

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Afonso Ricardo Vaz

Modelo Cosmológico Não-Comutativo para o Fluido Fantasma

Juiz de Fora

2016

Afonso Ricardo Vaz

Modelo Cosmológico Não-Comutativo para o Fluido Fantasma

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vaz, Afonso.

Modelo Cosmológico Não-Comutativo para o Fluido Fantasma / Afonso
Ricardo Vaz. – 2016.

68 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

1. Modelo Cosmológico. 2. Não-Comutatividade. 3. Fluido Fantasma.
I. Oliveira Neto, Gil. Modelo Não-Comutativo para o Fluido Fantasma.

Afonso Ricardo Vaz

Modelo Cosmológico Não-Comutativo para o Fluido Fantasma

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Ilya Lvovich Shapiro
Universidade Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Germano Amaral Monerat
Universidade Universidade do Estado do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente à Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.
- Ao meu orientador, Dr. Gil de Oliveira Neto, pela paciência, pelos ensinamentos e pela orientação que demonstram a cada nova experiência o excelente profissional que é.
- Aos meus pais por todo amor, ajuda, carinho, compreensão, ensinamentos e exemplos dados a mim por todos esses anos.
- Ao meu amor, Anna Cláudia, por toda experiência dividida, toda paciência exercida, todo carinho doado, toda saudade suportada e pelo amor dedicado.
- À minha dinda do coração, por ter sempre me incentivado, acreditado e apoiado incondicionalmente.
- Aos meus avós pelas conversas, cafés da tarde e pela confiança depositada.
- Aos meus amigos por todos os momentos divertidos e relaxantes juntos, pelas discussões oportunas, pelos abraços e desabafos e por todo o tempo dedicado a edificação de nossas amizades.
- À todas as pessoas que me ajudaram a chegar até aqui e contribuíram de forma direta ou indireta na minha caminhada, sejam professores, colegas, demais familiares... Muitos não tem a noção do quão profundamente me influenciaram. Deixo aqui meu singelo muito obrigado a todos vocês.
- À CAPES pela bolsa de estudos.

“A unidade é a variedade e a variedade na unidade é a lei suprema do universo.”

Isaac Newton

RESUMO

Analisamos um modelo cosmológico clássico não-comutativo, através da formulação ADM, para um universo homogêneo e isotrópico com curvaturas constantes das seções espaciais (k) que podem ser positiva, negativa ou zero. A matéria é representada por um fluido perfeito de pressão negativa, fluido fantasma, que satisfaz a equação de estado $p = \alpha\rho$, com $\alpha < -1$, onde p é a pressão e ρ é a densidade do fluido. Este fluido é responsável pela expansão acelerada do universo. Usamos o formalismo de Schutz, o qual é capaz de fornecer uma hamiltoniana para o fluido perfeito, tendo como base as equações de movimento para potenciais de velocidade. Utilizamos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, onde a não-comutatividade foi introduzida através de parênteses de Poisson não triviais. Para recuperarmos as variáveis comutativas, introduzimos transformações entre as variáveis que dependem de um parâmetro não-comutativo (γ). A introdução da não-comutatividade tem por motivação explicar a presente expansão acelerada do universo e tentar contornar alguns problemas que são encontrados na abordagem comutativa, como a singularidade inicial e o *Big Rip*, comportamento previsto na literatura, que indica que o universo irá a um tempo finito a um fator escala infinito. Depois de obtermos as equações dinâmicas para esse modelo, comparamos a evolução do universo entre os casos comutativos e não-comutativos, buscando alterações nos comportamentos conhecidos. A análise dos dados para a dinâmica do universo obteve quatro fatores ajustáveis, o parâmetro γ , um parâmetro associado a energia inicial do fluido, o parâmetro k e o α , além das condições iniciais presentes no modelo. Para cada novo valor de α , obtivemos novas equações de movimento. Os resultados demonstraram que o parâmetro γ se mostrou muito útil para a descrição de um universo em expansão acelerada. Obtemos, ao fim deste trabalho, uma estimativa para o valor do parâmetro γ , nas condições atuais do universo. Depois disso, usamos esse valor estimado de γ , em um dos nossos modelos cosmológicos não-comutativos, para determinar o tempo que esse universo levará para atingir o *Big Rip*.

Palavras-chave: Modelo Cosmológico. Não-Comutatividade. Fluido Fantasma.

ABSTRACT

We have analyzed a non-commutative classic cosmological model using the ADM formulation for a homogeneous and isotropic universe with constant curvature of space sections (k) that can be positive, negative or zero. The matter is represented by a perfect fluid with negative pressure, phantom fluid, which satisfies the equation of state $p = \alpha\rho$, with $\alpha < -1$, where p is pressure and ρ is energy density. This fluid is responsible for the accelerating state of the universe. We use Schutz formalism, which is capable of providing a Hamiltonian for the perfect fluid, based on the equations of motion for velocity potentials. We use Friedmann-Robertson-Walker metric, and noncommutativity was introduced by nontrivial Poisson bracket. To recover the commutative variables, we introduced transformations between the variables that depend on a non-commutative parameter (γ). The main motivation for the introduction of noncommutativity is trying to explain the present accelerated state of the universe. We shall also try to solve some problems that are found in the commutative approach, as the initial singularity and the *Big Rip*, expected behavior in the literature, which indicates that the universe will go to an infinite scale factor, in a finite time. Once we obtained the dynamic equations for this model, we solved them and compared the evolution of the universe between commutative and non-commutative cases seeking changes in the known behavior. The solutions have four constants, the parameter γ , a parameter associated with initial energy of the fluid C , the parameter k and α in addition to the initial conditions of the cosmological model. For each new value of α , we obtained new equations of motion. The results showed that the parameter γ has proved to be very useful for describing an accelerating universe. We obtained at the end of this work an estimative for the value of the parameter γ , for the present conditions of the Universe. Then, using that value of γ , in one of our noncommutative cosmological models, we computed the amount of time this universe would take to reach the Big Rip.

Key-words: Cosmological Model. Noncommutativity. Phantom Fluid.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráfico do fator de escala para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$	37
Figura 2 – Gráfico do fator de escala não-comutativo para $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 1, 242$ e $T_0 = 0$	38
Figura 3 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	39
Figura 4 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	39
Figura 5 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$, e $T_0 = 0$. .	40
Figura 6 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	41
Figura 7 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $T_0 = 0$. .	41
Figura 8 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 0$ e $T_0 = 0$. .	42
Figura 9 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	42
Figura 10 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	43
Figura 11 – Gráfico do fator de escala para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$	45
Figura 12 – Gráfico do fator de escala para $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 0, 768$ e $T_0 = 0$	46
Figura 13 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	47
Figura 14 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	47
Figura 15 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	48
Figura 16 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	48
Figura 17 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $T_0 = 0$. .	49
Figura 18 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	50
Figura 19 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	50
Figura 20 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	51
Figura 21 – Gráfico do fator de escala para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$	53
Figura 22 – Gráfico do fator de escala para $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 1, 584$ e $T_0 = 0$	54
Figura 23 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	55
Figura 24 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	55
Figura 25 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	56
Figura 26 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	57
Figura 27 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $T_0 = 0$. .	57
Figura 28 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	58
Figura 29 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	58
Figura 30 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0, 1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$. .	59
Figura 31 – Gráfico do fator de escala numérico para $\alpha = -3, 5$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$. .	59
Figura 32 – Gráfico do fator de escala analítico para $\alpha = -2$, $C = 10$ e $a_0 = 1$	60

Figura 33 – Gráfico do fator de escala para $\alpha = -2$, $C = 2,343889097 \times 10^{-35} s^{-2}$, $a_0 = 1$,
 $\dot{a}_0 = 3,663318275 \times 10^{-20} s^{-1}$ e $T_0 = 0$ 62

Notações e Convenções.

No decorrer do presente texto será convencionado:

A derivada temporal de uma função $g(t)$ será representada por $\dot{g}(t)$.

Dois índices repetidos, sendo um subscrito e o outro sobrescrito, denotam soma.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3

O índice 0 representa, em geral, a coordenada temporal.

A métrica possui assinatura $(-, +, +, +)$.

O determinante da métrica é denotado por g .

O determinante da métrica 3-dimensional é h .

A derivada parcial de um tensor T em relação a coordenada x^β é escrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T = T_{,\beta}$$

A derivada covariante de um tensor T em relação a coordenada x^β é escrita como:

$$\nabla_\beta T = T_{;\beta}.$$

As constantes c e G são iguais a 1.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA	14
2.1	INTRODUÇÃO	14
2.1.1	Símbolo de Christoffel	14
2.1.2	Transporte Paralelo e Geodésica	15
2.1.2.1	<i>Transporte paralelo</i>	15
2.1.2.2	<i>Geodésica</i>	16
2.1.3	Tensor de Curvatura	16
2.1.4	Identidade de Bianchi	17
2.1.5	As Equações de Einstein	17
2.2	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	18
2.2.1	O Universo de Friedmann - Robertson - Walker	19
2.2.2	A geometria dos espaços com curvaturas constantes	20
2.2.2.1	<i>Constante de curvatura $k = 1$</i>	20
2.2.2.2	<i>Constante de curvatura $k = 0$</i>	21
2.2.2.3	<i>Constante de curvatura $k = -1$</i>	21
3	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GE- RAL COM FLUIDO PERFEITO	23
3.1	FORMALISMO ADM	23
3.2	FORMALISMO DE SCHUTZ	25
3.3	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO	28
3.3.1	Cálculo dos momentos canonicamente conjugados	29
4	COSMOLOGIA NÃO-COMUTATIVA E O FLUIDO FANTASMA 31	
4.1	DA HAMILTONIANA ÀS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	31
4.2	ANÁLISE DE DADOS	35
4.2.1	$k = 0$	36
4.2.1.1	<i>Caso comutativo para $\alpha = -2$</i>	36
4.2.1.2	<i>Caso não-comutativo</i>	37
4.2.1.2.1	Variando α	37
4.2.1.2.2	Variando $\gamma \geq 0$	39
4.2.1.2.3	Variando $\gamma \leq 0$	39
4.2.1.2.4	Variando $\gamma \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$	40

4.2.1.2.5	Variando C .	40
4.2.1.2.6	Variando a_0 .	41
4.2.1.2.7	Variando \dot{a}_0 .	41
4.2.1.2.8	Variando T_0 .	42
4.2.2	$k = 1$	44
4.2.2.1	<i>Caso comutativo para $\alpha = -2$</i>	44
4.2.2.2	<i>Caso não-comutativo</i>	45
4.2.2.2.1	Variando α .	45
4.2.2.2.2	Variando $\gamma \geq 0$.	46
4.2.2.2.3	Variando $\gamma \leq 0$.	47
4.2.2.2.4	Variando $\gamma \lesseqgtr 0$.	47
4.2.2.2.5	Variando C .	48
4.2.2.2.6	Variando a_0 .	49
4.2.2.2.7	Variando \dot{a}_0 .	49
4.2.2.2.8	Variando T_0 .	50
4.2.3	$k = -1$	52
4.2.3.1	<i>Solução comutativa para $\alpha = -2$</i>	52
4.2.3.2	<i>Soluções não-comutativas.</i>	53
4.2.3.2.1	Variando α .	53
4.2.3.2.2	Variando $\gamma \geq 0$.	54
4.2.3.2.3	Variando $\gamma \leq 0$.	55
4.2.3.2.4	Variando $\gamma \lesseqgtr 0$.	55
4.2.3.2.5	Variando C .	56
4.2.3.2.6	Variando a_0 .	57
4.2.3.2.7	Variando \dot{a}_0 .	57
4.2.3.2.8	Variando T_0 .	58
4.2.4	Diferentes valores da constante de curvatura k	59
4.3	ESTIMATIVA PARA O PARÂMETRO γ E PARA O FIM DO UNIVERSO	60
5	CONCLUSÃO	63
A	Obtenção da equação de Friedmann não-comutativa	65
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO

A palavra Cosmologia vem do grego “cosmo” = mundo, ordem + “logos” = estudo, ou seja, estudo da ordem. Assim como a origem da palavra, o estudo da cosmologia começa na Grécia antiga com Sócrates, Platão e Aristóteles buscando um maior conhecimento do mundo e uma resposta para a origem e fim do universo. Junto destas questões, a cosmologia moderna lida com outro tipo de questões, como a matéria escura, energia escura, buracos negros, formação de estruturas no universo, etc.

Atualmente a cosmologia busca explicar o universo em sua totalidade e está baseada no modelo padrão [1], no qual o universo era inicialmente muito quente e denso, fase conhecida como era da radiação [2]. Nessa fase o universo era tão energético que não havia a possibilidade de formação de núcleos atômicos. Posteriormente, ao ir expandindo e esfriando, começaram a se formar os núcleos atômicos que possibilitou a formação de átomos, depois moléculas, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias e do universo como conhecemos hoje. Nessa nova fase, a força dominante é a gravitacional, devido ao domínio da matéria sobre a radiação, e a chamamos de era da poeira [2].

As ideias expostas acima são relativamente recentes, assim como o desenvolvimento da cosmologia moderna. Pode-se dizer que os grandes avanços na cosmologia começaram com Albert Einstein em 1907 com o princípio da equivalência e posteriormente, em 1915 com a teoria da gravitação relativística, que será abordada em maiores detalhes no capítulo 2. Em 1922, Friedmann, grande responsável pelo desenvolvimento da cosmologia, obteve soluções expansionistas para o universo com curvatura constante positiva e posteriormente com curvatura constante negativa, em 1924, formando a base para o modelo padrão da cosmologia, que é utilizado até hoje.

Baseado nos trabalhos [3] e [4], acredita-se que exista, apesar de ainda não detectada, uma energia escura que está expandindo o universo de forma acelerada. Para explicar tal fenômeno, existem diversas teorias, dentre as quais podemos citar como principais candidatas: k-essence [5] e [6], Quintessence [7]-[9], Constante cosmológica [10]-[12] e fluido de pressão negativa (Fluido Fantasma)[13]. Neste trabalho nós vamos utilizar a não-comutatividade e o fluido fantasma para representar a energia escura presente no universo. O fluido fantasma é caracterizado por ter pressão negativa e os modelos cosmológicos representados por ele sempre convergem para o *Big Rip*, que é uma singularidade em que o fator de escala expande de tal forma que vai a infinito em um tempo finito, resultando em um fim catastrófico para o universo.

Além dos tais modelos, existe a proposta da inserção da não-comutatividade nas coordenadas do espaço-tempo do sistema cosmológico de forma a alterar a evolução do mesmo, chegando também a uma expansão acelerada do fator de escala. Tal suposição vem da ideia de que inicialmente, o universo era basicamente regido por interações quânticas

onde a não-comutatividade estava fortemente presente, e assim, algum pequeno resíduo da não-comutatividade presente naquela era permanece atualmente. A ideia da não-comutatividade não é recente, ela vem do século passado, com Heisenberg, que considerou que a incerteza entre as coordenadas espaciais do elétron fosse não nula para tentar remover singularidades presentes na teoria [14] e [15]. Algum tempo depois, Snyder publicou o primeiro artigo sobre não-comutatividade em coordenadas do espaço-tempo [16], buscando remover divergências em Teoria Quântica de Campos. Após um tempo esquecida, a inserção da não-comutatividade voltou a ser bastante encontrada na literatura.

Neste trabalho, além de utilizar a equação de Friedmann para o fluido fantasma [13], vamos utilizar uma abordagem não-comutativa. Ela será obtida ao introduzirmos parênteses de Poisson não triviais entre as variáveis dinâmicas da teoria, dando origem ao parâmetro não-comutativo (γ). A motivação dessa abordagem não-comutativa é de tentar contornar singularidades [17]-[20] presentes no modelo comutativo, como por exemplo, o *Big Bang* e o *Big Rip*. Além disso, vamos analisar a expansão acelerada do universo nos casos comutativos e não-comutativos e ver se a inserção da não-comutatividade altera a evolução do sistema.

Para desenvolver tais assuntos, esta dissertação está dividida em quatro principais capítulos: Relatividade Geral e Cosmologia, capítulo 2, passando as principais ideias da teoria e servindo de base teórica para desenvolvimentos posteriores. No capítulo seguinte, sobre a formulação hamiltoniana, capítulo 3, desenvolveremos o formalismo ADM e o formalismo de Schutz. O capítulo 4 representa a parte original desta dissertação. Nele introduzimos a nossa proposta da álgebra não-comutativa do modelo cosmológico com o fluido fantasma. Desenvolvemos esta teoria apresentando os resultados obtidos analiticamente e numericamente. Obtemos, ao fim deste capítulo, uma estimativa para o valor do parâmetro γ em um dos nossos modelos cosmológicos não-comutativos para determinar o tempo que esse modelo levará para atingir o *Big Rip*. No capítulo 5 teremos as discussões finais, as conclusões acerca dos resultados obtidos e possíveis trabalhos futuros.

2 RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

2.1 INTRODUÇÃO

A relatividade geral é a generalização da relatividade especial e foi desenvolvida por Albert Einstein em 1915 [21]. Um dos principais aspectos da sua teoria é a relação da matéria com o espaço-tempo, onde a matéria agora exerce uma forte influencia no espaço a sua volta. Podemos entender melhor essa característica a partir do princípio de Mach [22], bem como de um outro princípio fundamental, denominado princípio da equivalência [23], o qual assegura a igualdade local entre referenciais não-inerciais e em campos gravitacionais pouco intensos.

Inspirado em tais princípios, Einstein desenvolveu a teoria com um apelo geométrico muito forte, fazendo com que sua teoria tenha uma grande elegância matemática e demonstrando vários resultados importantes como o desvio da luz por um campo gravitacional intenso e correções na precessão do periélio de Mercúrio. Além disso, a relatividade geral mudou a forma como a interação gravitacional era entendida. Do ponto de vista newtoniano, a gravitação é a interação entre corpos com massa. Na relatividade geral, a gravitação passou a ser interpretada como a deformação do espaço-tempo ao redor de um corpo massivo, alterando assim o movimento de outro corpo que esteja em sua proximidade.

A seguir vamos estudar alguns resultados, características e importantes elementos que nos ajudarão a compreender melhor tal teoria.

2.1.1 Símbolo de Christoffel

O símbolo de Christoffel é utilizado para representar a variação do vetor de base em relação a uma coordenada e é representado por $\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}$. Os símbolos de Christoffel podem ser obtidos a partir da derivação de um vetor cuja forma é $\vec{V} = V^{\alpha}\vec{a}_{\alpha}$, em que V^{α} são suas componentes e \vec{a}_{α} seus vetores de base.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{a}_{\alpha} + V^{\alpha} \frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \quad (2.1)$$

O termo do lado direito da igualdade, onde temos a variação do vetor base em relação à coordenada x^{β} , também é um vetor, assim, podemos escrevê-lo como uma combinação linear dos vetores de base. O símbolo de Christoffel é introduzindo como coeficiente desta combinação linear:

$$\frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \vec{a}_{\eta}. \quad (2.2)$$

Os índices α indicam qual vetor de base está sendo diferenciado, os índices β indicam qual a coordenada na qual o vetor de base está sendo diferenciado e os índices η indicam qual a componente do vetor resulta da derivação. A importância da utilização dos símbolos

de Christoffel é que, através deles fica possível expressar derivadas no mesmo sistema de coordenadas. Além disso, os símbolos de Christoffel aparecem na definição da derivada covariante de vetores contravariantes:

$$V_{;\beta}^{\alpha} = V_{,\beta}^{\alpha} + V^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\alpha}, \quad (2.3)$$

e covariantes:

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - V_{\eta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}. \quad (2.4)$$

Podemos obter uma forma análoga as equações (2.3) e (2.4) dos vetores para um tensor de rank 2. Como um exemplo, a expressão de um derivada covariante de um tensor de rank 2 misto é dada por:

$$T_{\nu;\beta}^{\mu} = T_{\nu,\beta}^{\mu} + T_{\nu}^{\theta}\Gamma_{\theta\beta}^{\mu} - T_{\theta}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\theta}. \quad (2.5)$$

Como veremos mais adiante, esta expressão será importante para a conservação de energia nas equações de Einstein.

Uma importante característica dos símbolos de Christoffel, que é desenvolvida em detalhes em [23], é que eles não são tensores porque não obedecem as regras de transformação tensorial. Também é importante mencionar que os símbolos de Christoffel são simétricos, ou seja, $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ pois não estamos considerando a presença de torção em nossos modelos [22].

Podemos obter a relação da métrica ($g_{\mu\nu}$) com os símbolos de Christoffel a partir do fato de que a derivada covariante da métrica é nula. Esta expressão, na ausência de torção, é dada por [23]:

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha}), \quad (2.6)$$

onde a métrica pode ser obtida diretamente do intervalo invariante.

Visto o papel do símbolo de Christoffel na derivada covariante de vetores e tensores e sua relação com a métrica, vamos agora analisar os conceitos de transporte paralelo e geodésica.

2.1.2 Transporte Paralelo e Geodésica

2.1.2.1 Transporte paralelo

O transporte paralelo consiste no deslocamento de um campo vetorial \vec{V} ao longo de uma curva. Se ponto a ponto na curva os vetores \vec{V} forem infinitesimalmente próximos, paralelos e preservarem seu módulo, podemos dizer que \vec{V} foi paralelamente transportado. Temos que definir também o vetor tangente a curva, \vec{U}^1 , onde $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$, para a curva C

¹ Sendo que \vec{U} não é necessariamente normalizado.

parametrizada pelo parâmetro λ , logo $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$. Assim, o vetor \vec{V} deve ser constante ao longo da curva C :

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0.$$

Podemos escrever a equação acima em termos do vetor tangente:

$$\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta}\right)^\alpha \frac{\partial x^\beta}{d\lambda} = V_{;\beta}^\alpha \frac{\partial x^\beta}{d\lambda} = V_{;\beta}^\alpha U^\beta = 0. \quad (2.7)$$

A equação acima pode ser escrita em uma forma mais compacta:

$$V_{;\beta}^\alpha U^\beta \equiv \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0, \quad (2.8)$$

que representa o transporte paralelo de \vec{V} ao longo da curva C .

2.1.2.2 Geodésica

Geodésicas são curvas que realizam transporte paralelo nos seus vetores tangentes. No espaço euclidiano, tais curvas são retas, no espaço curvo, chamamos de geodésicas. Definimos geodésica a partir da equação:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.9)$$

A equação acima, pode ser obtida através da equação do transporte paralelo (2.7) [24], ou pelo princípio da mínima ação [23]. O limite newtoniano de (2.9) é feito em [23].

2.1.3 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura também é conhecido como tensor de Riemann e pode ser obtido através do comutador entre as derivadas covariantes do vetor V^μ [24]. Logo,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu, \quad (2.10)$$

onde $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ é o tensor de Riemann e nos fornece a curvatura intrínseca do espaço-tempo. Ele pode ser escrito explicitamente em termos dos símbolos de Christoffel como:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\rho. \quad (2.11)$$

Da equação (2.10) vemos que no espaço curvo as derivadas covariantes não comutam. Desta forma, é importante observarmos a posição delas em expressões envolvendo duas ou mais destas derivadas.

Podemos obter o tensor de Ricci através do tensor de Riemann, que será muito importante para a obtenção das equações de Einstein. Para isso, contraímos os seguintes índices do tensor de Riemann:

$$R_{\beta\alpha} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu = R_{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

Ao contrair o tensor de Ricci com a métrica, obtemos o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Vamos ver agora uma importante identidade matemática satisfeita pelo tensor de Riemann.

2.1.4 Identidade de Bianchi

É possível mostrar [24], que a seguinte combinação linear de derivadas primeiras das componentes do tensor de Riemann se anula,

$$R_{\alpha\beta\eta\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\eta;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\eta} = 0. \quad (2.14)$$

Essa equação é chamada identidade de Bianchi. A partir da equação (2.14) podemos obter o tensor de Einstein definido na forma contravariante [22]:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha}. \quad (2.15)$$

É possível mostrar que a divergência do tensor de Einstein se anula $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$. Este resultado será bastante importante na demonstração da conservação de energia para o tensor momento-energia nas equações de Einstein.

2.1.5 As Equações de Einstein

As equações de Einstein tem a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Essas equações podem ser obtidas também a partir de um princípio variacional utilizando a ação de Einstein-Hilbert com um campo de matéria, dada por [25]:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.17)$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade lagrangeana da matéria. Na ação acima é necessário a seguinte definição para o tensor momento-energia:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.18)$$

Conforme mencionado anteriormente, ao aplicarmos a divergência na equação (2.16), o lado esquerdo se anula devido a divergência nula do tensor de Einstein. O que estabelece a conservação do tensor momento-energia.

As equações de Einstein descritas em (2.16) englobam toda a Relatividade Geral, mostrando como o espaço-tempo é deformado frente a presença de matéria. A deformação

do espaço está presente no tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e a matéria é representado no tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Também pode-se adicionar, assim como Einstein fez, uma constante a sua equação, ficando com a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde Λ é conhecida como a constante cosmológica. Inicialmente a constante cosmológica foi introduzida por Einstein porque ele acreditava que o universo era estático e suas equações não poderiam descrever tal universo. A introdução desta constante mostrou ser um erro, pois algum tempo depois o astrônomo Edwin Hubble determinou, a partir de observações, que o universo está expandindo. Atualmente, uma constante cosmológica está sendo largamente utilizada. Ela foi introduzida como uma correção para adequar as equações de Einstein para a dinâmica do universo, devido à observação do estado de expansão acelerada do mesmo.

Tendo conhecimento dos principais aspectos da teoria da Relatividade Geral e das equações de Einstein, podemos agora analisar o seguinte seção.

2.2 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

O estudo da cosmologia iniciou-se na Grécia antiga, onde obteve significativos avanços. Outro grande salto no seu desenvolvimento foi no início da renascença, onde seus alicerces foram se modificando até que no início do século passado a cosmologia ficou cada vez mais em evidência, contribuindo com grandes descobertas e avanços científicos, tanto teóricos como observacionais. A cosmologia busca descrever a evolução do universo e tem como base o princípio cosmológico [22] que diz que o universo é homogêneo (invariância por translação) e isotrópico (invariante por rotação) em largas escalas. Outro princípio fundamental da cosmologia moderna é o princípio de Weyl que diz que as linhas de universo das galáxias, consideradas unidades básicas, estão se movendo separadamente e de forma a se afastar uma das outras. Tais linhas de universo formam uma estrutura tridimensional e não interagem entre si, expandindo continuamente [26]. A coordenada temporal x^0 é normal a 3-superfície formada pelas coordenadas espaciais x^i . Embora na prática as galáxias sejam um conjunto discreto, podemos fazer uma aproximação de um fluido contínuo suave (fluido perfeito).

Podemos então escrever o tensor momento-energia para um fluido perfeito, que representa a matéria no universo, da seguinte maneira:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

sendo U^μ a quadri-velocidade do fluido em um sistema de referencial comóvel, ρ é a densidade e p é a pressão. Podemos concluir a partir do princípio cosmológico que tanto a pressão p como a densidade ρ devem possuir apenas dependência temporal.

2.2.1 O Universo de Friedmann - Robertson - Walker

Os modelos cosmológicos descritos por FRW são caracterizados pela presença da curvatura constante em sua geometria. Esse fato é uma consequência da homogeneidade imposta pelo princípio cosmológico.

Matematicamente, o espaço tridimensional com curvatura constante é caracterizado pela seguinte equação [22]:

$$R_{abcd} = K (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2.21)$$

onde K é a curvatura não normalizada. Para normalizá-la, temos que contrair o tensor de Riemann dado por (2.21) com g^{ac} , ficamos então com:

$$g^{ac}R_{abcd} = 2Kg_{bd}. \quad (2.22)$$

O princípio cosmológico, devido a homogeneidade e isotropia, leva a escrevermos o intervalo invariante tridimensional $d\sigma^2$ em coordenadas esféricas como:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r')}dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.23)$$

onde θ e ϕ são os ângulos esféricos, r' é o raio da esfera e $\lambda(r')$ é uma função radial que iremos determinar. Vale ressaltar que a exponencial na equação da métrica tridimensional (2.23) serve para manter a função $\lambda(r')$ sempre positiva. Para a métrica (2.23), utilizando (2.21) e (2.22), obtemos que a solução para $e^{\lambda(r')}$ é $\frac{1}{1-Kr'^2}$. Assim o intervalo invariante assume a forma (2.23):

$$d\sigma^2 = \frac{dr'^2}{1 - Kr'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.24)$$

Vamos multiplicar a parte espacial do elemento de linha (2.24), por uma função com dependência temporal ($S(t)$), e vamos normalizar a curvatura K , onde:

$$k|K| = K. \quad (2.25)$$

Agora, assumindo $K \neq 0$, k só pode assumir valores ± 1 . A magnitude de K foi absorvida pela coordenada radial e pela função de dependência temporal. Sendo $r' = \frac{r}{|K|^{\frac{1}{2}}}$ e $a(t) = \frac{S(t)}{|K|^{\frac{1}{2}}}$ se $K \neq 0$ e $a(t) = S(t)$ se $K = 0$, teremos:

$$ds^2 = [a(t)^2] \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.26)$$

Onde $a(t)$ é chamado de fator de escala e agora $k = 0, 1$ ou -1 . É o fator de escala que caracterizará a evolução do nosso sistema. Escrevendo o elemento quadridimensional, obtemos:

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)^2] \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}, \quad (2.27)$$

onde a equação (2.27) é conhecida como elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker.

2.2.2 A geometria dos espaços com curvaturas constantes

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos neste trabalho, vamos explorar o significado das diferentes geometrias dos espaços para cada possível valor da constante de curvatura k existente no elemento de linha de FRW. Vamos utilizar então a equação (2.27) e um valor constante para o tempo $t = t_0$. Com isto, $a(t_0) = a_0$ e obtemos:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.28)$$

2.2.2.1 Constante de curvatura $k = 1$

Substituindo o valor da constante de curvatura em (2.28):

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.29)$$

Podemos observar que existe uma singularidade quando $r \rightarrow 1$, então, fica conveniente introduzir uma nova variável χ :

$$r = \text{sen}\chi. \quad (2.30)$$

Fazendo tal substituição em (2.29), obtemos:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 (d\chi^2 + \text{sen}^2\chi [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2]). \quad (2.31)$$

Uma alternativa para visualizar melhor a geometria presente neste espaço é introduzi-lo em um novo espaço euclidiano quadridimensional:

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.32)$$

Para tal, fazemos as seguintes transformações:

$$w = a_0 \cos \chi, \quad (2.33)$$

$$x = a_0 \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.34)$$

$$y = a_0 \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.35)$$

$$z = a_0 \sin \chi \cos \theta. \quad (2.36)$$

Por meio das transformações descritas acima é possível obter a equação [22]:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (2.37)$$

A equação acima descreve uma superfície esférica tridimensional com raio a_0 e intervalos de coordenadas $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Podemos concluir, baseado na equação acima, que o universo com a curvatura $k = 1$ é descrito por uma superfície esférica e é denominado universo fechado.

2.2.2.2 Constante de curvatura $k = 0$

Substituindo o valor da constante de curvatura no elemento de linha (2.28):

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.38)$$

Ao inserir as seguintes transformações de coordenadas:

$$x = a_0 r \text{sen}\theta \cos\phi, \quad (2.39)$$

$$y = a_0 r \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad (2.40)$$

$$z = a_0 r \cos\theta, \quad (2.41)$$

obtemos:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.42)$$

A equação acima, descreve o espaço euclidiano tridimensional em coordenadas cartesianas. A geometria representada pelo elemento de linha (2.38) é plana. Logo, o universo com curvatura $k = 0$ é descrito por uma superfície plana e é denominado aberto [22].

2.2.2.3 Constante de curvatura $k = -1$

Substituindo a constante de curvatura no elemento de linha (2.28):

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.43)$$

Fazendo uma substituição de variável na forma:

$$r = \sinh \chi, \quad (2.44)$$

em (2.43):

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left(d\chi^2 + \text{senh}^2\chi [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \right). \quad (2.45)$$

Diferentemente do caso $k = 1$, no presente caso, a alternativa para entender a geometria deste espaço é introduzi-lo em um espaço plano de Minkowski quadridimensional descrito pela equação:

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.46)$$

Para podermos colocar o elemento de linha (2.45) no formato descrito acima, temos que realizar as seguintes transformações de variáveis:

$$w = a_0 \cosh\chi, \quad (2.47)$$

$$x = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \cos\phi, \quad (2.48)$$

$$y = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad (2.49)$$

$$z = a_0 \text{senh}\chi \cos\theta. \quad (2.50)$$

Obtemos então como equação [22]:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2, \quad (2.51)$$

onde a equação acima descreve uma superfície hiperbólica com os intervalos de coordenadas $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Podemos concluir que a geometria do universo com curvatura $k = -1$ é descrito por uma superfície hiperbólica e é denominado universo aberto.

3 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL COM FLUIDO PERFEITO

3.1 FORMALISMO ADM

A formulação ADM é uma formulação hamiltoniana da relatividade geral e foi desenvolvida em meados dos anos 60 por Arnowitt, Deser e Misner, que dão a iniciais de seus nomes para o formalismo. O princípio básico deste formalismo é a foliação do espaço-tempo, separação entre a coordenada temporal das três coordenadas espaciais, para que a dinâmica sobre uma variedade quadridimensional qualquer seja descrita a partir da evolução temporal de hipersuperfícies espaciais. Podemos dizer que as hipersuperfícies espaciais tridimensionais são parametrizadas por t , de forma que tal parâmetro possa ser associado ao tempo coordenado [27]. Dessa forma, para cada valor constante de t , obtém-se uma hipersuperfície tridimensional descrita pela métrica h_{ij} que é identificada como variável fundamental da Relatividade Geral¹.

Seja M_4 uma 4-variedade descrita por uma métrica de assinatura $(-, +, +, +)$ e uma 3-superfície M_3 , contida em M_4 do tipo espaço, compacta e sem contorno, fixa em um instante de tempo particular. Considere que em M_3 estão descartadas rotações, e em M_4 as 3-superfícies do tipo espaço não se interseccionam e estão descartadas curvas do tipo fechada [17], [19], [25] e [28]. Utilizando o parâmetro t e as coordenadas internas de M_3 , x^a ($a = 1, 2, 3$), podemos escrever h_{ij} , que é a métrica 3-dimensional, e a 4-velocidade U^ν , a velocidade com a qual a 3-superfície evolui no espaço-tempo, para ser nosso novo conjunto de variáveis. As normais às 3-superfícies são dadas pelas 1-formas $\eta = \eta_\mu dx^\mu$, onde a coordenada t parametriza a 3-superfície tal que $\eta_\mu = -N\delta_\mu^0$ de modo que $g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = -1$, onde N é um fator de normalização que corresponde à componente normal da 4-velocidade e recebe o nome de função lapso. Esta função mede a diferença entre a coordenada tempo, t , e o tempo próprio, τ , sobre curvas normais à 3-superfície M_3 . O projetor sobre as 3-superfícies é $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \eta^\mu\eta^\nu$ cujas componentes são: $h^{00} = 0$, $h^{i0} = 0$ e $h^{ij} = g^{ij} + N^2g^{i0}g^{j0}$ e definimos a função *shift* $N^i(t, x^k) = g^{0i}N^2$ como sendo a componente tangencial da 4-velocidade.

Podemos então escrever o intervalo invariante como:

$$ds^2 = - \left(N^2 - N_i N^i \right) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

e a ação de Einstein-Hilbert (2.17) será reescrita a partir das novas quantidades:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^3x dt N h^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R \right] + S_m, \quad (3.2)$$

¹ Na verdade as variáveis fundamentais da teoria são as classes de equivalência dos h_{ij} frente aos difeomorfismos nas hipersuperfícies tridimensionais [17].

onde ${}^{(3)}R$ o escalar de Ricci nas 3-superfícies, K_{ij} a curvatura extrínseca das 3-superfícies e \mathcal{S}_m a ação referente à matéria.

A curvatura extrínseca denotada por K_{ij} mede a variação de um vetor normal à 3-superfície quando transladado de um ponto a outro e é definida como [29]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2D_j N_i \right]. \quad (3.3)$$

Sendo D_j é a derivada covariante com direção j na 3-superfície.

Podemos observar em (3.2) que o elemento $d^4x\sqrt{-g}$, onde g é o determinante de métrica, passa à forma de $d^3xdtN\sqrt{h}$, onde h é o determinante do projetor sobre a 3-superfície, e também observamos que a densidade lagrangeana do campo gravitacional é:

$$\mathcal{L}_g = Nh^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R \right]. \quad (3.4)$$

Vamos agora obter os momentos canonicamente conjugados a partir da variável dinâmica representada por h_{ij} :

$$P^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{h}_{ab}}, \quad (3.5)$$

e calculando os momentos associados a N^i e N :

$$P^i = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}_i} = 0, \quad (3.6)$$

e

$$P^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (3.7)$$

que significa que ambos são vínculos primários da teoria, ou seja, não são variáveis dinâmicas deste sistema².

Vamos então escrever a parte geométrica da ação (3.2), na sua forma hamiltoniana, levando em consideração os vínculos [29]:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^3xdt \left(P^{ij} \dot{h}_{ij} - NH_g - N_i H_g^i \right), \quad (3.8)$$

sendo H_g^i o supermomento e H_g a superhamiltoniana, e suas formas explícitas [29] são:

$$\begin{aligned} H_g &= \left[\frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \right] P^{ij}P^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h}, \\ &= G_{ijkl}P^{ij}P^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$H_g^i = -2D_j \Pi_i^j. \quad (3.10)$$

² Podemos ainda chamar N e N^i de multiplicadores de Lagrange.

onde na equação (3.9) o termo G_{ijkl} é conhecido como métrica de De Witt.

Identificamos a densidade da hamiltoniana geométrica da ação em (3.8) como:

$$\mathcal{H} = NH_g + N_i H_g^i. \quad (3.11)$$

Podemos obter a evolução do nosso sistema a partir das equações de Einstein oriundas da variação da ação (3.8) em relação a h_{ij} , P^{ij} , N e N_i . A derivação explícita desse resultado pode ser encontrada em [21]. A variação de (3.8) em relação a N e N^i resulta nos vínculos da superhamiltoniana $H_g = 0$ e do supermomento $H_g^i = 0$.

Vale considerar que na cosmologia, por causa do princípio cosmológico, só existe o vínculo da superhamiltoniana, e ele equivale a equação de Friedmann.

Na presença de um campo de matéria denotado por Φ^A , sendo seu momento canonicamente conjugado (P_Φ^A) é obtido na forma:

$$P_\Phi^A = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\Phi}^A}. \quad (3.12)$$

Nestas novas condições a ação (3.8) fica reescrita [29]:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[P^{ij} \dot{h}_{ij} + P_\Phi^A \dot{\Phi}_A - NH_{total} - N_i H_{total}^i \right]. \quad (3.13)$$

Dessa forma a densidade hamiltoniana fica:

$$\mathcal{H} = NH_{total} + N_i H_{total}^i, \quad (3.14)$$

sendo agora:

$$H_{total} = H_g + H_m \quad (3.15)$$

$$H_{total}^i = H_g^i + H_m^i. \quad (3.16)$$

Nas equações acima, H_m e H_m^i são respectivamente a superhamiltoniana e o supermomento da matéria envolvida.

3.2 FORMALISMO DE SCHUTZ

O formalismo de Schutz foi desenvolvido por Bernard F. Schutz na década de 70 [30] e [31], onde o mesmo descreve a 4-velocidade de um fluido perfeito relativístico utilizando potenciais-velocidade. A descrição da velocidade de qualquer movimento através de potenciais já havia sido divulgado em 1859 por Clebsch, contudo, os potenciais utilizados por este autor não tinham significado físico claro. A partir desta representação, podemos considerar uma teoria de campo relativística não-linear para campos escalares, cuja densidade lagrangiana é simplesmente a pressão do fluido. A intenção é escrever as equações dinâmicas de um fluido perfeito no formalismo hamiltoniano, onde a densidade

hamiltoniana é a densidade de energia do fluido [31]. Ao fim, vamos combinar a escrita dos potenciais-velocidade com o formalismo ADM, que foi abordado na seção anterior. Para tal, vamos utilizar os potenciais:

$$U_\nu = \mu^{-1}(\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_\nu), \quad (3.17)$$

onde S é a entropia, μ é a entalpia, ζ e β estão associadas a rotações no fluido, que devem ser nulos para sistemas homogêneos e ϕ e θ não tem significado físico claro [28].

Vamos considerar um fluido perfeito composto de bárions, onde o número de bárions se conserva (N) mas a massa real dos bárions pode ser modificada. Sua massa de repouso é definida como $m_H N$, onde m_H é a massa de hidrogênio no estado de repouso. Com isso, a energia interna é:

$$U = E - m_H N, \quad (3.18)$$

onde E é a massa total. Dividindo (3.18) pelo volume, temos:

$$\rho = \rho_0(1 + \tilde{U}), \quad (3.19)$$

e podemos ver que $\rho = E/V$, $\rho_0 = m_H N/V$ e $\tilde{U} = U/m_H N$. Utilizando a 1ª lei da termodinâmica, $dU = dQ - pdV$, e dividindo pela massa de repouso:

$$d\tilde{U} = dq - pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (3.20)$$

onde dq é a quantidade de energia por unidade de massa de repouso. A partir do teorema de Pfaff³, sabemos que a função entropia específica S e temperatura T existem, tal que:

$$d\tilde{U} = dq - pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = TdS. \quad (3.21)$$

Podemos agora definir entalpia como:

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + \tilde{U} + \frac{p}{\rho_0}, \quad (3.22)$$

onde p é a pressão do fluido perfeito, que pode ser escrito como:

$$p = \alpha\rho, \quad (3.23)$$

onde α caracteriza o tipo do fluido.

³ Para maiores detalhes, olhar os apêndices em [30].

A partir de (3.21), com ajuda de (3.23) e (3.19) e fazendo algumas manipulações algébricas chegamos a:

$$(1 + \tilde{U})d[\ln(1 + \tilde{U}) - \alpha \ln \rho_0] = TdS, \quad (3.24)$$

onde definimos:

$$T \equiv 1 + \tilde{U}, \quad (3.25)$$

$$S \equiv \ln(1 + \tilde{U}) - \alpha \ln \rho_0. \quad (3.26)$$

Ao aplicarmos a função exponencial em (3.26) e depois isolarmos o ρ_0 , obtemos:

$$\rho_0 = (1 + \tilde{U})^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}. \quad (3.27)$$

Por fim, vamos utilizando as equações (3.19), (3.22) e (3.23) e ao substituir na (3.27), fazendo algumas modificações, obtemos:

$$p = \alpha \left(\frac{\mu}{\alpha + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad (3.28)$$

que é a nossa pressão escrita em termos da entalpia μ e da entropia S . Dessa forma, conseguimos escrever também a pressão em termos dos potenciais, assim como a 4-velocidade introduzida em (3.17).

O fluido perfeito é definido [30] segundo a equação de estado (3.23) ou (3.28) e pelo tensor momento-energia (2.20):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg_{\mu\nu} = \rho_0 \mu U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

em um referencial comóvel inercial, o tensor momento-energia é diagonal (ρ, p, p, p) e por ser um fluido perfeito não conduz calor nem apresenta viscosidade.

Para finalizarmos essa seção, vamos aplicar a condição de renormalização da quadri-velocidade $U^\mu U_\mu = -1$ e escrevermos a métrica como função dos potenciais velocidades para podermos escrever a ação de Schutz:

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu} (\phi_{,\sigma} + \eta\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma}) (\phi_{,\nu} + \eta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}). \quad (3.30)$$

Logo, a ação de Schutz é escrita como:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 16\pi p), \quad (3.31)$$

e podemos obter a densidade lagrangiana [30]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R + 16\pi p). \quad (3.32)$$

Fazendo a variação da ação (3.31) em termos da métrica $g^{\mu\nu}$, podemos obter as equações de Einstein contendo como matéria um fluido perfeito:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + 16\pi \frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} = 0 \quad (3.33)$$

onde segundo [28]:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g} \quad (3.34)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}pg_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta \mu} \frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g}. \quad (3.35)$$

O termo $\frac{\delta p}{\delta \mu}$ pode ser obtido da primeira lei da termodinâmica (3.21) com o auxílio de (3.22). Já o termo $\frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}}$ pode ser obtida de (3.30):

$$\frac{\delta p}{\delta \mu} = \frac{\rho + p}{\mu}; \quad \frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\mu}{2}U_\mu U_\nu. \quad (3.36)$$

Diante dos resultados obtidos em (3.34)-(3.36), a variação da ação (3.33) resulta na equação de Einstein com matéria descrita por um fluido perfeito:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi [pg_{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu U_\nu] = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

3.3 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO

Para construirmos a forma hamiltoniana do modelo para o universo de FRW com fluido perfeito, precisamos dos conhecimentos previamente vistos. Vamos utilizar o intervalo invariante quadridimensional FRW descrito em (2.27) e reescrevê-lo na forma de (3.1):

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.38)$$

a partir do qual podemos obter a métrica. Podemos observar que (3.38) é uma forma simplificada de (3.1), isso se deve à simetria graças ao princípio cosmológico aplicado ao nosso modelo.

Utilizando a métrica (3.38) na parte gravitacional da ação (3.2) obtemos:

$$\mathcal{S}_g = \int dt d^3x \left[\frac{6\ddot{a}a^2}{N} - \frac{6\dot{a}\dot{N}a^2}{N^2} + \frac{6\dot{a}^2 a}{N} + 6kNa \right]. \quad (3.39)$$

Os termos de superfície originados após a integração por partes do primeiro termo dentro dos colchetes foram desprezados. Dessa forma (3.39) fica:

$$\mathcal{S}_g = \int dt d^3x \left[-\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN \right] \quad (3.40)$$

de onde pode-se obter a seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN \quad (3.41)$$

Da mesma maneira, a parte referente ao campo de matéria da ação (3.31) pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{S}_f = 16\pi \int dt d^3x N h^{\frac{1}{2}} p \quad (3.42)$$

$$= \xi \int dt N a^3 p. \quad (3.43)$$

sendo o termo ξ uma constante numérica resultante da integração referente a parte espacial de (3.42).

Segundo a equação (3.30) com $\eta = \beta = 0$ e considerando o sistema comóvel de coordenada, (sendo $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$), podemos obter:

$$\mu = \left[-g^{00}(\phi_{,0} + \theta S_{,0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\phi} + \Theta \dot{S}}{N}. \quad (3.44)$$

Assim a ação do fluido (3.43) com o auxílio das equações (3.23), (3.28) e (3.44) fica da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_f = \xi \int dt \left[N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 \alpha \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \right], \quad (3.45)$$

de onde podemos obter a densidade Lagrangiana para o fluido:

$$\mathcal{L}_f = N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 \alpha \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}} e^{-\frac{s}{\alpha}}. \quad (3.46)$$

3.3.1 Cálculo dos momentos canonicamente conjugados

A presente seção se dedica apenas aos cálculos dos momentos canonicamente conjugados não nulos das variáveis dinâmicas por meio das densidades Lagrangianas (3.41) e (3.46) já obtidas.

É importante mencionar que devido a homogeneidade e isotropia impostas pelo princípio cosmológico, o presente modelo é dotado de alta simetria. Assim, os cálculos dos momentos canonicamente conjugados realizados aqui são equivalentes aos descritos pelas

equações (3.5) e (3.12). Dessa forma:

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}, \quad (3.47)$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{\phi}} = N^{\frac{-1}{\alpha}} a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad (3.48)$$

$$P_S = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{S}} = \theta P_\phi. \quad (3.49)$$

Das equações acima, pode-se concluir que para matéria, o único momento independente é P_ϕ . Com os momentos canonicamente conjugados fica fácil a escrita da hamiltoniana segundo (3.14):

$$\mathcal{H} = \sum \dot{q}_i P_i - \mathcal{L} = NH, \quad (3.50)$$

em que q_i são as coordenadas generalizadas a , θ , ϕ e P_i seus respectivos momentos canonicamente conjugados. Logo:

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{24a} + NP_\phi^{\alpha+1} a^{-3\alpha} e^S (-\alpha)^\alpha - N6ka. \quad (3.51)$$

Com as transformações canônicas [28]:

$$T = -P_S e^{-S} P_\phi^{-(\alpha+1)}, \quad (3.52)$$

$$P_T = P_\phi^{\alpha+1} e^S, \quad (3.53)$$

$$\bar{\phi} = \phi - (\alpha + 1) \frac{P_S}{P_\phi}, \quad (3.54)$$

$$\bar{P}_\phi = P_\phi, \quad (3.55)$$

a Hamitoniana (3.51) fica:

$$\mathcal{H} = NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\alpha}} - N6ka. \quad (3.56)$$

De onde pode-se obter a equação de Friedmann que é dado pelo vínculo da superhamiltoniana:

$$NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\alpha}} - N6ka = 0. \quad (3.57)$$

O espaço de fase da teoria hamiltoniana obtida é descrito pelas variáveis a e T junto a seus respectivos momentos canonicamente conjugados P_a e P_T , em que todos, incluindo o multiplicador de Lagrange N , possuem apenas dependência temporal. Tal dependência, resultado da homogeneidade e isotropia do modelo, por questões de simplicidade não será escrita explicitamente. Para finalizar, pode-se concluir que através do formalismo de Schutz, são introduzidas as variáveis relacionadas ao fluido.

4 COSMOLOGIA NÃO-COMUTATIVA E O FLUIDO FANTASMA

Neste capítulo é apresentada a parte original desta dissertação, onde vamos introduzir a não-comutatividade no modelo cosmológico com fluido fantasma e discutir seus principais resultados.

4.1 DA HAMILTONIANA ÀS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A superhamiltoniana clássica para o universo homogêneo e isotrópico, na presença de um fluido perfeito, pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{H} = NH = -\frac{NP_a^2}{24a} + \frac{NP_T}{a^{3\alpha}} - N6ka, \quad (4.1)$$

que é a hamiltoniana escrita através de variáveis comutativas. A hamiltoniana descrita em (4.1) é comutativa, contudo, a proposta do trabalho se trata da inserção da não-comutatividade para tal sistema, então, nossa proposta de hamiltoniana não-comutativa será:

$$\mathcal{H}_{nc} = NH_{nc} = -\frac{NP_{a_{nc}}^2}{24a_{nc}} + \frac{NP_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\alpha}} - N6ka_{nc}. \quad (4.2)$$

A não-comutatividade expressa, por hipótese, em (4.2) será introduzida através do seguintes parênteses de Poisson que devem satisfazer:

$$\{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} = \gamma = \{T_{nc}, P_{a_{nc}}\}; \quad (4.3)$$

$$\{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} = 1 = \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\}; \quad (4.4)$$

$$\{a_{nc}, T_{nc}\} = 0 = \{P_{a_{nc}}, P_{T_{nc}}\}. \quad (4.5)$$

Lembrando que o parâmetro γ , que a partir de agora chamaremos de parâmetro não-comutativo, deve ser pequeno, pois somente um vestígio da não-comutatividade presente nos primórdios do universo estaria presente no universo hoje. Assim, sempre que houver expressões com o parâmetro γ , tomaremos somente sua primeira ordem.

Para facilitar a descrição do modelo, vamos inserir uma relação entre as variáveis não-comutativas, presentes nos parênteses de Poisson (4.3)-(4.5), e as variáveis comutativas usuais,

$$a_{nc} = a_c + \frac{\gamma T_c}{2}; \quad (4.6)$$

$$T_{nc} = T_c + \frac{\gamma a_c}{2}; \quad (4.7)$$

$$P_{a_{nc}} = P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}; \quad (4.8)$$

$$P_{T_{nc}} = P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}. \quad (4.9)$$

Se introduzirmos a variáveis não-comutativas dadas pelas transformações (4.6)-(4.9), nos parênteses de Poisson (4.3)-(4.5), eles são satisfeitos em primeira ordem de γ . Em termos das variáveis comutativas introduzidas pelas transformações (4.6)-(4.9), a hamiltoniana não-comutativa (4.2) fica da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{nc} = NH_{nc} = -\frac{N(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2})^2}{24(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})} + \frac{N(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2})}{(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{3\alpha}} - N6k(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c). \quad (4.10)$$

Uma outra motivação para a introdução das variáveis comutativas é que agora podemos escrever o intervalo invariante, para o calibre conforme $N = a_{nc}$, da seguinte forma:

$$ds^2 = -\left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c(t)\right)^2 dt^2 + \left(a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c(t)\right)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)\right), \quad (4.11)$$

assim, podemos tratar o espaço-tempo descrito por essa métrica utilizando o formalismo usual da relatividade geral. Observando a métrica (4.11), concluímos que a dinâmica do universo é descrita pelo a_{nc} . Dessa forma, para verificarmos a evolução deste espaço-tempo, devemos calcular o a_{nc} a partir das equações dinâmicas para o modelo. Por questão de completeza, mencionamos que fazendo $\gamma = 0$ em (4.11) retornamos à métrica comutativa em (3.38) no calibre $N = a$.

Uma vez que é equivalente trabalhar com as equações de Einstein ou com a equação de Hamilton, nós preferimos descrever a dinâmica deste modelo a partir da hamiltoniana (4.10).

Escrevendo agora a hamiltoniana para o calibre conforme:

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2})^2}{24} + \frac{(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2})}{(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{3\alpha-1}} - 6k(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c)^2. \quad (4.12)$$

Com a hamiltoniana total não-comutativa (4.12) escrita em termos de variáveis comutativas, podemos agora calcular as equações de movimento:

$$\dot{a}_c = \{a_c, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{1}{12}(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}) + \frac{\gamma}{2}(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{1-3\alpha}; \quad (4.13)$$

$$\dot{T}_c = \{T_c, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{\gamma P_{a_c}}{24} + (a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{1-3\alpha}; \quad (4.14)$$

$$\dot{P}_{a_c} = \{P_{a_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = -(1 - 3\alpha)(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2})(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha} + 12k(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}); \quad (4.15)$$

$$\dot{P}_{T_c} = \{P_{T_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = 6k\gamma a_c - \frac{\gamma}{2}(1 - 3\alpha)(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2})(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha}. \quad (4.16)$$

Combinando as equações (4.15) e (4.16) e desprezando termos de ordem maior ou igual a γ^2 :

$$P_{T_c} = \frac{\gamma P_{a_c}}{2} + C. \quad (4.17)$$

Onde C é uma constante oriunda da integração temporal de P_{T_c} e P_{a_c} . Vale ressaltar que ao fazermos o caso comutativo, onde γ igual a zero podemos observar que a constante C está relacionada a energia do fluido e é obrigatoriamente positiva.

Ao combinarmos as equações (4.13) e (4.14) e novamente desprezando ordens de γ maior ou igual a dois, obtemos:

$$\dot{a}_c = -\frac{1}{12}(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}) + \frac{\gamma \dot{T}_c}{2}, \quad (4.18)$$

e substituindo (4.17) em (4.18), chegamos a equação:

$$\dot{a}_c = -\frac{1}{12}(P_{a_c} + \frac{\gamma C}{2}) + \frac{\gamma \dot{T}_c}{2}. \quad (4.19)$$

Finalmente, isolando P_{a_c} em (4.19), temos:

$$P_{a_c} = -12\dot{a}_c - \frac{\gamma C}{2} + 6\gamma \dot{T}_c. \quad (4.20)$$

Normalmente, para descrever a dinâmica do modelo, utilizamos a equação de Friedmann, que no nosso caso é obtida fazendo (4.12) igual a zero. No nosso presente modelo não foi possível escrever a equação de Friedmann resultante de (4.12) somente através de termos de \dot{a}_c e funções de a_c , como demonstrado no apêndice A. Desta forma, vamos ter que usar a equação em derivada segunda no tempo para o fator de escala. Para isso, derivamos (4.13) no tempo, obtendo:

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{12}(\dot{P}_{a_c} + \frac{\gamma \dot{P}_{T_c}}{2}) + \frac{\gamma \ddot{T}_c}{2}. \quad (4.21)$$

Tomando a derivada temporal da equação (4.14):

$$\ddot{T}_c = -\frac{\gamma \dot{P}_{a_c}}{24} + (1 - 3\alpha)(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha}(\dot{a}_c + \frac{\gamma \dot{T}_c}{2}), \quad (4.22)$$

introduzindo esta expressão para \ddot{T}_c (4.22) em (4.21), ficamos com:

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{12}(\dot{P}_{a_c} + \frac{\gamma\dot{P}_{T_c}}{2}) + \frac{\gamma}{2}(-\frac{\gamma\dot{P}_{a_c}}{24} + (1-3\alpha)(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{1-3\alpha})(\dot{a}_c + \frac{\gamma\dot{T}_c}{2}). \quad (4.23)$$

Introduzindo as equações (4.15) e (4.16) em (4.23) e desprezando ordens de γ maiores ou iguais a dois, obtemos:

$$\ddot{a}_c = -k(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}) + \frac{(1-3\alpha)}{12}(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2})(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha} + \frac{(1-3\alpha)\gamma\dot{a}_c}{2}(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha}. \quad (4.24)$$

E por fim, usando (4.17) e (4.20) em (4.24), obtemos:

$$\ddot{a}_c = -k(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}) + \frac{(1-3\alpha)}{12}(C - 6\dot{a}_c\gamma)(a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{-3\alpha}, \quad (4.25)$$

Uma vez que a equação (4.25) também depende de T_c , precisamos obter uma equação dinâmica para esta quantidade, que será obtida substituindo (4.20) em (4.14):

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma\dot{a}_c}{2} + (a_c + \frac{\gamma T_c}{2})^{1-3\alpha}. \quad (4.26)$$

Como $\alpha < -1$, temos que as equações (4.25) e (4.26) ainda possuem termos em γ com ordens iguais ou superiores a dois. Para eliminarmos estas contribuições, vamos expandir em primeira ordem em γ os termos onde elas estão presentes:

$$\left(a_c(t) + \frac{\gamma T_c(t)}{2}\right)^{-3\alpha} \approx a_c(t)^{-3\alpha} - \frac{3\alpha}{2}\gamma T_c(t)a_c(t)^{-3\alpha-1} + \dots \quad (4.27)$$

$$\left(a_c(t) + \frac{\gamma T_c(t)}{2}\right)^{1-3\alpha} \approx a_c(t)^{1-3\alpha} + \frac{(1-3\alpha)}{2}\gamma T_c(t)a_c(t)^{-3\alpha} + \dots \quad (4.28)$$

Substituindo estas expansões em (4.25) e (4.26) para primeira ordem em γ :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c(t) &= -k\left(a_c(t) + \frac{\gamma T_c(t)}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{(1-3\alpha)}{2}\left(\gamma\dot{a}_c(t)a_c(t)^{-3\alpha} - \frac{C a_c(t)^{-3\alpha}}{6} + \frac{C\alpha\gamma T_c(t)a_c(t)^{-3\alpha-1}}{4}\right); \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma\dot{a}_c(t)}{2} + a_c(t)^{1-3\alpha} + \frac{(1-3\alpha)\gamma T_c(t)a_c(t)^{-3\alpha}}{2}. \quad (4.30)$$

Para obtermos a dinâmica do nosso modelo, devemos resolver este sistema de equações acopladas com as condições iniciais $a(0) = a_0$, $\dot{a}(0) = \dot{a}_0$ e $T(0) = T_0$. Ao resolvermos este sistema, obteremos a_c e T_c . Feito isto, combinaremos estas quantidades para determinar o fator de escala físico que é determinado pela equação (4.6).

4.2 ANÁLISE DE DADOS

Vamos separar o estudo das soluções em três grandes áreas principais, que serão caracterizados pelas diferentes seções espaciais ($k = 0, \pm 1$). Para cada seção espacial, investigaremos os resultados para os diferentes valores da constante do fluido α , parâmetro não-comutativo γ , C e as constantes iniciais a_0 , \dot{a}_0 e T_0 .

Infelizmente não há como resolver o sistema de equações (4.29) e (4.30) analiticamente para quaisquer valores dos parâmetros e condições iniciais, só podemos fazer isto de forma numérica. Ao fazermos o limite do caso comutativo ($\gamma = 0$), conseguimos soluções analíticas para o fator de escala, qualquer que seja o valor de k , se escolhermos valores de $\alpha < -1$ inteiros.

Uma vez que conseguimos soluções analíticas para o caso comutativo, vamos iniciar o nosso estudo analisando estas soluções e extraindo todas as informações possíveis. Desta forma, muito dos resultados obtidos nos casos não-comutativos serão facilmente entendidos.

4.2.1 $k = 0$

Vamos considerar inicialmente o caso em que as seções espaciais são planas, ou seja, $k = 0$. Como mencionamos acima, vamos inicialmente estudar uma solução analítica para o modelo comutativo.

4.2.1.1 *Caso comutativo para $\alpha = -2$*

Conforme mencionado na seção anterior, as soluções analíticas só foram possíveis para o caso comutativo. A maneira mais fácil de obtermos estas soluções é a partir da equação de Friedmann (3.57) e não do sistema acoplado (4.29) e (4.30) fazendo $\gamma = 0$.

Ao fazermos $\gamma = 0$ na equação (4.13) e substituindo em (3.57) juntamente com o valor da curvatura constante e o calibre $N = a$, obtemos a equação de Friedmann para o caso comutativo de $k = 0$.

$$P_T a^{1-3\alpha} - 6\dot{a}^2 = 0. \quad (4.31)$$

Como um exemplo de solução analítica, vamos obter a dinâmica do universo descrito pela equação (4.31) com seção espacial plana e constante de fluido igual a -2 . Fazendo as devidas substituições diretas na equação (4.31), obtemos:

$$-6\dot{a}^2 + P_T a^7 = 0. \quad (4.32)$$

Fazendo separação de variáveis em (4.32), podemos integrar dos dois lados diretamente:

$$\int da \frac{1}{\left(\frac{a^7 P_T}{6}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int dt, \quad (4.33)$$

cujo resultado é a seguinte expressão do fator de escala em função do tempo:

$$a(t) = \left(-\frac{5}{2} \sqrt{\frac{P_T}{6}} \left[t - t_0 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{6}{P_T a_0^5}} \right] \right)^{-\frac{2}{5}}. \quad (4.34)$$

Ao analisarmos a função (4.34), conseguimos provar que o *Big Rip* não pode ser evitado para o caso comutativo. Além disso, podemos determinar o tempo para que ele ocorra em função de P_T e do fator de escala inicial. Considerando $t_0 = 0$, a expressão para o tempo em que a singularidade ocorre é:

$$t = \left(\frac{24}{25 P_T a_0^5} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.35)$$

Podemos concluir da expressão (4.35) que além de inevitável, o *Big Rip* acontece mais rápido se aumentarmos o valor da energia P_T e/ou do fator de escala inicial a_0 .

Utilizando os valores valores: $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$, obtemos o gráfico para o fator de escala observado na Figura 1.

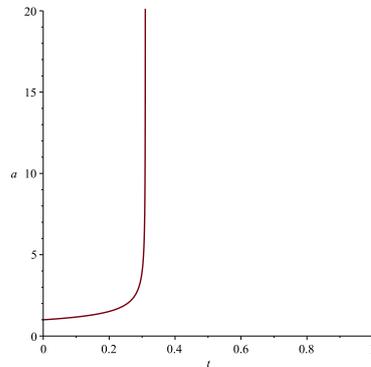


Figura 1 – Gráfico do fator de escala para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$.

Ao observarmos a Figura 1, concluímos que o fator de escala vai a infinito em um tempo finito ($t = 0,3098386677$), onde a curva é interrompida devido ao surgimento do *Big Rip*.

Vamos agora analisar as soluções não-comutativas para a seção de curvatura plana.

4.2.1.2 Caso não-comutativo

Para o caso não-comutativo, vamos substituir $k = 0$ em (4.29) e (4.30).

$$\ddot{a}_c(t) = -(1 - 3\alpha) \left(\frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} - \frac{C}{12} \right) \left(a_c(t)^{-3\alpha} - \frac{3\alpha \gamma T_c(t)}{2} a_c(t)^{-3\alpha-1} \right); \quad (4.36)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} + a_c(t)^{1-3\alpha} + \frac{(1 - 3\alpha) \gamma T_c(t) a_c(t)^{-3\alpha}}{2}. \quad (4.37)$$

Para resolvermos numericamente vamos ter que dar os valores dos parâmetros α , γ e C e das constantes iniciais a_0 , \dot{a}_0 e T_0 .

4.2.1.2.1 Variando α .

Vamos iniciar o estudo do caso não-comutativo a partir do parâmetro α , que é o responsável por caracterizar o fluido fantasma. No nosso modelo, só são possíveis valores de $\alpha < -1$. Se fixarmos o valor de $\alpha = -1$, obteremos o caso em que a densidade de energia é constante, resultado conhecido na literatura como constante cosmológica.

Para determinarmos como o fator de escala não-comutativo (4.6) depende do parâmetro α , vamos resolver as equações (4.36) e (4.37) fixando o parâmetro α e variando

os demais parâmetros e condições iniciais. É importante mencionarmos que os valores desses parâmetros e das condições iniciais não são arbitrários. Existe uma relação entre eles que é dada pela equação de Friedmann para o instante inicial.

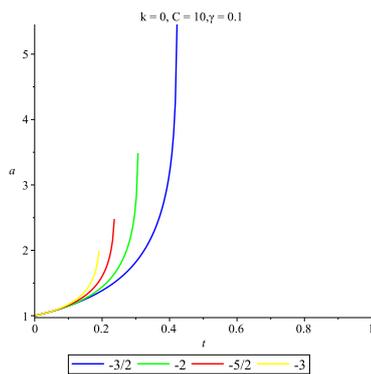
Para o presente caso essa relação é dada a partir da equação (A.4) quando substituirmos os valores das quantidades presentes nela no instante $t = 0$:

$$6\gamma\dot{a}_0 a_0^{1-3\alpha} - 6\dot{a}_0^2 + \frac{C - 12\gamma\dot{a}_0}{a_0^{3\alpha-1} + \frac{(3\alpha-1)}{2}\gamma T_0 a_0^{3\alpha-2}} = 0. \quad (4.38)$$

Assim, em todos os resultados obtidos a seguir, estaremos levando em conta a condição dada pela equação (4.38). Ao estudarmos o comportamento do fator de escala não-comutativo com os parâmetros e as condições iniciais, variaremos o parâmetro em estudo e manteremos fixos os demais parâmetros e condições iniciais com exceção de \dot{a}_0 . Ao estudarmos a dependência do fator de escala com \dot{a}_0 , variaremos \dot{a}_0 e manteremos os demais parâmetros e condições iniciais fixos, com exceção do C .

Do presente estudo, concluímos ao variar o parâmetro α que o *Big Rip* não pode ser evitado e que quanto menor o valor de α , mais cedo o *Big Rip* acontece. Assim, podemos dizer que quanto mais repulsivo o fluido, menor é o tempo para o fator de escala não-comutativo atingir a singularidade. Este resultado está de acordo com a equação de estado (3.23).

Escolhendo quatro diferentes valores de α para ilustrar a conclusão mencionada, obtemos o seguinte gráfico para o fator de escala em função do tempo, dado na Figura 2.



α	t
-3	0,19067232
-2,5	0,23372573
-2	0,30170369
-1,5	0,42464485

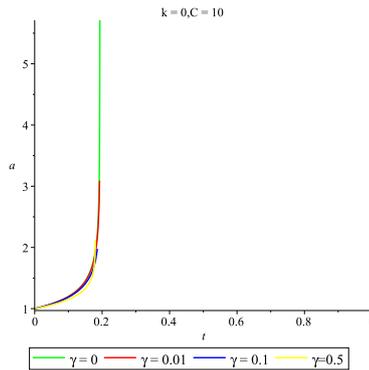
Figura 2 – Gráfico do fator de escala não-comutativo para $k = 0$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 1,242$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo variando o parâmetro γ .

4.2.1.2.2 Variando $\gamma \geq 0$.

Concluimos ao variar o parâmetro γ que quanto maior seu valor, mais rapidamente o fator de escala vai para a singularidade, ou seja, a não-comutatividade contribui para a expansão do universo. Podemos interpretar tal comportamento como se a não-comutatividade introduzisse uma força repulsiva adicional ao fluido fantasma.

Para exemplificar tal conclusão, observe a Figura 3.



γ	t	\dot{a}_0
0,5	0,18075276	1,065
0,1	0,19067232	1,242
0,01	0,19319510	1,286
0	0,19364917	1,291

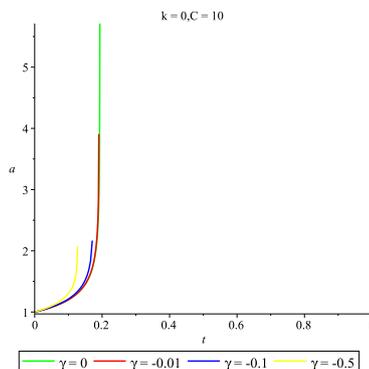
Figura 3 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro $\gamma \leq 0$.

4.2.1.2.3 Variando $\gamma \leq 0$.

Ao variarmos $\gamma \leq 0$, obtivemos resultados para o comportamento do fator de escala não-comutativo muito semelhantes ao variarmos $\gamma \geq 0$, ou seja, ao aumentarmos o valor de γ em módulo, observamos que o tempo para o fator de escala tender ao *Big Rip* diminui. Assim como no caso positivo, o parâmetro não-comutativo de valor negativo também pode ser interpretado como uma força repulsiva adicional.

Para exemplificar as conclusões citadas acima, observe a Figura 4.



γ	t	\dot{a}_0
-0,5	0,12775472	1,565
-0,1	0,17277258	1,342
-0,01	0,19025242	1,296
0	0,19364917	1,290

Figura 4 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

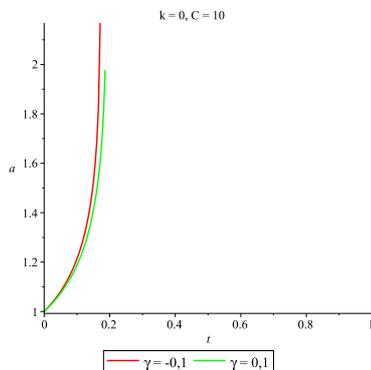
Vamos comparar agora as evoluções do fator de escala para os mesmos valores de γ em módulo, mas diferentes em sinal.

4.2.1.2.4 Variando $\gamma \lesseqgtr 0$.

Verificamos nos dois parágrafos anteriores que tanto o $\gamma > 0$ como o $\gamma < 0$ contribuem com uma força repulsiva adicional à força originária do fluido fantasma.

Nesse parágrafo gostaríamos de comparar essas duas forças repulsivas para o parâmetro γ com sinais diferentes. Para isso, vamos considerar dois modelos em que todos os parâmetros e condições iniciais são idênticos, com exceção do parâmetro γ . Nestes modelos, os parâmetros γ terão os mesmos módulos mas sinais diferentes. Deste estudo concluímos que o fator de escala não-comutativo para o γ positivo converge à singularidade em intervalos de tempo maiores em relação aos casos de γ negativo. Assim, podemos dizer que segundo a interpretação na qual o parâmetro não-comutativo contribui com uma força repulsiva adicional, a força associada ao parâmetro $\gamma < 0$ é mais intensa do que a força associada ao parâmetro $\gamma > 0$.

Para ilustrar a conclusão obtida acima, vamos observar a Figura 5.



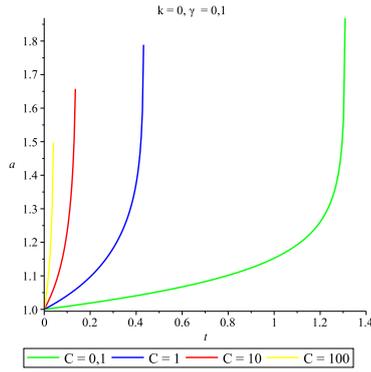
γ	t	\dot{a}_0
-0,1	0,17277258	1,342
0,1	0,19067232	1,242

Figura 5 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$, e $T_0 = 0$.

Vamos analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro de energia C .

4.2.1.2.5 Variando C .

Ao variarmos o valor do parâmetro C , concluímos que para maiores valores deste parâmetro, menor é o tempo para o qual o fator de escala não-comutativo vai para o infinito. Como C está relacionada a energia do fluido, já era esperado que o *Big Rip* acontecesse em tempos menores para um fluido repulsivo com maior energia. Para ilustrar tal conclusão, observe a Figura 6.



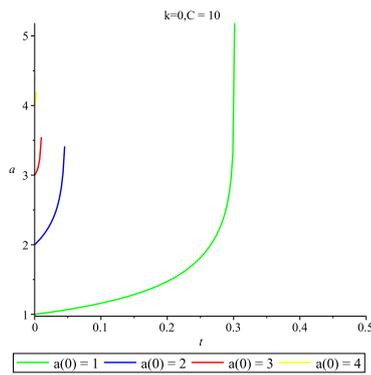
C	t	\dot{a}_0
100	0,04430202	4,033
10	0,13928162	1,242
1	0,43382688	0,361
0,1	1,30953290	0,088

Figura 6 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Ao observarmos como o nosso sistema se comporta variando C , finalizamos a análise dos parâmetros para o caso em que o universo tem curvatura nula ($k = 0$). Vamos agora analisar a variação das condições iniciais, começando com o a_0 .

4.2.1.2.6 Variando a_0 .

Como o valor de a_0 é o fator de escala inicial, ao variarmos o seu valor observamos que quanto maior a_0 , mais rapidamente o *Big Rip* acontece. É de se esperar que o valor do fator de escala inicial não altere o comportamento dinâmico do sistema, somente o instante de tempo para o qual a singularidade aconteça. O universo que iniciar em um fator de escala maior deve ir para a singularidade em um instante tempo menor. Para observarmos tal afirmação, segue a Figura 7 como exemplo.



a_0	t	\dot{a}_0
4	0,00354603	16,500
3	0,01221868	15,560
2	0,04763558	9,546
1	0,30170369	1,242

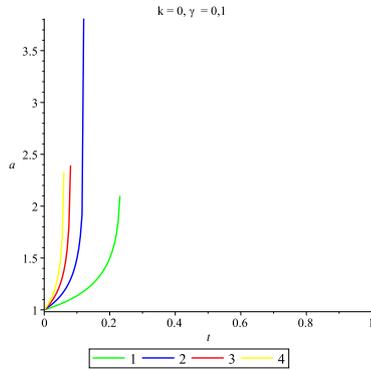
Figura 7 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0, 1$, $C = 10$ e $T_0 = 0$.

Vamos analisar agora o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o valor de \dot{a}_0 .

4.2.1.2.7 Variando \dot{a}_0 .

Ao variarmos o valor do parâmetro \dot{a}_0 observamos que o sistema vai mais rapidamente ao *Big Rip* para valores maiores da velocidade inicial associada ao fator de escala.

Este resultado já era esperado, pois ao aumentarmos a velocidade inicial associada ao fator de escala, mais rápido o mesmo expandirá. Para exemplificarmos tal comportamento, podemos analisar a Figura 8.



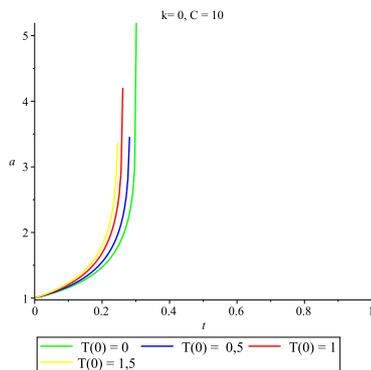
\dot{a}_0	t	C
4	0,09751873	6,6
3	0,12917812	25,2
2	0,19137539	55,8
1	0,36992515	98,4

Figura 8 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 0$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo para a variação de T_0 , a última condição inicial.

4.2.1.2.8 Variando T_0 .

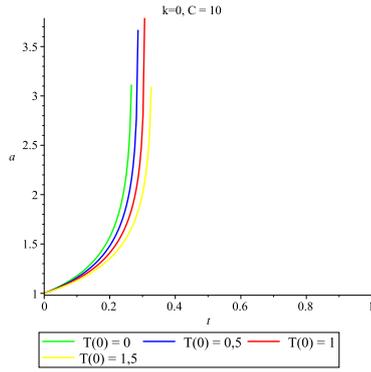
Obtemos dois resultados principais para este parâmetro. Ao variarmos o valor de T_0 com o $\gamma > 0$, concluímos que quanto maior seus valores, mais rapidamente o fator de escala atinge a singularidade. Este resultado é parecido com o resultado obtido ao variarmos o fator de escala não-comutativo inicial (a_0). Isto acontece porque o fator de escala não-comutativo é função de $T(t)$, de γ e do fator de escala comutativo. Como um exemplo, observe a Figura 9.



T_0	t	\dot{a}_0
1,5	0,25257505	1,719
1	0,27098790	1,501
0,5	0,28920503	1,352
0	0,30170132	1,242

Figura 9 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Uma outro resultado é obtido se variarmos T_0 com $\gamma < 0$. Para maiores valores do parâmetro T_0 , concluímos que mais lentamente o fator de escala não-comutativo atinge a singularidade, resultado contrário ao caso anterior deste parágrafo. Como um exemplo, observe a Figura 10.



T_0	t	\dot{a}_0
0	0,26969275	1,342
0,5	0,28775704	1,227
1	0,30763152	1,135
1,5	0,33017226	1,061

Figura 10 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 0$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Após a análise da variação de todos os parâmetros e condições iniciais para o fator de escala não-comutativo com constante de curvatura plana, conseguimos concluir que o *Big Rip* não pode ser evitado em nenhum caso.

Vamos estudar detalhadamente na próxima subseção a dinâmica do fator de escala para o universo com seção espacial fechada, $k = 1$.

4.2.2 $k = 1$

Considerando nesta seção o caso em que o universo tem seções espaciais esféricas, vamos estudar primeiramente o caso comutativo e em seguida os casos não-comutativos.

4.2.2.1 *Caso comutativo para $\alpha = -2$*

De forma análoga à feita para $k = 0$, vamos estudar inicialmente o caso comutativo de $k = 1$. Neste caso também conseguiremos soluções analíticas para o fator de escala se considerarmos fluidos em que α é inteiro. Assim seremos capazes de analisar as soluções não-comutativas de forma mais consistente, podendo utilizar o limite de $\gamma = 0$ nessas soluções e comparar os resultados com o caso comutativo. A forma mais fácil de iniciarmos tal estudo, é a partir da equação de Friedmann (3.57) utilizando o calibre conforme e substituindo (4.13) com $\gamma = 0$. Por fim, substituindo diretamente os valores de $k = 1$ e $\alpha = -2$, obtemos:

$$-6\dot{a}^2 a^{-7} - 6a^{-5} + P_T = 0. \quad (4.39)$$

É importante mencionarmos que os valores de P_T e a_0 não são arbitrário neste caso. Existe uma relação entre eles que é dada pela equação de Friedmann (4.39) para o instante inicial. Esta condição obtida de (4.39) no instante inicial, ao isolarmos o \dot{a}_0^2 , é dada por,

$$a_0^5 P_T \geq 6, \quad (4.40)$$

garante que \dot{a}_0 é real.

Podemos resolver a equação (4.39) se separarmos as variáveis e em seguida integramos:

$$\int da \left(\frac{6a^{-7}}{P_T - 6a^{-5}} \right)^{\frac{1}{2}} = \int dt, \quad (4.41)$$

cujos resultados são:

$$a(t) = \left[\frac{6}{P_T} \sec^2 \left(\frac{5}{2}(t - t_0) + \operatorname{arcsec} \left(\sqrt{\frac{a_0^5 P_T}{6}} \right) \right) \right]^{\frac{1}{5}}. \quad (4.42)$$

Na equação (4.42), podemos verificar que o *Big Rip* não pode ser evitado, e o tempo para que a singularidade ocorra é dado por:

$$t = \frac{\pi}{5} - \frac{2}{5} \operatorname{arcsec} \left(\sqrt{\frac{a_0^5 P_T}{6}} \right). \quad (4.43)$$

Podemos concluir da equação (4.43) que além de inevitável, o *Big Rip* acontece mais rápido se aumentarmos o valor da energia P_T e/ou do fator de escala inicial a_0 .

Utilizando $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a(0) = 1$, podemos observar o gráfico de $a(t)$ na Figura 11.

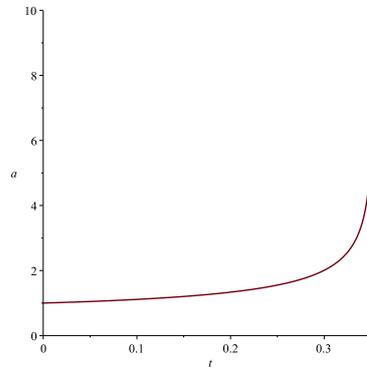


Figura 11 – Gráfico do fator de escala para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$.

Para os valores utilizados na Figura 11, o *Big Rip* ocorreu no tempo $t = 0,3544308494$, onde a curva é interrompida devido ao surgimento da singularidade.

Vamos agora analisar as soluções não-comutativas para universos com seções espaciais com curvatura esférica.

4.2.2.2 Caso não-comutativo

Para as soluções não-comutativas, vamos substituir $k = 1$ no sistema de equações (4.29) e (4.30).

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c(t) &= - \left(a_c(t) + \frac{\gamma T_c(t)}{2} \right) - \\ &- (1 - 3\alpha) \left(\frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} - \frac{C}{12} \right) \left(a_c(t)^{-3\alpha} - \frac{3\alpha\gamma T_c(t)}{2} a_c(t)^{-3\alpha-1} \right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} + a_c(t)^{1-3\alpha} + \frac{(1 - 3\alpha)\gamma T_c(t) a_c(t)^{-3\alpha}}{2}. \quad (4.45)$$

Para resolvermos numericamente vamos ter que dar os valores dos parâmetros α , γ e C e das constantes iniciais a_0 , \dot{a}_0 e T_0 .

4.2.2.2.1 Variando α .

Os resultados da seção espacial $k = 1$ são qualitativamente muito semelhantes aos resultados obtidos para a seção espacial $k = 0$.

Como no caso $k = 0$, vamos ter que utilizar a equação (A.4) no instante inicial para verificar qual a relação entre os parâmetros e condições iniciais. Substituindo o valor

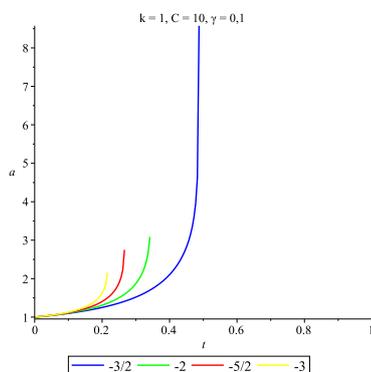
de $k = 1$ e das quantidades presentes no modelo para o instante $t = 0$ na equação (A.4), nós obtemos:

$$6\gamma\dot{a}_0 a_0^{1-3\alpha} - 6\dot{a}_0^2 + \frac{C - 12\gamma\dot{a}_0}{a_0^{3\alpha-1} + \frac{(3\alpha-1)}{2}\gamma T_0 a_0^{3\alpha-2}} - 6(a_0^2 + 2\gamma a_0 T_0) = 0. \quad (4.46)$$

Assim, em todos os resultados obtidos a seguir, estaremos levando em conta a condição dada pela equação (4.46). Ao estudarmos o comportamento do fator de escala não-comutativo com os parâmetros e as condições iniciais, variaremos o parâmetro em estudo e manteremos fixos os demais parâmetros e condições iniciais com exceção de \dot{a}_0 . Ao estudarmos a dependência do fator de escala com \dot{a}_0 , variaremos \dot{a}_0 e manteremos os demais parâmetros e condições iniciais fixos, com exceção do C .

Vamos iniciar o estudo de $k = 1$ a partir da variação do parâmetro α .

Concluimos ao variar α que o *Big Rip* não pode ser evitado e que quanto mais negativo o valor de α , mais cedo o *Big Rip* acontece. Assim, podemos dizer que quanto mais repulsivo o fluido é, menor o tempo para a singularidade, resultado que está de acordo com a equação de estado (3.23). Como um exemplo da conclusão, podemos observar a Figura 12.



α	t
-3	0,21839317
-2,5	0,26782211
-2	0,34598271
-1,5	0,48776899

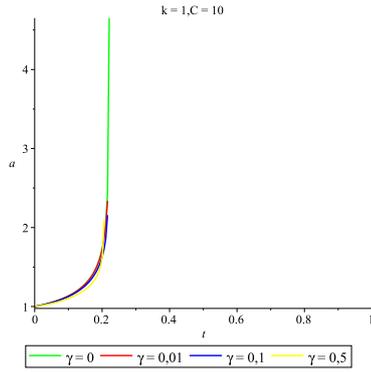
Figura 12 – Gráfico do fator de escala para $k = 1$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 0,768$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro não-comutativo.

4.2.2.2.2 Variando $\gamma \geq 0$.

Concluimos ao variar o parâmetro γ que quanto maior seu valor, mais rapidamente o fator de escala vai para a singularidade, ou seja, a não-comutatividade contribui para a expansão do universo. Podemos interpretar tal comportamento como se a não-comutatividade introduzisse uma força repulsiva adicional ao fluido fantasma, analogamente ao caso de $k = 0$.

Para exemplificar tal conclusão, observe a Figura 13.



γ	t	\dot{a}_0
0,5	0,20666872	0,604
0,1	0,21839317	0,768
0,01	0,22106232	0,811
0	0,22151928	0,816

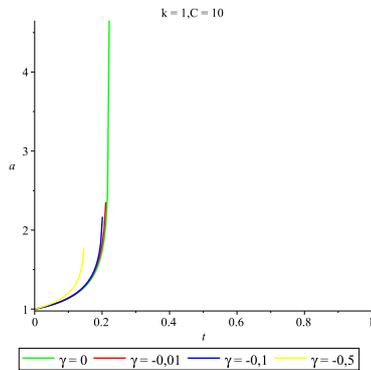
Figura 13 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos comparar agora as evoluções do fator de escala não-comutativo para $\gamma \leq 0$.

4.2.2.2.3 Variando $\gamma \leq 0$.

Ao variarmos $\gamma \leq 0$, obtivemos resultados para o comportamento do fator de escala não-comutativo muito semelhantes ao variarmos $\gamma \geq 0$, ou seja, ao aumentarmos o valor de γ em módulo, observamos que o tempo para o fator de escala tender ao *Big Rip* diminui. Assim como no caso positivo, o parâmetro não-comutativo de valor negativo também pode ser interpretado como uma força repulsiva adicional.

Para exemplificar as conclusões citadas acima, observe a Figura 14.



γ	t	\dot{a}_0
-0,5	0,14824059	1,104
-0,1	0,20003175	0,868
-0,01	0,21811344	0,821
0	0,22151928	0,816

Figura 14 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos comparar agora as evoluções do fator de escala para os mesmos valores de γ em módulo, mas diferentes em sinal.

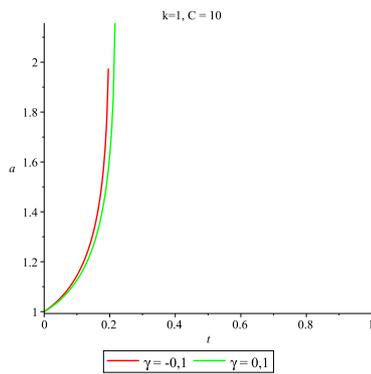
4.2.2.2.4 Variando $\gamma \lesseqgtr 0$.

Verificamos nos dois parágrafos anteriores que tanto o $\gamma > 0$ como o $\gamma < 0$ contribuem com uma força repulsiva adicional à força originária do fluido fantasma.

Nesse parágrafo gostaríamos de comparar essas duas forças repulsivas para o parâmetro γ com sinais diferentes. Para isso, vamos considerar dois modelos em que todos

os parâmetros e condições iniciais são idênticos, com exceção do parâmetro γ . Nestes modelos, os parâmetros γ terão os mesmos módulos mas sinais diferentes. Deste estudo concluímos que a evolução do fator de escala não-comutativo para o γ positivo converge à singularidade em intervalos de tempo maiores em relação aos casos de γ negativo. Assim, podemos dizer que segundo a interpretação na qual o parâmetro não-comutativo contribui com uma força repulsiva adicional, a força associada ao parâmetro $\gamma < 0$ é mais intensa do que a força associada ao parâmetro $\gamma > 0$.

Para ilustrar a conclusão obtida acima, vamos observar a Figura 15.



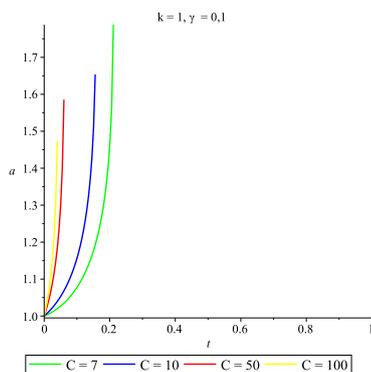
γ	t	\dot{a}_0
-0,1	0,20003175	0,868
0,1	0,21839317	0,768

Figura 15 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro de energia C .

4.2.2.2.5 Variando C .

Analisando a evolução do fator de escala não-comutativo ao variarmos o valor do parâmetro relacionado à energia do fluido C , concluímos que para valores maiores de C , o fator de escala não-comutativo tende ao *Big Rip* mais rapidamente. Ou seja, aumentando a energia associada ao fluido, mais repulsivo ele se torna, expandindo mais rapidamente. Para ilustrar tal conclusão, observe a Figura 16.



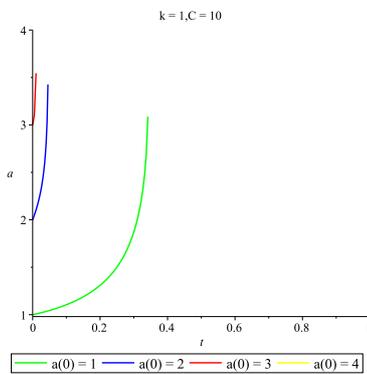
C	t	\dot{a}_0
100	0,04475916	3,904
50	0,06390653	2,658
10	0,15945706	0,768
7	0,21266708	0,361

Figura 16 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Ao observarmos como o nosso sistema se comporta variando C , finalizamos a análise dos parâmetros para a constante de curvatura $k = 1$. Vamos agora analisar a variação das condições iniciais, começando com o a_0 .

4.2.2.2.6 Variando a_0 .

Como o valor de a_0 é o fator de escala inicial, ao variarmos o seu valor observamos que quanto maior o a_0 , em módulo, mais rapidamente o *Big Rip* acontece. É de se esperar que o valor do fator de escala inicial não altere o comportamento dinâmico do sistema, somente o instante de tempo para o qual a singularidade aconteça. O universo que iniciar com um fator de escala maior deve ir para a singularidade em um instante de tempo menor. Para exemplificar tal afirmação, segue a Figura 17.



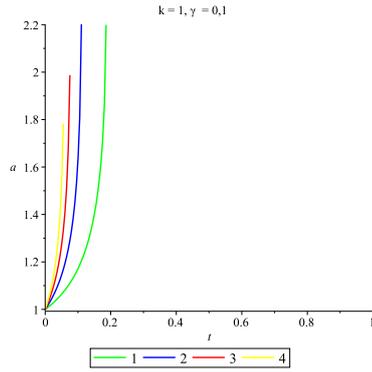
a_0	t	\dot{a}_0
4	0,00354607	16,491
3	0,01222068	15,524
2	0,04757719	9,421
1	0,34598271	0,768

Figura 17 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, 1 , $C = 10$ e $T_0 = 0$.

Vamos analisar agora o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro \dot{a}_0 .

4.2.2.2.7 Variando \dot{a}_0 .

Para maiores valores do \dot{a}_0 , mais rapidamente o fator de escala não-comutativo foi para a singularidade. Este resultado já era esperado, visto que quanto maior a velocidade inicial associada ao fator de escala, mais rapidamente o mesmo expandirá. Para exemplificar tal comportamento, observe a Figura 18.



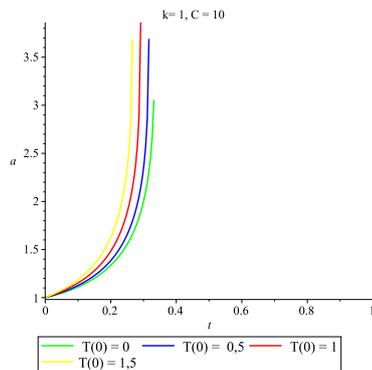
\dot{a}_0	t	C
4	0,06009429	104,400
3	0,07856007	61,800
2	0,11233290	31,200
1	0,18786535	12,600

Figura 18 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo para a variação da última condição inicial T_0 .

4.2.2.2.8 Variando T_0 .

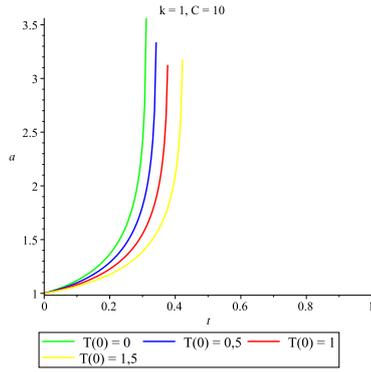
Obtemos dois resultados principais para este parâmetro. Ao variarmos o valor de T_0 com o $\gamma > 0$, concluímos que quanto maior seus valores, mais rapidamente o fator de escala atinge a singularidade. Este resultado é parecido com o resultado obtido ao variarmos o fator de escala inicial (a_0). Isto acontece porque o fator de escala não-comutativo é função de $T(t)$, de γ e do fator de escala comutativo. Neste caso o a_{nc} inicial é maior para valores maiores de T_0 . Como um exemplo, observe a Figura 19.



T_0	t	\dot{a}_0
1,5	0,26325134	1,384
1	0,29259937	1,111
0,5	0,31808049	0,916
0	0,34598271	0,768

Figura 19 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Um resultado diferente é obtido se variarmos o T_0 com o $\gamma < 0$. Para maiores valores do parâmetro T_0 , concluímos que mais lentamente o fator de escala não-comutativo atinge a singularidade, resultado contrário ao caso anterior deste parágrafo, porque para valores maiores do T_0 , o a_{nc} começa de valores menores. Como um exemplo, observe a Figura 20.



T_0	t	\dot{a}_0
0	0,31312625	0,868
0,5	0,34395244	0,720
1	0,38020553	0,603
1,5	0,42521168	0,509

Figura 20 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = 1$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Após a análise de todos os parâmetros e condições iniciais para o universo com curvatura constante positiva, conseguimos concluir que o *Big Rip* não pode ser evitado em nenhum caso.

Vamos estudar detalhadamente na próxima subseção a evolução do fator de escala não-comutativo para o universo com seção espacial aberta, $k = -1$.

4.2.3 $k = -1$

Nesta subseção iremos considerar o universo com seções espaciais hiperbólicas onde iremos estudar primeiramente o caso comutativo e em seguida os casos não-comutativos.

4.2.3.1 *Solução comutativa para $\alpha = -2$*

De forma análoga à feita para $k = 0$ e para $k = 1$, vamos estudar inicialmente o caso comutativo para a equação de Friedmann hiperbólica $k = -1$. Neste caso também iremos obter soluções analíticas para o fator de escala se considerarmos os valores inteiros de α . Assim, seremos capazes de analisar as soluções não-comutativas de forma mais consistente, podendo utilizar os limites de $\gamma = 0$ e compararmos os resultados obtidos no caso comutativo. A forma mais fácil de iniciarmos tal estudo, é a partir da equação de Friedmann (3.57) utilizando o calibre conforme e substituindo (4.13) com $\gamma = 0$. Por fim, substituindo diretamente os valores de $k = -1$ e $\alpha = -2$, obtemos:

$$-6\dot{a}^2 a^{-7} + 6a^{-5} + P_T = 0. \quad (4.47)$$

Podemos resolver a equação (4.47) se separarmos as variáveis e em seguida integramos:

$$\int da \frac{1}{(a^2 + \frac{a^7 P_T}{6})^{\frac{1}{2}}} = \int dt, \quad (4.48)$$

cujo resultado é:

$$a(t) = \frac{144^{\frac{1}{5}} a_0 e^t \left(\sqrt{36 + 6P_T a_0^5} - 6 \right)^{\frac{2}{5}}}{\left(e^{5t} \left(\sqrt{36 + 6P_T a_0^5} - 6 \right)^2 - 6P_T a_0^5 \right)^{\frac{2}{5}}}. \quad (4.49)$$

Na equação (4.49), podemos verificar que o *Big Rip* não pode ser evitado, e o tempo para que a singularidade ocorra é dado por:

$$t = \frac{1}{5} \ln \left[\frac{6P_T a_0^5}{\left(\sqrt{36 + 6P_T a_0^5} - 6 \right)^2} \right]. \quad (4.50)$$

Apesar de não ser tão simples quanto para os outros dois casos anteriores ($k = 0$ e $k = 1$), podemos concluir da equação (4.50), que além de inevitável, o *Big Rip* acontece mais rápido se aumentarmos o valor da energia P_T e/ou do fator de escala inicial a_0 .

Utilizando $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a(0) = 1$, temos a seguinte Figura 21 para $a(t)$.

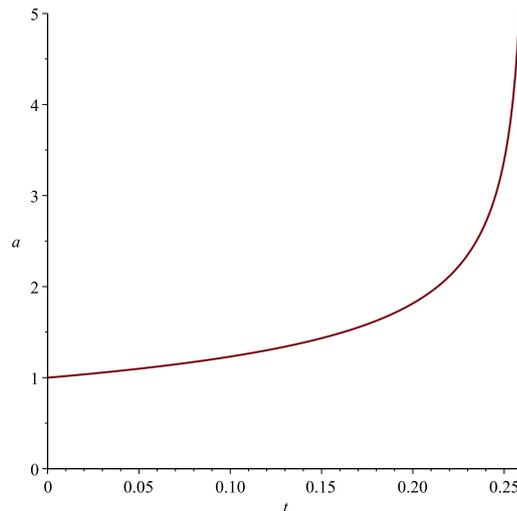


Figura 21 – Gráfico do fator de escala para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $P_T = 10$, $t_0 = 0$ e $a_0 = 1$.

Para os valores utilizados na Figura 21, o *Big Rip* ocorreu no tempo $t = 0,2850833886$, onde a curva é interrompida devido ao surgimento da singularidade.

Vamos agora analisar as soluções não-comutativas para a seção de curvatura constante $k = -1$.

4.2.3.2 Soluções não-comutativas.

Para as soluções não-comutativas, vamos utilizar o sistema de equações (4.29) e (4.30) e substituir $k = -1$:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c(t) &= \left(a_c(t) + \frac{\gamma T_c(t)}{2} \right) - \\ &- (1 - 3\alpha) \left(\frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} - \frac{C}{12} \right) \left(a_c(t)^{-3\alpha} - \frac{3\alpha \gamma T_c(t)}{2} a_c(t)^{-3\alpha-1} \right); \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\dot{T}_c(t) = \frac{\gamma \dot{a}_c(t)}{2} + a_c(t)^{1-3\alpha} + \frac{(1 - 3\alpha) \gamma T_c(t) a_c(t)^{-3\alpha}}{2}, \quad (4.52)$$

e para resolver o sistema acima numericamente, vamos ter que colocar valores para os parâmetros α , γ , C e das constantes iniciais a_0 , \dot{a}_0 e T_0 . Vamos iniciar os estudos a partir da variação do parâmetro α .

4.2.3.2.1 Variando α .

Os resultados da seção espacial $k = -1$ são qualitativamente muito semelhantes aos resultados obtidos para a seção espacial $k = 0$ e $k = 1$.

Como nos casos anteriores, vamos ter que utilizar a equação (A.4) no instante inicial para verificar qual a relação entre os parâmetros e condições iniciais. Substituindo

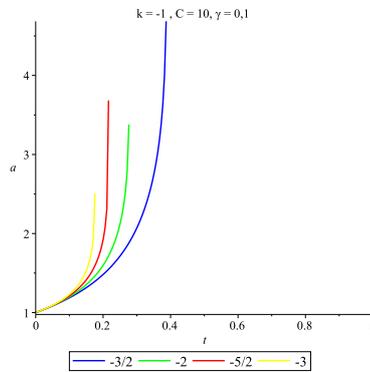
o valor de $k = -1$ e das quantidades presentes no modelo para o instante $t = 0$ na equação (A.4), nós obtemos:

$$6\gamma\dot{a}_0 a_0^{1-3\alpha} - 6\dot{a}_0^2 + \frac{C - 12\gamma\dot{a}_0}{a_0^{3\alpha-1} + \frac{(3\alpha-1)}{2}\gamma T_0 a_0^{3\alpha-2}} + 6(a_0^2 + 2\gamma a_0 T_0) = 0. \quad (4.53)$$

Assim, em todos os resultados obtidos a seguir, estaremos levando em conta a condição dada pela equação (4.53). Ao estudarmos o comportamento do fator de escala não-comutativo com os parâmetros e as condições iniciais, variaremos o parâmetro em estudo e manteremos fixos os demais parâmetros e condições iniciais com exceção de \dot{a}_0 . Ao estudarmos a dependência do fator de escala com \dot{a}_0 , variaremos \dot{a}_0 e manteremos os demais parâmetros e condições iniciais fixos, com exceção do C .

Vamos iniciar o estudo desta constante de curvatura a partir da variação do parâmetro α .

Concluimos ao variar α que o *Big Rip* não pode ser evitado e que quanto mais negativo o valor de α , mais cedo o *Big Rip* acontece. Assim, podemos dizer que quanto mais repulsivo o fluido é, menor o tempo para a singularidade, resultado que está de acordo com a equação de estado (3.23). Como um exemplo da conclusão, podemos observar a Figura 22.



α	t
-3	0,17527849
-2,5	0,21479428
-2	0,27712511
-1,5	0,38962711

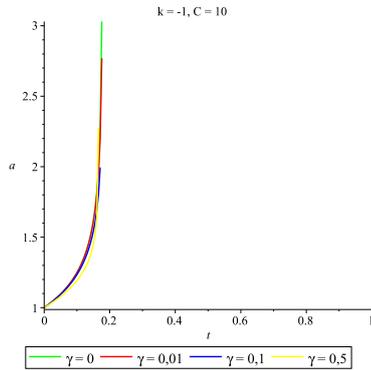
Figura 22 – Gráfico do fator de escala para $k = -1$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 1,584$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro não-comutativo.

4.2.3.2.2 Variando $\gamma \geq 0$.

Concluimos ao variar o parâmetro γ que quanto maior seu valor, mais rapidamente o fator de escala vai para a singularidade, ou seja, a não-comutatividade contribui para a expansão do universo. Podemos interpretar tal comportamento como se a não-comutatividade introduzisse uma força repulsiva adicional ao fluido fantasma, analogamente aos casos de $k = 0$ e $k = 1$.

Para exemplificar tal conclusão, observe a Figura 23.



γ	t	\dot{a}_0
0,5	0,16612931	1,402
0,1	0,17527849	1,584
0,01	0,17772486	1,628
0	0,17817712	1,633

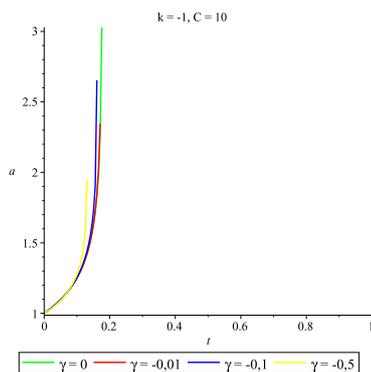
Figura 23 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos comparar agora as evoluções do fator de escala não-comutativo para $\gamma \leq 0$.

4.2.3.2.3 Variando $\gamma \leq 0$.

Ao variarmos $\gamma \leq 0$, obtivemos resultados para o comportamento do fator de escala não-comutativo muito semelhantes ao variarmos $\gamma \geq 0$, ou seja, ao aumentarmos o valor de γ em módulo, observamos que o tempo para o fator de escala tender ao *Big Rip* diminui. Assim como no caso positivo, o parâmetro não-comutativo de valor negativo também pode ser interpretado como uma força repulsiva adicional.

Para exemplificar as conclusões citadas acima, observe a Figura 24.



γ	t	\dot{a}_0
-0,5	0,11637301	1,902
-0,1	0,15770571	1,684
-0,01	0,17478709	1,638
0	0,17817712	1,633

Figura 24 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

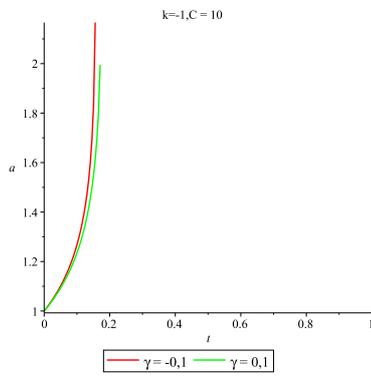
Vamos comparar agora as evoluções do fator de escala para os mesmos valores de γ em módulo, mas diferentes em sinal.

4.2.3.2.4 Variando $\gamma \lesseqgtr 0$.

Verificamos nos dois parágrafos anteriores que tanto o $\gamma > 0$ como o $\gamma < 0$ contribuem com uma força repulsiva adicional à força originária do fluido fantasma.

Nesse parágrafo gostaríamos de comparar essas duas forças repulsivas para o parâmetro γ com sinais diferentes. Para isso, vamos considerar dois modelos em que todos os parâmetros e condições iniciais são idênticos, com exceção do parâmetro γ . Nestes modelos, os parâmetros γ terão os mesmos módulos mas sinais diferentes. Deste estudo concluímos que a evolução do fator de escala não-comutativo para o γ positivo converge à singularidade em intervalos de tempo maiores em relação aos casos de γ negativo. Assim, podemos dizer que segundo a interpretação na qual o parâmetro não-comutativo contribui com uma força repulsiva adicional, a força associada ao parâmetro $\gamma < 0$ é mais intensa do que a força associada ao parâmetro $\gamma > 0$.

Para ilustrar a conclusão obtida acima, vamos observar a Figura 25.



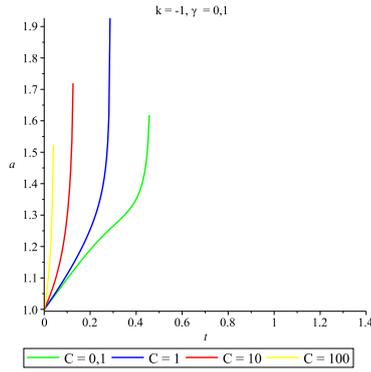
γ	t	\dot{a}_0
-0,1	0,15770571	1,684
0,1	0,17527850	1,584

Figura 25 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -3$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro de energia C .

4.2.3.2.5 Variando C .

Analisando a evolução do fator de escala não-comutativo ao variarmos o valor do parâmetro relacionado à energia do fluido C , concluímos que para valores maiores de C , o fator de escala não-comutativo tende ao *Big Rip* mais rapidamente. Ou seja, aumentando a energia associada ao fluido, mais repulsivo ele se torna, expandindo mais rapidamente. Para ilustrar tal conclusão, observe a Figura 26.

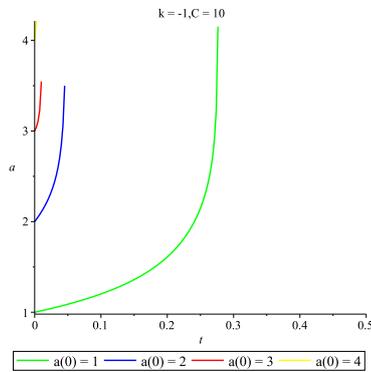


C	t	\dot{a}_0
100	0,04386894	4,153
10	0,12807612	1,584
1	0,28711683	1,031
0,1	0,46296746	0,959

Figura 26 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -4$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

4.2.3.2.6 Variando a_0 .

Como o valor de a_0 é o fator de escala inicial, ao variarmos o seu valor observamos que quanto maior o a_0 , em módulo, mais rapidamente o *Big Rip* acontece. É de se esperar que o valor do fator de escala inicial não altere o comportamento dinâmico do sistema, somente o instante de tempo para o qual a singularidade aconteça. O universo que iniciar com um fator de escala maior deve ir para a singularidade em um instante de tempo menor. Para exemplificar tal afirmação, segue a Figura 27.



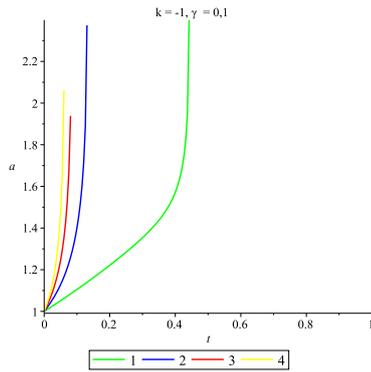
a_0	t	\dot{a}_0
4	0,00354599	16,510
3	0,01221668	15,596
2	0,04730033	9,671
1	0,27712511	1,584

Figura 27 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$ e $T_0 = 0$.

Vamos analisar agora o comportamento do fator de escala não-comutativo ao variarmos o parâmetro \dot{a}_0 .

4.2.3.2.7 Variando \dot{a}_0 .

Para maiores valores do \dot{a}_0 , mais rapidamente o fator de escala não-comutativo foi para a singularidade. Este resultado já era esperado, visto que quanto maior a velocidade inicial associada ao fator de escala, mais rapidamente o mesmo expandirá. Para exemplificar tal comportamento, observe a Figura 28.



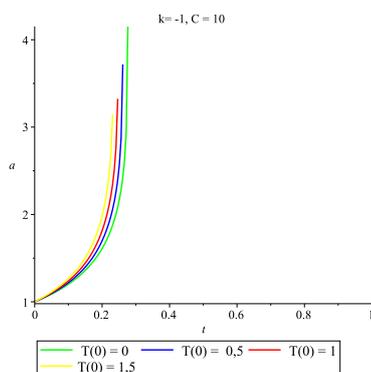
\dot{a}_0	t	C
4	0,06256579	92,400
3	0,08434592	49,800
2	0,13164449	19,200
1	0,44314212	0,600

Figura 28 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo para a variação da última condição inicial T_0 .

4.2.3.2.8 Variando T_0 .

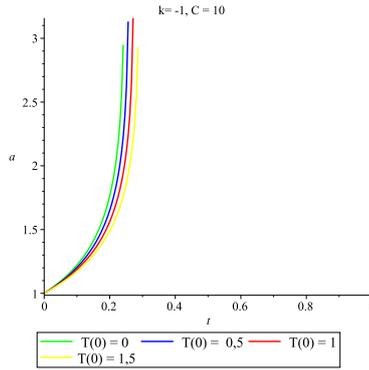
Obtemos dois resultados principais para este parâmetro. Ao variarmos o valor de T_0 com o $\gamma > 0$, concluímos que quanto maior seus valores, mais rapidamente o fator de escala atinge a singularidade. Este resultado é parecido com o resultado obtido ao variarmos o fator de escala não-comutativo inicial (a_0). Isto acontece porque o fator de escala não-comutativo é função de $T(t)$, de γ e do fator de escala comutativo. Como um exemplo, observe a Figura 29.



T_0	t	\dot{a}_0
1,5	0,23497234	2.004
1	0,24900819	1.813
0,5	0,26274275	1.682
0	0,27712511	1.584

Figura 29 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Um outro resultado é obtido se variarmos o T_0 com o $\gamma < 0$. Para maiores valores do parâmetro T_0 , concluímos que mais lentamente o fator de escala não-comutativo atinge a singularidade, resultado contrário ao caso anterior deste parágrafo. Como um exemplo, observe a Figura 30.



T_0	t	\dot{a}_0
0	0,24573049	1,684
0,5	0,25954986	1,574
1	0,27447892	1,485
1,5	0,29117655	1,409

Figura 30 – Gráfico do fator de escala numérico para $k = -1$, $\alpha = -2$, $\gamma = -0,1$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Após a análise da variação de todos os parâmetros e condições iniciais para o fator de escala não-comutativo com curvatura constante negativa, concluímos que o *Big Rip* não pode ser evitado em nenhum caso.

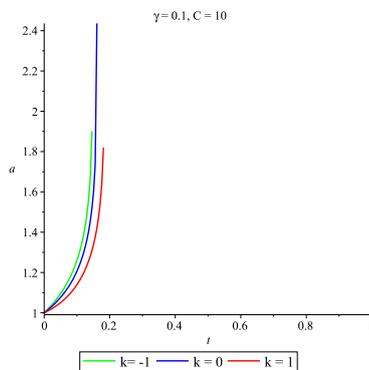
Vamos agora analisar o comportamento do fator de escala não-comutativo para diferentes valores da constante de curvatura k .

4.2.4 Diferentes valores da constante de curvatura k

Para finalizar a análise qualitativa dos nossos parâmetros, vamos comparar a dinâmica do nosso sistema para os diferentes valores da constante de curvatura.

Ao mantermos todos os parâmetros e condições iniciais constantes e variando somente os valores de k , concluímos que o *Big Rip* ocorre em um tempo menor para $k = -1$, em seguida para $k = 0$ e para um tempo maior em $k = 1$. Este resultado está de acordo com o caso comutativo, onde tal comportamento também pode ser observado.

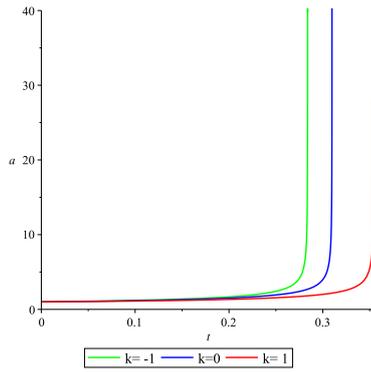
Como um exemplo, vamos analisar a seguinte Figura 31 para o caso não-comutativo.



k	t	\dot{a}_0
-1	0,14801373	1,584
0	0,16098369	1,242
1	0,18433753	0,768

Figura 31 – Gráfico do fator de escala numérico para $\alpha = -3,5$, $\gamma = 0,1$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

Como um exemplo comutativo, vamos analisar a Figura 32.



k	t
-1	0,2850833886
0	0,3098386677
1	0,3544308494

Figura 32 – Gráfico do fator de escala analítico para $\alpha = -2$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

Com a análise do comportamento do fator de escala variando as seções de curvatura constantes, finalizamos a análise dos resultados.

4.3 ESTIMATIVA PARA O PARÂMETRO γ E PARA O FIM DO UNIVERSO

Nesta seção vamos apresentar uma estimativa para o parâmetro não-comutativo γ , a partir de um universo dominado pela poeira, e posteriormente vamos estimar o tempo que o universo dominado pelo fluido fantasma levará para colapsar.

Para tal, vamos supor que o universo foi dominado até hoje pela poeira. Com tal suposição, vamos ser capazes de calcular um valor para γ .

Utilizando a equação de Friedmann com as variáveis não-comutativas (3.57) e o calibre $N = a_{nc}$.

$$NH_{nc} = -\frac{P_{a_{nc}}^2}{24} + \frac{P_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\alpha-1}} - 6ka_{nc}^2 = 0. \quad (4.54)$$

Vamos a partir da hamiltoniana (4.54) calcular o \dot{a}_{nc} .

$$\dot{a}_{nc} = \{a_{nc}, NH_{nc}\} = -\frac{1}{12}P_{a_{nc}} + \frac{\gamma}{a_{nc}^{3\alpha-1}}. \quad (4.55)$$

Isolando o $P_{a_{nc}}$ em (4.55).

$$P_{a_{nc}} = -12\left(\dot{a}_{nc} - \frac{\gamma}{a_{nc}^{3\alpha-1}}\right). \quad (4.56)$$

Vamos agora calcular o $\dot{P}_{T_{nc}}$.

$$\dot{P}_{T_{nc}} = \{P_{T_{nc}}, NH_{nc}\} = -\gamma P_{T_{nc}}(1 - 3\alpha)a_{nc}^{-3\alpha} + 12ka_{nc}. \quad (4.57)$$

Vamos considerar a partir de agora o universo com constante de curvatura $k = 0$ e o universo dominado pela poeira ($\alpha = 0$). Esses são os valores de k e α que melhor descrevem as condições atuais do Universo. A equação (4.57) assume a forma:

$$\dot{P}_{T_{nc}} = -\gamma P_{T_{nc}}. \quad (4.58)$$

Integrando diretamente (4.58), obtemos:

$$P_{T_{nc}} = P_{T_{nc0}} e^{-\gamma t}. \quad (4.59)$$

Onde $P_{T_{nc0}}$ é o momento associado à coordenada T_{nc} no instante inicial.

Introduzindo as equações (4.56) e (4.59) na equação (4.54) para $k = \alpha = 0$ e aplicando o vínculo da superhamiltoniana.

$$NH_{nc} = -6\dot{a}_{nc}^2 + 12\dot{a}_{nc}\gamma a_{nc} + P_{T_{nc0}} e^{-\gamma t} a_{nc} = 0. \quad (4.60)$$

Onde a equação (4.60) representa a equação de Friedmann não-comutativa para o universo dominado pela poeira com curvatura plana. Considerando o limite do tempo tendendo a infinito, o termo exponencial negativo tende a zero. Assim, concluímos que para tempos muito grandes, tal termo na equação (4.60) pode ser desprezado, e obtemos,

$$NH_{nc} = -6\dot{a}_{nc}^2 + 12\dot{a}_{nc}\gamma a_{nc} = 0. \quad (4.61)$$

Cuja solução é dada por:

$$a_{nc}(t) = a_0 e^{2\gamma t}. \quad (4.62)$$

A partir da equação (4.62), iremos obter uma estimativa para o valor atual de γ . Para isso, precisaremos fornecer o valor inicial de a_{nc} (a_0) em $t_0 = 0$ e o valor de a_{nc} , para a idade atual do Universo (a_H). A idade atual do Universo (t_H), em segundos, é dada por: $t_H = 4,32 \times 10^{17} s$. Tomaremos o valor do fator de escala atual como sendo igual a unidade ($a_H = 1$) e o valor de a_0 o mais próximo de zero possível ($a_0 = 10^{-40}$). Utilizando esses valores na equação (4.62) obtemos, como estimativa do valor atual de γ (γ_H), o seguinte valor: $\gamma_H = 1.066011617 \times 10^{-16} s^{-1}$.

Com o valor de γ_H estimado, vamos agora utilizá-lo em um de nossos modelos para o fluido fantasma e obter o tempo que o Universo levaria a partir de hoje para atingir o *Big Rip*.

Vamos considerar, agora, que na presente idade do Universo o período de domínio da poeira passou e o universo passa a ser dominado pelo fluido fantasma. Assim, o α presente na equação de estado que caracteriza o fluido perfeito dominante no universo

deve satisfazer a condição: $\alpha < -1$. Vamos escolher então, como um exemplo, o valor de $\alpha = -2$. Para os demais valores numéricos que iremos utilizar temos como condições iniciais: $t_0 = t_H$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\dot{a}_0 = 6,107278715 \times 10^{-21} s^{-1}$, este último obtido através da equação de Friedmann não-comutativa (A.4). Já para a energia do fluido usaremos que: $C = 6\Omega_E H_0^2$, onde $\Omega_E = 1 - \Omega_0 = 1 - 0,2825$ e $H_0 = (72/3,08567758 \times 10^{19}) s^{-1}$. H_0 e Ω_0 são, respectivamente, os valores do parâmetro de hubble e do parâmetro de densidade da energia escura, para o universo atual [3], [4], [33]-[37]. Para tais dados, obtemos o seguinte gráfico que pode ser observado na Figura 33.

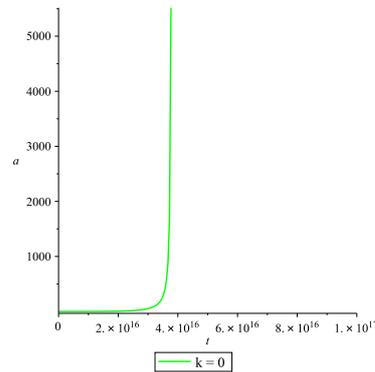


Figura 33 – Gráfico do fator de escala para $\alpha = -2$, $C = 2,343889097 \times 10^{-35} s^{-2}$, $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = 3,663318275 \times 10^{-20} s^{-1}$ e $T_0 = 0$.

O fator de escala atinge a singularidade para o tempo $t = 3,8039115 \times 10^{16} s$. Assim, podemos concluir de tal análise que o universo ainda tem um tempo da ordem de $10^{16} s$ antes do seu fim, a partir da idade atual, o que é aproximadamente mais 1,22 bilhão de anos.

5 CONCLUSÃO

O principal objetivo desta dissertação foi o estudo de um mecanismo que visa descrever a atual expansão acelerada do universo. Este mecanismo é a não-comutatividade entre as variáveis dinâmicas dos modelos cosmológicos considerados. Estamos supondo que tal não-comutatividade está presente no estado atual do universo e é um pequeno resíduo do seu valor inicial instantes após o *Big Bang*.

Para fundamentarmos este estudo, introduzimos vários tópicos importantes como alguns elementos da relatividade geral e de cosmologia, o formalismo ADM para descrever a relatividade geral na forma hamiltoniana e o formalismo de Schutz para descrever um fluido perfeito também no formalismo hamiltoniano.

Buscamos a abordagem hamiltoniana pois neste trabalho introduzimos a não-comutatividade como uma álgebra deformada dos parênteses de Poisson entre as variáveis dinâmicas e seus momentos canonicamente conjugados.

Utilizamos para o fluido perfeito, introduzido através do formalismo de Schutz, um fluido de pressão negativa que também busca modelar o estado de expansão acelerada do universo.

Tendo como base tais pré suposições, concluímos que o fim catastrófico do universo não pode ser evitado, ou seja, o *Big Rip* acontecerá. Este resultado é independente dos valores utilizados para as constantes iniciais ou para os parâmetros do nosso sistema que tenham significado físico.

Contudo, apesar do inevitável fim do universo para nosso modelo não-comutativo, a introdução da não-comutatividade se mostrou muito útil como um parâmetro extra para explorarmos o estado de expansão acelerada do universo. Ao utilizarmos nosso parâmetro γ com valores positivos, o fator de escala expande mais rapidamente do que no caso não-comutativo. Para o parâmetro γ negativo, o fator de escala expande mais rapidamente do que nos casos comutativos e não-comutativos com o parâmetro γ positivo. Interpretamos tal situação como se o fluido fantasma representado no modelo tivesse o auxílio de uma força repulsiva adicional, resultado da introdução da não-comutatividade no modelo. Outra conclusão importante a ser explorada sobre a não-comutatividade é a respeito da condição inicial sobre o T_0 , a coordenada associada ao fluido. Se aumentarmos o valor de T_0 , no caso em que o parâmetro não-comutativo é positivo, nós observamos que o fator de escala colapsa em um intervalo de tempo menor que no caso comutativo. Por outro lado, se aumentarmos o valor de T_0 , no caso em que o parâmetro não-comutativo é negativo, o fator de escala do universo colapsa de forma mais lenta do que nos casos comutativo e em que γ é positivo. Este comportamento acontece devido a expressão do fator de escala inicial (4.6). Se $\gamma > 0$ o fator de escala inicia de um valor maior do que nos casos onde $\gamma \leq 0$, levando assim menos tempo para expandir até o *Big Rip*.

Para os demais parâmetros e condições iniciais podemos dizer de forma sucinta que o *Big Rip* ocorre mais rapidamente se aumentarmos o valor de a_0 , \dot{a}_0 e C e se diminuirmos o valor de α e k .

Conseguimos obter para o modelo cosmológico com curvatura plana e dominado pela matéria, nas condições atuais do universo, uma estimativa para o parâmetro γ . A partir de tal estimativa, assumimos que o universo passa a ser dominado pelo fluido fantasma ao invés da poeira. Utilizamos o γ obtido para calcularmos a dinâmica do universo dominado agora pelo fluido fantasma. Como sabemos que o *Big Rip* para o universo representado por este modelo não pode ser evitado, obtemos o tempo de aproximadamente mais 1,22 bilhão de anos, a partir do tempo atual, para que o fator de escala não-comutativo se torne infinito, culminando no fim catastrófico do universo.

Como um possível encaminhamento para trabalhos futuros, podemos utilizar outros valores para o parâmetro α , de forma a ajustarmos a expansão presente no modelo aos dados da literatura. Comparando nosso modelo não-comutativo com o modelo comutativo com constante cosmológica, observamos que a constante cosmológica está relacionada com o quadrado do nosso parâmetro não-comutativo γ . Dessa forma, uma possível extensão do nosso trabalho seria investigar um modelo em que o γ tivesse o mesmo valor da raiz quadrada da constante cosmológica aceito atualmente. Outra possibilidade é inserirmos um outro tipo de não-comutatividade no modelo, de forma a investigarmos possíveis modificações na dinâmica do fator de escala. Por fim, podemos também modificar a teoria gravitacional que utilizamos no modelo, substituindo a relatividade geral por uma outra teoria gravitacional.

A Obtenção da equação de Friedmann não-comutativa

Neste apêndice vamos obter a equação de Friedmann de forma a escrevê-la como função de \dot{a}_c , a_c e T_c . Como veremos, a equação de Friedmann será importante no estudo das soluções do sistema (4.29) e (4.30) e do fator de escala não-comutativo.

Para isso, vamos reescrever a hamiltoniana não-comutativa com o calibre conforme (4.12), tomando apensar os termos em primeira ordem em γ :

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{(P_{a_c}^2 + \gamma P_{T_c} P_{a_c})}{24} + \frac{P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}}{a_c^{3\alpha-1} + (\frac{3\alpha-1}{2})\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + 2\gamma a_c T_c). \quad (\text{A.1})$$

Substituindo P_{T_c} escrito na forma dada por (4.17) em (A.1) e desprezando ordens de γ^2 e superiores, obtemos:

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{(P_{a_c}^2 + \gamma C P_{a_c})}{24} + \frac{C + \gamma P_{a_c}}{a_c^{3\alpha-1} + (\frac{3\alpha-1}{2})\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c). \quad (\text{A.2})$$

Substituindo agora o P_{a_c} descrito em (4.20) em (A.2) e já desprezando ordens iguais ou superiores de γ^2 , ficamos com a seguinte expressão:

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{(144\dot{a}_c^2 - 24\dot{a}_c(-\frac{\gamma C}{2} + 6\gamma\dot{T}_c) - 12\dot{a}_c\gamma C)}{24} + \frac{C - 12\gamma\dot{a}_c}{a_c^{3\alpha-1} + (\frac{3\alpha-1}{2})\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c). \quad (\text{A.3})$$

Por fim, vamos substituir o \dot{T}_c (4.30) em (A.3), simplificar alguns fatores e impor o vínculo da superhamiltoniana, obtendo a equação de Friedmann para \dot{a}_c , a_c e T_c :

$$6\gamma\dot{a}_c a_c^{1-3\alpha} - 6\dot{a}_c^2 + \frac{C - 12\gamma\dot{a}_c}{a_c^{3\alpha-1} + \frac{3\alpha-1}{2}\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Um resultado importante a ser observado é que ao fazermos $\gamma = 0$ em (A.4), obtemos a equação de Friedmann comutativa (4.31), resultado já esperado¹.

¹ Lembrando que no caso comutativo, o parâmetro C é o mesmo que o parâmetro P_T .

REFERÊNCIAS

- [1] DOLGOV, A. D. SAZHIN, M. V. *Basics of Modern Cosmology*, Editions Frontières, 1990.
- [2] MONERAT, G. A. *Universos Clássicos e Quânticos de Friedmann-Robertson-Walker*. Tese de doutorado, Niterói, 2003.
- [3] RIESS, A. G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astronomical Journal*. v. 116, p. 1009, 1998.
- [4] PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophysics Journal*. v. 517, p. 565, 1999.
- [5] CHIBA, T. OKABE, T. YAMAGUCHI, M. Kinetically Driven Quintessence. *Physical Review D*. v. 62, p. 023511, 2000.
- [6] CHIBA, T. Tracking k-essence. *Physical Review D*. v. 66, p. 063514, 2002.
- [7] WETTERICH, C. Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nuclear Physics B*. v. 302, n. 668, 1988.
- [8] RATRA, B. PEEBLES, J. E. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Physical Review D*. v. 37, p. 3406, 1988.
- [9] CALDWELL, R. R. DAVE, R. STEINHARDT, P. J. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State. *Physical Review Letters*. v. 80, p. 1582, 1998.
- [10] WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. *Modern Physics*. v. 61, n. 1, 1989.
- [11] PEEBLES, P. J. E. RATRA, B. The Cosmological Constant and Dark Energy. *Modern Physics*. v. 75, p. 599, 2003.
- [12] PADMANABHAN, T. Cosmological Constant—The Weight of the Vacuum. *Physics Reports*. v. 380, p. 235, 2003.
- [13] CALDWELL, R. R. A Phantom Menace? Cosmological Consequences of a Dark Energy Component with Super-Negative Equation of State. *Physics Letter B*. v. 549, p. 23, 2002.
- [14] See WOLFGANG, P. *Scientific Correspondence*. II, 15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [15] SZABO, R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. *Physics Reports*. v. 378, p. 207, 2003.
- [16] SNYDER, H. S. Quantized Space-time. *Physical Review*. v. 71, p. 38, 1947.
- [17] RODRIGUES, L. G. R. *Não-Comutatividade em um Modelo Cosmológico com Fluido de Poeira*, Dissertação, Juiz de Fora, 2015.
- [18] ARNOWITT, R. DESER, S. MISNER, C. W. *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Wiley, New York, 227-265, 1962.

- [19] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [20] NEVES, C. MONERAT, G. CORRÊA SILVA, E. V. OLIVEIRA-NETO, G. REZENDE RODRIGUES, L. G. SILVA de OLIVEIRA, M. Can noncommutativity affect the whole history of the universe? *gr-qc* 11093514, versão 2, 2015.
- [21] WALD, R. M. *General Relativity*. 1 ed. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984.
- [22] D'YNVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- [23] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, 1972.
- [24] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [25] MISNER, C. W. THORNE, K. S. WHEELER, J. A. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [26] NARLIKAR, J. V. *Introduction to Cosmology*. 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [27] ALCOFORADO, M. A. *Métodos Espectrais Aplicados a Relatividade Numérica: Determinação dos Dados Iniciais*. Dissertação, Instituto de Física Armando Dias Tavares - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2012.
- [28] FRACALOSSI, R. *Modelos Cosmológicos Quânticos com Fluido Perfeito*. Dissertação, Centro de Ciências Exatas - Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.
- [29] HALLIWELL, J. J. em *Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*. eds. Coleman, S. Hartle, J. B. Piran, T. Weinberg, S. World Scientific, 1991.
- [30] SCHUTZ, Perfect Fluid in General Relativity: Velocity Potentials and Variational Principle. *Physical Review D*. v. 2, n. 12, 1970.
- [31] SCHUTZ, Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid. *Physical Review D*. v. 4, n. 12, 1971.
- [32] MARCIAL, M. V. *Não-Comutatividade via Estruturas Simpléticas com Aplicações em Sistemas não Lineares, Mecânica Clássica e Cosmologia*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Juiz de Fora.
- [33] GARNAVICH, P. M. *et al.* Constraints on Cosmological Models from Hubble Space Telescope Observations of High-z Supernovae. *Astrophysical Journal*. v. 493, p. L53, 1999.
- [34] SCHMIDT, B. P. *et al.* The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae. *Astrophysical Journal*. v. 507, p. 46, 1998.
- [35] GARNAVICH, P. M. *et al.* Supernova Limits on the Cosmic Equation of State. *Astrophysical Journal*. v. 509, p. 74, 1998.

- [36] PERLMUTTER, S. *et al.* Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at $z \geq 0.35$. *Astrophysical Journal*. v. 483, p. 565, 1997.
- [37] PERLMUTTER, S. *et al.* Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe. *Letters to Nature*. v. 391, p. 51, 1998.