

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
BACHARELADO EM FÍSICA

# Explorando a Conexão entre Grupos de Lie e Campos Vetoriais de Killing em Espaços Planos

Thales B. S. F. Rodrigues

JUIZ DE FORA  
DEZEMBRO, 2023

# Explorando a Conexão entre Grupos de Lie e Campos Vetoriais de Killing em Espaços Planos

THALES B. S. F. RODRIGUES

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Bacharelado em Física

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

JUIZ DE FORA

DEZEMBRO, 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
REITORIA - ICE - Departamento de Física

***ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO***

A Coordenação do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física Diurno declara que, no dia 15/12/2023, o aluno **Thales Brito de Souza Fonseca Rodrigues**, matrícula **201965191EB**, orientado pelo **Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti**, apresentou seu trabalho de conclusão de curso, intitulado **“Explorando a Conexão entre Grupos de Lie e Campos Vetoriais de Killing em Espaços Planos”**, tendo sido aprovada pela banca examinadora com nota **100**.

Juiz de Fora, 15 de dezembro de 2023

Prof. Dr. Valdemir Eneias Ludwig

Coordenador do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física

Banca examinadora:

Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador

Departamento de Física - ICE - UFJF

Alexei Anatolevich Deriglazov

Departamento de Matemática - ICE - UFJF

Maikel Yusat Ballester Furones

Departamento de Física - ICE - UFJF



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Professor(a)**, em 15/12/2023, às 17:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Valdemir Eneias Ludwig, Professor(a)**, em 15/12/2023, às 19:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Maikel Yusat Ballester Furones, Professor(a)**, em 16/12/2023, às 09:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Alexei Anatolevich Deriglazov, Professor(a)**, em 19/12/2023, às 15:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1629856** e o código CRC **04B2C4E7**.

---

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rodrigues, Thales Brito de Souza.

Explorando a Conexão entre Grupos de Lie e Campos Vetoriais de Killing em Espaços Planos / Thales Brito de Souza Rodrigues. -- 2023.

74 p. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, 2023.

1. Campos Vetoriais de Killing. 2. Algebras de Lie. 3. Grupos de Lie. 4. Isometrias . I. Rizzuti, Bruno Ferreira, orient. II. Título.

*Aos meus pais e à minha irmã pelo apoio incondicional durante toda minha trajetória.*

*Ao meu tio José, cuja presença sempre foi uma fonte de companheirismo e de risadas, e cuja falta será eternamente sentida.*

## Resumo

Este trabalho tem por finalidade o estudo de tópicos de geometria diferencial e de teoria de grupos com aplicações em física teórica. Por um lado, campos vetoriais de Killing de uma variedade (pseudo-)Riemanniana estão relacionados com direções de isometrias ao longo da mesma. Por outro lado, alguns elementos pertencentes a grupos são responsáveis por isometrias em sistemas físicos, como é o caso dos elementos dos grupos  $SO(3)$  e  $SO(1,3)$ . Nesse sentido, o objetivo principal do trabalho busca explorar uma conexão entre tais campos vetoriais de Killing com elementos da álgebra de Lie de grupos de Lie relevantes no contexto de física teórica. Em paralelo com nosso principal objetivo de explorar tal conexão, esperamos que os capítulos iniciais do trabalho sejam suficientes para o leitor que busca uma introdução à geometria diferencial e aos grupos de Lie, através dos exemplos e das figuras distribuídas ao longo do texto, com a finalidade de clarificar os tópicos avançados aqui estudados. Ainda sobre tais tópicos, os mesmos servirão como ponto de partida para estudos mais avançados de relatividade geral e, a longo prazo, de gravitação quântica.

**Palavras-chave:** Geometria Diferencial, Campos Vetoriais de Killing, Grupos de Lie.

# Abstract

This work aims to study topics in differential geometry and group theory with applications in theoretical physics. On one hand, Killing vector fields on a (pseudo-)Riemannian manifold are related to directions of isometries along it. On the other hand, some elements belonging to groups are responsible for isometries in physical systems, such as the elements of the groups  $SO(3)$  and  $SO(1,3)$ . In this sense, the main objective of the work is to explore a connection between such Killing vector fields and elements of the Lie algebra of Lie groups relevant in the context of theoretical physics. Alongside our main goal of exploring this connection, we hope that the initial chapters of the work will be sufficient for readers seeking an introduction to differential geometry and Lie groups, through examples and figures distributed throughout the text, with the purpose of clarifying the advanced topics studied here. Regarding these topics, they will also serve as a starting point for more advanced studies in general relativity and, in the long term, quantum gravity.

**Keywords:** Differential Geometry, Killing Vectors Fields, Lie Groups.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais, Eliana e João, pelo apoio imensurável durante esses anos e por terem acreditado em mim, mesmo nos momentos em que eu próprio descreditei. À minha irmã Erika, por ter estado ao meu lado durante todos esses anos de curso e por ter sido o melhor ombro amigo possível durante todos os momentos difíceis que enfrentei ao longo da minha trajetória até aqui. À minha namorada Gabriela, por ter sido tanto em tão pouco tempo na minha vida. Aos amigos que fiz ao longo do caminho, desde o ciclo básico do Ciências Exatas até aqui, obrigado por serem os pilares que sustentaram minha jornada. Cada um de vocês contribuiu para tornar esta jornada acadêmica não apenas educacional, mas também significativa em termos de relações humanas.

Gostaria de expressar meu sincero agradecimento aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFJF, por terem contribuído em todos os aspectos da minha formação. Em especial, ao professor e orientador Bruno F. Rizzuti, pela orientação, amizade, paciência e pelos excelentes cursos de Física Matemática III e Mecânica Clássica I(II), que enriqueceram significativamente minha formação, inclusive o conteúdo do presente trabalho. Ao Professor Maikel Y. B. Furones, pelas disciplinas de Mecânica Quântica I(II), durante as quais fui apresentado, de forma excepcional, às elegantes peculiaridades da mecânica quântica, reforçando minha certeza de ter feito a escolha correta ao optar pelo curso de física. Ao Professor Ilya Shapiro pela disciplina de Relatividade Geral e Cosmologia, onde pude ter o primeiro contato com uma das áreas da física que mais me fascina.

Por último, mas não menos importante, dedico este esforço em tributo ao meu tio José, cuja partida precoce me impossibilitou de convidá-lo para a minha colação de grau. Que as páginas subsequentes eternizem o sentimento e a memória de alguém que não teve a oportunidade de estudar, mas que, mesmo assim, nunca deixou de me encorajar a seguir meus estudos.

*“Those swirls in the cream mixing the coffee? That’s us. Ephemeral patterns of complexity, riding a wave of increasing entropy from simple beginnings to a simple end. We should enjoy the ride.”*

*Sean Carroll (The Big Picture)*

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2 Cálculo em Variedades</b>	<b>10</b>
2.1 Variedades . . . . .	10
2.2 Vetores . . . . .	12
2.3 Covetores . . . . .	15
2.4 Tensores . . . . .	16
2.5 Mapas induzidos . . . . .	17
2.6 Fluxos . . . . .	19
2.7 Derivada de Lie . . . . .	23
<b>3 Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>34</b>
3.1 Exponencial de Matrizes . . . . .	35
3.2 Grupos de Lie . . . . .	36
3.3 Álgebras de Lie . . . . .	37
3.4 Campos Vetoriais Invariantes . . . . .	41
3.5 Ação de Grupos de Lie em Variedades . . . . .	45
3.6 Campos de Vetores Induzidos . . . . .	46
<b>4 Geometria Riemanniana</b>	<b>49</b>
4.1 Métricas . . . . .	49
4.2 Isometrias . . . . .	54
4.3 Campos Vetoriais de Killing . . . . .	55
<b>5 Conexão entre campos vetoriais de Killing, Álgebras e Grupos de Lie</b>	<b>65</b>
5.1 Encontrando grupos a partir de campos vetoriais de Killing . . . . .	65
<b>6 Conclusão</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

## Lista de Figuras

2.1	O homeomorfismo $\phi_i$ mapeia $U_i \subset V$ em um conjunto aberto $A_i \subset \mathbb{R}^n$ , designando a qualquer ponto $p \in U_i$ um sistema de coordenadas. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então o mapeamento de transição $\psi_{ij}$ é suave, isto é, de classe $C^\infty$ . . . . .	11
2.2	Uma curva $\alpha$ em $U \subset V$ e sua coordenada em $A \subset \mathbb{R}^n$ . . . . .	13
2.3	Um vetor $X \in T_p V$ pode ser identificado como uma classe de equivalência de curvas $[\alpha(t)]$ que passam em $p \in V$ e possuem o mesmo comportamento nesse ponto. . . . .	14
2.4	Curva integral $\alpha$ de um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(V)$ . . . . .	19
2.5	Ação do mapeamento $(\Phi_{-c})_*$ em um vetor pode ser interpretado como um transporte do vetor pra outro ponto nas proximidades do ponto inicial. . .	25
2.6	Campos vetoriais $X$ e $Y$ de (2.44) e (2.46) na superfície da esfera tridimensional $S^2$ . As setas mais grossas representam o campo $Y$ , enquanto as mais finas o campo $X$ . . . . .	29
2.7	O colchete de Lie $[X, Y]$ é proporcional à falha do fechamento do “paralelogramo” central delimitado pelos fluxos de $X$ e $Y$ sobre $S^2$ . . . . .	32
3.1	Exponencial de matriz como uma bijeção entre dois subconjuntos de matrizes.	36
3.2	Ação do mapa induzido $L_{b*}$ em um campo vetorial $X$ sobre o grupo de Lie $G$ . . . . .	42
4.1	Em uma variedade $(V, g)$ , vetores definidos em espaços tangentes a pontos ao longo de um fluxo $\Phi$ gerado por um campo vetorial de Killing $X$ apresentam a mesma norma. . . . .	57

# 1 Introdução

Geometria diferencial, cálculo sobre variedades e teorias de grupos formam um conjunto de ferramentas poderosas para a investigação e análise de modelos dentro do escopo da física teórica (NOVELLO; BITTENCOURT, 2015; FREIDEL, 2005). Não somente neste escopo, na linha de trabalhos que buscam dar interpretabilidade a modelos de inteligência artificial (RODRIGUES et al., 2022), ultimamente, é visto na literatura abordagens que investigam simetrias nas arquiteturas dos modelos a partir de grupos (VILLAR et al., 2023), como os grupos de Lorentz e de Poincaré. Nesse sentido, na literatura de geometria diferencial (NAKAHARA, 2003; LEE, 2012; O'NEILL, 1983) existem objetos que ditam direções isométricas ao longo de uma variedade e que se relacionam profundamente com grupos, além dos supracitados, bem conhecidos no contexto de física teórica. Tais objetos são de interesse para o presente trabalho, além de ser a peça fundamental para a construção do nosso objetivo final que será aqui apresentado.

Mais especificamente, os objetos comentados acima são chamados de campos vetoriais de Killing, e estão relacionados à isometrias em variedades (pseudo-)Riemannianas. Isto é, indicam direções que preservam a métrica definida sobre estas variedades, mantendo inertes estruturas geométricas daí derivadas. De outro modo, deixando de lado o viés geométrico e focando em uma abordagem mais algébrica, isometrias geradas por campos vetoriais de Killing também podem ser descritas a partir de grupos (KATANAEV, 2016).

Sendo assim, nesta perspectiva, este trabalho consiste principalmente em explorar tanto o carácter geométrico, quanto algébrico de campos vetoriais de Killing. Nosso objetivo principal consiste em explorar uma conexão entre campos vetoriais de Killing das variedades  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  e  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  e a álgebra de Lie dos grupos  $SO(3)$  e  $SO(1, 3)$ , respectivamente. O método aqui demonstrado de recuperar os elementos da álgebra de Lie dos grupos supracitados, e os próprios grupos em si, através da expressão de campos vetoriais induzidos, até o nosso presente conhecimento, não foi visto anteriormente na literatura.

No que se segue, primeiramente, no capítulo 2 será apresentada uma introdução

de todo o arcabouço matemático necessário do contexto de geometria diferencial para o entendimento do nosso objetivo. Em seguida, no capítulo 3, será apresentada uma visão geral de teoria de grupos de Lie, assim como uma demonstração da conexão entre as duas abordagens para a álgebra de Lie de um grupo de Lie, sendo a primeira delas algébrica e a segunda geométrica. Então, nos capítulos 4 e 5, respectivamente, serão apresentados tópicos de geometria (pseudo-)Riemanniana relevantes para a construção do trabalho, seguidamente da conexão supracitada entre campos vetoriais de Killing e elementos de álgebras de Lie de grupos através de campos vetoriais induzidos. Por fim, as conclusões do trabalho podem ser vistas no capítulo 6.

A notação adotada no decorrer do texto foi a seguinte: letras gregas  $\alpha, \beta, \mu, \nu$ , etc, quando não especificado, correrão no geral valores de 1 a  $n$ , sendo  $n$  a dimensão da variedade que estivermos trabalhando. Apenas quando estivermos trabalhando com o espaço de Minkowski que correrão valores de 0 à  $n - 1$ , sendo 0 reservado à coordenada temporal. As letras  $i, j, k, l, m, n$ , etc, quando não especificado, correrão valores 1, 2, 3, sendo 1 relacionado com à direção espacial  $x$ , 2 e 3 com  $y$  e  $z$ , respectivamente. Serão omitidas certas definições específicas a respeito de determinados assuntos, por fugirem do escopo do trabalho, enquanto outras que são relevantes, porém não o suficiente para entrar no texto do trabalho, serão comentadas em notas de rodapé. Por conveniência, a notação de Einstein para somatórios foi utilizada ao longo de todo trabalho.

## 2 Cálculo em Variedades

Será apresentado no presente capítulo os principais conceitos e definições a respeito de variedades que serão importantes para a construção do trabalho, em especial nos capítulos finais.

### 2.1 Variedades

Variedades é o termo utilizado para descrever uma generalização de superfícies em espaços de dimensões arbitrárias. Uma superfície  $S$ , ao ser parametrizada em um espaço Euclidiano tridimensional, por exemplo, necessita de dois números  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , tal que, podemos definir uma parametrização  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$  (CARMO, 2010). Dessa forma, dizemos que a superfície  $S$  é considerada localmente homeomorfa (ou seja, existe um mapeamento  $h$  bijetivo, contínuo e com inversa contínua) ao espaço  $\mathbb{R}^2$ . De maneira geral, uma variedade é um espaço topológico<sup>1</sup> que é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  localmente, possibilitando que, para cada ponto em uma variedade, podemos designar um conjunto de  $n$  números a ele, sendo tal conjunto de mapeamentos da variedade sobre  $\mathbb{R}^n$  conhecido como coordenadas locais. É importante notar que esses  $n$  números são independentes (chamados também de parâmetros), e se esses  $n$  números parametrizam localmente todos os pontos de um aberto da variedade dizemos que ela é  $n$ -dimensional (LEE, 2000).

Como exemplo direto de coordenadas locais de uma variedade, podemos pensar que com devida aproximação, vivemos em um planeta do qual a superfície é a variedade  $S^2$  (superfície da esfera tridimensional), entretanto, localmente podemos construir mapas cartográficos em papéis bidimensionais (ou seja, subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$ ) para nos localizarmos na superfície do planeta. Este exemplo heurístico motiva a seguinte definição formal.

---

<sup>1</sup>Um espaço topológico é um par  $(X, \tau)$  onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $\tau$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset$  e  $X$  estão em  $\tau$  e  $\tau$  é fechado pra intersecções finitas e uniões arbitrárias. Os elementos de  $\tau$  são chamados de abertos e são utilizados, entre outras coisas, para se construir vizinhanças de pontos em  $X$  (MUNKRES, 2000).

**Definição 2.1.1.**  $V$  é uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional quando

1.  $V$  é um espaço topológico;
2. Existe em  $V$  uma família de pares  $\{(U_i, \phi_i)\}$ , onde  $\{U_i\}$  é uma família<sup>2</sup> de conjuntos abertos que cobrem  $V$ , ou seja,  $\cup_i U_i = V$ .  $\phi_i$  é um homeomorfismo de  $U_i$  em um conjunto aberto  $A_i$  de  $\mathbb{R}^n$ ;
3. Sendo  $U_i$  e  $U_j$  dois conjuntos abertos em  $V$ , tal que,  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , o mapeamento  $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$  de  $\phi_j(U_i \cap U_j)$  em  $\phi_i(U_i \cap U_j)$  é de classe  $C^\infty$ .

Na Figura 2.1, podemos ver uma ilustração da definição acima.

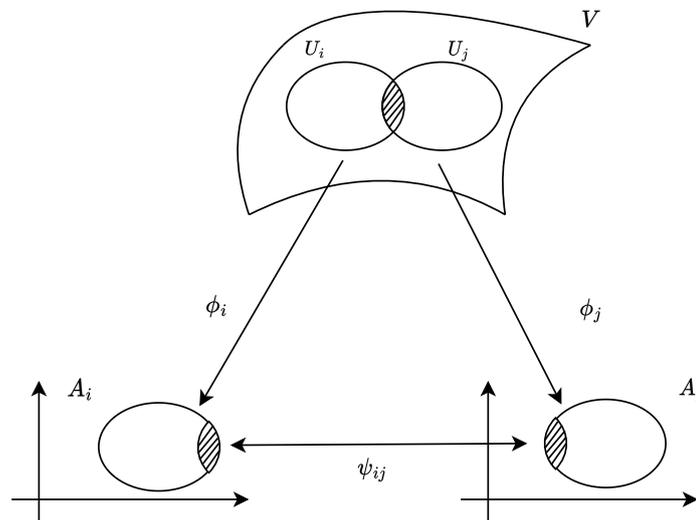


Figura 2.1: O homeomorfismo  $\phi_i$  mapeia  $U_i \subset V$  em um conjunto aberto  $A_i \subset \mathbb{R}^n$ , designando a qualquer ponto  $p \in U_i$  um sistema de coordenadas. Se  $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então o mapeamento de transição  $\psi_{ij}$  é suave, isto é, de classe  $C^\infty$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Na literatura, o par  $(U_i, \phi_i)$  é conhecido como uma carta sobre a variedade, enquanto o conjunto de todas as cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  que cobre toda a variedade é conhecido como atlas. O subconjunto  $U_i$  é chamado de vizinhança coordenada (ou, somente conjunto aberto) e o mapeamento  $\phi_i$  é tido como a coordenada de um ponto  $p$  da variedade<sup>3</sup>, sendo representado por  $n$  funções  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ , ou, simplesmente como  $\{x^\mu\}$ . É válido

<sup>2</sup>Se  $I$  é um conjunto de índices, e para cada  $i \in I$  é possível associar um conjunto arbitrário  $C_i$ , então  $\{C_i : i \in I\}$  é uma família (HALMOS, 1960).

<sup>3</sup>Nesse caso, os índices  $i$  ou  $j$  para os mapeamentos  $\phi$  e  $\psi$  assim como para o aberto  $U$  não corre valores, é apenas uma identificação para os mesmos.

ressaltar que o ponto  $p \in V$  existe independente da escolha do sistema de coordenadas, ou seja, da escolha do mapeamento  $\phi_i$ . Tal fato é de extrema importância na física, com implicações diretas no contexto de que o comportamento de um sistema físico independe do sistema de coordenadas que utilizamos para descrevê-lo (PIATTELLA, 2020). Se há uma interseção entre  $U_i$  e  $U_j$ , como visto na Figura 2.1, dois sistemas de coordenadas distintos podem ser designados para um ponto  $p \in U_i \cap U_j$ . Se o mapeamento  $\phi_i$  atribui  $n$  valores de coordenadas  $x^\mu$  ( $1 \leq \mu \leq n$ ) enquanto o mapeamento  $\phi_j$  atribui  $y^\nu$  ( $1 \leq \nu \leq n$ ) ao mesmo ponto  $p$ , a transição de  $y$  para  $x$ ,  $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$  é dada pelo mapeamento  $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ . Sendo o mapeamento<sup>4</sup>  $\psi_{ij}$  por definição um difeomorfismo, pois, existe  $(\psi_{ij})^{-1} = \psi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ , e ambos são mapeamentos diferenciáveis.

Podemos também estender a definição de difeomorfismos para aplicações entre variedades distintas. Seja  $f : V \rightarrow M$  um homeomorfismo entre a variedade  $V$  e a variedade  $M$ , podemos considerar duas cartas  $(U, \phi)$  de  $V$  e  $(A, \theta)$  de  $M$ , tal que, ao pegarmos um ponto  $p$  qualquer pertencente a  $V$ , podemos mapeá-lo até um ponto  $f(p) \in M$ . Então, a coordenada de  $f(p) \in M$  é dada pela composta  $\theta \circ f \circ \phi^{-1}$ , tal que,  $\{y^\mu\} = \theta \circ f \circ \phi^{-1}(x^\mu)$ , sendo  $\{x^\mu\} = \phi(p)$ . Se existe  $\phi \circ f^{-1} \circ \theta^{-1}$  (inversa), tal que,  $\{x^\mu\} = \phi \circ f^{-1} \circ \theta^{-1}(y^\mu)$  e ambos são diferenciáveis,  $f$  é tido como um difeomorfismo entre as variedades  $V$  e  $M$ .

Ou seja, utilizando mapas diferenciáveis, isto é, difeomorfismos, é possível realizar a transição entre um sistema de coordenadas definidos em conjuntos abertos que possuem interseção diferente de zero na mesma variedade, assim como em conjuntos abertos de variedades distintas. Variedades que se conectam por difeomorfismos são ditas difeomorfas entre si, e de maneira intuitiva, podemos dizer que difeomorfismos estão para variedades assim como os isomorfismos estão para espaços vetoriais (CARMO, 2010).

## 2.2 Vetores

De início, vamos considerar um caso especial de mapeamentos em variedades, as chamadas curvas na variedade. Uma curva em uma variedade  $n$ -dimensional  $V$  é um mapeamento

---

<sup>4</sup>Podemos pensar que o mapeamento  $\psi_{ij}$  é uma forma de escrever uma coordenada em função da outra.

$\alpha : (\epsilon, -\epsilon) \rightarrow V$ , onde  $(\epsilon, -\epsilon)$  é um intervalo aberto na reta real  $\mathbb{R}$  que inclui o 0, por conveniência. Ao considerarmos uma carta  $(U, \phi)$ , podemos designar coordenadas para tal curva a partir da composição  $\phi \circ \alpha$ , tal que,  $\{x^\mu\} = \phi \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow A(\text{aberto}) \subset \mathbb{R}^n$ . Na Figura 2.2, é mostrado uma representação gráfica para o mapeamento em questão.

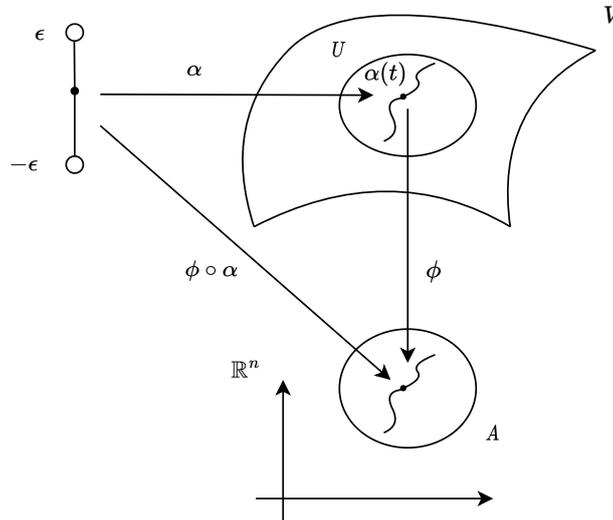


Figura 2.2: Uma curva  $\alpha$  em  $U \subset V$  e sua coordenada em  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Em variedades, vetores são objetos que são definidos como vetores tangentes a um ponto em uma curva sobre a variedade. Ou seja, para definirmos um vetor, precisamos de uma curva coordenada  $\alpha$  e uma função suave  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , pertencente ao conjunto de funções suaves  $\mathcal{F}(V)$  da variedade  $V$ , em que o vetor em um ponto  $\alpha(0) = p$  da variedade  $V$  será a derivada direcional da composta  $f \circ \alpha$  em  $t = 0$ . Temos que,  $f \circ \alpha$  pode ser escrito como  $f(\alpha(t)) = f(\phi^{-1}(x^\mu))$  e sua taxa de variação ao longo da curva em  $t = 0$ , é dada por

$$\left. \frac{df(\phi^{-1}(x^\mu))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.1)$$

onde, observamos que tal taxa de variação é a atuação de um operador diferencial  $X$  em  $f$ , que é definido como

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, X^\mu = \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Podemos então reescrever a equação (2.1) de uma forma simpática  $X[f]$ , dada

pela atuação do operador diferencial  $X$  em  $f$ . Basicamente,  $X$  é um funcional linear sobre o conjunto de funções suaves sobre  $V$ , satisfazendo à regra de Leibniz,  $X[fg] = fX[g] + gX[f]$ . Dessa forma, daqui em diante chamaremos tal operador de vetor tangente a um ponto  $p = \alpha(0)$  da variedade  $V$ , ao longo da direção dada pela curva  $\alpha(t)$ .

Assim como em geometria plana definimos vetores como classes de equivalência de pares de ordenados de pontos que se conectam por um transporte paralelo (GAIO; BARROS; RIZZUTI, 2019), no contexto de geometria diferencial podemos explorar uma definição de vetores análoga. Dizemos que duas curvas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  se relacionam quando  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$  e  $\frac{d\alpha_1}{dt}\big|_p = \frac{d\alpha_2}{dt}\big|_p$ . Curvas que satisfazem estas igualdades definem o mesmo vetor tangente e assim podemos definir vetores tangentes como classes de equivalência de curvas com o mesmo comportamento local. A Figura 2.3 ilustra esta definição. Com isso, temos que todas as classes de equivalência (vetores tangentes) de curvas que passam em um ponto  $p \in V$ , formam o espaço (vetorial) tangente  $T_pV$  à variedade  $V$  no ponto  $p$ .

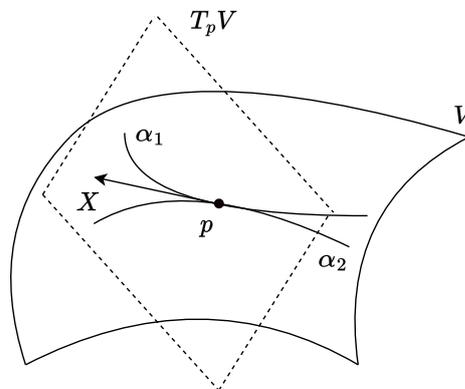


Figura 2.3: Um vetor  $X \in T_pV$  pode ser identificado como uma classe de equivalência de curvas  $[\alpha(t)]$  que passam em  $p \in V$  e possuem o mesmo comportamento nesse ponto.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Da equação (2.2) podemos extrair informações a respeito de  $T_pV$ . Sabendo que a dimensão da variedade  $V$  é igual à dimensão do  $T_pV$  (para algum  $p \in V$ ) (LEE, 2012), no caso em que  $V$  é  $n$ -dimensional, podemos interpretar a derivada parcial em relação a  $x^\mu$

na equação (2.2) como uma base para o espaço ( $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv e_\mu$ ). Dessa forma, com  $1 \leq \mu \leq n$ , um vetor  $Y$  arbitrário pertencente a  $T_pV$  pode ser escrito como  $Y = Y^\mu e^\mu$ , onde  $Y^\mu$  são as componentes do vetor em relação à base  $\{e^\mu\}$ .

Devido o vetor  $Y$  independer do sistema de coordenadas escolhido, podemos definir a regra de transformação do vetor. Dadas duas cartas em que os abertos se interceptam na variedade  $V$  (considerando a mesma construção da Figura 2.1), tal que podemos escrever  $\{x^\mu\} = \phi_i(p)$  e  $\{y^\mu\} = \phi_j(p)$  e dado a existência da transição entre as duas coordenadas, isto é,  $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$ , se  $Y \in T_pV$ , então

$$Y = Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = Y'^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (2.3)$$

Dessa forma, atuando em uma função coordenada arbitrária  $x^\nu = x^\nu(y^\gamma)$ , obtemos diretamente pela regra da cadeia

$$Y[x^\nu] = Y^\mu \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\gamma} = Y'^\gamma \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\gamma} \implies Y'^\gamma = Y^\mu \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}. \quad (2.4)$$

A última expressão da equação (2.4) é exatamente a regra de transformação usual das componentes de um vetor contravariante (SHAPIRO, 2019). Se um vetor  $X|_p$  pode ser designado para cada ponto  $p \in V$ , dizemos que  $X$  é um campo vetorial, que pertence ao conjunto de todos os campos vetoriais da variedade  $V$ , denotado por  $\mathcal{X}(V)$ . Rigorosamente, um campo vetorial  $X$  de  $V$  é um mapeamento  $X : V \longrightarrow TV = \cup_{p \in V} T_pV$ , tal que, a partir do campo vetorial, podemos designar um vetor a qualquer ponto  $p$  da variedade, sendo denotado por  $p \mapsto X|_p \in T_pV$ .  $TV$  também é uma variedade (LEE, 2012), chamada de *bundle* tangente.

## 2.3 Covetores

Após a definição de vetores em variedades visto na seção anterior, é interessante definirmos os chamados covetores (também chamados na literatura de 1-forma ou vetores duais). Um covetor  $w$  é um objeto que mora no espaço vetorial dual do espaço  $T_pV$ , o espaço cotangente  $T_p^*V$ . Os elementos de  $T_p^*V$  são tidos como funcionais lineares que atuam

sobre os vetores do espaço  $T_pV$  e levam em  $\mathbb{R}$ . Ou seja,  $w : T_pV \rightarrow \mathbb{R}$ , no qual pode ser escrito como  $w = w_\mu dx^\mu$ , onde  $w_\mu$  são as componentes do covetor  $w$  em relação à base  $\{dx^\mu\}$  de  $T_p^*V$ .

Os covetores de  $T_p^*V$  atuam nos vetores de  $T_pV$  através do produto interno  $\langle, \rangle : T_p^*V \times T_pV \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que, dado um vetor  $V \in T_pV$ , é definido como

$$\langle w, V \rangle = w_\mu V^\nu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = w_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = w_\mu V^\mu. \quad (2.5)$$

De forma análoga a vetores, temos que os covetores são definidos sem a especificação de um sistema de coordenadas. Podemos então definir a sua regra de transformação entre sistemas de coordenadas arbitrários. Para um ponto  $p \in U_i \cap U_j$  e utilizando coordenadas das cartas da Figura 2.1, podemos escrever  $w$  como

$$w = w_\mu dx^\mu = w'_\nu dy^\nu, \quad (2.6)$$

onde, pela regra da cadeia obtemos explicitamente a diferencial da coordenada  $y^\nu = y^\nu(x^\mu)$ , dada por

$$dy^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (2.7)$$

de onde concluímos voltando para equação (2.6) que

$$w_\mu dx^\mu = w'_\nu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \implies w'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} w_\mu, \quad (2.8)$$

sendo a expressão final a regra de transformação das componentes de um covetor  $w \in T_p^*V$ . Assim como no caso de vetores, um covetor é um objeto geométrico, com existência própria, independente do sistema de coordenadas adotado. A regra (2.8) é a constatação dessa afirmação.

## 2.4 Tensores

Tensores em uma variedade  $V$  são definidos como mapeamentos multilineares, que mapeiam  $k$  elementos de  $T_p^*V$  e  $l$  elementos de  $T_pV$  em um número real. Tensores usualmente

são descritos pelo tipo, baseado na dimensão dos espaços em que eles atuam. Seja então um tensor  $W$  do tipo  $(k, l)$ . Fixando coordenadas, temos:

$$W = W^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}. \quad (2.9)$$

Por exemplo, a atuação de um tensor  $T$  do tipo  $(1, 1)$  em um vetor  $V = V^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \in T_p V$  e em um covetor  $w = w_\alpha dx^\alpha \in T_p^* V$  é dada por

$$\begin{aligned} T(w, V) &= T^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu (w_\alpha dx^\alpha, V^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = T^\mu_\nu w_\alpha \langle dx^\alpha, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle V^\beta \langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \rangle \\ &= T^\mu_\nu w_\alpha \delta_\mu^\alpha V^\beta \delta_\beta^\nu = T^\mu_\nu w_\mu V^\nu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim como para o caso de vetores e campos vetoriais, campos tensoriais do tipo  $(k, l)$  designam tensores do tipo  $(k, l)$  em cada ponto  $p$  de uma variedade  $V$ . A regra de transformação das componentes de um tensor sob troca de coordenadas pode ser obtida diretamente a partir de (2.4) e (2.8) e será omitida. Em (RODRIGUES; RIZZUTI, 2023), entretanto, a regra de transformação de um tensor do tipo  $(1, 1)$  é obtida usando considerações físicas.

## 2.5 Mapas induzidos

É conveniente para o presente trabalho abordarmos o conceito de mapas induzidos por um difeomorfismo em uma variedade. Se  $f$  é um difeomorfismo sobre  $V$

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow V \\ p &\mapsto f(p), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$f$  induz um mapeamento  $f_*$  entre espaços tangentes de  $V$ , conhecido como *pushforward*. Ou seja, para algum ponto  $p \in V$  e para algum campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$ , temos

$$\begin{aligned} f_* : T_p V &\rightarrow T_{f(p)} V \\ X|_p &\mapsto X|_{f(p)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em termos de uma carta  $(U, \phi)$  de  $V$ , considerando que  $\phi(p) = \{x^\mu\}$  e  $\phi(f(p)) = \{y^\nu\}$  são as coordenadas dos pontos  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, a forma com que  $f_*$  atua em um vetor  $X|_p \in T_pV$  é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} f_*X|_p &= f_* \left( X^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) = X^\mu(p) f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) = X^\mu(p) \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \Big|_{f(p)} \\ &= X^\nu(f(p)) \frac{\partial}{\partial y^\nu} \Big|_{f(p)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por outro lado, o difeomorfismo  $f$  induz também um mapeamento  $f^* : T_{f(p)}^*V \rightarrow T_p^*V$  chamado de *pullback*, que atua sobre covetores sendo definido a partir do produto interno.

**Definição 2.5.1.** Considerando um covetor  $\omega \in T_{f(p)}^*V$  e um vetor  $X \in T_pV$ , o *pullback* de  $\omega$  por  $f^*$  é definido por

$$\langle f^*\omega, X \rangle = \langle \omega, f_*X \rangle. \quad (2.14)$$

Da expressão (2.14), podemos tirar explicitamente a forma com que  $f^*$  atua em  $\omega \in T_{f(p)}^*V$ ,

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(\omega_\mu(f(p))dy^\mu|_{f(p)}) = \omega_\mu(f(p))f^*(dx^\mu|_{f(p)}) = \omega_\mu(f(p))f^*(dy^\mu|_{f(p)}) \\ &= \omega_\mu(f(p)) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu|_p \\ &= \omega_\nu(p)dx^\nu|_p. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Além disso, para a construção de capítulos finais do trabalho, é conveniente estendermos a atuação do *pullback* para um tensor do tipo  $(0, 2)$ . Seja  $g \in T_{f(p)}^*V \otimes T_{f(p)}^*V$ , a atuação de  $f^*$  em  $g$  é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} f^*g_{f(p)} &= f^*(g_{\mu\nu}(f(p))dy^\mu|_{f(p)} \otimes dy^\nu|_{f(p)}) = g_{\mu\nu}(f(p))f^*(dy^\mu|_{f(p)}) \otimes f^*(dy^\nu|_{f(p)}) \\ &= g_{\mu\nu}(f(p)) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por fim, é interessante notar que, enquanto  $f_*$  segue a mesma direção de  $f$ , ou seja, na direção de  $p \rightarrow f(p)$ ,  $f^*$  atua no sentido oposto, de  $f(p) \rightarrow p$ . Na próxima seção, veremos que tal detalhe inerente dos mapas induzidos por um difeomorfismo  $f$  nos permite “caminhar” sobre fluxos gerados por campos vetoriais em uma variedade.

## 2.6 Fluxos

Vamos considerar agora  $X$  como um campo vetorial na variedade  $V$ . Dada uma curva  $\alpha$  em  $V$ , poderíamos tentar conectar  $X$  com a curva  $\alpha$  exigindo que o campo vetorial seja o próprio vetor tangente à curva, como indica a Figura 2.4. Isto motiva a seguinte definição.

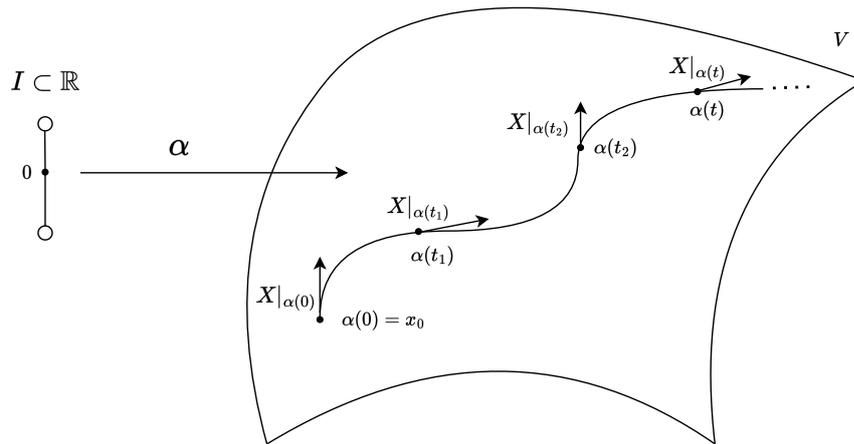


Figura 2.4: Curva integral  $\alpha$  de um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

**Definição 2.6.1.** Seja  $X$  um campo vetorial de  $V$ . Uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$  é chamada de curva integral do campo vetorial  $X$ , se para cada  $t \in I$ ,

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = X|_{\alpha(t)}. \quad (2.17)$$

Considerando uma carta  $(U, \phi)$  na variedade, em que a  $\mu$ -ésima coordenada da curva é dada por  $x^\mu(t) = \phi^\mu(\alpha(t))$ , temos pela definição de curva integral acima que

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\alpha(t)). \quad (2.18)$$

Podemos interpretar a equação (2.18) como uma equação diferencial ordinária, em que as soluções são as coordenadas  $x^\mu(t)$  da curva  $\alpha(t)$ . Ao estabelecermos uma condição inicial  $\phi^\mu(\alpha(0)) = x^\mu(0)$ , no qual  $x^\mu(0)$  corresponde a  $\mu$ -ésima coordenada da curva integral em  $t = 0$ , o Teorema da Existência e Unicidade (BOYCE; DIPRIMA, 2004) das

equações diferenciais ordinárias garante que ao menos localmente (ou seja, no intervalo aberto  $I$ ), existe única solução para a equação (2.18).

Utilizando uma outra forma de representar as curvas integrais associadas a um campo vetorial, vamos denotar de agora em diante a curva integral do campo vetorial  $X$  que tem como ponto de partida um ponto  $x_0 \in V$ , cuja  $\mu$ -ésima coordenada é dada por  $x^\mu(0)$ , com o que chamaremos de fluxo gerado pelo campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$ .

**Definição 2.6.2.** Seja  $\Phi(t, x_0)$  a curva integral de  $X \in \mathcal{X}(V)$  passando por  $x_0 \in V$  em  $t = 0$ . Nestas condições, o mapeamento  $\Phi : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ , com  $(t, x_0) \mapsto \Phi(t, x_0) \in V$ , é chamado de fluxo gerado pelo campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$  ao longo da variedade.

Utilizando a definição acima, a curva integral que passa de início pelo ponto  $x_0$  pode ser denotada por  $\Phi(t, x_0) = (\Phi^1(t, x_0), \dots, \Phi^n(t, x_0))$ . Logo, podemos reescrever a equação (2.18) como

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi^\mu(t, x_0) \right|_{t=0} = X^\mu(\Phi(t, x_0)), \quad (2.19)$$

com a condição inicial

$$\Phi^\mu(0, x_0) = x^\mu(0). \quad (2.20)$$

Abaixo, é demonstrado em um exemplo, como podemos utilizar a equação (2.19) para calcular o fluxo gerado por um campo vetorial em uma variedade.

**Exemplo 2.6.1.** Considerando primeiramente que  $V = \mathbb{R}^2$  e definindo uma carta  $(U, \phi)$ . Seja o campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$  dado por  $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  e seja uma curva  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que na carta  $(U, \phi)$ , a curva em  $t = 0$  possui coordenadas  $\phi(\alpha(0)) = (x, y) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Pela equação (2.20), temos que as condições iniciais são dadas por:

$$\begin{cases} \Phi^1(0, (x, y)) = x^1(0) = x \\ \Phi^2(0, (x, y)) = x^2(0) = y \end{cases} . \quad (2.21)$$

Omitindo os argumentos para não carregar os cálculos, da equação (2.19) obtemos

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = X(\Phi)|_{x_0} = \Phi^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x_0} + \Phi^1 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x_0} = \begin{pmatrix} \Phi^2 \\ \Phi^1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \left. \frac{d\Phi^1}{dt} \right|_{t=0} = \Phi^2 \\ \left. \frac{d\Phi^2}{dt} \right|_{t=0} = \Phi^1 \end{cases} . \quad (2.22)$$

Derivando as expressões finais para as componentes do fluxo  $\Phi(t, (x, y))$  na equação (2.22), obtemos

$$\begin{cases} \left. \frac{d^2 \Phi^1}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{d\Phi^1}{dt} = \Phi^1 \\ \left. \frac{d^2 \Phi^2}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{d\Phi^2}{dt} = \Phi^2 \end{cases}, \quad (2.23)$$

onde, ao resolvermos o sistema de equações diferenciais ordinárias visto em (2.23), no qual,  $A$  e  $B$  são duas constantes a determinar, encontramos como soluções:

$$\begin{cases} \Phi^1(t, (x, y)) = Ae^t + Be^{-t} \\ \Phi^2(t, (x, y)) = Ae^t - Be^{-t} \end{cases}. \quad (2.24)$$

Por fim, das condições iniciais descritas em (2.21), podemos obter a solução final para o conjunto de equações (2.23), encontrando então a expressão final para o fluxo  $\Phi$  gerado pelo campo vetorial  $X$ , escrito no formato matricial como

$$\Phi(t, (x, y)) = \begin{bmatrix} \Phi^1(t, (x, y)) \\ \Phi^2(t, (x, y)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{x+y}{2}\right)e^t + \left(\frac{x-y}{2}\right)e^{-t} \\ \left(\frac{x+y}{2}\right)e^t - \left(\frac{x-y}{2}\right)e^{-t} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

É válido notar que se tomarmos a derivada da expressão (2.25) e a avaliarmos em  $t = 0$ , retornamos as componentes do campo vetorial  $X$ , como esperado.

Para as construções adiante do trabalho, observamos que o fluxo  $\Phi$  gerado por um campo vetorial na direção de uma curva integral na variedade, ao fixarmos o parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ , pode ser interpretado como um difeomorfismo entre pontos da variedade, denotado por  $\Phi_t : V \rightarrow V$ .<sup>5</sup> De forma direta, tal difeomorfismo entre pontos da variedade induzirá um mapeamento entre espaços tangentes da mesma variedade que, veremos adiante, podendo ser utilizado, a grosso modo, para transladar um vetor definido no espaço tangente de um ponto para o espaço tangente de outro ponto.

Considere um ponto  $p \in V$ , cujas coordenadas são dadas por  $\phi(p) = \{x^\mu\}$  em uma carta  $(U, \phi)$ . Seja  $\Phi$  o fluxo gerado por um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$ , podemos deslocarmos infinitesimalmente sobre a variedade ao considerarmos um parâmetro  $\epsilon$  infi-

<sup>5</sup> $\Phi_t$  tem o efeito de “deslizar” sobre a variedade ao longo da curva integral no instante  $t$  (LEE, 2012).

nitesimal. As coordenadas do ponto  $p$  podem ser mapeadas com o auxílio de  $\Phi_\epsilon$  para um outro ponto  $\Phi_\epsilon(p)$  nas proximidades do ponto  $p$ . Desprezando termos de ordens superiores  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , tais coordenadas são dadas explicitamente por

$$\Phi_\epsilon^\mu(p) = \Phi^\mu(\epsilon, p) = \Phi^\mu(0, p) + \epsilon \frac{d}{dt} \Phi^\mu(t, p) \Big|_{t=0} = x^\mu + \epsilon X^\mu(p), \quad (2.26)$$

sendo  $X^\mu(p)$  a  $\mu$ -ésima componente do campo vetorial  $X$  no ponto  $p$ .<sup>6</sup>

É interessante também, por motivos que ficarão claros em capítulos posteriores, escrevermos o fluxo  $\Phi$  gerado por um campo vetorial  $X$  através de uma exponenciação, dada por

$$\Phi^\mu(t, p) = \exp(tX)x^\mu, \quad (2.27)$$

sendo  $\phi(p) = x^\mu$  a  $\mu$ -ésima coordenada do ponto  $p$ . A derivação da expressão (2.27) pode ser feita ao tomarmos um parâmetro  $t$ , expandirmos o mapeamento  $\Phi$  em torno do ponto inicial  $p = \Phi(0, p)$ . Sendo o cálculo da expansão dado explicitamente por

$$\begin{aligned} \Phi^\mu(t, p) &= \Phi^\mu(s, p) \Big|_{s=0} + t \frac{d}{ds} \Phi^\mu(s, p) \Big|_{s=0} + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 \Phi^\mu(s, p) \Big|_{s=0} + \dots \\ &= \left[ 1 + t \frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 + \dots \right] \Phi^\mu(s, p) \Big|_{s=0} = \exp \left( t \frac{d}{ds} \right) \Phi^\mu(s, p) \Big|_{s=0} \\ &= \left[ x^\mu + tX^\mu(p) + \frac{t^2}{2!} X^\nu \frac{\partial X^\mu(p)}{\partial x^\nu} + \dots \right] = \exp(tX)x^\mu. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Na próxima seção, veremos diretamente uma aplicação do fluxo  $\Phi_t$  gerado por um campo vetorial ao calcularmos derivadas direcionais de campos vetoriais em uma variedade. Tal conceito, além de ser importante nos estudos de álgebras e grupos de Lie (com aplicações em diversas áreas da física), terá importância na construção do capítulo final do presente trabalho.

---

<sup>6</sup>O campo vetorial  $X$  no ponto  $p$ , é conhecido nesse contexto como gerador infinitesimal da transformação  $\Phi_\epsilon$ .

## 2.7 Derivada de Lie

Vimos na equação (2.1) que a taxa de variação de uma função  $f$  em um ponto sobre a variedade pode ser interpretado como a atuação de um operador diferencial que definimos como sendo o vetor tangente  $X$  no ponto. De fato, o número que provém do resultado da atuação do operador diferencial na função  $f$  é tido como a derivada direcional da função ao longo da curva  $\alpha$ , na qual o vetor tangente à curva em  $\alpha(0)$  é dado por  $X$ .

Por outro lado, ao calcularmos a taxa de variação de um campo vetorial  $Y \in \mathcal{X}(V)$ , ou seja, a derivada direcional do campo ao longo de uma variedade da mesma forma que calculamos para a função  $f$ , precisamos tomar um certo cuidado. Por exemplo, tomando o vetor tangente  $X \in T_pV$ , ao calcularmos a derivada direcional do campo  $Y$  na direção do vetor  $X$  ao longo da curva  $\alpha(t)$ , se considerarmos  $\alpha(0) = p$ , pela definição de derivada, temos

$$\partial_X Y \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y|_{\alpha(t)} - Y|_{\alpha(0)}}{t} \quad (2.29)$$

Se observarmos a equação (2.29), vemos no numerador da expressão do limite, a diferença entre um objeto que pertence ao espaço tangente  $T_{\alpha(t)}V$  com um objeto que pertence ao espaço tangente  $T_{\alpha(0)}V$ . Tal operação é um problema, pois, não sabemos realizar operações como a diferença ou a soma entre vetores que pertencem a espaços vetoriais distintos. Somente para vetores que pertencem ao mesmo espaço vetorial que tais operações estão bem definidas. Portanto, urge a necessidade de reescrevermos a expressão (2.29) de uma forma que seja possível calcular tal variação. Isto pode ser feito com a ajuda do deslocamento infinitesimal  $\Phi_\epsilon$  que definimos anteriormente, de modo que, podemos pensar que substituiremos a direção do até então vetor  $X$ , pelo fluxo  $\Phi$  gerado por um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$ , no qual, terá o papel de transladar as componentes do vetor  $Y|_{\alpha(t)}$  para o ponto  $p$  e, somente então, poderemos calcular a derivada.

Como dito na seção anterior, o mapeamento  $\Phi_t : V \rightarrow V$ , sendo  $t \in \mathbb{R}$ , é um difeomorfismo definido sobre  $V$ . Dessa forma, como foi visto na seção 2.5, podemos estender tal mapeamento entre espaços tangentes da mesma variedade, ou seja, dizemos que o mapeamento  $\Phi_t$  induz um mapeamento  $(\Phi_t)_* : T_pV \rightarrow T_{\Phi_t(p)}V$ , para algum

$p \in V$ . Dessa forma, utilizando o deslocamento infinitesimal  $\Phi_\epsilon$  gerado pelo campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$  e considerando o campo vetorial  $Y \in \mathcal{X}(V)$ , tal que no ponto  $\Phi_\epsilon(p)$  exista o vetor  $Y|_{\Phi_\epsilon(p)} \in T_{\Phi_\epsilon(p)}V$ , temos que a atuação de  $(\Phi_{-\epsilon})_*$  no campo vetorial  $Y$  no ponto  $\Phi_\epsilon(p)$  é dada, baseada na equação (2.13), por

$$(\Phi_{-\epsilon})_*Y|_{\Phi_\epsilon(p)} = Y^\mu(\Phi_\epsilon(p))(\Phi_{-\epsilon})_*\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_{\Phi_\epsilon(p)} = Y^\mu(\Phi_\epsilon(p))\frac{\partial(\Phi_{-\epsilon}^\nu(p))}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big|_p, \quad (2.30)$$

onde, ao substituirmos na equação (2.30) as coordenadas  $\Phi_\epsilon^\lambda(p)$  do ponto  $\Phi_\epsilon(p)$  que calculamos na equação (2.26), bem como a  $\nu$ -ésima coordenada  $\Phi_{-\epsilon}^\nu(p)$  do ponto  $\Phi_{-\epsilon}(p)$ , cujo o cálculo é feito de forma análoga à equação (2.26). Obtemos

$$\begin{aligned} (\Phi_{-\epsilon})_*Y|_{\Phi_\epsilon(p)} &= Y^\mu(x^\lambda + \epsilon X^\lambda(p))\frac{\partial(x^\nu - \epsilon X^\nu(p))}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big|_p = \left( Y^\mu(p) + \epsilon X^\lambda\frac{\partial Y^\nu(p)}{\partial x^\lambda} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\ &\left( \delta_\mu^\nu - \epsilon\frac{\partial X^\nu(p)}{\partial x^\mu} \right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big|_p = \left[ Y^\mu(p) + \epsilon \left( X^\lambda(p)\frac{\partial Y^\mu(p)}{\partial x^\lambda} - Y^\nu(p)\frac{\partial X^\mu(p)}{\partial x^\nu} \right) \right]\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Desprezando os termos de ordens superiores da equação (2.31), podemos observar algo interessante. Utilizando o mapa induzido  $(\Phi_{-\epsilon})_*$ , levamos um vetor que estava definido nas proximidades do ponto  $p$  em  $T_{\Phi_\epsilon(p)}V$ , para o resultado final de (2.31), que claramente pode ser interpretado como um vetor de  $T_pV$ . Logo, se partimos nessa direção, a preocupação do começo da seção deixa de fazer sentido, pois, agora conseguimos mapear um objeto de um espaço vetorial a outro, podendo assim reformular a equação (2.29) e definirmos a maneira correta de avaliar a taxa de variação de um campo vetorial  $Y$ , dada pela chamada derivada de Lie, definida como

$$\mathcal{L}_X Y \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-\epsilon})_*Y|_{\Phi_\epsilon(p)} - Y|_p}{\epsilon}. \quad (2.32)$$

Se por um lado o campo vetorial  $X$  gera o fluxo  $\Phi$ , por outro, podemos pensar também

que o campo  $Y$  gera um fluxo  $\gamma^7$  na variedade  $V$ , ou seja,

$$\frac{d\gamma^\mu(t, p)}{dt} = Y^\mu(\gamma(t, p)). \quad (2.33)$$

Dessa maneira, na Figura 2.5 podemos ter uma ideia geométrica do papel crucial do mapeamento  $(\Phi_{-\epsilon})_*$  no numerador da expressão (2.32).

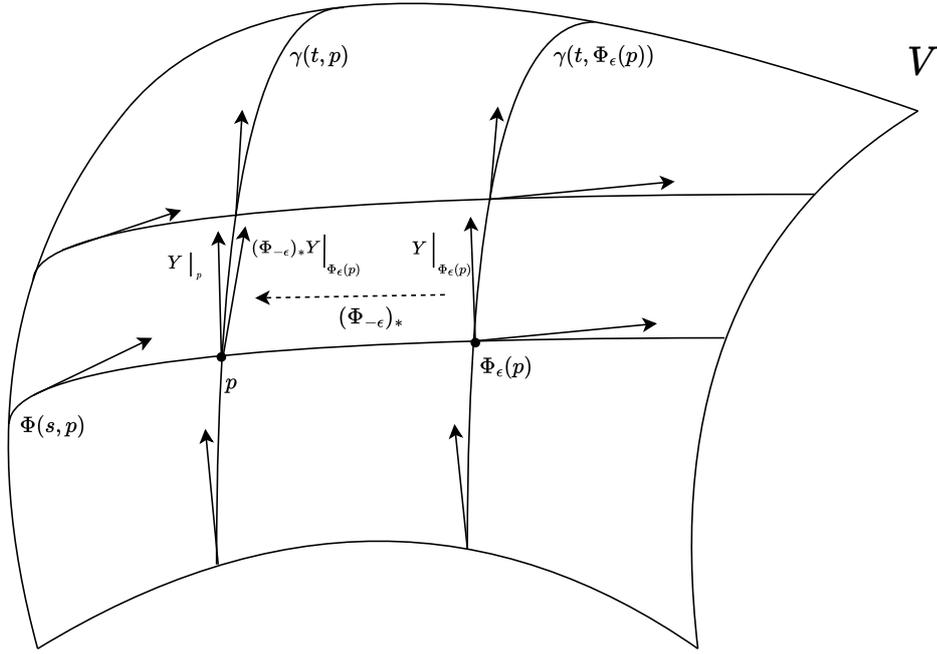


Figura 2.5: Ação do mapeamento  $(\Phi_{-\epsilon})_*$  em um vetor pode ser interpretado como um transporte do vetor pra outro ponto nas proximidades do ponto inicial.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Desenvolvendo explicitamente a expressão (2.32) com o resultado da equação (2.31) sem os termos de ordens superiores, encontramos uma forma de escrever a derivada de Lie do campo vetorial  $Y$ , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Y &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ Y|_p + \epsilon \left( X^\lambda(p) \frac{\partial Y^\mu(p)}{\partial x^\lambda} - Y^\nu(p) \frac{\partial X^\mu(p)}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p - Y|_p \right] \\ &= \left( X^\lambda(p) \frac{\partial Y^\mu(p)}{\partial x^\lambda} - Y^\nu(p) \frac{\partial X^\mu(p)}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p, \end{aligned} \quad (2.34)$$

<sup>7</sup>Como estamos trabalhando com campos vetoriais suaves na variedade  $V$ , pelo Teorema 9.12 de (LEE, 2012), podemos assumir que existe um fluxo, no qual, o campo vetorial  $Y$  é o gerador infinitesimal.

onde, podemos reconhecer que a expressão final entre parênteses se assemelha a um comutador entre dois objetos. Seja  $f$  uma função definida na variedade  $V$  e dois campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ , vamos definir o seguinte comutador

$$\begin{aligned} [X, Y]f &\equiv X[Y[f]] - Y[X[f]] = \left( X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \left( Y^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) - \left( Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \left( X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \\ &= X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + X^\mu Y^\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - Y^\nu X^\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \\ &= \left( X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (2.35)$$

O cálculo anterior mostra que a expressão  $[X, Y]$  é um campo vetorial. Ela é denominada de colchete de Lie e pode ser usada para se reescrever a equação (2.34) de uma forma mais elegante e compacta,

$$\mathcal{L}_X Y \equiv [X, Y]. \quad (2.36)$$

É conveniente para o contexto do trabalho, mostrar como a derivada de Lie atua sobre um campo tensorial arbitrário  $g$  do tipo  $(0, 2)$ , a partir de como o mapa induzido  $(\Phi_\epsilon)_*$  se estende ao atuar em objetos de  $T_p^*V$ . Dado um produto interno  $\langle, \rangle : T_p^*V \times T_pV \rightarrow \mathbb{R}$  para qualquer ponto  $p \in V$ , ao tomarmos um covetor  $dx^\mu|_{\Phi_\epsilon(p)}$  da base de  $T_{\Phi_\epsilon(p)}^*V$  e um vetor  $\frac{\partial}{\partial x^\nu}|_p = \partial_\nu|_p$  da base de  $T_pV$ , temos pela definição 2.5.1

$$\langle (\Phi_\epsilon)^* dx^\mu|_{\Phi_\epsilon(p)}, \partial_\nu|_p \rangle = \langle dx^\mu|_{\Phi_\epsilon(p)}, (\Phi_\epsilon)_* \partial_\nu|_p \rangle, \quad (2.37)$$

de onde obtemos explicitamente que

$$(\Phi_\epsilon)^* dx^\mu|_{\Phi_\epsilon(p)} = \partial_\alpha (x^\mu + \epsilon X^\mu) dx^\alpha|_p = (\delta_\alpha^\mu + \epsilon \partial_\alpha X^\mu) dx^\alpha|_{\Phi_\epsilon(p)} = dx^\mu|_p + \epsilon \partial_\alpha X^\mu dx^\alpha|_p. \quad (2.38)$$

Dessa forma, calculando explicitamente a expressão da derivada de Lie para um covetor da base do espaço  $T_p^*V$  temos,

$$\mathcal{L}_X(dx^\mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(\Phi_\epsilon)^* dx^\mu|_{\Phi_\epsilon(p)} - dx^\mu|_p] = \partial_\alpha X^\mu dx^\alpha|_p. \quad (2.39)$$

Sendo assim, dado um campo tensorial  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  do tipo  $(0, 2)$ , e sabendo que a

derivada de Lie obedece a regra de Leibnitz, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X(g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu) \\ &= \mathcal{L}_X(g_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_X(dx^\mu) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes \mathcal{L}_X(dx^\nu),\end{aligned}\tag{2.40}$$

temos que, calculando  $\mathcal{L}_X(g_{\mu\nu})$ , obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(g_{\mu\nu}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [g_{\mu\nu}(\Phi_\epsilon(p)) - g_{\mu\nu}(p)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [g_{\mu\nu}(x^\alpha + \epsilon X^\alpha(p)) - g_{\mu\nu}(p)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [g_{\mu\nu}(p) + \epsilon X^\alpha(p) \partial_\alpha g_{\mu\nu}(p) - g_{\mu\nu}(p)] \\ &= X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Substituindo na equação (2.40) os resultados encontrados nas equações (2.41) e (2.39), chegamos na expressão final da derivada de Lie de um campo tensorial  $g$  de ordem  $(0, 2)$  ao longo do fluxo gerado por um campo vetorial  $X$ , dada por

$$\mathcal{L}_X g = X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \partial_\mu X^\alpha g_{\alpha\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \partial_\nu X^\alpha g_{\mu\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu.\tag{2.42}$$

Um fato interessante a respeito do colchete de Lie nesse contexto é que ele pode ser utilizado para medir o quão distinto o fluxo gerado por um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$  é do fluxo gerado por um outro campo vetorial  $Y \in \mathcal{X}(V)$ , por exemplo. Tal fato pode ser visto de uma forma geométrica no exemplo abaixo, ao adaptarmos os campos vetoriais e os fluxos da Figura 2.5 para o caso em que a variedade  $V$  é a superfície da esfera tridimensional  $S^2$ .

**Exemplo 2.7.1.** Vamos considerar primeiramente o fluxo  $\Phi_s$  de um campo vetorial  $X$ , que passa por um ponto  $p = (x, y, z) \in S^2$  em  $s = 0$  e que gira em torno do eixo  $z$ , escrito no formato matricial como

$$\Phi(s, p) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \end{pmatrix},\tag{2.43}$$

onde, utilizando a equação (2.19), podemos obter as componentes do campo vetorial  $X$  no ponto  $p$ , dadas por

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(s, p) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \end{pmatrix} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = X \quad (2.44)$$

Por outro lado, considerando o fluxo  $\gamma_t$  gerado pelo campo vetorial  $Y$ , que gira em torno do eixo  $y$  e que também passa pelo ponto  $p$  em  $t = 0$ , dado por

$$\gamma(t, p) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos t - z \sin t \\ y \\ x \sin t + z \cos t \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

onde, da mesma forma, podemos calcular as componentes do campo vetorial  $Y$  no ponto  $p$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} \gamma(t, p) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \cos t - z \sin t \\ y \\ x \sin t + z \cos t \end{pmatrix} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = Y. \quad (2.46)$$

Na Figura 2.6 abaixo, podemos ver uma representação das linhas de campo geradas pelos campos vetoriais em  $S^2$ , baseada nas expressões encontradas para as componentes (2.44) e (2.46) dos campos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Dadas as expressões (2.43) e (2.45) para os fluxos sobre  $S^2$ , vamos agora realizar deslocamentos sobre os fluxos através dos parâmetros infinitesimais  $\epsilon$  e  $\delta$ . Utilizando  $\epsilon$  para deslocarmos ao longo do fluxo  $\Phi$  para um ponto  $\Phi(\epsilon, p)$  nas proximidades do ponto  $p$ , temos

$$\Phi(\epsilon, p) = \begin{pmatrix} x \cos \epsilon - y \sin \epsilon \\ x \sin \epsilon + y \cos \epsilon \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

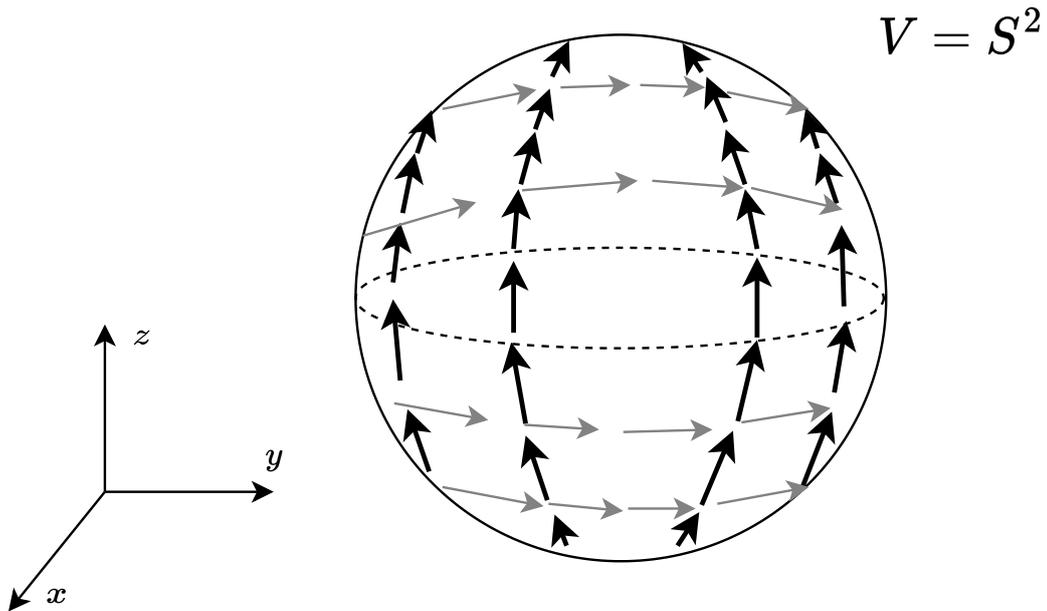


Figura 2.6: Campos vetoriais  $X$  e  $Y$  de (2.44) e (2.46) na superfície da esfera tridimensional  $S^2$ . As setas mais grossas representam o campo  $Y$ , enquanto as mais finas o campo  $X$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

onde, para  $\epsilon \ll 1$  temos que  $\cos \epsilon \approx 1$  e  $\sin \epsilon \approx \epsilon$ , logo, chegamos que

$$\Phi(\epsilon, p) \approx \begin{pmatrix} x - y\epsilon \\ x\epsilon + y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Utilizando do mesmo princípio, porém, considerando o parâmetro infinitesimal  $\delta$ , podemos deslocarmos ao longo do fluxo  $\gamma$  nas proximidades do ponto  $p$  para um ponto  $\gamma(\delta, p)$ , cujas coordenadas são dadas por

$$\gamma(\delta, p) \approx \begin{pmatrix} x - z\delta \\ y \\ x\delta + z \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Se deslocarmos no sentido do fluxo  $\Phi$  também por um parâmetro  $\epsilon$ , porém, a partir do ponto  $\gamma(\delta, p)$  encontrado acima, podemos reescrever a equação (2.43) afim de

encontrar as coordenadas de  $\Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p))$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p)) &= \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - z\delta \\ y \\ x\delta + z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - z\delta \\ y \\ x\delta + z \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} x - z\delta - \epsilon y \\ x\epsilon - z\delta\epsilon + y \\ x\delta + z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por outro lado, se deslocarmos ao longo do fluxo  $\gamma$  partindo do ponto  $\Phi(\epsilon, p)$ , obtemos de forma análoga à equação (2.50) as coordenadas do ponto  $\gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p))$ , dadas por

$$\gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p)) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y\epsilon \\ x\epsilon + y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y\epsilon - \delta z \\ x\epsilon + y \\ x\delta - y\epsilon\delta + z \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Ao tomarmos a diferença entre as coordenadas de  $\gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p))$  e  $\Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p))$ , vistas respectivamente nas equações (2.51) e (2.50), chegamos que

$$\begin{aligned} \gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p)) - \Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p)) &= \begin{pmatrix} x - y\epsilon - \delta z \\ x\epsilon + y \\ x\delta - y\epsilon\delta + z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x - z\delta - \epsilon y \\ x\epsilon - z\delta\epsilon + y \\ x\delta + z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ z\delta\epsilon \\ -y\delta\epsilon \end{pmatrix} \\ &= \delta\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por sua vez, ao calcularmos explicitamente a expressão de  $[X, Y]$  utilizando as compo-

nentes de  $X$  e  $Y$  dadas em (2.44) e (2.46) respectivamente, obtemos,

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \left( X^\lambda(p) \frac{\partial Y^\mu(p)}{\partial x^\lambda} - Y^\nu(p) \frac{\partial X^\mu(p)}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \\
&= \left( X^1 \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial Y^1}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial Y^1}{\partial x^3} - Y^1 \frac{\partial X^1}{\partial x^1} - Y^2 \frac{\partial X^1}{\partial x^2} - Y^3 \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p \\
&+ \left( X^1 \frac{\partial Y^2}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial Y^2}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial Y^2}{\partial x^3} - Y^1 \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - Y^2 \frac{\partial X^2}{\partial x^2} - Y^3 \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p \\
&+ \left( X^1 \frac{\partial Y^3}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial Y^3}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial Y^3}{\partial x^3} - Y^1 \frac{\partial X^3}{\partial x^1} - Y^2 \frac{\partial X^3}{\partial x^2} - Y^3 \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_p \quad (2.53) \\
&= z \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p - y \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Onde, podemos observar claramente que  $[X, Y]$  é proporcional à diferença de coordenadas (2.52), logo, podemos então reescrever a equação (2.52) como

$$\gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p)) - \Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p)) = \delta \epsilon [X, Y], \quad (2.54)$$

mostrando então que, de fato, o colchete de Lie está relacionado com a distinção entre um fluxo gerado por um campo vetorial de outro gerado por um outro campo na mesma variedade. Nitidamente, se os campos comutam temos,

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = 0 \implies \gamma(\delta, \Phi(\epsilon, p)) = \Phi(\epsilon, \gamma(\delta, p)), \quad (2.55)$$

ou seja, não há variações do campo vetorial  $Y$  ao longo do fluxo gerado por  $X$ , de tal forma que se deslocarmos infinitesimalmente ao longo dos fluxos gerados por cada campo vetorial, conseguimos chegar em um ponto em comum a ambos.

Por fim, podemos dar uma interpretação geométrica para a equação (2.52) ao olharmos para curvas integrais (fluxos) geradas pelos campos vetoriais da Figura 2.6. O colchete de Lie nesse caso pode ser visto como uma medida do fechamento do “paralelogramo” central na Figura 2.7, delimitado pelas curvas integrais de  $X$  e  $Y$ . Cabe ressaltar que na Figura 2.7, as distâncias deslocadas sobre os fluxos utilizando os parâmetro  $\delta$  e  $\epsilon$  são meramente ilustrativas, já que tais parâmetros tem natureza infinitesimal na nossa

construção.

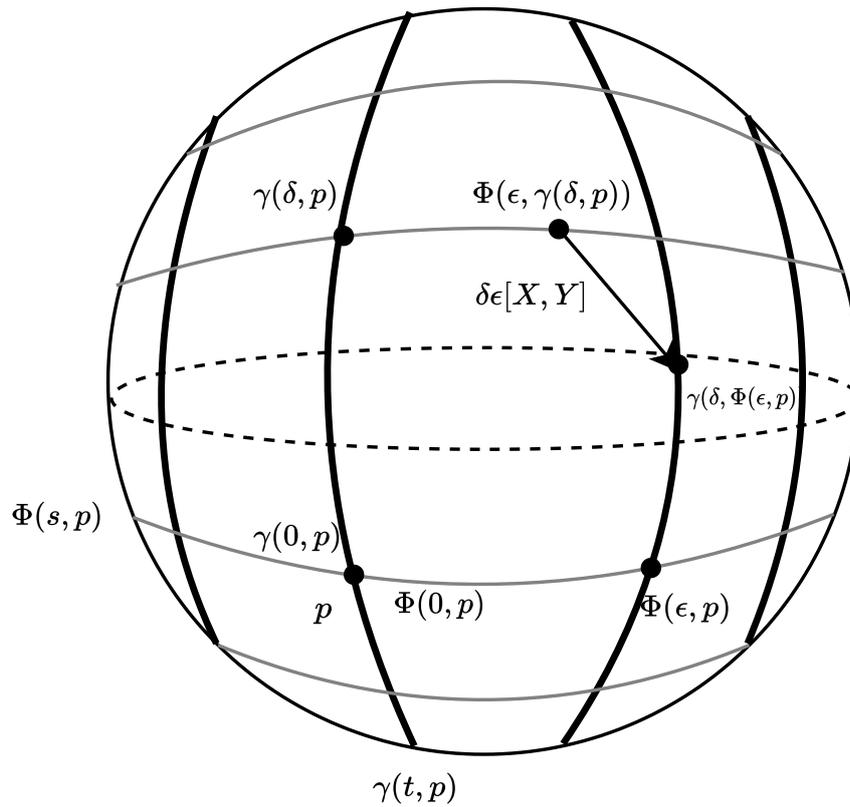


Figura 2.7: O colchete de Lie  $[X, Y]$  é proporcional à falha do fechamento do “paralelogramo” central delimitado pelos fluxos de  $X$  e  $Y$  sobre  $S^2$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Apesar de no Exemplo 2.7.1 termos utilizado a variedade  $S^2$  e fluxos gerados por campos vetoriais  $X$  e  $Y$  bem específicos sobre ela, tal resultado pode ser generalizado para uma variedade  $V$  qualquer. Assim como com campos vetoriais arbitrários definidos sobre  $V$ . Antes de passarmos para o próximo capítulo do presente trabalho, é conveniente listarmos algumas propriedades do colchete de Lie, sendo elas:

1. Antissimétrica;

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (2.56)$$

2. Bilinearidade;

$$[aX + bY, cZ + dW] = ac[X, Z] + ad[X, W] + bc[Y, Z] + bd[Y, W] \quad (2.57)$$

para quaisquer constantes  $a, b, c, d$ .

3. Identidade de Jacobi;

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \quad (2.58)$$

## 3 Grupos e Álgebras de Lie

O foco desse capítulo é introduzir a ideia de grupos, grupos de Lie e álgebras de Lie, assim como, através de alguns exemplos ao longo do capítulo mostrar a presença de grupos como objetos conectados a transformações de simetria. Além disso, durante o capítulo serão apresentadas algumas generalizações de conceitos que foram definidos em capítulos anteriores.

**Definição 3.0.1.** Um conjunto de elementos  $G$  é tido como um grupo se os seguintes quatro axiomas são satisfeitos:

1. Existe uma operação binária denotada por  $(\cdot)$  que associa pares de elementos de  $G$  a um novo elemento de  $G$ . A operação é chamada de produto do grupo e é escrita como, dado  $g$  e  $g' \in G$ ,  $g'' = g \cdot g' \in G$ .
2. Para cada três elementos  $g$ ,  $g'$  e  $g''$  de  $G$ , é válida uma lei associativa do produto  $(g \cdot g') \cdot g'' = g \cdot (g' \cdot g'')$ .
3. Existe um elemento neutro  $e$  em  $G$ , tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ ,  $\forall g \in G$ .
4. Para cada elemento  $g \in G$ , existe um elemento inverso  $g^{-1} \in G$ , tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

A definição acima nos permite identificar certos conjuntos de elementos como sendo grupos. Abaixo, daremos alguns exemplos.

**Exemplo 3.0.1.** O conjunto dos números  $\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} - \{0\}$  é um grupo com o produto usual. Ou seja, dado  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{R}^*$ ; tomando  $c \in \mathbb{R}^*$ , temos claramente que  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ; o elemento neutro  $e$  do grupo é o próprio número  $1 \in \mathbb{R}^*$ ; para cada número  $g \in \mathbb{R}^*$  seu inverso é dado por  $1/g \in \mathbb{R}^*$ .

**Exemplo 3.0.2.** O conjunto dos número reais com a soma  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo. Dado  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que  $a + b \in \mathbb{R}$ ; tomando  $c \in \mathbb{R}$ , claramente temos  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ; para cada  $g \in \mathbb{R}$ , nesse caso temos que o elemento inverso  $g^{-1} = -g$ ; o elemento neutro  $e$  para esse grupo é o número 0.

**Exemplo 3.0.3.** O conjunto *General Linear*  $GL(n, \mathbb{R})$  das matrizes  $n \times n$  sobre o corpo dos reais com o produto usual de matrizes é um grupo.

## 3.1 Exponencial de Matrizes

Após a definição de grupos, faz-se necessário para o capítulo em questão, definirmos de antemão a exponencial sobre um conjunto de matrizes quadradas complexas de ordem  $n$ , denotado  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Definição 3.1.1.** A função exponencial sobre o conjunto de matrizes  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  é uma aplicação  $e : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , onde, para uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}(A^2) + \dots \quad (3.1)$$

É interessante salientar que nem todas as propriedades da exponencial  $e^a$  de um número  $a \in \mathbb{R}$  são as mesmas da exponencial de uma matriz  $e^A$ . Por exemplo,  $e^A e^B \neq e^{A+B}$ , pois, pelo contrário teríamos que  $e^A e^B = e^{A+B} = e^{B+A} = e^B e^A$ , o que é um absurdo, pois  $e^A$  e  $e^B$ , para qualquer  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , são matrizes que não necessariamente comutam entre si. Para o caso geral em que  $A$  e  $B$  são duas matrizes arbitrárias, existe a fórmula de Kampbell-Baker-Hausdorff (HALL, 2003), dada por

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}(AB-BA)+\frac{1}{12}(AAB-2ABA+BAA)+\dots} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A[A,B]]+\dots}. \quad (3.2)$$

Abaixo, são listadas algumas propriedades que serão importantes para nossa construção ao longo do capítulo:

1. A série (3.1) converge para qualquer matriz  $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ ;
2.  $(e^A)^T = (\mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}AA + \dots)^T = \mathbb{1} + A^T + \frac{1}{2!}A^T A^T + \dots = e^{A^T}$ ;
3.  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ ;
4.  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ ;
5.  $e$  é uma bijeção entre uma vizinhança da matriz  $\mathbb{1}$  e uma vizinhança da matriz nula, conforme a Figura 3.1.

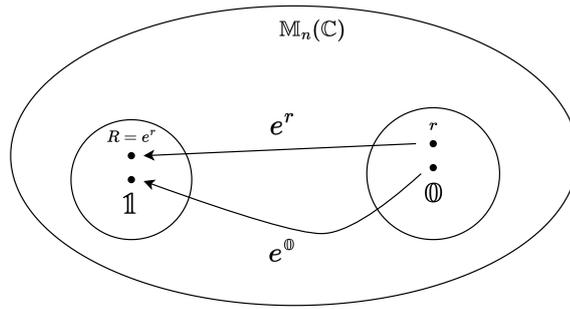


Figura 3.1: Exponencial de matriz como uma bijeção entre dois subconjuntos de matrizes.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

## 3.2 Grupos de Lie

Após termos definido a exponenciação de matrizes e suas propriedades, é conveniente definirmos os chamados grupos de Lie. Os grupos de Lie formam um caso especial de grupos no qual podemos designar a cada elemento do grupo uma coordenada, ou seja, os elementos do grupo podem ser parametrizados localmente a partir de elementos de um outro conjunto que veremos mais adiante, utilizando como mapeamento de parametrização a própria função exponencial definida anteriormente. Sendo assim, um grupo de Lie é tido como uma variedade, munida das propriedades usuais de um grupo.

**Definição 3.2.1.** Um grupo de Lie  $G$  é uma variedade diferenciável munida das propriedades usuais de um grupo, com a diferença que tanto o produto do grupo  $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$  quanto a inversão  $g \mapsto g^{-1}$  são aplicações diferenciáveis.

Para evitar complicações técnicas, o foco principal aqui será estabelecer coordenadas sobre  $G$  usando a exponencial. A seguir, alguns exemplos de grupos de Lie.

**Exemplo 3.2.1.** O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a soma usual, mencionado previamente, é caracterizado como um grupo de Lie.

**Exemplo 3.2.2.** O conjunto  $\mathbb{R}_{>0}$  dos números reais positivos com o produto usual é um grupo de Lie.  $\forall g \in \mathbb{R}_{>0}$ , podemos escrever  $g = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é a coordenada de  $g$ . O produto do grupo fica codificado na soma em  $\mathbb{R}$ :  $g_1 \cdot g_2 = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.2.3.** O grupo  $GL(n, \mathbb{R})$ , apresentado previamente, possui subgrupos que são de interesse para o trabalho e que são grupos de Lie, sendo eles o grupo formado por

matrizes ortogonais  $3 \times 3$  de determinante unitário  $SO(3)$  e o grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ , formado pelas matrizes  $4 \times 4$  que representam as transformações de Lorentz no espaço de Minkowski, também com determinante igual a 1. Estes dois grupos serão tratados com todos os detalhes na próxima seção.

### 3.3 Álgebras de Lie

Para a obtenção das coordenadas de elementos de um grupo de Lie usaremos a exponencial de matrizes. Como veremos, pelo menos para os casos de interesse -  $SO(3)$  e  $SO(1, 3)$  - mapeamos biunivocamente elementos do grupo em um conjunto com estrutura de espaço vetorial. Este conjunto é o que chamaremos de álgebra de Lie associada ao grupo correspondente. Formalmente, começaremos com a seguinte definição.

**Definição 3.3.1.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  (sobre  $\mathbb{R}$ ) de um grupo de Lie  $G$  é um espaço vetorial munido de um comutador  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

Para parametrizarmos um elemento de um grupo de Lie, precisamos primeiramente explorar as restrições que o grupo impõe a seus elementos. Para o nosso primeiro exemplo de interesse, vamos pegar um elemento arbitrário  $R$  pertencente ao grupo  $SO(3)$ . Utilizando do fato que o mapa exponencial de uma matriz pode ser visto como uma bijeção de uma vizinhança pequena da matriz nula, sobre uma vizinhança pequena da matriz identidade (Figura 3.1, podemos tomar uma matriz  $r$  na primeira vizinhança e escrever  $R = e^r$ , sendo  $R$  uma matriz na vizinhança da matriz  $\mathbb{1}$ . Dessa forma, recorrendo as restrições que o grupo  $SO(3)$  impõe a seus elementos, temos:

1.  $R^{-1} = R^T \implies (e^r)^{-1} = (e^r)^T = e^{r^T} = e^{-r} \implies r^T = -r;$
2.  $\det(R) = 1 \implies \det(e^r) = e^{\text{Tr}(r)} = 1 \implies \text{Tr}(r) = 0.$

Ora, mas pelas restrições encontradas acima, vemos que a matriz genérica  $r$  deve ser uma matriz antissimétrica. Logo, encontramos que  $r$  é dada da seguinte maneira:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

para quaisquer  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ . Podemos reescrever a equação (3.3) de uma maneira bem específica, utilizando que  $i \in \{1, 2, 3\}$ , temos

$$r = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha^i \tau_i, \quad (3.4)$$

Dada duas matrizes  $r_1, r_2$  da forma  $r_1 = \alpha^i \tau_i$  e  $r_2 = \beta^j \tau_j$  com  $\alpha^i, \beta^j \in \mathbb{R}$ , temos,

1.  $(r_1 + r_2)^T = r_1^T + r_2^T = -(r_1 + r_2)$ ,
2.  $\text{Tr}(r_1 + r_2) = \text{Tr}(r_1) + \text{Tr}(r_2) = 0$ .

Logo, o conjunto obtido fazendo combinações lineares das matrizes (linearmente independentes)  $\tau_i$  tem estrutura de espaço vetorial. Para recuperar um elemento de  $SO(3)$ , fazemos  $g = e^{\alpha^i \tau_i}$  e os coeficientes  $\alpha_i$  são interpretados como as coordenadas do elemento  $g$  do grupo. Por fim, notamos que é essencial conhecer o comutador entre as matrizes  $\tau_i$  para o cálculo da fórmula de Kampbell-Baker-Hausdorff (3.2). Para este caso, ao calcularmos explicitamente, temos

$$[\tau_3, \tau_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\tau_1, \quad (3.5)$$

$$[\tau_2, \tau_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\tau_3, \quad (3.6)$$

$$[\tau_1, \tau_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\tau_2, \quad (3.7)$$

onde, utilizando do tensor antissimétrico  $\epsilon_{ijk}$  de Levi-Civita, podemos reescrever as expressões acima de uma forma mais compacta,

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau_k. \quad (3.8)$$

Conseqüentemente, podemos escrever o produto do grupo  $SO(3)$  de uma forma mais simplificada, ou seja, tomando  $R_1 = e^{\alpha \tau_1}$  e  $R_3 = e^{\beta \tau_3}$  por exemplo, temos

$$R_1 \cdot R_3 = e^{\alpha \tau_1} \cdot e^{\beta \tau_3} = e^{\alpha \tau_1 + \beta \tau_3 + \frac{1}{2}[\alpha \tau_1, \beta \tau_3] + \dots} = e^{\alpha \tau_1 + \beta \tau_3 - \frac{1}{2} \alpha \beta \tau_2 + \dots} \quad (3.9)$$

Dessa forma, associado ao grupo  $SO(3)$  encontramos um conjunto que chamaremos de  $so(3)$ . Qualquer elemento do grupo pode ser obtido a partir da exponenciação de um elemento de  $so(3)$ . Além disso,  $so(3)$  tem estrutura de um espaço vetorial, munido de um comutador visto na expressão (3.8), justificando, finalmente a definição 3.3.1. O comutador visto na equação (3.8) possui as mesmas propriedades do colchete de Lie, visto ao final da seção 2.7 do presente trabalho (mais à frente veremos que tal comutador tem uma conexão mais profunda com o mesmo). Para concluir este primeiro exemplo, vamos tomar a exponencial da matriz  $\alpha \cdot \tau_3$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha\tau_3} &= e^{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots & -(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots) & 0 \\ \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots & 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

sendo o resultado final reconhecido geometricamente como uma matriz de rotação entorno do eixo  $z$  por um angulo  $\alpha$ . De fato, os elementos do grupo  $SO(3)$  representam as matrizes de rotação que atuam no espaço  $\mathbb{R}^3$  e ao realizar uma exponenciação análoga feita no caso acima, trocando o gerador  $\tau_3$  pelos geradores  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ , obtemos matrizes que representam rotações em torno do eixo  $x$  ou entorno do eixo  $y$ , respectivamente.

Ademais, apesar de termos utilizado o grupo  $SO(3)$  em questão, o conceito de álgebra de Lie associado a um grupo de Lie é generalizado, de forma que todo grupo de Lie possui uma álgebra de Lie associada ao mesmo. E de fato, a partir de elementos da álgebra de Lie, podemos construir elementos pertencentes ao grupo de Lie de matrizes associado a álgebra utilizando da bijeção descrita na Figura 3.1, como foi visto na equação (3.10) com a exponencial do gerador  $\tau_1$ . Os geradores da álgebra, as matrizes  $\tau_i$  para o caso da álgebra  $so(3)$ , podem ser chamados também de geradores do grupo, e a dimensão da álgebra, ou seja, o número de vetores linearmente independentes que geram o espaço vetorial, também é a dimensão do grupo.

Façamos agora uma análise similar ao grupo  $SO(1,3)$ . Para encontrarmos os

elementos da álgebra de Lie desse grupo, ou seja, os elementos de  $so(1,3)$ , precisaríamos previamente apresentar o conceito de (pseudo-)métrica sobre uma variedade. Tal conceito será apresentado somente no próximo capítulo do presente trabalho e desse modo, peço ao leitor que no momento considere  $\eta$  como uma matriz  $4 \times 4$ , tal que  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Dessa forma, o grupo  $SO(1,3)$  é composto por matrizes reais denotadas na literatura como  $\Lambda$ , satisfazendo as seguinte expressões:

$$\begin{aligned} 1) \det \Lambda &= 1; \\ 2) \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Partindo das imposições do grupo sobre seu elementos, em (ROCHA; RIZZUTI; MOTA, 2013) é visto uma construção dos elementos da álgebra  $so(1,3)$  similar a que foi feita no presente trabalho para a construção da álgebra  $so(3)$ . Ao escrever um elemento do grupo como a exponencial de uma matriz  $\omega$ ,

$$\Lambda = e^\omega, \tag{3.12}$$

e substituir nas expressões descritas em (3.11), é obtido que os geradores do grupo, ou seja, os elementos de  $so(1,3)$  são seis matrizes  $\mathcal{M}_i$ , dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Desse modo, de maneira similar à realizada na equação (3.10) para a obtenção de um elemento de  $SO(3)$  através da exponenciação de um elemento da álgebra vezes um parâmetro, podemos tomar o gerador  $\mathcal{M}_4$  e um parâmetro  $\xi \in \mathbb{R}$  afim de obter um elemento  $\Lambda$  de

$SO(1, 3)$ , sendo o mesmo dado por

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{M}_4\xi} &= e^{\begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(1, 3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

É possível dar uma interpretação física para (3.14):  $\mathcal{M}_4$  gera um boost de Lorentz (ou transformação de Lorentz) na direção  $x$  com velocidade  $v$ , tal que  $\tanh \xi = \frac{v}{c}$  (ROCHA; RIZZUTI; MOTA, 2013). Analogamente,  $\mathcal{M}_5(\mathcal{M}_6)$  gera um boost na direção  $y(z)$ . O setor de  $so(1, 3)$  formado pelos geradores  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  são responsáveis por rotações, bastando para tal interpretação notar a similaridade estrutural com as matrizes  $\tau_i$ .

Além da formulação algébrica adotada no decorrer da seção, podemos explorar o carácter geométrico da álgebra de Lie. Álgebras de Lie possuem uma conexão direta e profunda com a(o) derivada(colchete) de Lie. Na próxima seção, será mostrada uma outra formulação da álgebra de Lie visto na literatura de variedades diferenciáveis (LEE, 2012; NAKAHARA, 2003; FERREIRA, 2011), ligada com campos vetoriais invariantes por uma translação pela esquerda.

### 3.4 Campos Vetoriais Invariantes

Vimos na seção anterior que a álgebra de Lie é um espaço vetorial, munida de um comutador entre os geradores desse espaço cujo a exponencial de qualquer gerador vezes um parâmetro nos fornece elementos do grupo de Lie associado à álgebra.

Por outro lado, o fato de um grupo de Lie ser uma variedade diferenciável, nos permite aproximar a vizinhança de cada ponto  $g$  de um grupo de Lie  $G$  por um espaço Euclidiano, o qual é o espaço tangente  $T_g G$  ao grupo de Lie naquele ponto em específico (FERREIRA, 2011). Dessa maneira, como forma de explorar tais conceitos, vamos definir primeiramente a operação de translação de elementos do grupo pela esquerda, e ver que no fundo ela se relaciona com a própria álgebra de Lie do grupo  $G$ .

**Definição 3.4.1.** Sejam  $b$  e  $g$  dois elementos de um grupo de Lie  $G$ . A operação de translação pela esquerda  $L_b : G \rightarrow G$  é um difeomorfismo definido por  $L_b g = b \cdot g$ .

Temos que, como tal mapeamento  $L_b$  é um difeomorfismo sobre variedade  $G$ ,  $L_b$  induz um mapeamento entre espaços tangentes de elemento do grupo  $G$ , de forma análoga ao mapa induzido pelo fluxo infinitesimal visto na seção 2.7. Ou seja, existe o mapeamento  $L_{b*}$  que leva vetores definidos em  $T_gG$  a vetores em  $T_{bg}G$ . Nesse contexto, podemos definir campos vetoriais em pontos  $g \in G$ , do qual, ao atuarmos com o mapa induzido em tais campos, observamos que os mesmos são invariantes sob a atuação de  $L_{b*}$ .

**Definição 3.4.2.** Seja  $X$  um campo vetorial em um grupo de Lie  $G$ .  $X$  é dito um campo vetorial invariante pela esquerda quando  $L_{b*}X|_g = X|_{bg}$ .

Ou seja, sabemos pela seção 2.2 que em cada ponto  $g$  de  $G$ , um campo vetorial designa uma vetor tangente naquele ponto pertencente a  $T_gG$ . Logo, se um campo vetorial  $X$  é invariante pela esquerda, podemos pensar que o campo em questão fornece vetores idênticos em pontos que se diferem por uma translação ao longo do grupo (Figura 3.2).

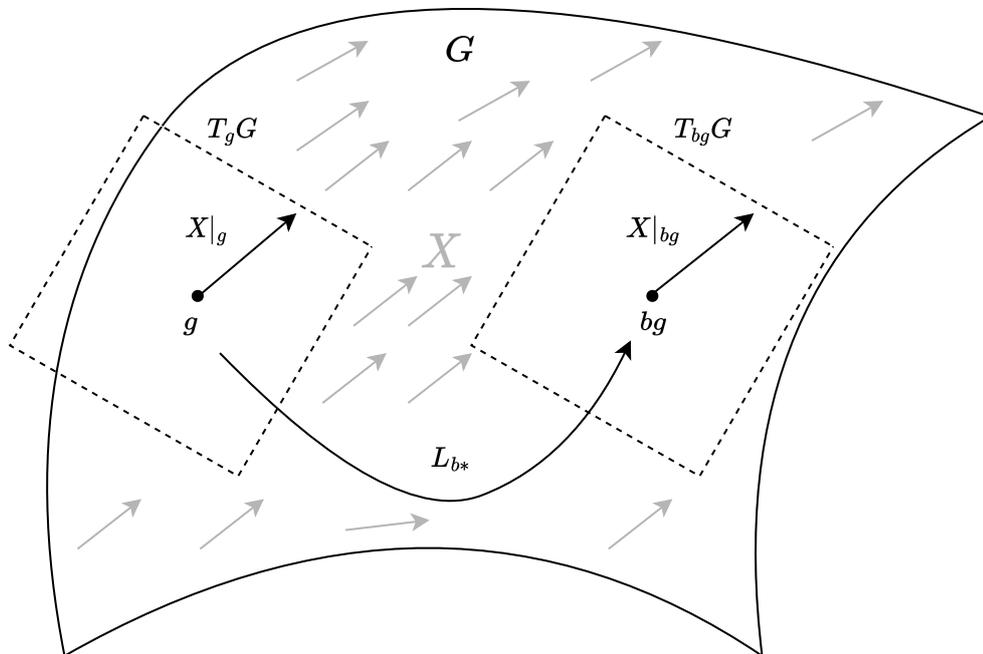


Figura 3.2: Ação do mapa induzido  $L_{b*}$  em um campo vetorial  $X$  sobre o grupo de Lie  $G$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Ao denotarmos  $x^\mu(g)$  e  $x^\mu(bg)$  como sendo as  $\mu$ -ésimas coordenadas de  $g$  e  $bg \in G$  respectivamente, a atuação de  $L_{b*}$  em um campo vetorial  $X$  invariante pela esquerda é

dada explicitamente por

$$L_{b*}X|_g = X^\mu(g) \frac{\partial x^\nu(bg)}{\partial x^\mu(g)} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_{bg} = X^\nu(bg) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_{bg} = X|_{bg}. \quad (3.15)$$

Estendendo tal mapeamento para um campo vetorial escrito utilizando a expressão do colchete de Lie visto na equação (2.34),  $[X, Y]$  para  $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ , podemos observar que o mesmo também é invariante sob a atuação de  $L_{b*}$ , desde que  $X$  e  $Y$  também sejam,

$$\begin{aligned} L_{b*}[X, Y]|_g &= [L_{b*}X|_g, L_{b*}Y|_g] = \left[ X^\nu(bg) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_{bg}, Y^\mu(bg) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{bg} \right] = \\ &= \left( X^\nu(bg) \frac{\partial Y^\mu(bg)}{\partial x^\nu} - Y^\nu(bg) \frac{\partial X^\mu(bg)}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{bg} = [X, Y]|_{bg} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, ao tomarmos o valor de um campo vetorial  $X$  no espaço tangente  $T_eG$  do elemento neutro do grupo  $e$ , ou seja, o vetor  $X|_e \in T_eG$ , temos que para todo  $g \in G$ , podemos através do mapa induzido  $L_{g*}$  determinar de forma única seu valor em  $T_gG$ , dado por

$$L_{g*}X|_e = X|_g. \quad (3.17)$$

Dessa forma, pela definição 3.4.2, o campo vetorial  $X$  é tido como invariante pela esquerda. Mas como nesse contexto  $X$  é um campo vetorial arbitrário de  $\mathcal{X}(G)$ , assim como  $g$  é um ponto arbitrário de  $G$ , então, temos que todo campo vetorial  $X$  invariante pela esquerda em  $\mathcal{X}(G)$  é unicamente determinado pelo seu valor no ponto  $e$ , ou seja, por  $X|_e \in T_eG$ . Sendo assim, podemos dizer que existe um isomorfismo entre o conjunto de campos vetoriais invariantes pela esquerda do grupo  $G$ , que denotaremos por  $\mathcal{G}^8$ , e o espaço tangente  $T_eG$ . Logo, por definição, tal conjunto  $\mathcal{G}$  é chamado de álgebra de Lie do grupo  $G$ , munido da operação do colchete de Lie, que vimos em (3.16) que é invariante pela esquerda sob a atuação do mapa induzido em questão, de modo que  $[X, Y] \in \mathcal{G}$ , para todo  $X, Y \in \mathcal{G}$ .

**Definição 3.4.3.** O conjunto de todos os campos vetoriais invariantes pela esquerda  $\mathcal{G}$ , munido com o colchete de Lie é chamado também de álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ .

Vamos considerar um exemplo de campos vetoriais invariantes pela esquerda do

---

<sup>8</sup>Vale ressaltar que  $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}(G)$ .

grupo  $GL(n, \mathbb{R})$ , como forma de observar de forma intuitiva as construções enunciadas acima.

**Exemplo 3.4.1.** Considerando o grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ , as coordenadas de uma matriz  $n \times n$  qualquer do grupo é dada por  $n^2$  números  $x^{ij}$ . O elemento neutro do grupo, ou seja, a matriz identidade  $\mathbb{1}_n$  pode ser parametrizada pela delta de Kronecker  $\delta^{ij}$ . Vamos considerar dois elementos quaisquer  $g, b \in GL(n, \mathbb{R})$ , tal que  $g = \{x^{ij}(g)\}$  e  $b = \{x^{ij}(b)\}$ , temos que, a translação pela esquerda nesse caso é dada pela multiplicação usual de matrizes, ou seja,

$$L_b g = x^{ik}(b)x^{kj}(g). \quad (3.18)$$

Vamos considerar um vetor  $V \in T_e GL(n, \mathbb{R})$ , onde  $V = V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_e$ . O campo vetorial invariante pela esquerda gerado por  $V$  é dado por

$$\begin{aligned} L_{g*} V &= L_{g*} \left[ V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_e \right] = V^{ij}(e) \frac{\partial(L_g e)}{\partial x^{ij}} \Big|_e \frac{\partial}{\partial x^{lk}} \Big|_g = V^{ij}(e) \frac{\partial[x^{lm}(g)x^{mk}(e)]}{\partial x^{ij}} \Big|_e \frac{\partial}{\partial x^{lk}} \Big|_g \\ &= V^{ij}(e) x^{lm}(g) \frac{\partial x^{mk}(e)}{\partial x^{ij}} \Big|_e \frac{\partial}{\partial x^{lk}} \Big|_g = V^{ij}(e) x^{lm}(g) \delta_i^m \delta_j^k \frac{\partial}{\partial x^{lk}} \Big|_g = x^{li}(g) V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g \\ &= (gV)^{lj} \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g = gV. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tomando um outro vetor  $Y \in T_e GL(n, \mathbb{R})$ , podemos verificar que o colchete de Lie  $[V, Y]$  também gera um campo vetorial invariante pela esquerda,

$$\begin{aligned} L_{g*}[V, Y] &= [L_{g*}V, L_{g*}Y] = x^{li}(g) V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g \left[ x^{km}(g) Y^{mn}(e) \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g \right] \\ &\quad - x^{km}(g) Y^{mn}(e) \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g \left[ x^{li}(g) V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g \right] = x^{li}(g) V^{ij}(e) \delta_k^l \delta_m^j Y^{mn}(e) \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g \\ &\quad - x^{km}(g) Y^{mn}(e) \delta_k^l \delta_n^i V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g = x^{ki}(g) V^{im}(e) Y^{mn}(e) \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g \\ &\quad - x^{lm}(g) Y^{mi}(e) V^{ij}(e) \frac{\partial}{\partial x^{lj}} \Big|_g = x^{ki}(g) [V^{im}(e) Y^{mn}(e) - Y^{im}(e) V^{mn}(e)] \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g \\ &= (g[V, Y])^{kn} \frac{\partial}{\partial x^{kn}} \Big|_g = g[V, Y]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como forma de conectar a construção geométrica desenvolvida nesta seção com a construção algébrica da seção anterior, vamos considerar uma curva integral  $\alpha(t)$  no

grupo  $SO(3)$ .

**Exemplo 3.4.2.** Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  uma curva integral no grupo  $SO(3)$ , tal que,

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Podemos observar que em  $t = 0$ ,  $\alpha(0) = e = \mathbf{1}_3$ . Por outro lado, pela definição 2.6.1, temos que o vetor tangente a curva em  $\alpha(0)$  é unicamente determinado por

$$\left. \frac{d\alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_e SO(3). \quad (3.22)$$

Sendo o resultado final encontrado em (3.22) o próprio gerador  $\tau_3$  da álgebra de Lie  $so(3)$ , visto na equação (3.10). Desse modo, a partir desse pequeno exemplo, podemos observar a presença do isomorfismo supracitado entre a álgebra de Lie de um grupo de Lie com o espaço tangente ao elemento neutro do grupo,  $so(3) \cong T_e SO(3)$ .

## 3.5 Ação de Grupos de Lie em Variedades

Vimos na seção 2.6 que um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(V)$  em uma variedade  $V$ , associado à sua curva integral, gera um fluxo ao longo de  $V$ . Por outro lado, podemos estender tal conceito para fluxos gerados por campos vetoriais invariantes pela esquerda (ou seja, elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie), de forma que o mesmo induz um campo vetorial a partir da operação de exponenciação. Para isso, podemos enxergar primeiramente o fluxo, quando fixamos o número  $t \in \mathbb{R}$  por definição, como um grupo uniparamétrico de transformações.

**Definição 3.5.1.** Para um  $t \in \mathbb{R}$  fixo, um fluxo  $\Phi(t, p)$  é um difeomorfismo de  $V$  sobre  $V$ , que chamamos de  $\Phi_t : V \rightarrow V$  na seção 2.6.  $\Phi_t$  forma um grupo (comutativo) pois satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\Phi_t(\Phi_s(p)) = \Phi_{t+s}(p)$ ,  $\forall p \in V$ ;

2.  $\Phi_0(p) = p$ ;
3.  $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$ .

Este grupo é chamado de grupo uniparamétrico de transformações. Por outro lado, podemos substituir o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  munido da soma, por um outro grupo de Lie  $G$ , de forma que teremos um mapeamento generalizado  $\Sigma$ .

**Definição 3.5.2.** Se  $\Sigma : G \times V \rightarrow V$  é tal que:

1.  $\Sigma(g_1, \Sigma(g_2, p)) = \Sigma(g_1 \cdot g_2, p), \forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in V$ ;
2.  $\Sigma(e, p) = p, \forall p \in V$  e  $e$  o elemento neutro de  $G$ ;
3.  $\Sigma(g, \cdot) : V \rightarrow V$  é um difeomorfismo,

então dizemos que  $\Sigma$  é a ação do grupo  $G$  sobre a variedade  $V$ .

Por conseguinte, da definição 3.5.2, podemos perceber que o fluxo é um caso específico de um mapeamento mais geral. Um exemplo típico de ação será exibido abaixo.

**Exemplo 3.5.1.** Seja uma matriz arbitrária  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  e considerando  $\mathbb{R}^3$  como a variedade diferenciável, ao tomarmos  $v \in \mathbb{R}^3$ , a ação de  $GL(3, \mathbb{R})$  em  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$\Sigma(A, v) = A \cdot v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.23)$$

do qual, é nada mais nada menos que a multiplicação usual de uma matriz por um vetor coluna. De fato,  $\Sigma(\mathbf{1}, v) = v$ . Além disso,  $\Sigma(A_1, \Sigma(A_2, v)) = A_1 A_2 v = \Sigma(A_1 \cdot A_2, v)$ . Por fim, como  $\det A \neq 0, \forall A \in GL(3, \mathbb{R})$ , segue que para  $A$  fixo,  $v \mapsto Av$  é invertível. Com isso, concluímos que (3.23) define uma ação.

## 3.6 Campos de Vetores Induzidos

No decorrer do capítulo, foi apresentado que vetores pertencentes ao espaço tangente  $T_e G$  do elemento neutro de um grupo de Lie  $G$  define unicamente um campo vetorial  $X$

invariante pela esquerda. Assim como, vimos que a exponenciação de um vetor da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  gera elementos do grupo  $G$ .

Nessa linha, iremos nessa seção fechar o capítulo conectando o fluxo gerado por um campo vetorial, dado pela exponencial do campo vetorial cuja definição foi vista anteriormente na equação (2.27), com a ideia de que a ação de um grupo de Lie sobre uma variedade  $V$  determinada por geradores de campos vetoriais invariantes pela esquerda, pode induzir outros campos vetoriais na própria variedade  $V$ .

Dessa forma, seja  $Y \in T_e G$  um gerador de um campo vetorial  $X$  invariante pela esquerda,  $(U, \phi)$  uma carta na variedade  $V$  tal que para um ponto  $p \in V$ , suas coordenadas são dadas por  $\phi(p) = \{x^\mu\} = x$ ,  $\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  o fluxo gerado por  $Y$  e para algum  $t \in \mathbb{R}$ , o campo vetorial induzido por  $X$  em  $V$  é definido por

$$Y^\#|_x := \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, p) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \Sigma(e^{tY}, p) \right|_{t=0}, \quad (3.24)$$

sendo  $\Sigma : G \times V \rightarrow V$  a ação do grupo  $G$  na variedade  $V$ . Podemos perceber no exemplo abaixo que indiretamente utilizamos a ideia expressa na equação (3.24), nas equações (2.43) e (2.45), quando calculamos um fluxo que gira em torno do eixo  $z$  e um outro fluxo que rotaciona em torno do eixo  $y$  no exemplo (2.7.1).

**Exemplo 3.6.1.** Vamos considerar o grupo de Lie  $SO(3)$  agindo sobre  $V = \mathbb{R}^3$  e um ponto  $p \in V$ , cujas coordenadas são dadas diretamente por

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Ao tomarmos o vetor  $\tau_3 \in T_e SO(3)$ , sabemos pela equação (3.10), que

$$e^{t\tau_3} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

e considerando que para este grupo

$$\Sigma(e^{tY}, p) = e^{tY} \cdot p, \quad (3.27)$$

sendo  $Y$  um elemento qualquer de  $T_eSO(3)$ , pela equação (3.24), temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, p) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} e^{t\tau_3} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde, podemos observar que o campo vetorial induzido pelo campo vetorial invariante pela esquerda gerado pelo vetor  $\tau_3 \in T_eSO(3)$  encontrado em (3.28) foi o mesmo que utilizamos na equação (2.44), quando definimos um fluxo que gira em torno do eixo  $z$ . De forma análoga, ao trocarmos  $\tau_3$  por  $\tau_2$  na equação (3.26) e repetimos o passo da equação (3.28), obtemos como campo vetorial induzido o próprio campo vetorial da equação (2.46), quando definimos um fluxo  $\gamma$  que gira em torno do eixo  $y$  no exemplo (2.7.1).

Por fim, podemos concluir que os geradores da álgebra de Lie  $so(3)$  do grupo  $SO(3)$ , ou seja, os vetores da base do espaço  $T_eSO(3)$ , atuam em variedades através da ação do grupo, como foi o caso da atuação em  $\mathbb{R}^3$  acima e em  $S^2$  no exemplo (2.7.1), gerando campos vetoriais induzidos cujo os fluxos rotacionam em tais variedades. Mais à frente no trabalho, exploraremos um resultado análogo, porém, com o grupo  $SO(1, 3)$ . Mas antes, no próximo capítulo serão abordados alguns tópicos de geometria Riemanniana que serão fundamentais para o desenvolvimento da parte final do presente trabalho.

## 4 Geometria Riemanniana

Vimos no Capítulo 2, que uma variedade  $V$  é um espaço topológico que localmente se comporta como o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Além disso, na seção 2.3, foi apresentado que covetores atuam sobre vetores através do produto interno  $\langle, \rangle$ , que é definido como um mapeamento de  $T_p^*V \times T_pV$  em  $\mathbb{R}$ .

Nesse capítulo, será apresentado o campo tensorial métrico  $g$ , ou simplesmente métrica, que é essencialmente um objeto que define de forma suave em cada ponto  $p \in V$  um tensor  $g_p$  do tipo  $(0, 2)$ , do qual induz um produto interno em cada ponto da variedade. Tal tensor pode ser utilizado para calcular algumas propriedades geométricas como comprimentos, distâncias e até ângulos em cada espaço tangente  $T_pV$  a um ponto  $p$  qualquer da variedade. Desenvolvida inicialmente por George Friedrich Bernhard Riemann ao longo do século XIX (WEINBERG, 1972), a geometria Riemanniana é a geometria estabelecida sobre uma variedade diferenciável a partir de uma métrica  $g$ , também chamada de métrica Riemanniana nesse contexto.

Dessa forma, a partir de  $g$  podemos encontrar certos objetos geométricos interessantes sobre  $V$ , conectados diretamente com isometrias ao longo da variedade, que serão abordados com maior profundidade ao final do capítulo.

### 4.1 Métricas

Um produto interno definido em um espaço vetorial é tido como uma forma bilinear e pode ser utilizado para calcular o tamanho dos vetores e o ângulo entre eles naquele espaço. Transladando tais ideias para o contexto de variedades, como espaços tangentes são espaços vetoriais que são definidos a cada ponto  $p$  de uma variedade  $V$ , urge a necessidade da definição de um produto interno específico para cada  $T_pV$ . Dessa forma, surge nesse contexto um campo tensorial  $g$  positivo definido em cada ponto  $p$  de  $V$ , chamada de métrica Riemanniana. Uma variedade  $V$  passa ser Riemanniana, quando ela pode ser descrita como um par  $(V, g)$ , sendo  $g$  a métrica associada àquela variedade. De forma

geral, uma métrica Riemanniana  $g$  em um variedade  $V$  satisfaz os seguintes axiomas:

1.  $g_p(U, W) = g_p(W, U)$ ;
2.  $g_p(U, U) \geq 0$ , sendo a igualdade válida somente se  $U = 0$ ,

onde  $U, W \in T_pV$ . No caso em que uma métrica  $g$  satisfaz o axioma (1), porém o segundo axioma apenas diz respeito a igualdade, ou seja, podemos ter  $g_p(U, U) < 0$  para algum  $U \in T_pV$ , dizemos que  $g$  é um métrica pseudo-Riemanniana. Desse modo, se uma variedade  $V$  é munida de uma métrica pseudo-Riemanniana,  $V$  é tida nesse contexto como variedade pseudo-Riemanniana.

Se  $g$  é uma métrica Riemanniana de uma variedade  $V$ , então, para cada  $p \in V$ , podemos designar um tensor  $g_p$  ao ponto que tem papel de representar o produto interno no espaço tangente  $T_pV$ . Por exemplo, se  $X$  e  $W$ , são vetores pertencentes a  $T_pV$ , então, agora podemos escrever o produto interno entre os dois vetores  $\langle X, W \rangle_p = g_p(X, W)$ . Da equação (2.9), temos que um tensor  $g_p$  do tipo  $(0, 2)$ , pode ser escrito como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (4.1)$$

onde,  $g_{\mu\nu}(p)$  é uma matriz positiva definida que representa as componentes do tensor no ponto  $p$ . Ao tomarmos um deslocamento infinitesimal  $dx^\mu \partial_\mu|_p \in T_pV$  e aplicarmos na métrica  $g$ , obtemos uma outra notação para designar uma métrica, utilizada na literatura de geometria diferencial (CARMO, 2010),

$$ds^2 = g \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p \right) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \langle dx^\alpha, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rangle_p \langle dx^\beta, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \rangle_p = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.2)$$

**Exemplo 4.1.1.** Considerando a variedade Riemanniana  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , um exemplo comum de métrica para essa variedade é a métrica euclidiana em um ponto qualquer  $p \in \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\delta_p = \delta_{ij}(p)dx^i \otimes dx^j \implies ds^2 = dx^i dx^i = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (4.3)$$

onde, ao tomarmos  $U = U^i \partial_i|_p$  e  $V = V^j \partial_j|_p \in \mathbb{R}^3$ ,<sup>9</sup> o produto interno usual entre esses

<sup>9</sup>O plano tangente  $T_p\mathbb{R}^3$  a um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  é tridimensional. O  $\mathbb{R}^3$ , por si só, também é um espaço

dois vetores escrito utilizando a métrica é dado por

$$\delta_p(U, V) = \delta_{kl}(p)U^iV^j\langle dx^k, \partial_i \rangle|_p \langle dx^l, \partial_j \rangle|_p = \delta_{kl}(p)U^kV^l = U^1V^1 + U^2V^2 + U^3V^3. \quad (4.4)$$

Além disso, podemos encontrar o ângulo  $\theta$  entre os dois vetores  $X, W \in T_pV$ , a partir da expressão do produto interno entre eles, utilizando a métrica  $g_p$ ,

$$g_p(X, W) = \langle X, W \rangle_p = \sqrt{g_p(X, X)}\sqrt{g_p(W, W)} \cos \theta = \|X\| \|W\| \cdot \cos \theta, \quad (4.5)$$

de onde podemos tirar que

$$\cos \theta = \frac{g_p(X, W)}{\sqrt{g_p(X, X)g_p(W, W)}} = \frac{g_{\mu\nu}X^\mu W^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta g_{\kappa\gamma}W^\kappa W^\gamma}}. \quad (4.6)$$

Podemos transformar uma métrica Riemanniana a partir de uma mudança de coordenadas de um covetor  $dx^\mu$ , apresentada na equação (2.7). Ao escrevermos  $x^1 = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $x^2 = r \sin \theta \sin \phi$  e  $x^3 = r \cos \theta$  e substituirmos na expressão de  $ds^2$  em (4.3), temos

$$\begin{aligned} ds^2 &\rightarrow d\bar{s}^2 = [d(r \sin \theta \cos \phi)]^2 + [d(r \sin \theta \sin \phi)]^2 + [d(r \cos \theta)]^2 \\ &= (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\ &\quad + (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\ &\quad + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo o resultado final de (4.7) a métrica euclidiana do  $\mathbb{R}^3$  em coordenadas esféricas.

Variedades e métricas pseudo-Riemannianas desempenham um papel crucial na teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein (LEE, 2012). Uma métrica pseudo-Riemanniana  $g$  pode admitir valores negativos na diagonal principal da matriz  $g_{\mu\nu}(p)$  (se a matriz é diagonal, então esses valores são interpretados como seus próprios autovalores) que representa as componentes do tensor métrico no ponto  $p$ . Veremos adiante, um exemplo de uma métrica pseudo-Riemanniana e a interpretação física que a quebra do vetorial tridimensional. Sabemos que a dimensão é a mesma, logo, eles são isomorfos (HOFFMAN; KUNZE, 1971). Daí, o abuso de notação em dizer que  $U$  e  $V$  moram em  $\mathbb{R}^3$  e não em  $T_p\mathbb{R}^3$ . O mesmo argumento pode utilizado para o caso do  $\mathbb{R}^4$  no próximo exemplo.

axioma (2) de uma métrica Riemanniana pode fornecer, isto é, não ser positivo definida.

**Exemplo 4.1.2.** A métrica  $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ , onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  sobre o  $\mathbb{R}^4$ , é chamada de métrica de Minkowski. O par  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  é chamado nesse contexto de espaço de Minkowski, sendo tal espaço a base de toda relatividade especial (EINSTEIN, 1905). Devido à estrutura da matriz diagonal que representa a métrica, podemos designar classes ao produto interno de vetores pertencentes a  $T_p\mathbb{R}^4$  para algum ponto  $p \in \mathbb{R}^4$  utilizando esta métrica. Neste espaço, vetores são definidos como a diferença entre pares de eventos (LESCHE, 2005), ou em outras palavras, como a diferença entre as coordenadas de dois pontos distintos em  $\mathbb{R}^4$ . Dessa forma, a partir do produto interno de um vetor  $V \in \mathbb{R}^4$  com ele mesmo, podemos dar interpretação física a esses pares eventos nesse espaço:

1. se  $\eta(V, V) < 0$ , os eventos são separados temporalmente, havendo conexão causal<sup>10</sup> entre os dois;
2. se  $\eta(V, V) = 0$ , dizemos que estão separados de forma que só a luz emitida de um evento pode chegar até o outro;
3. se  $\eta(V, V) > 0$ , os eventos perdem a conexão causal, porém, existe um referencial inercial em que tais eventos são simultâneos.<sup>11</sup>

De forma natural, uma métrica  $g$  sobre uma variedade  $V$ , induz um isomorfismo entre  $T_pV$  e  $T_p^*V$ , para algum  $p \in V$ . Ou seja, se  $g_p$  define um mapeamento de  $T_pV \otimes T_pV \rightarrow \mathbb{R}$ , ao fixarmos um vetor  $W \in T_pV$ , podemos obter um mapeamento  $g_p(W, \cdot) : T_pV \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $g_p(W, \cdot)$  atua em vetores e retorna números reais, pelo o que foi visto na seção 2.3, podemos interpretá-lo como um covetor  $\omega \in T_p^*V$ . Dessa forma, sabendo que um covetor atua sobre um vetor a partir do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*V \times T_pV \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos

<sup>10</sup>Causal no sentido de que um observador em um referencial pode julgar qual aconteceu antes ou depois.

<sup>11</sup>Simultaneidade no contexto da relatividade especial, diz respeito a eventos que acontecem em localizações espaciais diferentes, porém, em algum referencial inercial, acontecem na mesma coordenada temporal.

igualar as duas formas que temos de escrever o produto interno, no qual observamos que

$$\begin{aligned}
\langle \omega, U \rangle &= g_p(W, U) = g_p(U, W) = g_p(U^\alpha \partial_\alpha|_p, W^\beta \partial_\beta|_p) \\
&= g_{\mu\nu} U^\alpha W^\beta \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \\
&= g_{\mu\nu} U^\mu W^\nu \\
&= \langle \omega_\mu dx^\mu, U^\nu \partial_\nu \rangle_p \\
&= \omega_\mu U^\nu \delta_\nu^\mu \\
&= \omega_\mu U^\mu \implies \omega_\mu = g_{\mu\nu} W^\nu,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde,  $\omega \in T_p^*V$  e  $U, W \in T_pV$ . Por outro lado, sabendo que a matriz que representa uma métrica é invertível e sua inversa é denotada por  $g^{\mu\nu}$ , de modo que  $g^{\beta\mu} g_{\mu\alpha} = \delta_\alpha^\beta$ , podemos multiplicar (4.8) de ambos os lados por  $g^{\beta\mu}$  e chegamos que

$$g^{\beta\mu} \omega_\mu = g^{\beta\mu} g_{\mu\nu} W^\nu = \delta_\nu^\beta W^\nu = W^\beta. \tag{4.9}$$

Mostrando assim explicitamente o isomorfismo entre  $T_pV$  e  $T_p^*V$  induzido pela métrica  $g_p$ , em função das componentes de  $W$  e  $\omega$ . Além de ser invertível, a matriz que representa  $g_p$  é simétrica. Dado uma carta  $(U, \phi)$  sobre  $V$ , no qual  $\phi(p) = \{x^\mu\}$ , podemos mostrar tal propriedade ao escrever  $g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu$  e ao aplicarmos em vetores da base de  $T_pV$ , temos

$$g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \right) = g_{\alpha\beta}(p) \langle dx^\alpha, \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p \rangle \langle dx^\beta, \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \rangle = g_{\mu\nu}(p), \tag{4.10}$$

mas, pelo axioma (1) temos que

$$g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \right) = g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p \right) = g_{\alpha\beta}(p) \langle dx^\alpha, \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \rangle \langle dx^\beta, \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p \rangle = g_{\nu\mu}(p), \tag{4.11}$$

de onde concluímos diretamente que  $g_{\mu\nu}(p) = g_{\nu\mu}(p)$ .

Após esta introdução a métricas Riemannianas, pseudo-Riemannianas e suas respectivas propriedades gerais, na próxima seção serão discutidas propriedades isométricas, ou simplesmente isometrias, associadas a uma métrica  $g$ .

## 4.2 Isometrias

Sabemos das seções anteriores que, a partir de uma métrica  $g$  sobre uma variedade  $V$ , podemos calcular para um dado  $p \in V$  o produto interno de um vetor  $X \in T_pV$  com ele mesmo pela expressão  $g_p(V, V)$ . Sendo tal expressão a própria norma ao quadrado do vetor  $V$ , dizemos que se um difeomorfismo  $f$  preserva tal produto interno, ou seja, consequentemente preserva a norma do vetor, dizemos que  $f$  é uma isometria. Formalmente, temos a seguinte definição.

**Definição 4.2.1.** Seja  $(V, g)$  uma variedade Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana). Um difeomorfismo  $f : V \rightarrow V$  é um isometria quando

$$f^* g_{f(p)} = g_p, \quad (4.12)$$

sendo  $f^*$  o *pullback* induzido por  $f$  e  $p$  algum ponto de  $V$ .

Em outras palavras, considerando dois vetores  $X, W \in T_pV$ , da definição 4.2.1 podemos concluir que  $f$  é uma isometria quando

$$f^*(g_{f(p)}(X, W)) = g_{f(p)}(f_*X, f_*W) = g_p(X, W). \quad (4.13)$$

Pela própria definição acima, como  $g_p$  define um produto interno no espaço  $T_pV$ , podemos pensar que se  $f$  é uma isometria, então a norma de vetores de  $T_pV$  se mantém invariantes sob a ação de  $f^*$ ,

$$f^*(g_{f(p)}(X, X)) = \langle f_*X, f_*X \rangle_{f(p)} = g_p(X, X) = \langle X, X \rangle_p. \quad (4.14)$$

Dada uma carta  $(U, \phi)$  de  $V$ , tal que  $\phi(p) = \{x^\mu\}$  e  $\phi(f(p)) = \{y^\nu\}$ , podemos reescrever a equação (2.16) da forma geral da atuação de um *pullback* sobre um tensor  $(0, 2)$ , com a condição especificada na equação (4.12) de que o difeomorfismo  $f$  agora é uma isometria, obtendo explicitamente que

$$g_{\mu\nu}(f(p)) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p = g_{\alpha\beta}(p) dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p \implies g_{\mu\nu}(f(p)) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}(p). \quad (4.15)$$

**Exemplo 4.2.1.** Um exemplo de isometria é a chamada transformação conforme. Se  $(V, g)$  é uma variedade Riemanniana ou pseudo-Riemanniana e  $f : V \rightarrow V$  é um difeomorfismo,  $f$  é chamada de transformação conforme se preserva a métrica por um fator de escala, ou seja

$$f^*g_{f(p)} = e^{2\sigma}g_p, \quad (4.16)$$

sendo  $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ . De forma similar à equação (4.14), para o caso em que  $f$  é uma transformação conforme, tomando dois vetores  $X = X^\mu\partial_\mu, W = W^\nu\partial_\nu \in T_pV$ , temos

$$f^*(g_{f(p)}(X, W)) = \langle f_*X, f_*W \rangle_{f(p)} = e^{2\sigma}g_p(X, W) = e^{2\sigma(p)}g_{\mu\nu}(p)X^\mu(p)W^\nu(p). \quad (4.17)$$

Ao calcularmos o ângulo  $\phi$  entre  $f_*X, f_*W \in T_{f(p)}V$  e compararmos com a equação (4.6), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\langle f_*X, f_*W \rangle_{f(p)}}{\sqrt{\langle f_*X, f_*X \rangle_{f(p)}\langle f_*W, f_*W \rangle_{f(p)}}} = \frac{e^{2\sigma}g_{\mu\nu}X^\mu W^\nu}{\sqrt{e^{4\sigma}g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta g_{\kappa\gamma}W^\kappa W^\gamma}} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}X^\mu W^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta g_{\kappa\gamma}W^\kappa W^\gamma}} \\ &= \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde podemos observar explicitamente o fato de uma transformação conforme preservar a métrica por um fator de escala. Neste caso, não há alteração no valor de comprimentos, nem de ângulos ao comparar o produto interno induzido por  $g_p$  e  $f^*g_{f(p)}$ . Apenas ocorre um redimensionamento por um fator  $e^{2\sigma}$  ao atuar sobre  $g$ .

### 4.3 Campos Vetoriais de Killing

Foi comentado ao longo da seção 2.6, que se  $X$  é um campo vetorial sobre uma variedade, o fluxo  $\Phi_\epsilon : V \rightarrow V$  gerado por  $X$  é um difeomorfismo. Sabemos também da equação (2.26) que, se  $(U, \phi)$  é uma carta sobre a uma variedade, as coordenadas dos pontos  $p$  e  $\Phi_\epsilon(p)$  são dadas respectivamente por  $\phi(p) = \{x^\mu\}$  e  $\Phi_\epsilon(p) = \{x^\nu + \epsilon X^\nu\} = \{y^\nu\}$ , onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal. Dessa forma, em paralelo com o que foi visto na seção anterior, se  $(V, g)$  é uma variedade (pseudo-)Riemanniana, o mapeamento  $\Phi_\epsilon : V \rightarrow V$  é

tido como uma isometria, pela definição 4.2.1, se

$$(\Phi_\epsilon)^* g_{\Phi_\epsilon(p)} = g_p, \quad (4.19)$$

onde, explicitamente em termos das coordenadas de  $p$ ,  $\Phi_\epsilon(p)$  e das componentes de  $g$ , pela equação (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\Phi_\epsilon(p)) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} &= g_{\mu\nu}(x^\lambda + \epsilon X^\lambda) \frac{\partial(x^\mu + \epsilon X^\mu)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(x^\nu + \epsilon X^\nu)}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}(p) \implies \\ (g_{\mu\nu}(p) + \epsilon X^\lambda \partial_\lambda) (\delta_\alpha^\mu + \epsilon \partial_\alpha X^\mu) (\delta_\beta^\nu + \epsilon \partial_\beta X^\nu) &= g_{\alpha\beta}(p) \implies \\ g_{\alpha\beta}(p) + \epsilon X^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \epsilon g_{\alpha\nu}(p) \partial_\beta X^\nu + \epsilon g_{\mu\beta} \partial_\alpha X^\mu + \mathcal{O}(\epsilon) &= g_{\alpha\beta}(p). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Desprezando os termos de ordem superiores  $\mathcal{O}(\epsilon)$  e reorganizando os demais termos da última expressão da equação (4.20), chegamos na chamada equação de Killing<sup>12</sup>

$$X^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \partial_\beta X^\nu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha X^\mu g_{\mu\beta} = 0. \quad (4.21)$$

Desse modo, o gerador infinitesimal  $X$  de um fluxo  $\Phi_\epsilon$  sobre a variedade  $V$ , que satisfaz à equação de Killing para o caso em que  $\Phi_\epsilon$  é uma isometria da métrica  $g$ , é denominado nesse contexto de um campo vetorial de Killing. Uma mesma variedade pode conter mais de um campo vetorial de Killing que satisfaça à equação (4.21), de modo que, se a variedade for um espaço de Minkowski, o número máximo de campos vetoriais de Killing é dado por

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad (4.22)$$

sendo  $n$  a dimensão da variedade (NAKAHARA, 2003). Dessa maneira, se  $X$  e  $Y$  são dois campos vetoriais de Killing de uma variedade  $(V, g)$ , então são válidas as seguintes propriedades:

1. se  $W$  é um campo vetorial dado pela combinação linear de  $X, Y$ , ou seja,  $W = \alpha X + \beta Y$ , então  $W$  também é um campo vetorial de Killing de  $(V, g)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
2. o campo vetorial oriundo do colchete de Lie  $[X, Y]$  é um campo vetorial de Killing,

<sup>12</sup>A equação junto com o campo vetorial tem esse nome devido a trabalhos de Wilhelm Killing em meados do século XX, segundo (HAWKINS, 1982).

se  $X$  e  $Y$  também são.

É importante destacar que a equação de Killing está intimamente ligada com a derivada de Lie. Mais especificamente, ao omitirmos a base da expressão da derivada de Lie de um campo vetorial do tipo  $(0, 2)$  obtida na equação (2.42), podemos reescrever a equação de Killing por uma expressão equivalente a equação (4.21), dada por

$$(\mathcal{L}_X g)_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.23)$$

Ao lembrarmos da seção 2.7 que, a derivada de Lie de um objeto ao longo do fluxo gerado por um campo vetorial  $X$  diz o quanto o objeto varia ao longo daquele fluxo, podemos concluir da expressão (4.23) que os campos vetoriais de Killing são geradores de fluxos que determinam direções de simetria da métrica  $g$  ao longo de uma variedade. Ou seja, ao “caminharmos” por pontos  $p \in V$  ao longo do fluxo gerado por um campo vetorial de Killing da métrica  $g$ , a norma de vetores definidos em espaços tangentes a esses pontos, sendo a mesma calculada via  $g_p$ , não se altera (Figura 4.1).

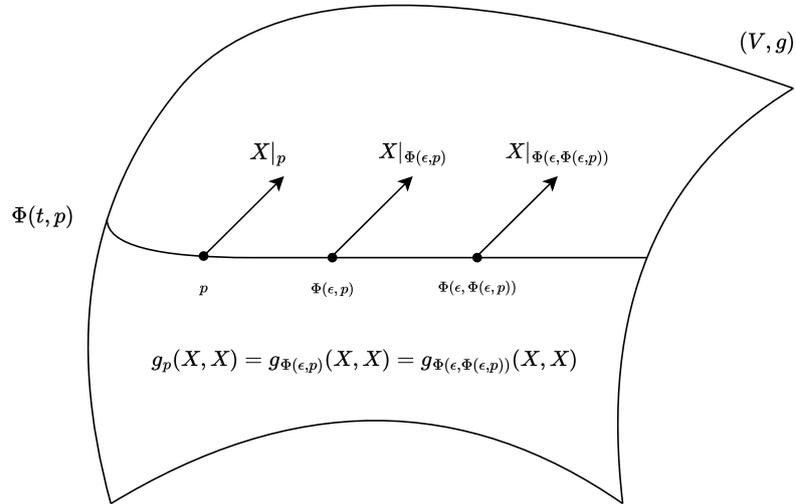


Figura 4.1: Em uma variedade  $(V, g)$ , vetores definidos em espaços tangentes a pontos ao longo de um fluxo  $\Phi$  gerado por um campo vetorial de Killing  $X$  apresentam a mesma norma.

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Como forma de exemplificar a construção realizada nesta seção, abaixo calcularemos os campos vetoriais de Killing para duas variedades, cujas respectivas métricas já

foram mencionadas no contexto do trabalho.

**Exemplo 4.3.1.** Considerando novamente a variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , tal que  $\delta = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , temos que, pela equação (4.21),

$$X^k \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial X^l}{\partial x^j} \delta_{il} + \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \delta_{mj} = 0 \implies \frac{\partial X^l}{\partial x^j} \delta_{il} + \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \delta_{mj} = 0, \quad (4.24)$$

onde, ao correr os valores dos índices  $i, j, l$  e  $m$  na equação (4.24), adotando  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ , obtemos os seguintes conjuntos de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial X^2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial X^3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^1}{\partial y} + \frac{\partial X^2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial X^3}{\partial x} + \frac{\partial X^1}{\partial z} &= 0. \\ \frac{\partial X^2}{\partial z} + \frac{\partial X^3}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Do sistema de equações (4.25), extraímos diretamente a dependência das componentes  $X^1, X^2$  e  $X^3$ , ou seja,  $X^1 = X^1(y, z), X^2 = X^2(x, z), X^3 = X^3(x, y)$ . Em seguida, ao tomarmos a derivada em relação à coordenada  $x$  na primeira equação do sistema (4.26) e utilizando do fato de que as componentes de campos vetoriais serem funções suaves, ou seja, admitem que suas derivadas parciais em relação as coordenadas cartesianas do  $\mathbb{R}^3$  comutem, obtemos que

$$\frac{\partial^2 X^1(y, z)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X^2(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial X^1(y, z)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 X^2(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X^2(x, z)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.27)$$

Da equação (4.27), podemos supor diretamente três possíveis valores de  $X^2(x, z)$  que

satisfazem a última igualdade, sendo eles:

$$X^2(x, z) = x, \quad (4.28a)$$

$$\text{ou } X^2(x, z) = 0 \quad (4.28b)$$

$$\text{ou } X^2(x, z) = -z. \quad (4.28c)$$

Tomando primeiramente a condição da equação (4.28a) e resolvendo o sistema de equações (4.26) para  $X^1(y, z)$  e  $X^3(x, y)$  respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^1(y, z)}{\partial y} + 1 = 0 &\implies X^1 = -y, \\ \frac{\partial X^3(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X^3(x, y)}{\partial y} = 0 &\implies X^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Logo, pelas componentes obtidas em (4.29) partindo da condição (4.28a), obtemos um campo vetorial de Killing de  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  que chamaremos de  $\mathcal{J}_3$ , dado explicitamente por

$$\mathcal{J}_3 = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y} + X^3 \frac{\partial}{\partial z} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

De forma análoga ao passo anterior, se partimos das condições (4.28b) e (4.28c) e resolvermos o sistema de equações (4.26), da mesma forma que foi feito em (4.29), obtemos os demais campos vetoriais de Killing de  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , dados respectivamente por

$$\mathcal{J}_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{J}_1 = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Devido à estrutura da equação de Killing (4.24), podemos observar que qualquer constante multiplicando as componentes dos campos vetoriais de Killing, não altera as

soluções da equação. Por exemplo, se multiplicarmos  $\mathcal{J}_2$  por  $-1$ , as componentes do campo vetorial resultante

$$-\mathcal{J}_2 = -z \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

também satisfazem os conjuntos de equações (4.25) e (4.26) oriundos de (4.24). Por fim, é relevante enfatizar que a escolha de derivar a primeira equação do sistema (4.26) em relação a coordenada  $x$  foi puramente arbitrária, de modo que escolhendo qualquer outra coordenada cartesiana ou qualquer outra equação do sistema (4.26), também chegaríamos nas mesmas soluções ao final, se diferindo apenas por um fator de fase, como na equação (4.33).

**Exemplo 4.3.2.** Vamos considerar agora neste exemplo, a variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , discutida anteriormente na seção 4.1. Para essa variedade, podemos utilizar a equação (4.22) para determinar a quantidade de campos vetoriais de Killing que satisfazem a equação (4.21) para a métrica  $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ . Sendo a dimensão da variedade em questão  $n = 4$ , logo, obtemos diretamente de (4.22) que  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  possui, no máximo 10 campos vetoriais de Killing. Dessa forma, utilizaremos um método diferente para resolver o sistema de equações provenientes de (4.21) do que o utilizado no exemplo anterior, como forma de facilitar os cálculos. Será adotado no decorrer do exemplo  $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ , de modo que as coordenadas de um ponto arbitrário  $p \in \mathbb{R}^4$ , são dadas por

$$p = x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Primeiramente, da equação (4.21) para a métrica  $\eta$ , obtemos

$$\partial_\beta X_\alpha + \partial_\alpha X_\beta = 0, \quad (4.35)$$

sendo  $X_\alpha = X^\nu \eta_{\alpha\nu}$  e  $X_\beta = X^\mu \eta_{\mu\beta}$ , utilizando do isomorfismo induzido pela métrica, visto em (4.8). Em seguida, derivando a equação (4.35) em relação a  $\partial_\nu$  e realizando

permutações cíclicas dos índices da equação resultante, chegamos no seguinte sistema de equações:

$$\partial_\nu \partial_\beta X_\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha X_\beta = 0, \quad (4.36a)$$

$$\partial_\beta \partial_\alpha X_\nu + \partial_\beta \partial_\nu X_\alpha = 0, \quad (4.36b)$$

$$\partial_\alpha \partial_\nu X_\beta + \partial_\alpha \partial_\beta X_\nu = 0. \quad (4.36c)$$

Somando as equações (4.36a) e (4.36b) e subtraindo de (4.36c), chegamos a

$$(\partial_\nu \partial_\beta + \partial_\beta \partial_\nu) X_\alpha + (\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta) X_\nu + (\partial_\nu \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu) X_\beta = 0, \quad (4.37)$$

onde, ao utilizarmos que, assim como no exemplo anterior, as derivadas nesse contexto comutam, obtemos da equação (4.37) que

$$\partial_\nu \partial_\beta X_\alpha = 0. \quad (4.38)$$

A equação (4.38) admite soluções gerais do tipo

$$X_\alpha = W_\alpha + C_{\alpha\mu} x^\mu, \quad (4.39)$$

sendo  $W_\alpha$  as componentes de um vetor constante,  $C_{\alpha\mu}$  uma matriz arbitrária de coeficientes constantes e  $x^\mu$  as coordenadas de um ponto arbitrário, vistas em (4.34). Uma rápida verificação da solução (4.39) pode ser feita. Ao derivarmos a expressão primeiramente em relação a  $x^\beta$  e em seguida em relação a  $x^\nu$ , temos

$$\partial_\beta X_\alpha = \partial_\beta W_\alpha + C_{\alpha\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} = C_{\alpha\mu} \delta_\beta^\mu = C_{\alpha\beta} \implies \partial_\nu \partial_\beta X_\alpha = \partial_\nu C_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.40)$$

Entretanto, para a construção do presente trabalho, estamos interessados somente em soluções do qual  $W_\alpha = (0, 0, 0, 0)$ , ou seja, soluções do tipo

$$X_\alpha = C_{\alpha\mu} x^\mu. \quad (4.41)$$

Um comentário sobre as soluções em que  $W_\alpha \neq (0, 0, 0, 0)$  será realizado ao final do próximo capítulo. Dessa forma, substituindo a solução de interesse na equação (4.35), obtemos

$$C_{\alpha\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} + C_{\beta\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} = 0 \implies C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}, \quad (4.42)$$

onde, podemos concluir de (4.42) que a matriz  $C_{\alpha\beta}$  precisa de ser uma matriz anti-simétrica. Logo, a escolha dos coeficientes da matriz  $C_{\alpha\beta}$ , de forma que seja uma matriz antissimétrica, nos dará os campos vetoriais de Killing que estamos procurando.

Nesse sentido, vamos considerar primeiramente um campo vetorial de Killing qualquer  $\mathcal{K}$ , do qual, ao utilizarmos que  $X^\nu = \eta^{\nu\alpha} X_\alpha$ , sendo  $\eta^{\nu\alpha} = \eta_{\nu\alpha}$ , podemos escrever as componentes de  $\mathcal{K}$  em função da soluções (4.41),

$$\mathcal{K} = X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \eta^{\nu\alpha} X_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\eta^{\nu\alpha} C_{\alpha\mu} x^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (4.43)$$

Portando, ao supor primeiramente que as entradas da matriz  $C_{\alpha\mu}$  são dadas por  $C_{12} = -C_{21} = 1$  e as demais sendo igual a zero, substituindo na equação (4.43) e a reescrevendo no formato matricial, obtemos um campo vetorial de Killing que chamaremos de  $J_3$ ,

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \\ &= y\partial_x - x\partial_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para encontrarmos os demais, a única modificação da equação (4.44) seria nas entradas diferentes de zero da matriz  $C_{\alpha\mu}$ , de forma que:

$$1. C_{23} = -C_{32} = 1 \implies$$

$$J_1 = z\partial_y - y\partial_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}; \quad (4.45)$$

$$2. C_{31} = -C_{13} = 1 \implies$$

$$J_2 = x\partial_z - z\partial_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}; \quad (4.46)$$

$$3. C_{10} = -C_{01} = 1 \implies$$

$$K_1 = x\partial_t + ct\partial_x = \begin{pmatrix} x \\ ct \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.47)$$

$$4. C_{20} = -C_{02} = 1 \implies$$

$$K_2 = y\partial_t + ct\partial_y = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ ct \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.48)$$

$$5. C_{30} = -C_{03} = 1 \implies$$

$$K_3 = z\partial_t + ct\partial_z = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ ct \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Dessa maneira, encontramos 6 dos 10 campos vetoriais de Killing da variedade  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ . Os 4 campos vetoriais restantes não serão abordados no presente trabalho, de modo que, ao final do próximo capítulo, será deixado um comentário a respeito dos mesmos. Por fim, um fato interessante sobre os campos vetoriais de Killing encontrados acima é que eles admitem um comutador entre eles. Por exemplo, ao calcularmos explicitamente,

obtemos

$$\begin{aligned}
[J_2, J_1] &= (x\partial_z - z\partial_x)(z\partial_y - y\partial_z) - (z\partial_y - y\partial_z)(x\partial_z - z\partial_x) = x\partial_y - y\partial_x = -J_3, \\
[J_3, J_1] &= (y\partial_x - x\partial_y)(z\partial_y - y\partial_z) - (z\partial_y - y\partial_z)(y\partial_x - x\partial_y) = x\partial_z - z\partial_x = J_2, \\
[J_3, J_2] &= (y\partial_x - x\partial_y)(x\partial_z - z\partial_x) - (x\partial_z - z\partial_x)(y\partial_x - x\partial_y) = y\partial_z - z\partial_y = -J_1, \\
[J_1, J_2] &= -[J_2, J_1] = J_3, \quad [J_1, J_3] = -[J_3, J_1] = -J_2, \quad [J_2, J_3] = -[J_3, J_2] = J_1, \\
&\implies [J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Assim como,

$$\begin{aligned}
[K_2, K_1] &= (y\partial_t + ct\partial_y)(x\partial_t + ct\partial_x) - (x\partial_t + ct\partial_x)(y\partial_t + ct\partial_y) = y\partial_x - x\partial_y = J_3, \\
[K_3, K_1] &= (z\partial_t + ct\partial_z)(x\partial_t + ct\partial_x) - (x\partial_t + ct\partial_x)(z\partial_t + ct\partial_z) = z\partial_x - x\partial_z = -J_2, \\
[K_3, K_2] &= (z\partial_t + ct\partial_z)(y\partial_t + ct\partial_y) - (y\partial_t + ct\partial_y)(z\partial_t + ct\partial_z) = z\partial_y - y\partial_z = J_1, \\
[K_1, K_2] &= -[K_2, K_1] = -J_3, \quad [K_1, K_3] = -[K_3, K_1] = -J_2, \quad [K_2, K_3] = -[K_3, K_2] = -J_1, \\
&\implies [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

e , podemos observar também que

$$\begin{aligned}
[J_1, K_2] &= (z\partial_y - y\partial_z)(y\partial_t + ct\partial_y) - (z\partial_y - y\partial_z)(y\partial_t + ct\partial_y) = z\partial_t + ct\partial_z = K_3, \\
[J_1, K_3] &= (z\partial_y - y\partial_z)(z\partial_t + ct\partial_z) - (z\partial_t + ct\partial_z)(z\partial_y - y\partial_z) = -y\partial_t - ct\partial_y = -K_2, \\
[J_2, K_3] &= (x\partial_z - z\partial_x)(z\partial_t + ct\partial_z) - (z\partial_t + ct\partial_z)(x\partial_z - z\partial_x) = x\partial_t + ct\partial_x = K_1, \\
[J_2, K_1] &= -[J_1, K_2] = -K_3, \quad [J_3, K_1] = -[J_1, K_3] = K_2, \quad [J_3, K_2] = -[J_2, K_3] = -K_1, \\
&\implies [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

As expressões (4.50), (4.51) e (4.52) são exatamente as mesmas satisfeitas pelos geradores da álgebra  $so(1, 3)$  (BURZYNSKI, 2017), o que nos sugere a conexão entre campos vetoriais de Killing e tal estrutura.

## 5 Conexão entre campos vetoriais de Killing, Álgebras e Grupos de Lie

Neste capítulo, será feita uma conexão entre campos vetoriais de Killing e grupos de Lie, não vista anteriormente na literatura, até o nosso conhecimento. Apesar de ser bem conhecido o cálculo de campos vetoriais de Killing, sua conexão com elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie a partir da expressão de um campo vetorial induzido apresentada na equação (3.24), não é abordada diretamente em livros textos de geometria diferencial (Riemanniana) (LEE, 2012; NAKAHARA, 2003; O'NEILL, 1983) consultados ao longo do trabalho. Desse modo, utilizaremos os campos vetoriais de Killing encontrados ao final do capítulo anterior para as variedades  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  e  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , e a partir deles, demonstraremos a conexão supracitada. Vamos a seguir enunciar nossa construção principal em um teorema, do qual será provado de forma construtiva ao longo da seção 5.1.

**Teorema 5.0.1.** *Seja  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  e  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  o espaço Euclidiano 3–dimensional e o espaço-tempo de Minkowski, respectivamente, com  $\delta = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$  e  $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ . Após obter os campos vetoriais de Killing correspondentes de cada variedade, os identificamos como campos vetoriais induzidos (pertencentes aos planos tangentes correspondentes) gerados por um elemento de álgebra de Lie de um grupo de Lie a ser obtido. No primeiro caso, o grupo de Lie resulta ser o grupo de rotação  $SO(3)$ , enquanto no segundo caso, encontramos o grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ .*

### 5.1 Encontrando grupos a partir de campos vetoriais de Killing

Primeiramente, partindo dos campos vetoriais de Killing  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  de  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  encontrados anteriormente, vamos supor que os mesmos são campos vetoriais induzidos por campos invariantes pela esquerda gerados por elementos da álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de um grupo de Lie  $G$  a ser determinado. Portanto, com base na expressão de um campo vetorial induzido

apresentada em (3.24), considerando que  $A_1, A_2$  e  $A_3 \in T_e G$  são três elementos arbitrários de  $\mathfrak{G}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $(x, y, z)$  são as coordenadas de um ponto qualquer  $p \in \mathbb{R}^3$  como em (3.25), suponhamos que

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1^\# = \left. \frac{d}{dt} e^{tA_1} \right|_{t=0} p, \quad (5.1a)$$

$$\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2^\# = \left. \frac{d}{dt} e^{tA_2} \right|_{t=0} p, \quad (5.1b)$$

$$\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_3^\# = \left. \frac{d}{dt} e^{tA_3} \right|_{t=0} p. \quad (5.1c)$$

De início, reescrevendo a expressão (5.1a) no formato matricial, temos

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tA_1} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Ora, mas como do lado direito da igualdade da expressão (5.2) temos uma matriz coluna  $3 \times 1$  e do lado esquerdo um objeto multiplicando também uma matriz coluna  $3 \times 1$ , para tal igualdade ser satisfeita, tal objeto precisar ser unicamente uma matriz  $3 \times 3$ , de onde concluímos diretamente que

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tA_1} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Fazendo uma análise similar à realizada acima, porém, com os campos  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  dados em (5.1b) e (5.1c) respectivamente, obtemos que

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tA_2} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \implies \left. \frac{d}{dt} e^{tA_2} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{dt}e^{tA_3}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \implies \frac{d}{dt}e^{tA_3}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Derivando explicitamente o lado esquerdo da equação (5.3), chegamos diretamente em uma expressão pro elemento  $A_1$  de  $\mathfrak{G}$ ,

$$\frac{d}{dt}e^{tA_1}\Big|_{t=0} = A_1e^{tA_1}\Big|_{t=0} = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

e, de forma análoga, das expressões (5.4) e (5.5), obtemos, respectivamente,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Sendo assim, ao compararmos as matrizes,  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , com os geradores da álgebra de Lie  $so(3)$  do grupo  $SO(3)$ , vistos anteriormente na equação (3.4), percebemos diretamente que,

$$\begin{aligned} A_1 &= \tau_1, \\ A_2 &= \tau_2, \\ A_3 &= \tau_3. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Portando, fica evidente nesse contexto que, o grupo  $G$  e a álgebra de Lie  $\mathfrak{G}$ , que no início da construção do capítulo gostaríamos de determinar, são na verdade o grupo  $SO(3)$  e sua respectiva álgebra  $so(3)$ .

Desse modo, podemos concluir que os campos vetoriais de Killing  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  de  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  são campos vetoriais induzidos por campos vetoriais invariantes pela esquerda,

gerados pelos elementos de  $so(3)$ . É interessante notar que, como os campos vetoriais de Killing geram fluxos que ditam direções isométricas de uma variedade, enquanto os elementos do grupo  $SO(3)$  estão relacionados diretamente com rotações em  $\mathbb{R}^3$ , logo, podemos concluir que tais direções isométricas são ditadas por fluxos que rotacionam<sup>13</sup> ao longo da variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ . Embora seja possível construir o grupo  $SO(3)$  partindo de uma isometria no sentido de preservar  $\delta$ , ou seja, para  $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\delta(X, Y) = \delta(R \cdot X, R \cdot Y), \quad R \in SO(3), \quad (5.10)$$

aqui tal grupo foi obtido explorando os campos vetoriais de Killing da variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ .

Por outro lado, vamos agora explorar os campos vetoriais de Killing encontrados no capítulo anterior para a variedade  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ . Ao realizarmos a mesma análise que foi feita anteriormente para os campos vetoriais de Killing da variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , podemos encontrar que, ao supormos que  $J_i$  e  $K_i$  com  $i \in \{1, 2, 3\}$  são campos vetoriais induzidos por campos invariantes pela esquerda gerados por seis elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie a ser determinado, existe uma conexão com um outro grupo também já apresentado no trabalho.

Nesse sentido, ao supormos que  $M_i$  são seis elementos arbitrários da álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$  qualquer, seguindo a mesma construção utilizada na equação (5.1a), temos

$$J_1 = J_1^\# = \left. \frac{d}{dt} e^{tM_1} \right|_{t=0} p, \quad (5.11)$$

escrevendo no formato matricial e utilizando agora que  $p \in \mathbb{R}^4$ , cujas coordenadas foram

<sup>13</sup>O leitor pode retornar ao exemplo 2.7.1 junto a Figura 2.6 e perceber que, o fluxo que escolhemos por girar entorno do eixo  $z$ , é o mesmo gerado pelo campo vetorial de Killing  $\mathcal{J}_3$ .

apresentadas anteriormente em (4.34), obtemos diretamente que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tM_1}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \implies \frac{d}{dt}e^{tM_1}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies M_1e^{tM_1}\Big|_{t=0} = M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde, ao compararmos a expressão final de (5.12) com os elementos da álgebra de Lie do grupo  $SO(1, 3)$  apresentados em (3.13), podemos concluir que  $M_1 = \mathcal{M}_1$ . Consequentemente, ao substituirmos respectivamente  $J_1$  por  $J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$  e  $M_1$  pelos demais elementos da álgebra  $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  na equação (5.12), chegamos diretamente, pelo mesmo raciocínio, que  $M_i = \mathcal{M}_i$ .

Portando, podemos concluir que, assim como os campos vetoriais de Killing da variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , os campos vetoriais de Killing da variedade  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  são campos vetoriais induzidos por campos vetoriais invariantes pela esquerda, gerados pela álgebra de Lie de um grupo de Lie. Sendo o grupo em específico o próprio grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$ , que discutimos anteriormente ao longo do capítulo 3.

Ademais, vimos ao final da seção 4.3 que a variedade  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  admite 10 campos vetoriais de Killing no total, dos quais 4 deles não foram discutidos na construção acima. Estes 4 campos vetoriais de Killing são encontrados ao buscarmos soluções na equação (4.39) para  $W_\alpha \neq (0, 0, 0, 0)$ , sendo eles dados por

$$\partial_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Desse modo, assim como os 6 campos vetoriais de Killing de  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  abordados no

trabalho, os 4 campos mencionados em (5.13) também são campos vetoriais induzidos por campos vetoriais invariantes pela esquerda. No entanto, eles são gerados por elementos da álgebra de Lie do grupo de Poincaré (KIM; NOZ, 1986), relacionados à translações ao longo do espaço de Minkowski, uma consideração que optamos por não abordar em nossa construção. Por fim, é válido ressaltar que a variedade  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ , que abordamos no exemplo 4.3.1, também admite campos vetoriais de Killing no formato dos campos vistos em (5.13), relacionados com translações em  $\mathbb{R}^3$ . Sendo os mesmos dados por

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

## 6 Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso, foi realizada uma abrangente revisão teórica de tópicos de geometria diferencial, Riemanniana e pseudo-Riemanniana, bem como, um estudo sobre grupos de Lie e suas respectivas álgebras. Dessa maneira, nossas principais conclusões a respeito do trabalho foram as seguintes:

1. Foi possível estabelecer uma conexão, vista ao longo do capítulo 5, entre os campos vetoriais de Killing de duas variedades com a álgebra de Lie de dois grupos, através da expressão de campos vetoriais induzidos (3.24).
2. O método que utilizamos para reconstruir os grupos  $SO(3)$  e  $SO(1,3)$  a partir dos campos vetoriais de Killing de  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  e de  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , respectivamente, até onde sabemos, não foi encontrado forma semelhante na literatura consultada.
3. O estudo teórico desenvolvido ao longo do trabalho, não visto em cursos usuais do bacharelado de Física, poderá ser utilizado em futuros trabalhos que envolvem a teoria da relatividade geral, assim como, por exemplo, em conexões entre os campos vetoriais de Killing e simetrias em Lagrangianas (FENG, 2018).

## Bibliografia

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 8th. ed. [S.l.]: Wiley New York, 2004.

BURZYNSKI, J. C. *The representation theory of the Lorentz group*. 2017. Disponível em: [https://www.academia.edu/33056213/The\\_Representation\\_Theory\\_of\\_the\\_Lorentz\\_Group](https://www.academia.edu/33056213/The_Representation_Theory_of_the_Lorentz_Group).

CARMO, M. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Textos Universitários: Ciências médicas). ISBN 9788585818265. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=52pAQgAACAAJ>.

EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004>.

FENG, J. C. Some globally conserved currents from generalized killing vectors and scalar test fields. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 10, nov. 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.104035>.

FERREIRA, L. A. *Lecture Notes on Lie Algebras and Lie Groups*. Instituto de Física de São Carlos - IFSC/USP, 2011. Disponível em: <https://www.ifsc.usp.br/~laf/algebra/notes.pdf>.

FREIDEL, L. Group Field Theory: An Overview. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 44, n. 10, p. 1769–1783, out. 2005.

GAIO, L.; BARROS, D. d.; RIZZUTI, B. Grandezas físicas multidimensionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 41, n. 3, p. e20180295, 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0295>.

HALL, B. C. The baker—campbell—hausdorff formula. In: \_\_\_\_\_. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. New York, NY: Springer New York, 2003. p. 63–90. ISBN 978-0-387-21554-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-0-387-21554-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-21554-9_3).

HALMOS, P. *Naive Set Theory*. [S.l.]: Van Nostrand, 1960. Reprinted by Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1974. ISBN 0387900926.

HAWKINS, T. Wilhelm killing and the structure of lie algebras. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, v. 26, n. 2, p. 127–192, 1982. ISSN 00039519, 14320657. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41133645>.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971.

KATANAEV, M. O. Killing vector fields and a homogeneous isotropic universe. *Physics Uspekhi*, v. 59, n. 7, p. 689–700, jul. 2016.

KIM, Y. S.; NOZ, M. E. *Theory and applications of the Poincare group*. [S.l.]: Reidel ; Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic Publishers, 1986. ISBN 9027721416.

LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781441999825. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=xygVcKGPnNwC⟩](https://books.google.com.br/books?id=xygVcKGPnNwC).

LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. 1. ed. Springer, 2000. v. 202. Hardcover. (Graduate Texts in Mathematics, v. 202). ISBN 0387987592. Disponível em: [⟨http://www.worldcat.org/isbn/0387987592⟩](http://www.worldcat.org/isbn/0387987592).

LESCHE, B. *Teoria da Relatividade*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.

MUNKRES, J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology). ISBN 9780131816299. Disponível em: [⟨https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAAIAAJ⟩](https://books.google.com.br/books?id=XjoZAQAAIAAJ).

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [s.n.], 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics). Disponível em: [⟨http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?key=7208855⟩](http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?key=7208855).

NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E. Metric Relativity and the Dynamical Bridge: Highlights of Riemannian Geometry in Physics. *Brazilian Journal of Physics*, v. 45, n. 6, p. 756–805, dez. 2015.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103, Volume 103 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic Press, 1983. ISBN 0125267401. Disponível em: [⟨http://www.amazon.com/Semi-Riemannian-Geometry-Applications-Relativity-Mathematics/dp/0125267401⟩](http://www.amazon.com/Semi-Riemannian-Geometry-Applications-Relativity-Mathematics/dp/0125267401).

PIATTELLA, O. F. O artigo fundador da teoria da relatividade restrita: Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. *Cadernos de Astronomia*, v. 1, n. 1, p. 157–176, jul. 2020. Disponível em: [⟨https://periodicos.ufes.br/astromia/article/view/31681⟩](https://periodicos.ufes.br/astromia/article/view/31681).

ROCHA, A.; RIZZUTI, B.; MOTA, D. Transformações de galileu e de lorentz: um estudo via teoria de grupos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 35, n. 4, p. 4304, Oct 2013. ISSN 1806-1117. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000400004⟩](https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000400004).

RODRIGUES, T. et al. Towards interpretability of attention-based knowledge tracing models. In: *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Porto Alegre, RS, Brasil: SBC, 2022. p. 810–821. ISSN 0000-0000. Disponível em: [⟨https://sol.sbc.org.br/index.php/sbie/article/view/22461⟩](https://sol.sbc.org.br/index.php/sbie/article/view/22461).

RODRIGUES, T. B. S. F.; RIZZUTI, B. F. On the connection between lenz's law and relativity. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 44, n. 6, p. 065204, oct 2023. Disponível em: [⟨https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ad009c⟩](https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ad009c).

SHAPIRO, I. L. *A Primer in Tensor Analysis and Relativity*. Cham: Springer International Publishing, 2019. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 9783030268947 9783030268954. Disponível em: [⟨http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-26895-4⟩](http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-26895-4).

VILLAR, S. et al. *Scalars are universal: Equivariant machine learning, structured like classical physics*. 2023.

---

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.