

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Letícia Genevain Andrade

**O ensino de curvas cônicas sistematizado em livros didáticos de matemática
para o curso secundário nas décadas de 1930 e 1940**

Juiz de Fora
2023

Letícia Genevain Andrade

**O ensino de curvas cônicas sistematizado em livros didáticos de matemática
para o curso secundário nas décadas de 1930 e 1940**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira

Juiz de Fora
2023

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Andrade, Letícia Genevain .

O ensino de curvas cônicas sistematizado em livros didáticos de matemática para o curso secundário nas décadas de 1930 e 1940 / Letícia Genevain Andrade. -- 2023.

96 f. : il.

Orientadora: Maria Cristina Araújo de Oliveira
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2023.

1. História da educação matemática. 2. Geometria Analítica. 3. Curvas cônicas. 4. Ensino Médio. I. Oliveira, Maria Cristina Araújo de , orient. II. Título.

Letícia Genevain Andrade

O ensino de curvas cônicas sistematizado em livros didáticos de Matemática para o curso secundário nas décadas de 1930 e 1940

Dissertação
apresentada ao
Programa de Pós-
graduação em
Educação
Matemática da Universidade
Federal de Juiz de
Fora como requisito
parcial à obtenção do
título de Mestra em
Educação
Matemática. Área de
concentração:
Educação
Matemática.

Aprovada em 15 de dezembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marco Antônio Escher

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Maria Célia Leme da Silva

Universidade Federal de São Paulo

Juiz de Fora, 22/12/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Araujo de Oliveira, Professor(a)**, em 26/01/2024, às 18:33, conforme horário oficial de Brasília, com



fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Escher, Professor(a)**, em 29/01/2024, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria Célia Leme da Silva, Usuário Externo**, em 05/03/2024, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1642286** e o código CRC **005ECB88**.

Dedico este trabalho à minha mãe Cleuza, ao meu pai Marco e ao meu grande amor, Matheus. Eles são minha maior referência de força, afeto e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Cleuza e Marco, por serem meus maiores incentivadores. Mesmo diante de tantas adversidades que vivemos nos últimos tempos, eles continuam firmes em seus propósitos e me inspiram cada dia mais. Minha mãe, forte, afetuosa e bondosa, não poupa esforços para ajudar todos que estão ao seu lado. Meu pai, um verdadeiro vencedor que luta com confiança e está ressignificando todas as suas batalhas. Que alegria tenho em vê-los superar! “Há de haver amor pra ajudar no recomeço. Estamos quase lá!”

Ao meu amor, Matheus, meu maior companheiro e porto seguro. Esteve comigo em todos os momentos dessa caminhada, me apoiando e ajudando. Uma pessoa forte, corajosa e iluminada que deixa meus dias mais coloridos e alegres. Agradeço pela presença constante e incentivo, que me fizeram acreditar que posso mais do que imagino. Como cantaram Os Tribalistas, “Meu riso é tão feliz contigo. Meu melhor amigo é o meu amor”.

À minha grande rede de suporte e afeto, meus familiares, primos e tias e também meus amigos, em especial Thaís, Kaio, Raphael e Arthur. Agradeço por me acompanharem com amor e me fortalecerem durante todo o processo. Algumas pessoas queridas se foram durante essa etapa, deixando um vazio no meu coração. Minha querida sogra Lu, meu tio Ivan e minha tia Rose estarão para sempre em minha memória.

Aos professores do PPGEM, que mesmo diante de todas os problemas do período pandêmico, foram exemplares e não mediram esforços para proporcionar a melhor experiência acadêmica possível. Obrigada por todos os ensinamentos.

Agradeço também aos meus colegas do GHEMAT-UFJF, em especial Daniel, Cleiton e Vítor, que se fizeram muito importantes neste caminhar, tornando o processo mais alegre e enriquecedor. Obrigada por serem verdadeiros amigos.

Aos professores membros da banca examinadora Profa. Dra. Maria Célia Leme da Silva e Prof. Dr. Marco Antônio Escher pela disponibilidade, interesse na pesquisa e contribuições.

Por fim, agradeço imensamente à minha orientadora, Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira, por sua dedicação, paciência, acolhimento, disponibilidade, amizade e comprometimento. Minha sincera gratidão por dividir seu conhecimento em todas as discussões que tivemos ao longo dessa jornada.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo de busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.” (FREIRE, 2004, p. 142).

RESUMO

Essa dissertação é resultado de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e inserida em um projeto maior que tem como objetivo construir representações sobre o processo de escolarização da Geometria Analítica nos ensinos secundário e superior no Brasil. Mais especificamente, essa pesquisa investiga, no âmbito da Geometria Analítica, as curvas cônicas numa perspectiva da história do ensino desse conteúdo. O aporte teórico-metodológico do estudo se fundamenta na História Cultural discutida por Chartier (2002, 2007), mobilizando a noção de representação para a construção da análise histórica. Para a elaboração dessas análises e em busca de problematizar a importância do estudo das cônicas no ensino médio na atualidade, toma-se como fonte principal livros didáticos de matemática das décadas de 1930 e 1940. Como resultados obtidos por meio da análise dos livros didáticos, nota-se que a abordagem das cônicas não enfatiza as propriedades refletoras e que os exercícios sobre esse tema eram diretos, ou seja, sem contextualização e com foco apenas em cálculos, além de serem escassos. Outrossim, durante o processo de investigação, percebeu-se que, na década de 1930, existem poucos exemplares de livros didáticos dedicados ao ensino da recém-criada disciplina Matemática. Por meio dessa análise histórica, buscamos compreender o ensino das cônicas na contemporaneidade dos currículos de ensino médio brasileiros, trazendo uma contribuição para esse tema através do vídeo “Porque as antenas parabólicas são parabólicas?” que foi desenvolvido como artefato do produto educacional.

Palavras-chave: História da educação matemática. Geometria Analítica. Ensino Médio.

ABSTRACT

This master's thesis is the result of a research developed in the Postgraduate Program in Mathematics Education at Universidade Federal de Juiz de Fora and inserted in a larger Project that aims to build representations about the schooling process of Analytical Geometry in secondary and higher education in Brazil. More specifically, this research investigates, within the scope of Analytical Geometry, conic curves from a perspective of the history of teaching this content. The theoretical-methodological contribution of the study is based on Cultural History, mobilizing the notion of representation for the construction of historical analysis. To prepare these analyzes and in order to problematize the importance of studying conics in high school today, mathematics textbooks from the 1930s and 1940s are taken as the main source. As results obtained through the analysis of textbooks, it is noted that the conics approach does not emphasize reflective Properties and that exercises on this topic were direct and scarce. Furthermore, during the research process, it was noticed that, in the 1930s, there were few copies of textbooks dedicated to teaching Mathematics. Through the teaching of conics in contemporary Brazilian high school curricula, making a contribution to this topic through the video "Why are satellite dishes parabolic?" which was developed for the activities of the educational product.

Keywords: History of mathematical education. Analytical Geometry. High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Apresentando as curvas cônicas.....	30
Figura 2 – A circunferência como lugar geométrico para a 3ª série ginásial	63
Figura 3 - Contracapa do livro Matemática 2º ciclo - 3ª série	65
Figura 4 - Contracapa do livro de Roxo, Thiré e Mello e Souza.....	70
Figura 5 - Apresentação do lugar geométrico como trajetória.....	71
Figura 6 - Apresentação da parábola como lugar geométrico.....	72
Figura 7 - Primeira página do livro de Maeder: programa de Matemática da 3ª série do ciclo colegial	76
Figura 8 - Primeiro tópico do Capítulo Curvas Usuais	77
Figura 9 - Apresentação da elipse como lugar geométrico.....	78
Figura 10 - Estudo da elipse.....	79
Figura 11 - Apresentação da hipérbole como lugar geométrico.....	80
Figura 12 - Estudo da hipérbole.....	81
Figura 13 - Apresentação da parábola como lugar geométrico	82
Figura 14 - A definição das seções cônicas	82
Figura 15 - Parte do desenvolvimento do teorema de Danderlin.....	83
Figura 16 - Exercícios propostos no capítulo equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.....	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Permanências e alterações do estudo de cônicas até 1940	36
Tabela 2 - Manuais analisados por Oruê	60
Tabela 3 - Livros do autor Jacomo Stávale	62
Tabela 4 - Livros elencados por De Paula, Siqueira e David (2020)	64
Tabela 5 - Livros utilizados como fontes na presente pesquisa	67
Tabela 6 - Tiragem das edições do livro Curso de Matemática.....	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FIC	Frères de l'Instruction Chrétienne
GHEMAT	Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática
LaCem	Laboratório de Ciências e Educação Matemática
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	25
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	32
2.1 O NASCIMENTO DA DISCIPLINA MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DE EUCLIDES ROXO E DO COLÉGIO PEDRO II.....	36
2.2 AS REFORMAS FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA.....	43
2.2.1 A reforma Francisco Campos.....	43
2.2.2 A reforma Gustavo Capanema.....	46
3. CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS.....	48
3.1. METODOLOGIA.....	48
3.2 LIVRO DIDÁTICO COMO FONTE DE PESQUISA.....	49
3.3 HISTÓRIA CULTURAL: SUBSÍDIOS PARA UMA PESQUISA SOBRE O ENSINO DAS CURVAS CÔNICAS.....	51
3.4. OS SABERES A ENSINAR E PARA ENSINAR.....	55
4. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.....	58
4.1 OS AUTORES DOS LIVROS.....	67
4.2. CURSO DE MATEMÁTICA 3º ANO.....	69
4.3 CURSO DE MATEMÁTICA – 3º LIVRO DO COLEGIAL.....	74
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
ANEXO A – Tabela comparativa entre os programas de Geometria Analítica dos Cursos Complementares (Reforma Francisco Campos) e Cursos Clássico e científico (Reforma Capanema).....	91
ANEXO B - Tabela comparativa entre os programas de Geometria dos Cursos Complementares (Reforma Francisco Campos) e Cursos Clássico e científico (Reforma Capanema).....	93
ANEXO C- Programa de Matemática para a terceira série do Curso Clássico (Reforma Gustavo Capanema).....	95
ANEXO D – Índice do livro Matemática 2º ciclo – 3ª série.....	96

1 INTRODUÇÃO

As motivações que me levaram a ingressar no programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática estão fortemente influenciadas pela minha trajetória acadêmica. Ainda nos primeiros períodos da minha graduação tive a oportunidade de conhecer esse campo de pesquisa que se dedica a entender dois temas que eu sempre busquei estudar: educação e matemática. Assim, ao decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, por meio de atividades práticas, eventos, estágios e disciplinas, comecei a realmente conhecer as pesquisas, estudos, projetos e autores que estudam Educação Matemática. Lembro-me que um dos primeiros autores que conheci foi *Ubiratan D'Ambrosio* com seus estudos pioneiros que deram luz ao campo de pesquisa *Etnomatemática*. Essa “nova maneira” de enxergar o ensino de matemática me encantou e, com isso, pude perceber que existem diversos estudos sobre metodologias de ensino capazes de transformar o ensino de matemática e torná-lo mais significativo.

Já durante o penúltimo período da graduação, no ano de 2018, me matriculei na disciplina *História da Matemática* com a professora Maria Cristina Araújo de Oliveira. Durante essa disciplina, tive a oportunidade de conhecer não somente os estudos relativos à História da Matemática, mas também o campo de pesquisa *História da educação matemática*. A partir dessa ocasião, comecei a me tornar cada vez mais interessada por esse campo de investigação e pela maneira com que ele se relaciona com a aprendizagem dos alunos, com o processo de desenvolvimento do professor e com a história da humanidade. Com isso, durante o último período da minha graduação, já em 2019, decidi me matricular na disciplina Estudos Orientados do Grupo de Pesquisa de História da educação matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (GHEMAT-UFJF) para aprofundar meus estudos e conhecer mais sobre a História da educação matemática. Permaneci acompanhando as discussões do grupo durante todo o ano de 2019, mesmo após já ter me formado, e isso foi muito relevante para que eu escolhesse definitivamente o campo de História da educação matemática para aprofundar as leituras e desenvolver a pesquisa.

Vale ressaltar que o GHEMAT-UFJF, o grupo de pesquisa o qual eu faço parte, é um núcleo do GHEMAT – Brasil e conta com a participação de pesquisadores, alunos de pós-graduação em Educação Matemática e de graduação da UFJF que se reúnem semanalmente para discutir textos e temas relevantes para

a História da educação matemática. Gostaria de enfatizar a importância do grupo para minha trajetória acadêmica, pois as reuniões semanais e a colaboração com meus colegas foram essenciais para o desenvolvimento da minha pesquisa. Afirmo isso em relação aos aprendizados acadêmicos, a parceria nas leituras e interpretação de textos, no auxílio no trabalho com as fontes, mas também em relação ao suporte emocional para desenvolvimento da minha pesquisa.

Cabe evidenciar que essa pesquisa foi escrita em um período de grande conturbação. Em 2020, uma semana após a primeira aula que tive no Mestrado, o mundo parou em função da pandemia de Covid-19. Em pouco meses, o novo vírus, ainda pouco conhecido, infectou milhões de pessoas e causou medo e desordem globalmente. O impacto foi muito grande e ainda gera muitos reflexos em diversos setores, inclusive na educação. Mesmo diante disso, o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática manteve suas atividades de maneira remota durante todo o ano de 2020 e 2021. As aulas eram feitas online e todos os envolvidos, professores, orientadores, coordenação, alunos e secretaria, se mostraram muito empenhados em proporcionar uma experiência acadêmica exemplar. Essa proximidade, mesmo com o distanciamento social, foi essencial para o desenvolvimento dessa dissertação.

Ademais, o grupo GHEMAT-UFJF também manteve suas reuniões remotas semanalmente. Nesses momentos, foi possível desenvolver grande parte do conhecimento necessário para escrever essa pesquisa e, além disso, mantivemos a união e acolhimento que foi primordial para garantir o ânimo no momento de crise que o mundo todo estava passando.

Assim, ao ingressar no Mestrado no ano de 2020, eu já havia tido contato com projetos, pesquisas e discussões do GHEMAT-UFJF e com os principais autores considerados profícuos para o grupo. Com a leitura dos textos e, também, devido as recentes pesquisas realizadas no grupo em contexto nacional, comecei a inclinar minha pesquisa para o âmbito do processo de escolarização da Geometria Analítica. Dessa forma, a pesquisa passou a integrar o projeto maior denominado *Escolarização da GA: uma perspectiva histórica* que é desenvolvido por membros do grupo GHEMAT-UFJF e conta com a articulação de dois projetos de mestrado profissional que buscam construir representações sobre o processo de escolarização da Geometria Analítica nos ensinos secundário e superior no Brasil. No caso da presente pesquisa, pretende-se investigar a trajetória de um conteúdo específico da

Geometria Analítica, as curvas cônicas, no ensino secundário entre as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema procurando responder a questão *Qual a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário entre as décadas de 1930 e 1940?*

Além disso, cabe ressaltar que esse projeto maior coloca em destaque a articulação entre a pesquisa em História da educação matemática e as inquietações postas na contemporaneidade. Especificamente nessa dissertação, tomando como pano de fundo questões, como: *porque ensinar ou não curvas cônicas?*; *qual é a influência desse conteúdo na formação dos estudantes?*; *de que forma as curvas cônicas podem ser ensinadas?*. Procuramos articular inquietações da prática docente ao desenvolvimento da investigação em nível de mestrado profissional. Valente (2020) destaca que os estudos históricos podem trazer maior consistência à discussão de questões da atualidade. De acordo com o autor,

Em particular, para o caso da matemática, a investigação do passado do exercício docente, em termo dos saberes, poderá iluminar os debates presentes cotidianamente no âmbito dos departamentos de educação, de matemática. Não é a matemática, como campo disciplinar acadêmico, a referência que distingue o professor que ensina matemática. Trata-se de compreender como a matemática se fez matemática para ensinar tendo em vista a matemática a ensinar. O estudo desses processos e dinâmicas leva-nos ao saber profissional do professor que ensina matemática e às suas alterações ao longo do tempo (VALENTE, 2020, p.910)

Desse modo, a pesquisa em desenvolvimento busca desnaturalizar processos e dinâmicas relativas ao ensino de curvas cônicas. Revelando, assim, contradições, idas e vindas, releituras, reorganizações e reinterpretções que só se tornam compreensíveis por meio da investigação histórica.

Tendo em vista tal perspectiva, essa pesquisa de mestrado busca investigar a trajetória do ensino de curvas cônicas no curso secundário nas décadas de 1930 e 1940. Ainda instigada por questões da prática docente atual, ponderamos sobre o estudo das propriedades refletoras dessas curvas, por exemplo, que permite compreender a escolha de determinadas formas geométricas para aparelhos e máquinas que integram ou integraram em tempos recentes a vida cotidiana. Tendo grande importância em diferentes ramos da ciência e também nas questões práticas da produção de lentes e antenas, por exemplo, refletimos sobre a ausência de um estudo sobre as curvas cônicas que explorasse tais propriedades. Analisando a

Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constata-se que as curvas cônicas não aparecem como conteúdo tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio. Evidenciamos que a BNCC é um documento normativo para as redes de ensino públicas e privadas que determina a base de referência obrigatória para a elaboração dos currículos escolares. Como professora do ensino público regular, tenho muitas ponderações e críticas a respeito desse documento, principalmente em relação ao seu caráter conservador e pouco dinâmico. Porém, acreditamos que, por ela ser uma referência nacional para a educação brasileira, não devemos excluir sua relevância frente aos processos que ocorrem nas salas de aula. Isto é, mesmo sendo um documento muito criticado, é ela que dita o que é posto nos currículos e, por isso, devemos colocá-la em foco.

Cabe então como professora de matemática do Ensino Médio a questão, *que trajetória teve o ensino desse tema que resultaria na exclusão do mesmo nesse documento da contemporaneidade?*

Portanto, ao que tudo indica, os estudos em torno do diálogo entre o presente da educação matemática e a História da educação matemática trazem ricas possibilidades de reflexão para as questões da atualidade. Valente (2007) traz importantes contribuições a esse respeito, deixando evidente que produções históricas não devem estar orientadas por necessidades imediatas da pedagogia, isto é, as pesquisas em História da educação matemática não devem ser vistas como um simples ingrediente para o processo de ensino-aprendizagem. Contudo, as pesquisas em História da educação matemática podem trazer contribuições para pensarmos as problemáticas da atualidade no campo da educação matemática.

Valente (2007) também destaca que a produção histórica deve ter um diálogo problematizador com o presente, pois é a partir disso que ocorre o processo de desnaturalização de elementos do cotidiano das práticas pedagógicas, em nosso caso, o ensino de curvas cônicas no Ensino Médio. Para desenvolver uma pesquisa histórica que dialoga com o presente das práticas pedagógicas, o autor sugere utilizar livros didáticos como fonte relevante, já que eles são, desde os primórdios, relacionados fortemente ao ensino de Matemática. Dessa maneira, seguimos esse princípio que considera que a produção histórica pode ser utilizada para desnaturalizar problemas do cotidiano escolar que, no caso da pesquisa desenvolvida, é problematizar a importância do estudo das cônicas no Ensino Médio por meio da investigação em torno do processo de escolarização desse conteúdo no

ensino secundário. Assim, através da investigação histórica realizada nesta pesquisa será possível, também, compreender melhor alguns aspectos da educação contemporânea.

Desse modo, como a pesquisa em desenvolvimento é embasada em estudos realizados no âmbito da História da educação matemática, o suporte teórico-metodológico e, também, a revisão de literatura seguem as perspectivas e estudos desenvolvidos em produções desse campo. Consideramos a História da educação matemática como uma tendência do grande campo de pesquisa Educação Matemática que é um campo profissional em constante evolução associado à produção de importantes conhecimentos para o ensino de matemática no Brasil. De acordo com Lorenzato e Fiorentini (2001), o surgimento da Educação Matemática enquanto campo profissional no Brasil se deu diante do final da década de 1970 e durante os anos de 1980, a partir do Movimento da Matemática Moderna. É nesse período que foi criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. Ainda nas palavras desses autores,

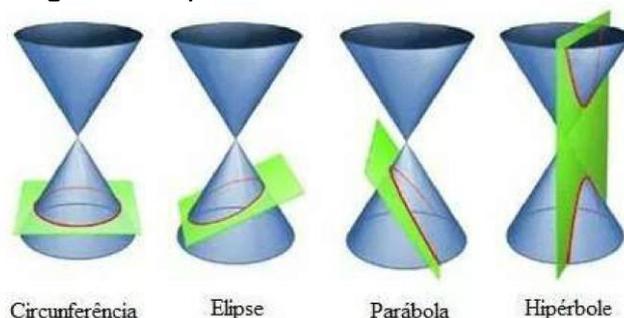
Embora ainda em construção, poderíamos dizer que o objeto de estudo da Educação Matemática consiste nas múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático. Isso não significa que uma determinada investigação não possa priorizar o estudo de um desses elementos da tríade, ou de uma dessas relações. Mas, ao mesmo tempo que isso acontece, os outros elementos jamais podem ser totalmente ignorados (LOREZANTO; FIORENTINI, 2001, p. 2).

De acordo com Valente, “apesar de constituir uma vertente muito nova dentro da Educação Matemática, as pesquisas que têm interesse pela História da Educação Matemática revelam, na atualidade, tendências diferentes” (VALENTE, p. 24, 2013). Dentre essas abordagens teóricas, que se distinguem basicamente pelo lugar ocupado pelos pesquisadores interessados no assunto, está a que considera que a História da educação matemática é um tema pertencente à História da Educação, que por sua vez faz parte dos estudos históricos. Essa é a tendência que o GHEMAT situa seus estudos. O Grupo entende, portanto, a História da educação matemática como um campo que produz representações sobre o passado da educação matemática.

Sendo assim, é interessante destacar que se pretende que essa pesquisa dialogue com o presente da Educação Matemática trazendo contribuições para a atualidade do ensino das curvas cônicas e possibilitando uma reflexão sobre a retirada desse conteúdo da última versão da BNCC publicada. Tal propósito será obtido por intermédio do Produto Educacional que é uma das produções exigidas pelo Programa de Mestrado Profissional em que a pesquisa está inserida. Entende-se que o Produto Educacional é um resultado concreto gerado por meio do processo da atividade de pesquisa. Assim, para o Produto Educacional almejo desenvolver experimentos envolvendo a propriedade refletora da parábola para serem apresentados no Laboratório de Ciência e Educação Matemática (LaCem) e, também, construir uma explicação acessível para o experimento com a reflexão do som na antena parabólica já existente na entrada do Centro de Ciências – UFJF. Além disso, foi desenvolvida uma videoaula denominada “Por quê as antenas parabólicas são parabólicas?” que traz explicações e aplicações para a propriedade refletora das parábolas, usando linguagem acessível aos alunos e com referências gerais à teoria, sem detalhar procedimentos algébricos. Dessa forma, espera-se que esse produto traga contribuições para diferentes audiências, seja nas salas de aula ou plataformas de streaming, atuando na formação de uma cultura matemática.

Visto que a pesquisa visa compreender a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário nas décadas de 1930 e 1940, é pertinente esclarecer ao leitor os conceitos relacionados a esse conteúdo da Geometria Analítica. De modo simplificado, essa pesquisa considera a definição de que as curvas cônicas são figuras geométricas obtidas a partir da interseção de um plano com um cone de revolução. Conforme a inclinação que esse plano incide no cone obtém-se os quatro tipos de curvas cônicas, conforme apresentado na figura abaixo.

Figura 1 - Apresentando as curvas cônicas



Fonte: O baricentro da mente

O estudo das propriedades refletoras dessas curvas permite compreender a escolha de determinadas figuras geométricas para aparelhos e máquinas que integram ou integraram em tempos recentes a vida cotidiana, como as antenas parabólicas e os refletores. Tendo em vista essa perspectiva, a parábola será o principal tipo de curva cônica trabalhada no Produto Educacional. Ela é formada a partir da interseção de um plano paralelo à geratriz do cone e possui uma propriedade especial, denominada propriedade refletora da parábola, que é muito relevante para ser trabalhada em experimentos. De acordo com essa propriedade, qualquer raio que incida paralelamente ao eixo da parábola será refletido em direção ao foco. Isso explica o porquê das antenas parabólicas terem o formato de um parabolóide de revolução (figura obtida pela revolução de uma parábola em torno de seu próprio eixo) e, também, porque esses paraboloides de revolução são encontrados em alguns espelhos refletores de faróis automotivos. Observa-se, portanto, que é possível trabalhar com essa propriedade refletora para produzir experimentos significativos para a aprendizagem dos alunos, porém, analisando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), constatou-se que tal conceito não foi incluído. Essa é a principal proposta do Produto Educacional que será mais bem apresentado ao decorrer do documento.

Este trabalho tem como objetivo realizar uma investigação histórica que possibilite problematizar a importância do estudo das cônicas no ensino secundário mediada pela questão: *qual a trajetória do ensino de curvas cônicas no curso secundário brasileiro entre as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema (décadas de 1930 e 1940)?*

Para responder a pergunta proposta é necessário compreender a escolarização da Geometria Analítica evidenciando, sobretudo, as curvas cônicas. Essa movimentação investigativa foi realizada por meio de uma pesquisa histórica de currículos, legislações e, principalmente, livros didáticos relativos ao ensino secundário do período evidenciado.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Outras pesquisas em História da educação matemática já investigaram a trajetória de escolarização da Geometria Analítica, portanto, essa dissertação também dá continuidade às produções do escopo de pesquisas desenvolvidas nessa temática, principalmente, no grupo GHEMAT-UFJF. Dentre os trabalhos sobre o assunto, destaca-se, em primeiro lugar, a dissertação de mestrado denominada *Os programas de ensino de matemática do colégio Pedro II: 1837 – 1932* de Josilene Beltrame. Tal pesquisa tem como finalidade analisar os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II, desde sua fundação em 1837, até à Reforma de Ensino empreendida por Francisco Campos em 1931. Beltrame (2000) destaca que a escolha dos programas do Colégio Pedro II como fonte para a análise do ensino secundário até a década de 1930 foi natural, pois não é possível tratar dessa temática nesse período sem citar o Colégio que foi criado para ser o padrão de ensino para os demais. Nota-se, assim, que o Colégio Pedro II exerceu enorme influência para o ensino no Brasil, sobretudo até a Reforma Francisco Campos, firmando-se como importante em contexto nacional. Portanto, através do estudo da obra de Beltrame (2000) é possível obter uma visão da evolução do ensino de matemática no Brasil ao longo do período citado e isso é de imensa relevância para a pesquisa sobre curvas cônicas.

Com a leitura da dissertação de Beltrame (2000) é possível tomar conhecimento da presença da Geometria Analítica e, conseqüentemente, das curvas cônicas nos currículos e programas brasileiros de 1837 a 1932. Identifica-se, por exemplo, que nenhum conteúdo de Geometria Analítica aparece nos currículos propostos pela reforma Benjamin Constant, promulgada em 1890. Apenas nas mudanças ocorridas a partir do programa de 1895, esse conteúdo passa a aparecer na matemática ensinada para o 4º ano do secundário com indicação do livro Sonnet e Fronteira: *Geometria analítica*. De acordo com a autora, a partir desse programa, “A matemática que antes reduzia-se ao estudo da Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria passou a abranger também o estudo da Álgebra superior, da Geometria analítica, da Geometria descritiva e do Cálculo” (BELTRAME, 2000, p. 68). Em relação às cônicas, destaca-se, nos tópicos do programa oficial de Geometria Analítica de 1895, que os conteúdos ensinados nesse período eram “equação das cônicas no sistema retilíneo em relação aos seus eixos e também da

sua parábola em relação a tangente de seu vértice” e “equação polar das cônicas” (BELTRAME, 2000, p.72). No programa de 1898, a Geometria Analítica já havia sido excluída. Assim, apesar de tratar de um espaço temporal diferente da presente pesquisa, com a leitura da dissertação de Beltrame (2000) é possível constatar que as curvas cônicas não tiveram presença estável e constante nos currículos apresentados pela autora. Com isso, fica o questionamento: será que de 1930 a 1940 as cônicas também aparecerem brevemente nos currículos?

Em segundo lugar, evidencia-se a dissertação de Josélio Lopes Valentim Júnior que realizou sua pesquisa no grupo GHEMAT-UFJF e é um egresso do Mestrado Profissional em Educação Matemática da mesma instituição. O trabalho intitulado *A Geometria Analítica como conteúdo do ensino secundário: análise dos livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM* teve como principal “objetivo produzir um estudo histórico sobre a trajetória da geometria analítica como conteúdo da matemática escolar no ensino secundário, no período compreendido entre 1940 e 1970” (VALENTIM JÚNIOR, 2013, p.1). Dentre as análises de programas apresentadas por Valentim Júnior, destaca-se as alterações para o ensino de Geometria Analítica ocorridas entre a reforma Gustavo Capanema e a Portaria Ministerial de 1951. O autor afirma que com a promulgação da Portaria Ministerial nº 966 de 02 de outubro de 1951 houve o “desaparecimento das obras do 3º ano do estudo das secções cônicas na década de 1950. O conteúdo, com isso, ficou restrito no estudo da reta e da circunferência nas obras do 3º ano” (VALENTIM JÚNIOR, 2013, p. 28).

É importante destacar, ainda, uma outra dissertação de mestrado, trata-se do trabalho de Gabriela Oruê que foi defendida em 2020 e é intitulada *A trajetória escolar da Geometria Analítica no ensino secundário brasileiro: constituição e funcionamento em tempos da Reforma Francisco Campos, 1931 – 1942*. O principal objetivo desse trabalho foi analisar a trajetória histórica da Geometria Analítica em tempos da Reforma Francisco Campos e, para tanto, a autora estudou os programas de matemática dos Cursos Complementares Pré-médico e Pré-Politécnico, além de todos os manuais desse mesmo período. É importante observar que o trabalho de Oruê se aproxima da presente dissertação, visto que apresenta constatações sobre a Geometria Analítica no ensino secundário em um período que compreende parte do espaço temporal que estudamos. Logo, os manuais analisados por ela foram

considerados como possíveis fontes de pesquisa. Tal situação será mais bem descrita no tópico *Análise de livros* que compõe essa dissertação.

Em relação aos programas de matemática, Oruê (2020) analisou os referentes aos cursos complementares pré-Médico e pré-Politécnico, expedidos na data de 17 de março de 1936. Os resultados mostram existir a descrição do conteúdo *circunferência, elipse, hipérbole e parábola; suas equações retilíneas e polares* em ambos. De maneira análoga, em todos os oito manuais que foram apresentados por ela também existem capítulos destinados à circunferência, hipérbole, elipse e parábola. Entende-se, portanto, o ensino de curvas cônicas era previsto, apesar de não haver uma menção direta ao título “curvas cônicas” ou “seções cônicas”.

A dissertação de Denise Ribeiro denominada *Dos cursos complementares aos cursos clássico e científico: a mudança na organização dos ensinamentos de matemática* defendida em 2006 tem como objetivo principal investigar as transformações ocorridas na organização dos ensinamentos de Matemática dos Cursos Complementares em tempos da Reforma Francisco Campos e Gustavo Capanema. Portanto, há uma similaridade com o espaço temporal definido para a presente pesquisa.

Sendo assim, a pesquisa de Ribeiro (2006) apresenta grandes contribuições a respeito da comparação de conteúdos previstos nos programas de matemática nas décadas de 1930 e 1940 e, ainda, realiza uma conferência do que realmente aparecia nos livros didáticos da época. Dentre essas comparações, destaca-se a relação entre os conteúdos estipulados nos programas oficiais dos Cursos Complementares com os dos Cursos Clássico e Científico. Apesar dos programas não serem minha principal fonte de análise, é importante saber o que se pretendia ensinar em Geometria Analítica, sobretudo sobre as curvas cônicas, nos currículos oficiais das reformas e, com isso, aprimorar a análise dos livros didáticos.

Assim, de acordo com o material apresentado por Ribeiro, nos cursos complementares, isto é, durante a reforma Francisco Campos, era esperado, dentro do ensino de Geometria Analítica, que fosse ministrado o conteúdo “equações retilíneas e polares da circunferência, elipse, hipérbole e parábola”. A autora apresenta que esse mesmo tópico aparecia nos Cursos Clássico/Científico, isto é, durante a Reforma Capanema, com a denominação “passagem da equação natural para a equação retilínea retangular”. Além disso, nos Cursos Clássico/Científico era

esperado que os alunos aprendessem a “equação do círculo” e as “equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola”. Em contrapartida, esses tópicos não estavam presentes no programa dos Cursos Complementares na década anterior. Essa situação pode ser observada na tabela elaborada por Ribeiro (2006) para a Geometria Analítica que se encontra no ANEXO A.

É interessante, ainda, notar que também existia referência ao estudo de elipse, parábola, hipérbole e seções cônicas na parte destinada a Geometria. Ribeiro (2006) também apresenta as mudanças que ocorreram de uma reforma para a outra, conforme apresentado no ANEXO B.

O fato de as cônicas também aparecerem como conteúdo a ser estudado nos programas das Reformas Campos e Capanema na parte de Geometria, nos alertou para o fato de também analisar os livros didáticos se atentando a esse tópico. É evidente que a presente pesquisa foca o estudo das curvas cônicas como um objeto de estudo da Geometria Analítica, mas também é interessante perceber como essa matéria era ensinada em Geometria, para até mesmo entender a continuidade do ensino desse tema.

Em seu estudo, ao comparar os livros didáticos que continham a Geometria Analítica nas décadas de 1930 e 1940, Ribeiro destaca que houve algumas mudanças em relação ao ensino dos conteúdos. Segundo a autora,

Podemos concluir que a Geometria Analítica passou de curso preparatório à determinada faculdade para conteúdo integrante de um conjunto de tópicos que começaram a ser chamados Matemática; a organização e metodologia utilizada visavam à seriação escolar e os livros passaram a ser para os Cursos Clássico e Científico e não mais para o Curso Complementar Pré-Médico ou Pré-Politécnico. (RIBEIRO, 2006, p. 86)

Percebe-se, portanto, que a temática das dissertações apresentadas se assemelha com a pesquisa sobre a trajetória das curvas cônicas, já que todas elas tratam, de alguma forma, da escolarização da Geometria Analítica no ensino secundário em diferentes épocas. Porém, a presente pesquisa se difere das outras por tratar de um conteúdo específico da Geometria Analítica, as curvas cônicas, e por trazer uma problematização sobre o ensino desse conteúdo na atualidade. Portanto, a dissertação sobre a escolarização das curvas cônicas apresenta o diferencial de trazer um foco para um conteúdo mais específico da Geometria Analítica com uma visão para a contemporaneidade do ensino dessa matéria.

Destaca-se que, nesse tópico de Revisão de Literatura, também foi possível, por meio da análise dos trabalhos já evidenciados, identificar as presenças/ausências e mudanças que ocorreram com o estudo de cônicas até a década de 1940. Desse modo, a fim de sinterizar as informações que surgiram da investigação das dissertações de Beltrame (2000), Valentim Júnior (2013), Oruê (2020) e Ribeiro (2006), apresentamos o quadro abaixo.

Tabela 1 - Permanências e alterações do estudo de cônicas até 1940

Normativa	Permanências e alterações do estudo de cônicas
<i>Reforma de 1890</i>	Não havia estudo de Geometria Analítica
<i>Programa de 1895</i>	Geometria Analítica aparece como referência de estudo para o 4º ano do secundário. Observa-se o estudo de <i>equação das cônicas no sistema retilíneo em relação aos seus eixos</i> e, também, <i>equação polar das cônicas</i> .
<i>Programa de 1898</i>	Geometria Analítica desaparece.
<i>Reforma Francisco Campos</i>	No programa de Geometria Analítica existia o tópico <i>equações retilíneas e polares da circunferência, elipse, hipérbole e parábola</i>
<i>Reforma Gustavo Capanema</i>	No programa de Geometria Analítica existiam os tópicos <i>equação do círculo e equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola</i>
<i>Portaria Ministerial de 1951</i>	Desaparecimento do estudo das seções cônicas. Conteúdo restrito ao estudo das retas e da circunferência nas obras do 3º ano.

Fonte: Autoria própria

2.1 O NASCIMENTO DA DISCIPLINA MATEMÁTICA: A IMPORTÂNCIA DE EUCLIDES ROXO E DO COLÉGIO PEDRO II

Reitera-se que tomamos o período entre as décadas de 1930 e 1940 como delimitação para traçar o percurso histórico proposto. É interessante salientar que o contexto para o ensino de matemática no Brasil nesse período é bem marcante, já que foi na década de 1930 que houve uma grande modernização do ensino

secundário e, inclusive, a criação da disciplina matemática. Em busca de entender melhor esse importante marco para a História da educação matemática e, também, aprofundar os estudos sobre o ensino de matemática nas décadas de 1930 e 1940, e conseqüentemente entender mais sobre o ensino secundário dessa época, faremos um recuo até o tempo dos cursos preparatórios, isto é, por volta de 1827. De acordo com Valente (2004b), o surgimento desses cursos se deu devido a necessidade de preparar os estudantes que desejavam se matricular nos recém surgidos cursos superiores e, portanto, necessitavam realizar os exames preparatórios, também conhecidos como exames parcelados. Nessa época, tais exames eram a principal referência de ensino para a formulação da aprendizagem daqueles que pretendiam ingressar ao Ensino Superior. Logo, quando a geometria se tornou um dos exames parcelados aos cursos jurídicos, em conjunto com francês, latim, retórica e filosofia, a matemática, que ainda era uma disciplina não unificada, mudou oficialmente de status para um saber de cultura geral. Valente destaca “inicialmente considerados como conteúdos de caráter técnico-instrumental, servindo prioritariamente ao comércio e à formação militar, os conteúdos matemáticos, por meio da geometria, passaram à categoria de saber de cultura geral” (VALENTE, 1999, p. 81). Pode-se considerar, portanto, que esse é um dos primeiros passos para o avanço da disciplina matemática.

Como já foi evidenciado, os exames preparatórios ditavam o que deveria ser ensinado no Brasil e, segundo Haidar (1972), esse foi um dos motivos pelos quais o secundário tardou a se constituir. Não havia, no meio social brasileiro, a intenção de se formar um homem culto, com formação de cultura geral, como um bacharel formado nos estudos secundário. Porém, mesmo assim, os interessados na causa da educação nacional se empenharam para a constituição do ensino secundário nos moldes franceses e, assim, é criado, em 1837, o memorável Colégio Pedro II, com a intenção de instituir um curso secundário mais estruturado no Brasil. Valente (2004b) ressalta

A criação do Colégio Pedro II revelou o esforço de introduzir no país a referência de formação do homem culto, saído de um curso de formação geral, bacharel. A partir de então, várias foram as tentativas de exigência do bacharelado como condição de acesso aos cursos superiores. Diversos foram os projetos que acenaram com a obrigatoriedade do diploma do secundário seriado para ingresso nas faculdades. Reformas e reformas do ensino que ora

propunham rigor máximo nas exigências para entrada no superior, ora queriam deixar o ensino livre de qualquer amarra oficial, de algum modo intentavam organizar o ensino secundário. Essas batalhas, quase sempre, no século XIX, foram causas perdidas. Via de regra, os alunos permaneciam no Colégio Pedro II estudando as disciplinas dos preparatórios e, ao cabo dos exames, abandonavam a instituição, com exames parcelados realizados rumo à matrícula no ensino superior. (VALENTE, p. 24, 2004b)

Valente ainda destaca que as classes privilegiadas estavam empenhadas em formar pessoas no curso superior o mais rápido possível e o caminho dos preparatórios era muito mais veloz que o da seriação secundária. Ou seja, era considerado mais vantajoso estudar os pontos dos exames preparatórios e estar alinhado para o ingresso nas faculdades. Dessa forma, os pontos organizavam o que era ensinado, inclusive toda a matemática escolar, sua literatura e seu ensino.

Em relação à literatura desse período dos cursos preparatórios, Bittencourt (1993) salienta que houve uma produção diferenciada em relação aos densos livros da escola seriada.

Surgiram, a partir deste período, livros direcionados aos exames preparatórios que limitavam-se em conter os “pontos” a serem decorados pelos alunos e que, em certa medida, são correspondentes às atuais apostilas de “cursinhos” vestibulares. Eram textos preparados e concebidos segundo técnicas para a retenção rápida dos conteúdos exigidos pelas bancas examinadoras. Faziam-se quadros sinópticos, esboços cronológicos, noções gerais de “pontos” usualmente exigidos pelos examinadores. A maioria deles não chegava a ser impresso, constituindo-se nas “apostilas” ou anotações dos professores, difundidas no nível interno dos cursos preparatórios. (BITTENCOURT, 1993, p.174 apud VALENTE, 2004b, p. 24)

Assim, apesar dessas apostilas serem mais restritas aos cursos preparatórios, a sua grande disseminação e uso deram a elas o *status* de livros. Mas, cabe destacar que as referências oficiais para a preparação aos exames eram os livros adotados pelo Colégio Pedro II. Para geometria, por exemplo, o colégio adotava, naquele tempo, o famoso livro de Cristiano Benedito Ottoni, *Elementos de geometria e trigonometria retilínea*. É interessante observar que o conturbado contexto em relação às ideias propagadas pelo ensino secundário *versus* a praticidade dos cursos preparatórios gerou grandes alterações no ensino, tanto no que diz respeito aos conteúdos, quanto as metodologias, à produção da literatura da época e, também, à estruturação do ensino secundário.

Percebe-se, portanto, que desde a criação dos exames preparatórios ocorreram muitas alterações relacionadas à obrigatoriedade de se formar ou não no curso secundário para ingressar ao ensino superior. Até o final dos anos 1920, os exames preparatórios tinham peso maior para ditar a organização das disciplinas matemáticas e isso reforçava ainda mais o distanciamento desses ramos. De acordo com Valente, “a seriação era função dos exames parcelados e o ensino era ministrado na ordem em que os alunos deveriam prestar os exames: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria” (VALENTE, 2004b, p.82). Contudo, a partir de 1929, quem pretendia adentrar ao ensino superior precisava, após concluir o primário, ingressar no ensino secundário. Dessa forma, a realização dos exames parcelados se tornou escassa e houve a necessidade de se reorganizar toda a estrutura didático-pedagógica que constituía anteriormente o secundário. Mais especificamente à área de matemática, era necessário repensar todo o ensino de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

Esse, certamente, foi um dos motivos que levou o colégio-modelo do ensino secundário brasileiro – o Colégio Pedro II – a modificar o seu programa de ensino, a partir de discussões que haviam começado a serem feitas desde 1927. O personagem principal a conduzir e propor essas modificações foi Euclides Roxo. (VALENTE, 2004b, p. 82)

Sigamos, portanto, estudando Euclides Roxo, sua trajetória e contribuições para o ensino de matemática no Brasil nas décadas de 1930 e 1940.

Valente (2004a) evidencia que Euclides de Medeiros Guimarães Roxo teve relações diversas com o Colégio Pedro II, começou como aluno da instituição, tendo ingressado em 1904, e, depois de concluir seu magistério em matemática, retornou para ministrar aulas como assistente em 1915. Nesse mesmo ano, ele se tornou substituto de aritmética e, em 1919, tornou-se professor catedrático do Colégio Pedro II.

Como já foi evidenciado, a instituição era muito emblemática para todo o Brasil, representando um espaço de grande significado para a estruturação do ensino secundário e, também, de disseminação de um otimismo pedagógico com a incorporação de reformas que visavam a modernização, como o escolanovismo. Valente (2004a) reafirma essa ideia e destaca que nos anos 1920, o Colégio Pedro II vivia um clima de entusiasmo pela educação, trazendo muitos debates pedagógicos que prosseguiriam para os anos de 1930 e 1940. Dada a importância

da referida instituição para o ensino secundário no Brasil, toda essa modernização e otimismo educacional se estendiam em contexto nacional, mostrando-se em forma de inquietações e reformas no ensino brasileiro. Portanto, observa-se que diante desse impulso pela modernização do ensino, havia a necessidade de renovação dos programas de ensino e livros didáticos.

2.1.1 Os livros didáticos no Colégio Pedro II: a implementação do Lições de Arithmetica

Desde pelo menos 1895, o Colégio Pedro II adotava os FIC, coleção de livros franceses que foram introduzidos no Brasil pelo professor Eugênio Raja Gabaglia, que também os traduziu para o português. Os livros da coleção FIC não expressavam uma nova matemática escolar, pelo contrário, se baseavam nos moldes tradicionais. De acordo com Valente “a força da tradição, expressa no ensino separado de cada ramo da matemática, encontra nos livros dos *F.I.C – Frères de l’Instruction Chrétienne* – o apoio didático pedagógico para sobreviver às inovações” (VALENTE, 2004a, p.49). Ele ainda complementa que:

Os manuais dos F.I.C constituíram, em seu tempo, a máxima interferência no cotidiano escolar – sob a forma de livros didáticos – na organização dos conteúdos de ensino das matemáticas, pensadas em suas partes independentes (aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, etc). O texto desses manuais tem como marca didática fundamental a grande quantidade de exercícios propostos aos alunos. Essa inovação (...) sobrepõe-se à forma antiga de escrita dos livros de matemática, sem exercícios e organizados sob a forma de lições, nos quais o exemplo resolvido pelo mestre deveria ser copiado e sabido de cor. (VALENTE, 2004a, p.49)

Dessa forma, para que ocorresse a modernização do ensino de matemática no secundário era preciso substituir os antigos e tradicionais FIC. Em 1922, o didático da coleção FIC, *Elementos de arithmetica*, foi substituído pelo livro *Lições de arithmetica* elaborado por Euclides Roxo. Esse foi um marco muito importante para a história do Colégio Pedro II, visto que a partir dele também começou a ocorrer mudanças na estruturação dos programas. O *Lições de arithmetica* tinha muitas diferenças em relação às FIC, começando pelo fato de Roxo não ter simplesmente realizado uma tradução de um contexto francês, pelo contrário, foram feitos cortes, adaptações, ajustes, além de comentários e conselhos do editor. De acordo com Valente, “é possível dizer que tal apropriação representou os primeiros sinais de

modernização da matemática escolar para o ensino secundário no Brasil” (Valente, 2004b, p. 90). Como o Colégio Pedro II era uma referência de ensino para todo o Brasil, o livro de Euclides Roxo passou a ser adotado nacionalmente para o ensino de aritmética escolar e foi considerado um grande sucesso.

2.1.2 Euclides Roxo e o nascimento da disciplina Matemática

Em 1925, Euclides Roxo torna-se diretor do Externato Pedro II e, sob sua direção, o Colégio viveu um período de reorganização didática que ele mesmo denominou de *grande movimento mundial de renovação dos métodos de ensino e processos educativos*. Esses movimentos de renovação e modificações de prática pedagógicas se estenderam para a década de 1930 e um importante marco desse movimento, foi a criação da disciplina matemática. Euclides Roxo, que era professor de matemática e, naquele momento, diretor do Colégio Pedro II, estava a par das ideias modernizadoras propostas pelo movimento internacional da Escola Nova e se posicionou implantando mudanças no ensino dessa instituição. Pitombeira (2004) destaca esse momento marcante através da seguinte afirmação de Euclides Roxo:

Entre nós, até 1929, o ensino de aritmética, de álgebra e de geometria eram feitos separadamente. O estudante prestava, pelo regime de preparatório que vigorou até 1925, um exame distinto para cada uma daquelas disciplinas (...). Em 1928, propusemos à congregação do Colégio Pedro II a modificação dos programas de matemáticas, de acordo com a orientação do moderno movimento de reforma e a consequente unificação do curso (...) sob a denominação de matemática. (Roxo, 1940, p. 73 – 74 apud Pitombeira, p. 93, 2004)

Portanto, através do Decreto nº 18.564, de janeiro de 1929, assinado por mais de dois terços dos professores do Colégio Pedro II, a aritmética, a álgebra e a geometria que anteriormente eram ensinadas separadamente passam a constituir uma única disciplina chamada matemática. Assim, para que essa nova proposta fosse colocada em prática, o colégio Pedro II adotou um novo didático lançado por Euclides Roxo ainda em 1929: *Curso de matemática*. Segundo análise de Valente (2004a), “pela geometria, com o emprego de noções intuitivas, passo a passo, são introduzidos os conteúdos da álgebra e da aritmética”. O autor continua sua ideia colocando em evidência os capítulos iniciais desse livro didático e, dentre eles, encontra-se *III: O círculo e os sólidos de revolução* que pode ser uma introdução para o ensino de curvas cônicas.

Isso significa que também foi necessário realizar diversas alterações em termos de programas de ensino, práticas de professores, livros didáticos etc. E isso tudo foi parte de um movimento de reforma para a modernização do ensino da matemática escola. De acordo com Euclides Roxo, havia três principais características desse movimento: “I - a predominância do ponto de vista psicológico; II – subordinação da escolha, da matéria a ensinar às aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas; III – subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da época” (Roxo, 1937). Percebe-se que esse período, que teve início na década de 1920 e permaneceu em 1930 e 1940, é de muitas mudanças no ensino de matemática no contexto brasileiro e, por isso, é tão interessante procurarmos entender como era o ensino de um conteúdo específico, as curvas cônicas.

Assim, foi nesse contexto de grandes mudanças educacionais que as Reformas Francisco Campos (1931) e Gustavo Capanema (1942) foram instituídas. Pitombeira (2004) destaca que Euclides Roxo foi influente nessas duas reformas, porém sua atuação foi grandemente documentada na Reforma Capanema por meio, principalmente, de cartas enviadas à Gustavo Capanema. Nessas cartas, “nota-se o empenho de Euclides Roxo em preservar seus pontos de vista contra as tentativas de modificá-los” (PITOMBEIRA, p. 137, 2004). Um exemplo disso pode ser observado no documento em que Euclides Roxo, que em 1931 havia conseguido impor sua ideia de o ensino da matemática ocorrer por um compêndio por séries e não didáticos com conteúdos isolados, mostra-se contrário a decisão do ministro em voltar atrás com essa ideia. A carta é datada de 30 de novembro de 1942, mesmo ano em que a Reforma havia sido instaurada.

Recebi o recado de V.Ex. recomendando-me que acrescentasse às instruções metodológicas para os programas de matemática uma determinação a respeito da maneira por que a matéria deveria ser distribuída em compêndios, podendo ser adotado qualquer critério, menos o de um compêndio para cada série.

Acho-me, Sr. Ministro, na impossibilidade de redigir tal determinação, porque estou profundamente convencido de que o único critério aceitável, principalmente no caso da matemática, é justamente o de um único compêndio para cada série. (EUCLIDES ROXO, 1942 apud PITOMBEIRA, p. 138, 2004)

Nessa mesma carta, segundo Pitombeira (2004), ele defende sua posição sobre o ensino de matemática ocorrer por meio da integração dos vários campos da matemática escolar. Percebe-se, portanto, que Euclides Roxo continuou defendendo

seus ideais diante das mudanças trazidas pela Reforma e “quem lê o programa de matemática aprovado por Capanema (Decreto-lei nº 4.244, de 9/4/1942) percebe que os pontos de vista de Euclides Roxo foram substancialmente mantidos” (PITOMBEIRA, p.140, 2004).

2.2 AS REFORMAS FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA

Observa-se, portanto, que as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema foram instituídas em um momento de grandes movimentações no contexto de ensino de matemática. Cabe lembrar que um pouco antes da década de 1930, o ensino secundário se tornou obrigatório após um período de dualismo entre a praticidade dos cursos preparatórios e os ideais de formação de um cidadão pensante propostos pelos defensores do estabelecimento do ensino secundário. Nessa pesquisa, o foco está nas mudanças que ocorreram no curso secundário, principalmente no curso complementar e clássico/científico, onde está inserida a Geometria Analítica. Além disso, é importante ressaltar que o período de estudo estabelecido nessa pesquisa, isto é, as décadas de 1930 e 1940, abrange exatamente o período em que foram estabelecidas as reformas Campos (1931) e Capanema (1942).

Portanto, é primordial estudar essas reformas para entender o aparecimento das curvas cônicas nos livros didáticos de 1930 e 1940. Essa pesquisa estuda as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema levando em consideração a matemática por trás delas e, principalmente, o ensino de cônicas. Assim, a análise é feita por meio de outras dissertações que se aprofundaram no estudo desses documentos. São elas: *A Matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar* de Tana Giannasi Alvarez; *A Matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema* de Bruno Alvez Dassie e *Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: a mudança na organização dos ensinamentos de Matemática* de Denise Franco Capello Ribeiro.

2.2.1 A reforma Francisco Campos

Em abril de 1931, foi publicado o primeiro decreto que estabelecia as disposições da Reforma Francisco Campos. A dissertação de Alvarez (2004) aponta que o principal objetivo dessa reforma era sistematizar e organizar o ensino

secundário, comercial e superior no Brasil. Nesse trabalho Alvarez, analisa em que medida as mudanças propostas para o ensino de matemática na reforma Campos foram realmente implementadas e, dessa forma, ao realizar a leitura do mesmo foi possível entender as modificações sugeridas pela Reforma e suas implicações para o ensino na década de 1930.

Como já foi apresentado, o ensino de matemática no curso secundário já vinha sofrendo transformações graduais desde meados da década de 1920, quando Euclides Roxo estabeleceu inovações no currículo do Colégio Pedro II. Mas, de acordo com Rocha (2001)

Em 1931, foi promulgada a Reforma Francisco Campos para o ensino secundário em todo o País, fazendo com que esse processo gradativo de mudança fosse interrompido. Aí sim, foram apresentados programas de matemática para todas as séries (exceto para os cursos complementares criados nessa reforma) os quais foram impostos a todas as instituições de ensino secundário do Brasil. Percebe-se, então, que foi utilizada uma forma autoritária para instituir as alterações no ensino de matemática, uma vez que, além de já apresentar todos os programas de forma completa, sem oportunidade para discussão, a obrigação de segui-los era agora de todos os colégios de ensino secundário do País (ROCHA, 2001, p. 45 apud ALVAREZ, 2004, p.9)

Dessa forma, a reforma Campos também apresentava os objetivos do curso secundário, já que, durante muito tempo, sua única finalidade era preparar os estudantes para o curso superior. Segundo Alvarez,

Para o Ministro (Francisco Campos), o ensino secundário deveria se encarregar da formação do homem para todos os setores da atividade nacional, a fim de que este pudesse contribuir e estar preparado para um mundo de transformações e mudanças. Este ensino deveria estar inserido na visão dos educadores liberais, os escolanovistas, que visavam, sobretudo, superar o sistema educacional tradicional, instituindo-se a educação funcional que deveria ter como eixo a ação do indivíduo e não somente sua instrução. (ALVAREZ, 2004, p.10).

Além de definir os objetivos, a promulgação da Reforma também alterou a organização do ensino secundário e ficou definido que ele deveria ser executado em sete anos, sendo os cinco primeiros relativos ao curso fundamental (comum a todos) e os outros dois posteriores, ao curso complementar, que era definido para três áreas distintas, Jurídico; Medicina, Farmácia e Odontologia; Engenharia e Arquitetura.

Alvarez (2004) ainda esclarece que a Reforma teve influência direta de Euclides Roxo que, segundo consta no relato transcrito do Jornal A noite, esteve presente junto com o Ministro Francisco Campos para a elaboração e discussão da reforma de ensino. Assim, o regimento apresentava diretrizes gerais com os objetivos da educação matemática e uma nova didática para o ensino secundário muito próximas aos ideais do professor do Colégio Pedro II. Segundo Alvarez, na Reforma Francisco Campos definiu-se uma preocupação com a utilidade prática do ensino e com habilidades como interpretação de resultados, estimativa e cálculo mental. Além disso, havia apontamentos para uma nova didática em que o aluno se tornasse o agente descobridor de seu conhecimento e não apenas um mero receptor passivo. Isso era uma contraposição ao antigo método tradicional, em que se valorizava a sistematização de demonstrações e a memorização.

Outrossim, o ensino de matemática deveria privilegiar as conexões entre seus ramos, valorizando os diferentes pontos de vista e representações. Segundo a legislação,

A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação a acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas (BICUDO, 1942, p. 157 apud ALVAREZ, 2004, p.17).

A dissertação de Denise Ribeiro (2006), contribui com as investigações sobre a história da educação matemática no Brasil nas décadas de 1930 e 1940, focando, sobretudo, nas transformações que ocorreram da Reforma Francisco Campos para a Capanema. Em seu trabalho, a autora destaca que durante a Reforma Campos, o curso complementar era organizado com a finalidade de adaptar os jovens à prestação de exames para os cursos superior. Mas, a preocupação não era apenas em preparar para o curso superior, como demonstra o decreto 19.890 de 18 de abril de 1931 que determina que o ensino de matemática deveria ser “efetivamente útil no manejo futuro das realidades e dos fatos da vida prática” (Exposição de Motivos, Decreto 19890 de 18.04.1931 apud RIBEIRO, 2006, p. 32). Portanto, percebe-se uma preocupação com uma matemática que fosse útil à prática e vida real do aluno.

Observa-se, portanto, que a Reforma Francisco Campos determinava grandes alterações no ensino secundário de todo o país, referindo-se tanto a organização quanto à didática. Na presente pesquisa, a análise dos livros didáticos

foi estabelecida tomando grande atenção ao estudo de curvas cônicas, tentando perceber se nos materiais da década de 1930 havia alguma preocupação com a utilidade prática, com a interpretação de resultados e com as conexões dos ramos da matemática.

2.2.2 A reforma Gustavo Capanema

Na década seguinte à promulgação da Reforma Francisco Campos, dando prosseguimento às modificações realizadas e apoiando-se nos resultados obtidos por ela, foi implementada a Reforma Gustavo Capanema. Esta reforma educacional foi promulgada a partir de uma série de decretos, sendo o primeiro expedido em janeiro de 1942. De acordo com Ribeiro (2006), esta reforma também tinha como principal objetivo reorganizar o ensino secundário brasileiro. A partir dela, o Curso Fundamental passou a se chamar Ginásio e ter duração de quatro anos. Já o antigo Curso Complementar tornou-se o Colegial, com duração de três anos e duas opções: Clássico ou Científico. Observa-se que a duração do secundário foi mantida em sete anos.

O próprio ministro Gustavo Capanema ressaltou, segundo consta na dissertação de Ribeiro, que a Reforma Campos estabeleceu grandes vantagens pedagógicas para o ensino secundário, como a consolidação do caráter educativo, já que antes essa etapa era considerada apenas uma passagem para o curso superior. Ele complementa afirmando que, a partir de sua reforma, o ensino secundário teria a função específica de “formar nos adolescentes uma sólida cultura geral, marcada pelo cultivo a um tempo das humanidades antigas e das humanidades modernas, e bem assim, de neles acentuar e elevar a consciência patriótica e a consciência humanística” (Exposição de Motivos, 1942 apud RIBEIRO, 2006, p. 37).

Já os Cursos Clássico e Científico, diferente do que ocorria nos Cursos Complementares, não seriam especializados e não definiriam dois rumos diferentes na vida escolar. Na realidade, segundo evidenciado por Ribeiro (2006), a diferença entre o Clássico e o Científico seria o foco maior no estudo das letras ou das ciências, respectivamente. Assim, a conclusão em qualquer um dos dois cursos permitiria o ingresso a qualquer modalidade do ensino superior. De acordo com Ribeiro (2006), os assuntos referentes à Geometria Analítica eram abordados na

segunda série dos Cursos Clássico e Científico. Destaca-se que o carácter de cultura geral e humanística pode ser verificado na estruturação desses cursos.

3. CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Esse trabalho segue a vertente que compreende a História da educação matemática como uma especificidade da História da Educação, que, por sua vez, faz parte dos estudos históricos. De acordo com Valente, “esse posicionamento, desde logo, implica na necessidade de apropriação e uso ferramental teórico metodológico elaborado por historiadores para a escrita da história” (VALENTE, 2013, p.24)

3.1. METODOLOGIA

Percebe-se, ainda, que nessa pesquisa as perspectivas em relação à metodologia de trabalho seguirão as considerações feitas por Valente em *História da Educação Matemática: interrogações metodológicas* como expressa o trecho abaixo:

[...] a menção da base teórica dos projetos já indicava o percurso do trabalho a ser realizado, a sua metodologia. Desse modo, tenho sido partidário da expressão “base teórico-metodológica” como o lugar onde é possível encontrar os caminhos por onde a pesquisa irá trilhar. (VALENTE, 2007, p.28)

Dessa maneira, com a leitura desse tópico será possível compreender os caminhos trilhados pela pesquisa sobre o processo de escolarização das curvas cônicas nas décadas de 1930 e 1940. Seguindo a ideia de que as investigações feitas no âmbito da História da educação matemática fazem parte dos estudos históricos, torna-se relevante salientar alguns pontos sobre a construção de fatos históricos. A respeito desse tema, Valente (2007) declara que só é possível construir fatos históricos a partir das questões formuladas pelo historiador frente as fontes, ou seja, as questões do historiador funcionam como um combustível para a construção dos fatos históricos e, conseqüentemente, para a pesquisa histórica. Logo, um mesmo documento considerado fonte relevante pode ter diferentes importâncias frente as interrogações do historiador.

Sabendo da notoriedade da associação das questões do historiador para o desenvolvimento dos trabalhos com as fontes, cabe ressaltar ainda que as críticas também são uma importante etapa para esse processo. Valente (2007) considera que as críticas educam o olhar que os historiadores lançam sobre as fontes, mas destaca que elas não podem ser feitas de maneira ingênua e sem conhecimentos prévios. Cabe, então, ao historiador, no processo de análise de fontes e desenvolvimento da produção histórica, saber levantar questões e lançar críticas.

Seguindo este pensamento apresentado por Valente (2007), os materiais e documentos utilizados na investigação histórica sobre a escolarização das curvas cônicas foram escolhidos tomando como norte a questão de pesquisa, qual a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário entre as décadas de 1930 e 1940?. Mas, outras questões associadas à questão da pesquisa e mais específicas à análise dos documentos, como *as curvas cônicas têm, historicamente, presença estável na formalização da Geometria Analítica no ensino secundário nas décadas de 1930 e 1940?*, também são de grande notoriedade para escolha e análise das fontes. Assim, por intermédio dessas questões foi possível iniciar o processo de desenvolvimento da pesquisa e, ao longo dele, as críticas às fontes ocorreram de maneira bem cuidadosa, levando em conta discussões e estudos realizados.

3.2 LIVRO DIDÁTICO COMO FONTE DE PESQUISA

Com o objetivo de compreender a presença das curvas cônicas no ensino secundário nas décadas de 1930 e 1940 foram desenvolvidas investigações sobre esse conteúdo em manuais didáticos no período evidenciado. Destacamos que a escolha dos livros didáticos como principais fontes de pesquisa surgiu a partir de uma reflexão sobre a importância deles para a história da educação matemática e, também, para a matemática escolar. A respeito disso, no artigo *Livro didático e educação matemática: uma história inseparável*, Valente destaca que

Desde os primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escola no Brasil pode ser lida nos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141).

Percebe-se, portanto, pelo estudo de Valente (2008), que os didáticos podem ser considerados fontes relevantes para compreender a trajetória histórica de conteúdos da matemática escolar, como as curvas cônicas. Mas, o próprio autor evidencia que não é qualquer leitura dessas obras que as transformarão em fontes. Na realidade, é preciso levar em consideração diversos aspectos para realizar a análise e, até mesmo, para selecionar os manuais que serão pertinentes para cada

tipo de pesquisa. Diante desse contexto, o autor apresenta algumas perguntas que devem ser seguidas pelo pesquisador e que foram consideradas essenciais para a análise dos livros didáticos na pesquisa sobre curvas cônicas. São elas: “Quais livros selecionar? Como utilizar livros didáticos em busca da construção do trajeto histórico da educação matemática? Que critérios estabelecer para lê-los? Enfim, que metodologia da pesquisa utilizar?” (VALENTE, 2008, p.141).

Ainda sobre a importância da utilização dos livros didáticos como fontes de pesquisa, é primordial citar o trabalho do historiador André Chervel que é considerado uma referência para os pesquisadores que utilizam esse tipo de fonte. Em sua obra, traduzida para o português em 1990, *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*, Chervel discorre sobre o fenômeno da vulgada

Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, como variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p. 203)

Com isso, é comum que o historiador, no momento da busca por livros didáticos, encontre fontes com produções e escrita muito semelhantes. Mas, embora isso seja muito frequente, segundo Valente (2008) também existem momentos em que o historiador encontra produções que objetivam originar um novo modo de organização do ensino. Na nossa busca por fontes para o desenvolvimento da pesquisa sobre o ensino de cônicas nas décadas de 1930 e 1940, nos empenhamos em observar se os exemplares encontrados podiam ser considerados manuais inovadores, isso será apresentado com mais detalhes no tópico de análise dos livros.

Cabe ressaltar que Valente afirma que “os livros didáticos constituem-se em elementos fundamentais para a pesquisa do trajeto histórico da educação matemática. Livro didático e educação matemática parecem ser elementos indissociáveis” (VALENTE, 2008, p.143). Assim, percebemos que a utilização dos livros didáticos como fontes para a pesquisa histórica que pretende entender a trajetória das curvas cônicas entre as reformas Campos e Capanema foi possivelmente acertada.

3.3 HISTÓRIA CULTURAL: SUBSÍDIOS PARA UMA PESQUISA SOBRE O ENSINO DAS CURVAS CÔNICAS

Como produziremos uma representação do ensino de curvas cônicas, é primordial conceituar a História Cultural, perspectiva que adotamos nessa pesquisa. Segundo Chartier (2002), “a história cultural, tal como entendemos, tem por principal objeto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler” (CHARTIER, 2002, p.16). Nesse sentido, o autor esclarece que a História Cultural se relaciona diretamente com a representação do passado, ou seja, a partir de uma escolha minuciosa de fontes, o historiador deve produzir representações do que ocorreu no passado.

Além disso, compreender os contextos e estudos provenientes da História Cultural é essencial para todos aqueles que desejam produzir história, visto que esse tema engloba diversos conceitos que auxiliam os historiadores a entender as etapas desse processo histórico. Para representar qualquer pesquisa histórica é preciso estar atento a diversas questões, sobretudo no que diz respeito às noções de cultura, ao lugar social do historiador e às restrições do discurso histórico. Portanto, a pesquisa também apresentará como base o referencial teórico-metodológico da História Cultural, conceituada por autores considerados profícuos para a área, como Roger Chartier.

Na obra *A História ou a leitura do tempo*, Chartier (2007) traz uma discussão sobre a História Cultural através de uma abordagem que envolve outros temas que são conceitos-chaves para compreender a prática dos historiadores, como representação, memória e ficção, micro-história e globalidade, discursos eruditos e práticas populares e, evidentemente, cultura. Dessa maneira, tem-se um panorama sobre o “fazer história”, destacando características, práticas e pontos importantes da produção histórica.

Para introduzir os estudos sobre a História Cultural, o autor traz uma discussão a respeito da chamada “crise da História” que coloca em voga a cientificidade do conhecimento histórico. Chartier (2007) evidencia que esse paradoxo compara a História com a ficção e destaca que esse é um efeito que surgiu, principalmente, a partir de um choque epistemológico. Visto que narrativa e a retórica (que são características da ficção) passaram a ser inerentes à história e, para alguns, esse fato a afastou da cientificidade. Assim, Chartier (2007) recorre a

Ginzburg e Certeau para defender que a ideia de que a noção propagada pela “crise da História” é equivocada, já que Certeau afirma que “História é um discurso que produz enunciados científicos” (CHARTIER, 2007, p.16). Outrossim, Ginzburg reconhece que prova e retórica não são opostas e, sim, estão interligadas na produção histórica, como mostra o trecho abaixo:

[...] Daí sua firme conclusão: reconhecer as dimensões retórica ou narrativa da escritura da história não implica, de modo algum, negar-lhe sua condição de conhecimento verdadeiro, construído a partir de provas e de controles. Por isso, “o conhecimento (mesmo o conhecimento histórico) é possível” (GINZBURG, 1999, p. 25 apud CHARTIER, 2005, p.13).

Tendo compreendido o caráter científico da produção histórica, torna-se relevante entender as relações no passado, não só para distinguir História e ficção, mas também para trazer à tona outro conceito que frequentemente é atrelado a História: a memória. Porém, antes de iniciar esse assunto, Chartier (2007) mostra um outro ponto de extrema importância para a produção histórica, o lugar social onde os historiadores exercem sua prática. Para produzir História é essencial que o historiador tenha em mente onde ela é produzida e as diferenças que esse lugar pode surtir na produção final. Logo, o lugar de produção histórica é essencial para a escrita. Além disso, é muito relevante que o historiador tenha conhecimento das hierarquias da instituição histórica e suas influências sobre a produção, sobretudo no que diz respeito aos objetos históricos legítimos. Essa ideia propagada por Chartier (2007) é, também, baseada em Certeau, como mostra o trecho abaixo:

Antes de saber o que a história diz de uma sociedade, é necessário saber como funciona dentro dela. Essa instituição se inscreve num complexo que lhe permite apenas um tipo de produção e lhe proíbe outros. Tal é a dupla função do lugar. Ele torna possíveis certas pesquisas em função de conjunturas e problemáticas comuns. Mas torna outras impossíveis; exclui do discurso tudo aquilo que é a sua condição num momento dado; representa o papel de uma censura com relação aos postulados presentes (sociais, econômicos, políticos, na análise) (CERTEAU, 1975, 175, p. 78 apud CHARTIER, 2007, p. 17).

Com isso, percebe-se ainda uma preocupação com as partes ocultadas ou transformadas em um discurso histórico, isto é, as restrições. Chartier (2007) deixa claro que é muito importante que os historiadores identifiquem essas restrições para denunciar o caráter subjetivo da História.

Tendo compreendido o quanto o lugar social ocupado pelo historiador é importante para a produção histórica, Chartier (2007) traz novos conhecimentos a respeito das relações no passado. Esse é um outro assunto de extrema relevância para aqueles que produzem História, visto que muitas vezes a produção pode ser confundida com a memória ou ficção. De fato, a produção histórica é uma modalidade da relação que a sociedade mantém com o passado, porém Chartier (2007) deixa claro que existem muitas diferenças entre História, ficção e memória. Para demonstrar isso, o autor coloca em evidência as diferenças entre os conceitos: testemunho e documento; regularidade e causalidade; reconhecimento do passado e representação do passado.

Mas, é evidente que muitas vezes surge para o historiador a dúvida: como certificar a representação histórica do passado? Para responder essa pergunta, Chartier (2007) apoia-se nas três fases da operação historiográfica de Ricoeur (2000), o estabelecimento da prova documental, a construção da explicação e a colocação em forma literária. Dessa maneira, para Chartier (2007) esse distúrbio envolvendo “a crise da história” e da representação da história pode ser superado a partir da reflexão dos critérios e das condições de produção do discurso histórico e das críticas e outras formas de relação com o passado.

Um outro passo muito importante para “o fazer história” é compreender a noção de cultura, já que ela é essencial para estudar a História Cultural. Diante das múltiplas acepções do termo “cultura”, Chartier (2007) apresenta duas famílias de significados:

A que designa as obras e os gestos que, em uma sociedade dada, se subtraem às urgências do cotidiano e se submetem a um juízo estético ou intelectual e a que aponta as práticas comuns através das quais uma sociedade ou um indivíduo vivem e refletem sobre sua relação com o mundo, com os outros e com eles mesmos (CHARTIER, 2007, p.34).

Essa primeira concepção é proposta por Carl Schorske e é a que leva a construção da história dos textos. Já a segunda concepção, baseada em Clifford Geertz, “se apoia na acepção que a antropologia simbólica oferece da noção” (CHARTIER, 2007, p. 35). A partir disso, vale a pena ressaltar as questões comuns entre esses enfoques diferentes de cultura. Chartier (2007) deixa evidente a questão relacionada com a articulação entre as obras singulares e as representações comuns, isto é, a apropriação feita por cada leitor a partir da leitura de um texto. A

História Cultural reflete que a produção do significado é construída a partir da relação do leitor com o texto, como destaca o trecho abaixo:

Por outro lado, na maioria das vezes, consideram os textos como se existissem em si mesmos, fora dos objetos ou das vozes que os transmitem, enquanto uma leitura cultural das obras lembra que as formas como são lidas, ouvidas ou vistas também participam da construção do seu significado. (CHARTIER, 2007, p.36).

Dando continuidade aos estudos relacionados à noção de cultura, Chartier (2007) traz uma discussão sobre as diferenças e semelhanças entre a cultura popular e a cultura letrada. Sobre a cultura popular ele afirma:

Por um lado, a cultura popular é pensada como autônoma, independente, fechada sobre si mesma, e, por outro lado, é definida por sua distância no que diz respeito a legitimidade cultural. Os historiadores oscilaram durante longo tempo entre essas duas perspectivas. (CHARTIER, 2007, p.45).

Não se pretende, nesse trabalho trazer uma caracterização sobre esses termos, mas, sim, essa breve apresentação para nos levar a pensar sobre um grande desafio que se apresenta a História Cultural: a articulação entre os discursos e as práticas.

Outro ponto de discussão relevante para todos aqueles que pretendem fazer História gira em torno das problemáticas envolvidas naquele tema de pesquisa. Para desenvolver essa tarefa, é preciso estar atento às relações entre objeto, contexto e o problema da pesquisa e, além disso, entender que existem três elementos envolvidos nessa problemática: o tema, a interrogação e a justificativa.

Para a construção da problemática de pesquisa deve-se entender como se escreve em História da educação matemática. De Certeau (1982) no segundo capítulo do livro *A escrita da história* traz uma abordagem de extrema relevância para amparar historiadores na compreensão da metodologia e da sistematização por trás da operação historiográfica. De acordo com o autor “a operação historiográfica se refere à combinação de um lugar social, de práticas ‘científicas’ e de uma escrita” (DE CERTEAU. 1982, p.108). Essa operação abrange três fases: a documental, a explicativa/compreensiva e a escriturária. A fase documental é aquela onde o historiador busca indícios para documentar e situar as fontes. Já na fase explicativa/compreensiva deseja-se explicar os significados desses indícios e compreender seus sentidos. Cabe destacar que essa fase é muito relevante, pois trata-se da organização da narrativa e suas regras científicas para se fazer História.

Na última fase, a escriturária, ocorre a elaboração do relato e é nela que o historiador tem a árdua tarefa de realizar uma representação histórica do passado.

De Certeau (1982) também apresenta uma discussão sobre a objetividade e a subjetividade na operação historiográfica. A partir de suas ponderações, é possível compreender que a História é levada a objetividade na medida em que se deseja fazer uma ciência, por outro lado, é preciso entender que não é possível separá-la da subjetividade. Assim, é colocado em evidência que a História não é um campo necessariamente ligado a subjetividade, porém não é possível realizar o trabalho histórico sem considerá-la. Já que é preciso levar em consideração o lugar social que o historiador ocupa e, também, a bagagem cultural que ele carrega. O trecho a seguir demonstra de maneira eficaz essa limitação que o historiador possui para trazer a verdade absoluta para sua produção.

Encarar a história como uma operação será tentar, de maneira necessariamente limitada, compreendê-la como a relação entre um lugar (um recrutamento, um meio, uma profissão etc.), procedimentos de análise (uma disciplina) e a construção de um texto (uma literatura). É admitir que ela faz parte da "realidade" da qual trata, e que essa realidade pode ser apropriada "enquanto atividade humana", "enquanto prática". (CERTEAU, 1982, p. 162).

Ainda sobre a construção da escrita histórica, De Certeau deixa em destaque que nas pesquisas históricas pretende-se fazer História e não contar história, o que as difere das fontes. Assim, pode-se dizer que o autor mostra as especificidades da escrita de História e como ela se diferencia da Literatura e da Filosofia.

3.4. OS SABERES A ENSINAR E PARA ENSINAR

Compreende-se que a presente pesquisa pode contribuir para a reflexão e debate sobre o estudo das cônicas na atualidade do ensino de matemática. É nossa intenção tensionar os conteúdos sobre cônicas que estavam disponíveis para serem ensinados em livros didáticos das décadas de 1930 e 1940. Mas, para entender qual foi a trajetória desse conteúdo no período evidenciado, é importante entender quais eram os saberes disponíveis para os professores ensinarem esse tema. Portanto, mesmo que o objetivo da pesquisa não seja discutir a formação de professores, torna-se relevante uma aproximação teórica sobre os *saberes profissionais* para melhor compreender a matemática para ensinar e a ensinar que se relacionam com o estudo das seções cônicas no período entre as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema.

Salientamos que não há o objetivo de descrever como seria a formação de professores nas décadas de 1930 e 1940, afinal essa é uma discussão muito aprofundada. O que pretendemos nesse tópico é discorrer brevemente sobre um tema que se relaciona com a presente pesquisa, já que a bagagem de conteúdos matemáticos e didáticos que um professor tem são primordiais para sua prática docente e, conseqüentemente, para o ensino de um conteúdo. Logo, a formação de professores se relaciona com a trajetória das curvas cônicas.

Revela-se, portanto, os estudos sobre os saberes profissionais para a prática docente. Assim, com o objetivo de compreender a trajetória das curvas cônicas nas décadas de 1930 e 1940, buscou-se em manuais como era disponibilizado e sistematizado esse conteúdo. E isso nos leva a refletir sobre quais era os saberes a ensinar e para ensinar relacionados as seções cônicas nesse período.

A respeito desses saberes profissionais, os estudiosos suíços Hofstetter e Schnuewly (2017) concebem dois tipos, “os saberes a ensinar, ou seja, os saberes que são os objetos do seu trabalho; e os saberes para ensinar, em outros termos os saberes que são as ferramentas do seu trabalho” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 131-132). Assim, no caso do professor de matemática, os saberes a ensinar estão relacionados ao conteúdo a ser ministrado, enquanto os saberes para ensinar se referem à metodologia e didática utilizada pelo docente. Nota-se, portanto, que esses saberes são uma questão central tanto para a ação docente quanto para a formação.

Dessa maneira, estudando os conceitos dos saberes expostos por Hofstetter e Schnuewly (2017) é possível compreender que os saberes a ensinar referem-se àqueles produzidos pelas disciplinas universitárias e que são considerados relevantes para a formação de professores. Portanto, os saberes a ensinar não estão prontos, por si só, para serem ensinados em outros níveis de aprendizagem. Ele se torna um saber ensinável em outro nível através de ferramentas que, no caso, são os saberes para ensinar.

Depois de compreender as questões relacionadas a esses saberes, é possível associá-los com o tema da pesquisa. Os estudos relacionados às cônicas no âmbito da Geometria Analítica são os saberes a ensinar, já que são os objetos do trabalho do professor, isto é, o que o conteúdo que o professor aprendeu e irá transmitir para seus alunos. Já a maneira pela qual os professores ensinaram esse conteúdo ao longo do tempo se referem aos saberes para ensinar, visto que eram

ferramentas de trabalho do docente. Assim, nessa pesquisa, apresentaremos qual eram os saberes a ensinar relacionados as curvas cônicas que os professores ministravam para os alunos nas décadas de 1930 e 1940.

Cabe ressaltar, novamente, que, de acordo com Valente (2008), o livro didático é um suporte relevante entender como um determinado conteúdo era ensinado em um período, já que eles foram desde os primórdios utilizados como referência para se ensinar matemática e fazem parte do cotidiano dos professores, auxiliando, inclusive, a preparação de aulas. Dessa forma, por meio da análise de livros didáticos, é possível observar, em um aspecto geral, quais eram os saberes a ensinar que se relacionam com as curvas cônicas nas décadas de 1930 e 1940.

Valente (2018) revela a pergunta *que saberes deveriam possuir os profissionais da docência?* Nessa pesquisa, estamos investigando um conteúdo específico da disciplina matemática, então torna-se ainda mais interessante reelaborarmos a pergunta para *que saberes profissionais deveriam possuir os professores que ensinam matemática?* A partir desse pressuposto, o autor nos apresenta os conceitos de matemática a ensinar e a matemática para ensinar, que muito se aproximam dos saberes a ensinar e para ensinar já apresentados. Nesse texto, Valente (2018) ainda destaca a importância da análise de materiais didáticos para entender os saberes de uma determinada época.

A análise de toda uma documentação oficial do ensino, de manuais didáticos, de revistas pedagógicas, de cadernos escolares, dentre outros documentos, mostra-se como importante para tal investigação. A leitura e análise dessa documentação tem por objetivo capturar métodos, didáticas, orientações pedagógicas que poderiam ser lidas como integrantes do movimento de constituição de saberes para ensinar e saberes a ensinar. O que deve o professor saber para ensinar matemática e que matemática ensinar? Ou, nos termos das ferramentas teórico metodológicas empregadas neste estudo, como caracterizar uma matemática a ensinar em articulação a uma matemática para ensinar? (VALENTE, 2018, p. 196)

Assim, o trecho apresentado pelo autor reforça a ideia de que utilizar os livros didáticos e as legislações pode ser uma boa estratégia para entender o que e como aqueles que ministravam a disciplina matemática ensinavam um determinado conteúdo. À vista disso, intencionamos analisar os livros didáticos em busca de compreender como ocorria o ensino de curvas cônicas em 1930 e 1940.

4. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Como mencionado anteriormente, as principais fontes utilizadas nessa pesquisa são livros didáticos de Matemática do ensino secundário publicados no Brasil nas décadas de 1930 e 1940, período que compreende as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema.

Antes de apresentar a análise dos livros didáticos, torna-se relevante descrever, brevemente, como o estudo da base teórica mobilizada para essa pesquisa foi pertinente para o desenvolvimento da investigação. Nesse sentido, algumas observações importantes já foram ressaltadas no tópico de considerações teórico-metodológicas, mas cabe destacar novamente como a História Cultural e a matemática para/a ensinar foram mobilizadas na prática para o estudo dos livros didáticos.

É notório, entre as pesquisas produzidas pelo GHEMAT-UFJF, a importância da História Cultural para as produções da área. Isso se dá, principalmente, porque Chartier (2002, 2007) apresenta estudos que tratam sobre representações do passado e etapas do processo histórico que são essenciais para o “fazer história”. Para essa pesquisa sobre curvas cônicas o “fazer história” se relaciona diretamente com os livros didáticos e, portanto, os conceitos sobre História Cultural foram mobilizados para o processo de análise dos mesmos.

Desse modo, as obras didáticas apresentadas nesse tópico foram investigadas com a noção de que será produzida uma representação do que ocorreu nas décadas de 1930 e 1940, mais especificamente de quais eram os conteúdos relacionados as curvas cônicas ensinados nesse período. Sendo assim, antes de realizar a análise das obras estudamos o contexto do período evidenciado, trazendo informações sobre quais foram os principais acontecimentos para o ensino de matemática e, também, sobre os autores de cada uma delas e sua influência para a época. Logo, assim como destacado por Chartier (2007), para a análise dos livros didáticos estivemos atentas as noções de cultura do período evidenciado e ao lugar social ocupado por nós no momento da escrita.

Seguindo essa mesma ideia, cabe ressaltar a importância da matemática para ensinar e a ensinar na análise dos livros didáticos. Como já foi evidenciado, na presente pesquisa temos a pretensão de trazer uma aproximação teórica com os saberes profissionais para melhor compreender a matemática para/a ensinar e como

elas se relacionam com o estudo das seções cônicas entre as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema. Ao investigarmos os conteúdos presentes nas obras escolhidas, o principal objetivo era entender como as cônicas apareciam e quais eram as aproximações e divergências com o que era proposto nos currículos oficiais. Desse modo, para atingir essa meta traçamos algumas estratégias que se relacionam com a matemática para ensinar e a ensinar, isto é, procuramos, além de simplesmente visualizar o conteúdo abordado, também entender os métodos e didáticas presentes nos livros didáticos para o ensino das cônicas. De acordo com Valente (2018), essa é uma boa estratégia para entender como aqueles que ministravam a disciplina matemática ensinavam o conteúdo.

Assim, atentando-se para a importância dos livros didáticos como fontes para a História da educação matemática, sobretudo para a pesquisa em questão, foram analisadas 4 obras situadas no espaço temporal já mencionado. A motivação pela busca desses livros se deve à procura de informações para entender como era o ensino das curvas cônicas durante as Reformas Francisco Campos e Capanema, buscando responder sobretudo à pergunta *qual a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário entre as décadas de 1930 e 1940?*

A busca pelos livros didáticos ocorreu tanto por intermédio de exemplares impressos quanto por meio de outros trabalhos já publicados. Antes de apresentar discriminadamente como foi feita essa busca, é importante elencar os critérios utilizados para a escolha das obras. Primeiramente, foram selecionados os livros que foram publicados nas décadas de 1930 e 1940 ou, então, que tiveram alguma relação com esse período, como será melhor elucidado posteriormente neste tópico. O segundo critério utilizado foi o público-alvo. Como já é esperado, para essa pesquisa, foram considerados apenas os livros destinados ao ensino secundário. Por último, foram apontados como relevantes para essa pesquisa apenas os livros que fossem destinados especificamente à disciplina Matemática. Explicando melhor, como a criação da disciplina Matemática foi um marco recente às décadas de 1930 e 1940, era muito comum, nesse período, encontrar livros que se destinassem apenas a Geometria ou Geometria Analítica, por exemplo, e não à Matemática como um todo. Resumindo, no nosso estudo, pretendemos entender como as cônicas apareciam nos recém-publicados livros didáticos de Matemática e não nos de Geometria Analítica.

Assim, considerando os critérios apresentados, o início da busca pelos livros didáticos ocorreu de forma presencial verificando os exemplares impressos que fazem parte do acervo de livros do grupo GHEMAT – UFJF. A partir desse levantamento, foram encontrados 3 exemplares que se encaixavam nas características definidas, são eles: *Curso de Matemática 3º ano* de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, 3ª edição, 1936; *Curso de Matemática 3º Livro – Ciclo Colegial* de Algacyr Munhoz Maeder, 2ª edição, 1949; *Curso de Matemática Ciclo Colegial* de Algacyr Munhoz Maeder, 3ª edição, 1951. Salienta-se que esse último exemplar, apesar de ter sido publicado fora do período da pesquisa, apresenta material importante para compreender as mudanças ocorridas no final da década de 1940. Isso será detalhadamente explicado nas análises dos livros.

Com a intenção de encontrar mais fontes para compor a investigação sobre curvas cônicas no secundário, foi feita uma averiguação em outros trabalhos com a temática que se assemelha de alguma forma com a presente pesquisa. A dissertação de Oruê (2020), que também foi apresentada no tópico de revisão de literatura, analisa a trajetória da Geometria Analítica em tempos da Reforma Francisco Campos por meio dos programas de matemática, além de todos os manuais descritos na tabela a seguir,

Tabela 2 - Manuais analisados por Oruê

Título	Autor	Ano
Elementos de Geometria Analítica	Peixoto	1938
Geometria Analítica, I Parte	Mello e Souza	1938
Pontos de Matemática	Lima	1938
Apontamentos de Geometria Analítica	Freire e Barreto	1940
Geometria Analítica, II Parte	Mello e Souza	1940
Lições de Matemática	Serrão	1941
Problemas de Geometria Analítica de duas dimensões	Peixoto	1941
Problemas de Geometria Analítica de três dimensões	Peixoto	1942

Fonte: Oruê (2020)

Observa-se que a dissertação de Oruê se aproxima da presente pesquisa, pois ela trata das transformações sofridas pela Geometria Analítica na década de 1940. Desse modo, todos os livros postos por ela estão incluídos no espaço temporal determinado e, com isso, atendem o primeiro critério estabelecido para a

escolha das fontes. Porém, a maioria deles não se encaixam no terceiro critério, pois são livros publicados especificamente para o ensino de Geometria Analítica e não fazem referência à disciplina Matemática. E, assim, com a retirada desses livros, sobraram o *Pontos de Matemática* de Lima (1938) e o *Lições de Matemática* de Serrão (1941) como possíveis obras para serem analisadas na presente pesquisa.

Dessa maneira, utilizando o trabalho de Oruê (2020), foi feita uma análise dos prefácios e índices desses livros na intenção de entender se eles realmente se encaixariam nos critérios estabelecidos para a análise. O livro de Lima denominado *Pontos de Matemática* foi publicado em 1938 em um contexto de exames preparatórios e, segundo ao próprio autor na chamada ao leitor,

o que se vai ler não se constitui propriamente um livro. E' uma compilação de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares, para admissão ás Faculdades de Medicina, Farmácia, Odontologia e Engenharia.

(...)

É óbvio dizer que o presente livrinho destina-se apenas áqueles que não podem adiquirir outros melhores, visto não ter eu a pretensão de impingi-lo como cousa original ou repositório de erudição. (LIMA, 1938 apud ORUÊ, 2020, p. 162)

Isso posto, torna-se evidente que o livro de Lima é emblemático em um contexto dos exames preparatórios e, na análise dessa pesquisa, pretende-se compreender as curvas cônicas em um contexto de formação e aprendizagens no ensino secundário.

Analogamente, o livro *Lições de Matemática* de Serrão (1941) é mais direcionado para a preparação para os cursos superiores e não para o ensino secundário em si. No prefácio, o autor afirma que o objetivo dessa obra é apresentar a Matemática para aqueles que se dedicam ao estudo das “ciências naturais” e afirma

Tendo em vista facilitar aos alunos dos cursos complementares a aquisição desses conhecimentos, escrevemos, mirando constantemente as aplicações, as nossas “Lições de matemática para médicos e químicos”

(...)

Não tivemos também de nenhuma forma a preocupação de fundamentar sob um ponto de vista conceitual a matéria tratada, dado o próprio fim que visamos e a natureza dos leitores a que destinamos o nosso trabalho. Assim, contentamo-nos muitas vezes em enunciar unicamente proposições cuja demonstração rigorosa

seria difícil, ilustrando-os por meio de exemplos e recorreremos à intuição sempre que nos apresentou o ensejo.

Dessa forma, segundo as indicações do prefácio, o manual de Serrão era destinado aos alunos dos Cursos Complementares de Medicina e foi elaborado com a intenção de preparar e facilitar aos alunos, que pretendiam se tornar médicos, a compreensão dos assuntos de Matemática. Logo, esse exemplar também não faz parte do contexto que pretendemos abordar na pesquisa sobre curvas cônicas e, com isso, os livros analisados por Oruê (2020) não preencheram os critérios determinados para se tornarem fontes para a presente dissertação.

O artigo *Livros didáticos de Matemática e as Reformas Campos e Capanema* publicado por Wagner Valente nos anais do VIII Encontro Nacional da Educação Matemática em 2004 trouxe uma reflexão relevante para a presente pesquisa. Ao realizar a leitura dele, nos deparamos com o seguinte

Dentre os livros didáticos de Matemática, considerados verdadeiros best-sellers, pela quantidade de exemplares que venderam, estão as obras de Cecil Thiré e Mello e Souza, Jacomo Stávale e Algacyr Maeder, para citar alguns dos mais importantes (VALENTE, 2004, p. 4)

Tal argumentação chamou nossa atenção para o fato de já termos selecionado duas entre as três obras dos autores que Valente (2004) cita. Faltava então Jacomo Stávale entre nossas referências e, com isso, decidimos procurar sobre os livros desse autor nas décadas de 1930 e 1940. Dessa forma, realizamos uma busca no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina pelo termo “Jacomo Stávale” e encontramos um total de 25 itens. Dentre esses, sete eram de livros didáticos publicados pelo autor na década de 1940, isto é, no período que nos interessa. São eles:

Tabela 3 - Livros do autor Jacomo Stávale

<i>Títulos</i>	<i>Edição</i>	<i>Ano</i>
<i>Primeiro Ano de Matemática</i>	17ª edição	1941
<i>Elementos de Matemática – 1ª série ginasial</i>	3ª edição	1942
<i>Elementos de Matemática – 2ª série ginasial</i>	1ª edição	1943
<i>Elementos de Matemática – 2ª série ginasial</i>	2ª edição	1943
<i>Elementos de Matemática – 4ª série ginasial</i>	3ª edição	1944

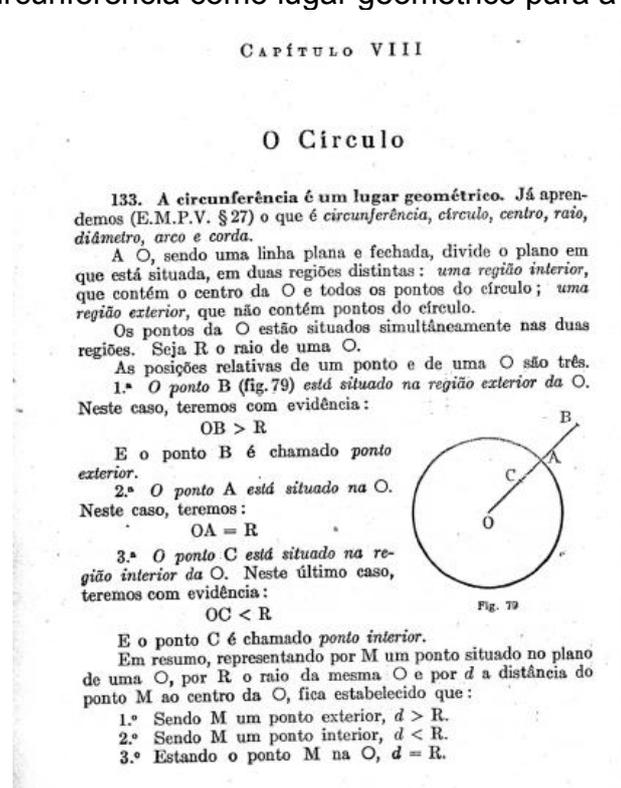
<i>Elementos de Matemática – 3ª série ginásial</i>	11ª edição	1947
<i>Elementos de Matemática – 2ª série ginásial</i>	15ª edição	1948

Fonte: autoria própria

Levando em consideração os critérios estabelecidos nessa pesquisa para a escolha dos didáticos, pode-se afirmar que todos esses exemplares de Stávale podem assumir *status* de fonte, já que eles estão dentro do espaço temporal definido, são destinados a estudantes do secundário e tratam da disciplina Matemática. Mas, haja vista que estamos buscando pelo conteúdo de curvas cônicas, decidimos não analisar mais profundamente esses livros. Tal decisão se justifica por meio do Programa de Matemática expedido em 1943 e exposto por Ribeiro (2006) em sua dissertação. Nesse programa, os estudos relacionados as seções cônicas aparecem apenas no terceiro ano do Curso Complementar, conforme pode ser observado no anexo C.

A figura 2 mostra a circunferência descrita como o lugar geométrico no livro *Elementos de Matemática – 3ª série ginásial* de 1947.

Figura 2 – A circunferência como lugar geométrico para a 3ª série ginásial



Fonte: Stávale (1947)

Observando pelos próprios títulos de Stávale e, também, com a leitura dos prefácios deles, constatamos que eles são destinados aos alunos matriculados no Ginásio do ensino secundário, isto é, nas fases destinadas aos 4 primeiros anos de secundário. Logo, é esperado que nesses livros não haja nenhuma menção as curvas cônicas. Mas, mesmo assim, resolvemos estudar seus índices e, como já era esperado, em nenhum deles há menção às curvas cônicas, apenas à circunferência, como foi apresentado na figura 2.

Outro trabalho utilizado como fonte para a procura de didáticos relevantes para a pesquisa, foi o artigo *Escolarização da geometria analítica no ensino secundário: uma análise de livros didáticos em três períodos do século XX* publicado em 2020 na revista ACERVO: Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP. Tal artigo foi sistematizado a partir de trabalhos em nível de Iniciação Científica que são vinculados ao projeto maior no qual essa pesquisa se insere. Esses trabalhos de IC foram realizados por três membros do grupo GHEMAT-UFJF, Daniel de Paula, Mariana Siqueira e Lincoln David.

Assim, o principal objetivo desses trabalhos foi realizar um levantamento bibliográfico dos livros de geometria analítica em acervos de bibliotecas de universidades. Foram elencados 166 livros relacionados ao ensino de geometria analítica, sendo 42 destinados ao ensino secundário e, o restante, ao ensino superior. Assim, dentre esses destinados ao secundário, iniciamos uma averiguação de quais seriam ligados às décadas de 1930 e 1940. Foram encontradas 7 obras para o ensino secundário no período determinado

Tabela 4 - Livros elencados por De Paula, Siqueira e David (2020)

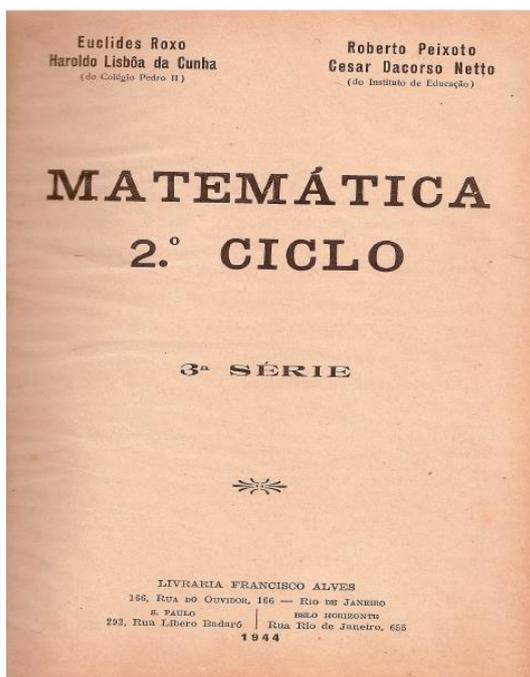
Títulos	Autor	Ano
<i>Geometria Analítica (duas dimensões)</i>	Souza	1931
<i>Geometria Analítica (três dimensões)</i>	Souza	1934
<i>Compêndio de geometria: plana, construtiva, trigonométrica, esteriométrica e analítica</i>	Schrader e Godofredo	1936
<i>Elementos de geometria analítica (3 edições)</i>	Peixoto	1938, 1941, 1945
<i>Elementos de geometria analítica com 450 exercícios</i>	Sonnino	1944

Fonte: autoria própria

Novamente, os livros selecionados atendem ao primeiro e ao segundo critérios, isto é, são didáticos destinados ao ensino secundário e são das décadas de 1930 ou 1940, porém eles são de Geometria Analítica e não de Matemática. Tal fato também ocorre na dissertação de Ribeiro (2006), já que os livros que ela apresenta para a época da reforma Francisco Campos são todos especificamente de Geometria Analítica.

Mas, a dissertação de Denise Ribeiro traz uma contribuição muito relevante relacionada ao período da reforma Gustavo Capanema, a série de livros *Matemática 2º ciclo* de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Netto. Essa coleção foi elaborada pela união dos autores citados e era composta por três volumes: 1ª série, 2ª série e 3ª série. De acordo com Ribeiro (2006), o objetivo principal dessa coleção era atender aos programas dos Cursos Clássico e Científico, que haviam sido expedidos de acordo com a reforma Capanema. Assim, eles apresentavam uma nova organização dos conteúdos, unindo em um mesmo didático toda a matéria que deveria ser dada, por série, aos alunos dos Cursos Clássico e Científico. O último volume, destinado a 3ª série, encontra-se o ensino de Álgebra, assinada por Haroldo Lisboa da Cunha, Geometria, por Euclides Roxo e Geometria Analítica, por Roberto Peixoto. Logo, esse é o volume que nos interessa.

Figura 3 - Contracapa do livro Matemática 2º ciclo - 3ª série



Fonte: Ribeiro (2006)

Observa-se que esse exemplar preenche todos os critérios para se tornar fonte para a pesquisa sobre curvas cônicas, pois foi publicado em 1944, é destinado ao ensino secundário e, ainda, contém as matérias unidas por série, assim como se era esperado na disciplina Matemática. Com isso, iniciamos uma busca com objetivo de encontrar esse livro didático para compor a seleção de fontes dessa pesquisa.

Assim, iniciamos a busca online, em plataformas e sebos, onde foi possível encontrar os exemplares referentes a 1ª e 2ª séries, porém infelizmente não encontramos algum de 3ª série, no qual, conforme o trabalho de Ribeiro (2006), o conteúdo de curvas cônicas está inserido. Resolvemos, então, entrar em contato com a Denise Ribeiro, que escreveu a dissertação já citada, mas não obtivemos resposta. Desse modo, foi decidido apresentar o que foi analisado no livro Matemática 2º Ciclo – 3ª série pelo ponto de vista de Ribeiro (2006) e, por consequência, a investigação dessa obra não segue a mesma linha das outras que serão apresentadas posteriormente.

Ao analisarmos os índices dos livros da coleção Matemática 2º ciclo, por meio da pesquisa de Ribeiro (2016), percebemos que apenas a obra destinada a 3ª série contém conteúdo que se relaciona às cônicas. Além disso, os conteúdos relacionados às cônicas aparecem em duas partes diferentes nessa edição. Primeiro, na *unidade VIII* na parte de geometria, onde existem os capítulos *elipse*, *hipérbole*, *parábolas* e *seções cônicas*. Depois, na parte destinada a geometria analítica, a *unidade X* conta com capítulos denominados *elipse*, *hipérbole* e *parábola*. O anexo D contém o índice dessa obra.

Como não encontramos um exemplar desse livro, não conseguiremos desenvolver a análise das curvas cônicas da mesma maneira que realizamos nos outros livros que serão apresentados a seguir, ou seja, não foi possível colocar em destaque a maneira com que as definições sobre as cônicas eram escritas ou entender qual era a sequência metodológica. Mas, a partir do índice conseguimos executar uma breve investigação sobre como as cônicas foram abordadas. Como a na *unidade VII*, as cônicas são estudadas como parte da geometria, é muito provável que elas recebem um tratamento voltado para o lugar geométrico das curvas. Já na *unidade X*, é pertinente considerar que a elipse, a hipérbole e a parábola são definidas a partir de suas equações e teoremas, pois trata-se de um capítulo dedicado ao estudo analítico.

Dessa forma, os quatro livros selecionados como fontes para a realização da pesquisa histórica foram:

Tabela 5 - Livros utilizados como fontes na presente pesquisa

Títulos	Autor	Ano
<i>Curso de Matemática 3º ano</i>	Thiré; Mello e Souza; Roxo	1936
<i>Matemática 2º ciclo – 3ª série</i>	Roxo; Peixoto; Cunha; Netto	1944
<i>Curso de Matemática 3º Livro – Ciclo Colegial (2ª edição)</i>	Maeder	1949
<i>Curso de Matemática Ciclo Colegial (3ª edição)</i>	Maeder	1951

Fonte: autoria própria

É importante salientar que, com exceção do *Matemática 2º ciclo – 3ª série*, esses livros são exemplares do acervo do GHEMAT-UFJF e isso torna a pesquisa histórica ainda mais rica, pois é possível analisar outras características do livro e de sua materialidade, além de seu conteúdo.

Cabe, ainda, detalhar que a análise desses materiais foi feita em torno de alguns pontos principais, buscando entender como as cônicas apareciam nos livros didáticos do ensino secundário e, principalmente, qual era o tratamento dado a elas. Consideramos que tratamento algébrico se relaciona com as demonstrações analíticas das equações e propriedades das curvas e que tratamento geométrico se refere às apresentações dos lugares geométricos das curvas e o cone de revolução. Portanto, foi necessário averiguar as sequências metodológicas apresentadas em cada um dos livros, procurando entender como ocorria o ensino desse conteúdo, isto é, a ordem de apresentação do tema, os exercícios e, também, se a representação das curvas cônicas era algébrica e/ou geométrica.

4.1 OS AUTORES DOS LIVROS

Antes de iniciar a investigação das curvas cônicas nos livros selecionados, torna-se interessante apresentar uma breve biografia dos seus autores, visto que

conhecer quem elaborou esses exemplares é uma ferramenta que auxilia na compreensão da importância deles naquela época.

Julio Cesar de Mello e Souza, nasceu em 1895 no Rio de Janeiro e foi inicialmente matriculado no Colégio Militar. Mais tarde, foi transferido para o internato do Colégio Pedro II, onde foi aluno do professor Euclides Roxo. Formou-se Engenheiro Civil pela Escola Nacional de Engenharia, mas acabou não exercendo essa profissão e se dedicou ao magistério nos três níveis de ensino (SIQUEIRA FILHO, 2018). Em 1921, tornou-se Professor do Colégio Pedro II e lecionou na instituição por 20 anos. Escreveu diversos livros, incluindo didáticos e de ensino de matemática. Os primeiros didáticos escritos por Mello e Souza datam do período da Reforma Francisco Campos, quando houve uma grande publicação de livros, pois os autores queriam se dedicar a escrever *best-sellers* destinados à nova disciplina Matemática, principalmente no Colégio Pedro II (VALENTE, 2004).

Em muitas das obras publicadas por Mello e Souza, ele assinava com o pseudônimo *Malba Tahan*. Inclusive, ele ficou muito famoso com *O Homem que Calculava*, que foi traduzido para várias línguas, vendeu milhões de cópias e já está na 42ª edição no Brasil. Portanto, Mello e Souza é considerado um professor e autor de grande importância à sua época e ainda atualmente.

Algacyr Munhoz Maeder nasceu em 1903 e formou-se como engenheiro. Ele atuou como professor no Gymnasium Paranaense, se tornou prefeito de Curitiba por um breve período em 1945 e foi reitor na Universidade Federal do Paraná. Além disso, como destacada Longen (2007), um dos grandes feitos de Maeder é a produção de livros didáticos voltados ao ensino de matemática, já que foram publicados 19 exemplares entre 1928 e 1962. Seus primeiros livros foram divulgados diante das transformações ocasionadas pela Reforma Francisco Campos, período em que houve o surgimento de novas coleções didáticas obedecendo a nova organização da matemática. Diante desse cenário, Maeder se envolveu em algumas polêmicas que eram publicadas em forma de artigo na *Revista Brasileira de Matemática* e no jornal *Gazeta do Povo*, de Curitiba. Tais discussões, foram encabeçadas por Salomão Sarebrenick e Julio César de Mello e Souza que questionavam os métodos e as terminologias utilizadas por Maeder no livro recém-publicado *Álgebra Elementar*, de 1933.

Longen (2007) destaca que em um artigo de nove páginas denominado *Pobre Matemática*, Salomão Serebrenick traz críticas duras e irônicas à obra de Maeder. O

artigo começa da seguinte maneira: “O curso de Álgebra do Prof. Maeder é um verdadeiro vaso novo, tal o acabamento de sua capa. No seu interior, porém, nem vinho velho, nem novo; e sim – vinho ruim.” Nesse artigo e em outros que são publicados posteriormente, a obra de Maeder é posta como não científica e atrasada em relação as reformas, pois apresentava alguns conteúdos, como raiz cúbica de polinômios e método de Dühring, que já não apareciam em outros livros didáticos. Além disso, Serebrenick aponta possíveis erros de sentenças Matemáticas escritas por Algacyr. Essa discussão permanece em outras edições da revista com as respostas, no mesmo tom, dadas por Maeder para defender sua obra. Assim, tem-se a publicação de uma série de artigos destinados a criticar livros didáticos e rebater essas críticas. Longen (2007) destaca que o período da Reforma Francisco Campos foi muito conturbado com relação a publicação de livros didáticos, pois não existia nenhum órgão para fiscalizar as produções e isso fazia com que os próprios autores tecessem suas críticas.

É interessante observar que o fato do livro didático de Maeder ter sido pivô de discussões públicas, torna o autor e, também sua obra, um elemento notável para a comunidade da época e, portanto, muito apropriado para ser estudado.

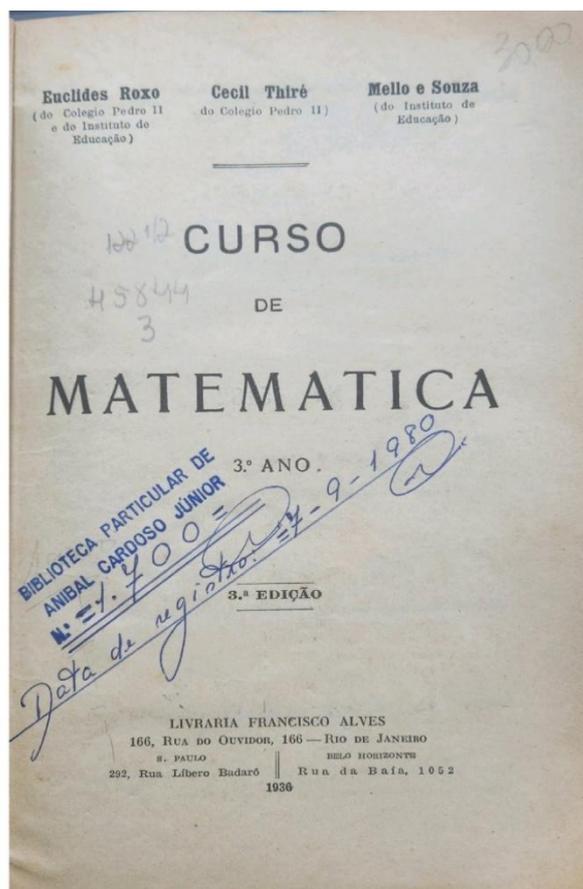
Dando continuidade a biografia dos autores dos livros analisados, destacaremos agora Cecil Thiré, que é filho de Arthur Thiré, um dos responsáveis pelo movimento de reforma do ensino de matemática na década de 1930 no Colégio Pedro II. Cecil nasceu em 1892 e também foi professor do Colégio Pedro II. Publicou livros didáticos com grande aceitação durante décadas.

O professor Euclides Roxo já foi destacado nessa pesquisa em tópicos anteriores, mas vale ressaltar novamente sua importância perante a renovação do ensino de matemática nas décadas de 1930 e 1940. Foi a partir da difusão de seus ideais, inspirados em Felix Klein, que todas as grandes transformações em relação ao ensino de matemática nas décadas de 1930 e 1940 ocorreram, destaca-se a criação disciplina matemática, a alteração no currículo do Colégio Pedro II, as reformas Campos e Capanema e, conseqüentemente, a produção de novos livros didáticos. Portanto, a relevância de Euclides Roxo para a produção de didáticos em 1930 e 1940 é incontestável.

4.2. CURSO DE MATEMÁTICA 3º ANO

A primeira fonte analisada foi o *Curso de Matemática 3º ano* de autoria de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza. Trata-se de um exemplar físico publicado em 1936, ou seja, na época da Reforma Francisco Campos, sendo essa a 3ª edição nº 5182.

Figura 4 - Contracapa do livro de Roxo, Thiré e Mello e Souza



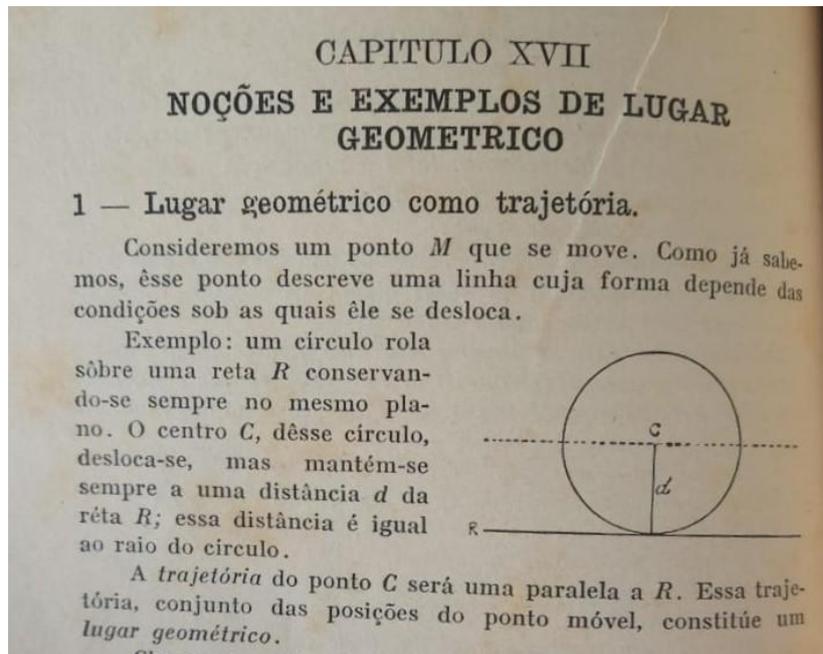
Fonte: Roxo, Thiré, Mello e Souza (1936)

O conteúdo do livro é destinado ao 3º ano do curso secundário e é organizado em capítulos numerados de I a XXIV. Observamos que a sequência metodológica desses capítulos segue a ordem de explicação de teoria seguida de um exercício com resolução. Além disso, ao final de alguns capítulos há um tópico com exercícios ou então um tópico denominado Leituras, no qual os autores apresentam alguma informação adicional ou curiosidades a respeito do conteúdo que foi ensinado no capítulo. Isso acontece, por exemplo, no *Capítulo VIII – Equação do 2º grau – resolução analítica; resolução gráfica*. Ao final dele existe um tópico de exercícios onde se escreve “resolver as equações” e são apresentadas 6 equações não

resolvidas. Além disso, esse mesmo capítulo apresenta o tópico *Leituras* com a história de François Viète, representado no livro como criador da álgebra moderna.

Destaca-se que a obra não apresenta entre seus conteúdos nenhum tópico que faça menção direta às curvas cônicas, mas, ao tentarmos encontrar algum capítulo que se relacione com esse conteúdo, nos deparamos com o *XVII Noções e exemplos de lugar geométrico*. Nele é possível notar uma certa aproximação com o assunto, pois trata-se de um capítulo que expõe o lugar geométrico sob duas ópticas distintas: como trajetória e como um conjunto de pontos. Ao descrever o lugar geométrico como trajetória, o exemplo utilizado é a uma circunferência e, mais a frente, a parábola. Mas, apesar de ser um conceito relacionado com o estudo em evidência, não há nenhuma relação com o estudo analítico dessas curvas, isto é, não há nenhuma transformação dos termos geométricos em algébricos, conforme ilustra a figura a seguir.

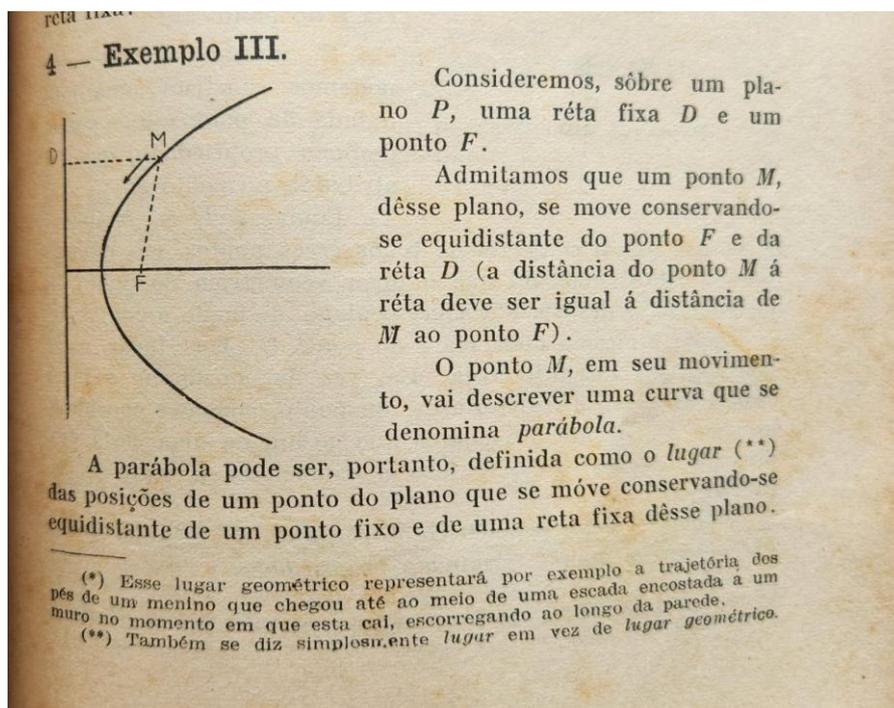
Figura 5 - Apresentação do lugar geométrico como trajetória



Fonte: Roxo, Thiré, Mello e Souza (1936)

No terceiro exemplo desse capítulo, é possível observar a descrição da parábola definida como um lugar geométrico.

Figura 6 - Apresentação da parábola como lugar geométrico



Fonte: Roxo, Thiré, Mello e Souza (1936)

Nesse capítulo não existe a proposição de exercícios para serem resolvidos, mas há no final o tópico *Leituras* sobre, segundo os autores, um dos três mais famosos problemas da geometria, a trissecção de um ângulo.

Outro ponto de destaque se relaciona com o próprio título do livro, *Curso de Matemática 3º ano*. Essa nomenclatura, 3º ano, possivelmente indica que esse livro era destinado ao terceiro ano do Curso Fundamental do ensino secundário. É interessante lembrar que, segundo o decreto que estabeleceu a Reforma Francisco Campos, o ensino secundário foi dividido em dois cursos seriados, o primeiro, denominado Curso Fundamental com duração de cinco anos e o segundo Curso Complementar com duração de dois anos. Assim, visto que o Curso Complementar era composto por apenas dois anos, conclui-se que esse livro era destinado ao Curso Fundamental. Analisando os resultados expostos por Alvarez (2004) seguindo os diários de lições de 1936 e, também, o programa do Colégio Pedro II durante a reforma Campos, pudemos perceber que não há menção conteúdos envolvendo Geometria Analítica no 3º ano do Curso Fundamental. Consequentemente, o ensino de curvas cônicas também não era proposto nessa série.

Assim, os conteúdos propostos nos programas de matemática na reforma Francisco Campos para o 3º ano do ensino secundário englobavam Aritmética/Álgebra e Geometria. Para a geometria, incluía-se o estudo de noções de lugar geométrico (ALVAREZ, 2004). Porém, não era proposto que se ministrasse curvas cônicas nesse ano e, assim, não é esperado encontrar esse tema em um livro destinado ao 3º ano do Curso Fundamental. Mas, esse fato não exclui a obra *Curso de Matemática 3º ano* como fonte relevante para o presente estudo por dois motivos.

Primeiramente, esse livro é de autoria de três grandes professores que tiveram influência direta na transformação do ensino secundário na década de 1930. Por ter sido escrito por esses nomes, ele representa esses novos didáticos que começaram a ser publicados a partir das transformações propostas pela reforma Campos, como a união dos conteúdos, o maior uso de figuras e, também, de aplicações de conceitos matemáticos em outras disciplinas.

Em segundo lugar, ao refletirmos sobre os trabalhos de Oruê (2020), Ribeiro (2006) e De Paula (2019) podemos perceber que neles não há a menção a livros didáticos, no período da reforma Francisco Campos, que fizessem alusão à disciplina Matemática como união dos campos Álgebra, Aritmética, Geometria e Geometria Analítica. Portanto, o exemplar em questão talvez possa ser considerado como um manual inovador, na perspectiva de Chervel (1990), frente aos outros manuais existentes nessa época de 1930. Tal fato pode ser confirmado por Valente (2008) que afirma que essa coleção escrita por Thiré, Mello e Souza e Roxo ainda inspirou outras obras como as publicadas por Algacyr Maeder e Jacomo Stávale., que serão abordados no próximo tópico

Além disso, no artigo publicado em 2011 denominado *A matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?*, Valente destaca que “as obras didáticas de Matemática utilizadas nos cursos complementares constituem material raro, pois tiveram vida curta” (VALENTE, 2011, p. 651). E isso nos ajuda a argumentar que o exemplar analisado de *Curso de Matemática 3º ano* pode ser visto como um manual inovador que nos ajuda a entender a trajetória das cônicas na época da Reforma Campos.

Um outro fato interessante de ser observado é que há um estudo do lugar geométrico de circunferências e parábolas e isso se relaciona com o estudo de curvas cônicas. Para que um aluno entenda o que são essas curvas, seja na

geometria ou na geometria analítica, é preciso que ele as enxergue como um lugar geométrico. Assim, é possível considerar que o entendimento da circunferência e da parábola como um lugar geométrico é um passo importante para se compreender verdadeiramente esses conceitos na geometria analítica.

4.3 CURSO DE MATEMÁTICA – 3º LIVRO DO COLEGIAL

Nesse tópico destacaremos dois livros escritos por Algacyr Munhoz Maeder e denominados *Curso de Matemática – 3º livro colegial*, sendo que é um deles é a 2ª edição de 1949 e o outro a 3ª edição de 1951. Esses dois exemplares fazem parte do acervo do GHEMAT-UFJF e a escolha deles como fonte de pesquisa foi feita com o intuito de perceber se haveria alguma diferença no conteúdo de curvas cônicas. Assim, após análise, foi constatado que o conteúdo de curvas cônicas em relação aos dois exemplares é idêntico e, portanto, os trataremos como um único livro.

Antes de prosseguir para a análise da obra citada, gostaríamos de ressaltar uma outra edição desse mesmo livro que foi citada por Longen (2007). Em sua tese, Adilson Longen traz uma análise de diversos livros publicados por Algacyr Munhoz Maeder e, dentre elas, está o *Curso de Matemática – 3º livro Colegial*. A tabela 5, desenvolvida por Longen, descreve as tiragens das edições desse livro.

Tabela 6 - Tiragem das edições do livro Curso de Matemática

Edição	Data de publicação	Tiragem
1ª.	Ago./1948	5 000
2ª.	Abr./1949	6 000
3ª.	Fev./1951	6 000
4ª.	Abr./1954	8 000
5ª.	Abr./1955	10 500
6ª.	Abr./1957	6 000
7ª.	Mar./1959	8 000
8ª.	Fev./1962	3 000

Fonte: Longen (2007)

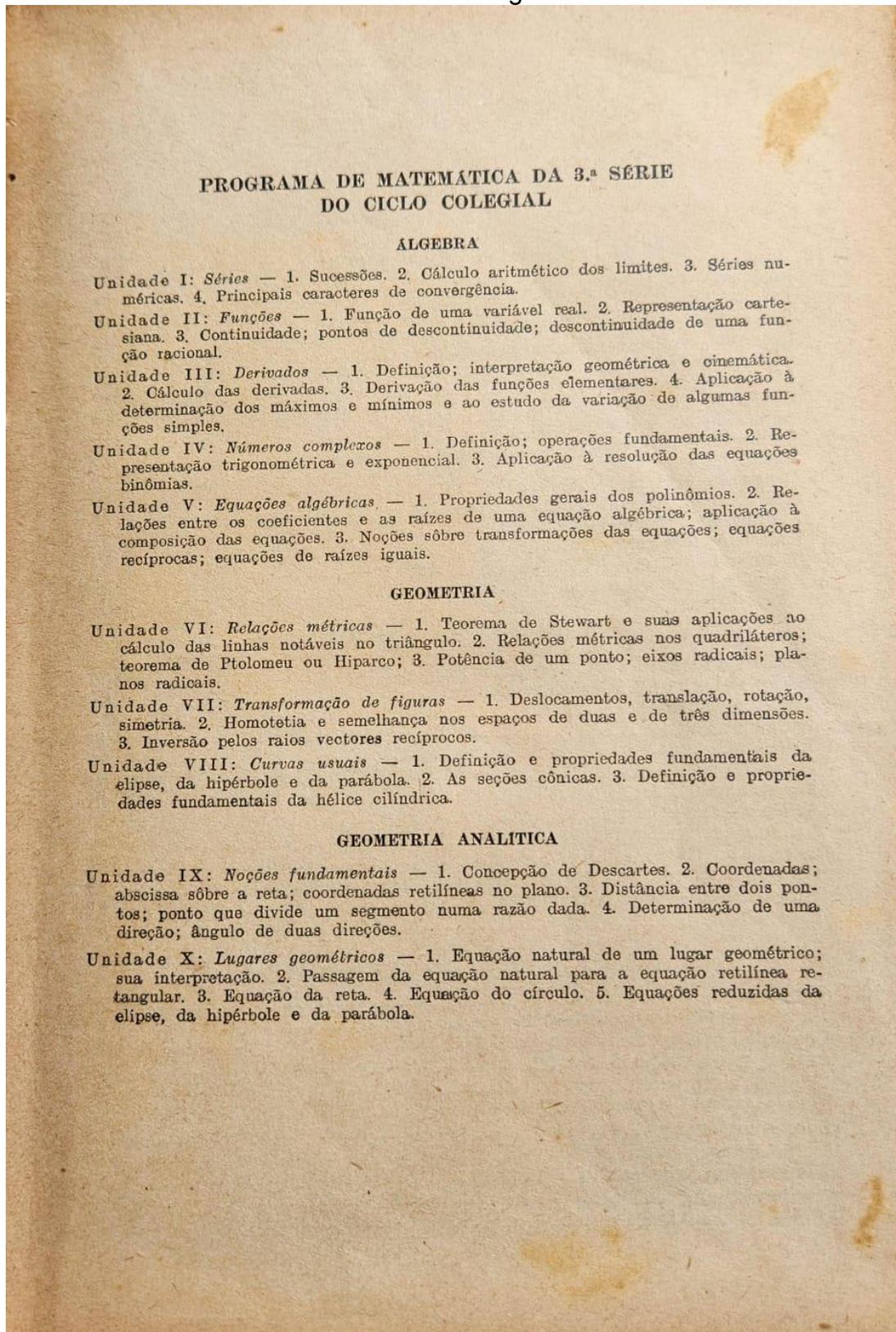
Desta obra, Longen destaca as duas impressões de que já tivemos acesso, isto é, a 2ª edição de 1949 e 3ª de 1951 e, além disso, também apresenta a 7ª edição de 1959. De acordo com Longen (2007), é nessa edição de 1959 que finalmente ocorrem grandes mudanças nos conteúdos apresentados, dentre elas o autor destaca a retirada do estudo das curvas cônicas, assim como previa a portaria ministerial de 1951 evidenciada por Valentim Júnior (2013). Além disso, ele destaca que é possível considerar a coleção de grande alcance, pois ao somarmos todas as edições publicadas para o 3º ciclo obtém-se 52500 livros.

Retornando para o exemplar impresso do *Curso de Matemática – 3º livro Colegial*, começaremos a análise pelas características de divisão do conteúdo matemático. Logo nas primeira e segunda páginas, o autor traz o programa de matemática da 3ª série do ciclo colegial, escrito seguindo as orientações da reforma Gustavo Capanema. Em seguida, apresenta-se o índice dividido em capítulos de I a XXIX e nele é possível perceber o conteúdo é dividido em álgebra, geometria e geometria analítica.

Em relação a sequência metodológica, a maioria dos capítulos se organiza na forma: explicação, exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Não é possível encontrar o tópico exercícios propostos em todos os capítulos, mas, quando eles aparecem, são feitos de maneira bem direta. Por exemplo, no *V cálculo de derivadas*, são apresentadas 21 funções com o comando “derivar as funções seguintes”.

Antes de direcionar o foco da análise para o estudo das cônicas, observamos o programa de matemática da 3ª série do ciclo colegial apresentado pelo próprio Maeder na segunda página do livro. Nele existe a divisão do conteúdo em três áreas, álgebra, geometria e geometria analítica, conforme a figura 7.

Figura 7 - Primeira página do livro de Maeder: programa de Matemática da 3ª série do ciclo colegial

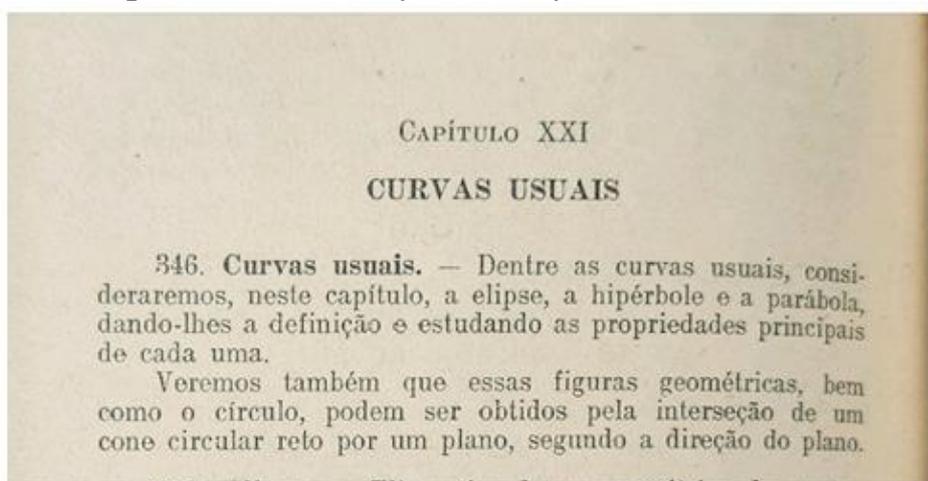


É possível perceber que o conteúdo *curvas usuais*, que inclui a *definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola e as seções cônicas*, é descrito dentro da área Geometria. Já na parte de Geometria Analítica encontramos novamente uma relação com as cônicas por meio do tópico *equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola*. Tendo percebido esse panorama, revisitamos o índice escrito pelo autor e percebemos haver três capítulos distintos que se relacionam com o estudo das curvas cônicas. São eles *XXI: Curvas Usuais; XXII: As seções cônicas e XXIX: Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola*.

Na presente pesquisa, estabelecemos que as cônicas estão vinculadas ao estudo de Geometria Analítica. Mas, diante dessa constatação feita no livro de Maeder, decidimos analisar, também, as cônicas nos capítulos que são destinados ao ensino de Geometria. Afinal, queremos, sobretudo, entender a escolarização dessas curvas nas décadas de 1930 e 1940 em didáticos de matemática. Assim, é necessário tomar um panorama geral de análise.

Sabendo disso e tendo visualizado o livro de uma maneira geral, iniciamos o estudo de um desses capítulos que se relacionam com o principal tema dessa pesquisa, as curvas cônicas.

Figura 8 - Primeiro tópico do Capítulo Curvas Usuais



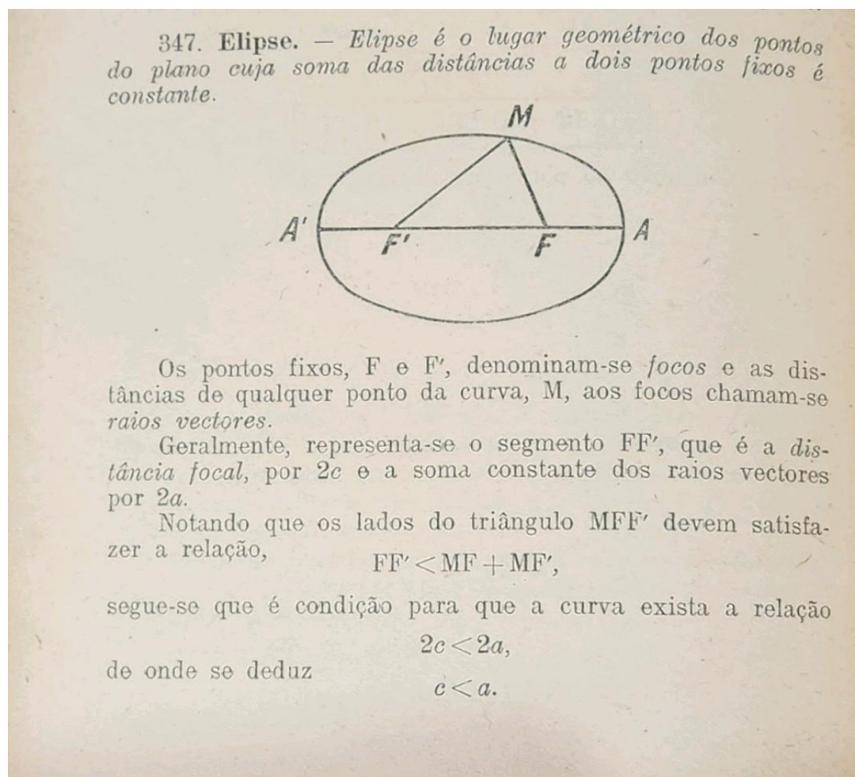
Fonte: Maeder (1949)

O capítulo *XXI* denominado *Curvas Usuais* contém 17 páginas que apresentam explicações, teoremas, corolários e figuras sobre as chamadas curvas usuais que, de acordo com o próprio autor, são a elipse, a hipérbole e a parábola.

Destacamos que não há nenhum exercício resolvido ou proposto nesse capítulo. Além disso, logo na introdução, Maeder coloca em evidência que essas figuras geométricas podem ser obtidas pela interseção de um cone por um plano, que é assunto que será trabalhado no capítulo seguinte. Tal situação pode ser observada na página 342 do livro, conforme ilustra a figura 8.

Dando continuidade ao capítulo XXI, Maeder apresenta as definições e propriedades principais da elipse, da hipérbole e da parábola. Primeiramente, é colocada em evidência a definição de elipse como “o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante” (MAEDER, 1949, p.342). Logo após, uma ilustração dessa cônica é utilizada para exemplificar a situação, conforme a figura 9 apresentada a seguir. Nessa representação da elipse os focos, F e F', e o ponto da curva são colocados em destaque. Portanto, conforme a definição estabelecida para essa pesquisa, pode-se considerar que a elipse é apresentada primeiramente conforme seu aspecto geométrico, ou seja, evidenciando seu lugar geométrico.

Figura 9 - Apresentação da elipse como lugar geométrico

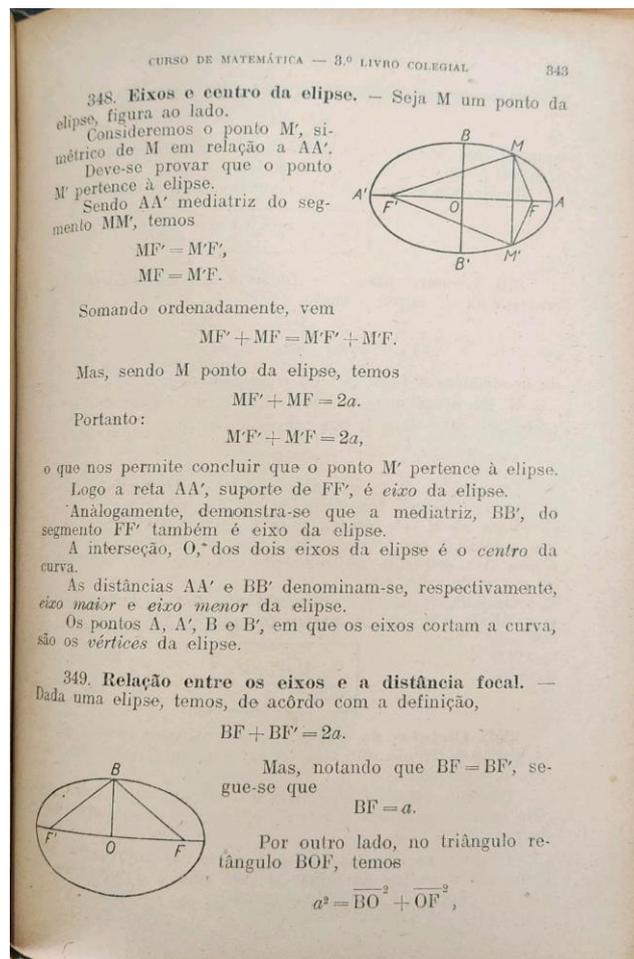


Fonte: Maeder (1949)

Ainda nessa mesma página, o autor começa a descrever propriedades da elipse por meio de análises feitas utilizando a própria ilustração dessa curva. Por exemplo, após explicar o que são os focos, a distância focal e os raios vectores através do lugar geométrico, Maeder demonstra que a distância focal é sempre menor que os raios vectores. Dessa maneira, seguindo nossa definição, utiliza-se um tratamento algébrico para descrever algumas características da elipse, porém o foco continua na sua definição a partir do lugar geométrico.

Além do lugar geométrico da elipse, Maeder também traz outras definições relacionadas a essa curva, são elas: *eixos e centro da elipse; relação entre os eixos e a distância focal; excentricidade; círculos da elipse; valores dos raios vectores e área da elipse*. Para realizar as explicações de cada um desses tópicos, o autor faz uso de ilustrações e de equações, conferindo, assim, uma intercalação entre o tratamento geométrico e o tratamento algébrico dado a elipse, conforme exemplifica a figura 10.

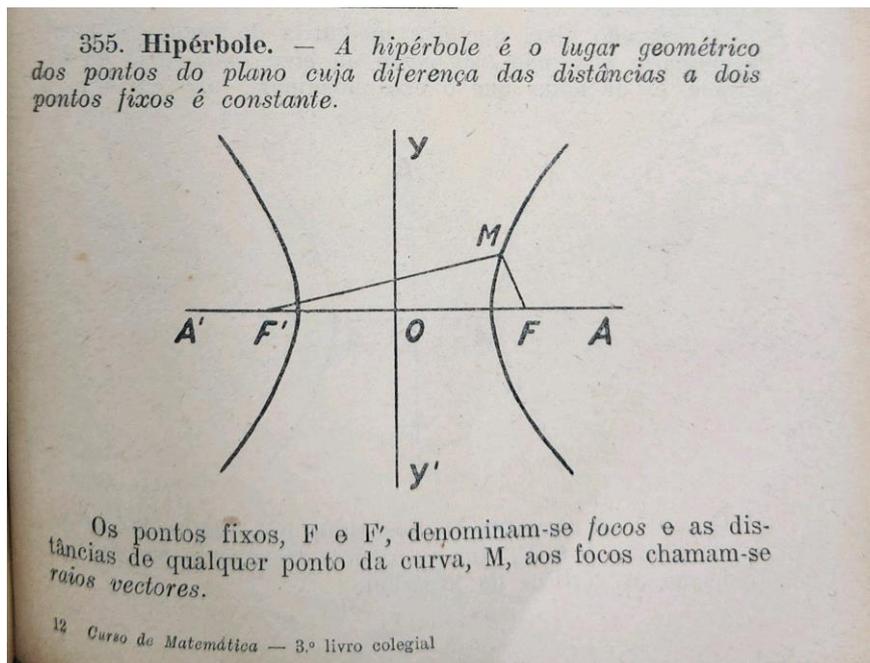
Figura 10 - Estudo da elipse



Fonte: Maeder (1949)

A próxima curva apresentada é a Hipérbole que é definida pelo autor como “o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante” (MAEDER, 1949, p. 349). De maneira análoga a elipse, logo após é apresentada uma ilustração da hipérbole e seus elementos, focos e raios vectores, são colocados em destaque.

Figura 11 - Apresentação da hipérbole como lugar geométrico



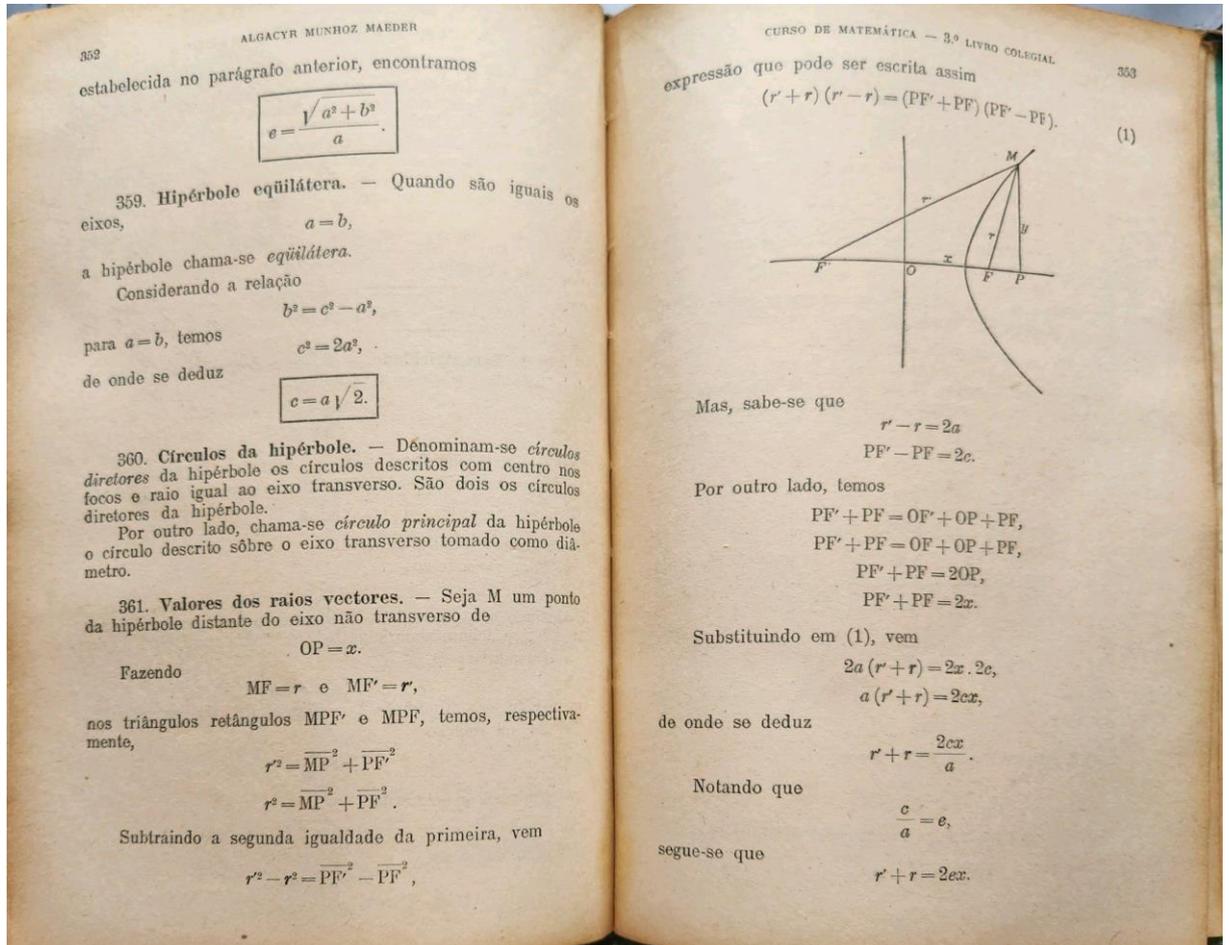
Fonte: Maeder (1949)

Depois de esclarecer a definição da hipérbole usando um tratamento geométrico, o autor passa a tratá-la algebricamente, trazendo equações para demonstrar que a distância focal é sempre maior que a diferença dos raios vectores. Além disso, assim como ocorre na conceituação da elipse, outras definições relacionadas à hipérbole são relatadas, sempre trazendo equações, figuras e utilizando a definição de lugar geométrico, ou seja, essas explicações são feitas por meio de tratamento geométrico e também algébrico. Em relação à hipérbole, os conceitos apresentados são, *eixos e centro da hipérbole; relação entre os eixos e a distância focal; excentricidade; hipérbole equilátera; círculos da hipérbole; valores dos raios vectores; assíntotas da hipérbole*.

A figura 12 abaixo exemplifica essa dualidade do tratamento dado por Maeder para explicar as curvas usuais, já que ao mesmo tempo que ele apresenta um

desenho para representar os lugares geométricos dos elementos da hipérbole, ele também traz muitas equações para conceituar os valores dos raios da hipérbole.

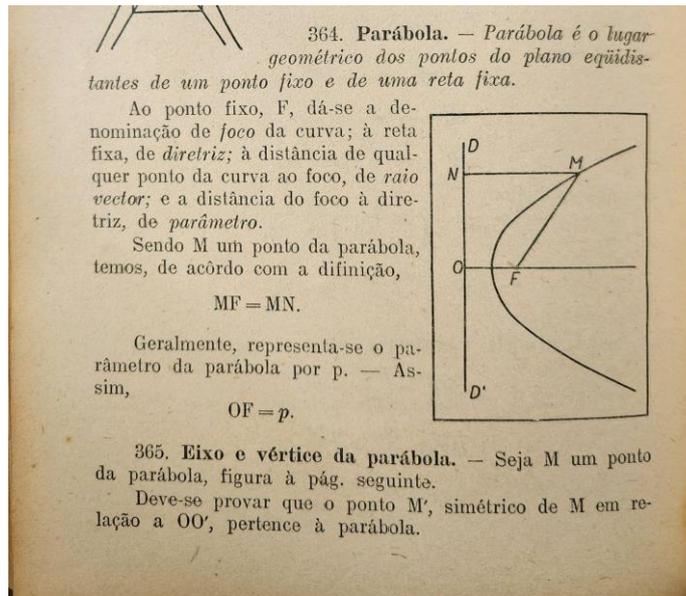
Figura 12 - Estudo da hipérbole



Fonte: Maeder (1949)

Antes de finalizar o capítulo, o autor traz a definição de parábola como “o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa” (MAEDER, 1949, p.356). Observamos, portanto, uma definição seguindo o tratamento geométrico da parábola. Nesse capítulo, as conceituações relacionadas à parábola são eixo e vértice da parábola; subtangente e subnormal; um teorema e um corolário. Destacamos que a parte do texto relacionada às parábolas é menor do que a da elipse e da hipérbole, porém as definições seguem uma estrutura análoga ao que ocorre nessas outras duas curvas, ou seja, elas seguem uma estrutura geométrica e também algébrica.

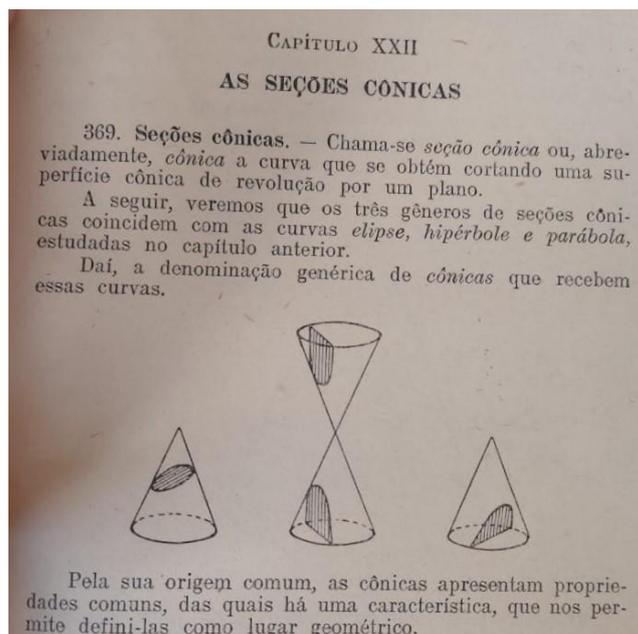
Figura 13 - Apresentação da parábola como lugar geométrico



Fonte: Maeder (1949)

Dando continuidade à análise do livro *Curso de Matemática*, observamos que o capítulo seguinte ao *Curvas Usuais* é o *As secções cônicas*. Na introdução desse novo capítulo, o autor retoma o assunto e afirma que serão estudados três gêneros de seções cônicas que coincidem com as curvas estudadas anteriormente, conforme apresentado na figura 14.

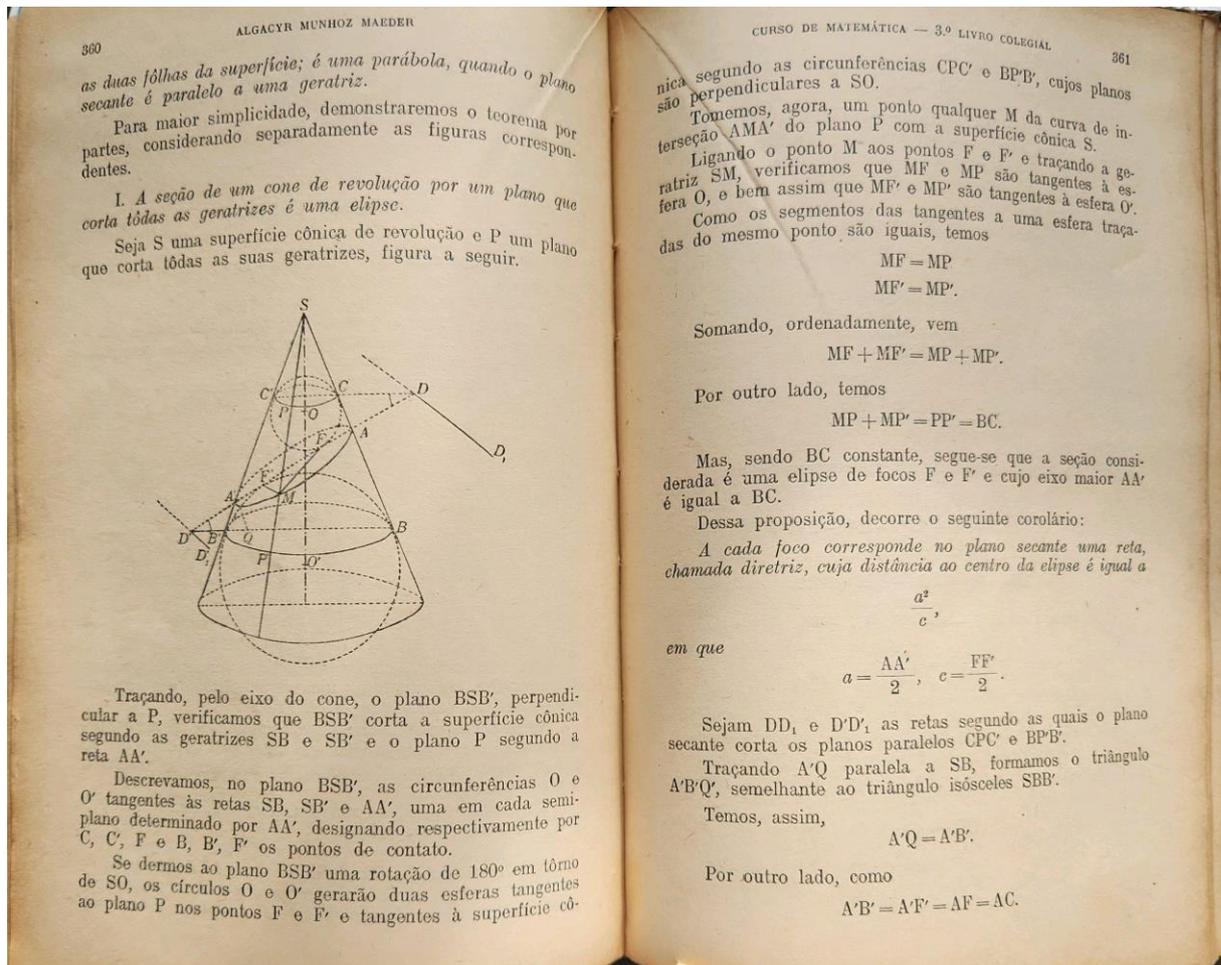
Figura 14 - A definição das seções cônicas



Fonte: Maeder (1949)

Seguindo essa introdução, fica evidente que a definição de seção cônica se dá quase que exclusivamente pelos cortes no cone. Em um primeiro momento, é feita uma apresentação mais geométrica dessa situação, indicando como os planos devem interceptar o cone para obter cada uma das curvas. E isso é mostrado através de três ilustrações de cones, conforme a figura 14. Depois, por meio da demonstração do teorema de Dandelin, a explicação se torna mais algébrica e evidencia a formação de cada uma das curvas, propriedades e corolários. Para exemplificar, mostraremos as páginas dedicadas a demonstrar que “a seção de um cone de revolução por um plano que corta todas as geratrizes é uma elipse” (MAEDER, 1949, p.360) e o corolário que surge a partir dela.

Figura 15 - Parte do desenvolvimento do teorema de Dandelin



Fonte: Maeder (1949)

Durante essas demonstrações, o tratamento das cônicas se torna mais algébrico, pois é necessário utilizar fórmulas e equações para conduzir as

explicações. Porém, ao final do capítulo, o autor escreve o seguinte no tópico *observações*, “A propriedade estabelecida no parágrafo anterior é tomada, às vezes, como definição de cônica: lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a razão das distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa do mesmo plano é constante” (MAEDER, 1949, p. 367). Nota-se que existe, novamente, uma preocupação em se definir as cônicas por meio do lugar geométrico.

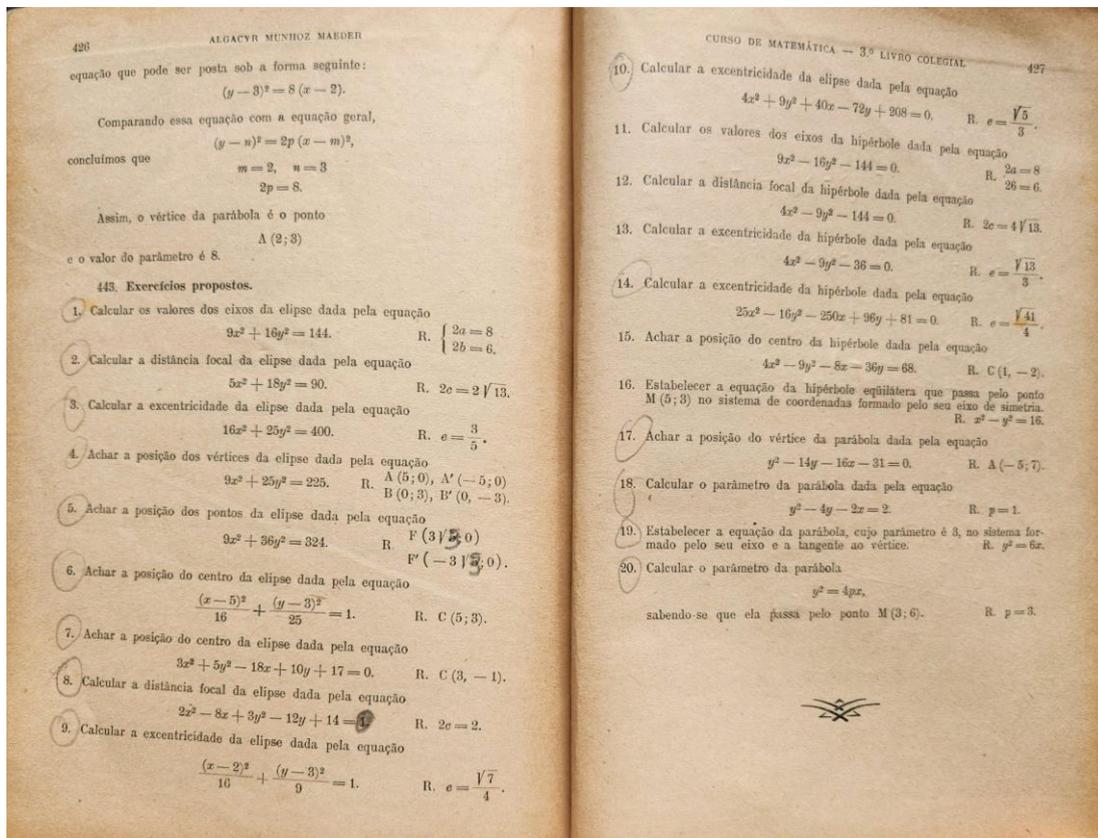
Logo, percebemos que o principal objetivo dos capítulos *Curvas Usuais* e *As seções cônicas* é explicar o que são essas curvas e mostrar suas características. Para mostrar aos leitores o que são as cônicas o autor utiliza como estratégia o tratamento geométrico, isto é, ele mostrar o lugar geométrico dessas curvas. Já o tratamento algébrico é utilizado para demonstrar as características.

O outro capítulo desse didático relacionado ao estudo de seções cônicas é o *XXIX: Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola*. Nesse momento, Maeder não faz nenhuma menção direta ao termo seções cônicas, mas apresenta as equações das curvas que definiu anteriormente. É importante ressaltar que esse capítulo é abordado na parte de Geometria Analítica.

Nesse capítulo, o autor apresenta a equação de cada uma das curvas separadamente, começando pela elipse, seguindo para hipérbole e por fim a parábola. Em todas elas a estratégia de estudo é similar, é mostrado uma ilustração da curva, seguida da análise de seu lugar geométrico e uma demonstração que resulta na equação. Além disso, existem observações que trazem algumas propriedades. Ao longo do desenvolvimento dessa parte do livro, o tratamento dado as cônicas é muito mais algébrico do que geométrico, já que o objetivo é demonstrar as equações.

Além disso, é interessante destacar que, diferente dos capítulos *XXI* e *XXII*, esse apresenta um tópico com exercícios resolvidos e exercícios propostos. Inclusive, na parte dos propostos é possível observar alguns destaques feitos pelo aluno que utilizou esse livro, mostrando que em algum momento essa parte do livro foi realmente estudada.

Figura 16 - Exercícios propostos no capítulo equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola



Fonte: Maeder (1949)

Refletindo sobre esses capítulos estudados, percebemos que a parte dedicada ao estudo de cônicas é relativamente grande e, mesmo com tantas abordagens e propriedades citadas, não há referência a propriedade refletora das parábolas que é muito relevante por apresentar aplicações que podem tornar a aprendizagem mais efetiva. Vale a pena lembrar que esse livro foi desenvolvido em tempos da Reforma Capanema e, nesse documento, segundo destaque de Ribeiro (2006) havia referência à formação da cultura geral e humanística como parte importante para se estruturar os cursos. Já é sabido que as reformas surgiram em um contexto de transformação do ensino secundário, segundo percepções de Euclides Roxo, que considerava importante formar pessoas que soubessem aplicar o seu conhecimento e fossem críticas e não apenas queriam se preparar para o curso superior. Portanto, poderia ter sido importante, frente a esse movimento, utilizar a propriedade refletora das parábolas como instrumento para trazer o ensino da matemática para a realidade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste tópico final, pretendemos, além de apresentar as conclusões, retomar o propósito da pesquisa. O principal objetivo de nossa investigação era entender a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário nas décadas de 1930 e 1940. Para atingir tal pretensão, foi realizada uma busca por esse tema em livros didáticos do período entre as Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema. Assim, seguimos todo o processo de pesquisa guiadas pela questão *qual a trajetória das curvas cônicas no ensino secundário entre as décadas de 1930 e 1940?*

A metodologia que nos auxiliou a trilhar os caminhos do processo para compreender a escolarização das curvas cônicas nas décadas de 1930 e 1940 seguiu as perspectivas dos trabalhos produzidos no campo da História da Educação Matemática. Destacamos a História Cultural e os Saberes Profissionais como referências teóricas metodológicas essenciais que nos fizeram refletir sobre a análise dos livros didáticos.

Dessa forma, ao estudarmos os livros didáticos em busca de entender a trajetória das curvas cônicas estabelecemos alguns critérios de análise, como: a averiguação das sequências metodológicas; a verificação da apresentação do conteúdo e a compreensão do tratamento, algébrico ou geométrico, dado as curvas cônicas. A partir disso, considerando as informações destacadas nessa análise acreditamos ser possível trazer contribuições para o projeto maior de escolarização da Geometria Analítica.

Nessa perspectiva, dentre os resultados destacamos, primeiramente que em nenhuma dessas obras a abordagem enfatiza as propriedades refletoras das cônicas. Como foi esclarecido no vídeo produzido para o produto educacional, essas propriedades permitem a aproximação da matemática com a vida cotidiana e outras ciências. Sendo esse cenário muito importante para o ensino nos tempos atuais. Se formos pensar no panorama das décadas de 1930 e 1940, essa perspectiva de ensino de um conteúdo matemático que visa a conexão com outras áreas também pareciam ser bem interessante, visto que esse período foi marcado por grandes mudanças do ensino de matemática, principalmente para o ensino secundário. As reformas buscavam, além da reorganização dos programas, tornar o secundário uma etapa de formação do cidadão, diferindo totalmente da praticidade dos cursos preparatórios.

Gostaríamos, ainda, de destacar que os dois livros que analisamos no período da Reforma Capanema, *Matemática 2º Ciclo – 3ª série* e *Curso de Matemática 3º livro – Ciclo Colegial*, apresentam as cônicas sob duas ópticas diferentes, isto é, o tratamento dado a elas é geométrico, destacando o seu lugar geométrico, e também algébrico, colocando em evidência as fórmulas relativas as propriedades e também as equações dessas curvas. Essa alternância de tratamento pode ser observada em meio ao desenvolvimento de um único capítulo. Mas, essa dualidade de abordagem das cônicas fica ainda mais clara ao analisarmos o índice dos livros, pois essas curvas são apresentadas em duas partes distintas: tanto na parte de Geometria, quanto na de Geometria Analítica.

Já no livro *Curso de Matemática 3º ano*, do período da reforma Campos, as cônicas não são apresentadas nitidamente, isto é, com a existência de capítulos destinados especificamente a elas, como nos outros livros analisados. Tal fato provavelmente ocorreu, pois no texto da reforma Campos não há menção ao estudo de cônicas no ano à qual esse exemplar se destina. Porém, mesmo assim, foi possível notar a preocupação do autor em ensinar o círculo e a parábola como lugar geométrico.

Outrossim, a sequência metodológica de todos os livros analisados é semelhante. Destacamos os exercícios propostos, que são mais escassos e só aparecem na parte de estudo das cônicas relacionados a Geometria Analítica. O objetivo desses exercícios é resolver e montar equação de maneira bem direta, sem mostrar nenhuma preocupação com o senso crítico do aluno.

Além disso, durante o processo de busca de livros didáticos que pudessem se tornar fontes para a pesquisa, percebemos que durante a década de 1930, apesar da disciplina Matemática ter sido instituída por Euclides Roxo no Colégio Pedro II um pouco antes, em 1929, ainda havia muitos livros que tratavam a nova disciplina em áreas separadas. Tal constatação era esperada, visto que a criação da Matemática estava muito recente, porém foi possível confirmá-la diante da dificuldade de encontrar um livro de Matemática do secundário para ser analisado durante a Reforma Campos.

Um outro resultado interessante que se relaciona com a criação da disciplina Matemática diz respeito a organização dos programas e livros didáticos que foram estudados. Verificamos que ainda haviam muitos livros dedicados apenas a Geometria Analítica para o secundário durante a década de 1940, mas já era

possível encontrar mais destinados a Matemática. Porém, mesmo com a percepção de que os professores e autores já estavam mais empenhados em desenvolver a disciplina Matemática, os índices dos livros e programas analisados apresentavam seus conteúdos divididos em áreas. Isso mostra que ainda existia uma certa segmentação do conteúdo que era estudado.

Pode-se perceber, portanto, que esse trabalho contribui para o campo da História da Educação Matemática. Mas, é importante, também, considerarmos as contribuições dessa pesquisa frente ao ensino das curvas cônicas na atualidade da Educação Matemática, pois buscamos trazer uma perspectiva do presente para o ensino de curvas cônicas no Ensino Médio por meio do vídeo produzido para o Produto Educacional. Acreditamos que essa pesquisa pode contribuir para uma reflexão sobre o ensino desse tema na atualidade.

REFERÊNCIAS

- ABREU, C. F. de. **Geometria Analítica: contendo problemas propostos nos exames vestibulares às Escolas Superiores de 1944 a 1962**. Rio de Janeiro, RJ, 1963
- ALVAREZ, T. G. **A matemática da reforma Francisco Campos em ação no cotiado escolar**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.
- BELTRAME, J. **Os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II: 1837 – 1932**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 2000.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017.
- CERTEAU, M. **A escrita da História**. Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária, 1982.
- CHARTIER, R. **A História Cultural: entre práticas e representações**. Rio de Janeiro, RJ: Bertrand Brasil S.A., 2002
- CHARTIER, R. **A história ou a leitura do tempo**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2007
- CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria & educação, v. 2, n. 2, p. 177-229, 1990.
- DASSIE, B. A. **A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema**. Dissertação (Departamento de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **O profissional em educação matemática**. Universidade Santa Cecília, 2001
- HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. **Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação**. Saberes em (trans)formação: um tema central da formação de professores. São Paulo, SP: Livraria da Física, 113 – 172, 2017
- LONGEN, A. **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, 2007.
- MAEDER, A. M. **Curso de Matemática 3º Livro: Ciclo Colegial**. 2 ed. São Paulo, 1949
- MAEDER, A. M. **Curso de Matemática: Ciclo Colegial**. 3 ed. São Paulo, 1951

ORUÊ, G. R. V. **A trajetória escolar da geometria analítica no ensino secundário brasileiro: constituição e funcionamento em tempos da reforma Francisco Campos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2020.

RIBEIRO, D. F. C. **Dos Cursos complementares aos cursos clássico e científico: A mudança na Organização dos ensinos de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2006.

THIRÉ, C; SOUZA, M. E.; ROXO, E. **Curso de Matemática: 3º ano**. 3 ed. Libreria Francisco Alvez, 1936.

VALENTE, W. R. **História da Educação Matemática: interrogações metodológicas**. Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2(1), 28-49, 2004a

VALENTE, W. R. **O nascimento da matemática do ginásio**. Annablume, 2004b.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática: uma história inseparável**. 2008.

Valente, W. R. **Oito temas sobre História da educação matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 27, nº 47, p. 939-953, 2013.

VALENTE, W. R. **El saber profesional del profesor que enseña matemática: el futuro del pasado**. Paradigma, v. 39, n. 1, p. 190-201, 2018

VALENTE, W. R. **Pesquisa sobre história do conhecimento profissional de professores que ensinam matemática: interrogações metodológicas**. *Paradigma*, 41, 900-911, 2020.

VALENTIM JÚNIOR, J. **A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise de livros didáticos utilizados entre a reforma Capanema e o MMM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2013

ANEXO A – Tabela comparativa entre os programas de Geometria Analítica dos Cursos Complementares (Reforma Francisco Campos) e Cursos Clássico e científico (Reforma Capanema)

GEOMETRIA ANALÍTICA

CURSOS COMPLEMENTARES	CURSOS CLÁSSICO/CIENTÍFICO
Concepção de Descartes. Sistema de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões; coordenadas retilíneas e polares.	Concepção de Descartes
Teoria da linha reta no plano. Problemas.	
Teoria da linha reta e do plano. Problemas. Esfera.	
Coordenadas retilíneas e polares no plano	Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano
Transformação de coordenadas no plano	
Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões	
Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões	
	Distância entre dois pontos
	Ponto que divide um segmento numa razão dada
	Determinação de uma direção; ângulo de duas direções
Lugares geométricos no plano. Problemas.	Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação
Equações retilíneas e polares da circunferência, elipse, hipérbole e parábola.	Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular
	Equação da reta
	Equação do círculo

	Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola
Superfícies do 2.o grau. Equações simplificadas.	
Representação geométrica das equações de duas e de três variáveis	

Fonte: Ribeiro (2006)

ANEXO B - Tabela comparativa entre os programas de Geometria dos Cursos Complementares (Reforma Francisco Campos) e Cursos Clássico e científico (Reforma Capanema)

GEOMETRIA

CURSOS COMPLEMENTARES	CURSOS CLÁSSICO/CIENTÍFICO
	Determinação de um plano
	Intersecção de planos e retas
Teoria da linha reta no plano. Problemas	
	Paralelismo de retas e planos
	Reta e plano perpendiculares
	Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano
	Diedros; planos perpendiculares entre si
Transformação de coordenadas no plano	
Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões	
	Noções sobre ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros
	Noções gerais sobre poliedros
	Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes.
	Teorema de Euler; noções sobre os poliedros regulares
	Corpos redondos: noções sobre geração e classificação das superfícies
	Estudo do cilindro e do cone. Área e volume.
Esfera. Superfícies do 2.º grau; suas equações reduzidas	Estudo da esfera. Área da esfera, da zona e do fuso esférico. Volume da esfera.
Circunferência: equação retilínea e polar	

Elipse: equação retilínea e polar	Elipse: definição e propriedades fundamentais
Hipérbole: equação retilínea e polar	Hipérbole: definição e propriedades fundamentais
Parábola: equação retilínea e polar	Parábola: definição e propriedades fundamentais
Propriedades gerais das cônicas	Secções cônicas
	Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.
	Teorema de Stewart e suas aplicações no cálculo de linhas notáveis no triângulo
Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos	Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco
	Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais
Transformação de figuras	Deslocamentos, translação, rotação, simetria.
Homotetia e semelhança	Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões
	Inversão pelos raios vetores recíprocos
Quadratura e cubatura	
Relação Harmônica. Homografia. Involução	
Pólos e polares	
Estudo das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas. Concavidade. Máxima e Mínima. Pontos de inflexão. Pontos notáveis.	

Fonte: Ribeiro (2006)

ANEXO C- Programa de Matemática para a terceira série do Curso Clássico (Reforma Gustavo Capanema)

Em 16 de março de 1943, foi expedida a Portaria Ministerial nº 177, publicada no Diário Oficial em 18 de março do referido ano, que continha os programas de matemática para os cursos clássico e científico.

Terceira série

Álgebra

Unidade I – Funções: 1- Noção de função de variável real. 2 – Representação cartesiana. 3- Noção de limite e de continuidade.

Unidade II – Derivadas: 1 – Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3 – Derivação das funções elementares. 4 – Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Geometria

Unidade III – Curvas usuais: 1 – Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2 – As secções cônicas. 3 – Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria Analítica

Unidade IV – Noções fundamentais: 1- Concepção de Descartes. 2 – Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3 – Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4 – Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade V – Lugares geométricos: 1- Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2 – Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3 – Equação da reta. 4 – Equação do círculo. 5 – Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

Fonte: Ribeiro (2006)

ANEXO D – Índice do livro Matemática 2º ciclo – 3ª série

ÍNDICE

Advertência	5
Programa da Terceira Série	6

Primeira Parte — Álgebra

UNIDADE I

Sucessões	9
Cálculo aritmético dos limites	19
Limites singulares	29
Séries numéricas	40
Estudo da natureza de algumas séries clássicas	42
Estudo geral da convergência	44
Principais caracteres de convergência	49
Transformação das séries	60

UNIDADE II

Função de uma variável real	69
Representação cartesiana	72
Teoria geral dos limites	79
Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional	87

UNIDADE III

Derivadas; definição; interpretação geométrica e cinemática ..	99
Cálculo das derivadas	107
Derivação das funções elementares	115
Derivadas e diferenciais sucessivas	129
Propriedades gerais das derivadas	132
Limites de expressões indeterminadas	137
Máximos e mínimos; estudo da variação de algumas fun- ções simples	142

UNIDADE IV

Definição de número complexo	155
Representação trigonométrica e exponencial	163
Operações fundamentais	167
Resolução das equações binômias	194

UNIDADE V

Propriedades gerais dos polinômios; equações algébricas	199
Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações	217
Equações de raízes iguais	220
Aplicação ao cálculo das raízes iguais	245

Segunda Parte — Geometria

UNIDADE VI

Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis do triângulo	261
Relações métricas nos quadriláteros	278
Relações métricas nos polígonos regulares	288
Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais	290

UNIDADE VII

Deslocamentos	315
Translação	318
Rotação	321
Simetria	333
Homotetia	340
Semelhança	365
Inversão por meio de raios vetores recíprocos	381

UNIDADE VIII

Elipse	403
Hipérbole	417
Parábola	428
Seções cônicas	437
Hélice cilíndrica	449

Terceira Parte — Geometria Analítica

UNIDADE IX

Noções fundamentais. Concepção de Descartes	459
Coordenadas	466
Determinação de uma direção. Ângulo de duas direções	474
Distância de dois pontos. Ponto que divide um segmento numa razão dada	482

UNIDADE X

Equação natural de um lugar geométrico	489
Circunferência de círculo	491
Elipse	496
Hipérbole	501
Parábola	506
Linha reta	511
Problemas sobre a linha reta	523
Ângulos	529
Condição de paralelismo de duas retas	532
Condição de perpendicularismo de duas retas	533
Distâncias	534
 SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS	 545