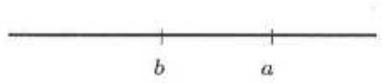


Fonte: (O AUTOR, 2022)

- 2) A distância entre  $a$  e  $b$  é nula, ou seja, é zero;

Figura 35 – Distância entre  $a$  e  $b$  nula.

Fonte: (O AUTOR, 2022)

3) A distância entre  $a$  e  $b$  é  $a - b$ .Figura 36– Distância entre  $a$  e  $b$  como  $a - b$ .

Fonte: (O AUTOR, 2022)

Para pensar: no primeiro caso, temos que  $b - a > 0$ , logo,  $b - a = b - a$ . Já no segundo caso, temos que  $b - a = 0$ , logo,  $b - a = 0 = b - a$ . No terceiro caso, temos que  $b - a < 0$ , logo,  $b - a = -(b - a) = a - b$ . Portanto, em qualquer um dos casos,  $b - a$  é a distância entre  $a$  e  $b$ , ou seja, estamos dizendo que a distância entre pontos simétricos será sempre a mesma.

O **teorema** abaixo nos mostra algumas propriedades importantes para o estudo de valor absoluto, que podem ser desenvolvidos tanto no ensino fundamental e médio, quanto no estudo de cálculo no ensino superior:

Para quaisquer que sejam  $a, b \in R$ , tem-se:<sup>27</sup>

i)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (desigualdade triangular);

ii)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ;

iii)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

Através da Desigualdade Triangular temos que o módulo da soma de todos os elementos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  é menor ou igual ao somatório do módulo de todos os

<sup>27</sup> Demonstração em LIMA, E. L. Curso de Análise. Vol. I. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

elementos de um corpo ordenado, generalizado através da indução matemática, ou seja,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{28}$$

Desta forma, podemos dizer que em qualquer intervalo do corpo ordenado  $R$ , sejam  $a$  e  $x$  elementos pertencentes a ele, e  $\varepsilon$  um elemento positivo qualquer,  $x \in |a - \varepsilon| \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

A sentença acima mostra que está sendo trabalhada dentro do corpo ordenado a ideia de intervalos que são limitados. Eles podem ser limitados inferiormente, superiormente ou em ambos os casos.

O conjunto dos reais  $R$  é um corpo ordenado e tomando um subconjunto  $X \subset R$  limitado superiormente. Diremos que  $b \in R$  é supremo de  $X$  se é a menor das cotas superiores. Isto é,

- i.  $x \leq b, \forall x \in X$ ;
- ii. *Se  $\exists c \in R$  tal que  $x \leq c, \forall x \in X$ , então  $b \leq c$ .*

Usa-se como notação para este elemento  $\sup X = b$ . De forma análoga, definimos o ínfimo de um conjunto  $X$ .

Seja  $R$  um corpo ordenado e  $X \subset R$  limitado inferiormente. Diremos que  $a \in K$  é ínfimo de  $X$  se é a maior das cotas inferiores. Isto é,

- i.  $a \leq x, \forall x \in X$ ;
- ii. *Se  $\exists c \in R$  tal que  $c \leq x, \forall x \in X$ , então  $c \leq a$ .*

Usa-se como notação para este elemento  $\inf X = a$ .

Podemos dizer que se o supremo pertence ao conjunto  $X$ , ele será o elemento máximo de  $X$  e, de forma análoga, se o ínfimo pertence a  $X$ , ele será o elemento mínimo de  $X$ .

---

<sup>28</sup> Demonstração em CRUZ, Willian José da. Corpo ordenado completo: um convite ao professor de matemática/ Willian José da Cruz (Lukinha) – Barbacena MG: Ed. do Autor, 2012. 76p.

Cruz (2012) traz como exemplo o intervalo (4, 8). O autor utiliza deste intervalo para mostrar a usualidade das propriedades acima:

Se um conjunto tem uma cota superior então admite uma infinidade delas, pois, se  $b$  é uma cota superior de  $X$ , então  $b + m$  também é, qualquer que seja  $m$  pertencente aos naturais. A destacar, no intervalo (4, 8), citado anteriormente, 9 é uma cota superior do intervalo. [...] Um conjunto que tem cota inferior admite uma infinidade delas, ou seja, se  $a$  é cota inferior de  $X$ , então  $a - n$  também o é, qualquer que seja  $n$  pertencente ao conjunto dos números naturais. Voltando ao intervalo (4, 8), 4 é uma cota inferior do intervalo, mas 3 também é uma cota inferior desse mesmo intervalo (CRUZ, 2012, p. 53-54).

Dizemos que um corpo ordenado  $R$  satisfaz a propriedade **arquimediana** se dados  $a, b \in R$ , com  $a > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \cdot a > b$ . Observemos que  $R$  se refere a qualquer corpo ordenado e que, neste caso,  $\mathbb{N}$  (ou  $\mathbb{N}_R$ ) representa sua cópia isomorfa em  $R$ , a saber:  $1 = 1_R$ ,  $2 = 1_R + 1_R$ ,  $3 = 1_R + 1_R + 1_R$ , etc.

Como estamos tratando dos números reais, estas propriedades nos parecem óbvias, já que para quaisquer dois números reais  $a$  e  $b$ , a soma de um dos termos representa um segmento maior que o outro e, da mesma forma, é fácil de observar que os números naturais são ilimitados superiormente, principalmente quando os trabalhamos como subconjunto do corpo ordenado dos números racionais  $\mathbb{Q}$ . Nele, os naturais são ilimitados superiormente pois, de fato, para qualquer  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , temos que  $|p| + 1 > p \geq \frac{p}{q}$  e  $|p| + 1 \in \mathbb{N}$ , logo nenhum número racional limita  $\mathbb{N}$ . Assim sendo, podemos admitir que  $\mathbb{N} \subset [0, +\infty)$ .

Ainda tratando do corpo ordenado  $\mathbb{Q}$ , podemos verificar que ele é denso, dado que ele é subconjunto de  $\mathbb{R}$ , pois, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $a < b$ , existe um  $c$  em  $\mathbb{Q}$  de forma que  $a < c < b$ . É um fato que, dados dois números reais satisfazendo  $a < b$ , podemos comparar a diferença com 1 pela propriedade arquimediana dos números reais. Isso quer dizer que existe um número  $n \in \mathbb{N}$  onde  $n \cdot (b - a) > 1$ . Com isto, é possível ver que o intervalo onde os extremos são  $n \cdot a$  e  $n \cdot b$  possui comprimento maior do que 1. Logo, existe um inteiro  $m$  que satisfaz a desigualdade  $n \cdot a < m < n \cdot b$ . Podemos concluir que  $a < \frac{m}{n} < b$ , e o número racional procurado é  $m/n$ .

Para melhor entendimento desta afirmação final, voltaremos a utilizar o intervalo  $(a, b) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . Para satisfazer  $n.(b - a) > 1$ , tomaremos  $n = 24$ , logo, nosso intervalo  $(n.a, n.b) = (24.\frac{1}{4}, 24.\frac{1}{3}) = (6, 8)$ . De fato, existe um número inteiro  $m$  que satisfaz  $n.a < m < n.b$ , logicamente  $m = 7$  e, portanto,  $24.\frac{1}{4} < 7 < 24.\frac{1}{3}$ .

Portanto, concluímos que  $\frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$ , justamente o  $c = \frac{m}{n} = \frac{7}{24}$ , número racional procurado.

A propriedade arquimediana também pode ser descrita da seguinte forma: Num corpo ordenado  $R$ , são equivalentes as seguintes afirmativas abaixo

- i)  $N \subset R$  é ilimitado superiormente;
- ii) Dados  $a, b \in R$ , com  $a > 0$ , existe  $n \in N$  tal que  $n.a > b$ ;
- iii) Dado qualquer  $a > 0$  em  $R$ , existe  $n \in N$  tal que  $0 < 1/n < a$ .

Como mencionado anteriormente,  $N$  é ilimitado em  $Q$ , logo  $Q$  é um corpo ordenado arquimediano.

Até este momento, podemos verificar que, de fato, existe um corpo ordenado arquimediano  $Q$  e diremos, por enquanto, que  $N \subset Z \subset Q \subset R$ . Para tanto, estamos considerando que, com o conjunto  $Q$ , podemos estabelecer na reta real uma correspondência entre todos os números pertencentes ao conjunto dos racionais e a esta reta, a ser considerada completa e “sem buracos”. Para cada ponto da reta, há uma relação biunívoca, onde eles correspondem a um único número real.

Temos que um corpo ordenado é completo quando todo subconjunto não-vazio, contido nesse corpo e limitado superiormente possui um supremo nele. Vamos admitir por enquanto que  $Q$  possui todos os elementos necessários para admitirmos a completeza de  $R$ . Desta forma, estamos admitindo também uma igualdade entre  $Q$  e  $R$ .

Agora, suponhamos um conjunto  $X = \{x \in Q \mid x < 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$ . Podemos dizer que este conjunto é limitado superiormente, pois de fato ele o é. Mas podemos dizer que ele possui supremo? Tal pergunta se dá por conta da inexistência de raízes quadradas racionais de determinados números racionais. Ainda podemos continuar afirmando que  $Q$  é completo?

Tal como os pitagóricos, afirmamos que não existe um número racional cujo seu quadrado seja 2 (em outras palavras, estamos dizendo que  $\sqrt{2}$  não é racional). Esta afirmação é conhecida como o **Lema de Pitágoras**.

Suponhamos, por absurdo, que  $\sqrt{2}$  seja racional. Desta forma, temos que  $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  tais que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , e então elevando a igualdade ao quadrado, teremos  $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ , ou seja,  $p^2 = 2q^2$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros. O fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição de  $p^2$  e  $q^2$  em fatores primos. Logo,  $p^2$  contém um número par de fatores iguais a 2, enquanto  $2q^2$  contém um número ímpar destes fatores. Dessa forma, não se pode ter  $p^2 = 2q^2$ .

Retomando a este conjunto  $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$ . Observemos que  $X \subset [0, 2]$ , portanto,  $X$  é um conjunto limitado de números racionais. O supremo desse conjunto seria  $\sqrt{2}$ , mas este não é racional. Faremos algumas afirmações abaixo, para mostrar minimamente isto.

**1ª Afirmação:** O conjunto  $X$  não possui elemento máximo.

Para provar esta afirmação, verificaremos que dado  $x \in X$ , existe um número  $x+r$  ainda pertencente a  $X$ . Ou seja, existe ainda um elemento que está um pouco mais à frente e ainda pertence a  $X$ , portanto,  $X$  não possui elemento máximo.

De fato, considere um número racional  $r < 1$  tal que  $0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1}$  com  $x \in X$ . Observe que  $x \geq 0$  e  $x^2 < 2$  implica em  $2-x^2 > 0$  e  $2x+1 \geq 1$ , portanto,  $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$ .

Temos:  $r < 1 \Rightarrow r^2 < r \Rightarrow r < 2-x^2 / 2x+1 \Rightarrow r(2x+1) < 2-x^2$ .

Portanto,  $(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x+1) < x^2 + (2-x^2) = 2$ , isto é,  $x+r \in X$ .

**2ª Afirmação:** O conjunto  $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$  não possui elemento mínimo. Analogamente à 1ª afirmação, provaremos esse fato verificando que dado um elemento  $y \in Y$ , existe um outro um pouco mais atrás que ainda pertence a  $Y$ . Se  $y^2 > 2$  e  $y > 0$  então  $y^2 - 2 > 0$  e  $2y > 0$ , isto é,  $\frac{y^2-2}{2y} > 0$ .

Logo, existe um racional  $r > 0$  tal que  $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$ .

Daí,  $2yr < y^2 - 2$  e  $(y - r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - (y^2 - 2) + r^2 = r^2 + 2 > 2$ .

Além disso,  $\frac{y^2-2}{2y} = \frac{y}{2} - \frac{1}{y}$ , portanto  $y - r > y - \frac{y}{2} + \frac{1}{y} = \frac{y}{2} + \frac{1}{y} > 0$ .

Assim  $(y - r) > 0$  e  $(y - r)^2 > 0$  ou seja,  $y - r \in Y$ .

**3ª Afirmação:** Se  $x \in X$  e  $y \in Y$  então  $x < y$ .

Pela própria definição dos conjuntos  $X, Y$ , temos  $x^2 < 2 < y^2$  para quaisquer  $x \in X, y \in Y$ . Como, além disso,  $x, y$  são positivos, segue que  $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$ .

**4ª Afirmação:** Não existe  $\sup X$  nos números racionais.

Suponha, por absurdo, que existe  $a = \sup X$ . Veja que  $a > 0$  e não poderia ser  $a^2 < 2$ , pois do contrário,  $\sup X \in X$ , isto é,  $\sup X = \max X$ , mas em  $X$  não existe elemento máximo.

Suponha  $a^2 > 2$ . Desta forma,  $a \in Y$ . Como foi visto na 2ª afirmação,  $Y$  não possui elemento mínimo, logo, existe  $b \in Y$  tal que  $b < a$ . Utilizando também a 3ª afirmação, temos que para qualquer  $x \in X, x < b < a$ , isto é, teríamos uma cota superior para  $X$  menor que  $a = \sup X$ , o que gera uma contradição. Só nos resta dizer que  $a^2 = 2$ , mas isso também não ocorre, uma vez que não existe racional  $a$  tal que  $a^2 = 2$ . Logo, não existe  $\sup X$ .

Assim sendo, podemos afirmar agora, que o corpo  $Q$  não é completo, visto que, como já admitimos acima, tanto no Lema de Pitágoras, quanto na demonstração de completeza, existe um elemento que não faz parte deste conjunto. Mas, se não existe este número no conjunto dos racionais, ele existe onde?

Para tanto, podemos admitir que existe no corpo  $R$  um conjunto não-vazio, limitado superiormente, que possui supremo, onde um elemento  $a > 0$ , tem seu quadrado  $a^2 = 2$ . Este conjunto não é racional e ele pertence ao conjunto dos números reais, logo, podemos defini-lo como o conjunto dos números irracionais, denotado por  $R - Q$ .

Então,  $\mathbb{R}$  será definido como a união do conjunto dos números racionais e irracionais, ou seja,  $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$  e terá sua completeza equivalente à continuidade da reta.

Admitimos, então, que é válido o axioma fundamental da Análise que diz: *Existe um corpo ordenado completo  $\mathbb{R}$ , chamado Corpo dos Números Reais.*