



Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Alessandro de Oliveira Castro Junior

Tunelamento Quântico em Modelos Cosmológicos na teoria de Hořava-Lifshitz

Juiz de Fora

2024



Alessandro de Oliveira Castro Junior

Tunelamento Quântico em Modelos Cosmológicos na teoria de Hořava-Lifshitz

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Cosmologia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Oliveira Castro Junior, Alessandro.

Tunelamento Quântico em Modelos Cosmológicos na teoria de Horava-Lifshitz / Alessandro de Oliveira Castro Junior. -- 2024.
150 p.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Física, 2024.

1. Cosmologia Quântica. 2. Horava-Lifshitz. 3. Probabilidade de Tunelamento. 4. Modelagem. I. de Oliveira Neto, Gil, orient. II. Título.

Alessandro de Oliveira Castro Júnior

Tunelamento Quântico em Modelos Cosmológicos na Teoria de Horava-Lifshitz

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 27 de agosto de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Eduardo Vasquez Corrêa Silva
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 26/08/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 27/08/2024, às 16:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto, Servidor(a)**, em 27/08/2024, às 17:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Membro**, em 27/08/2024, às 17:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Vasquez Corrêa Silva, Usuário Externo**, em 28/08/2024, às 10:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Germano Amaral Monerat, Usuário Externo**, em 28/08/2024, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1945930** e o código CRC **8871F985**.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço imensamente aos meus pais, Alessandro de Oliveira Castro e Ana Paula Martins Castro, por sempre priorizarem minha educação e por sempre me darem todo o suporte necessário em todas as etapas da minha vida.
- A minha namorada e companheira incondicional, Ágatha Nieling, por todo o amor, por sempre me dar forças e por nunca me deixar desistir independente dos obstáculos.
- A minha irmã, Ana Carolina Martins Castro, por todo o carinho e apoio.
- Aos meus amigos de uma vida toda, Luiz Gustavo Cavalcante de Araújo, Jean Alves Roque e Giovanni Guarnieri Soares, sem os quais eu não chegaria aqui.
- Aos meus amigos que o departamento de Física me trouxe, Felipe Augusto de Carvalho, Victor Rocha da Silva, Alan Corrêa Diniz, Marina Costa Totti, André Lucas Matthaeus Santos, Benny Guedes e todos os outros os amigos que conquistei durante esta caminhada, que contribuíram direta ou indiretamente na minha vida pessoal e profissional.
- Ao prof. Dr. Gil de Oliveira Neto, por ter me recebido de braços abertos, por sempre ter me tratado com extrema gentileza e por se mostrar um exemplo de profissional, compartilhando todo o seu conhecimento e estando sempre disposto a ajudar quando tive dificuldades.
- Agradeço a CAPES e a todos os outros órgãos financiadores que são indispensáveis para a ciência brasileira.

"The Cosmos is all that is or ever was or ever will be. Our feeblest contemplations of the Cosmos stir us - there is a tingling in the spine, a catch in the voice, a faint sensation, as if a distant memory, of falling from a height. We know we are approaching the greatest of mysteries."

Carl Sagan - Cosmos

RESUMO

Na presente tese, dois modelos cosmológicos são examinados da perspectiva da Cosmologia Quântica usando a teoria gravitacional de Hořava-Lifshitz. Ambos os modelos apresentam um fluido perfeito como seu conteúdo material. O primeiro modelo é composto de radiação ($\omega = 1/3$), enquanto o segundo modelo é composto de poeira ($\omega = 0$). Esses modelos são montados usando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com uma constante de curvatura positiva ($k = +1$). A dinâmica dos modelos é descrita usando o formalismo hamiltoniano, com os formalismos ADM e Schutz utilizados para obter o hamiltoniano total dos modelos. Soluções clássicas para o fator de escala são obtidas construindo um espaço de fase (a, p_a) , onde $a(t)$ representa o fator de escala e $p_a(t)$ é seu momento conjugado canônico. Uma equação diferencial para o fator de escala é então obtida, revelando a dinâmica do fator de escala e demonstrando a ausência de uma singularidade. Como o objetivo deste trabalho é investigar o nascimento do universo através do processo de tunelamento quântico, os modelos são quantizados. Isso é alcançado pela introdução da função de onda do universo e pela aplicação do formalismo de Dirac para sistemas com vínculos, levando à equação de Wheeler-DeWitt para o modelo em exame. A equação é posteriormente resolvida usando um método de diferença finita e também pelo método WKB. Em seguida, foram obtidas as probabilidades de tunelamento usando a solução numérica, que é chamada de TP_{int} , e a solução WKB, que é chamada de TP_{WKB} . Finalmente, uma investigação é conduzida para determinar como a energia E e os parâmetros da teoria de HL g_c, g_Λ, g_r e g_s influenciam as probabilidades de tunelamento TP_{int} e TP_{WKB} .

Palavras-chave: Cosmologia Quântica. Hořava-Lifshitz. Probabilidade de Tunelamento.

ABSTRACT

In this thesis, two cosmological models are examined from the perspective of Quantum Cosmology using the gravitational theory of Hořava-Lifshitz. Both models feature a perfect fluid as their material content. The first model is comprised of radiation ($\omega = 1/3$), while the second model is filled with dust ($\omega = 0$). These models are assembled using the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric with a positive curvature constant ($k = +1$). The dynamics of the models are described using the Hamiltonian formalism, with the ADM and Schutz formalisms utilized to derive the total Hamiltonian of the models. Classical solutions for the scale factor are obtained by constructing a phase space (a, p_a) , where $a(t)$ represents the scale factor and $p_a(t)$ is its canonical conjugate momentum. A differential equation for the scale factor is then obtained, revealing the dynamics of the scale factor and demonstrating the absence of a singularity. As the objective of this work is to investigate the birth of the universe through the quantum tunnelling process, the models are quantized. This is achieved by introducing the wavefunction of the universe and applying Dirac's formalism for constrained systems, leading to the Wheeler-DeWitt equation for the model under examination. The equation is further solved using a finite difference method and also by the WKB method. Then, the tunneling probabilities were obtained using the numerical solution, which is called TP_{int} , and the WKB solution, which is called TP_{WKB} . Finally, an investigation is conducted to determine how the energy E and the HL theory parameters g_c, g_Λ, g_r , and g_s influence the tunnelling probabilities TP_{int} and TP_{WKB} .

Key-words: Quantum Cosmology. Hořava-Lifshitz. Tunneling Probability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Luta entre Marduk e Tiamat.	19
Figura 2 –	Pan Ku, o primeiro ser vivo e origem da existência distinta das coisas segundo a versão mais conhecida do mito da criação na mitologia chinesa.	19
Figura 3 –	(a) Representação do século 16 do modelo geocêntrico de Ptolomeu. (b) Índice de uma cópia de 1528 do <i>Almagesto</i> , traduzido do grego para o latim por Jorge de Trebizonda.	21
Figura 4 –	Página-título da primeira edição do livro <i>Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica</i> de 1687.	22
Figura 5 –	(a) Porção central do Hubble Deep Field, criada a partir de exposições tiradas em 1995. (b) Esta é uma imagem composta do Observatório de Raios X Chandra da NASA, do Telescópio Espacial Hubble e do Telescópio Espacial James Webb. Na foto está o aglomerado de galáxias MACS J0416 a uma distância de cerca de 4,3 bilhões de anos-luz da Terra. Fonte: NASA	24
Figura 6 –	Da esquerda para a direita, observações EHT do M87* realizadas em 6 de Abril de 2017; uma simulação do M87*; simulação embaçada para coincidir com a resolução do Event Horizon Telescope. Fonte: https://physicsworld.com/a/first-images-of-a-black-hole-unveiled-by-astronomers-in-landmark-discovery/	28
Figura 7 –	Figura 7a: Elementos básicos de um diagrama de espaço-tempo. Figura 7b: Regiões do diagrama do espaço-tempo mostrando o cone de luz. Figura 7c: Cones de luz em relação a diferentes pontos-de-mundo ao longo de uma linha-de-mundo tipo-tempo. Fonte: Ta-Pei Cheng - <i>Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction</i>	33
Figura 8 –	Divisão do espaço-tempo em três regiões diferentes. Fonte: Ray D’Inverno - <i>Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding</i>	34
Figura 9 –	Experimento mental do elevador de Einstein. Fonte: Ray D’Inverno - <i>Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding</i>	36
Figura 10 –	O transporte paralelo de um vetor em torno de um triângulo em uma superfície esférica. Fonte: Ta-Pei Cheng - <i>Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction</i>	40
Figura 11 –	(a) A mudança na direção de um vetor pode ser expressa como uma mudança fracionária do vetor através de $d\theta = (dA)/A$. (b) A área do paralelogramo é dada por $\vec{\sigma} = \vec{A} \times \vec{B}$. Fonte: Ta-Pei Cheng - <i>Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction</i>	41
Figura 12 –	A trajetória entre dois pontos A e B na superfície de uma esfera faz parte de um círculo que circunda a superfície.	44

Figura 13 – Variedade fatiada em 3-espacos homogêneos. Fonte: Ray D’Inverno - Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding.	48
Figura 14 – Modelos de Friedmann organizados de acordo com os valores dos parâ- metros k e Λ . Fonte: Ray D’Inverno - Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding.	55
Figura 15 – Um modelo oscilante mostrando os ciclos de expansão e contração. Fonte: Ray D’Inverno - Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding.	55
Figura 16 – Evolução temporal do fator de escala. As linhas tracejadas são aquelas previstas pelo modelo padrão, enquanto a linha sólida vem do modelo de inflação. A linha de inflação coincide com as linhas do modelo padrão após $10^{-35}s$. Aqui, SM significa "modelo padrão" e IC significa "cosmologia inflacionária". Fonte: Ta-Pei Cheng - Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction.	56
Figura 17 – Representação pictórica das hipersuperfícies espaciais tridimensionais construídas dentro de um espaço-tempo quadridimensional. A imagem mostra como a evolução temporal das hipersuperfícies cria o espaço-tempo.	62
Figura 18 – Representação pictórica da curvatura extrínseca através de um trans- porte paralelo. Fonte: Misner, Thorne, Wheeler - Gravitation.	65
Figura 19 – Barreira de potencial.	73
Figura 20 – Representação gráfica para o método de diferenças finitas	83
Figura 21 – Representação pictórica do método de Crank-Nicolson. Fonte: By Ber- land at English Wikipedia - Transferred from en.wikipedia to Commons., Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2578576	85
Figura 22 – Comportamento do potencial clássico $V_c(a)$ para as duas situações possíveis. Na situação (a) tem-se $g_c = 4.0, g_\Lambda = 0.03, g_r = 0.2$ e $g_s = -0.000001$ enquanto que, na situação (b) tem-se $g_c = 15.0, g_\Lambda =$ $0.25, g_r = 15.0$ e $g_s = -0.0000001$. Para ambos, $k = +1, \omega = 1/3$ e $p_T = 0$	91
Figura 23 – Comportamento do quadrado da função de onda $ \Psi ^2$ no tunelamento das barreiras mostradas nas figuras (22a) e (22b), respectivamente. . .	91
Figura 24 – Espaço de fase para o modelo onde o potencial tem a forma de um bem seguido por uma barreira. Ele usa os mesmos valores dos parâmetros HL da figura (22b). Os valores de p_T variam de 0 à 400. As linhas pontilhadas são chamadas separatrizes porque separam diferentes tipos de soluções.	92
Figura 25 – Soluções clássicas $a(\eta) \times \eta$ para os casos de uma (a) dinâmica de expansão e de uma (b) dinâmica periódica.	93

Figura 26 – Soluções clássicas $a(\eta) \times \eta$ para os casos de uma dinâmica de (a) bouncing ou ricochete e de uma (b) dinâmica de contração.	93
Figura 27 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_c varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$	98
Figura 28 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_Λ varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$	99
Figura 29 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_r varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$	100
Figura 30 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_s varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$	102
Figura 31 – (a)Variação de TP_{int} com o aumento da energia. (b)Variação de TP_{WKB} com o aumento da energia. (c) Comparação da evolução de TP_{int} e TP_{WKB} conforme a energia aumenta.	104
Figura 32 – Exemplo de barreira de potencial obtida à partir da equação (4.6). Neste exemplo foram usados os valores $\bar{g}_c = 4, 0$; $\bar{g}_\Lambda = 0, 1$; $\bar{g}_r = 9, 0$ e $\bar{g}_s = -2, 5$	108
Figura 33 – Potencial $V(x)$ e o efeito da alteração dos parâmetros \bar{g}_s e \bar{g}_r . (a) Os valores dos parâmetros para esse exemplo são $\bar{g}_c = 4, 0$; $\bar{g}_\Lambda = 0, 03$; $\bar{g}_r = 0, 2$ e $\bar{g}_s = -0, 001$. (b) Aqui pode-se ver como a variação de \bar{g}_s altera a profundidade do poço. O mais raso (verde) aparece para $g_s = -1, 0$ enquanto o mais profundo (preto) aparece para $g_s = -0, 3$ (c) Aqui pode-se ver como a variação de \bar{g}_r altera a profundidade do poço. O mais profundo (verde) aparece para $g_r = 1, 0$ enquanto o mais raso (preto) aparece para $g_r = 0, 01$	108
Figura 34 – Retrato de fase do modelo onde o potencial tem o formato de um poço seguido de uma barreira. O parâmetro \bar{p}_T varia de 0 a 300. As linhas pontilhadas são chamadas separatrizes porque separam diferentes tipos de soluções.	109
Figura 35 – Soluções clássicas $x(\eta) \times \eta$ para os casos (a) periódico e de (b) bouncing.	110
Figura 36 – Soluções clássicas $x(\eta) \times \eta$ para os casos de (a) expansão e de uma (b) dinâmica de contração.	111
Figura 37 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_c varia para uma energia fixa $E = 8$ e tempo de simulação $t = 10$	114
Figura 38 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_Λ varia para uma energia fixa $E = 8$ e tempo de simulação $t = 10$	115
Figura 39 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_r varia para uma energia fixa $E = 1.5$ e tempo de simulação $t = 10$	116
Figura 40 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_s varia para uma energia fixa $E = 1.5$ e tempo de simulação $t = 10$	117

Figura 41 – (a)Variação de TP_{int} com o aumento da energia. (b)Variação de TP_{WKB} com o aumento da energia. (c) Comparação da evolução de TP_{int} e TP_{WKB} conforme a energia aumenta. 119

Figura 42 – Loop para obter a evolução temporal da função de onda $\Psi(x, t)$ 131

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
EHT	Event Horizon Telescope
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
HL	Hořava-Lifshitz
ADM	Arnowitt-Deser-Misner
RG	Relatividade Geral

LISTA DE SÍMBOLOS

h	Constante de Planck $h = 4.13 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
\hbar	Constante de Planck reduzida $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$
c	Velocidade da luz $c = 299,792,458 \text{ m/s}$
G	Constante de gravitação universal $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
k_B	Constante de Boltzmann $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

LISTA DE NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

Índices latinos como a, b ou i, j variam de 1 a 3

Índices gregos como α, β ou μ, ν variam de 0 a 3

Sistemas de Unidades Naturais $c = \hbar = 8\pi G = 1$

Assinatura da métrica utilizada $(- + + +)$

Convenção de soma de Einstein $a_i a_i \equiv \sum_i a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$

LISTA DE PUBLICAÇÕES

- 1 "*Tunneling probability for the birth of an universe with radiation in Horava-Lifshitz theory*", G. Oliveira-Neto, A. Oliveira Castro Junior, G. A. Monerat. arXiv:2308.07478

- 2 OLIVEIRA CASTRO JÚNIOR, A.; OLIVEIRA-NETO, G.; MONE-RAT, G. A. *Primordial dust universe in the Hořava–Lifshitz theory*. Modern Physics Letters A, v. 39, n. 23n24, p. 2450112, 2024.

SUMÁRIO

1	Introdução	18
1.1	Uma breve introdução à história da Cosmologia	18
1.1.1	Cosmologia Antiga	18
1.1.2	Cosmologia Clássica	21
1.1.3	Cosmologia Moderna	22
1.2	A importância da Cosmologia para a Ciência	26
1.3	Simulações computacionais	27
1.4	Estrutura dos Capítulos	30
2	Fundamentos Teóricos	31
2.1	Relatividade Geral	31
2.1.1	Relatividade Especial	31
2.1.1.1	Espaço-tempo de Minkowski	31
2.1.1.2	O cone de luz	32
2.1.1.3	Tempo próprio	33
2.1.2	O princípio da equivalência	34
2.1.3	Descrição métrica de um espaço curvo	37
2.1.3.1	Coordenadas Gaussianas	37
2.1.3.2	O tensor métrico e a equação da geodésica	37
2.1.3.3	Curvatura	39
2.1.4	A Relatividade Geral como uma teoria geométrica da Gravidade	43
2.2	Cosmologia Relativística	45
2.2.1	Paradoxo de Olbers e lei de Hubble	45
2.2.2	O Princípio Cosmológico	47
2.2.3	A métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	48
2.2.4	Equações de Friedmann	48
2.2.5	Evolução temporal dos modelos de Universo	51
2.2.5.1	Classificação dos modelos de Friedmann	53
2.2.6	A época inflacionária	55
2.2.6.1	O problema da planicidade	56
2.2.6.2	O problema do horizonte	57
2.2.7	A radiação cósmica de fundo em micro-ondas	58
2.3	Quantização	60
2.3.1	O Formalismo ADM	61
2.3.2	Curvaturas intrínsecas e extrínsecas	63
2.3.3	Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral	65

2.3.4	Quantização Canônica e a Equação de Wheeler-DeWitt	67
2.3.5	A interpretação de muitos mundos	69
2.3.6	A aproximação WKB	70
2.3.6.1	Tunelamento	72
2.3.7	Propostas de condições de contorno	73
2.3.7.1	A proposta <i>Sem-Fronteira</i>	74
2.3.7.2	A proposta de <i>Tunelamento</i>	75
2.4	Hořava-Lifshitz	76
2.4.1	A teoria	77
2.4.2	Construção do modelo e a ação na teoria de Hořava-Lifshitz	78
2.4.2.1	Parte Gravitacional	79
2.4.2.2	Parte da matéria	80
2.5	Parte Computacional	82
2.5.1	Método de diferenças finitas	82
2.5.2	Método de Crank-Nicolson	84
2.5.3	Algoritmo de Thomas	84
3	Probabilidade de tunelamento para o nascimento de um universo com radiação na teoria de Hořava-Lifshitz	86
3.1	Introdução	86
3.2	O modelo clássico	89
3.3	Quantização Canônica	93
3.4	Resultados	96
3.4.1	A probabilidade de tunelamento na origem	97
3.4.2	g_c	97
3.4.3	g_Λ	99
3.4.4	g_r	99
3.4.5	g_s	100
3.4.6	Energia E	101
3.5	Conclusões	102
4	Universo de poeira primordial na teoria Hořava-Lifshitz	106
4.1	Introdução	106
4.2	O modelo clássico e a transformação canônica	106
4.3	Quantização canônica	110
4.4	Resultados	112
4.4.1	Estudando o comportamento da probabilidade de tunelamento a partir da origem do fator de escala	112
4.4.2	\bar{g}_c	112
4.4.3	\bar{g}_Λ	113

4.4.4	\bar{g}_r	114
4.4.5	\bar{g}_s	116
4.4.6	Energia E	116
4.5	Conclusão	117
5	Conclusão	120
	APÊNDICE A – A ação completa na teoria de Hořava-Lifshitz	121
A.1	Parte cinética	122
A.2	Parte potencial	123
A.3	Ação Completa	127
	APÊNDICE B – Discretização da equação de Wheeler-DeWitt	129
	APÊNDICE C – Obtendo a equação de 2^o grau para o fator de escala	132
	APÊNDICE D – Obtendo as equações de Friedmann	134
	Bibliografia	138

1 Introdução

1.1 Uma breve introdução à história da Cosmologia

"O Cosmo está dentro de nós. Somos feitos de material estelar. Somos um caminho para o Cosmo conhecer a si mesmo"¹[1]. O questionamento sobre a nossa posição no Universo existe há muito tempo, sendo até mais antigo do que a própria compreensão do Universo. Muitas explicações já surgiram, muitas já caíram, mas a curiosidade e a necessidade de conhecer a nossa origem se manteve de pé por todo esse tempo. A vasta maioria dessas explicações têm origem religiosa, geralmente associada à deuses ou à acontecimentos de ordem divina que resultam no planeta Terra e tudo o que conhecemos. Apesar de existirem inúmeros mitos de criação ao redor do mundo, estes frequentemente apresentam similaridades. Muitos dos mitos de criação que buscavam explicar fenômenos naturais e a origem de tudo eram baseados em alguma forma de antropomorfismo². Isso acontece pois muitas entendiam que o mundo físico seria animado por seres com vontade própria que podem ajudar ou prejudicar a humanidade. Além disso, é comum encontrar a ideia de um criador supremo ou então a criação da ordem a partir do caos. Alguns mitos também trazem o surgimento do Universo a partir de um processo biológico, onde ele surge a partir de um ovo ou de uma semente.

1.1.1 Cosmologia Antiga

O Enûma Eliš, mito de criação babilônico, incorpora esses elementos. A composição do texto que conta o mito é datada como sendo aproximadamente do século XVIII a XVI a.C., mas ele é provavelmente baseado em versões sumérias muito mais antigas. Na sua versão da criação, o estado primordial de desordem é identificado como o mar. Do mar, emergem uma série de deuses representando as propriedades fundamentais do mundo como o céu, o horizonte, entre outros. Marduk, um desses deuses, mata Tiamat, a deusa do mar, e faz a Terra a partir do seu corpo.

Sendo citados como os inventores da astronomia, os sumérios foram uma civilização que se estabeleceu na Mesopotâmia a partir de 5000 a.C., ao sul dessa região. De início observavam os astros por motivos místicos, buscando fundamentar suas profecias. Mais tarde, por volta do primeiro milênio antes de Cristo, começaram a aplicar matemática para descrever o movimento da lua e dos planetas. Nas ruínas das cidades sumérias foram encontradas várias inscrições e textos deste povo sobre suas observações celestes. Entre estas inscrições existem listas de constelações e posicionamento de planetas no espaço,

¹ No original: "The cosmos is within us. We are made of star-stuff. We are a way for the Cosmos to know itself".

² Visão de mundo ou doutrina filosófica que, buscando a compreensão da realidade circundante, atribui características e comportamentos típicos da condição humana às formas inanimadas da natureza ou aos seres vivos irracionais.

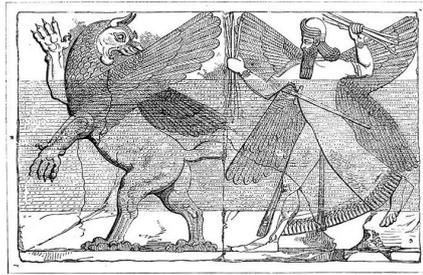


Figura 1 – Luta entre Marduk e Tiamat.

além de informações e manuais de observação. Também são atribuídos aos sumérios a invenção do sistema cuneiforme de escrita, que foi utilizado por toda a Mesopotâmia e povos vizinhos e, na arquitetura, as construções conhecidas como zigurates. Dentre todas essas contribuições culturais originadas desse povo, a descrição matemática da astronomia foi a contribuição principal para a ciência que veio da mesopotâmia.

Da mesma forma que na mesopotâmia, a astronomia na China também surge por questões religiosas. O mito de criação chinês envolvia um ser chamado Pan Ku (Chinês Tradicional: 盤古; Chinês Simplificado: 盘古). Na sua história, o cosmos começou como um ovo gigante. Pan Ku adormecia no ovo até que no momento de seu nascimento, o ovo foi estilhaçado e os pedaços mais leves e puros do ovo formaram os céus e os pedaços mais pesados e impuros formaram a Terra. Pan Ku segurava os céus enquanto mantia seus pés na Terra e, após sua morte, seu olho esquerdo se tornou o Sol e seu olho direito se tornou a Lua. Seu suor se tornou a chuva, seus pelos se tornaram a grama e seus ossos se tornaram as pedras.



Figura 2 – Pan Ku, o primeiro ser vivo e origem da existência distinta das coisas segundo a versão mais conhecida do mito da criação na mitologia chinesa.

A astronomia no Egito antigo apesar de não ser tão forte quanto na mesopotâmia, se faz presente, por exemplo, na pirâmide de Gizé, que parece ter servido como um observatório. Uma de suas galerias foi escavada em direção ao Norte, em direção à estrela Alpha Draconis (a estrela polar da época, 2000a.C.) enquanto que a outra foi escavada em direção ao Sul, com inclinação que correspondia à altura meridiana das Plêiades, cuja passagem pela fresta marcava meia-noite no início do ano.

A ciência ocidental tem suas raízes na Grécia. Os gregos tinham seus deuses e

seus mitos mas, aos poucos, eles começaram a estabelecer um sistema para a investigação científica. É na Grécia onde surge o conceito de "Cosmo", que vem do grego antigo κόσμος e significa "ordem", "organização", "beleza", "harmonia", e o método científico de sua investigação, da forma que é interpretado hoje. A identificação de causa e efeito, por exemplo, é uma herança dos Gregos que dura até hoje. Eles também perceberam que descrições e explicações de fenômenos observados podiam ser expressos matematicamente ou geometricamente, deixando de lado explicações baseadas no antropomorfismo. Seis séculos antes de Cristo, Tales de Mileto (624 a.C. - 546 a.C.) já estava convencido da curvatura da Terra e sabia que a lua era iluminada pelo sol. Pitágoras (570 a.C. - 495 a.C.) falava da esfericidade da Terra, da Lua, do Sol e da rotação da Terra, além da revolução de Mercúrio e Vênus em torno do Sol. A cosmologia emergiu como uma disciplina científica no contexto do pensamento racional construído pelos gregos, notavelmente através de Thales de Mileto e Anaximandro (610 a.C. - 546 a.C.). A própria palavra cosmologia é a junção de κόσμος com λογία, que significa "estudo de". Curiosamente, em grego, o oposto de "cosmos" é "caos". Após a dissolução dos estados gregos, a ciência encontrou um novo lar em Alexandria, onde a investigação do céu produziu muitos avanços. Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) tentou comparar as distâncias Sol-Terra e Lua-Terra, bem como os diâmetros desses corpos celestes. Em consequência disso, Aristarco foi o primeiro a adotar e ensinar o sistema heliocêntrico. Após essas descobertas de Aristarco, Eratóstenes de Cirene (276 a.C. - 194 a.C.) conseguiu medir o raio da Terra ao posicionar estacas nas cidades de Alexandria e Siena, obtendo um resultado com uma exatidão notável para a época. Os pitagóricos do século sexto a.C. tratavam números e geometria como a base de todas as coisas naturais. O advento do raciocínio matemático e a ideia de que se pode aprender sobre o mundo físico usando lógica e razão marcou o início da era científica. Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), pupilo de Platão (428/427 a.C. - 348/347 a.C.), utilizou-se dessas ideias para apresentar uma representação do mundo onde as estrelas distantes e planetas executam um movimento circular perfeito, onde os círculos eram entendidos como uma manifestação de uma geometria divina. O Universo de Aristóteles é uma esfera centralizada na Terra. Essa visão do Universo dominou a Europa ocidental por toda a idade média, mas esses movimentos circulares perfeitos não estavam de acordo com os dados que eram obtidos cada vez mais pelos babilônios e egípcios. Apesar de Aristóteles ter falado sobre a possibilidade de aprender sobre o Universo utilizando pensamento puro, bem como através de observação, o aperfeiçoamento das observações e o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas foram essenciais para se obter uma teoria do movimento planetário na época, que ganhou forma com Ptolomeu (c.100 - c.170) e sua obra chamada Almagesto que forneceu um modelo matemático do Universo que concordava com os dados disponíveis na época. No entanto, como se baseou nas observações de Hiparco (190 a.C. - 120 a.C.), que rejeitava a teoria heliocêntrica de Aristarco, Ptolomeu situou a Terra no centro do Universo em seu modelo.



TABULA
HÆC SVNT QVÆ IN ALMAGESTO SEV XIII LIBRIS CLAVDII
PTOLÆMI MATHÈMATICÆ CONSVCTIONIS HABENTVR .

LIBER PRIMVS		Cap.	Cap.
Prohemium Sive Prolegomena Prologus	1	1	1
De ordine quatuor spherarum & ordine spheræ speculationum	1	1	1
De ordine quatuor spherarum & ordine spheræ speculationum	3	1	1
Quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt	4	1	1
Quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt	5	1	1
Quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt	6	1	1
Quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt	7	1	1
Quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt & quæ spheræ sunt	8	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	9	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	10	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	11	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	12	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	13	1	1
De partibus spheræ & de partibus spheræ & de partibus spheræ	14	1	1
LIBER SECVNDVS			
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	1	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	2	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	3	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	4	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	5	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	6	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	7	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	8	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	9	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	10	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	11	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	12	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	13	11	11
De universali orbis terrarum sive qui a nobis habitatur	14	11	11
LIBER TERTIVS			
De magnitudine Anni temporis	1	14	14
De magnitudine Anni temporis	2	14	14
De magnitudine Anni temporis	3	14	14
De magnitudine Anni temporis	4	14	14
De magnitudine Anni temporis	5	14	14
De magnitudine Anni temporis	6	14	14
De magnitudine Anni temporis	7	14	14
De magnitudine Anni temporis	8	14	14
De magnitudine Anni temporis	9	14	14
De magnitudine Anni temporis	10	14	14
De magnitudine Anni temporis	11	14	14
De magnitudine Anni temporis	12	14	14

(b)

Figura 3 – (a) Representação do século 16 do modelo geocêntrico de Ptolomeu. (b) Índice de uma cópia de 1528 do Almagesto, traduzido do grego para o latim por Jorge de Trebizonda.

1.1.2 Cosmologia Clássica

Parte significativa do conhecimento que foi construído pelos gregos foi perdido para a cultura cristã durante a Idade das Trevas mas, felizmente, sobreviveu no mundo islâmico. Como resultado, o pensamento cosmológico durante a Idade Média na Europa era muito restrito. O desmonte das ideias aristotélicas costuma ser creditado ao astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), que fez uso do sistema heliocêntrico, apesar de ainda ser um adepto das ideias de órbitas circulares divinas. A base para o uso do sistema heliocêntrico veio do aproveitamento de materiais obtidos após o saque de Constantinopla pelos turcos em 1453. Ao contrário do que acontecia no Almagesto, onde havia uma fórmula matemática diferente para o movimento de cada planeta, Copérnico queria obter uma teoria universal que trataria todos os corpos celestes da mesma maneira. A derrubada do sistema geocêntrico aristotélico veio com Johannes Kepler (1571-1630), que foi o primeiro a obter resultados com maior precisão no aspecto físico-matemático do movimento planetário. Partindo das observações do astrônomo dinamarquês Tycho-Brahe (1546-1601), cuja precisão era a maior até então registrada, Kepler descobriu as leis que regem o movimento planetário ao supor uma órbita elíptica enquanto calculava a órbita de Marte. Após isso, Kepler constatou que todos os planetas movem-se em elipses, com o Sol em um dos focos, que se tornou a primeira lei de Kepler do movimento planetário. Aproximadamente na mesma época, o astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642) usou seu telescópio construído em 1609 e conseguiu observar formações montanhosas e crateras na lua, os quatro maiores satélites de Júpiter e uma primeira indicação dos anéis de

Saturno. As observações da superova de 1572 por Tycho-Brahe e da supernova de 1604 por Kepler e Galileu foram fundamentais para estabelecer uma igualdade entre a matéria terrestre e a matéria celeste, implicando que as leis que regem a mecânica terrestre também deveriam ser aplicadas à astronomia.

Com Sir Isaac Newton (1642-1727) surge uma nova era do pensamento cosmológico. Sendo amplamente reconhecido como um dos cientistas mais influentes de todos os tempos e sendo um dos principais nomes da Revolução Científica, no seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton foi capaz de mostrar que o movimento elíptico concebido por Kepler era o resultado natural de uma lei de gravitação universal. Newton pensava no Universo como uma máquina, onde os movimentos regulares seriam a manifestação da vontade de um criador e ambos espaço e tempo seriam absolutos e indicariam a existência de um Deus onipresente. Na área da ótica, Newton também inventou o telescópio refletor e desenvolveu uma teoria da cor ao observar que um prisma separa a luz branca nas cores do espectro visível. Os pensamentos de Newton dominaram o cenário científico até o começo do século XX.

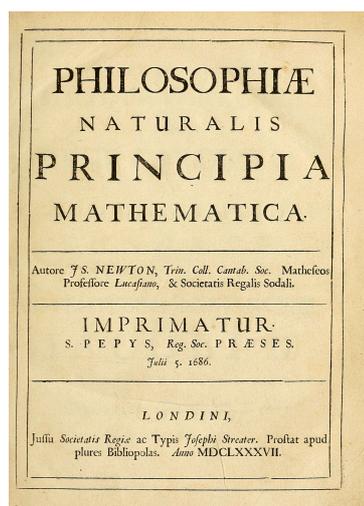


Figura 4 – Página-título da primeira edição do livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de 1687.

1.1.3 Cosmologia Moderna

A visão cosmológica de Newton já se mostrava algumas falhas quando, em 1826, Heinrich Wilhelm Olbers (1758-1840) descreveu um paradoxo ao perceber que o céu noturno é escuro. Este assunto será melhor discutido na seção 2.2.1 mas, em resumo, a escuridão observada no céu noturno é suficiente para provar que o Universo não pode ser, ao mesmo tempo, infinito e estático. Independentemente de ser ou não infinito, a parte do Universo acessível para estudo foi aumentando ao longo do tempo. O limite para Aristóteles era a órbita da lua. Para Copérnico e Kepler, o limite era a fronteira do sistema solar. Ao longo dos séculos XVIII e XIX, foi sugerido que o Universo todo consistia na estrutura que é

conhecida como Via Láctea. Graças a Edwin Hubble (1889-1953), sabe-se hoje que a Via Láctea é só uma dentre aproximadamente 2 trilhões de galáxias no universo observável e que, através da medida da velocidade com que as galáxias se afastam da Terra, sabe-se que o Universo é uma estrutura que está em expansão acelerada. A era moderna da Cosmologia teve seu início nos primeiros anos do século XX. Albert Einstein (1879-1955) introduziu a Relatividade Especial em 1905 e derrubou a concepção Newtoniana de espaço e tempo absolutos. Mais tarde, em 1915, sua teoria da Relatividade Geral veio para aprimorar e se livrar dos problemas existentes na lei da gravitação universal de Newton. Ao invés do espaço e tempo absolutos de Newton, a teoria de Einstein relacionada as propriedades da matéria e os movimentos à deformações na estrutura chamada espaço-tempo. Os primeiros grandes trabalhos em cosmologia relativística vieram de Alexander Friedmann (1888-1925), Georges Lemaître (1894-1966) e Willem de Sitter (1872-1934), que trouxeram uma nova forma de descrever matematicamente o Universo. Por fim, em 1965, Penzias e Wilson descobriram a radiação cósmica de fundo em microondas, que pode ser entendida basicamente como "restos" do Big Bang.

Apesar de seu enorme sucesso e de sua validação em testes [2, 3], a teoria da Relatividade Geral de Einstein falha precisamente no ponto de início do Universo. O Big Bang é o que se chama de singularidade: um ponto onde a matemática e o poder de previsão são totalmente perdidos. Enquanto é possível dar uma estimativa de como o Universo irá evoluir, é impossível saber a partir de primeiros princípios como o Universo era exatamente no começo de tudo. Avanços tem sido feitos tanto na parte teórica quanto na parte observacional. O telescópio Hubble lançado em 24 de abril de 1990 foi responsável por inúmeras imagens clássicas que mostram a história do cosmos acontecendo. Lançado em 25 de Dezembro de 2021, o telescópio James Webb vem como um sucessor/complemento do Hubble pois tem a finalidade de captar a radiação infravermelha. Ele pode observar a formação das primeiras galáxias e estrelas, estudar a evolução das galáxias e ver os processos de formação das estrelas e dos planetas.

No âmbito teórico, o Big Bang sofreu uma grande revisão teórica na década de 1980. Assumindo este modelo, ao fazer o caminho inverso da evolução do Universo no tempo chega-se a um ponto onde o Universo é tão pequeno que faz-se necessário o uso de uma outra abordagem da física moderna: a mecânica quântica. A junção da teoria quântica com a Relatividade Geral é um problema em aberto até hoje, apesar de muito progresso já ter sido feito. A aplicação da Mecânica Quântica à Cosmologia gerou o que hoje é conhecido pelo nome de Cosmologia Quântica. A base da Cosmologia Quântica surgiu na década de 1960 com os trabalhos de Bryce S. DeWitt, John A. Wheeler e Charles W. Misner mas ela só tomou a proporção maior na década de 1980 com os trabalhos de James B. Hartle, Stephen W. Hawking, Andrei D. Linde e Alexander Vilenkin quando estes propuseram leis com as condições iniciais para a evolução do Universo. O modelo do Big Bang consegue prever a existência de muitas coisas existentes no Universo como por exemplo a formação de



Figura 5 – (a) Porção central do Hubble Deep Field, criada a partir de exposições tiradas em 1995. (b) Esta é uma imagem composta do Observatório de Raios X Chandra da NASA, do Telescópio Espacial Hubble e do Telescópio Espacial James Webb. Na foto está o aglomerado de galáxias MACS J0416 a uma distância de cerca de 4,3 bilhões de anos-luz da Terra. Fonte: NASA

núcleos, a abundância de certos elementos e a existência da radiação cósmica de fundo em microondas. Entretanto, este modelo falha na explicação de algumas outras características. Por exemplo, o Universo conta com diversas regiões que nunca poderiam ter entrado em contato em momento algum de suas história e que devido à expansão acelerada, nenhuma informação teria tempo de chegar de um desses pontos até o outro. Isso traz um problema pois faz com que fique difícil explicar a uniformidade observada no Universo. Este é o chamado "problema do horizonte". Outra questão é o "problema da planicidade" que afirma que o Universo deveria apresentar uma curvatura, porém, observações indicam que ele aparentemente é plano. Estes problemas serão discutidos de forma mais detalhada no próximo capítulo. Um outro problema que o modelo do Big Bang não explica de maneira satisfatória é a formação de estruturas em larga escala como galáxias. Edward Harrison e Yakov B. Zel'dovich trouxeram uma explicação usando flutuações na densidade da matéria mas, como a origem dessas flutuações não é exatamente conhecida, a explicação depende muito de condições iniciais. Alan Guth propôs uma alternativa que ficou conhecida como "período inflacionário" ou "inflação" onde ele explica que o Universo passou por um período de transições de fase onde ele sofreu expansão extremamente rápida. O modelo de Guth assume que o conteúdo material do Universo consiste de partículas de campo-escalar. Acredita-se que era o tipo de matéria dominante sob condições extremas como era o começo do Universo e, de acordo com esse modelo, esse material levaria à um tipo de pressão negativa que transforma a gravidade em uma força repulsiva que provoca a inflação. Este modelo explica a origem das flutuações na densidade que posteriormente gerariam as galáxias e outras estruturas.

Apesar da teoria inflacionária ajudar a explicar alguns fenômenos, ao traçar o caminho da expansão cósmica de volta no tempo ainda encontra-se uma singularidade que é interpretada como a origem do Universo. Singularidades em si não são um artefato do modelo mas sim, consequências, descritas nos "teoremas da singularidade" por Penrose e Hawking [4]. Eles afirmam que a singularidade é um produto de qualquer modelo de Universo em expansão que é extrapolado de volta no tempo. Esses teoremas, no entanto, não dizem que uma singularidade ocorrerá fisicamente. O que acontece é o aparecimento de um ponto de densidade infinita e curvatura extremamente elevada onde a teoria deixa de ser válida. Ao traçar a história do Universo de volta, perto da singularidade, o Universo atinge dimensões consideravelmente pequenas e este é o momento onde apela-se para o uso da "teoria do pequeno", ou seja, a mecânica quântica. Na teoria quântica, desenvolvida por nomes como Niels Bohr, Erwin Schrödinger e Paul Dirac, as variáveis dinâmicas como posição e momento não possuem valores bem definidos. Toda a dinâmica do sistema está contida numa quantidade chamada função de onda. Para uma única partícula, a função de onda pode ser compreendida como um campo oscilatório se espalhando pelo espaço físico, onde em cada ponto do espaço essa função de onda possui uma amplitude e um comprimento de onda. Devido à natureza ondulatória dessa partícula, momento e posição são mutuamente exclusivos e daí surge o princípio de incerteza de Heisenberg. Essa incerteza leva ao fenômeno do tunelamento. Como no mundo quântico a posição não é bem definida mas sim espalhada numa certa região, existe uma possibilidade de se encontrar a partícula do outro lado de uma barreira. Diz-se então que a partícula "tunelou" através dessa barreira.

Essas ideias provenientes da Mecânica Quântica servem para ajudar a Cosmologia Quântica a tratar o Universo como um sistema quântico em termos de uma função de onda. Existe uma equação análoga à equação de Schrödinger na Cosmologia Quântica chamada equação de Wheeler-DeWitt. Ao resolver essa equação, obtém-se a função de onda do Universo. Apesar de suas vantagens, essa abordagem também vem com dificuldades técnicas e conceituais. Talvez a mais complicada seja em relação à interpretação dessa teoria. No desenvolvimento da Mecânica Quântica fez-se necessário uma transposição do que era dito pela matemática para a realidade física ao se realizar uma medida. Uma medida é uma interação entre o observador e o sistema. Durante essa interação, a função de onda muda de um estado inicial para um estado final. Essa mudança é feita de maneira descontínua e o termo usado para descrever essa mudança abrupta é "colapso". Diz-se que a função de onda colapsou. Essa abordagem da Mecânica Quântica é conhecida como a "interpretação de Copenhague". Ao aplicar a Mecânica Quântica no Universo como um todo surge uma dificuldade pois se o sistema é o Universo, o observador está dentro do próprio sistema. Não existe uma divisão entre observador e observado. Além disso, as previsões feitas são testadas com inúmeras medidas e, no caso da Cosmologia Quântica, o sistema só pode ser testado uma única vez. Hugh Everett III trouxe uma abordagem que

ficou conhecida como "interpretação de muitos mundos". Resumindo, Everett afirma que existe uma função de onda universal descrevendo sistema e observador sem uma divisão fundamental entre eles. Uma medida seria basicamente uma interação entre diferentes partes do Universo e a função de onda deve prever o que uma parte do sistema "vê" quando observa a outra. Não há um colapso da função de onda mas sim uma evolução suave descrita pela equação de Schrödinger para o sistema como um todo. O ato de medir faria o Universo se "dividir" em várias cópias de si para dar conta de todas as possibilidades que podem resultar da medida. Essa abordagem será melhor explicada no próximo capítulo. Essa não é a única interpretação alternativa da Mecânica Quântica. Além da interpretação de Copenhague por Niels Bohr e Werner Heisenberg e a interpretação de Muitos Mundos por Hugh Everett III há, por exemplo a interpretação de De Broglie-Bohm que também é usada em Cosmologia Quântica. Apesar de conseguir eliminar a necessidade de condições iniciais clássicas como suposições sobre a inflação ou o Big Bang, o problema agora é sobre condições iniciais quânticas: das várias soluções da equação de Wheeler-DeWitt, qual é a "correta"? Hartle e Hawking propuseram uma abordagem usando o formalismo de integrais de caminho de Feynman utilizando uma soma de histórias. Somar sobre as histórias equivale a resolver a equação de Schrödinger. Isso leva a analogia direta onde somar sobre as histórias do Universo é equivalente a resolver a equação de Wheeler-DeWitt e obter a função de onda do Universo. Essa soma sobre as histórias, entretanto, não leva em consideração somente as trajetórias clássicas. As histórias que ocorrem no tempo imaginário também são levadas em conta e como dito antes, o tempo imaginário é uma característica do processo de tunelamento, o que levanta a possibilidade do Universo ter surgido a partir de um processo de "tunelamento a partir do nada". Linde e Vilenkin trouxeram a proposta do "tunelamento". Essa abordagem procura selecionar uma solução da equação de Wheeler-DeWitt que possui propriedades que são esperadas de um processo de tunelamento. Essa proposta permite pensar mais apropriadamente em um Universo que surge do nada. As duas propostas afirmam que próximo à singularidade, a Relatividade Geral clássica não é válida e as noções de espaço e tempo se tornam inapropriadas. Da mesma forma, ambas conseguem prever condições necessárias para haver a inflação e eliminar tanto a necessidade de fazer suposições sobre o campo escalar de matéria que teria levado ao período inflacionário quanto suposições de perturbações na densidade. Assim, após a criação quântica, a função de onda atribui probabilidades para diferentes caminhos evolucionários[5, 6, 7].

1.2 A importância da Cosmologia para a Ciência

A Cosmologia é um campo cujo desenvolvimento trouxe, direta ou indiretamente, inúmeros avanços científicos e tecnológicos. Essas contribuições aparecem, por exemplo, na medicina, na computação, na ciência de materiais, nas telecomunicações e em vários outros campos do conhecimento. O telescópio que Galileu Galilei construiu em 1609 serviu

de base para o telescópio Hubble da década de 1990. A tecnologia derivada do Hubble contribuiu para inovações em dispositivos médicos que podem salvar vidas. Isso inclui tecnologia de imagem digital usada em biópsia mamária minimamente invasiva, entre outros avanços importantes [8]. O estudo e a compreensão da Relatividade Geral são cruciais para o funcionamento preciso dos sistemas GPS. Os GPS (Global Positioning System) são amplamente usados para navegação e geolocalização em veículos e smartphones, porém, correções devem ser feitas para evitar que os efeitos relativísticos afetem a exatidão dos dados que são enviados pelos satélites [9, 10]. A pesquisa em ciência de materiais também avança em conjunto com a Cosmologia. Como exemplo, no estudo de raios cósmicos investiga-se como os raios interagem com diferentes tipos de materiais [11, 12]. A tecnologia de satélites foi desenvolvida para observar o cosmos. Apesar disso, satélites se mostraram poderosos aliados para monitorar mudanças climáticas. A variação nos tamanhos das geleiras, níveis de desmatamento em determinados biomas, o monitoramento das temperaturas das superfícies terrestres e dos mares, o nível dos oceanos e medir a diferenciação nos níveis de gases de efeito estufa como o CO_2 e o metano são só alguns exemplos de aplicações dessas tecnologias. Além dessas aplicações, são essenciais para serviços de comunicações como televisão, internet e telefonia. O grande potencial para capturar imagens com a tecnologia de CCD fez com que fosse inicialmente aplicada ao estudo e observação do Universo. A tecnologia de CCD se mostrou tão revolucionária que foi prontamente integrada a outros dispositivos como, por exemplo, câmeras de vídeo, espectrógrafos, microscópios, dispositivos digitais de raios-x, mamografia e fluoroscopia na área da medicina, etc [13, 14]. Ainda hoje são utilizados nos smartphones modernos. Estes exemplos destacam como o estudo da Cosmologia não só melhora a compreensão do Universo, mas também impulsiona o progresso tecnológico e científico com amplas aplicações que beneficiam a sociedade.

1.3 Simulações computacionais

Durante quase toda a sua existência como fonte de conhecimento, a ciência era construída através de teoria e experimentação. Em meados do século XX, surge o que pode ser entendido como uma terceira vertente: a simulação. O uso de simulações remonta à Segunda Guerra Mundial com os matemáticos Jon Von Neumann e Stanislaw Ulam buscando uma alternativa para solucionar o problema do comportamento dos nêutrons já que tentativa e erro era uma opção de alto custo [15]. Uma simulação computacional é simplesmente uma maneira de reproduzir ou prever o comportamento de um sistema, utilizando-se de programas e/ou softwares prontos em computadores que possam calcular os resultados provenientes dos modelos matemáticos que são associados a esse sistema. A figura 6 mostra um excelente exemplo do poder das simulações. O que se vê na imagem foi previsto através de simulações que, graças aos modelos matemáticos, foram capazes de mostrar com precisão o que poderia ser esperado da observação realizada pelo EHT do

buraco negro da galáxia Messier 87 [16].

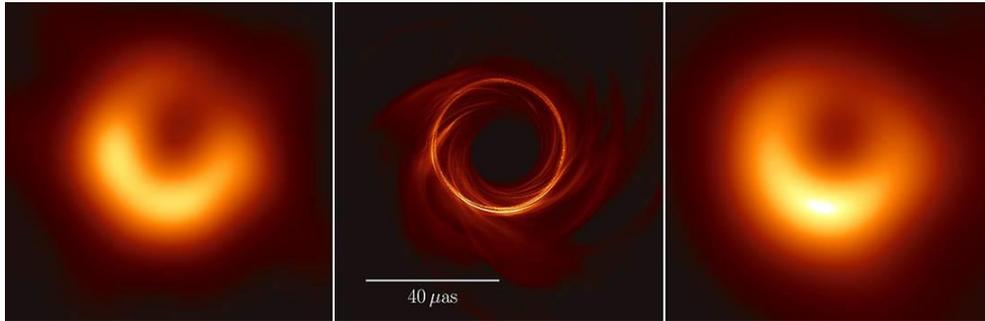


Figura 6 – Da esquerda para a direita, observações EHT do M87* realizadas em 6 de Abril de 2017; uma simulação do M87*; simulação embaçada para coincidir com a resolução do Event Horizon Telescope. Fonte: <https://physicsworld.com/a/first-images-of-a-black-hole-unveiled-by-astronomers-in-landmark-discovery/>

O buraco negro é somente um exemplo de uso de simulações. Elas são benéficas em inúmeras situações e áreas. É possível realizar simulações de sistemas elétricos/hidráulicos para engenharia, simulações de dinâmicas populacionais [17] que verificam evolução de opiniões, sobrevivência de espécies, simulações de dinâmica molecular [18], etc.

Mas, em que situações deve-se buscar o apoio de simulações computacionais? Abaixo são dados dois exemplos de situações onde esse suporte pode ser bastante conveniente:

- Obtenção de dados que não poderiam ser obtidos ou que seriam extremamente difíceis de se conseguir experimentalmente. Em Setembro de 2019, pesquisadores da Universidade de Oxford e membros da IBM publicaram um estudo que mostra, pela primeira vez, a sintetização um alótropo molecular do carbono, chamado de ciclocarbono [19, 20]. É possível que seja muito difícil obter experimentalmente alguma propriedade X ou Y dessa estrutura. Numa situação onde isso ocorre simulações podem ser um excelente caminho para obter as propriedades desejadas.
- Experimentação de baixo custo e baixo risco. Um computador potente provavelmente será mais barato que equipamentos de ponta para um laboratório. Então, realizar a simulação de um sistema será mais barato e talvez mais rápido que realizar uma análise experimental. Ainda existe o fato de não existir perigo real para os pesquisadores, visto que existem equipamentos e materiais de alta periculosidade e que podem causar acidentes.

Os argumentos apresentados mostram que as simulações são, de fato, um grande recurso e que são extremamente úteis. Algumas das vantagens que o uso de simulações traz são

1. Analisar o "e se?"

Tendo em mãos um modelo correto e adequado, o usuário pode "brincar" com o

sistema, fazendo modificações e colocando-o em determinadas situações que talvez nem fossem possíveis experimentalmente naquele momento — se o usuário tiver em mãos um modelo muito bom do sistema solar, pode verificar o que aconteceria ao substituir o Sol por um buraco negro de mesma massa, ou de massa menor, por exemplo — acabando por, algumas vezes, descobrir comportamentos inesperados do sistema.

2. Não-necessidade de repetição (dependendo da simulação)

Uma vez que a simulação é finalizada, os resultados estão prontos para serem usados e analisados. Isso contrasta com a necessidade experimental de realizar diversas medidas com objetivo de conseguir um resultado mais sólido baseado na média das várias medidas.

3. Condições críticas

Simulações também são excelentes para testar o sistema em condições críticas sem nenhum risco. Isso pode ajudar o usuário a descobrir as melhores condições para se obter o melhor resultado possível.

4. Estudar um sistema sem tê-lo em mãos

A simulação torna possível que se estude um sistema sem construí-lo de fato. Isso ajuda a salvar tempo e dinheiro construindo os sistemas que, por vezes, podem acabar nem sendo úteis. Então, simulações são bastante eficazes para fins de testar sistemas.

Vê-se, então, que as simulações são um grande artifício para se fazer ciência. São extremamente úteis, podem ser extremamente baratas de se fazer, não oferecem riscos à saúde ou integridade física do usuário e podem fornecer resultados que seriam extremamente difíceis de serem obtidos experimentalmente. No entanto, existem algumas desvantagens ou dificuldades de se trabalhar com simulações computacionais. Algumas dessas dificuldades que surgem são, por exemplo

1. Tempo de aprendizado

Caso o usuário não tenha conhecimentos de programação ou de um determinado software que será necessário para executar as simulações, será necessário um bom tempo para que o usuário aprenda o que é necessário para adquirir uma certa independência para realizar as simulações.

2. Recurso computacional

É necessário que o usuário tenha recursos para tal: um bom computador é essencial e pode ser decisivo na hora de realizar as simulações. Entretanto, pode acabar exigindo muito, financeiramente, do usuário.

3. Mão de obra qualificada

É necessário que quem for realizar as simulações seja alguém com bom conhecimento sobre o sistema a ser estudado e com bom conhecimento de programação ou do software utilizado, para que saiba identificar possíveis erros no código ou nos parâmetros utilizados na simulação.

1.4 Estrutura dos Capítulos

No capítulo 2 encontra-se de maneira sucinta a base teórica necessária para compreensão deste trabalho. Começando pela Relatividade Especial, passando por temas da Relatividade Geral, pela teoria de Hořava-Lifshitz e finalizando com a parte computacional. O capítulo 3 conta com o estudo de um modelo cosmológico cujo conteúdo material é radiação. No momento, este artigo já foi submetido para publicação mas pode ser acessado em <https://arxiv.org/pdf/2308.07478> [21]. No capítulo 4 é apresentado um outro modelo cosmológico cujo conteúdo material é poeira. O artigo referente a este modelo foi aprovado para publicação mas, no momento, pode ser acessado em <https://arxiv.org/pdf/2403.05667> [22]. O capítulo 5 conta com as conclusões e considerações finais a respeito do trabalho. O Apêndice A tem como objetivo mostrar de forma mais detalhada como se chega na ação utilizada nos dois artigos que são apresentados nos capítulos 3 e 4. O Apêndice B mostra como funciona a discretização da equação de Wheeler-DeWitt para que possa ser trabalhada computacionalmente. O Apêndice C contém um passo-a-passo de como obter a equação diferencial que fornece as soluções clássicas para o fator de escala. O apêndice D mostra como obter as equações de Friedmann que são importantes tanto no desenvolvimento do trabalho como para interpretação dos resultados clássicos do fator de escala.

2 Fundamentos Teóricos

2.1 Relatividade Geral

2.1.1 Relatividade Especial

2.1.1.1 Espaço-tempo de Minkowski

A Relatividade Especial substitui a representação de Sir Isaac Newton, na qual o tempo absoluto e o espaço euclidiano tridimensional eram entidades separadas. Como os resultados das medições de tempo e espaço podem diferir para diferentes observadores, o tempo na Relatividade Especial não é mais absoluto e deve ser tratado como uma coordenada da mesma forma que as coordenadas espaciais. A unificação do espaço e do tempo é feita usando ambos como coordenadas de um contínuo quadridimensional denominado espaço-tempo. Um evento neste espaço-tempo tem coordenadas (t, x, y, z) . O espaço-tempo quadridimensional de Minkowski tem coordenadas x^μ dadas por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z). \quad (2.1)$$

A quantidade ds é o intervalo infinitesimal entre eventos separados infinitesimalmente. Portanto, será introduzido o elemento de linha de Minkowski que tem a forma

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.2)$$

e deve ser invariante neste espaço-tempo. Para construir um sistema de coordenadas para este espaço-tempo de Minkowski quadridimensional é necessário definir quatro vetores de base, digamos, \mathbf{e}_μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Cada \mathbf{e}_μ é um vetor quadridimensional para algum valor definido de μ . É fundamental notar que, diferentemente do sistema de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano, este conjunto pode não ser ortonormal, ou seja, $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \neq \delta_{\mu\nu}$ ¹. Este grupo de produtos escalares entre os vetores de base pode ser escrito na forma de uma matriz simétrica, que é chamada de métrica ou tensor métrico:

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \equiv g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Para um espaço euclidiano com coordenadas cartesianas tem-se que $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Escrevendo a equação (2.2) na forma tensorial,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

¹ $\delta_{\mu\nu}$ é conhecido como delta de Kronecker.

tem-se a quantidade $\eta_{\mu\nu}$ é chamada de métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.5)$$

Qualquer vetor quadridimensional pode ser escrito em termos dos vetores de base como

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \equiv A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}, \quad (2.6)$$

onde a convenção de soma de Einstein foi usada e será ao longo do presente trabalho. Esta abordagem torna possível escrever o produto escalar entre dois vetores como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}) \cdot (B^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}) = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}. \quad (2.7)$$

Para outros sistemas de coordenadas gerais, deve-se o elemento de linha como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.8)$$

Este espaço-tempo também é conhecido como espaço-tempo plano porque é definido como uma variedade quadridimensional dotada de uma métrica plana de assinatura -2 . É chamado de plano devido a um teorema que afirma que a condição necessária e suficiente para uma métrica ser plana é que seu tensor de Riemann se anule. Nas coordenadas de Minkowski, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ possui apenas elementos constantes. Isso implica que a conexão $\Gamma_{\nu\varphi}^{\mu}$ desaparece neste sistema de coordenadas, levando a um tensor de curvatura de Riemann nulo[23, 24].

2.1.1.2 O cone de luz

As coordenadas de espaço e tempo são simplesmente rótulos dados ao local onde um evento acontece. Portanto, é conveniente introduzir o que chamamos de diagrama espaço-tempo. Este diagrama retrata a estrutura causal do espaço e do tempo. É um gráfico bidimensional onde um eixo representa o tempo enquanto o outro é escolhido para representar todo o espaço tridimensional. Um evento P com coordenadas (t, x, y, z) é expresso por um ponto-de-mundo no diagrama do espaço-tempo. Um conjunto de ponto-de-mundo sucessivos, a história dos eventos, é chamado de linha-de-mundo. Isso é retratado na figura 7a.

O espaço-tempo de Minkowski pode ser dividido em três regiões. Um sinal luminoso $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0$ é representado por uma linha-de-mundo reta em um ângulo de 45° em relação aos eixos. Se $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} > 0$, ele está na região do tempo e se $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} < 0$ está na região espacial. Resumidamente,

- **tipo-tempo** se $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu > 0$,
- **tipo-espaço** se $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu < 0$,
- **nulo** ou **tipo-luz** se $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$.

A região tipo-luz corresponde a eventos conectados por sinais luminosos. Eles estão conectados à origem com uma separação de $ds^2 = 0$. Isto delinea a área onde o cone de luz é estabelecido, conforme representado na Figura 7b. A região tipo-espaço é onde os eventos estão conectados à origem com separação $ds^2 < 0$. Esta zona requer que o sinal viaje a uma velocidade superior a c para conectar um evento à origem. Um evento que acontece nesta região não pode ser influenciado causalmente por um evento na origem. A região tipo-tempo contém todos os eventos conectados à origem com separação $ds^2 > 0$. Eles podem estar causalmente conectados à origem. Todas as linhas-de-mundo que passam pela origem ficarão confinadas a esta região, situada dentro do cone de luz.

É importante destacar que cada ponto de um diagrama de espaço-tempo está associado ao seu cone de luz. As regiões temporais de pontos-de-mundo individuais são exibidas na Figura 7c. Assim, considerando um grupo de cones de luz cujos vértices estão localizados ao longo de uma linha-de-mundo, o próximo ficará dentro do cone de luz anterior. Isso significa que qualquer partícula só pode ir na direção do tempo cada vez maior[25, 26].

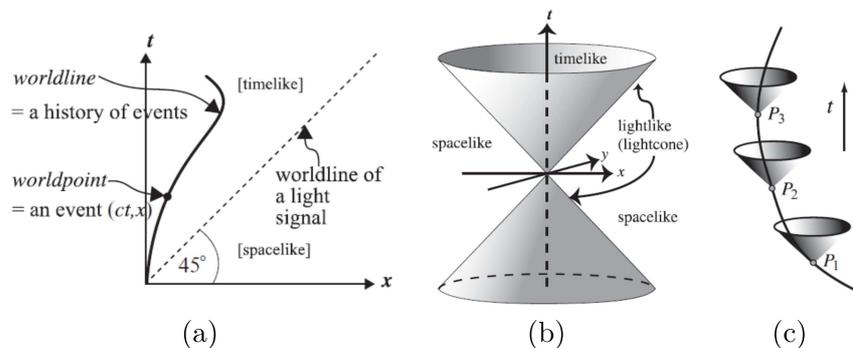


Figura 7 – Figura 7a: Elementos básicos de um diagrama de espaço-tempo. Figura 7b: Regiões do diagrama do espaço-tempo mostrando o cone de luz. Figura 7c: Cones de luz em relação a diferentes pontos-de-mundo ao longo de uma linha-de-mundo tipo-tempo. Fonte: Ta-Pei Cheng - Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction.

2.1.1.3 Tempo próprio

Uma linha-de-mundo tipo-tempo, ou curva tipo-tempo, é estabelecida como tendo um vetor tangente tipo-tempo garantido em todos os lugares. Curvas tipo-tempo representam caminhos possíveis para partículas ou observadores viajarem. Conforme discutido na subseção 2.1.1.2, considerando um ponto aleatório P situado em uma curva tipo-tempo,

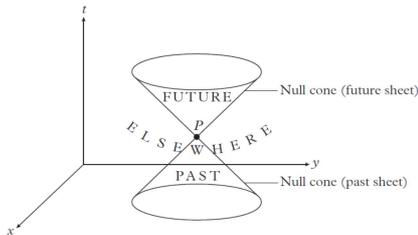


Figura 8 – Divisão do espaço-tempo em três regiões diferentes. Fonte: Ray D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*.

seu vetor velocidade deve estar dentro do cone de luz que emana de P . Este é o resultado da constatação da Relatividade Especial de que as partículas materiais nunca devem atingir a velocidade da luz.

É possível definir um cone de luz em qualquer ponto P . Este cone de luz divide o espaço-tempo em três regiões: futuro, passado e outro lugar, como pode ser visto na Figura 8. Qualquer ponto no passado ou no futuro pode ser alcançado por uma geodésica tipo-tempo. Por outro lado, seria necessária uma geodésica espacial para alcançar pontos em outra região, fora do cone de luz. Esta divisão de acontecimentos é invariável e todos os observadores podem concordar com ela. Isso ocorre devido à invariância de $\eta_{\mu\nu}$ sob uma transformação de Lorentz.

Como $\Gamma_{\beta\varphi}^{\alpha}$ desaparece no sistema de coordenadas de Minkowski, as equações para uma geodésica não nula se reduzem a

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} = 0, \quad (2.9)$$

para algum parâmetro afim λ , onde o vetor tangente satisfaz

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = k. \quad (2.10)$$

A geodésica será tipo-tempo ou tipo-espaço, dependendo se $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente. Tomando $k > 0$, introduz-se $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\lambda)$ que satisfaz

$$\left(\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} \right)^2 = k. \quad (2.11)$$

Este novo parâmetro é chamado tempo próprio e é denotado por τ . Em unidades relativísticas, satisfaz

$$d\tau^2 = ds^2, \quad (2.12)$$

mostrando que o tempo próprio τ é um parâmetro afim ao longo de geodésicas tipo-tempo[27].

2.1.2 O princípio da equivalência

O próximo conceito que precisamos compreender decorre do conhecimento empírico. Einstein chamou isso de *Princípio de Equivalência de Gravitação e Inércia*. Historicamente,

este princípio é o ponto de partida de muitas descobertas que levaram Einstein à teoria geométrica da gravidade.

Uma partícula de teste gravitacional é definida como algo que experimenta um campo gravitacional, mas não muda nem contribui para o campo. Uma das características mais peculiares do campo gravitacional é que sua equação de movimento é totalmente independente das propriedades do material da partícula de teste. Matematicamente, isso acontece devido ao cancelamento dos fatores inercial e gravitacional da massa. Portanto, a afirmação de que o movimento da partícula de teste gravitacional em um campo gravitacional é independente de sua massa e composição é conhecida como a forma forte do princípio de equivalência. A Relatividade Geral é baseada neste princípio. Em seguida, deve-se lembrar que a matéria responde e é uma fonte de um campo gravitacional. Por outro lado, a Relatividade Especial nos diz que matéria e energia são equivalentes. Isto significa que esta alegação sobre o campo gravitacional também se aplica à energia. Este resultado é incorporado a uma afirmação conhecida como forma fraca do princípio da equivalência: O campo gravitacional está acoplado a tudo. Isto é muito interessante porque implica que nenhum corpo pode ser protegido de um campo gravitacional. No entanto, é possível eliminar os efeitos gravitacionais, localmente, da teoria e recuperar a Relatividade Especial. Esses efeitos são mascarados quando se considera um referencial que está em queda livre, co-movendo-se com a partícula de teste gravitacional em estudo. Em particular, se este referencial for não rotativo, o conceito de referencial inercial é recuperado localmente. Aqui, "localmente" deve ser entendido como significando que as observações são realizadas numa região com uma variação insignificante do campo gravitacional. Conseqüentemente, não existem experimentos locais que possam identificar ou dizer a diferença entre a queda livre não rotativa em um campo gravitacional e o movimento uniforme no espaço na falta de um campo gravitacional. A teoria Newtoniana diz que todas as forças inerciais são proporcionais à massa do corpo que é afetado por elas. A gravitação se comporta dessa maneira. Se deixarmos cair dois corpos no campo gravitacional da Terra, eles experimentarão forças dadas por m_1g e m_2g . Isso fez Einstein perceber que os dois efeitos deveriam vir da mesma origem. Ele então sugeriu que a gravitação também pode ser tratada como um efeito inercial: é um efeito proveniente da escolha de um referencial não inercial. Einstein então teve a ideia de que o efeito sobre o corpo pode ser atribuído a uma característica do espaço-tempo: a gravidade nada mais é do que a estrutura de um espaço-tempo curvado. Esta equivalência de um referencial acelerado com aquele da gravidade significa que não se deve dizer que a gravidade acelera a partícula. Em vez de considerar a gravidade como uma força, deve-se entender que uma partícula de teste ou corpo de teste se move livremente no espaço-tempo com a gravidade. A questão é que um movimento não trivial ocorre devido à estrutura do espaço-tempo ser deformada pela gravidade. O formato do espaço-tempo é uma resposta à matéria presente. Este princípio fica claro pelo experimento mental de Einstein conhecido como o experimento do elevador.

Consideremos um cientista, que será o observador, trancado num elevador, sem qualquer informação sobre o mundo exterior. Com ele há equipamentos para realizar experimentos dinâmicos simples. A figura 9 mostra os quatro cenários considerados.

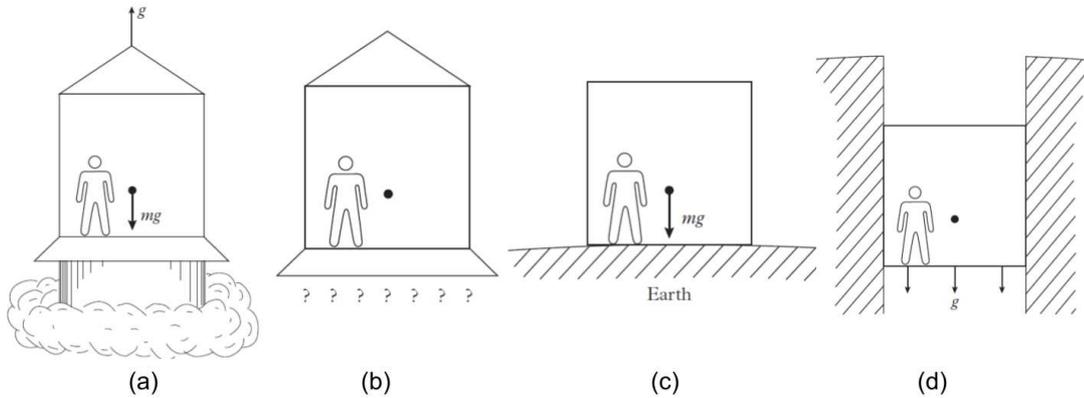


Figura 9 – Experimento mental do elevador de Einstein. Fonte: Ray D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*.

- O cenário retratado na figura 9(a) mostra a sustentação sendo colocada de alguma forma em um foguete em alguma parte do Universo, longe dos corpos gravitantes. Este foguete é então acelerado com aceleração constante g em relação a um referencial inercial. O cientista solta um objeto do repouso e o vê cair no chão com aceleração g .
- O cenário retratado na figura 9(b) mostra o motor do foguete sendo desligado. O elevador está agora realizando um movimento uniforme em relação a um observador inercial. O cientista então libera um objeto. O objeto permanece em repouso em relação ao observador.
- O cenário retratado na figura 9(c) mostra a sustentação colocada na superfície da Terra. Ignorando a rotação e os movimentos orbitais da Terra, se um corpo for solto ele cairá no chão com aceleração g .
- O cenário retratado na figura 9(d) mostra o elevador colocado em um poço de elevador em queda livre. Nesta situação, um objeto liberado permanece em repouso em relação ao cientista.

O objetivo do experimento é mostrar que o cientista não consegue distinguir entre os cenários (a) e (c) ou (b) e (d).

No contexto da Relatividade Especial, usando as coordenadas de Minkowski em um referencial inercial, a equação de movimento para uma partícula de teste é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (2.13)$$

Usar um referencial não inercial implica em uma forma mais geral desta equação:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\varphi}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\varphi}{d\tau} = 0, \quad (2.14)$$

com $\Gamma_{\nu\varphi}^\mu$ sendo a conexão métrica de $g_{\mu\nu}$, que ainda é uma métrica plana, mas não a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Os termos adicionais com $\Gamma_{\nu\varphi}^\mu$ são na verdade os termos de força inercial. Portanto, o Princípio da Equivalência exige que as forças gravitacionais, bem como as forças inerciais, tenham o $\Gamma_{\nu\varphi}^\mu$ correto. A suposição mais simples é manter $\Gamma_{\nu\varphi}^\mu$ como a conexão métrica, mas desta vez ela se conecta a uma métrica não plana, implicando em um espaço-tempo distorcido. Além disso, se reconhecermos $\Gamma_{\nu\varphi}^\mu$ como termos de força, então $g_{\mu\nu}$ deve ser tratado como potenciais [28, 29].

2.1.3 Descrição métrica de um espaço curvo

2.1.3.1 Coordenadas Gaussianas

As coordenadas são apenas uma forma eficiente de rotular pontos no espaço. Para o caso de uma superfície curva, um vetor de posição x^a possui duas componentes independentes ($a = 1, 2$). Visando casos de dimensões superiores, esse número de componentes independentes crescerá: por exemplo, o espaço-tempo 4D mostra um vetor de posição x^μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Normalmente, quando se pensa em superfícies curvas, isso é imaginado em termos de sua inserção no espaço euclidiano tridimensional. No entanto, esta é uma descrição geométrica extrínseca, o que significa que o espaço físico analisado, a superfície curva, é descrito através de entidades fora deste espaço. Uma caracterização de algum espaço usando apenas seus componentes, sem invocar qualquer incorporação, é chamada de descrição geométrica intrínseca. Para o caso de uma superfície 2D, é como se as medições fossem feitas por um observador que não pode sair da superfície. Nesta situação, tendo coordenadas (x^1, x^2) , utilizando o que se chama de parametrização, introduzida por Gauss, tem-se

$$x = x(x^1, x^2), \quad y = y(x^1, x^2), \quad z = z(x^1, x^2). \quad (2.15)$$

Essas coordenadas generalizadas (x^1, x^2) são chamadas de coordenadas gaussianas. O número de coordenadas gaussianas corresponde à dimensionalidade do espaço. Usá-los torna a descrição geométrica puramente intrínseca[30].

2.1.3.2 O tensor métrico e a equação da geodésica

O ponto principal da geometria diferencial era mostrar que é possível descrever um espaço com medições feitas dentro dos limites deste espaço físico. Agora, suponha que um observador decida rotular os pontos do espaço usando um sistema de coordenadas gaussianas e depois medir a distância entre os pontos vizinhos. A “tabela de distâncias”

obtida por este observador descreve o espaço. Dado algum sistema de coordenadas, essas medidas são criptografadas na métrica. A métrica $g_{\mu\nu}$ fornece as medidas de distância infinitesimais ds entre dois pontos vizinhos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ através da equação (2.8). Portanto, a métrica $g_{\mu\nu}$ é uma quantidade geométrica intrínseca: pode ser determinada sem qualquer referência a qualquer superfície embebida em um meio de dimensionalidade maior. Um observador deitado na superfície curva pode obter $g_{\mu\nu}$ uma vez que as coordenadas gaussianas $\{dx^\mu\}$ tenham sido escolhidas. Ele só precisa medir vários ds entre dx^μ e dx^ν . Também vale a pena definir a assinatura da métrica em algum momento P . Como a métrica pode ser escrita como uma matriz, definimos a assinatura como o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos. Se todos os autovalores de uma métrica forem positivos, ela é chamada de métrica Riemanniana. Uma variedade equipada com este tipo de métrica é chamada de variedade Riemanniana. Pode-se escrever o comprimento de um vetor contravariante U^μ usando a métrica:

$$U^2 = g_{\mu\nu}(x)U^\mu U^\nu. \quad (2.16)$$

Uma métrica é dita positiva definida se, para todos os vetores diferentes de zero U , obtém-se que $U^2 > 0$. Esta é basicamente a definição de uma métrica Riemanniana. Agora, na Relatividade, começa-se a trabalhar com métricas contendo um autovalor positivo e três negativos. Isso significa que a assinatura desta métrica é -2 . Este tipo de métrica é chamada de Lorentziana. Ter autovalores com sinais diferentes torna possível encontrar vetores diferentes de zero tais que

$$g_{\mu\nu}(x)U^\mu U^\nu = 0. \quad (2.17)$$

Esses vetores são chamados de vetores nulos. São precisamente eles que formam os cones de luz descritos em (2.1.1.2) em um ponto P . Além disso, como uma métrica satisfaz $g = \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ em todos os pontos, é possível definir a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ através

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\varphi} = \delta_\mu^\varphi. \quad (2.18)$$

Uma curva tipo-tempo γ é uma curva que possui um vetor tangente semelhante ao tempo. Supondo que esta curva tenha a equação paramétrica $x^\mu = x^\mu(u)$, se dividirmos a equação (2.8) por du^2 obtemos

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}. \quad (2.19)$$

Assim, o intervalo s entre dois pontos P_1 e P_2 em γ é

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{du} du = \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} \right)^{1/2} du. \quad (2.20)$$

Com isso, é possível definir uma geodésica métrica tipo-tempo entre os pontos P_1 e P_2 como a curva privilegiada que os une cujo intervalo é invariante sob pequenas variações

que desaparecem nos pontos finais. O intervalo pode ser máximo, mínimo ou um ponto de sela. As equações de Euler-Lagrange resultam em

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \{\nu\sigma, \mu\} \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\sigma}{du} = \left(\frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{du}, \quad (2.21)$$

onde as quantidades $\{\nu\sigma, \mu\}$ são chamadas de símbolos de Christoffel do primeiro tipo. Multiplicando esta equação por $g^{\mu\varphi}$ obtém-se

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\sigma}{du} = \left(\frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) \frac{dx^\mu}{du}, \quad (2.22)$$

com $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = g^{\mu\varphi} \{\nu\sigma, \varphi\}$ sendo chamados de símbolos de Christoffel do segundo tipo. No caso o parâmetro u está linearmente relacionado ao intervalo s como

$$u = As + B, \quad (2.23)$$

com A e B sendo constantes, então o lado direito da equação (2.22) desaparece. Se tivermos o caso especial onde $u = s$, as equações para uma geodésica métrica são dadas justamente pela equação (2.14), bastando trocar τ por u . Além das mudanças de sinal, resultados semelhantes se aplicam a geodésicas tipo-espaço e até mesmo a geodésicas nulas nas quais a distância entre dois pontos é zero[31, 32].

2.1.3.3 Curvatura

Como a métrica pode ser adaptada localmente para descrever um espaço plano, ela não pode expressar a essência de um espaço curvo. A segunda derivada da métrica é o que realmente diz o quão curvo é um espaço. Sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas com uma métrica independente de posição para um espaço plano. Isto não é verdade para um espaço curvo, o que significa que este é um método inadequado para determinar se uma superfície é curva ou não.

Gauss mostrou que era possível definir uma quantidade invariante única dada pela segunda derivada do tensor métrico, que é chamada de curvatura K . A curvatura é $K = 0$ para superfícies planas e $K \neq 0$ para superfícies curvas, independentemente da escolha da coordenada. Sem perda de generalidade, o resultado de Gauss para uma métrica diagonalizada $g_{ab} = \text{diag}(g_{11}, g_{22})$ foi

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2g_{22}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Este resultado mostra que a curvatura é expressa apenas em termos da métrica e suas derivadas. Assim, pode-se ver que a curvatura também é um objeto geométrico intrínseco.

A curvatura K , então, mede o quanto uma superfície é curvada e isso está instantaneamente conectado à violação das relações euclidianas. Numa superfície plana, as relações geométricas euclidianas são válidas. A circunferência de um círculo com raio r é dada por $S = 2\pi r$. No entanto, isto não é necessariamente verdade numa superfície curva. O valor de S será diferente do valor da superfície plana em um valor proporcional à curvatura gaussiana K . Para uma superfície curva 2D, uma quantidade chamada excesso angular ϵ de um polígono infinitesimal é proporcional à curvatura gaussiana K neste local:

$$\epsilon = K\sigma, \quad (2.25)$$

onde σ é a área do polígono em estudo. O excesso angular na equação (2.25) deve ser generalizado para um espaço curvo n -dimensional. É preciso recordar o conceito de transporte paralelo. O excesso angular ϵ está associado à mudança de direção do vetor após um transporte paralelo ao longo do perímetro do polígono. A figura 10 mostra o exemplo de um transporte paralelo em torno de um triângulo em uma superfície esférica. Após o transporte paralelo, o vetor muda de direção em 90° , que é o excesso angular deste triângulo.

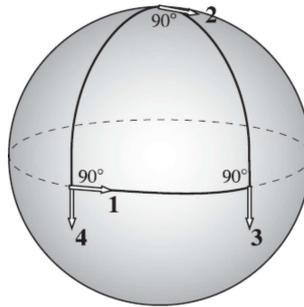


Figura 10 – O transporte paralelo de um vetor em torno de um triângulo em uma superfície esférica. Fonte: Ta-Pei Cheng - *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*.

A definição de um ângulo é a razão entre o comprimento do arco e o raio, conforme mostrado na Figura 11(a). Assim, a mudança angular direcional, denotada por $d\theta$, pode ser escrita como a razão entre a mudança de um vetor e sua magnitude $(dA)/A$. Portanto, o excesso angular ϵ pode estar relacionado à mudança de um vetor após ser transportado com $\epsilon A = dA$. Usando isso na equação (2.25) produz

$$dA = KA\sigma. \quad (2.26)$$

Conseqüentemente, a mudança de um vetor após o transporte paralelo é proporcional ao próprio vetor e à área do caminho fechado. A curvatura K atua como um coeficiente de proporcionalidade.

A equação (2.26) é o ponto de partida para rastrear a curvatura para o caso de espaço curvo de dimensão superior. Como esta equação é escrita para uma superfície 2D, é

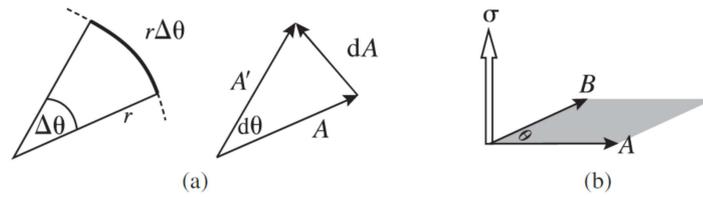


Figura 11 – (a) A mudança na direção de um vetor pode ser expressa como uma mudança fracionária do vetor através de $d\theta = (dA)/A$. (b) A área do paralelogramo é dada por $\vec{\sigma} = \vec{A} \times \vec{B}$. Fonte: Ta-Pei Cheng - *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*.

necessário escrevê-la na forma de índice para generalizá-la para o espaço n -dimensional. A área 2D gerada por dois vetores \vec{a} e \vec{b} pode ser calculada como um produto vetorial, ou seja, $\vec{\sigma} = \vec{a} \times \vec{b}$. Usando o símbolo Levi-Civita, isso é escrito como

$$\sigma_k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j. \quad (2.27)$$

No entanto, a equação (2.27) ainda se refere ao espaço de incorporação, uma vez que tem um índice de 3 valores $i = 1, 2, 3$, embora o paralelogramo resida em um espaço bidimensional descrito por, digamos, $i = 1, 2$. O número de índices do Levi-Civita cresce para dimensões superiores. Portanto, é uma escolha melhor usar um objeto de dois índices denotado por σ^{ij} para representar a área:

$$\sigma^{ij} \equiv \varepsilon^{ijk} \sigma_k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a^m b^n = (a^i b^j - a^j b^i). \quad (2.28)$$

Esta equação pode ser escrita usando apenas os índices bidimensionais $i = 1, 2$ sem qualquer referência ao espaço de incorporação, tornando o índice $i = 3$ desnecessário. Fazendo a transição para o espaço n -dimensional, a área estendida será representada por a^λ e b^ρ através

$$\sigma^{\lambda\rho} = a^\lambda b^\rho - a^\rho b^\lambda, \quad (2.29)$$

com os índices com valores $\lambda, \rho = 1, 2, \dots, n$.

Com a área escrita na forma de equação (2.29), valerá a pena utilizá-la na equação (2.25). Assim, a mudança dA^μ de um vetor após um transporte paralelo sobre um paralelogramo produzido por dois vetores a^λ e b^ρ é

$$dA^\mu = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} A^\nu a^\lambda b^\rho. \quad (2.30)$$

A mudança é proporcional ao próprio vetor A^μ e aos dois vetores, a^λ e b^ρ , que geram o paralelogramo. O tensor $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ está atuando como um coeficiente de proporcionalidade. Este tensor será tomado como a definição da curvatura e é conhecido como tensor de curvatura de Riemann. É definido como

$$R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \Gamma^\nu{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha}. \quad (2.31)$$

Onde a conexão $\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}$ é dada por

$$\Gamma^\mu_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} (\partial_\lambda g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\lambda} - \partial_\beta g_{\lambda\alpha}). \quad (2.32)$$

Tudo isso mostra que $R^\mu_{\lambda\alpha\beta}$ depende da métrica e de sua primeira e segunda derivadas. Este tensor possui propriedades interessantes. Tomando o tensor de Riemann com todos os índices reduzidos, $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\mu\lambda}R^\lambda_{\nu\alpha\beta}$, ele

- é antisimétrico em relação à troca do primeiro/terceiro e segundo/quarto índices:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (2.33)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (2.34)$$

- é simétrico em relação à troca de todo o par formado pelo primeiro e segundo índices com o par formado pelo terceiro e quarto índices:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.35)$$

- tem o que é chamado de simetria cíclica:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \quad (2.36)$$

Estas simetrias reduzem o número de componentes independentes do tensor de Riemann. Para o caso de um espaço n -dimensional este número é

$$N_{(n)} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \quad (2.37)$$

Por exemplo, para $n = 1$, que é uma linha, $N_{(1)} = 0$. Isto significa que um habitante unidimensional não pode ver nenhuma curvatura. Para o espaço-tempo quadridimensional, existem $N_{(4)} = 20$ componentes independentes no tensor de curvatura. Além dessas simetrias, o tensor de curvatura também satisfaz um conjunto de identidades diferenciais:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0, \quad (2.38)$$

onde $\nabla_\lambda X^\mu = X^\mu_{;\lambda} = X^\mu_{||\lambda} = \partial_\lambda X^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} X^\nu$ é a derivada covariante de X^μ . A equação (2.38) mostra o que é conhecido como identidades de Bianchi. Outra característica do tensor de Riemann é que ele está intimamente relacionado com a planicidade métrica: uma condição necessária e suficiente para uma métrica ser plana é que seu tensor de Riemann desapareça. Ou seja, $R^\mu_{\lambda\alpha\beta} = 0$ implica um espaço plano.

O tensor de Riemann pode ser ajustado para gerar alguns tensores importantes. O primeiro é conhecido como tensor de Ricci, que aparece após uma contração:

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\beta_{\mu\beta\nu}, \quad (2.39)$$

que é um tensor simétrico: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Uma segunda contração revela uma quantidade chamada escalar de Ricci:

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\beta_\beta. \quad (2.40)$$

Esses dois tensores são usados para definir um terceiro chamado tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.41)$$

que também é simétrico e satisfaz as identidades de Bianchi contraídas[33, 34, 35]

$$\nabla_\nu G_\mu{}^\nu = 0. \quad (2.42)$$

2.1.4 A Relatividade Geral como uma teoria geométrica da Gravidade

Quando se diz que um fenômeno físico tem uma teoria geométrica ou uma descrição geométrica, significa basicamente que os resultados da medição física se devem puramente à geometria fundamental do espaço e do tempo. A teoria geral da relatividade de Einstein é uma teoria geométrica da gravidade. Isto significa que todos os fenômenos gravitacionais são simplesmente uma consequência da geometria curva do espaço-tempo. O intervalo ds , que é invariante sob transformações de coordenadas, está conectado às coordenadas $\{dx^\mu\}$ através da métrica $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.43)$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Pensando na Relatividade Especial, trabalha-se com uma geometria de espaço-tempo plana com uma métrica independente de posição $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Usando o princípio da equivalência, Einstein teve a ideia de que a gravidade é apenas uma representação da curvatura da estrutura do espaço-tempo. A Relatividade Geral, sendo uma teoria geométrica da gravidade, diz que a matéria e a energia fazem com que o espaço-tempo se deforme, implicando em uma métrica dependente da posição e que $g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu}$. Do ponto de vista geométrico da física do Princípio de Equivalência, uma variedade distorcida de espaço e tempo apresentará uma métrica dependente da posição, desvios das relações geométricas euclidianas e sempre se pode descrever uma pequena região como um espaço-tempo plano, pois estará livre dos efeitos da gravidade. A métrica $g_{\mu\nu}(x)$ em um espaço curvo é necessariamente dependente da posição. Esta dependência das coordenadas revela que o espaço descrito por ds^2 é curvo. Na teoria de Einstein, basta a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ para descrever completamente o campo gravitacional. Para um espaço curvo, as relações geométricas euclidianas não são mais verdadeiras. O Princípio da Equivalência implica relações não euclidianas entre medidas geométricas. Estas medições, então, podem revelar uma curvatura no espaço. Se for esse o caso, significa que estas relações geométricas não são mais precisas na presença da gravidade. Dado algum espaço curvo, pode-se sempre descrever localmente uma pequena região aproximadamente como um espaço plano. Reconhecendo o nosso espaço-tempo como o campo gravitacional, o Princípio da Equivalência permite transformar a gravidade

localmente naquela região específica. Einstein usou isso para encontrar uma solução que identificasse a gravidade como a estrutura dos espaços-tempos curvos.

A função métrica $g_{\mu\nu}(x)$ define as características do espaço, é o que descreve a geometria do espaço-tempo. Na Relatividade Geral, a fonte de massa/energia determina a função métrica através da equação de campo. A métrica $g_{\mu\nu}(x)$ vem como a solução desta equação. Então, a gravidade é entendida como a estrutura do espaço-tempo e não será considerada como uma força de aceleração. Numa teoria geométrica, o movimento de uma partícula é completamente determinado pela geometria. A equação do movimento em um campo gravitacional é

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^k \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.44)$$

Isto significa que as trajetórias das partículas são linhas geodésicas no espaço-tempo. Portanto, a menor distância entre dois pontos A e B na superfície de uma esfera faz parte de um círculo conforme mostrado na figura 12.

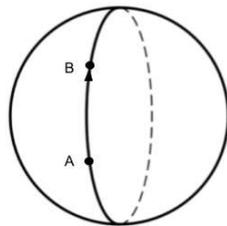


Figura 12 – A trajetória entre dois pontos A e B na superfície de uma esfera faz parte de um círculo que circunda a superfície.

Para o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, a condição necessária é que a trajetória entre os pontos A e B seja estacionária de acordo com o princípio da menor ação:

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = 0. \quad (2.45)$$

A curva que se procura é denotada por $x^\mu(\tau)$ e considera-se apenas pequenos desvios $\delta x^\mu(\tau)$. Para que a curva $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ passe pelos pontos A e B, deve-se aplicar

$$\delta x^\mu(A) = \delta x^\mu(B) = 0 \quad (2.46)$$

tal que

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \delta \int_A^B d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 0 \quad (2.47)$$

é uma condição necessária para que o comprimento da curva $x^\mu(\tau)$ seja mínimo. Apresentando a Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (2.48)$$

com $x = x^\mu$ e $\dot{x} = dx^\mu/d\tau$, obtém-se o Princípio de Hamilton,

$$\delta \int_A^B d\tau \mathcal{L}(\dot{x}, x) = 0 \quad (2.49)$$

e as equações de movimento de Euler-Lagrange associadas,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} = 0. \quad (2.50)$$

A introdução da Lagrangiana da equação (2.48) estabelece uma conexão entre a interpretação geométrica e a interpretação mecânica da equação (2.44). Na vizinhança de um ponto, digamos, x_0 , a aproximação $g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ é válida. Como esses pontos vizinhos podem ser vistos como um espaço plano, é possível introduzir coordenadas cartesianas ξ^α nesta pequena região. Assim, os símbolos de Christoffel desaparecerão porque $g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ e a equação (2.44) torna-se

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (2.51)$$

Esta equação descreve uma linha reta. Portanto, a curva definida por (2.44) é localmente reta e, portanto, localmente uma conexão mais curta. Portanto, uma partícula em um campo gravitacional descrito por $g_{\mu\nu}$ se moverá ao longo de uma linha geodésica[36, 37].

2.2 Cosmologia Relativística

Cosmologia é o estudo da dinâmica do Universo como um todo. Ela tenta responder questões como "qual é o seu conteúdo de matéria-energia?", "como esse conteúdo está organizado?", "como era no passado e como irá evoluir no futuro?". Na escala cósmica, a interação mais relevante é a gravitação. Por exemplo, todas as galáxias estão acelerando sob a sua gravidade mútua, os planetas orbitam as suas estrelas devido à interação gravitacional, etc. Assim, o estudo da Cosmologia baseia-se essencialmente na interação gravitacional. Isso significa que é preciso partir de um modelo mais simples do Universo. Para isso, deve-se desconsiderar as irregularidades do espaço-tempo, concentrando-se nas características mais importantes, fazendo suposições de simetria, o que será descrito pelo que é conhecido como equação de Friedmann. As soluções resultantes são chamadas de modelos de Friedmann. Destas soluções, a hipótese mais amplamente aceita para o nascimento do Universo é o modelo do Big Bang. Foi proposto em 1927 pelo padre católico e físico Georges Lemaître. De acordo com este modelo, há cerca de 13.8 bilhões de anos, o Universo expandiu-se rapidamente a partir de um estado primordial altamente comprimido, a singularidade. Em seguida, esfriou o suficiente para permitir a formação de partículas subatômicas e, posteriormente, de átomos simples. Mais tarde, estes primeiros elementos formaram nuvens gigantes que levaram à formação de estrelas e galáxias.

2.2.1 Paradoxo de Olbers e lei de Hubble

Antes da chegada da teoria da Relatividade Geral, acreditava-se que o Universo era estático, infinito em idade e tamanho. Contudo, em 1826, o astrônomo alemão Heinrich Wilhelm Olbers opôs-se a esta afirmação com a observação de que o céu é escuro à noite.

Olbers assumiu que o espaço é euclidiano e que o número médio de estrelas por unidade de volume é infinito, bem como a luminosidade média de cada estrela ao longo do espaço e do tempo, tomando as médias em regiões suficientemente grandes. Ele também presumiu que o Universo existe há um tempo infinito e que era estático. Sendo L a luminosidade média (energia emitida por unidade de tempo), o brilho visto a alguma distância r é $f(r) = L/(4\pi r^2)$. Se n for a densidade numérica das estrelas, então, o fluxo resultante ocorre quando se integra todas as estrelas no Universo infinito:

$$B = \int n f(r) dV = nL \int_{r_{min}}^{\infty} dr = \infty. \quad (2.52)$$

No entanto, este resultado não considerou a possibilidade de a luz de uma estrela poder ser obstruída por estrelas em primeiro plano. Levando isso em consideração, o resultado não é infinito, mas é igual à luminosidade média da superfície de uma estrela. Como este resultado deve ser válido em todos os lugares, torna-se um paradoxo, porque o céu observado à noite é escuro. Olbers tentou resolver este paradoxo assumindo a existência de um gás que absorveria a radiação a longas distâncias. No entanto, isso não resolve o problema. Esse gás seria aquecido até atingir uma temperatura na qual irradia tanto quanto absorve, não reduzindo a densidade média da radiação. A solução para este paradoxo reside na suposição de que o Universo não é estático, mas na verdade está em expansão em grande escala. Então, por causa do efeito Doppler, a luz recebida das estrelas muda para vermelho. Se a velocidade recessiva atingir um determinado valor, a perda de energia será suficiente para diminuir a densidade da radiação ao nível observado.

A descoberta de que o Universo estava repleto de galáxias levou os cientistas a estudar os movimentos destas estruturas, então recentemente detectadas. Quando se observa uma galáxia em comprimentos de onda visíveis, seu espectro geralmente mostra linhas de absorção por causa da atmosfera estelar superior. Por exemplo, alguma linha de absorção específica medida em laboratório com comprimento de onda λ_{em} pode ser diferente quando recebida por um observador. A mudança de comprimento de onda

$$z \equiv \frac{\lambda_{rec} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (2.53)$$

está relacionado ao movimento do emissor pelo efeito Doppler. As observações feitas por Vestu Slipher de aproximadamente 40 galáxias durante um período de 10 anos demonstraram que quase todas elas estavam desviadas para o vermelho. Edwin Hubble conseguiu encontrar uma relação entre os resultados do redshift e a distância a estas galáxias. Ele notou que o desvio para o vermelho z era proporcional à distância d da galáxia que emitia a luz. Hubble afirmou que

$$z = \frac{H_0}{c} d \quad (2.54)$$

ou, usando a versão não relativística do efeito Doppler que afirma que $z \approx v/c$, tem-se que

$$v = H_0 d, \quad (2.55)$$

onde H_0 é positivo. Este resultado significa que as galáxias estão se afastando de nós com velocidades proporcionais à sua distância. Quanto mais longe estão, mais rápido se afastam da Terra. H_0 é chamado de constante de Hubble e atua como uma constante de proporcionalidade, fornecendo a velocidade de recessão por unidade de separação. Ou seja, é a taxa de expansão. Esta descoberta é conhecida como lei de Hubble. Não se deve inferir que a lei de Hubble afirma de alguma forma que a nossa localização é o centro do Universo. A interpretação correta é completamente oposta. Esta relação decorre de uma clara extensão do princípio copernicano: a nossa galáxia não está num local privilegiado do Universo. Este resultado vale para todos os observadores em todas as galáxias. Só recentemente é que se tornaram possíveis resultados consistentes para o valor de H_0 , mostrando que

$$H_0 = (72 \pm 5 \text{ km/s}) \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.56)$$

onde se tem aquele $H_0 \equiv H(t_0)$. É possível concluir que H_0 tem a dimensão do tempo inverso quando se olha para (2.55). O tempo de Hubble é definido como $t_H \equiv H_0^{-1}$ [38, 39].

2.2.2 O Princípio Cosmológico

O que é conhecido como Princípio Cosmológico é, em essência, uma extensão do princípio copernicano, que afirma que a Terra não está no centro do sistema solar. Extrapolando isto, não se deve esperar que a Terra, o sistema solar, a Via Láctea ou o nosso grupo local de galáxias tenham alguma posição favorecida no Universo. Esta é a ideia do Princípio Cosmológico: em cada época, o Universo apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos, exceto nas irregularidades locais. Isso significa que pode-se assumir o Universo como homogêneo e isotrópico: no Universo todas as posições e direções são equivalentes.

Matematicamente, toma-se t como sendo um tempo cósmico e aplica-se o princípio para cada uma das fatias espaciais dadas por $t = \text{constante}$, mostradas na figura 13. Não ter pontos privilegiados significa que a fatia espacial é homogênea. Ao mesmo tempo, o princípio exige que a fatia não tenha direções privilegiadas, o que significa que seja isotrópica. Portanto, é esfericamente simétrica em relação a um ponto em análise. Se uma variedade for homogênea, ela será isotrópica em relação a todos os pontos. Isto deve valer para cada um deles. Assim, o princípio cosmológico exige que o espaço-tempo possa ser foliado em hipersuperfícies semelhantes ao espaço que sejam esfericamente simétricas em relação a qualquer ponto dentro delas. A homogeneidade do Universo pode ser inferida da mesma forma que a homogeneidade de um gás. Descreve uma versão "embaçada" ou "turva" do Universo, sendo indiferente aos detalhes locais. Conseqüentemente, o princípio cosmológico é de alguma forma um princípio de simplicidade, levando à exigência de que o universo seja isotrópico e homogêneo. Hoje, a homogeneidade em grande escala e a isotropia do Universo são apoiadas por evidências observacionais. O indício mais

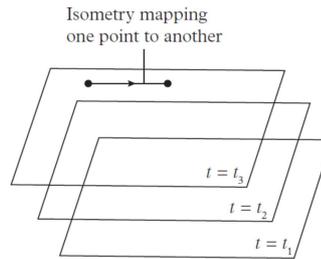


Figura 13 – Variedade fatiada em 3-espços homogêneos. Fonte: Ray D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*.

significativo para a isotropia foi a descoberta da radiação cósmica de fundo (CMB) por Penzias e Wilson em 1965. A CMB permeia o Universo e tem uma temperatura de $2,7K$ e, tirando pequenas flutuações de uma parte em 100.000, ela exibe um alto grau de isotropia. A CMB é um vestígio térmico da primeira luz que pôde viajar livremente por todo o Universo. É uma radiação "fóssil" que fornece uma importante fonte de dados sobre o Universo primordial [40, 41, 42].

2.2.3 A métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Um espaço apresentando uma curvatura constante é descrito por

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2.57)$$

onde a constante K é a curvatura. Esta afirmação segue a premissa da isotropia sobre todos os pontos. Assim, para um espaço de Einstein, a 3-métrica $h_{\alpha\beta}$ satisfaz a mesma relação:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}). \quad (2.58)$$

Como o 3-espço é isotrópico em relação a todos os pontos, uma simetria esférica deve ser encontrada em torno de cada um desses pontos. A métrica que satisfaz os requisitos de homogeneidade e isotropia do princípio cosmológico para um espço com curvatura constante é conhecida como métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (2.59)$$

onde k é $+1, 0$ ou -1 . No âmbito da cosmologia, se o Universo tem $k = +1$ é chamado de "universo fechado", se tem $k = 0$ é chamado de "universo plano" e se $k = -1$ é conhecido como um "universo aberto" [43, 44, 42].

2.2.4 Equações de Friedmann

As equações de campo de Einstein conectam a geometria do espço-tempo e a distribuição de massa/energia. A equação é escrita como:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ ou $\kappa = 8\pi$, usando unidades naturais, é a constante gravitacional de Einstein e Λ é a constante cosmológica. O princípio cosmológico afirma que uma representação satisfatória do universo é aquela que possui a métrica FLRW da equação (2.59) em coordenadas móveis. Isso define o lado geométrico das equações de Einstein. O lado da fonte é escolhido com base no postulado de Weyl, que exige que o substrato seja um fluido perfeito ou ideal. Desta forma, as equações de campo de Einstein estabelecem uma relação entre os parâmetros geométricos da curvatura k , o fator de escala $a(t)$, a densidade do fluido cósmico $\rho(t)$ e a pressão $p(t)$ (os dois últimos, contidos no tensor $T_{\mu\nu}$). Numa época anterior à descoberta de um universo em expansão as pessoas acreditavam que ele era estático. Naquela época, o universo observado era basicamente as estrelas localizadas na Via Láctea. Procurando uma solução estática para as equações de campo da Relatividade Geral, Einstein criou um termo adicional para o lado geométrico da equação denotado por Λ e conhecido como constante cosmológica. A equação (2.60) mostra esse termo. Para corresponder à fenomenologia conhecida, Λ deve ser pequeno, exceto em grandes escalas cósmicas. Apesar de ser adicionado ao lado geométrico da equação, pode ser movido para o lado massa/energia. Ele atuará como um termo fonte adicional de gravidade. Quando se tem um tensor energia-momento de fluido nulo, $T_{\mu\nu} = 0$, conhecido como estado de vácuo, tem-se

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \equiv \kappa T_{\mu\nu}^{\Lambda}, \quad (2.61)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \kappa \Lambda g_{\mu\nu} = (-c^4 \Lambda / 8\pi G_N) g_{\mu\nu}$ pode ser entendido como o tensor energia-momento do vácuo. A radiação e a matéria $T_{\mu\nu}$ são caracterizadas por duas funções, a densidade de energia ρ e a pressão p . Exatamente da mesma maneira, o tensor energia-momento do vácuo $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ será descrito por uma "densidade de energia do vácuo" ρ_{Λ} e uma "pressão de vácuo" p_{Λ} . A densidade de energia do vácuo está relacionada a uma constante cosmológica positiva através de

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N} > 0. \quad (2.62)$$

A pressão de vácuo equivalente é

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2 < 0, \quad (2.63)$$

o que resulta em uma equação de estado com um parâmetro $w = -1$. Esses termos de vácuo, ρ_{Λ} e p_{Λ} , dão origem a uma repulsão gravitacional. Einstein costumava dizer que a constante cosmológica foi "o maior erro de sua vida". No entanto, foi adotado por gerações posteriores de cosmólogos devido à descoberta de que a constante cosmológica atua como fonte de uma força repulsiva cósmica. Isto deve ser celebrado como mais uma das grandes conquistas de Einstein. Apesar de ter sido utilizado erroneamente no início buscando um universo estático, a presença da constante cosmológica foi crucial na resolução de alguns problemas fundamentais da cosmologia.

A inserção da métrica FLRW e da fonte de fluido ideal nas equações de campo de Einstein leva a um conjunto de equações. Elas são conhecidas como equações de Friedmann, obtidas por Alexander Friedmann em 1922. A contribuição de Friedmann para a cosmologia não obteve o devido reconhecimento por seus contemporâneos. Posteriormente, foi redescoberta por Georges Lemaître em 1927. Essas equações descrevem a expansão do espaço em modelos homogêneos e isotrópicos do universo no contexto da Relatividade Geral. Diferentes componentes das equações de Einstein levam a

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G_N \rho + \Lambda}{3} \quad (2.64)$$

e

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.65)$$

que são conhecidas como "primeira equação de Friedmann" e "segunda equação de Friedmann", respectivamente. Usando argumentos de homogeneidade e isotropia, a densidade e a pressão só podem ser funções do tempo t . Pode-se usar essas duas equações para chegar a uma terceira:

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) = -p \frac{da^3}{dt}. \quad (2.66)$$

Esta equação se assemelha à primeira lei da termodinâmica: $dE = -pdV$. A equação (2.66) é a afirmação da conservação da energia neste contexto. Portanto, existe uma relação de conservação de energia dentro das equações de campo. Uma relação extra é necessária porque existem duas equações independentes, mas três funções desconhecidas: $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$. Esta equação adicional conecta a pressão à densidade do sistema e é chamada de "equação de estado". Ela é escrita como

$$p = w\rho, \quad (2.67)$$

onde w é um parâmetro constante que define o conteúdo material do sistema. Este parâmetro possui alguns valores típicos que podem ser encontrados:

- $w = 0$ para matéria não relativística (por exemplo, poeira),
- $w = 1/3$ para radiação,
- $w = -1$ para constante cosmológica,
- $w = -1/3$ para cordas cósmicas,
- $w = -2/3$ para paredes de domínio,
- $w < -1$ para fluido fantasma.

A chamada densidade crítica ρ_c é definida como

$$\rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G_N} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3H(t)^2}{8\pi G_N}, \quad (2.68)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é a constante de Hubble. Se a densidade de massa do universo for maior que a densidade crítica, $\rho > \rho_c$, a curvatura média deve ser positiva, tendo $k = +1$ significando um universo fechado; se a densidade de massa for menor que a densidade crítica, $\rho < \rho_c$, então $k = -1$ significa um universo aberto; se a densidade de massa for a densidade crítica, $\rho = \rho_c$, então $k = 0$ significa que o universo tem uma geometria plana. Para um momento $t = t_0$ tem-se

- $\rho_0/\rho_{c0} > 1 \longrightarrow k = +1$ universo fechado,
- $\rho_0/\rho_{c0} = 1 \longrightarrow k = 0$ universo plano,
- $\rho_0/\rho_{c0} < 1 \longrightarrow k = -1$ universo aberto.

A densidade crítica é o que mantém o universo curvado positivamente ou fechado separado do universo curvado negativamente ou aberto. Evidências observacionais sugerem que o universo tem $k = 0$, o que significa um universo plano com um valor de densidade de massa/energia que corresponde à densidade crítica [45][46, 47, 48].

2.2.5 Evolução temporal dos modelos de Universo

A dependência temporal do fator de escala, $a(t)$, para algum dado valor de curvatura k é obtida a partir da solução das equações de Friedmann. Antes do estudo de $a(t)$, deve-se investigar o comportamento escalar da densidade e pressão, dado pela equação (2.66). Tomando a derivada do tempo e usando a equação de estado (2.67) obtém-se

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.69)$$

Integrar $d\rho/\rho = -3(1+w)da/a$ e exponenciar o resultado leva a

$$\rho(t) = \rho_0 a(t)^{-3(1+w)}, \quad (2.70)$$

onde $\rho_0 = \rho(t_0)$. Portanto, esta equação mostra, por exemplo, a escala das densidades para um universo dominado pela matéria, definido fazendo $w = 0$, e para um universo dominado pela radiação, definido fazendo $w = \frac{1}{3}$:

$$\rho_M(t) = \rho_{M,0} a(t)^{-3} \quad \text{e} \quad \rho_R(t) = \rho_{R,0} a(t)^{-4}. \quad (2.71)$$

A primeira equação em (2.71) exhibe o resultado esperado de um volume inverso. A segunda relação parece um pouco incomum, no entanto, deve-se considerar que a energia da radiação

é inversamente proporcional ao comprimento de onda, escalando como a^{-1} . Em seguida, é dividido pelo fator de volume a^3 para produzir uma densidade.

A primeira equação de Friedmann (2.64) é o ponto de partida para analisar a evolução temporal do fator de escala $a(t)$. Nesta primeira situação, os modelos de universo em estudo são aqueles que possuem uma geometria plana, com $k = 0$. Fazendo $c = G_N = 1$ e definindo $C = \frac{8}{3}\pi a^3 \rho$, a equação (2.64) se transforma em

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k, \quad (2.72)$$

com $C > 0$, $-\infty < \Lambda < \infty$, $k = -1, 0, +1$ e $a = a(t)$. No caso de um espaço-tempo plano, esta equação se reduz a

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \quad (2.73)$$

A constante cosmológica é assumida como positiva, $\Lambda > 0$. Introduzindo uma nova variável,

$$u = \frac{2\Lambda}{3C}a^3, \quad (2.74)$$

e a derivando, obtém-se

$$\dot{u} = \frac{2\Lambda}{C}a^2\dot{a}. \quad (2.75)$$

Inserindo isso na equação (2.73) leva a

$$\dot{u}^2 = 3\Lambda(2u + u^2). \quad (2.76)$$

Usando a raiz quadrada positiva, obtém-se

$$\dot{u} = (3\Lambda)^{1/2}(2u + u^2)^{1/2}. \quad (2.77)$$

Isso pode ser integrado por partes. Aqui, um modelo do Big Bang é escolhido fazendo $a = 0$ quando $t = 0$, implicando em $u = 0$ inicialmente:

$$\int_0^u \frac{du}{(2u + u^2)^{1/2}} = \int_0^t (3\Lambda)^{1/2} dt = (3\Lambda)^{1/2} t. \quad (2.78)$$

Completando o quadrado na integral-u e fazendo $v = u + 1$ and $\cosh(w) = v$ fornece

$$\int_0^u \frac{du}{[(u+1)^2 - 1]^{1/2}} = \int_1^v \frac{dv}{(v^2 - 1)^{1/2}} = \int_0^w \frac{\sinh(w)dw}{(\cosh^2(w) - 1)^{1/2}} = \int_0^w dw = w. \quad (2.79)$$

Escrevendo em termos de a , a solução é

$$a^3 = \frac{3C}{2\Lambda} [\cosh(3\Lambda)^{1/2} t - 1]. \quad (2.80)$$

Para o caso com $\Lambda < 0$ a nova variável escolhida é

$$u = -\frac{2\Lambda}{3C}a^3, \quad (2.81)$$

que, após o mesmo processo, produz

$$a^3 = \frac{3C}{2(-\Lambda)} \left\{ 1 - \cos[3(-\Lambda)^{\frac{1}{2}}t] \right\}. \quad (2.82)$$

O caso de uma constante cosmológica nula $\Lambda = 0$ fornece

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a}. \quad (2.83)$$

Tirando as raízes quadradas é possível chegar à

$$a^{1/2}da = C^{1/2}dt. \quad (2.84)$$

Integrando assumindo que $a = 0$ quando $t = 0$ leva a

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = C^{1/2}t. \quad (2.85)$$

Isso significa que

$$a = \left(\frac{9}{4}Ct^2 \right)^{1/3}. \quad (2.86)$$

A equação (2.86) descreve o que é conhecido como modelo de Einstein-de Sitter.

2.2.5.1 Classificação dos modelos de Friedmann

Pode ser útil reunir as diversas possibilidades de forma organizada. Eles são divididos em três casos principais, rotulados de acordo com os valores do parâmetro k , a saber, $k = -1, 0, +1$. Então, cada valor de k conterá subcasos dependendo do valor de Λ .

- $k = -1$ Todos os modelos neste caso possuem topologia aberta.
 1. $\Lambda > 0$ - Este modelo cresce indefinidamente. Ele contém uma "torção" que indica uma mudança na taxa de expansão, desacelerando-a, antes de retomar e se aproximar assintoticamente de $\exp[(\frac{1}{3}\Lambda)^{1/2}t]$. Como todos os modelos do Big Bang, a taxa de expansão é como $t^{2/3}$, como o modelo de Einstein-de Sitter.
 2. $\Lambda = 0$ - Este modelo se expande indefinidamente. Não tem torção e a taxa de expansão é assintoticamente t .
 3. $\Lambda < 0$ - Este modelo é caracterizado por um evento denominado Big Crunch. A força cosmológica supera a expansão e força o modelo ao colapso. Existe a possibilidade de o modelo oscilar indefinidamente, com ciclos sucessivos de expansões seguidas de contrações. Todos os modelos com $\Lambda < 0$ são modelos oscilantes.
- $k = 0$ Todos os modelos neste caso possuem topologia aberta.

1. $\Lambda > 0$ - Este é um modelo que cresce indefinidamente, de caráter idêntico ao subcaso de $\Lambda > 0$ para $k = -1$.
 2. $\Lambda = 0$ - Este é o modelo de Einstein-de Sitter, com $a \approx t^{2/3}$.
 3. $\Lambda < 0$ - Este é um modelo oscilante, como aquele descrito para o subcaso com $\Lambda < 0$ para $k = -1$.
- $k = +1$ Todos esses modelos possuem topologia fechada. Existem mais subcasos devido a um valor crítico positivo da constante cosmológica, denotado por Λ_c , dado por

$$\Lambda_c = \frac{4}{9C^2}, \quad (2.87)$$

e um valor crítico associado do fator de escala, denotado por a_c , dado por

$$a_c = \frac{3}{2}C. \quad (2.88)$$

1. $\Lambda > \Lambda_c$ - Este é o modelo de Lemaître. É semelhante aos modelos em constante expansão dos casos anteriores com $k = -1$ e $k = 0$. No entanto, quanto mais próximo Λ estiver de Λ_c , mais perceptível será a torção e mais próxima a expansão chegará de uma parada neste período.
2. $\Lambda = \Lambda_c$ - Este subcaso está dividido em três possibilidades, que são determinadas pelo valor de uma constante de integração:
 - (a) Este é o modelo estático de Einstein, aquele que ele sugeriu com base na hipótese de que o universo era estacionário. Neste modelo, a atração gravitacional é exatamente contrabalançada pela repulsão cósmica. O fator de escala tem o valor constante a_c .
 - (b) Este caso descreve um modelo do Big Bang que se aproxima assintoticamente do modelo estático de Einstein a partir da situação (a).
 - (c) Este caso é conhecido como modelo de Eddington-Lemaître. Neste modelo, se o tempo for retrocedido, ele se aproximará assintoticamente do modelo estático de Einstein. Deixando o tempo avançar, é um modelo em constante expansão, aproximando-se assintoticamente de $\exp[(\frac{1}{3}\Lambda)^{1/2}t]$.
3. $\Lambda_c > \Lambda > 0$ - Este subcaso está dividido em duas possibilidades, que são determinadas pelo valor de uma constante de integração:
 - (a) Este é um modelo oscilante.
 - (b) Este modelo possui uma fase de contração, seguida de uma fase de expansão com fator de escala sempre positivo. É simétrico em relação ao seu ponto de mínimo. Nesse subcaso, $a \approx \exp[(\frac{1}{3}\Lambda)^{1/2}t]$ quando $t \rightarrow \infty$ e $a \approx \exp[(\frac{1}{3}\Lambda)^{1/2}(-t)]$ quando $t \rightarrow -\infty$.
4. $\Lambda = 0$ - Este é um modelo oscilante.
5. $\Lambda < 0$ - Este é um modelo oscilante.

Todos esses modelos estão representados na figura (14) e o modelo oscilante indefinidamente é mostrado na figura (15)[49, 50, 48].

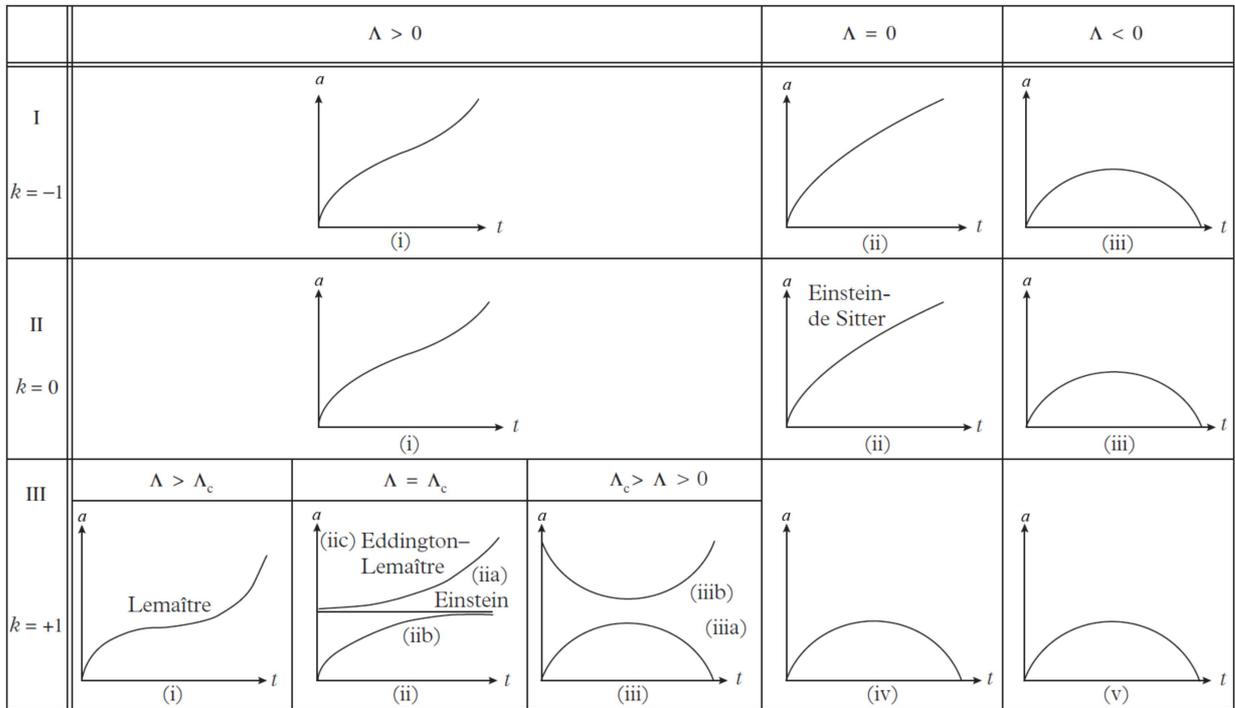


Figura 14 – Modelos de Friedmann organizados de acordo com os valores dos parâmetros k e Λ .
Fonte: Ray D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*.

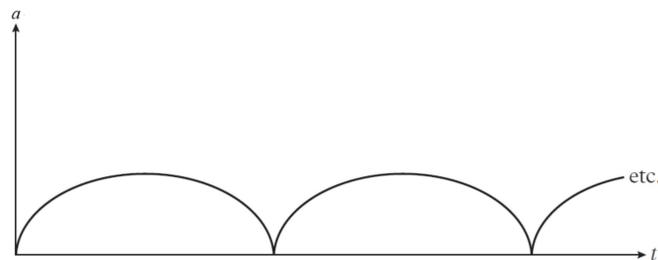


Figura 15 – Um modelo oscilante mostrando os ciclos de expansão e contração. Fonte: Ray D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*.

2.2.6 A época inflacionária

O modelo padrão da cosmologia é bem conhecido por trazer explicações adequadas para questões como "como o universo se expandiu e esfriou após o big bang?", "qual é a composição do universo?", "como ocorreu a formação de elementos nucleares leves?", "como em um universo em expansão a matéria se ajustou para formar estrelas, galáxias e outras estruturas de grande escala?", dentre outras. Ele fornece uma bela descrição das consequências do big bang. Ainda assim, não diz muito sobre a natureza do big bang em si. Assume que toda a matéria existiu desde o início.

A cosmologia inflacionária tenta dar conta deste big bang num instante extremamente curto de cerca de $10^{-36}s$ após a singularidade cósmica em $t = 0$. No decorrer desta inflação primordial, o universo teve uma explosão de expansão durante a qual o factor de escala aumentou em mais de 30 ordens de grandeza.

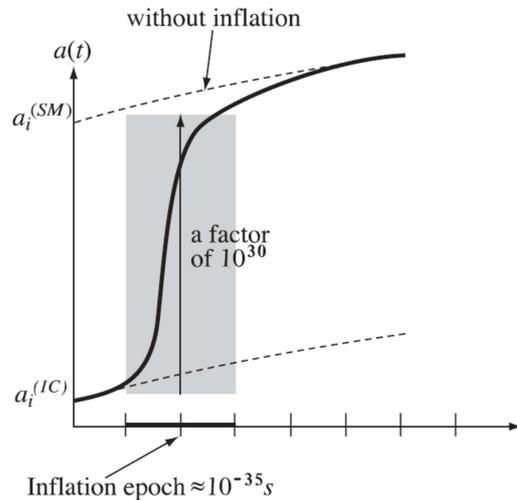


Figura 16 – Evolução temporal do fator de escala. As linhas tracejadas são aquelas previstas pelo modelo padrão, enquanto a linha sólida vem do modelo de inflação. A linha de inflação coincide com as linhas do modelo padrão após $10^{-35}s$. Aqui, *SM* significa "modelo padrão" e *IC* significa "cosmologia inflacionária". Fonte: Ta-Pei Cheng - Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction.

Após esse processo inflacionário, o universo seguiu o curso de expansão e resfriamento adiabático descrito pelo modelo padrão. No entanto, o modelo padrão requer algumas condições iniciais muito específicas. Estas condições só decorreriam de uma época inflacionária. Existem dois problemas conhecidos decorrentes dessas adversidades teóricas: o problema da planicidade e o problema do horizonte.

2.2.6.1 O problema da planicidade

Seria de esperar que a expansão desacelerasse devido à atração gravitacional entre matéria e energia. Uma desaceleração $\ddot{a}(t) < 0$ implica que $\dot{a}(t)$ deve ser uma função decrescente. Isto é claro, por exemplo, em um universo dominado pela radiação tendo $a \sim t^{1/2}$ o que implica em $\dot{a} \sim t^{-1/2}$ ou então em um universo dominado por matéria com $a \sim t^{2/3}$ tendo $\dot{a} \sim t^{-1/3}$. A equação de Friedmann pode ser escrita em termos do parâmetro de densidade de massa $\Omega = \rho(t_0)/\rho_{crit}$, com $\rho(t_0)$ sendo a densidade atual do universo:

$$1 - \Omega(t) = \frac{-kc^2}{\dot{a}^2(t)}. \quad (2.89)$$

Esta equação estabelece uma relação entre geometria e massa/energia: se $k = 0$, ou seja, uma geometria plana, então a razão de densidade deve ser precisamente $\Omega = 1$. Quando se tem $k \neq 0$, o universo terá alguma curvatura, o que significa que $|1 - \Omega(t)|$ deve

estar sempre aumentando porque o denominador do lado direito está sempre diminuindo. Portanto, a condição para um universo plano, $\Omega = 1$, é um ponto de equilíbrio instável: se Ω se desviar desta condição, esse desvio aumentará com o tempo. O valor atual da densidade de massa Ω_0 foi medido observacionalmente e se mostrou próximo do valor crítico da densidade. Isso significa que Ω deve ter estado extremamente próximo de $\Omega = 1$ no passado cósmico. Partindo de

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_{total} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.90)$$

com $\rho_{total} = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$, a densidade crítica em algum momento t é definida como $\rho_{crit}(t) = 3H^2(t)/8\pi$ e a equação anterior pode ser reescrita como

$$\left| 1 - \frac{\rho_{total}}{\rho_{crit}(t)} \right| = \frac{|k|}{H^2(t)a^2}. \quad (2.91)$$

Como mencionado antes, em um universo dominado pela matéria, o fator de escala cresce com $a \sim t^{2/3}$, produzindo um $H(t) \sim t^{-1}$, implicando que $H^2(t)a^2 \sim t^{-2/3}$. Isso significa que

$$\left| 1 - \frac{\rho_{total}(t)}{\rho_{crit}(t)} \right| \propto t^{2/3}. \quad (2.92)$$

Medições recentes afirmam com alto grau de confiança que estamos dentro de 30% da densidade crítica. A equação (2.92) mostra que no momento da igualdade matéria-radiação ($t_{eq} = 10^{12}s$) $\left| 1 - \frac{\rho_{total}(t)}{\rho_{crit}(t)} \right| < 10^{-5}$, que está extremamente próximo da densidade crítica. A expansão exponencial que o universo sofreu achatou a curvatura do espaço-tempo, tornando o universo plano ($\Omega = 1$), independentemente de sua curvatura inicial. Além disso, qualquer desvio inicial do achatamento teria sido diluído pela expansão. Portanto, o "problema da planicidade" serve para explicar por que o universo é plano ou extremamente próximo de ser plano.

2.2.6.2 O problema do horizonte

O segundo problema é explicar por que o universo é tão isotrópico e homogêneo. Pode-se explicar por que algo é homogêneo assumindo que as partes constituintes do sistema tiveram um período de interação. Durante essa interação houve uma troca de componentes até que eles atingissem algum tipo de equilíbrio e se distribuíssem uniformemente. Seguindo a mesma ideia do exemplo anterior, considere duas partes diferentes do universo que estão fora dos horizontes uma da outra. Eles estão tão distantes um do outro que nenhum sinal de luz enviado por um poderia ter alcançado o outro. Ainda assim, parecem ter propriedades semelhantes, sugerindo que podem ter estado em contacto térmico no passado. Este problema é melhor formulado em termos da Radiação Cósmica de Fundo: ao medir a CMB, a mesma temperatura de corpo negro é obtida em todas as direções. No entanto, qualquer par de pontos escolhidos no céu com uma separação angular da ordem de um grau

corresponde a uma separação do horizonte no tempo de desacoplamento dos fótons t_γ , que ocorreu aproximadamente 360.000 anos após o Big Bang. No entanto, a elevada isotropia observada sugere que regiões separadas por mais de 360.000 anos-luz estavam fortemente correlacionadas. Assumir a expansão exponencial ocorrida no período inflacionário permite que um pequeno pedaço do universo, pequeno o suficiente para se tornar homogêneo por meio da termalização, cresça exponencialmente em uma fase inflacionária e se expanda para um tamanho maior do que nosso universo observável. A inflação também estende o tamanho espacial de quaisquer irregularidades e as dilui. Juntos, esses mecanismos podem explicar o alto grau de isotropia que observamos no universo hoje. Este é o problema do horizonte do modelo padrão da cosmologia[51, 52, 53].

2.2.7 A radiação cósmica de fundo em micro-ondas

No início, o universo consistia num plasma de radiação e matéria mantidos juntos pela sua interação mútua. Com a expansão e o resfriamento do universo que vieram a seguir, a matéria se aglutinou em átomos neutros e esta sopa cósmica perdeu a capacidade de aprisionar os fótons. Então, os fótons livres sobreviveram e são o que hoje é conhecido como Radiação Cósmica de Fundo (CMB). Esses fótons relíquias são descritos por um espectro de radiação de corpo negro. A CMB fornece fortes evidências do Big Bang inicial e da isotropia do universo. Em 1948, G.Gamow, R.Alpher e R.Herman previram que uma consequência direta do modelo do Big Bang é a presença de uma radiação de fundo relíquia com uma temperatura de alguns graus. Alguns anos depois, em 1964, na Universidade de Princeton, Robert Dicke liderou um grupo de pesquisa (incluindo James Peebles, Peter Roll e David Wilkinson) para detectar esta CMB. Dicke foi contatado por Arno Penzias e Robert W. Wilson no vizinho Bell Lab. Penzias e Wilson descobriram o CMB usando uma antena de micro-ondas em forma de chifre construída para experimentos com satélites. Desde então, a CMB tem sido medido por vários outros experimentos com maior precisão, como o WMAP em 2001 e o satélite Planck em 2018. Para evitar a absorção de microondas pelas moléculas de água na atmosfera, é preferível realizar medições CMB em locais com baixa umidade e/ou em alta altitude. Assim, algumas observações foram realizadas com instrumentos transportados por balões lançados na Antártica. Os resultados obtidos no início da década de 1990[54, 55] provenientes do satélite Cosmic Background Explorer (COBE) mostram que a CMB de fato seguiu um espectro de radiação de corpo negro[56] com uma temperatura de

$$T_0 = 2.725 \pm 0.002K. \quad (2.93)$$

Isto não só garantiu a natureza térmica altamente uniforme da CMB com a mesma temperatura em todas as direções, mas também forneceu fortes evidências da isotropia em grande escala do Universo.

Assumindo que ν é a frequência de um fóton individual, sua energia é dada por

$E = h\nu$, onde h é a constante de Planck. Da física estatística, a energia cinética de uma partícula à temperatura T é $k_B T$, onde k_B é conhecida como constante de Boltzmann. A densidade de energia irradiada para a radiação de corpo negro é escrita como

$$\epsilon_{rad} = \int_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) d\nu, \quad (2.94)$$

onde $f(\nu)$ é uma função para medir a densidade de energia na faixa de frequência de ν a $\nu + d\nu$. Ela é dada por

$$f(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (2.95)$$

Fazendo $f'(\nu) = 0$, descobre-se que o pico da distribuição de energia para um espectro de corpo negro está localizado em

$$\frac{h\nu}{k_B T} = 3(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1), \quad (2.96)$$

correspondendo a uma frequência de $\nu_{max} \approx 2,7k_B T/h$ e uma energia de $E_{max} \approx 2,7k_B T$. Segue de (2.94) que

$$\epsilon_{rad} = \alpha T^4, \quad \text{with } \alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3}. \quad (2.97)$$

Usando o valor da temperatura de CMB(2.93) produz $\epsilon_{rad}(t_0) = 4,17 \times 10^{-14} Jm^{-3}$ que, convertendo isso para uma densidade de massa e escrevendo como uma fração da densidade crítica resulta em

$$\Omega_{CMB} \approx 5 \times 10^{-5}. \quad (2.98)$$

Há outro resultado valioso vindo de (2.97). Como

$$\rho_r \propto \frac{1}{a^4}, \quad (2.99)$$

tem-se que

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (2.100)$$

Isso significa que o universo esfria à medida que se expande. Embora a temperatura atual seja de apenas cerca de $3K$ no início do universo, ela era significativamente mais quente no passado. Então, de acordo com a equação (2.100), quando o universo tivesse um milésimo de seu tamanho real, sua temperatura seria de $3.000K$. Agora, para entender a origem do CMB, será considerado um modelo mais simples onde a matéria consiste em hidrogênio e a radiação consiste em fótons. Como $T \propto a^{-1}$, voltando no tempo até o início do universo, estará quente o suficiente para ionizar o hidrogênio. Nessas condições, os átomos não poderiam existir, portanto o universo seria um mar de fótons, elétrons livres e núcleos formando um plasma ionizado. Com a expansão do universo e, portanto, o seu resfriamento, os fótons perdem energia e eventualmente caem abaixo da energia de ionização. Isto ilustra uma situação em que o universo passa de um estado onde os fótons interagem com o plasma ionizado e é opaco, para uma nova situação onde a matéria é

composta de átomos e há pouca interação, sendo agora transparente. Este é um processo conhecido como desacoplamento e aconteceu cerca de 360.000 anos após o big bang com uma temperatura estimada de $T_{dec} = 3.000K$. Resumindo, os fótons no universo primitivo estavam fortemente acoplados à matéria ionizada por meio do espalhamento de Thomson. Estas interações cessaram cerca de 360.000 anos após o Big Bang, quando o Universo tinha arrefecido o suficiente para formar átomos neutros (principalmente hidrogénios) no momento do desacoplamento. Desde este último tempo de dispersão, estes fótons primordiais viajaram livremente através do universo e desviaram-se para o vermelho para frequências de micro-ondas à medida que o universo se expandia. Esta luz primordial deve aparecer hoje como a radiação térmica CMB com uma temperatura de cerca de $2.7K$ sendo descrita com precisão por um espectro de corpo negro[57, 58, 53].

2.3 Quantização

Pode-se perguntar sobre as razões por trás do estudo da Cosmologia Quântica. O estudo e desenvolvimento da área conhecida como Gravidade Quântica, por exemplo, pode ser uma razão sólida para isso. Os modelos cosmológicos são exemplos aos quais as ideias da gravidade quântica podem ser aplicadas. Além disso, o universo primitivo é talvez o único laboratório onde a gravidade quântica pode ser testada. As condições iniciais em Cosmologia podem ser outra motivação. Embora o modelo do Big Bang explique algumas das características do universo observado, há uma série de características que ele não explica, como a sua planicidade, a ausência de horizontes e a origem das flutuações de densidade necessárias para produzir galáxias. O cenário do universo inflacionário[59], que envolve campos de matéria quantizados em um fundo gravitacional clássico, forneceu uma possível solução para os problemas da planicidade(2.2.6.1) e do horizonte(2.2.6.2). Além disso, assumindo que os campos de matéria começam num estado quântico particular, o espectro de flutuação de densidade desejado pode ser obtido.

À medida que a evolução do universo é acompanhada retroativamente no tempo, as curvaturas e densidades aproximam-se da escala de Planck, na qual seria de esperar que os efeitos gravitacionais quânticos se tornassem importantes. A cosmologia quântica, na qual tanto a matéria quanto os campos gravitacionais são quantizados, é, portanto, a abordagem mais natural para tratar da questão das condições iniciais.

A quantidade mais importante de interesse na Cosmologia Quântica é conhecida como a função de onda do universo,

$$\Psi[h_{ij}(x), \Phi(x), B].$$

Esta função de onda descreve o universo contendo uma 3-superfície B caracterizada pela 3-métrica $h_{ij}(x)$ e a configuração do campo de matéria $\Phi(x)$. Esta quantidade é o ponto de partida para extrair várias previsões relativas ao resultado de observações em grande

escala. Para determinar a função de onda $\Psi[h_{ij}(x), \Phi(x), B]$, primeiro é necessária uma equação dinâmica. Então, é possível derivar uma equação análoga à equação de Schrödinger chamada *equação de Wheeler-DeWitt*, que deve ter esta função de onda do universo como solução. Como a equação de Wheeler-DeWitt pode ter diversas soluções diferentes, é necessário propor uma regra de condições iniciais ou de contorno para selecionar apenas uma solução. Finalmente, também é necessária alguma base teórica para interpretar a função de onda.

2.3.1 O Formalismo ADM

O formalismo ADM da Relatividade Geral, também denominado Split (3+1), nasceu da necessidade de formular a relatividade geral de forma dinâmica. Wheeler chegou a esta conclusão observando a quantização canônica de outras teorias clássicas, como a mecânica clássica e o eletromagnetismo. Porém, nessas teorias há sempre uma quantidade, a função de onda, que evolui dinamicamente ao longo do tempo e define o sistema em estudo. Por exemplo, na teoria das partículas, ao descrever uma partícula que se propaga no tempo e segue uma trajetória, deve-se escrever o hamiltoniano da teoria em termos de quantidades que estão associadas à dinâmica da partícula. Na Relatividade Geral busca-se algo que evolua construindo o espaço-tempo sendo uma espécie de equivalente da trajetória da partícula. Uma interpretação geométrica do formalismo de Dirac foi então feita buscando encontrar uma quantidade que evolui ao longo do tempo para produzir o espaço-tempo. Graças aos esforços de Wheeler e seus colaboradores, este estudo deu origem ao formalismo ADM. Talvez o tensor métrico seja a variável mais importante na Relatividade Geral. Uma vez determinada a métrica, pode-se descrever o espaço-tempo com precisão. De todos os dez componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, apenas seis deles são calculados com as equações de Einstein. Os quatro componentes restantes representam a liberdade de aplicar transformações de coordenadas aos seis componentes dinâmicos calculados. O processo do formalismo ADM consiste em reescrever o formalismo da Relatividade Geral de modo que a métrica do espaço-tempo quadridimensional $g_{\mu\nu}$ seja composta por três quantidades diferentes: h_{ij} , N e N^i . A primeira parte contém os seis componentes independentes de $g_{\mu\nu}$, sendo representados pelas variáveis "dinâmicas" h_{ij} , as métricas de hipersuperfície tridimensionais tipo-espaço. As duas partes restantes que compõem a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ correspondem aos quatro componentes independentes de $g_{\mu\nu}$. Eles são representados por $N(t, \vec{x})$ que é a função lapso. Ela é uma função escalar que descreve quanto de "tempo próprio" se passa entre duas fatias espaciais para um observador se movendo ortogonalmente às fatias. Seguindo, $N^i(t, \vec{x})$ é o vetor de deslocamento ou vetor de shift, que representa a mudança nas coordenadas espaciais dos pontos que permanecem na mesma coordenada espacial ao passar para o próximo intervalo de tempo. Estas não são variáveis "dinâmicas": devem ser definidas de antemão porque ditam a maneira como as hipersuperfícies tridimensionais evoluirão no

tempo, dando origem ao espaço-tempo quadridimensional. Ou seja, a dinâmica da teoria está nas métricas h_{ij} . O espaço-tempo quadridimensional descrito por $g_{\mu\nu}$ nasce através da evolução temporal de h_{ij} que acontece com a ajuda de N e N^i . Neste formalismo, h_{ij} atua como a posição da partícula na teoria Newtoniana.

Pensando na "imagem dinâmica" da teoria, parte-se de uma hipersuperfície S_1 definida em algum momento t descrita por uma métrica tridimensional h_{ij} . Após um intervalo de tempo dt , ela "evolui" para uma hipersuperfície S_2 . Ainda tem a mesma métrica mas agora está no tempo $t + dt$. Esse deslocamento deu origem a uma região de hipervolume descrita através da métrica $g_{\mu\nu}$. Isso é mostrado na Figura 17. Para calcular distâncias entre pontos localizados nessas hipersuperfícies, assumindo coordenadas cartesianas, define-se as métricas para S_1 e S_2 como $h_{ij}(t, x, y, z)$ e $h_{ij}(t + dt, x, y, z)$. As distâncias entre pontos na mesma hipersuperfície são dadas por

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.101)$$

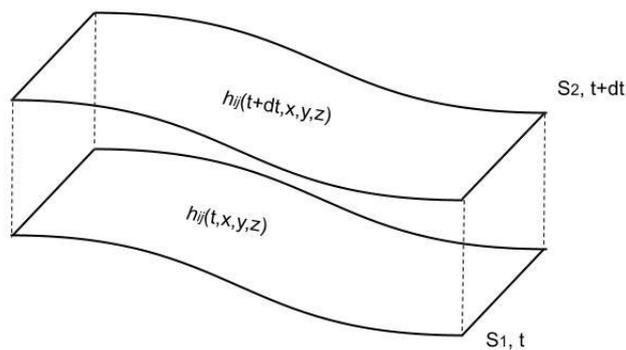


Figura 17 – Representação pictórica das hipersuperfícies espaciais tridimensionais construídas dentro de um espaço-tempo quadridimensional. A imagem mostra como a evolução temporal das hipersuperfícies cria o espaço-tempo.

Suponha que cada ponto em S_1 seja deslocado para a hipersuperfície S_2 devido à ação de algum campo $d\vec{t} = dt\hat{t}$. Este campo possui direções genéricas no espaço-tempo quadridimensional. Isso implica em ter projeções não-nulas nas direções normal \hat{n} e tangente a S_1 dadas por

$$\hat{n} \longrightarrow N dt \quad \text{e} \quad \hat{U} \longrightarrow N^i dt. \quad (2.102)$$

Com o auxílio dessas projeções, é possível calcular distâncias entre os eventos x_1^i e x_2^i em S_1 e S_2 , respectivamente. A separação entre x_1^i e x_2^i na direção normal fornece o tempo próprio:

$$d\tau^2 = N^2 dt^2. \quad (2.103)$$

Como se pode escrever o equivalente ao ponto x_1^i em S_2 como $x_2^i = x_1^i - N^i dt$, o intervalo entre x_1^i e x_2^i é

$$ds^2 = h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2. \quad (2.104)$$

Comparando isso com o intervalo escrito em termos de $g_{\mu\nu}$,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.105)$$

obtém-se

$$g_{tt} = N_j N^j - N^2; \quad g_{ti} = N_i; \quad g_{kt} = N_k; \quad g_{ik} = h_{ik}, \quad (2.106)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_j N^j - N^2 & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

O inverso de $g_{\mu\nu}$, escrito como $g^{\mu\nu}$, é dado por [60]

$$g^{tt} = -\frac{1}{N^2}; \quad g^{tm} = \frac{N^m}{N^2}; \quad g^{kt} = \frac{N^k}{N^2}; \quad g^{km} = h^{km} - \frac{N^k N^m}{N^2}, \quad (2.108)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^m}{N^2} \\ \frac{N^k}{N^2} & h^{km} - \frac{N^k N^m}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

2.3.2 Curvaturas intrínsecas e extrínsecas

O conceito principal da explicação da gravidade de Einstein é a curvatura. Portanto, pode ser bastante proveitoso estudar a curvatura usando uma divisão (3+1)-espaço-tempo. A curvatura intrínseca é descrita usando o tensor de Riemann R_{jkm}^i . Escrevê-lo em termos da divisão (3+1)-espaço-tempo é um trabalho bastante direto, já que a única diferença é a métrica: em vez de usar a métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$, deve-se usar a métrica de hipersuperfície h_{ij} . Isto é,

$$R_{jkm}^i = \Gamma_{jm,k}^i - \Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{lk}^i \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^l, \quad (2.110)$$

com

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{im} (h_{mj,k} + h_{mk,j} - h_{jk,m}). \quad (2.111)$$

Procurando uma descrição mais detalhada da 3-geometria, começa-se por considerar um deslocamento

$$d\mathcal{P} = \mathbf{e}_i dx^i \quad (2.112)$$

dentro da hipersuperfície. Aqui, \mathbf{e}_i são os vetores tangentes de base $\mathbf{e}_i = \partial/\partial x^i$. Qualquer campo de vetores tangentes \mathbf{A} que esteja na hipersuperfície pode ser expresso em termos dos mesmos vetores de base:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_i A^i. \quad (2.113)$$

Suponha que um vetor \mathbf{A} esteja em uma hipersuperfície e o transporte ao longo de uma rota elementar situada nesta hipersuperfície. Durante este transporte, desloque-o em cada etapa paralelamente a si mesmo. Aqui, "paralelo" significa paralelo em relação à geometria da 4-variedade envolvente. Então, este vetor \mathbf{A} acabará não ficando mais na

hipersuperfície. Portanto, a derivada covariante de \mathbf{A} apontando para a i -ésima direção da coordenada na geometria do espaço-tempo envolvente tem a forma

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{A} = \nabla_i \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{e}_i} (\mathbf{e}_j A^j) = \mathbf{e}_j \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + (\Gamma_{ji}^\mu \mathbf{e}_\mu) A^j. \quad (2.114)$$

A seguir, o "componente fora da hipersuperfície" dado por $(A^j \Gamma_{ji}^0)(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n})$ é removido e $\nabla^{(4)} \mathbf{A}$ é projetado ortogonalmente na hipersuperfície. Obtém-se então um transporte paralelo e uma derivada covariante que são intrínsecos à 3-geometria da hipersuperfície. A derivada covariante de \mathbf{A} na direção da i -ésima coordenada na hipersuperfície, calculada em relação à 3-geometria intrínseca à própria hipersuperfície, tem como seu h -ésimo componente covariante a quantidade

$$A_{h|i} = \mathbf{e}_h \cdot \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_h \cdot \nabla_i \mathbf{A} = \frac{\partial A_h}{\partial x^i} - A^m \Gamma_{mhi} (= A_{h,i} \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ em } \Sigma) \quad (2.115)$$

Aqui, o traço vertical distingue a derivada covariante da derivada covariante tomada em relação à 4-geometria. Os coeficientes de conexão, aqui para três dimensões, permitem-se ser expressos em termos dos coeficientes métricos e suas primeiras derivadas, e são interpretados como $\Gamma_{mhi} = \mathbf{e}_m \cdot \nabla_i \mathbf{e}_h$. Faz-se necessário agora entender o conceito de curvatura extrínseca da 3-geometria. Esta ideia não tem significado para uma 3-geometria concebida em si e por si só. A sua existência depende de esta 3-geometria estar incorporada como uma fatia bem definida num espaço-tempo envoltório bem definido. Esta nova quantidade mede a curvatura desta fatia em relação à 4-geometria envoltória. Pegue a normal que agora está no ponto \mathcal{P} e "mantendo sua base na hipersuperfície" Σ , transporte-a paralelamente a si mesma até o ponto $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$ e aí, subtraia do vetor normal que já está naquele ponto. A diferença, $\delta\mathbf{n}$, pode ser considerada como um "vetor" e seu valor é governado e depende linearmente do "vetor" de deslocamento $\delta\mathcal{P}$ como a relação:

$$\delta\mathbf{n} = -\mathbf{K}(\delta\mathcal{P}). \quad (2.116)$$

O operador linear \mathbf{K} é a curvatura extrínseca apresentada como um objeto geométrico abstrato independente de coordenadas. O sinal de \mathbf{K} é positivo definido quando as pontas das normais na Figura 18 estão mais próximas do que suas bases como estão, por exemplo, durante a recontração de um universo modelo. A curvatura extrínseca mede o encolhimento fracionário e a deformação de um objeto situado na hipersuperfície espacial Σ que ocorre quando cada ponto deste objeto é movido adiante em um intervalo unitário de tempo próprio em uma direção normal à hipersuperfície no espaço-tempo envoltório. Isso significa que se não houver espaço-tempo envoltório, então não haverá curvatura extrínseca.

Os vetores de base seguem as equações de Gauss-Weingarten:

$${}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_i = K_{ij} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} + {}^{(3)}\Gamma_{ji}^h \mathbf{e}_h, \quad (2.117)$$

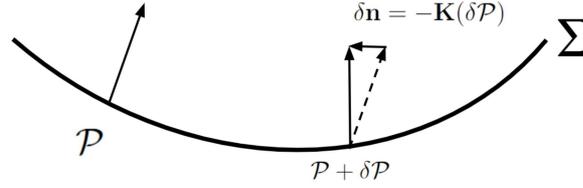


Figura 18 – Representação pictórica da curvatura extrínseca através de um transporte paralelo. Fonte: Misner, Thorne, Wheeler - Gravitation.

onde K_{ij} é o tensor de curvatura extrínseca. Com isso, é possível saber como reescrever a equação (2.114) para mudanças em qualquer campo vetorial \mathbf{A} situado em Σ . Além disso, a avaliação da curvatura extrínseca é de especial importância quando o espaço-tempo é dividido em fatias tipo-espaço de acordo com o formalismo ADM. A 4-geometria do "sanduíche" vista antes é totalmente definida pela 3-métrica nas duas faces do sanduíche e pela função lapso e pelo vetor deslocamento, N e N^i . O tensor K_{ij} é escrito como

$$K_{ik} = -n_{i;k} = -N^{(4)}\Gamma_{ik}^0 = -N[(^{(4)}g^{00(4)}\Gamma_{0ik} + (^{(4)}g^{0p(4)}\Gamma_{pik})]. \quad (2.118)$$

Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} K_{ik} &= \frac{1}{N} [(^{(4)}\Gamma_{0ik} - N^{p(3)}\Gamma_{pik})] \\ &= \frac{1}{2N} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} - 2\Gamma_{pik}N^p \right] \\ &= \frac{1}{2N} \left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} \right] = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + 2\nabla_i N_k \right]. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Esta é a curvatura extrínseca expressa em termos do formalismo ADM usando as funções de lapso e deslocamento[61]. Com as curvaturas intrínsecas e extrínsecas escritas em termos de h_{ij} , N_i e N em mãos, é possível usar as equações de Gauss-Codazzi[62] para escrever o tensor de Riemann em termos dessas curvaturas. De acordo com [63], é possível obter as seguintes relações:

$$(^{(4)}R^m_{ijk}) = (^{(3)}R^m_{ijk}) + \frac{1}{n_\mu n^\mu} (K_{ij}K_k^m - K_{ik}K_j^m), \quad (2.120)$$

$$(^{(4)}R^n_{ijk}) = \frac{1}{n_\mu n^\mu} (^{(3)}R_{nijk}) = -\frac{1}{n_\mu n^\mu} (K_{ij|k} - K_{ik|j}). \quad (2.121)$$

Ainda, de acordo com [64],

$$(^{(4)}R^{in}_{in}) = \frac{1}{n_\mu n^\mu} [K^2 - K_{ij}K^{ij}] - (n^\mu n^\beta)_{;\mu} + (n^\mu n^\beta)_{;\beta}. \quad (2.122)$$

2.3.3 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

Para descrever o formalismo geral da Cosmologia Quântica é necessário partir de uma formulação hamiltoniana da Relatividade Geral. Considera-se uma 3-superfície

na qual a 3-métrica é h_{ij} , com alguma configuração de campo de matéria. Tomando a 3-superfície como compacta, uma vez que apenas universos fechados são considerados, a 3-superfície está embebida em uma 4-variedade na qual a 4-métrica é $g_{\mu\nu}$. Esta incorporação é descrita pela forma padrão (3 + 1) da 4-métrica (2.104), onde N e N_i são a função lapso e o vetor deslocamento com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $i, j = 1, 2, 3$.

A ação é a ação padrão de Einstein-Hilbert acoplada à matéria

$$S = \frac{m_p^2}{16\pi} \left[\int_M d^4x (-g)^{\frac{1}{2}} (R - 2\Lambda) + 2 \int_{\partial M} d^3x h^{1/2} K \right] + S_{\text{matter}} \quad (2.123)$$

onde K é o traço da curvatura extrínseca K_{ij} no contorno ∂M da 4-variedade M dada por (2.119). Aqui, ∇_i é a derivada covariante na 3-superfícies. Para um campo escalar Φ , a ação da matéria é

$$S_{\text{matter}} = -\frac{1}{2} \int d^4x (-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + V(\Phi)]. \quad (2.124)$$

Em termos das variáveis (3 + 1), a ação assume a forma

$$S = \frac{m_p^2}{16\pi} \int d^3x dt N h^{\frac{1}{2}} [K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda] + S_{\text{matter}} \quad (2.125)$$

Pode-se derivar a forma hamiltoniana da ação

$$S = \int d^3x dt [\dot{h}_{ij} \pi^{ij} + \dot{\Phi} \pi_\Phi - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}^i], \quad (2.126)$$

onde π^{ij} e π_Φ são os momentos conjugados a h_{ij} e Φ respectivamente. O hamiltoniano é uma soma de vínculos, com o lapso N e o deslocamento N^i atuando como multiplicadores de Lagrange. Existe o vínculo de momento

$$\mathcal{H}_i = -2\nabla_j \pi_i^j + \mathcal{H}_i^{\text{matter}} = 0 \quad (2.127)$$

e o vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{16\pi}{m_p^2} G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{m_p^2}{16\pi} h^{1/2} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) + \mathcal{H}^{\text{matter}} = 0 \quad (2.128)$$

onde G_{ijkl} é a métrica de DeWitt e é dada por

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}). \quad (2.129)$$

Estes vínculos correspondem, respectivamente, aos componentes tempo-espaco e tempo-tempo das equações clássicas de Einstein. Os vínculos são cruciais no procedimento de quantização canônica. O local onde a dinâmica clássica acontece é chamado de superespaco, que é o espaco de todas as configurações de 3-métricas e campos de matéria $(h_{ij}(x), \Phi(x))$ em uma 3-superfície. O superespaco tem dimensão infinita, com um número finito de coordenadas $(h_{ij}(x), \Phi(x))$ em cada ponto x da 3-superfície. A métrica de DeWitt e outras métricas adequadas nos campos de matéria fornecem uma métrica no superespaco. Ela tem a importante propriedade de que sua assinatura é hiperbólica em todos os pontos x da três superfícies. A assinatura da métrica DeWitt é independente da assinatura do espaco-tempo[65].

2.3.4 Quantização Canônica e a Equação de Wheeler-DeWitt

Para quantizar a Relatividade Geral em sua forma ADM, deve-se seguir o procedimento de quantização de Dirac. Isto é necessário porque a Relatividade Geral é uma teoria parametrizada do tempo, ou seja, possui vínculos. O tempo já é contabilizado pelas variáveis dinâmicas da teoria. Assim, Dirac mostra que se obtêm as equações que regem a dinâmica da função de onda convertendo os vínculos em operadores e impondo-os como condições que a função de onda do sistema deve cumprir.

Como um exemplo mais simples da quantização de um sistema com vínculos, considere um sistema com um número finito de graus de liberdade x^i que são funções do tempo newtoniano T proveniente da mecânica clássica. A ação deste sistema é escrita como

$$S = \int L \left(T, x^i, \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dT} \right) dT, \quad (2.130)$$

onde $L(T, x^i, \dot{x}^i)$ é a Lagrangiana do sistema. Para mostrar o processo de quantização do sistema escolhido é uma partícula não relativística com massa m sob a ação de um potencial $V(T, x^i)$. A Lagrangiana para este sistema específico é

$$L = \frac{1}{2} m \delta_{ik} \frac{dx^i}{dT} \frac{dx^k}{dT} - V(T, x^i). \quad (2.131)$$

Para conseguir alguma semelhança com a Relatividade Geral, um parâmetro de tempo arbitrário t é introduzido com o objetivo de construir vínculos para este sistema. Isto se faz do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T : T(t) &\longrightarrow t = t(T) \\ x^i : x^i(T) &\longrightarrow x^i(t). \end{aligned} \quad (2.132)$$

A ação escrita em termos deste novo parâmetro é

$$S = \int dt \dot{T} L(T, x^i, \dot{x}^i \dot{T}^{-1}) = \int \tilde{L}(T, \dot{T}; x^i, \dot{x}^i) dt. \quad (2.133)$$

Aqui os pontos representam derivadas em relação a t . A dinâmica do sistema ainda está nas coordenadas x^i . Apesar de escrever as equações em termos de outra variável de tempo, o conteúdo do sistema continua o mesmo. Ele deve ter o mesmo número de graus de liberdade. Os momentos canonicamente conjugados são definidos como

$$\tilde{\pi}_i \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} = \dot{T} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{T}^{-1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \pi_i. \quad (2.134)$$

Isso mostra que os novos momentos $\tilde{\pi}_i$ não diferem de π_i . Por causa disso, o hamiltoniano H escrito em termos das novas variáveis canônicas x^i e $\tilde{\pi}_i$ é independente de \dot{T} :

$$H : H(T, x^i, \pi_i) = H(T, x^i, \tilde{\pi}_i). \quad (2.135)$$

Então, a ação da teoria parametrizada é

$$S = \int dt \left[\tilde{\pi}_i \dot{x}^i - H(T, x^i, \tilde{\pi}_i) \dot{T} \right]. \quad (2.136)$$

Como S mostra linearidade tanto na "velocidade dinâmica" quanto na "velocidade do tempo", pode-se introduzir o tempo como uma variável canônica, ou seja, $\{T, x^i\}$. Com isso, seu momento canônico conjugado é identificado como π_T e reescreve-se a ação como

$$S = \int \pi_T \dot{T} + \tilde{\pi}_i \dot{x}^i dt. \quad (2.137)$$

Isto significa que o espaço de fase que descreve o sistema foi expandido. Portanto, para garantir que o sistema permaneça o mesmo é necessário introduzir algumas restrições. Neste caso específico será introduzida uma restrição informando que $\pi_T = -H$, ou seja

$$\mathcal{H} \equiv \pi_T + H(T, x^i, \tilde{\pi}_i) = 0. \quad (2.138)$$

Este vínculo será introduzido na ação com o auxílio de um multiplicador de Lagrange N :

$$S = \int \left(\pi_T \dot{T} + \tilde{\pi}_i \dot{x}^i - N \mathcal{H} \right) dt. \quad (2.139)$$

As equações de movimento e a restrição (2.138) serão obtidas usando a ação na equação (2.139). Voltando ao caso da partícula não relativística, é possível obter sua hamiltoniana:

$$H_{NRP} = \frac{1}{2m} \delta^{ik} \tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_k + V(T, x^i). \quad (2.140)$$

Além disso, o vínculo vem imediatamente:

$$\mathcal{H}_{NRP} = \frac{1}{2m} \delta^{ik} \tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_k + V(T, x^i). \quad (2.141)$$

De acordo com o procedimento de quantização de Dirac, a função de onda é aniquilada pelas versões de operador dos vínculos clássicos. As substituições usuais para momentos são

$$\tilde{\pi}_i \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{and} \quad \tilde{\pi}_T \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (2.142)$$

Após fazer esta substituição, deve-se introduzir a função de onda $\Psi(x^i, T)$ para descrever o sistema em nível quântico. Usando os operadores da equação (2.142) na equação de vínculo (2.141) e exigindo que o mesmo seja satisfeito pela função de onda como

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(x^i, T) = 0, \quad (2.143)$$

chega-se à equação de Schrödinger para este caso de partícula não relativística:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi + V(x^i) \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.144)$$

ou, pode-se reescrever esta equação como

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (2.145)$$

Isso mostra que o processo de quantização de Dirac funciona para sistemas parametrizados.

Visando a quantização da Relatividade Geral, este mesmo procedimento será aplicado a ela. A função de onda é introduzida como um funcional da métrica h_{ij} :

$$\Psi = \Psi[h_{ij}(x^i)]. \quad (2.146)$$

Nesta representação, os momentos são trocados por derivadas variacionais em relação à métrica h_{ij} :

$$\pi^{ik}(x^m) \longleftrightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ik}(x^m)}. \quad (2.147)$$

Usar (2.147) na equação de vínculo e exigindo que ela seja satisfeita pela função de onda leva a

$$-G_{iklm}(x^i) \frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ik}(x^i) \delta h_{lm}(x^i)} - \sqrt{h}(x^i) R(x^i) \Psi = 0, \quad (2.148)$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt e

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ik}(x^i)} \right)_{|k} = 0, \quad (2.149)$$

que é o vínculo de supermomento. Em um nível clássico, o supermomento gera difeomorfismos (ou transformações de coordenadas) nas hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço. O vínculo de momento implica que a função de onda é a mesma para configurações $\{h_{ij}, T\}$ que estão relacionadas por transformações de coordenadas nas hipersuperfícies tridimensionais. É, portanto, a expressão da mecânica quântica da invariância da teoria sob difeomorfismos tridimensionais. Além disso, o vínculo (2.149) implica que Ψ deve depender apenas de quantidades que são independentes de reparametrizações de t [66, 67]. A equação de Wheeler-DeWitt é uma equação diferencial funcional hiperbólica de segunda ordem que descreve a evolução dinâmica da função de onda $\Psi[h_{ij}]$ no superespaço. A equação de Wheeler-DeWitt, em geral, terá um grande número de soluções, portanto, para ter qualquer poder preditivo, é necessário ter condições de contorno para escolher apenas uma solução. Deve-se enfatizar que (2.148) e (2.149) podem apresentar problemas de ordenamento. O problema para a equação de Wheeler-DeWitt pode ser um tanto preocupante, mas Wheeler e, mais tarde, Hawking e Page [68] propuseram a solução mais aceita atualmente para superar esta dificuldade [69].

2.3.5 A interpretação de muitos mundos

Da mesma maneira que na Mecânica Quântica, na Cosmologia Quântica também se trabalha com probabilidades. Por isso, faz-se necessário a escolha de uma maneira de interpretar estes resultados. A chamada "interpretação de Copenhague", apesar de ser a mais utilizada na Mecânica Quântica, não funciona para o caso da Cosmologia Quântica devido à problemas conceituais. A interpretação de muitos mundos é mais adequada para estudar sistemas fechados por tratar o sistema físico e o observador em

igualdade de condições. Dessa tentativa de aplicar a Mecânica Quântica ao Universo, surge a "interpretação de Muitos Mundos"[70, 71]. A ideia fundamental desta interpretação, proposta por Hugh Everett III no ano de 1957, é que existem miríades de mundos no Universo, além do mundo que conhecemos. Em particular, cada vez que é realizada uma experiência quântica com diferentes resultados possíveis, todos os resultados são obtidos, cada um num mundo diferente recém-criado, mesmo que só estejamos conscientes do mundo com o resultado que vimos. Esta interpretação versa sobre a ideia de que existe uma função de onda universal que descreve os sistemas macroscópicos e microscópicos e que uma medida seria simplesmente a interação entre partes diferentes de um mesmo universo e que a função de onda deveria prever qual parte "enxerga" a outra, não havendo o conceito de colapso da função de onda. Everett descobriu que as medições fariam o universo se "separar" em diferentes cópias de si, levando em conta todas as possibilidades da medição. Na interpretação de Muitos Mundos, não é relevante se apenas um ou se todos os vários universos estão realmente acontecendo. A maior contribuição dessa interpretação é eliminar a necessidade de um observador externo e do colapso da função de onda. Apesar disso, ainda são necessárias as condições iniciais para que, dentre todas as funções de onda que são soluções da equação de Wheeler-DeWitt, apenas a desejada seja selecionada. Hartle e Hawking propuseram uma função de onda particular através da formulação da mecânica quântica desenvolvida por Feynman na década de 40, chamada de formulação da integral de caminho ou de método de soma sobre histórias, e essa formulação é equivalente à resolução da equação de Schrödinger. Sendo assim, o método de soma sobre histórias prontamente generaliza a cosmologia quântica, e a função de onda do universo pode ser calculada somando sobre algumas classes de histórias para o Universo, e essa técnica é equivalente à resolução da equação de Wheeler-DeWitt.

2.3.6 A aproximação WKB

A aproximação WKB é uma técnica utilizada para obter soluções aproximadas para a equação de Schrödinger independente do tempo. Ela tem esse nome devido à Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers, e Léon Brillouin. A ideia do método é a seguinte: supondo que a energia potencial $V(x)$ em questão não tenha uma forma simples, a solução da equação de Schrödinger pode ser um tanto quanto difícil de ser obtida. Posto isto, faz-se necessário o uso de algum método de aproximação. A aproximação WKB assume que o potencial será uma função que varia lentamente com x . Sendo a função de onda $\psi(x)$ oscilatória, com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, será assumido que a variação de $V(x)$ é tão lenta quando comparada com λ que numa região contendo diversos comprimentos de onda, o potencial é essencialmente constante.

Partindo da equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \quad (2.150)$$

se o potencial é $V = \text{const}$, (2.150) tem soluções do tipo $\psi(x) = e^{\pm ikx}$. Caso $V(x)$ já não seja mais constante, as soluções podem ter a forma $\psi(x) = e^{iu(x)}$. Ao inserir essa solução na equação (2.150) é possível obter uma equação para a "fase" $u(x)$. Essa equação é escrita como

$$i \frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + k^2(x) = 0 \quad (2.151)$$

quando se define

$$k(x) = \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \right\}^{1/2}, \quad \text{para } E > V(x) \quad (2.152)$$

e

$$\kappa(x) = -i \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \right\}^{1/2} = -ik(x), \quad \text{para } E < V(x). \quad (2.153)$$

A vantagem é que (2.151) é completamente equivalente à (2.150) mas as condições de contorno são mais facilmente definidas em termos de $\psi(x)$ e $u(x)$. Considerando que a segunda derivada de $u(x)$ é insignificante quando o potencial não varia de forma muito brusca, esse termo pode ser omitido para que se obtenha a aproximação

$$u_0'^2 = k^2(x) \quad (2.154)$$

que, integrando, resulta em

$$u_0 = \pm \int^x k(x) dx + C. \quad (2.155)$$

Essa é uma solução exata para um $V = \text{const}$. Caso o potencial varie com x , uma aproximação sucessiva pode ser feita ao escrever (2.151) como

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = k^2(x) + i \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (2.156)$$

Substituindo a n -ésima aproximação no lado direito da equação, é possível obter a $(n+1)$ -ésima aproximação:

$$u_{n+1}(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) + i u_n'(x)}$$

$$n(x) dx + C_{n+1}. \quad (2.157)$$

Para o caso onde $n = 0$,

$$u_1(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) \pm i k'(x)} dx + C_1. \quad (2.158)$$

Os sinais diferentes nas equações para u_0 , u_{n+1} e $u_1(x)$ dão soluções aproximadas para (2.151). Sinalizando essas soluções como u_+ e u_- , a solução geral pode ser escrita como

$$u(x) = u_+ - i \ln[1 + A e^{i(u_- - u_+)}] + B = u_- - i \ln[A + e^{i(u_+ - u_-)}] + B, \quad (2.159)$$

onde A e B são duas constantes arbitrárias. A solução correspondente pra equação de Schrödinger é

$$\psi(x) = e^{u(x)} = e^{iB} e^{iu_+(x)} + A e^{iB} e^{iu_-(x)}. \quad (2.160)$$

Para que a aproximação (2.3.6) chegue no $u(x)$ correto é necessário que $u_1(x)$ seja próximo de $u_0(x)$, ou seja,

$$|k'(x)| \ll |k^2(x)|. \quad (2.161)$$

Se esta condição for válida, pode-se expandir o integrando de $u_1(x)$ para obter

$$u_1(x) = \int^x \left[\pm k(x) + \frac{i}{2} \frac{k'(x)}{k(x)} \right] dx + C_1 = \pm \int^x k(x) dx + \frac{i}{2} \ln[k(x)] + C_1 \quad (2.162)$$

A aproximação (2.162) para (2.151) é conhecida como a aproximação WKB. Ela leva à função de onda aproximada WKB:

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[\pm i \int^x k(x) dx \right]. \quad (2.163)$$

Numa região clássica, ou seja, onde $E > V(x)$, $k(x)$ é real e as duas ondas definidas pelos diferentes sinais em (2.163) se propagam independentemente em direções opostas. Assumindo que a aproximação WKB seja válida, o potencial muda tão lentamente com x que não são geradas ondas refletidas conforme essas ondas se propagam. Se $k(x)$ for entendido como o número de onda efetivo, então na região clássica ($E > V(x)$), pode-se definir o comprimento de onda $\lambda(x) = 2\pi/k(x)$. No domínio não-clássico, onde $E < V(x)$, reescreve-se a função de onda WKB na sua forma real

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp \left[\pm \int^x \kappa(x) dx \right]. \quad (2.164)$$

2.3.6.1 Tunelamento

O método WKB mostra parte do seu poder ao ser aplicado para calcular o coeficiente de transmissão, ou tunelamento, para uma barreira onde partículas estão incidindo com energia insuficiente para atravessá-la classicamente. Se a aproximação WKB for válida para as regiões $x < a$, $a < x < b$ e $x > b$ como indicado na figura (19), a solução para a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp(i \int_a^x k(x) dx) + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \exp(-i \int_a^x k(x) dx) & (x < a) \\ \frac{C}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(-\int_a^x \kappa(x) dx) + \frac{D}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(\int_a^x \kappa(x) dx) & (a < x < b) \\ \frac{F}{\sqrt{k(x)}} \exp(i \int_b^x k(x) dx) + \frac{G}{\sqrt{k(x)}} \exp(-i \int_b^x k(x) dx) & (x > b) \end{cases}. \quad (2.165)$$

Podemos relacionar os coeficientes constantes A, B, C, D, F e G das soluções (2.165) usando as chamadas fórmulas de conexão[72]. Dessa forma, obtemos uma matriz que conecta os coeficientes F e G com A e B :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\theta + \frac{1}{2\theta} & i \left(2\theta - \frac{1}{2\theta} \right) \\ -i \left(2\theta - \frac{1}{2\theta} \right) & 2\theta + \frac{1}{2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (2.166)$$

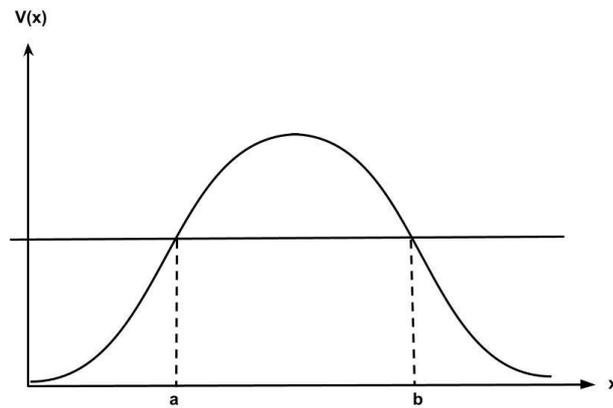


Figura 19 – Barreira de potencial.

onde o parâmetro θ , dado por

$$\theta = \exp \left(\int_a^b \kappa(x) dx \right), \quad (2.167)$$

mede a altura e a espessura da barreira em função da energia [73, 74]. Uma vez estabelecida a solução WKB, é necessário calcular o coeficiente de transmissão, ou probabilidade de tunelamento, denotado por TP_{WKB} , através da barreira de potencial. Admitindo que não há onda vindo da direita ($G = 0$),

$$TP_{WKB} = \frac{|F|^2}{|A|^2}. \quad (2.168)$$

Da equação (2.166), tem-se que

$$A = \frac{1}{2} \left(2\theta + \frac{1}{2\theta} \right) F. \quad (2.169)$$

Portanto, a TP_{WKB} se escreve

$$TP_{WKB} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta} \right)^2}. \quad (2.170)$$

2.3.7 Propostas de condições de contorno

As condições iniciais ou de contorno são fundamentais no âmbito da Cosmologia Quântica. Seu valor reside na necessidade que surge de selecionar de maneira precisa uma única função de onda do universo dentre as inúmeras que são soluções da equação de Wheeler-DeWitt. Múltiplas propostas foram feitas ao longo dos anos, motivadas por questões como simplicidade, analogias com sistemas da mecânica quântica e etc. Dentre estas propostas, as duas mais estudadas e compreensíveis são a proposta "Sem-Fronteira" por Hartle e Hawking [75, 76] e a proposta de "Tunelamento" por Vilenkin [77, 78] e Linde [79, 80].

2.3.7.1 A proposta *Sem-Fronteira*

Introduzida por Hartle e Hawking, ela tem seu alicerce teórico na quantização via integrais de caminho. Segundo os autores da proposta, ela tem como objetivo fornecer a função de onda para o estado quântico fundamental do Universo. Para Hartle e Hawking, ficou evidente que para se definir o estado quântico fundamental da geometria não se pode impor que este estado é o autovetor da superhamiltoniana gravitacional que corresponde ao menor autovalor possível deste operador. Eles então definiram este estado quântico fundamental do campo gravitacional usando condições sobre a geometria das diversas variedades que contribuem no cálculo da integral de caminho. A proposta "sem-fronteira" de Hartle e Hawking é, então, uma afirmação essencialmente topológica sobre a soma de classe de histórias. A proposta "sem-fronteira" foi introduzida na cosmologia quântica também com o objetivo de eliminar a singularidade inicial da teoria clássica da cosmologia, o Big Bang, que está presente em diversos modelos. Hartle e Hawking propuseram, então, que a função de onda pro estado fundamental do universo Ψ_{nb} fosse dada por uma integral de caminho euclidiana somada sobre uma classe C de espaços-tempos tais que suas 3-métricas tenham um valor h_{ij}^B sobre a fronteira da 3-superfície B :

$$\Psi_{nb} [h_{ij}^B] = \sum_M \int_C \mathcal{D} [g_{\alpha\beta}^E] \exp \left(-I_{nb} [g_{\alpha\beta}^E] \right) \quad (2.171)$$

Agora, a descrição do estado quântico fundamental da função de onda do universo Ψ_{nb} dependerá da classe C de espaços-tempos que contribuem na equação (2.171). Hartle e Hawking sugeriram que a soma fosse feita sobre os espaços-tempos regulares e compactos que apresentassem B como sua única fronteira. A soma feita sobre essa classe C quer dizer que o Universo terá B como sua única fronteira. Assim, não é necessário especificar nenhuma condição de contorno para a hipersuperfície inicial. Ψ_{nb} pode ser entendida como a amplitude de probabilidade do universo ir de uma hipersuperfície tridimensional inicial de volume nulo, isto é, um ponto, para uma hipersuperfície B . Ou seja, Ψ_{nb} é a probabilidade do universo surgir do nada. Tanto a hipersuperfície B quanto sua métrica h_{ij}^B devem ser fornecidos pelo observador. Como exige-se que a classe C contenha somente espaços-tempos regulares, não haverá singularidades. Assim, a aplicação dessa proposta em modelos cosmológicos eliminaria as singularidades à nível quântico. Caso seja necessário considerar a contribuição de campos de matéria Φ_A , deve-se fornecer o valor desses campos sobre B e então incluir na classe C os campos de matéria regulares com seus valores em B . A função de onda do universo Ψ_{nb} se torna

$$\Psi_{nb} [h_{ij}^B, \Phi_A^B] = \sum_M \int_C \mathcal{D}g_{\mu\nu} \mathcal{D}\Phi_A \exp \left(-I [g_{\mu\nu}, \Phi_A] \right). \quad (2.172)$$

A proposta "sem-fronteira" fornece condições suficientes para se obter a função de onda da Relatividade Geral quântica.

2.3.7.2 A proposta de *Tunelamento*

A proposta do "tunelamento" consiste em uma condição de contorno para soluções da equação de Wheeler-DeWitt, principalmente em modelos de cosmologia quântica. Sua motivação principal é definir uma função de onda do universo tal que esta não tenha uma singularidade inicial. Ela se difere de proposta "sem fronteira" por possuir espaços-tempos com assinatura Lorentziana ao invés de uma assinatura Euclidiana. A condição de contorno de "tunelamento" tenta traçar mais fortemente a analogia entre a criação quântica do universo e o tunelamento na mecânica quântica comum. Dentre as várias formulações que Vilenkin trouxe, a mais detalhada é a formulação dos "modos de saída". A alegação dos modos de saída da proposta de condição de contorno de tunelamento argumenta sobre o comportamento das soluções da equação de Wheeler-DeWitt na fronteira do superespaço. A ideia da proposta é que, de maneira análoga àquela em que as soluções da equação de Klein-Gordon são classificadas como frequência positiva ou negativa, Vilenkin tenta classificar as soluções da equação de Wheeler-DeWitt como "entrada" ou "saída" na fronteira. A proposta é então que a função de onda consista unicamente de modos de saída nas partes da fronteira do superespaço que correspondem a 4-geometrias singulares. Também é imposta uma condição de regularidade, de que a Ψ seja limitado em todos os lugares. Para compreender melhor, primeiro, ao considerar a natureza da fronteira do superespaço, esta fronteira consistirá de configurações que, de alguma forma, são singulares. Estas podem ser, por exemplo, valores infinitos nos campos de matéria Ψ_A e suas derivadas $\partial_i \Psi_A$ ou talvez valores infinitos do tensor de Riemann tridimensional ou do volume de hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço no setor gravitacional. No entanto, isso não significa necessariamente que uma 4-geometria fatiada em 3-geometrias seja singular. Com isso, o contorno do superespaço será dividido em duas partes. A primeira, chamada de contorno não-singular, consiste em hipersuperfícies tridimensionais contendo somente singularidades atribuídas ao fatiamento de variedades quadridimensionais. A segunda parte, chamada de contorno singular, contém o restante. Essa parte do contorno é a que corresponde às singularidades da 4-geometria.

Será necessário introduzir o conceito de modos de entrada (ingoing) e de saída (outgoing). A equação de Klein-Gordon é

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0. \quad (2.173)$$

As soluções para a equação de Klein-Gordon da mecânica quântica relativística podem ser expandidas em termos de funções de modo que podem ser positivas ou negativas,

$$\Psi_+ = A_+ e^{-ik_\mu x^\mu} \quad \text{e} \quad \Psi_- = A_- e^{+ik_\mu x^\mu}, \quad (2.174)$$

onde $k_\mu = (-w, \vec{k})$, com $w > 0$. Esses modos podem ser classificados como frequência positiva ou negativa, de acordo com o vetor de Killing tipo-tempo dado por $-i\partial/\partial t$. De maneira mais rigorosa, as soluções dos modos são autofunções do vetor de Killing e a

classificação depende do sinal do autovalor. Outra forma de caracterizar os modos é através da corrente conservada da equação de Klein-Gordon $J^\mu = (J^0, \vec{J})$, onde

$$J^0 = \frac{i}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right), \quad (2.175)$$

e

$$\vec{J} = \frac{i}{2} \left[\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - \Psi (\vec{\nabla} \Psi^*) \right], \quad (2.176)$$

com $J_{,\mu}^\mu = 0$. Com isso, os valores para J^0 em termos de (2.174) são

$$J_+^0 = -w|A_+|^2 \quad ; \quad J_-^0 = w|A_-|^2. \quad (2.177)$$

Pode-se esperar que fazer algo análogo para a equação de Wheeler-DeWitt seria imediato mas, no geral, surge de imediato uma dificuldade. A definição dos modos com frequências positivas e negativas depende da existência de um vetor de Killing. No entanto, no superespaço não existe esse vetor e, portanto, não se pode escrever os modos do tipo Ψ_+ e Ψ_- para a equação de Wheeler-DeWitt[81]. A despeito deste problema, ainda se pode fazer algum progresso ao se restringir a atenção para certas formas aproximadas da função de onda ou então para certas regiões do espaço, como perto da fronteira. Pode-se, por exemplo, olhar para soluções da equação de Wheeler-DeWitt do tipo oscilatório:

$$\Psi = \sum_n C_n e^{iS_n}, \quad (2.178)$$

onde S_n são as soluções para a equação de Hamilton-Jacobi. A corrente para o modo $C_n e^{iS_n}$ é

$$J_n = -|C_n|^2 \nabla S_n. \quad (2.179)$$

Com isso, essa solução será dita de saída ou outgoing se, na fronteira, o vetor $-\nabla S_n$ apontar para fora e de entrada ou ingoing se $-\nabla S_n$ apontar para dentro. Com isso, o enunciado da formulação de Vilenkin para os modos de saída da proposta de tunelamento é " Ψ_T é a solução da equação de Wheeler-DeWitt que é limitada em todo lugar e consiste somente de modos de saída em fronteiras singulares do superespaço". Apesar de parecer vaga na sua definição, a forma de modos de saída de Vilenkin para a condição de contorno de tunelamento se mostra bastante clara e eficaz em definir soluções únicas da equação de Wheeler-DeWitt quando restrita à modelos de minisuperespaço[82].

2.4 Hořava–Lifshitz

No ano de 1915, Albert Einstein introduziu a Relatividade Geral[83, 84], que generaliza a Relatividade Especial e aprimora a teoria clássica da gravidade de Sir Isaac Newton, descrevendo a gravidade como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo. Apesar de seu enorme sucesso, a Relatividade Geral ainda apresenta problemas. O mais relevante talvez seja que em regiões com campos gravitacionais intensos, os espaços-tempos

descritos pela Relatividade Geral desenvolvem singularidades. Nestas situações, a teoria não consegue explicar adequadamente a interação gravitacional e perde-se completamente o poder de previsão. Como um esforço para eliminar essas singularidades, novas teorias geométricas da gravidade foram apresentadas como por exemplo a teoria das cordas, a gravidade quântica em loop e a teoria Hořava-Lifshitz.

2.4.1 A teoria

A teoria que hoje é conhecida como a "teoria de Hořava-Lifshitz" surge no contexto de esforços contínuos para formular uma teoria quântica da gravidade. A gravidade quântica busca reconciliar a relatividade geral, que descreve a gravidade em escalas macroscópicas, com a mecânica quântica, que governa as forças fundamentais em escalas microscópicas. Proposta pelo físico Petr Hořava em 2009[85], é uma tentativa de formular uma teoria quântica da gravidade que possa ser renormalizável, diferenciando-se da Relatividade Geral de Einstein. A novidade que fez o trabalho de Hořava se diferenciar de outras abordagens para a gravidade quântica foi tirar vantagem de um conceito teórico desenvolvido na física da matéria condensada chamado "teoria de fenômenos quânticos críticos"[86]. Na época em que Hořava publicou este artigo, uma nova classe de modelos foi introduzida[87] onde estes exibiam propriedades de escala com anisotropia entre espaço e tempo. Tal escala de anisotropia é bastante comum em sistemas de matéria condensada, onde o grau da anisotropia entre espaço e tempo é caracterizado pelo chamado "expoente crítico dinâmico z "[88, 89]. Nessa abordagem da gravidade quântica são considerados sistemas cujas escalas, à curta distância, exibem uma forte anisotropia entre espaço e tempo, com $z > 1$. Essa propriedade melhora o comportamento em curta escala da teoria. O preço a se pagar por isso é que a teoria não apresentará invariância relativística à curtas distâncias. Em outras palavras, o fenômeno da simetria de Lorentz é quebrado em altas energias onde a assimetria entre espaço e tempo acontece. Para baixas energias, a teoria de Hořava-Lifshitz recupera a Relatividade Geral com $z \rightarrow 1$ e, conseqüentemente, a simetria de Lorentz. O objetivo de Hořava era construir uma teoria da gravidade em $3 + 1$ dimensões com escala anisotrópica usando o arcabouço teórico tradicional da Teoria Quântica de Campos, ou seja, métodos de integrais de caminho ou quantização canônica. E, como é discutido neste artigo de 2009, uma teoria da gravidade construída dessa forma será power-counting renormalizável em $3 + 1$ dimensões quando $z = 3$. O fenômeno da quebra da simetria de Lorentz vem de um processo vindo da física da matéria condensada baseado na escala anisotrópica entre espaço e tempo com o expoente crítico z :

$$t \longrightarrow b^z t \quad \text{e} \quad \vec{x} = b\vec{x}, \quad (2.180)$$

onde b é um parâmetro de escala. Como a teoria original de Hořava foi construída com base no formalismo ADM, a métrica que representa melhor a assimetria entre espaço e

tempo será

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -N^2(t, \mathbf{x}) + N_a(t, \mathbf{x})N^a(t, \mathbf{x}) & N_b(t, \mathbf{x}) \\ N_a(t, \mathbf{x}) & h_{ab}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (2.181)$$

Existem duas versões da teoria de Hořava-Lifshitz usando a função lapso como parâmetro para classificá-las:

$$(i) N(t) \longrightarrow \text{versão projetável} \quad (ii) N(t, \vec{x}) \longrightarrow \text{versão não-projetável}. \quad (2.182)$$

Como nas métricas da cosmologia a função lapso é o que rotula o parâmetro temporal[85, 90], é um tanto quanto razoável trabalhar com a versão projetável[91]. É possível trabalhar com a versão não-projetável em casos mais gerais[92, 93], porém, existem algumas questões à respeito da consistência presentes nessa versão da teoria. Foi visto que a versão não-projetável sofre com a presença de modos fantasma e, portanto, não é consistente. A versão projetável se vê livre desses fantasmas que acarretam essa instabilidade. No entanto, esse problema não aparece nas versões de minisuperespaço dos modelos cosmológicos[91]. Ainda no seu artigo de 2009[85], Hořava considerou uma simplificação para reduzir o número de possíveis termos contribuindo com a parte potencial da sua teoria. Essa simplificação ficou conhecida como "condição de balanço detalhado". O problema dessa simplificação é que faz a teoria ter propriedades de renormalização mais simples, porém, a Lagrangiana terá termos extras[94, 95]. Sem essa aproximação, é possível construir uma teoria bem definida e fenomenologicamente relevante sem a presença de termos extra[96].

2.4.2 Construção do modelo e a ação na teoria de Hořava-Lifshitz

Para construir um modelo de cosmologia FLRW no contexto da gravidade de Hořava-Lifshitz será usada a métrica

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.183)$$

onde $N(t)$ é a função lapso, $a(t)$ é o fator de escala e os valores do parâmetro $k = -1, 0$ e $+1$ correspondem respectivamente à um universo aberto, plano e fechado. Para a métrica FLRW, as componentes do vetor de shift são zero[97]. Portanto, do formalismo ADM tem-se que

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -N^2(t) & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.184)$$

onde

$$h_{ij} = a^2(t) \text{diag} \left(\frac{1}{1 - kr^2}, r^2, r^2 \text{sen}^2\theta \right) \quad (2.185)$$

é a métrica das hipersuperfícies tridimensionais.

2.4.2.1 Parte Gravitacional

De acordo com [85, 97], a parte gravitacional da ação da teoria de Hořava-Lifshitz é construída usando um termo cinético e um termo potencial:

$$S_{HL} = S_K + S_V. \quad (2.186)$$

O termo cinético, S_K , vem da ação de Einstein-Hilbert[97]. Ele é dado por

$$S_K \sim \int dt d^3 \mathbf{x} N \sqrt{h} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2), \quad (2.187)$$

onde h é o determinante de h_{ij} e λ é uma constante de correção para a Relatividade Geral devido à teoria de Hořava-Lifshitz. O termo K_{ij} é a curvatura extrínseca com traço K dada por (2.119). O termo potencial para a parte gravitacional da ação tem a forma[85, 97]

$$S_V = - \int dt d^3 \mathbf{x} N \sqrt{h} V[h_{ij}], \quad (2.188)$$

onde V é uma função escalar que depende somente da métrica espacial h_{ij} e suas derivadas espaciais. Por causa da anisotropia mostrada em (2.180), suas dimensões são $[\mathbf{x}] = [\kappa]^{-1}$ e $[t] = [\kappa]^{-z}$, onde $[\kappa]$ simboliza a dimensão de momento. Nesse mesmo sentido, as dimensões da métrica, da função lapso e do vetor de shift serão $[h_{ij}] = [N] = 1$ e $[N^i] = [\kappa]^{z-1}$. Com isso, o potencial num espaço tridimensional tem dimensão $[V[h_{ij}]] = [\kappa]^{z+3}$. Após essa análise dimensional, pode-se argumentar que o potencial $V[h_{ij}]$ será formado pelo tensor de Ricci, pelo escalar de Ricci e algumas derivadas que, para o caso de $z = 3$, terá a forma

$$\begin{aligned} V[h_{ij}] = & g_0 \zeta^6 + g_1 \zeta^4 R + g_2 \zeta^2 R^2 + g_3 \zeta^2 R_{ij} R^{ij} \\ & + g_4 R^3 + g_5 R R_{ij} R^{ij} + g_6 R_{ij} R^{jk} R_k^i \\ & + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}, \end{aligned} \quad (2.189)$$

onde os g_i ($i = 0, 1, \dots, 8$) são constantes de acoplamento adimensionais que vêm da teoria de Hořava-Lifshitz e os ζ são introduzidos possuindo dimensão $[\zeta] = [\kappa]$ para fazer os g_i adimensionais. Sob essas condições, a ação $S_{HL} = S_K + S_V$ é dada por

$$\begin{aligned} S_{HL} = & \frac{1}{2} M_p^2 \int d^3 x dt N \sqrt{h} \left[K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_p^2 - g_1 R - M_p^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij} R^{ij}) \right. \\ & \left. - M_p^{-4} (g_4 R^3 + g_5 R R_{ij} R^{ij} + g_6 R_{ij} R_k^j R_i^k + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}) \right], \end{aligned} \quad (2.190)$$

onde, recapitulando, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} M_p = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = \text{Massa de Planck} \\ h_{ij} = \text{Métrica da hipersuperfície tridimensional} \\ K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 = \text{Parte cinética da ação} \\ K_{ij} = \text{Curvatura extrínseca} \\ R = \text{Escalar de curvatura} \\ R_{ij} = \text{Tensor de Ricci} \\ g_i (i = 0, 1, \dots, 8) = \text{Constantes de acoplamento.} \end{array} \right.$$

Usando $c = 1, \zeta = 1, 2\Lambda = g_0 M_p^2, g_1 = -1$ e introduzindo a métrica FLRW(2.183) na ação (2.190), chega-se em

$$S_{HL} = \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + \frac{1}{3(3\lambda - 1)} \left(6ka - 2\Lambda a^3 - \frac{12k^2}{a M_p^2} (3g_2 + g_3) - \frac{24k^3}{a^3 M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right) \right], \quad (2.191)$$

onde

$$\eta = \frac{3(3\lambda - 1)M_p^2}{2} \int d^3t \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.192)$$

Se, por questões de simplicidade, $\eta = 1$, tem-se

$$S_{HL} = \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right], \quad (2.193)$$

de onde é possível extrair a densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{HL} = N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right] \quad (2.194)$$

com os novos parâmetros definidos por

$$g_c = \frac{2}{3\lambda - 1}, \quad g_\Lambda = \frac{2\Lambda}{3(3\lambda - 1)}, \quad g_r = \frac{4}{(3\lambda - 1)M_p^2} (3g_2 + g_3) \quad (2.195)$$

$$g_s = \frac{8}{(3\lambda - 1)M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6).$$

Falando sobre o significado físico desses termos, o parâmetro g_c , que deve ser $g_c > 0$, é a constante de acoplamento relacionada com a curvatura. A constante de acoplamento g_Λ faz o papel da constante cosmológica Λ , já que é definida em termos dela. Fisicamente, o parâmetro g_r é uma constante de acoplamento que age como radiação e g_s é um termo que age como matéria rígida. O termo λ funciona de forma que funciona de forma que a RG é recuperada conforme $\lambda \rightarrow 1$ [95, 98, 99]. A Hamiltoniana do modelo pode ser obtida através da definição padrão $H_{HL} = \dot{a}p_a - \mathcal{L}_{HL}$, onde o momento conjugado para cada variável dinâmica vem de $p_q = \partial L / \partial \dot{q}$. Com isso, o momento conjugado para o fator de escala é

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}_{HL}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}} \left[-\frac{2\dot{a}^2 a}{N^2} \right] = -\frac{2\dot{a}a}{N}. \quad (2.196)$$

Ao usar (2.196) na definição da densidade de Hamiltoniana chega-se em

$$H_{HL} = N \mathcal{H}_{HL} = N \left[-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (2.197)$$

2.4.2.2 Parte da matéria

Para obter a Hamiltoniana completa do modelo é necessário adicionar a parte relacionada ao conteúdo material do sistema, que será considerado um fluido perfeito com

4-velocidade $U^\mu = \delta_0^\mu$. O fluido perfeito satisfaz a equação de estado (2.67) e o tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.198)$$

onde p é a pressão do fluido e ρ é sua densidade de energia. A Hamiltoniana do fluido perfeito H_{pf} é obtida usando o formalismo de Schutz[100, 101]. Nesse formalismo a 4-velocidade é escrita em termos dos seis potenciais termodinamicos $(\mu, \epsilon, \zeta, \beta, \theta, S)$ como

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (2.199)$$

onde μ é a entalpia, S a entropia, ζ e β não aparecem nos modelos FLRW e ϵ e θ não possuem significado físico claro. A condição de normalização para a 4-velocidade é

$$U^\nu U_\nu = -1. \quad (2.200)$$

Da mesma maneira que na parte gravitacional, para encontrar a Hamiltoniana da parte referente à matéria começa-se da ação para o fluido perfeito. Segundo o formalismo, essa ação é escrita

$$S_{pf} = \int d^4x \sqrt{-g}(16\pi p), \quad (2.201)$$

com g sendo o determinante da métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$ e p sendo a pressão do fluido. Usando a métrica (2.183) e as considerações à respeito do fluido, chega-se em

$$S_{pf} = \int dt \left[N^{-1/\omega} a^3 \frac{\omega(\dot{\epsilon} + \theta\dot{S})^{1+1/\omega}}{(\omega + 1)^{1+1/\omega}} e^{-S/\omega} \right]. \quad (2.202)$$

Partindo dessa ação é possível obter a Hamiltoniana do fluido perfeito

$$H_{pf} = N\mathcal{H}_{pf} = N(P_\epsilon^{\omega+1} a^{-3\omega} e^S), \quad (2.203)$$

onde

$$P_\epsilon = N^{-1/\omega} a^3 (\dot{\epsilon} + \theta\dot{S})^{\frac{(\omega+1)^{-1/\omega}}{\omega}} e^{-S/\omega}. \quad (2.204)$$

A Hamiltoniana H_{pf} pode ser escrita de maneira mais simples ao fazer

$$T = -P_S e^{-S} P_\epsilon^{-(\omega+1)}, \quad p_T = P_\epsilon^{\omega+1} e^S, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon - (\omega + 1) \frac{P_S}{P_\epsilon}, \quad \bar{P}_\epsilon = P_\epsilon, \quad P_S = \theta P_\epsilon. \quad (2.205)$$

Com essas transformações, a Hamiltoniana da matéria se escreve

$$H_{pf} = N\mathcal{H}_{pf} = N \frac{p_T}{a^{3\omega}}, \quad (2.206)$$

onde p_T é o momento canonicamente conjugado em relação à T . Finalmente, a Hamiltoniana completa pode ser escrita ao inserir o termo referente à matéria na equação (2.197):

$$H = N\mathcal{H} = N \left[-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{p_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (2.207)$$

Ao se aplicar a condição $\mathcal{H} = 0$ na Hamiltoniana total (2.207) e usar (2.196), chega-se na equação de Friedmann do modelo[96, 102]:

$$\frac{\dot{a}^2}{N^2} + g_c k - g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - g_s \frac{k^3}{a^4} - \frac{p_T}{a^{3\omega+1}} = 0. \quad (2.208)$$

Dessa equação identifica-se o potencial:

$$V(a) = g_c k - g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - g_s \frac{k^3}{a^4}. \quad (2.209)$$

2.5 Parte Computacional

Equações diferenciais surgem em diversas partes da física: dinâmica de fluidos, transferência de calor, mecânica quântica, eletromagnetismo, etc. No entanto, nem todas essas equações podem ser resolvidas de maneira analítica. A abordagem computacional através da análise numérica de problemas com modelos matemáticos pode servir como alternativa para os casos onde uma solução analítica é excepcionalmente difícil ou até impossível de ser calculada. Para isso, a análise numérica conta com algoritmos, os métodos numéricos, que usam algum tipo de aproximação para fornecer soluções numéricas aproximadas, mas precisas, para o problema que está sendo estudado. Apesar de não ser assim na sua origem, este tipo de abordagem para solucionar problemas é, hoje, muito associado ao uso de computadores. Exatamente por isso, o crescimento atual no poder computacional, previsto pela lei de Moore[103], permitiu o uso de análises numéricas de maior complexidade, fornecendo modelos matemáticos mais detalhados e realistas na ciência e na engenharia. A análise numérica é hoje utilizada em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo equações diferenciais ordinárias encontradas na mecânica celeste (previsão dos movimentos de planetas, estrelas e galáxias), álgebra linear numérica na análise de dados e equações diferenciais estocásticas e cadeias de Markov para simular células vivas em medicina e biologia.

2.5.1 Método de diferenças finitas

Como foi dito, alguns problemas físicos possuem uma dificuldade muito grande de serem solucionados de maneira analítica e, por isso, na maior parte desses casos será mais fácil apelar para métodos numéricos com suas soluções aproximadas. O método numérico mais comumente utilizado para solução de equações diferenciais é o chamado "Método de diferenças finitas"[104, 105]. Métodos envolvendo diferenças finitas para resolver problemas de valor de contorno substituem cada uma das derivadas na equação diferencial por uma aproximação de quociente de diferença apropriada. Para uma função $f(x)$, caso a diferença entre os valores de x seja sempre o mesmo, é comum denotar Δx como h , que é chamado de "passo":

A aproximação para as diferenças finitas tem sua origem numa expansão em série de Taylor para a função $f(x)$. A expansão para $f(x_{i+1})$ é

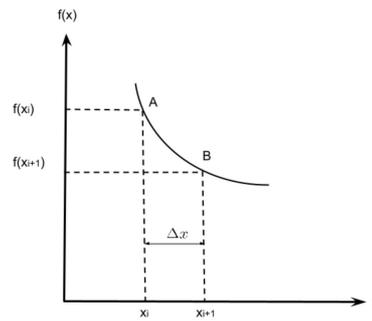


Figura 20 – Representação gráfica para o método de diferenças finitas

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!}\Delta x^2 + \dots \quad (2.210)$$

então,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f''(x_i)}{2!}\Delta x - \dots \quad (2.211)$$

Omitindo os termos contendo derivadas de segunda ordem ou superiores,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (2.212)$$

Isso é conhecido como diferença finita avançada ou progressiva (forward finite difference) porque o segundo ponto está depois de x_i , ou seja, x_{i+1} . As fórmulas a seguir para os outros tipos de diferença finita seguem esta mesma lógica que foi aplicada para encontrar a derivada de $f(x)$, porém, para derivadas de ordem superior [105, 104, 106]:

- Diferença finita avançada ou progressiva - Erro: $\mathcal{O}(\Delta x)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (2.213)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{\Delta x^2} \quad (2.214)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x^3} \quad (2.215)$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{\Delta x^4} \quad (2.216)$$

- Diferença finita central - Erro: $\mathcal{O}(\Delta x^2)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (2.217)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (2.218)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2\Delta x^3} \quad (2.219)$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{\Delta x^4} \quad (2.220)$$

- Diferença finita regressiva ou retrógrada - Erro: $\mathcal{O}(\Delta x)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (2.221)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{\Delta x^2} \quad (2.222)$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{\Delta x^3} \quad (2.223)$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4}))}{\Delta x^4} \quad (2.224)$$

2.5.2 Método de Crank-Nicolson

Na análise numérica, os métodos de diferenças finitas são uma classe de técnicas numéricas para resolver equações diferenciais aproximando derivadas com diferenças finitas. Dentro dessa classe de métodos se encontra o chamado "método de Crank-Nicolson"[104], desenvolvido por John Crank e Phyllis Nicolson [107]. Este é um método que possui uma grande estabilidade e é utilizado para resolver equações diferenciais do tipo parabólica, como a equação do calor e similares. Essas equações possuem o formato

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.225)$$

onde $u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0$ para qualquer $t > 0$ e $u(x, t = 0) = f(x)$, onde $0 \leq x \leq l$. Ele é obtido ao fazer uma combinação entre uma diferença progressiva no j -ésimo passo no tempo t ,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (2.226)$$

e uma diferença regressiva no $j + 1$ -ésimo passo no tempo t ,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0, \quad (2.227)$$

resultando no que é conhecido como o método de Crank-Nicolson:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0. \quad (2.228)$$

A figura (21) mostra visualmente o método de Crank-Nicolson para um problema 1D [104].

2.5.3 Algoritmo de Thomas

O Algoritmo de Thomas[108, 109] ou Algoritmo de matriz tridiagonal é uma forma eficiente de resolver sistemas de equações que têm uma estrutura de matriz tridiagonal. Seu nome é uma homenagem ao físico e matemático Llewellyn Thomas e o algoritmo tem sua origem na simplificação do método de eliminação Gaussiana. Uma equação matricial cuja matriz é tridiagonal é escrita

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad (2.229)$$

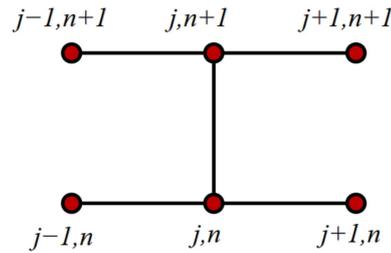


Figura 21 – Representação pictórica do método de Crank-Nicolson. Fonte: By Berland at English Wikipedia - Transferred from en.wikipedia to Commons., Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2578576>

que, na forma matricial, se transforma em

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (2.230)$$

É importante notar que a equação (2.230) deixa evidente que as diagonais para a_i e c_i possuem um elemento a menos quando comparados com a diagonal principal de b_i . O primeiro passo para a implementação do método consiste no cálculo de novos coeficientes, que são denotados pelo superíndice ('):

$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{b_i}, & i = 1 \\ \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.231)$$

e

$$d'_i = \begin{cases} \frac{d_i}{b_i}, & i = 1, \\ \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (2.232)$$

Finalmente, o segundo passo resolve todas as incógnitas da última para a primeira:

$$\begin{aligned} x_n &= d'_n, \\ x_i &= d'_i - c'_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned} \quad (2.233)$$

3 Probabilidade de tunelamento para o nascimento de um universo com radiação na teoria de Hořava-Lifshitz

3.1 Introdução

A conquista de DeWitt no estudo da quantização de um modelo cosmológico[110] foi o ponto de partida para uma infinidade de estudos sobre a Cosmologia Quântica. Paul Dirac iniciou este estudo com a formulação hamiltoniana correta da Relatividade Geral[111, 112, 113]. Arnowitt, Deser e Misner vieram depois com uma importante interpretação geométrica para a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral[114] chamada de formalismo ADM, discutido na seção 2.3.1. A quantização da Relatividade Geral usando o formalismo de Dirac leva às equações de Wheeler-DeWitt[110, 115], como mostrado na seção 2.3.4. O resultado da aplicação deste formalismo a um modelo cosmológico é conhecido como Cosmologia Quântica. A Relatividade Geral afirma que nosso Universo começa no evento chamado Big Bang. Isto cria um dilema porque o Big Bang é em si uma singularidade. Isto significa que a Relatividade Geral perde os seus poderes preditivos no exato local deste evento no espaço-tempo. Assim, a Cosmologia Quântica surge como uma tentativa de se livrar das singularidades presentes nas soluções cosmológicas da Relatividade Geral[116]. A solução oferecida pela Cosmologia Quântica utiliza o tunelamento quântico como fator central. É conhecido como *Criação Espontânea do Universo à partir do nada*[117], que afirma que o nascimento do Universo primordial depende apenas da natureza quântica da teoria. O Universo é então tratado como um sistema quântico e as variáveis dinâmicas estão associadas à geometria do espaço-tempo[110, 118]. Ele se localiza na origem do espaço e do tempo, aprisionado por uma barreira de potencial. Sendo o Universo, nesta época, tratado como um objeto quântico, ele pode atravessar esta barreira de potencial na direção em que o fator de escala cresce e emergir à direita dela com um tamanho finito. O exato momento em que emerge da barreira estabelece o início do Universo com tamanho finito, o que significa que está livre da singularidade do Big Bang. Por se tratar de um sistema quântico, existe uma quantidade importante chamada "função de onda do Universo". Esta função de onda deve satisfazer as equações de Wheeler-DeWitt mencionadas anteriormente porque é isso que se usa para compreender e descrever o cenário de criação espontânea do Universo a partir do nada. Além disso, a ideia de um nascimento do Universo por tunelamento quântico não é empecilho para um Universo inflacionário[119, 120, 121]. Petr Hořava trouxe uma nova teoria geométrica da gravidade em 2009[85] na tentativa de superar alguns obstáculos encontrados na Relatividade Geral. O principal interesse por trás disso era obter uma teoria da gravidade renormalizável e unitária. Esta teoria, hoje chamada de teoria de Hořava-Lifshitz, é conhecida por usar uma escala anisotrópica entre espaço e tempo encontrada em sistemas de matéria condensada. Esta anisotropia é medida através de um expoente crítico dinâmico z . Neste contexto, a simetria de Lorentz não é considerada

fundamental. Em vez disso, é assumida como fundamentalmente ausente em altas energias, porém, aparece como uma simetria emergente em longas distâncias. Ou seja, em baixas energias, a teoria de Hořava-Lifshitz tende à Relatividade Geral e a simetria de Lorentz é restaurada. Hořava construiu sua teoria utilizando elementos do formalismo ADM [122, 114] em que a estrutura do espaço-tempo pode ser entendida como sendo composta por folhas ou camadas empilhadas. Essas camadas representam superfícies tipo-espaço rotuladas como $\Sigma_t, \Sigma_{t+dt}, \dots$, na direção da coordenada temporal, que dita a direção do "empilhamento" das folhas. Estes assuntos foram explorados nas seções 2.3.1 e 2.4. Esse espaço-tempo é, então, descrito através de quantidades provenientes da decomposição da métrica do espaço-tempo quadridimensional $g_{\mu\nu}$. A métrica $g_{\mu\nu}$ é dividida em uma métrica tridimensional h_{ij} para as camadas tipo-espaço, no vetor de shift N^i e na função lapso N . A situação mais geral é aquela em que todas essas quantidades deveriam depender tanto do espaço quanto do tempo. Na tentativa de facilitar as coisas, Hořava fez duas suposições: a primeira foi impor que N deveria depender apenas da variável tempo, que é conhecida como condição projetável. A segunda suposição era reduzir o número de termos que contribuem para o componente potencial de sua teoria, que é conhecido como condição de balanço detalhado. No entanto, essa condição de balanço detalhado não foi uma boa escolha devido à fantasmas e instabilidades. Apesar desta escolha desafortunada, desde a sua introdução, muitos trabalhos surgiram investigando diferentes aspectos da teoria de Hořava-Lifshitz. Em [123] os autores estudam um modelo de cosmologia FLRW no contexto da teoria de HL projetável e ao final mostram que a quantização consegue evitar as singularidades do tipo Big Bang que apareceram nas soluções clássicas. Também é visto que os picos da função de onda estão razoavelmente próximos das trajetórias clássicas, o que significa que as soluções clássica e quântica concordam entre si. Em [124] foi estudado um modelo cosmológico no contexto da teoria de HL onde o fluido perfeito utilizado é o gás de Chaplygin usando o argumento de que ele consegue descrever a transição de um universo permeado por matéria do tipo-poeira para estágio de expansão acelerada. Os autores chegam na equação de Wheeler-DeWitt após o processo de quantização canônica e resolvem a equação de Wheeler-DeWitt para vários casos mostrando que é possível obter soluções onde o valor esperado do fator de escala evita a singularidade no nível quântico. Em [125] o autor estuda um modelo cosmológico FLRW no contexto da teoria de HL porém usando a interpretação de deBroglie-Bohm. Ele considera um modelo onde existem dois fluidos perfeitos: radiação e poeira. Após a quantização do sistema, o autor consegue mostrar que as soluções encontradas para o fator de escala conseguem evitar as singularidades do Big Bang e do Big Crunch. No artigo [91] os autores trabalham com modelos com e sem conteúdo material. Ao investigar o valor esperado do fator de escala, os autores obtêm um comportamento de bouncing que prevê um tamanho mínimo para o universo, o que tem suporte de vários candidatos à gravidade quântica. Em [102] é mostrado que, através do formalismo de Fadeev-Jackiw, é introduzida uma não-comutatividade no modelo que

pode ajudar a explicar a expansão acelerada do universo. Em [126] os autores usam a teoria de Hořava-Lifshitz para estudar como as características universais do anel e da refletividade de um buraco negro de Schwarzschild estático são afetadas pela escala de Lifshitz. No artigo [127], os autores estudam correções emergentes de uma extensão de Hořava-Lifshitz do setor escalar complexo à condensação de Bose-Einstein e aos parâmetros termodinâmicos e obtém a correção da escala de Lifshitz para a temperatura crítica que define a condensação de Bose-Einstein. Os autores de [128] mostram que na gravidade de Hořava-Lifshitz há uma zona de onda bem definida onde os graus de liberdade físicos se propagam de acordo com uma equação de evolução linear não relativística de alta ordem em derivadas espaciais, que se reduz à equação de onda em baixas energias.

No presente capítulo pretende-se estudar o nascimento do universo num modelo cosmológico onde o setor gravitacional é descrito pela teoria Hořava-Lifshitz. Portanto, aqui será considerado um espaço-tempo descrito pela métrica FLRW, homogêneo e isotrópico, com seções espaciais curvadas positivamente ($k = 1$). O conteúdo de matéria do modelo é um fluido perfeito de radiação ($\omega = 1/3$). Com relação à teoria de HL, será usada a versão projetável dessa teoria, sem a condição de balanço detalhado. A versão projetável da teoria de HL pode parecer um tanto limitada por usar uma função lapso que só depende do tempo, ou seja, $N = N(t)$. Entretanto, no contexto dessa afirmação o vínculo da Hamiltoniana clássica não é mais local e deve-se calcular sua integral sobre todo o espaço, o que implica em não ter uma conservação de energia local[123, 124]. Em [129] é mostrado que esse procedimento resulta em soluções clássicas no limite do IR da gravidade de HL, o que equivale a equações de Friedmann com termos adicionais. Entretanto, em modelos FLRW essas integrais são simplesmente o volume espacial e esses termos adicionais desaparecem[94]. Resumindo, resultados importantes para as equações de Einstein como Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker podem ser obtidos na versão projetável e estendidos para a versão não-projetável através de alguns cálculos[130]. Tendo em mãos a Hamiltoniana da parte gravitacional do modelo obtida pelo formalismo ADM e a Hamiltoniana da parte referente à matéria do modelo obtida pelo formalismo de Schutz, nota-se que a barreira de potencial tem duas possibilidades de formato. No primeiro caso, ela tem a forma de uma barreira única. No segundo, ela consiste em um poço seguido de uma barreira. Devido ao fato da primeira forma de barreira ser um caso particular da segunda, é suficiente olhar somente para este segundo caso. Para aprender mais sobre esse modelo específico, foi analisada a dinâmica clássica do fator de escala. Partindo do hamiltoniano total, é possível construir um retrato de fase do modelo que dá uma ideia qualitativa sobre os possíveis comportamentos das soluções para o fator de escala. Então, usando mais uma vez o hamiltoniano total do modelo é possível encontrar equações de Hamilton. Das soluções dessas equações, obtém-se quantitativamente todas as soluções possíveis de fator de escala para o modelo. Após obter essas soluções, o modelo é quantizado utilizando o formalismo de Dirac[111, 131]. Dessa quantização é obtida a

equação de Wheeler-DeWitt do modelo. Essa equação é resolvida numericamente e, então, é calculada a probabilidade de tunelamento para o nascimento do Universo através de integração, fornecendo TP_{int} e através da aproximação WKB, fornecendo TP_{WKB} .

3.2 O modelo clássico

Considera-se um universo isotrópico e homogêneo, descrito pela métrica FLRW da equação (2.183),

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right],$$

onde $N(t)$ é a função lapso e k , com valores $-1, 0$ e 1 é responsável por descrever a curvatura das seções espaciais. Esses valores de k correspondem à uma geometria aberta, plana ou fechada, respectivamente. Para este modelo será considerado que $k = +1$, correspondendo à uma curvatura positiva das regiões tipo-espaço. Também será usado o sistema de unidades naturais, onde $\hbar = 8\pi G = c = k_B = 1$. O conteúdo de matéria do modelo é dado por um fluido perfeito de radiação com a 4-velocidade dada por $U^\mu = \delta_0^\mu$ no sistema de coordenadas co-móvel. O tensor energia-momento do sistema é dado pela equação (2.198). A equação de estado para o fluido de radiação é $p = \rho/3$. Partindo da ação (2.190), é possível reescrevê-la na forma

$$S_{HL} = \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right], \quad (3.1)$$

com os novos coeficientes dados por (2.195). É importante ressaltar que o parâmetro g_c deve ser positivo ($g_c > 0$) pois está associado à curvatura. Para o presente modelo, foi usado que $g_c > 0, g_\Lambda \geq 0, g_r \geq 0$ e $g_s < 0$. A mecânica clássica fornece a relação entre a ação e a Lagrangiana, que é escrita $S = \int L dt$. Com base nessa relação, é possível chegar à

$$\mathcal{L}_{HL} = N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.2)$$

Calculando o momentum canônico,

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}_{HL}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}} \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N} \right] = -\frac{2\dot{a}a}{N} \quad (3.3)$$

e introduzindo-o na Lagrangiana (3.2), obtém-se a Hamiltoniana do setor gravitacional:

$$H_{HL} = N \mathcal{H}_{HL} = N \left[-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.4)$$

Como citado em 2.4.2.2, a parte da Hamiltoniana total referente à matéria vem do formalismo de Schutz. Ela é dada por

$$H_{pf} = N \mathcal{H}_{pf} = N \frac{p_T}{a^{3\omega}}, \quad (3.5)$$

onde p_T é o momentum canonicamente conjugado em relação à T . Unindo as Hamiltonianas referente às partes gravitacional e da matéria, tem-se a Hamiltoniana total:

$$H_{total} = N\mathcal{H}_{total} = N \left[-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{p_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (3.6)$$

Visando entender melhor sobre o comportamento clássico do fator de escala, deve-se primeiramente resolver as equações de Hamilton. Elas são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{a} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a} \left[N \left(-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{p_T}{a^{3\omega}} \right) \right], \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial a} = -N \left(\frac{p_a^2}{4a^2} - g_c k + 3g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - 3g_s \frac{k^3}{a^4} - \frac{(3\omega)p_T}{a^{3\omega+1}} \right), \\ \dot{T} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_T} = 1, \\ \dot{p}_T &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial T} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde o ponto representa a derivada com respeito à variável do tempo conforme $d\eta \equiv Ndt$. Usando o gauge $N = a$, $k = 1$ e o valor $\omega = 1/3$ que caracteriza um fluido de radiação, chega-se a

$$\begin{cases} \dot{a} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_a} = -\frac{p_a}{2}, \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial a} = -\frac{p_a^2}{4a} + g_c a - 3g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + 3\frac{g_s}{a^3} + p_T, \\ \dot{T} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_T} = 1, \\ \dot{p}_T &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial T} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ao impor o vínculo $\mathcal{H} = 0$ para a Hamiltoniana total

$$-\frac{p_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{p_t}{a^{3\omega}} = 0, \quad (3.9)$$

e resolver para p_a , obtém-se

$$p_a(a) = \pm 2 \left[-g_c k a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r k^2 + g_s \frac{k^3}{a^2} + \frac{p_t}{a^{3\omega-1}} \right]^{1/2}. \quad (3.10)$$

Impondo o vínculo $\mathcal{H} = 0$ em (3.6) pode-se identificar o termo do potencial clássico $V_c(a)$:

$$V_c(a) = g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2}. \quad (3.11)$$

Como mencionado anteriormente, o parâmetro g_c deve ser positivo. O momentum p_T também é positivo por estar associado à densidade de energia do fluido. Para estudar potenciais no formato de barreiras bem definidas, o modelo será construído usando $g_r \geq 0$, $g_\Lambda > 0$ e $g_s < 0$. A escolha de um g_s negativo foi feita porque, nessa faixa de valores, o potencial desenvolve uma barreira infinita positiva na origem e, assim, o modelo ficará livre da singularidade do Big Bang. As condições escolhidas para os parâmetros do potencial $V_c(a)$ fazem com que ele possa assumir dois formatos diferentes. O primeiro

consiste em uma barreira de potencial simples. O segundo formato descreve um poço seguido de uma barreira. Os dois casos podem ser vistos nas figuras (22a) e (22b), respectivamente. As figuras (23a) e (23b) comparam o comportamento do quadrado da função de onda $|\Psi|^2$ ao tunelar as barreiras (22a) e (22b), respectivamente, com energias próximas ao topo das barreiras.

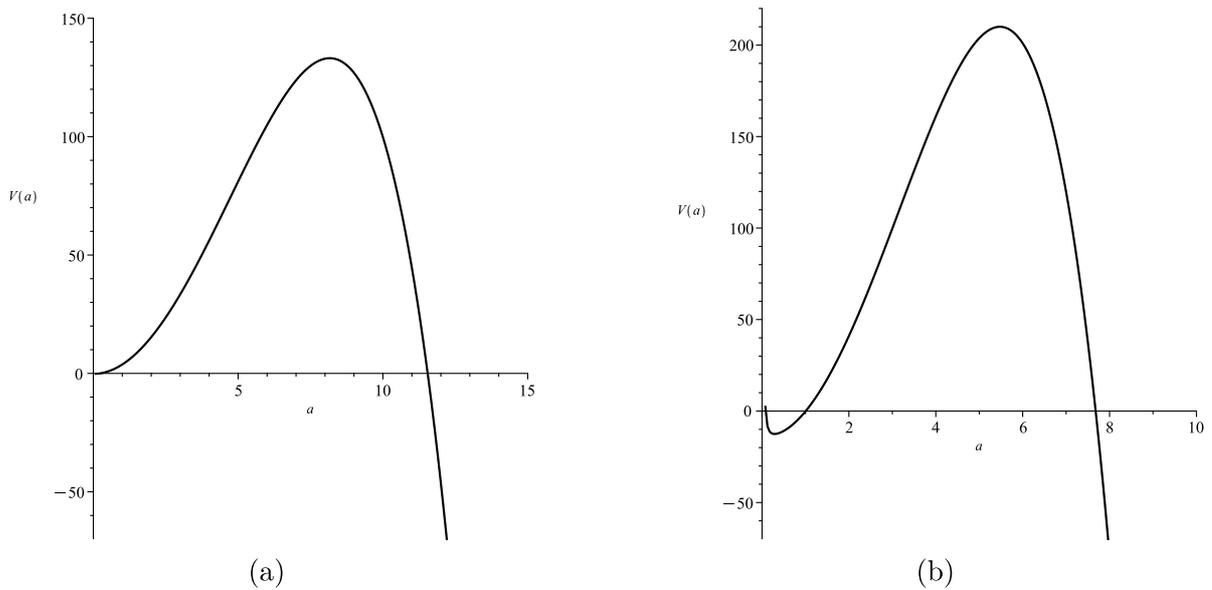


Figura 22 – Comportamento do potencial clássico $V_c(a)$ para as duas situações possíveis. Na situação (a) tem-se $g_c = 4.0$, $g_\Lambda = 0.03$, $g_r = 0.2$ e $g_s = -0.000001$ enquanto que, na situação (b) tem-se $g_c = 15.0$, $g_\Lambda = 0.25$, $g_r = 15.0$ e $g_s = -0.0000001$. Para ambos, $k = +1$, $\omega = 1/3$ e $p_T = 0$.

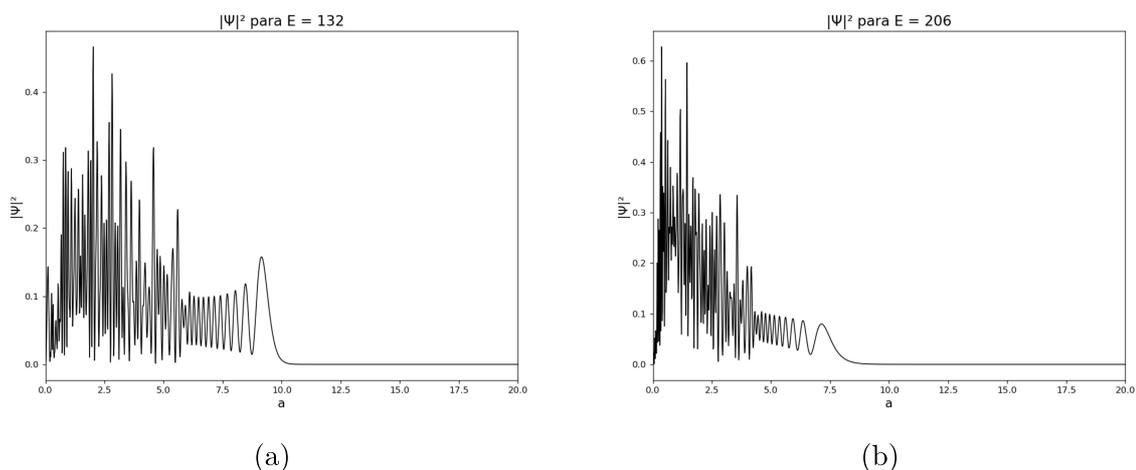


Figura 23 – Comportamento do quadrado da função de onda $|\Psi|^2$ no tunelamento das barreiras mostradas nas figuras (22a) e (22b), respectivamente.

O potencial da figura (22a) tem um máximo global em $V_{max_1} = 133.1333486$ enquanto que o potencial da figura (22b) tem um máximo global $V_{max_2} = 210.0033333$ e um mínimo local em $V_{min} = -12.55217920$. Como o primeiro potencial, que descreve uma barreira de

potencial, pode ser visto como um caso particular do segundo, que descreve uma barreira infinita na origem, um poço e uma barreira de potencial finita, a atenção será direcionada para o segundo caso. Pode-se investigar a dinâmica do fator de escala descrita pelas equações de Hamilton através da projeção no plano (a, p_a) do espaço de fase do modelo referente ao potencial da figura (22b). Isso é mostrado na figura (24). Após combinar

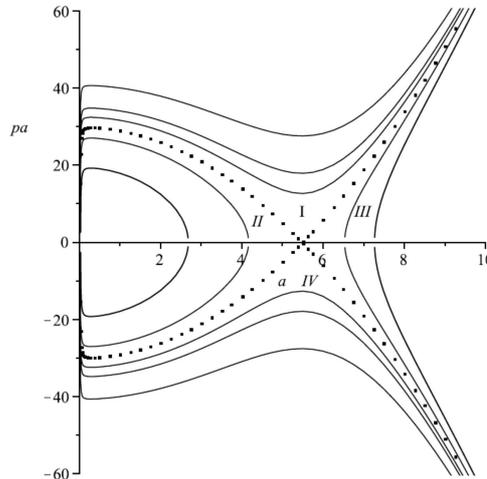


Figura 24 – Espaço de fase para o modelo onde o potencial tem a forma de um bem seguido por uma barreira. Ele usa os mesmos valores dos parâmetros HL da figura (22b). Os valores de p_T variam de 0 à 400. As linhas pontilhadas são chamadas separatrizes porque separam diferentes tipos de soluções.

algumas das equações de Hamilton em (3.8), obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala que é dada por

$$\frac{\partial^2 a(\eta)}{\partial \eta^2} + g_c a(\eta) - 2g_\Lambda a(\eta)^3 + \frac{g_s}{a(\eta)^3} = 0. \quad (3.12)$$

Ao se resolver a equação (3.12) usando condições iniciais apropriadas, é possível encontrar quatro tipos de soluções clássicas diferentes para o fator de escala $a(\eta)$. Essas soluções podem ser identificadas no espaço de fase mostrado na figura (24). A primeira delas é uma solução expansiva, que descreve um fator de escala inicialmente pequeno e que se expande aceleradamente até o infinito. É encontrada na região I do espaço de fase e representada na figura (25a). A segunda solução descreve um fator de escala que começa em um valor pequeno, alcança um valor máximo e contrai de volta para o valor inicial, descrevendo um "movimento" cíclico. É encontrada na região II do espaço de fase e está representada na figura (25b). A terceira solução retrata um fator de escala que começa com um valor muito grande, se contrai até um valor mínimo e então se expande novamente, numa taxa acelerada, até o infinito. Essa solução é conhecida como bouncing ou ricochete. É encontrada na região III do espaço de fase e pode ser vista na figura (26a). A última solução apresenta um fator de escala que começa em um valor muito grande e se reduz até atingir um valor mínimo. Essa solução é encontrada na região IV do espaço de fase e é apresentada na figura (26b).

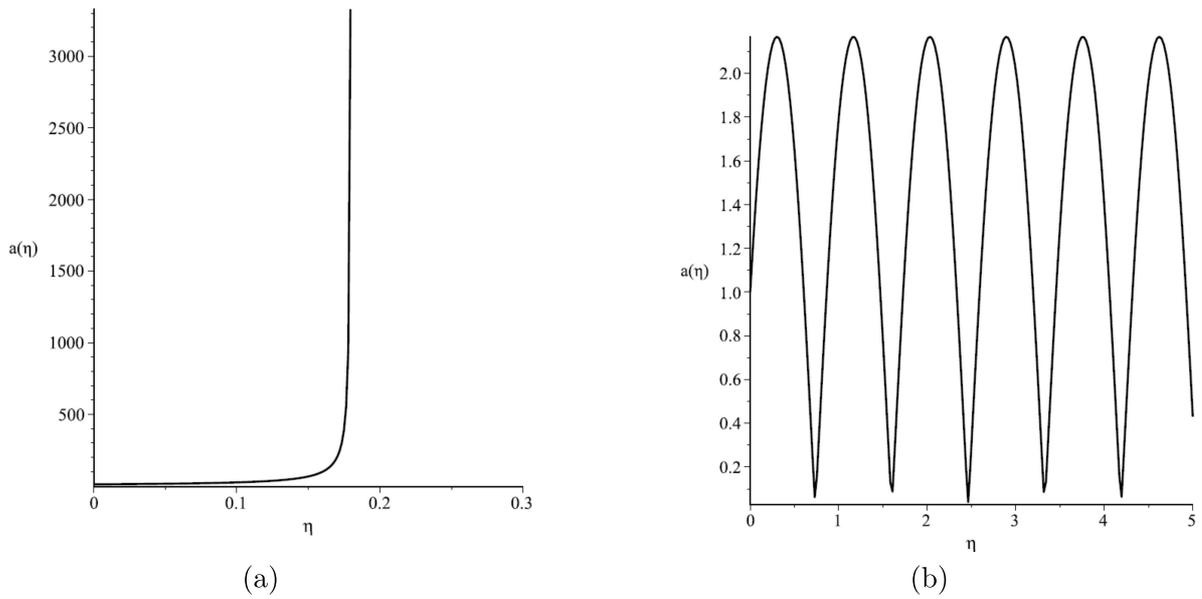


Figura 25 – Soluções clássicas $a(\eta) \times \eta$ para os casos de uma (a) dinâmica de expansão e de uma (b) dinâmica periódica.

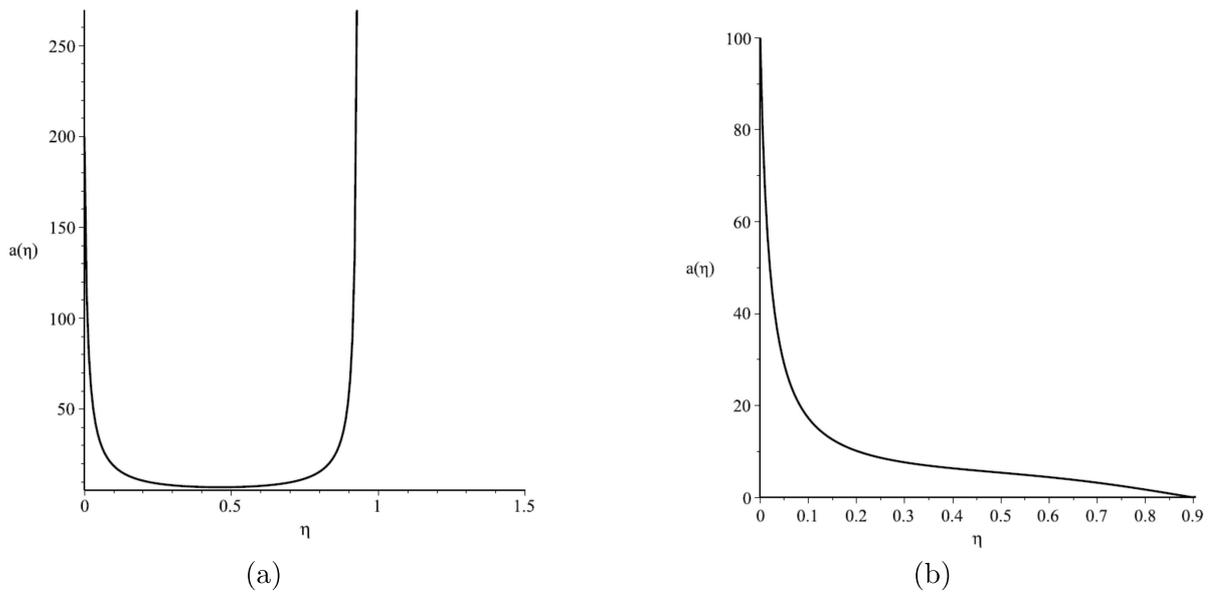


Figura 26 – Soluções clássicas $a(\eta) \times \eta$ para os casos de uma dinâmica de (a) bouncing ou ricochete e de uma (b) dinâmica de contração.

3.3 Quantização Canônica

A quantização do modelo será realizada seguindo o formalismo de Dirac para quantização de sistemas com vínculos. Primeiro faz-se a substituição das variáveis canônicas a e T e seus momenta pelos seus respectivos operadores. Os efeitos quânticos prevalecem no Universo primordial, então, introduz-se a quantidade chamada de função de onda do Universo, $\Psi(a, T)$, que é responsável por descrever esses efeitos quânticos. Os momenta

canonicamente conjugados às variáveis a e T , respectivamente p_a e p_T , são trocados por

$$p_a \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad p_T \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (3.13)$$

Seguindo, deve-se impor a equação de vínculo

$$\hat{H}\Psi(a, T) = 0, \quad (3.14)$$

onde \hat{H} é obtido ao escrever os operadores de a, T, p_a e p_T na Hamiltoniana total da equação (3.6). Essa equação de vínculo dará origem à equação de Wheeler-DeWitt do modelo. Usando a Hamiltoniana da equação (3.6), os operadores em (3.13), o gauge $N = a$ e a transformação $\tau = -T$, obtém-se

$$\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - g_c k a^2 + g_\Lambda k a^4 + g_r k^2 + g_s \frac{k^3}{a^2} \right) \Psi(a, \tau) = -i \frac{\partial \Psi(a, \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.15)$$

Assumindo que a solução da equação (3.15) pode ser escrita na forma $\Psi(a, \tau) = \psi(a)e^{-iE\tau}$ e inserindo essa forma na equação (3.15)

$$\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \underbrace{-g_c k a^2 + g_\Lambda k a^4 + g_r k^2 + g_s \frac{k^3}{a^2}}_{-V(a)} \right) \psi(a)e^{-iE\tau} = -i \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi(a)e^{-iE\tau}), \quad (3.16)$$

chega-se em

$$\frac{\partial^2 \psi(a)}{\partial a^2} + 4(E - V(a)) \psi(a) = 0, \quad (3.17)$$

onde, usando $k = 1$,

$$V(a) = g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2}. \quad (3.18)$$

A equação de Wheeler-DeWitt (3.17) pode ser vista e entendida como uma equação semelhante à equação de Schrödinger para um potencial $V(a)$. No presente trabalho, ela é resolvida numericamente através de um método de diferenças finitas chamado método de Crank-Nicolson em conjunto com o Algoritmo de Thomas. A escolha do esquema Crank-Nicolson é puramente baseada em sua estabilidade e confiabilidade. Será então fixada uma função de onda inicial localizada no entorno de $a = 0$ e será observado como ela se propaga ao longo do tempo. Segundo o desenvolvimento mostrado em [132] para obter a condição inicial para a função de onda, ela deverá ter a forma $\Psi(a, 0) = A \cdot a e^{-Ba^2}$ de uma gaussiana normalizada onde A e B são constantes reais positivas. Ela satisfaz as condições de contorno $\Psi(0, \tau) = 0$ e $\Psi(\infty, \tau) = 0$ estabelecidas por Hartle e Hawking em [133]. As constantes A e B são determinadas ao impor uma condição de normalização para $\Psi(a, 0)$

$$\int_0^\infty \Psi^\dagger(a, 0) \Psi(a, 0) da = 1, \quad (3.19)$$

e para a energia de radiação com

$$\int_0^\infty \Psi^\dagger(a, 0) \frac{p_a^2}{12} \Psi(a, 0) da = E, \quad (3.20)$$

levando à equação (11) de [134] dada por

$$\Psi(a, 0) = \left(\frac{8192E^3}{\pi} \right)^{1/4} a e^{-4Ea^2}. \quad (3.21)$$

Assim, (3.21) é a condição inicial que será usada. Aqui, E é a energia da radiação e $\Psi(a, 0)$ é normalizada. De maneira resumida, a probabilidade de tunelamento dá a probabilidade de encontrar o fator de escala do Universo à direita da barreira de potencial. Aqui será dado pela expressão

$$TP_{int} = \frac{\int_{a_{rtp}}^{\infty} |\Psi(a, t_{max})|^2 da}{\int_0^{\infty} |\Psi(a, t_{max})|^2 da}, \quad (3.22)$$

onde a_{rtp} é o valor do fator de escala onde uma reta traçada na altura do valor da energia E cruza a barreira de potencial saindo pela direita, t_{max} é o momento onde a função de onda Ψ atinge o infinito na direção de a . O infinito numérico foi definido como sendo $a_{max} = 30$. Agora, suponha que a aproximação WKB[72, 73] seja válida para este modelo. Uma vez que seja obtida, a solução WKB será utilizada para calcular a probabilidade de tunelamento através da barreira de potencial $V(a)$. Seguindo o método da aproximação WKB, a função de onda $\psi(a)$ da equação (3.17) é escrita como $\psi(a) = \mathcal{A}(a)e^{i\varphi(a)}$. Introduzindo esse ansatz na equação (3.17) e considerando que $d^2\mathcal{A}(a)/da^2$ é insignificante quando comparado com os outros termos da equação, a solução pode ser escrita como

$$\psi(a) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{K(a)}} \exp(i \int_a^{a_l} K(a) da) + \frac{B}{\sqrt{K(a)}} \exp(-i \int_a^{a_l} k(a) da) & 0 \leq a \leq a_{ltp}, \\ \frac{C}{\sqrt{k(a)}} \exp(-\int_{a_{ltp}}^a k(a) da) + \frac{D}{\sqrt{k(a)}} \exp(\int_{a_{ltp}}^a k(a) da) & a_{ltp} \leq a \leq a_{rtp}, \\ \frac{F}{\sqrt{K(a)}} \exp(i \int_{a_{rtp}}^a K(a) da) + \frac{G}{\sqrt{K(a)}} \exp(-i \int_{a_{rtp}}^a K(a) da) & a_{rtp} \leq a < \infty, \end{cases} \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{cases} K(a) = 2\sqrt{(E - V(a))} & \text{para } E > V, \\ k(a) = 2\sqrt{(V(a) - E)} & \text{para } E < V. \end{cases} \quad (3.24)$$

O valor a_{ltp} é o valor do fator de escala a onde a energia E intercepta a barreira $V(a)$ pela esquerda, enquanto que o valor a_{rtp} é onde a energia E intercepta a barreira $V(a)$ pela direita. Os coeficientes A, B, C, D, F e G são constantes e relacionados por meio da equação (2.166). A probabilidade de tunelamento WKB, TP_{WKB} , é dada pela equação (2.170) enquanto que o parâmetro θ para o presente modelo, usando $V(a)$ da equação (3.18) e $k(a)$ da equação (3.24), θ é

$$\theta = \exp \left(2 \int_{a_{ltp}}^{a_{rtp}} \sqrt{\left(g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2} - E \right)} da \right). \quad (3.25)$$

3.4 Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados para os cálculos de TP_{int} e TP_{WKB} para um potencial gerado à partir da equação (3.18). Neste modelo o potencial terá $g_c > 0, g_r \geq 0, g_\Lambda > 0$ e $g_s < 0$. Para esta análise, os valores foram escolhidos de forma que o potencial tivesse o formato de um poço seguido de uma barreira. Foram analisados vários modelos contando com diferentes valores para esses parâmetros e todos apresentaram resultados similares. O potencial do modelo que será apresentado é dado por

$$V(a) = \overbrace{15}^{g_c} a^2 - \underbrace{0,25}_{g_\Lambda} a^4 - \overbrace{15}^{g_r} - \underbrace{(-0,1)}_{g_s} a^{-2}, \quad (3.26)$$

ou seja,

$$V(a) = 15a^2 - 0,25a^4 - 15 + \frac{(0,1)}{a^2}. \quad (3.27)$$

Os valores dos parâmetros mostrados na equação (3.26) foram escolhidos por apresentarem uma melhor visualização dos resultados nos gráficos. Este potencial tem um valor máximo de $V_{max} = 210,003$ e um valor mínimo de $V_{min} = -12,552$. Para investigar seu comportamento, é necessário deslocar esse potencial de forma que seu mínimo coincida com o eixo das abscissas, ou seja, seu mínimo é deslocado para zero. As probabilidades de tunelamento TP_{int} e TP_{WKB} são funções da energia E e dos parâmetros HL. Para determinar como TP_{int} e TP_{WKB} dependem dessas quantidades, fixa-se valores para todas elas exceto para aquela que será investigada. Este procedimento é aplicado para cada uma dessas quantidades que serão analisadas onde estas assumem vários valores diferentes. Para a análise da dependência de TP_{int} e TP_{WKB} em relação aos parâmetros HL foi fixado um valor de energia que foi usado em todas as análises. Além disso, os valores do fator de escala onde a energia E intercepta o potencial $V(a)$, dados por a_{ltp} e a_{rtp} , também serão determinados. Para a construção da grade que representará o espaço-tempo no código foi utilizado um número $N = 4273$ de pontos para dividir a parte espacial, cujo valor máximo é $a_{max} = 30$. Isso implica um passo espacial de $da = 0,007020828$. A parte temporal é feita utilizando um passo $dt = 0,05$ para um tempo máximo $t_{max} = 65$. Esse valor foi escolhido após uma investigação para evitar que se usasse um tempo muito grande, já que isso poderia acarretar em interferências nos valores. A discretização da equação de Wheeler-DeWitt foi feita usando o método de Crank-Nicolson[107] devido à sua estabilidade. A equação de Wheeler-DeWitt, após ser discretizada, transforma-se numa equação de matrizes tridiagonais. Essa equação é solucionada utilizando o algoritmo de Thomas[108, 109]. Para a integração, o código utiliza o método de integração de Clenshaw-Curtis[135] e também o método de Simpson para uma validação do resultado.

3.4.1 A probabilidade de tunelamento na origem

A escolha de um parâmetro $g_s < 0$ implica na existência de uma barreira de potencial positiva e infinita na origem ($a = 0$). Foi decidido que uma investigação deveria ser feita sobre a probabilidade de tunelamento associada a essa barreira infinita. Para investigar o comportamento de TP_{WKB} na origem, calculou-se θ da equação (2.167). O valor escolhido de E é o que determina os valores de a_{ltp} e a_{rtp} . Esse cálculo foi feito para diferentes valores de E , usando um potencial que tem o formato de um poço seguido de uma barreira, como mostrado na figura (22b). Todos os cálculos retornaram o mesmo resultado dizendo que θ sempre diverge e vai para o infinito. Isso implica em um TP_{WKB} nulo. O mesmo cálculo foi feito para TP_{int} que também retornou um valor nulo para TP_{int} independentemente do valor de energia E selecionado. Isso significa que o universo descrito neste modelo não começa a partir de um fator de escala de tamanho zero. Pode-se assumir que para o presente modelo que o universo foi inicialmente formado na região entre a barreira infinita e a segunda barreira, onde está localizado o poço. Então ele tem, inicialmente, um tamanho pequeno porém não-nulo. Assim, ele está livre da singularidade do Big Bang também no nível quântico. Também é assumido que o universo foi formado com uma energia E que é menor que o máximo da segunda barreira. Um universo clássico ficaria nessa região para sempre. Assumindo que o universo era um sistema quântico, ele foi capaz de tunelar através da segunda barreira e começar sua expansão. Aqui consideramos que o universo nasce logo após emergir da segunda barreira. Levando em conta essas considerações, será feito um estudo sobre qual é a probabilidade de que o universo sofra o processo de tunelamento quântico na segunda barreira e comece sua expansão e como cada parâmetro afeta essa probabilidade. As subseções a seguir mostram esses resultados.

3.4.2 g_c

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro g_c , são fixados os valores de E, g_Λ, g_r e g_s . O parâmetro g_c assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $E = 100; g_\Lambda = 0, 25; g_r = 15$ e $g_s = -0, 1$. O parâmetro g_c começa em $g_c = 15$ e cresce até $g_c = 20$ em passos de $0, 2$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de g_c , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que $E = 100$. De acordo com os resultados vistos na tabela (1) e nas figuras (27a) e (27b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} decrescem com o aumento de g_c . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores menores de g_c .

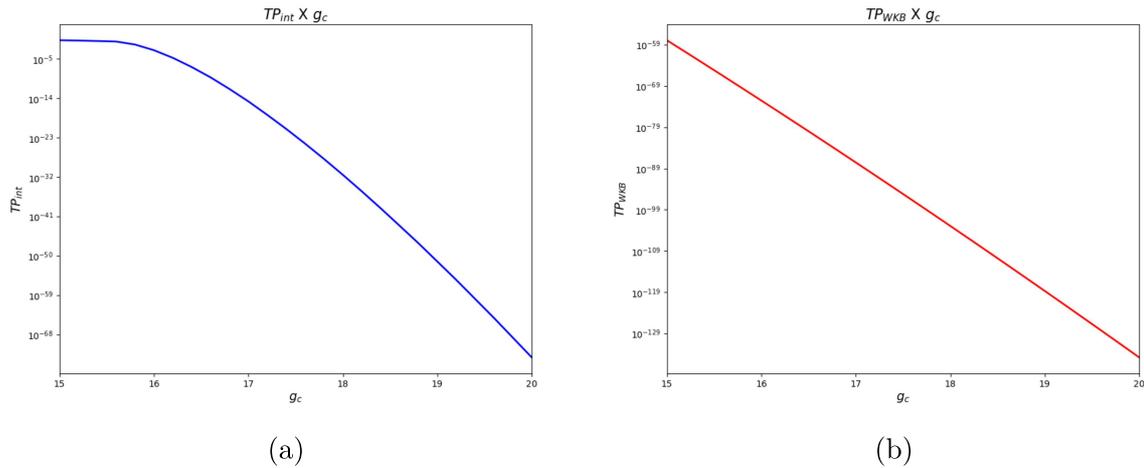


Figura 27 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_c varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$.

g_c	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
15.0	0.18738	$1.1796e - 58$	3.0041	7.1396
15.2	0.15998	$1.512e - 61$	2.9759	7.2071
15.4	0.12508	$1.8693e - 64$	2.9487	7.2735
15.6	0.095822	$2.2293e - 67$	2.9225	7.3388
15.8	0.019447	$2.5647e - 70$	2.8971	7.4031
16.0	0.00099649	$2.8473e - 73$	2.8726	7.4664
16.2	$1.7946e - 05$	$3.0502e - 76$	2.8485	7.5289
16.4	$1.4081e - 07$	$3.1548e - 79$	2.8256	7.5905
16.6	$6.0985e - 10$	$3.1497e - 82$	2.8032	7.6512
16.8	$1.3437e - 12$	$3.0359e - 85$	2.7811	7.7112
17.0	$1.9779e - 15$	$2.8264e - 88$	2.7602	7.7705
17.2	$1.6569e - 18$	$2.5412e - 91$	2.7395	7.8290
17.4	$1.044e - 21$	$2.207e - 94$	2.7194	7.8870
17.6	$4.5788e - 25$	$1.852e - 97$	2.6999	7.9442
17.8	$1.4425e - 28$	$1.5015e - 100$	2.6804	8.0008
18.0	$3.3443e - 32$	$1.1766e - 103$	2.6621	8.0569
18.2	$5.8488e - 36$	$8.9114e - 107$	2.6439	8.1123
18.4	$7.8368e - 40$	$6.5243e - 110$	2.6261	8.1672
18.6	$8.2178e - 44$	$4.6186e - 113$	2.6088	8.2215
18.8	$8.0123e - 48$	$3.1611e - 116$	2.5919	8.2755
19.0	$5.3592e - 52$	$2.0926e - 119$	2.5752	8.3287
19.2	$3.4462e - 56$	$1.3397e - 122$	2.5590	8.3816
19.4	$1.5413e - 60$	$8.2964e - 126$	2.5427	8.4340
19.6	$6.8071e - 65$	$4.9713e - 129$	2.5271	8.4860
19.8	$2.1135e - 69$	$2.8828e - 132$	2.5123	8.5374
20.0	$6.6247e - 74$	$1.6174e - 135$	2.4973	8.5886

Tabela 1 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme g_c muda com uma energia fixa $E = 100$ e um tempo de simulação $t = 65$.

3.4.3 g_Λ

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro g_Λ , são fixados os valores de E, g_c, g_r e g_s . O parâmetro g_Λ assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $E = 100; g_c = 15; g_r = 15$ e $g_s = -0,1$. O parâmetro g_Λ começa em $g_\Lambda = 0,250$ e cresce até $g_\Lambda = 0,270$ em passos de $0,001$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de g_Λ , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que $E = 100$. De acordo com os resultados vistos na tabela (2) e nas figuras (28a) e (28b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de g_Λ . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de g_Λ .

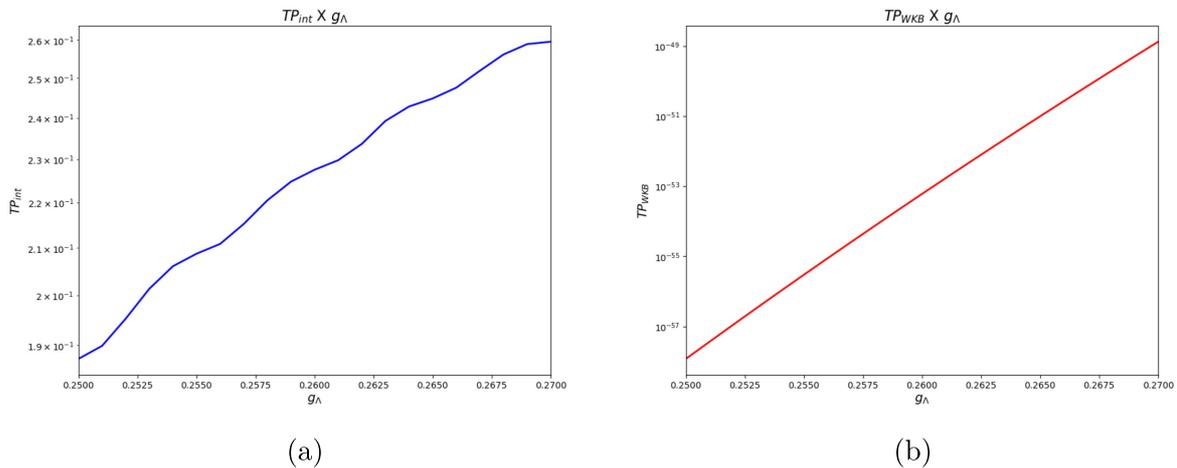


Figura 28 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_Λ varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$.

3.4.4 g_r

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro g_r , são fixados os valores de E, g_c, g_Λ e g_s . O parâmetro g_r assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $E = 100; g_c = 15; g_\Lambda = 0,25$ e $g_s = -0,1$. O parâmetro g_r começa em $g_r = 15$ e cresce até $g_r = 45$ em passos de $1,5$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de g_r , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que $E = 100$. De acordo com os resultados vistos na tabela (3) e nas figuras (29a) e (29b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de g_r . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de g_r .

g_Λ	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
0.25	0.18738	$1.1799e - 58$	3.0044	7.1396
0.251	0.1899	$3.6339e - 58$	3.0057	7.1223
0.252	0.19528	$1.1087e - 57$	3.0070	7.1051
0.253	0.20137	$3.3517e - 57$	3.0083	7.0880
0.254	0.20609	$1.0041e - 56$	3.0096	7.0709
0.255	0.20876	$2.9808e - 56$	3.0109	7.0539
0.256	0.21087	$8.7708e - 56$	3.0122	7.0371
0.257	0.21524	$2.5583e - 55$	3.0136	7.0204
0.258	0.22054	$7.3971e - 55$	3.0149	7.0036
0.259	0.22481	$2.1205e - 54$	3.0161	6.9870
0.26	0.22758	$6.0278e - 54$	3.0176	6.9705
0.261	0.22982	$1.6991e - 53$	3.0188	6.9540
0.262	0.23371	$4.75e - 53$	3.0202	6.9376
0.263	0.23929	$1.3169e - 52$	3.0215	6.9214
0.264	0.24286	$3.6222e - 52$	3.0229	6.9051
0.265	0.24487	$9.8832e - 52$	3.0243	6.8890
0.266	0.24761	$2.675e - 51$	3.0256	6.8729
0.267	0.25196	$7.1849e - 51$	3.0270	6.8569
0.268	0.2562	$1.9149e - 50$	3.0284	6.8410
0.269	0.25893	$5.0639e - 50$	3.0297	6.8252
0.27	0.25958	$1.3292e - 49$	3.0311	6.8094

Tabela 2 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme g_Λ muda com uma energia fixa $E = 100$ e um tempo de simulação $t = 65$.

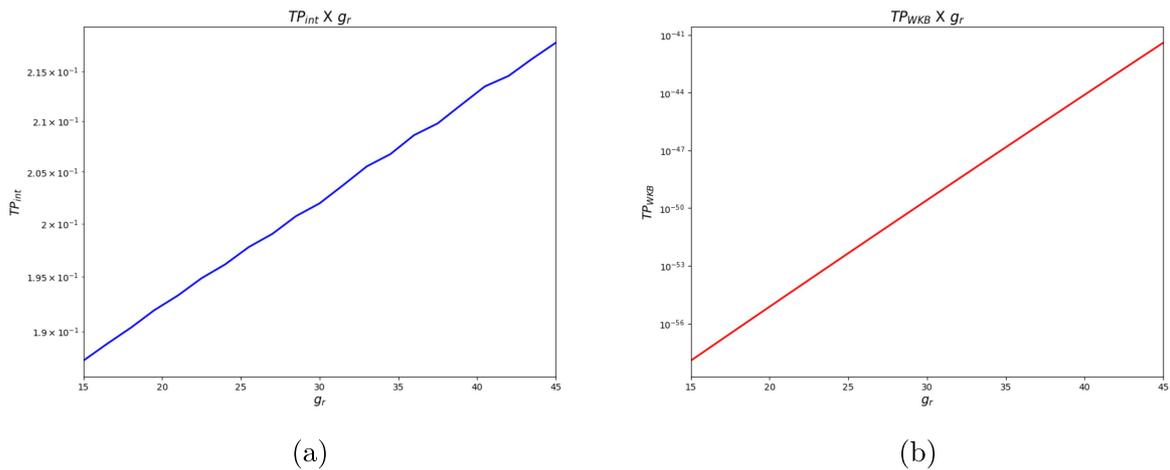


Figura 29 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_r varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$.

3.4.5 g_s

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro g_s , são fixados os valores de E , g_c , g_Λ e g_r . O parâmetro g_s assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB}

g_r	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
15.0	0.18738	$1.1799e - 58$	3.0044	7.1396
16.5	0.18888	$8.2231e - 58$	3.0282	7.1295
18.0	0.19032	$5.7055e - 57$	3.0520	7.1195
19.5	0.19193	$3.942e - 56$	3.0757	7.1092
21.0	0.19327	$2.7119e - 55$	3.0995	7.0989
22.5	0.19487	$1.8578e - 54$	3.1232	7.0885
24.0	0.19615	$1.2674e - 53$	3.1469	7.0779
25.5	0.19778	$8.6106e - 53$	3.1706	7.0674
27.0	0.19902	$5.8266e - 52$	3.1944	7.0568
28.5	0.20071	$3.9272e - 51$	3.2181	7.0459
30.0	0.20193	$2.6364e - 50$	3.2419	7.0350
31.5	0.20369	$1.7628e - 49$	3.2655	7.0240
33.0	0.20552	$1.1743e - 48$	3.2894	7.0130
34.5	0.20672	$7.7922e - 48$	3.3131	7.0018
36.0	0.20859	$5.1513e - 47$	3.3369	6.9904
37.5	0.20976	$3.393e - 46$	3.3608	6.9789
39.0	0.21163	$2.2265e - 45$	3.3846	6.9675
40.5	0.21349	$1.4559e - 44$	3.4086	6.9558
42.0	0.21455	$9.4849e - 44$	3.4325	6.9440
43.5	0.2163	$6.1582e - 43$	3.4566	6.9320
45.0	0.21797	$3.9837e - 42$	3.4806	6.9200

Tabela 3 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme g_r muda com uma energia fixa $E = 100$ e um tempo de simulação $t = 65$.

são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $E = 100$; $g_c = 15$; $g_\Lambda = 0, 25$ e $g_r = 15$. O parâmetro g_s começa em $g_s = -0, 10$, seguido de $g_s = -0, 25$ e decresce até $g_s = -3, 50$ em passos de $-0, 25$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de g_s , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que $E = 100$. De acordo com os resultados vistos na tabela (4) e nas figuras (30a) e (30b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de g_s . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de g_s .

3.4.6 Energia E

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem da energia do fluido de radiação E , são fixados os valores de g_c, g_Λ, g_r e g_s . A energia E assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $g_c = 15$; $g_\Lambda = 0, 25$; $g_r = 15$ e $g_s = -0, 1$. A energia E começa em $E = 0$, cresce até $E = 10$ em passos de tamanho 1 e cresce até $E = 200$ em passos de tamanho 5 para finalmente chegar até $E = 206$ em passos de tamanho 1. De acordo com os resultados vistos na tabela (5) e nas figuras (31a),(31b) e (31c), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de E . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores

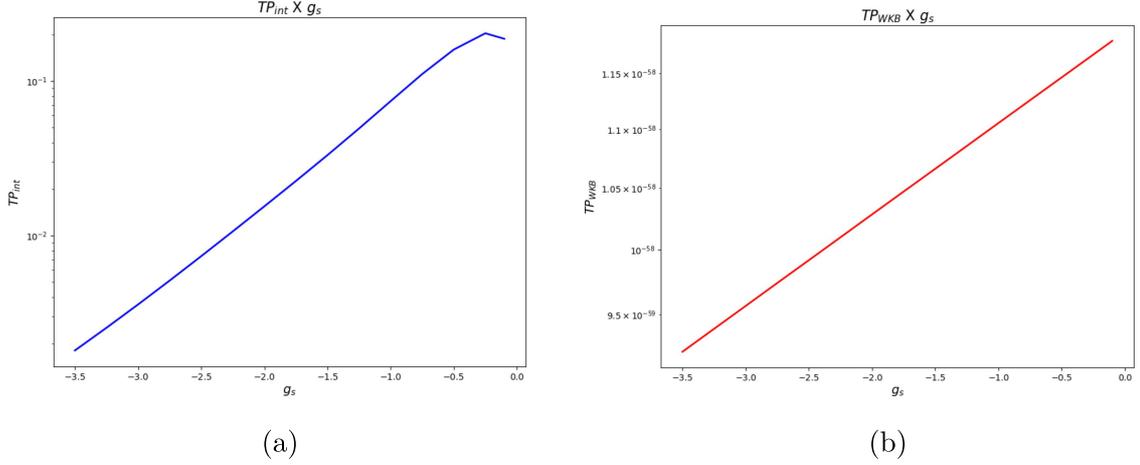


Figura 30 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme g_s varia para uma energia fixa $E = 100$ e tempo de simulação $t = 65$.

g_s	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
-0.1	0.18738	$1.1796e - 58$	3.0041	7.1396
-0.25	0.20338	$1.1669e - 58$	3.0037	7.1396
-0.5	0.15955	$1.146e - 58$	3.0034	7.1397
-0.75	0.11085	$1.1255e - 58$	3.0029	7.1397
-1.0	0.074049	$1.1054e - 58$	3.0025	7.1397
-1.25	0.049296	$1.0855e - 58$	3.0020	7.1398
-1.5	0.033161	$1.066e - 58$	3.0015	7.1398
-1.75	0.022563	$1.047e - 58$	3.0012	7.1398
-2.0	0.015468	$1.0282e - 58$	3.0007	7.1398
-2.25	0.010652	$1.0097e - 58$	3.0002	7.1399
-2.5	0.0073657	$9.9162e - 59$	2.9998	7.1399
-2.75	0.0051219	$9.7388e - 59$	2.9994	7.1399
-3.0	0.0035892	$9.5634e - 59$	2.9989	7.1401
-3.25	0.0025379	$9.3917e - 59$	2.9985	7.1401
-3.5	0.001811	$9.223e - 59$	2.9980	7.1401

Tabela 4 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme g_s muda com uma energia fixa $E = 100$ e um tempo de simulação $t = 65$.

maiores de E .

3.5 Conclusões

O presente capítulo resume-se na análise da quantização de um modelo cosmológico utilizando a teoria gravitacional de Hořava-Lifshitz. Considerou-se inicialmente um espaço-tempo FLRW homogêneo e isotrópico com seções espaciais de curvatura positiva ($k = 1$). O conteúdo material selecionado para o modelo foi o de um fluido perfeito de radiação ($\omega = 1/3$). Foi utilizada a versão projetável da teoria de Hořava-Lifshitz, sem a condição de balanço detalhado. Partindo da Hamiltoniana do setor gravitacional, obtida com

E	TP_{int}	TP_{WKB}	a_{ltp}	a_{rtp}
0	0.0	$4.9167e - 122$	1.0052	7.6799
1	0.0039288	$2.9155e - 121$	1.0393	7.6751
2	0.004888	$1.7014e - 120$	1.0723	7.6706
3	0.0061041	$9.782e - 120$	1.1043	7.6660
4	0.0075397	$5.5455e - 119$	1.1355	7.6615
5	0.0092025	$3.1023e - 118$	1.1660	7.6569
6	0.011235	$1.7138e - 117$	1.1956	7.6524
7	0.013512	$9.3547e - 117$	1.2247	7.6478
8	0.016046	$5.0486e - 116$	1.2532	7.6432
9	0.01892	$2.6954e - 115$	1.2810	7.6386
10	0.022244	$1.4241e - 114$	1.3084	7.6340
15	0.042456	$5.0912e - 111$	1.4382	7.6107
20	0.067944	$1.4815e - 107$	1.5586	7.5869
25	0.096387	$3.6177e - 104$	1.6717	7.5630
30	0.12548	$7.5912e - 101$	1.7790	7.5385
35	0.15166	$1.3931e - 97$	1.8816	7.5135
40	0.17541	$2.2673e - 94$	1.9802	7.4882
45	0.19763	$3.3106e - 91$	2.0755	7.4624
50	0.217	$4.3787e - 88$	2.1680	7.4360
55	0.2313	$5.2884e - 85$	2.2581	7.4092
60	0.24459	$5.8722e - 82$	2.3460	7.3818
65	0.2558	$6.0304e - 79$	2.4322	7.3539
70	0.26246	$5.7582e - 76$	2.5169	7.3253
75	0.26913	$5.1345e - 73$	2.6003	7.2961
80	0.27454	$4.2933e - 70$	2.6825	7.2663
85	0.27613	$3.3785e - 67$	2.7637	7.2358
90	0.27881	$2.51e - 64$	2.8443	7.2045
95	0.28302	$1.766e - 61$	2.9244	7.1724
100	0.28069	$1.1796e - 58$	3.0039	7.1395
105	0.2815	$7.4995e - 56$	3.0831	7.1056
110	0.28275	$4.5476e - 53$	3.1622	7.0708
115	0.27897	$2.6357e - 50$	3.2413	7.0349
120	0.28047	$1.4629e - 47$	3.3205	6.9977
125	0.27841	$7.7876e - 45$	3.4001	6.9595
130	0.27746	$3.983e - 42$	3.4800	6.9198
135	0.2761	$1.9602e - 39$	3.5608	6.8787
140	0.27307	$9.295e - 37$	3.6423	6.8358
145	0.27229	$4.2522e - 34$	3.7249	6.7912
150	0.26804	$1.8791e - 31$	3.8089	6.7444
155	0.26867	$8.0302e - 29$	3.8945	6.6953
160	0.26443	$3.3222e - 26$	3.9821	6.6435
165	0.2644	$1.3318e - 23$	4.0723	6.5887
170	0.26211	$5.1791e - 21$	4.1654	6.5302
175	0.26275	$1.9555e - 18$	4.2624	6.4671
180	0.26466	$7.1721e - 16$	4.3641	6.3990
185	0.26295	$2.5588e - 13$	4.4722	6.3238
190	0.26511	$8.8813e - 11$	4.5886	6.2399
195	0.26942	$3.0032e - 08$	4.7174	6.1429
200	0.273	$9.8952e - 06$	4.8657	6.0260
201	0.27295	$3.1454e - 05$	4.8989	5.9989
202	0.27456	$9.9879e - 05$	4.9338	5.9702
203	0.2759	0.00031682	4.9707	5.9395
204	0.27687	0.001004	5.0101	5.9061
205	0.27812	0.0031753	5.0525	5.8698
206	0.28064	0.010009	5.0989	5.8293

Tabela 5 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} com $g_s < 0$ conforme E cresce para um tempo de simulação $t = 65$.

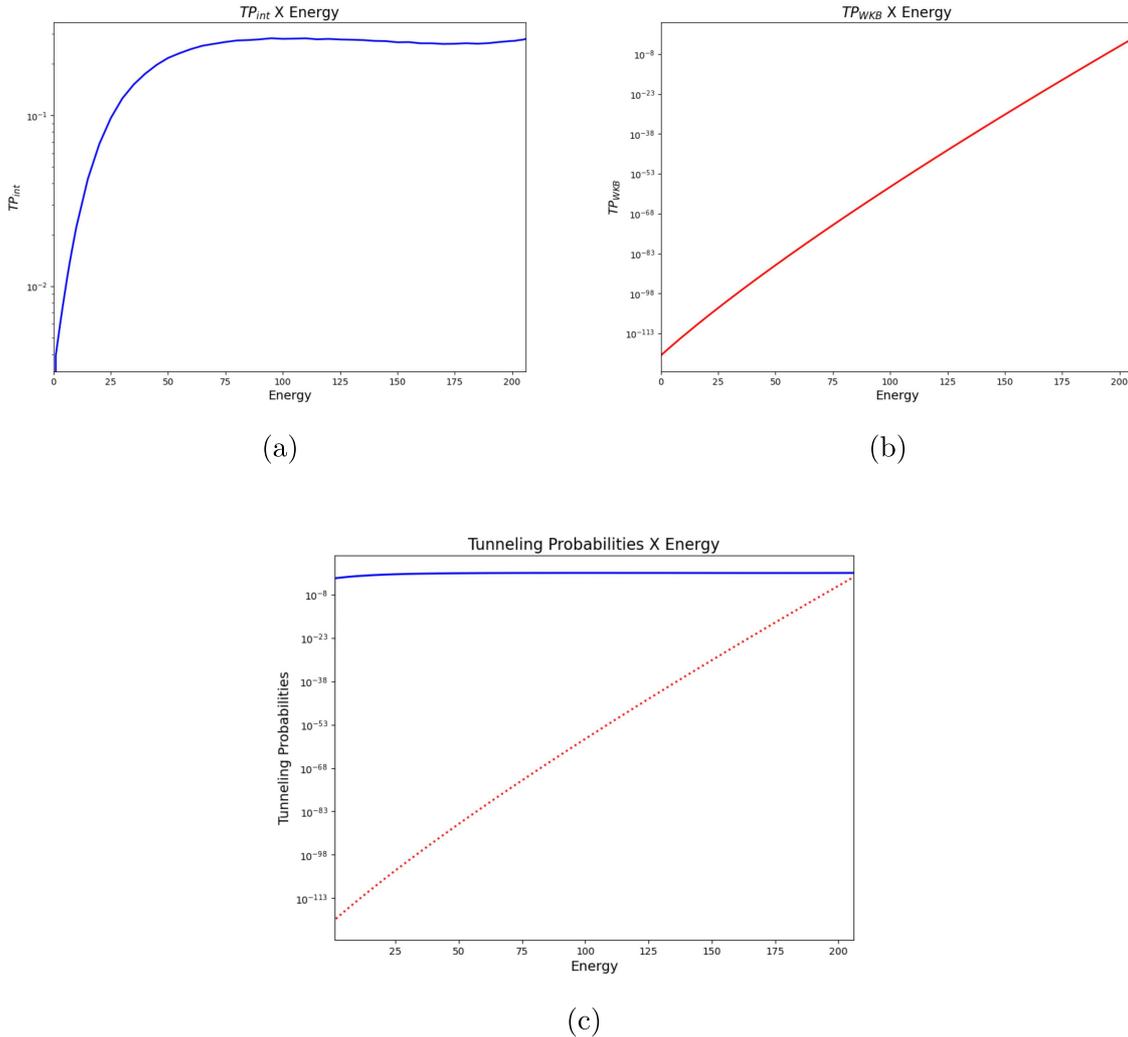


Figura 31 – (a)Variação de TP_{int} com o aumento da energia. (b)Variação de TP_{WKB} com o aumento da energia. (c) Comparação da evolução de TP_{int} e TP_{WKB} conforme a energia aumenta.

o formalismo ADM, juntamente da Hamiltoniana do setor da matéria, obtida com o formalismo de Schutz, chega-se à Hamiltoniana total do modelo. Essa Hamiltoniana revela que a barreira de potencial tem dois formatos possíveis: uma barreira de potencial única ou um poço seguido de uma barreira. Foi dado ênfase no segundo modelo pois o primeiro surge como um caso particular do mesmo. Para entender melhor o comportamento do modelo, estudou-se a dinâmica clássica do fator de escala. Isso foi feito inicialmente construindo um espaço de fase para o modelo, que fornece uma visão qualitativa do comportamento do fator de escala. Logo após, usando mais uma vez a Hamiltoniana do modelo, são obtidas as equações de Hamilton e então solucionadas para obter todas as soluções possíveis para o fator de escala. Sucedendo a análise clássica do modelo, foi feita a quantização do mesmo. A quantização foi feita seguindo o formalismo de Dirac para sistemas com vínculos. Desse processo surge a equação de Wheeler-DeWitt, que foi

resolvida usando a aproximação WKB e numericamente, onde foi utilizado o método de Crank-Nicolson[107] para discretizá-la. Esses métodos fornecem, respectivamente, TP_{WKB} e TP_{int} . Como essas probabilidades de tunelamento são funções da energia da radiação e dos parâmetros da teoria de Hořava-Lifshitz, investigou-se separadamente como cada uma dessas quantidades afeta as probabilidades de tunelamento. Esse estudo mostra que TP_{int} e TP_{WKB} crescem conforme E, g_Λ, g_r e g_s aumentam e decrescem conforme g_c aumenta. Portanto, as melhores condições para o universo nascer seriam dadas com os maiores valores possíveis para E, g_Λ, g_r e g_s e com o menor valor possível para g_c .

4 Universo de poeira primordial na teoria Hořava-Lifshitz

4.1 Introdução

Este trabalho segue uma estratégia similar ao trabalho apresentado no capítulo 3, onde pretende-se estudar o nascimento do universo num modelo cosmológico onde o setor gravitacional é descrito pela teoria Hořava-Lifshitz. Assim, será considerado um espaço-tempo descrito pela métrica FLRW, homogêneo e isotrópico, com seções espaciais curvadas positivamente ($k = 1$). O conteúdo de matéria do modelo será composto de poeira ($\omega = 0$). Com relação à teoria HL, será usada a versão projetável dessa teoria, sem a condição de balanço detalhado. Tendo em mãos a Hamiltoniana da parte gravitacional do modelo obtida pelo formalismo ADM e a Hamiltoniana da parte referente à matéria do modelo obtida pelo formalismo de Schutz, nota-se que a barreira de potencial tem o formato de uma barreira infinita na origem, seguida de um poço que é seguido de uma barreira. A profundidade do poço pode ser alterada ao variar os parâmetros \bar{g}_r e \bar{g}_s , como será mostrado. Para aprender mais sobre esse modelo específico, foi analisada a dinâmica clássica do fator de escala. Partindo do hamiltoniano total, é possível construir um retrato de fase do modelo que dá uma ideia qualitativa sobre os possíveis comportamentos das soluções para o fator de escala. Então, usando mais uma vez o hamiltoniano total do modelo é possível encontrar equações de Hamilton. Das soluções dessas equações, obtém-se quantitativamente todas as soluções possíveis de fator de escala para o modelo. Após obter essas soluções, o modelo é quantizado utilizando o formalismo de Dirac[111, 131]. Dessa quantização é obtida a equação de Wheeler-DeWitt do modelo. Essa equação é resolvida numericamente e, então, é calculada a probabilidade de tunelamento para o nascimento do Universo através de integração, fornecendo TP_{int} e através da aproximação WKB, fornecendo TP_{WKB} .

4.2 O modelo clássico e a transformação canônica

Como no modelo com radiação, a construção do modelo FLRW homogêneo e isotrópico começa com a métrica da equação (2.183). Neste trabalho também consideraremos $k = +1$. É essencial deixar claro que será utilizado o sistema de unidades naturais, onde se tem $c = 8\pi G = \hbar = 1$. O conteúdo de matéria do modelo é definido como sendo um fluido perfeito que tem 4-velocidades descritas por $U^\mu = \delta_0^\mu$ dentro do sistema de coordenadas co-móveis usado. O tensor energia-momento é dado pela equação (2.198). A equação de estado para o fluido perfeito é $p = \omega\rho$. Seleccionando a versão projetável da gravidade Hořava-Lifshitz sem a condição de equilíbrio detalhada, para $z = 3$ em dimensões $3 + 1$, a ação será dada pela equação (2.190). Repetindo os procedimentos do modelo de radiação, chega-se a hamiltoniana do setor gravitacional do modelo descrita pela equação (2.197). A hamiltoniana do setor referente à matéria é dado por $N\mathcal{H}_f = \frac{Np_T}{a^{3\omega}}$, também sendo obtida

através do Formalismo de Schutz[100, 101]. Ao adicionar esse termo a H_{HL} e definindo $k = +1$, obtém-se a hamiltoniana total denotada por H_T :

$$H_T = N\mathcal{H}_T = N \left[-\frac{p_a^2}{4a} - g_c a + g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + \frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (4.1)$$

No decorrer do processo de quantização deste modelo, o termo $-p_a^2/4a$ presente na Hamiltoniana H_T da equação (4.1) pode apresentar ambiguidade no ordenamento de fatores[136]. Em virtude desse possível empecilho, será bastante benéfico tentar remover esse problema no ordenamento logo no nível clássico. Para isso, faz-se uma transformação canônica primeiramente redefinindo os parâmetros da teoria através de $N = \frac{\bar{N}}{3}$, $\bar{g}_c = \frac{g_c}{3}$, $\bar{g}_\Lambda = \frac{g_\Lambda}{3}$, $\bar{g}_r = \frac{g_r}{3}$, $\bar{g}_s = \frac{g_s}{3}$ and $\bar{p}_T = \frac{p_T}{3}$. Assim, a Hamiltoniana total se torna

$$H_T = N\mathcal{H}_T = N \left[-\frac{p_a^2}{12a} - \bar{g}_c a + \bar{g}_\Lambda a^3 + \frac{\bar{g}_r}{a} + \frac{\bar{g}_s}{a^3} + \frac{\bar{p}_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (4.2)$$

Seguindo, deve-se utilizar a transformação canônica[137]

$$a = \left(\frac{3x}{2} \right)^{2/3}, \quad p_a = p_x a^{1/2} \quad (4.3)$$

e o gauge

$$\bar{N} = -1, \quad \omega = 0 \text{ (poeira)}. \quad (4.4)$$

As equações (4.3) e (4.4) levam a

$$H_T = \frac{p_x^2}{12} + V(x) - \bar{p}_T \quad (4.5)$$

com o potencial $V(x)$ sendo definido como

$$V(x) = \bar{g}_c \left(\frac{3x}{2} \right)^{2/3} - \bar{g}_\Lambda \left(\frac{3x}{2} \right)^2 - \bar{g}_r \left(\frac{3x}{2} \right)^{-2/3} - \bar{g}_s \left(\frac{3x}{2} \right)^{-2}. \quad (4.6)$$

Visando potenciais bem definidos, o modelo contará com $\bar{g}_c > 0$, $\bar{g}_r \geq 0$, $\bar{g}_\Lambda > 0$ e $\bar{g}_s < 0$. Sob estas condições, o potencial descrito pela equação (4.6) tem a forma de uma barreira infinita na origem seguida de um poço e de uma barreira finita. Sua forma pode ser vista na figura (32). Pode-se notar que quanto mais próximo \bar{g}_s estiver de zero, mais fundo o poço vai, como mostra a figura (33b). Isto também acontece com a escolha de \bar{g}_r como mostra a figura (33c) mas, nesta situação, quanto maior o valor de \bar{g}_r , mais profundo será o poço. A escolha de um $\bar{g}_s < 0$ implica numa barreira positiva infinita na origem e assegura que o modelo esteja livre da singularidade do Big Bang, ainda a nível clássico. Foram analisados vários modelos contando com diferentes valores para esses parâmetros e todos apresentaram resultados similares. Os valores escolhidos para os parâmetros do potencial do modelo a ser estudado são os que possibilitaram uma melhor visualização dos resultados graficamente. Foram usados os valores $\bar{g}_c = 4, 0$; $\bar{g}_\Lambda = 0, 03$; $\bar{g}_r = 0, 2$ e

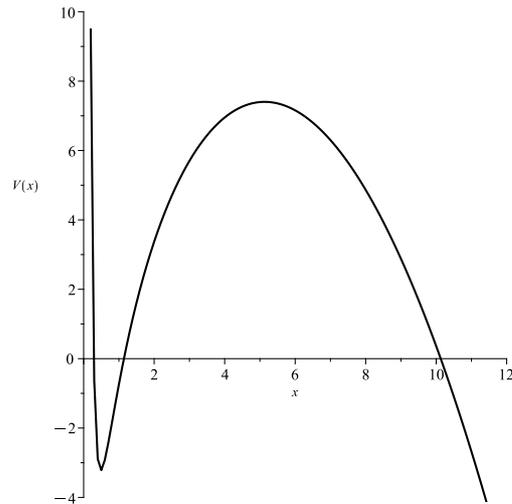


Figura 32 – Exemplo de barreira de potencial obtida à partir da equação (4.6). Neste exemplo foram usados os valores $\bar{g}_c = 4,0$; $\bar{g}_\Lambda = 0,1$; $\bar{g}_r = 9,0$ e $\bar{g}_s = -2,5$.

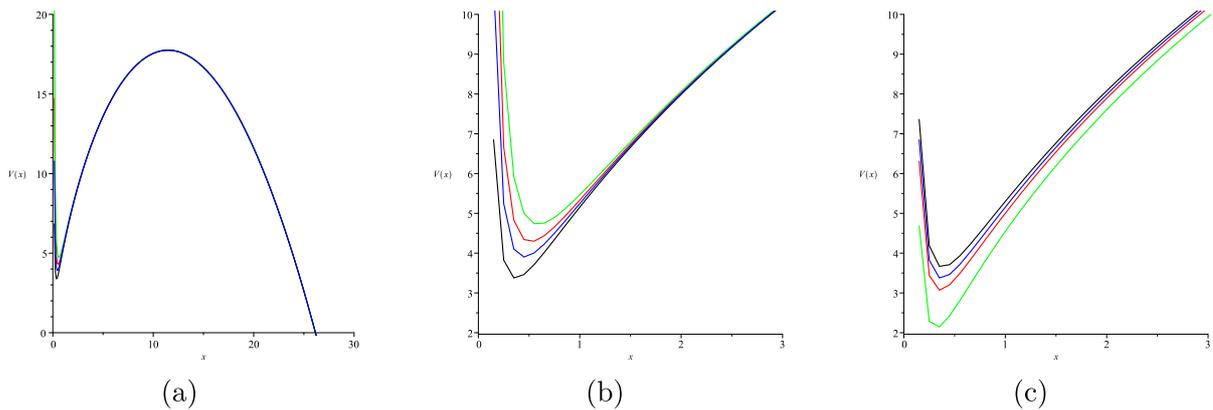


Figura 33 – Potencial $V(x)$ e o efeito da alteração dos parâmetros \bar{g}_s e \bar{g}_r . (a) Os valores dos parâmetros para esse exemplo são $\bar{g}_c = 4,0$; $\bar{g}_\Lambda = 0,03$; $\bar{g}_r = 0,2$ e $\bar{g}_s = -0,001$. (b) Aqui pode-se ver como a variação de \bar{g}_s altera a profundidade do poço. O mais raso (verde) aparece para $g_s = -1,0$ enquanto o mais profundo (preto) aparece para $g_s = -0,3$ (c) Aqui pode-se ver como a variação de \bar{g}_r altera a profundidade do poço. O mais profundo (verde) aparece para $g_r = 1,0$ enquanto o mais raso (preto) aparece para $g_r = 0,01$

$\bar{g}_s = -0,001$. Com esses valores para os parâmetros, o potencial tem um máximo de $V_{max} \approx 17,78$ e um mínimo local de $V_{min} \approx -0,626909$ no fundo do poço.

Esperando entender um pouco mais sobre este modelo, traça-se o retrato de fase, conforme mostra a figura (34). Neste retrato de fase, os valores de todos os parâmetros da teoria são os mesmos utilizados para obtenção do potencial. Do espaço de fase mostrado na figura (34) é possível identificar quatro soluções diferentes. A primeira é uma solução periódica cujo fator de escala, partindo de um valor inicial mínimo, se expande até um valor máximo e inicia um processo de contração. Ao atingir o mínimo, volta a se expandir e repete este ciclo indefinidamente. Essa solução pode ser vista na região II. A segunda é a solução chamada de bouncing ou ricochete. Nela, o fator de escala começa em um

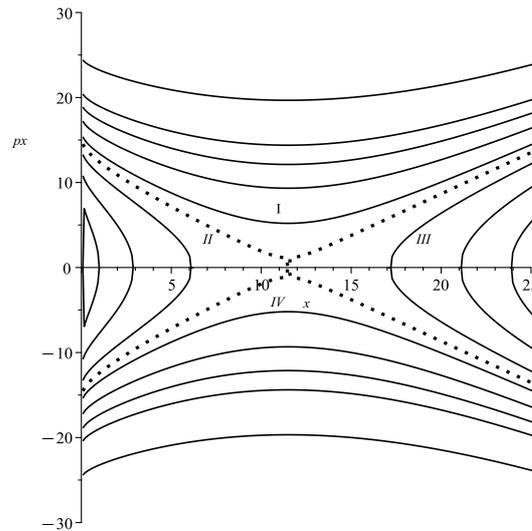


Figura 34 – Retrato de fase do modelo onde o potencial tem o formato de um poço seguido de uma barreira. O parâmetro \bar{p}_T varia de 0 a 300. As linhas pontilhadas são chamadas separatrizes porque separam diferentes tipos de soluções.

valor grande e inicia um processo de contração. Ao atingir um valor mínimo, começa uma expansão acelerada até o infinito. Este tipo de solução pode ser visto na região III. A terceira solução é chamada de expansiva. Neste tipo de solução o fator de escala parte de um valor inicial pequeno e se expande, à uma taxa acelerada, até o infinito. Esta solução pode ser encontrada na região I. A última solução é chamada de contração, onde o fator de escala começa a se contrair partindo de um valor grande até atingir um valor mínimo. Esta solução é encontrada na região IV.

A análise do espaço de fase viabiliza um panorâma qualitativo da dinâmica clássica do fator de escala. Para obter uma informação qualitativa, deve-se obter e solucionar as equações de Hamilton. Usando a Hamiltoniana H_T da equação (4.5), tem-se

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_T}{\partial p_x} = -\frac{p_x}{6}, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial N\mathcal{H}_T}{\partial x} = -\bar{g}_c \left(\frac{3x}{2}\right)^{-1/3} + 3\bar{g}_\Lambda \left(\frac{3x}{2}\right) - \bar{g}_r \left(\frac{3x}{2}\right)^{-5/3} - 3\bar{g}_s \left(\frac{3x}{2}\right)^{-3}, \\ \dot{T} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_T}{\partial \bar{p}_T} = 1, \\ \dot{\bar{p}}_T &= \frac{\partial N\mathcal{H}_T}{\partial T} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

O ponto nas equações (4.7) significa uma derivada em relação ao tempo conforme $d\eta \equiv N dt$. Impondo a equação de vínculo $\mathcal{H}_T = 0$ encontra-se

$$p_x = \pm \sqrt{12 \left[-\bar{g}_c \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + \bar{g}_\Lambda \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \bar{g}_r \left(\frac{3x}{2}\right)^{-2/3} + \bar{g}_s \left(\frac{3x}{2}\right)^{-2} + \bar{p}_T \right]}. \quad (4.8)$$

Através de uma combinação das equações de Hamilton (4.7), pode-se chegar à uma equação

diferencial de segunda ordem para o fator de escala dada por

$$\frac{d^2x(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{6}\bar{g}_c \left(\frac{3x}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}\bar{g}_\Lambda \left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{6}\bar{g}_r \left(\frac{3x}{2}\right)^{-5/3} + \frac{1}{2}\bar{g}_s \left(\frac{3x}{2}\right)^{-3} = 0. \quad (4.9)$$

Ao solucionar a equação (4.9) com as condições iniciais apropriadas é possível encontrar os quatro tipos de soluções clássicas diferentes que foram mencionadas na análise do espaço de fase. A figura (35a) exibe a solução periódica, a figura (35b) mostra a solução do bouncing ou ricochete, a figura (36a) representa uma solução expansiva e a figura (36b) mostra a solução onde acontece a contração.

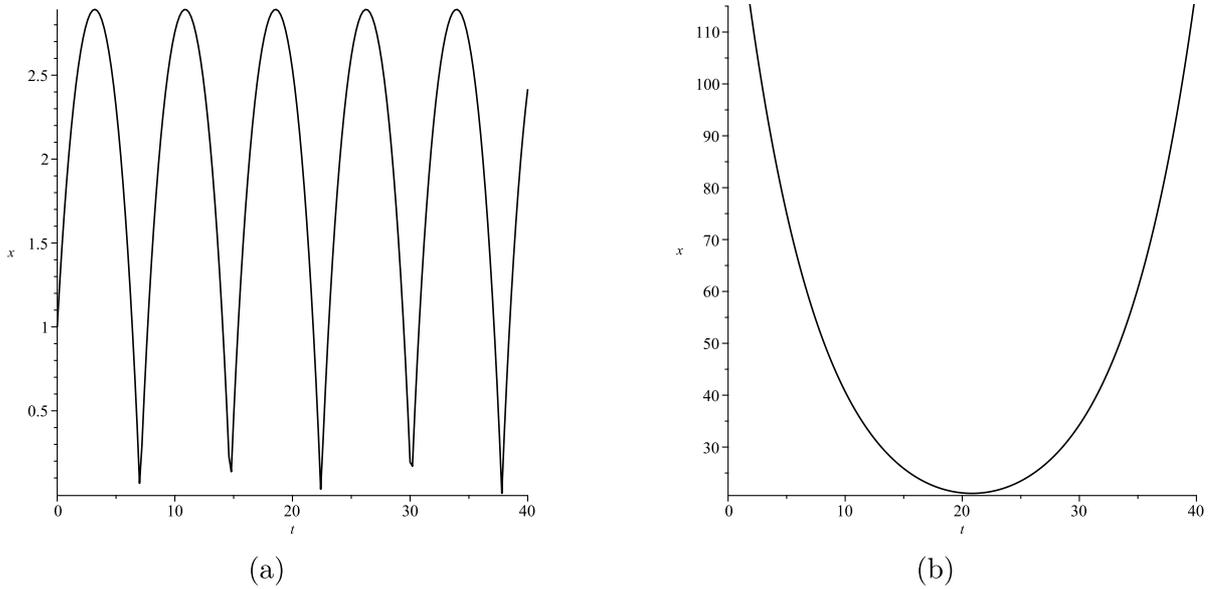


Figura 35 – Soluções clássicas $x(\eta) \times \eta$ para os casos (a) periódico e de (b) bouncing.

4.3 Quantização canônica

O próximo passo para descrever o Universo de acordo com este modelo é realizar uma quantização seguindo o formalismo de Dirac para sistemas com vínculos[131]. Começa-se substituindo as variáveis canonicamente conjugadas x e T momenta pelos seus respectivos operadores. Os momenta canonicamente conjugados para x e T , respectivamente p_x e p_T , são:

$$p_x \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_T \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial T}. \quad (4.10)$$

Seguindo, impõe-se o vínculo $\hat{H}\Psi(x, T) = 0$ onde \hat{H} é obtido substituindo as expressões dos operadores de x , T , p_x e p_T no hamiltoniano total (4.5). A equação de vínculo leva à equação Wheeler-DeWitt. Usando o hamiltoniano da equação (4.5), os operadores da equação (4.10) e a transformação $\tau = -T$ obtém-se

$$\left(-\frac{1}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x, \tau) = i\frac{\partial\Psi(x, \tau)}{\partial\tau}, \quad (4.11)$$

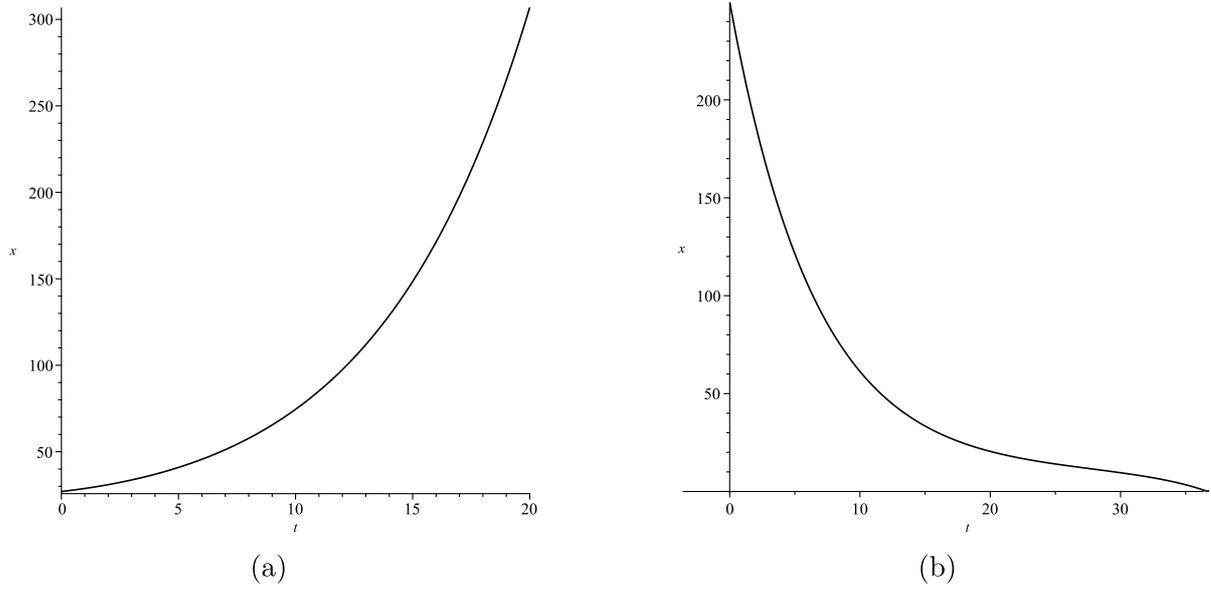


Figura 36 – Soluções clássicas $x(\eta) \times \eta$ para os casos de (a) expansão e de uma (b) dinâmica de contração.

sendo $V(x)$ o potencial da equação (4.6). Supondo que (4.11) tenha uma solução como $\Psi(x, \tau) = \psi(x)e^{-iE\tau}$, chega-se a

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 12(E - V(x)) \right] \psi(x) = 0. \quad (4.12)$$

Pode-se entender a equação (4.12) simplesmente como a versão da Cosmologia Quântica de uma equação de Schrödinger. É resolvido numericamente usando o método de Crank-Nicolson juntamente com o Algoritmo de Thomas para matrizes tridiagonais. A probabilidade de tunelamento integrada será dada por

$$TP_{int} = \frac{\int_{x_{rtp}}^{\infty} |\Psi(x, t_{max})|^2 dx}{\int_0^{\infty} |\Psi(x, t_{max})|^2 dx}, \quad (4.13)$$

onde x_{rtp} é o valor do fator de escala onde uma reta traçada na altura do valor da energia E cruza a barreira de potencial saindo pela direita, t_{max} é o momento onde a função de onda Ψ atinge o infinito na direção de x . O infinito é numericamente fixado como $x_{max} = 100$. A seguir, supondo que a aproximação WKB seja válida para este modelo, equação de Wheeler-DeWitt admitirá soluções do tipo (2.165). Assim, a probabilidade TP_{WKB} é calculada usando a equação (2.170) onde para o presente modelo tem-se

$$\begin{aligned} \theta &= \exp \left(\int_{x_{ltp}}^{x_{rtp}} k(x) dx \right) \\ &= \exp \left(\int_{x_{ltp}}^{x_{rtp}} \sqrt{12 \left(\bar{g}_c \left(\frac{3x}{2} \right)^{2/3} - \bar{g}_\Lambda \left(\frac{3x}{2} \right)^2 - \bar{g}_r \left(\frac{3x}{2} \right)^{-2/3} - \bar{g}_s \left(\frac{3x}{2} \right)^{-2} - E \right)} dx \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.4 Resultados

Esta seção expõe os resultados dos cálculos das probabilidades de tunelamento TP_{int} e TP_{WKB} para o modelo escolhido. O modelo selecionado possui as constantes de acoplamento $\bar{g}_c > 0$, $\bar{g}_\Lambda > 0$, $\bar{g}_r \geq 0$ e $\bar{g}_s < 0$. Visando estudar como essas probabilidades dependem dessas quantidades são fixadas as constantes de acoplamento, as \bar{g}_i 's com $i = c, \Lambda, r, s$, e a energia E , exceto aquela sob investigação. Esta estratégia é aplicada a cada um dos parâmetros. Ao estudar os \bar{g}_i 's foi selecionado um valor fixo de energia. Os valores do fator de escala onde a energia E intercepta o potencial, x_{ltp} e x_{rtp} , também são relevantes. Eles devem ser determinados para calcular as probabilidades.

4.4.1 Estudando o comportamento da probabilidade de tunelamento a partir da origem do fator de escala

A decisão de escolher g_s como $g_s < 0$ implica em uma barreira alta infinita positiva na origem do potencial. Foi feita uma investigação sobre a probabilidade de tunelamento nas proximidades dessa barreira alta. Para investigar o comportamento do modelo na origem, calcula-se o valor do θ dado pela equação (4.14). O valor escolhido de E determinará os valores de x_{ltp} e x_{rtp} . Este cálculo foi feito para diferentes valores de E usando um potencial que tem a forma mostrada na figura 33a. Todos os cálculos retornaram o mesmo resultado dizendo que θ sempre diverge e vai ao infinito. Isso implica em um TP_{WKB} nulo. O mesmo cálculo foi feito para TP_{int} . Também foi obtido um valor nulo para TP_{int} independentemente do valor de energia E selecionado. Isto significa que o Universo descrito neste modelo não parte de um fator de escala de tamanho zero. Ele possui, inicialmente, um valor pequeno porém não-nulo e está livre da singularidade do Big Bang ainda à nível quântico. Assim, deve-se assumir, para o presente modelo, que o Universo se formou inicialmente na região entre a barreira alta infinita e a segunda barreira que forma o poço. Também deve ser enfatizado que a energia selecionada E deve ser menor que o máximo da segunda barreira. Um Universo clássico permaneceria naquela região para sempre. Supondo que este Universo seja um sistema quântico, ele é capaz de atravessar a segunda barreira e iniciar sua expansão. Aqui será considerado que o Universo nasce logo após sair da segunda barreira. Tendo em conta estas hipóteses, será investigado qual é a probabilidade de o universo atravessar a segunda barreira e começar a se expandir, marcando o seu nascimento. Nas subseções a seguir, calculamos o TP_{WKB} para esse processo de tunelamento.

4.4.2 \bar{g}_c

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro \bar{g}_c , são fixados os valores de \bar{g}_Λ , \bar{g}_r , \bar{g}_s e E . O parâmetro \bar{g}_c assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int}

e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $\bar{g}_\Lambda = 0, 1$; $\bar{g}_r = 0, 2$; $\bar{g}_s = -0, 001$ e a energia é fixada em $E = 8$. O parâmetro \bar{g}_c começa em $\bar{g}_c = 3, 55$ e cresce até $\bar{g}_c = 4, 5$ em passos de $0, 05$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de \bar{g}_c , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que o valor selecionado da energia. De acordo com os resultados vistos na tabela (6) e nas figuras (37a) e (37b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} decrescem com o aumento de \bar{g}_c . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores menores de \bar{g}_c .

\bar{g}_c	TP_{int}	TP_{WKB}	x_{ltp}	x_{rtp}
3.55	0.40716	0.18937	3.7472	4.6911
3.6	0.39011	0.0065265	3.4042	5.1887
3.65	0.37563	0.00020651	3.1846	5.5261
3.7	0.36233	$6.4187e - 06$	3.0148	5.8063
3.75	0.3496	$1.9597e - 07$	2.8750	6.0543
3.8	0.33745	$5.8723e - 09$	2.7547	6.2810
3.85	0.32567	$1.7265e - 10$	2.6491	6.4921
3.9	0.31427	$4.9798e - 12$	2.5546	6.6911
3.95	0.30305	$1.4088e - 13$	2.4695	6.8808
4.0	0.29222	$3.9091e - 15$	2.3909	7.0626
4.05	0.28177	$1.0639e - 16$	2.3185	7.2378
4.1	0.27151	$2.8417e - 18$	2.2520	7.4071
4.15	0.26163	$7.4448e - 20$	2.1899	7.5716
4.2	0.25175	$1.9134e - 21$	2.1313	7.7317
4.25	0.24244	$4.8257e - 23$	2.0766	7.8879
4.3	0.23313	$1.194e - 24$	2.0252	8.0408
4.35	0.22401	$2.8998e - 26$	1.9760	8.1902
4.4	0.21527	$6.91e - 28$	1.9298	8.3370
4.45	0.20672	$1.6161e - 29$	1.8861	8.4812
4.5	0.19854	$3.7095e - 31$	1.8443	8.6229

Tabela 6 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme \bar{g}_c muda com uma energia fixa $E = 8$ e um tempo de simulação $t = 10$.

4.4.3 \bar{g}_Λ

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro \bar{g}_Λ , são fixados os valores de $\bar{g}_c, \bar{g}_r, \bar{g}_s$ e E . O parâmetro \bar{g}_Λ assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $\bar{g}_c = 4, 0$; $\bar{g}_r = 0, 2$; $\bar{g}_s = -0, 001$ e a energia é fixada em $E = 8$. O parâmetro \bar{g}_Λ começa em $\bar{g}_\Lambda = 0, 095$ e cresce até $\bar{g}_\Lambda = 0, 114$ em passos de $0, 001$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de \bar{g}_c , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que o valor selecionado da energia. De acordo com os resultados vistos na tabela (7) e nas figuras (38a) e (38b), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de \bar{g}_Λ . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de \bar{g}_Λ .

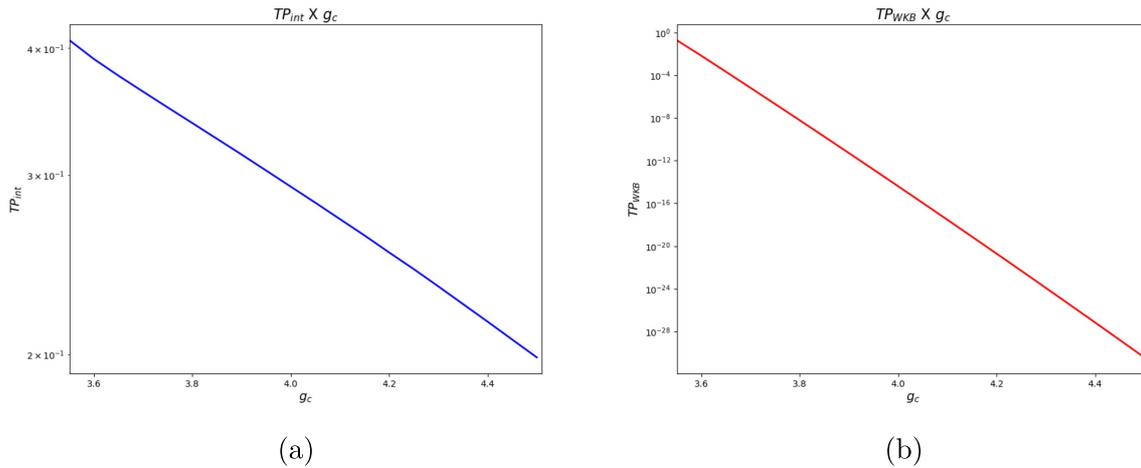


Figura 37 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_c varia para uma energia fixa $E = 8$ e tempo de simulação $t = 10$.

\bar{g}_Λ	TP_{int}	TP_{WKB}	x_{ltp}	x_{rtp}
0.095	0.2731	$9.6518e - 18$	2.3520	7.5121
0.096	0.27701	$3.3872e - 17$	2.3597	7.4235
0.097	0.28091	$1.1535e - 16$	2.3673	7.3364
0.098	0.28457	$3.8159e - 16$	2.3752	7.2507
0.099	0.28841	$1.2276e - 15$	2.3833	7.1660
0.1	0.29202	$3.843e - 15$	2.3914	7.0827
0.101	0.29562	$1.1719e - 14$	2.3997	7.0004
0.102	0.29919	$3.4837e - 14$	2.4082	6.9195
0.103	0.30273	$1.0104e - 13$	2.4167	6.8394
0.104	0.30625	$2.8612e - 13$	2.4255	6.7605
0.105	0.30974	$7.9167e - 13$	2.4345	6.6826
0.106	0.31322	$2.1417e - 12$	2.4437	6.6058
0.107	0.31666	$5.6696e - 12$	2.4531	6.5297
0.108	0.32008	$1.4693e - 11$	2.4625	6.4547
0.109	0.32329	$3.7306e - 11$	2.4723	6.3805
0.11	0.32666	$9.2853e - 11$	2.4822	6.3070
0.111	0.33001	$2.2668e - 10$	2.4924	6.2344
0.112	0.33314	$5.4307e - 10$	2.5029	6.1626
0.113	0.33626	$1.2776e - 09$	2.5134	6.0913
0.114	0.33953	$2.9525e - 09$	2.5244	6.0209

Tabela 7 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme \bar{g}_Λ muda com uma energia fixa $E = 8$ e um tempo de simulação $t = 10$.

4.4.4 \bar{g}_r

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro \bar{g}_r , são fixados os valores de \bar{g}_c , \bar{g}_Λ , \bar{g}_s e E . O parâmetro \bar{g}_r assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $\bar{g}_c = 4, 0$; $\bar{g}_\Lambda = 0, 1$; $\bar{g}_s = -0, 001$

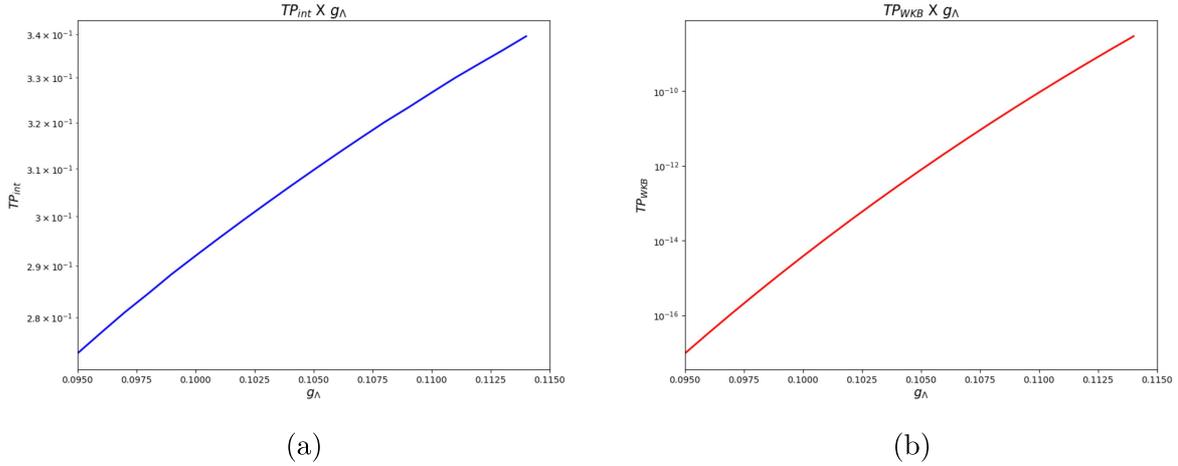


Figura 38 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_Λ varia para uma energia fixa $E = 8$ e tempo de simulação $t = 10$.

e a energia é fixada em $E = 1,5$. O parâmetro \bar{g}_r começa em $\bar{g}_r = 0,01$ e cresce até $\bar{g}_r = 0,05$ em passos de $0,0025$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de \bar{g}_r , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que o valor selecionado da energia. Os resultados podem ser vistos na tabela (8) e nas figuras (39a) e (39b). Aqui TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de \bar{g}_r . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de \bar{g}_r .

\bar{g}_r	TP_{int}	TP_{WKB}	x_{ltp}	x_{rtp}
0.01	0.0002048	$2.386e - 69$	0.1588	10.0957
0.0125	0.00020733	$2.4368e - 69$	0.1601	10.0957
0.015	0.00020988	$2.4888e - 69$	0.1614	10.0957
0.0175	0.00021243	$2.5431e - 69$	0.1621	10.0951
0.02	0.000215	$2.5972e - 69$	0.1634	10.0951
0.0225	0.00021758	$2.6511e - 69$	0.1641	10.0951
0.025	0.00022017	$2.7073e - 69$	0.1654	10.0951
0.0275	0.00022277	$2.7616e - 69$	0.1647	10.0951
0.03	0.00022539	$2.8233e - 69$	0.1667	10.0944
0.0325	0.00022801	$2.8828e - 69$	0.1680	10.0944
0.035	0.00023065	$2.9423e - 69$	0.1687	10.0944
0.0375	0.0002333	$3.0042e - 69$	0.1700	10.0944
0.04	0.00023596	$3.0659e - 69$	0.1706	10.0944
0.0425	0.00023863	$3.1334e - 69$	0.1719	10.0938
0.045	0.00024132	$3.1976e - 69$	0.1726	10.0938
0.0475	0.00024401	$3.2646e - 69$	0.1739	10.0938
0.050	0.00024672	$3.3313e - 69$	0.1746	10.0938

Tabela 8 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme \bar{g}_r muda com uma energia fixa $E = 1.5$ e um tempo de simulação $t = 10$.

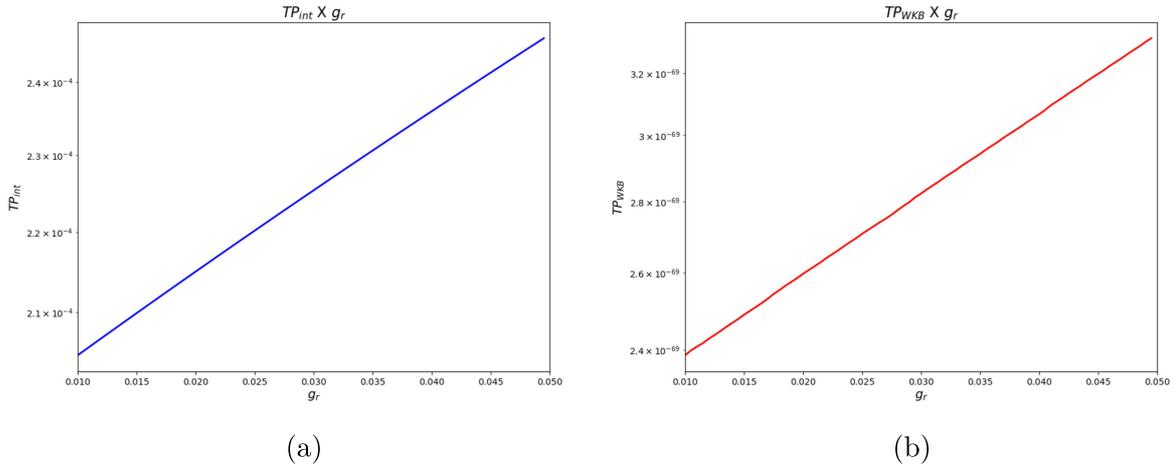


Figura 39 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_r varia para uma energia fixa $E = 1.5$ e tempo de simulação $t = 10$.

4.4.5 \bar{g}_s

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem do parâmetro \bar{g}_s , são fixados os valores de $\bar{g}_c, \bar{g}_\Lambda, \bar{g}_r$ e E . O parâmetro \bar{g}_s assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $\bar{g}_c = 4, 0; \bar{g}_\Lambda = 0, 1; \bar{g}_r = 0, 2$ e a energia é fixada em $E = 1, 5$. O parâmetro \bar{g}_s foi estudado em duas etapas. A primeira começa no valor $\bar{g}_s = -0, 01$ indo até $\bar{g}_s = -0, 001$ em passos de $0, 0001$. A segunda etapa parte de $\bar{g}_s = -0, 001$ e vai até $\bar{g}_s = -0, 0001$ em passos de $0, 0001$. O valor máximo do potencial $V(a)$ é alterado para cada novo valor de \bar{g}_r , porém, foi verificado que V_{max} sempre se mantém maior que o valor selecionado da energia. Os resultados podem ser vistos na tabela (9) e nas figuras (40a) e (40b). Aqui TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de \bar{g}_s . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de \bar{g}_s .

4.4.6 Energia E

Para estudar como as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} dependem da energia do fluido E , são fixados os valores de $\bar{g}_c, \bar{g}_\Lambda, \bar{g}_r$ e \bar{g}_s . A energia E assumirá valores dentro de uma determinada faixa previamente estabelecida e, para cada um desses valores, TP_{int} e TP_{WKB} são calculadas. Nessa análise o modelo conta com os valores $\bar{g}_c = 4, 0; \bar{g}_\Lambda = 0, 03; \bar{g}_r = 0, 2$ e $\bar{g}_s = -0, 001$. A energia E começa em $E = 1$ e cresce até $E = 17$ em passos de tamanho 1 e são calculados dois valores adicionais que são $E = 17, 5$ e $E = 17, 7$. De acordo com os resultados vistos na tabela (10) e nas figuras (41a),(41b) e (41c), chega-se a conclusão de que TP_{int} e TP_{WKB} crescem com o aumento de E . Portanto, o universo tem chances maiores de nascer com valores maiores de E .

\bar{g}_s	TP_{int}	TP_{WKB}	x_{ltp}	x_{rtp}
-0.0001	0.00042057	$1.0828e - 68$	0.2227	10.1012
-0.0002	0.00041602	$1.0823e - 68$	0.2238	10.1012
-0.0003	0.0004115	$1.0808e - 68$	0.2225	10.1012
-0.0004	0.00040701	$1.0803e - 68$	0.2236	10.1012
-0.0005	0.00040255	$1.0793e - 68$	0.2233	10.1012
-0.0006	0.00039812	$1.0777e - 68$	0.2220	10.1012
-0.0007	0.00039372	$1.0773e - 68$	0.2231	10.1012
-0.0008	0.00038934	$1.0757e - 68$	0.2218	10.1012
-0.0009	0.00038499	$1.0753e - 68$	0.2229	10.1012
-0.002	0.00033902	$1.0641e - 68$	0.2214	10.1012
-0.003	0.00030015	$1.0539e - 68$	0.2201	10.1012
-0.004	0.00026403	$1.0431e - 68$	0.2174	10.1012
-0.005	0.00023064	$1.0334e - 68$	0.2172	10.1012
-0.006	0.00019994	$1.023e - 68$	0.2155	10.1012
-0.007	0.00017191	$1.0123e - 68$	0.2131	10.1012
-0.008	0.00014653	$1.002e - 68$	0.2115	10.1012
-0.009	0.00012376	$9.9208e - 69$	0.2111	10.1012
-0.01	0.00010358	$9.8169e - 69$	0.2096	10.1012

Tabela 9 – Esta tabela mostra como TP_{int} e TP_{WKB} variam conforme \bar{g}_s muda com uma energia fixa $E = 1.5$ e um tempo de simulação $t = 10$.

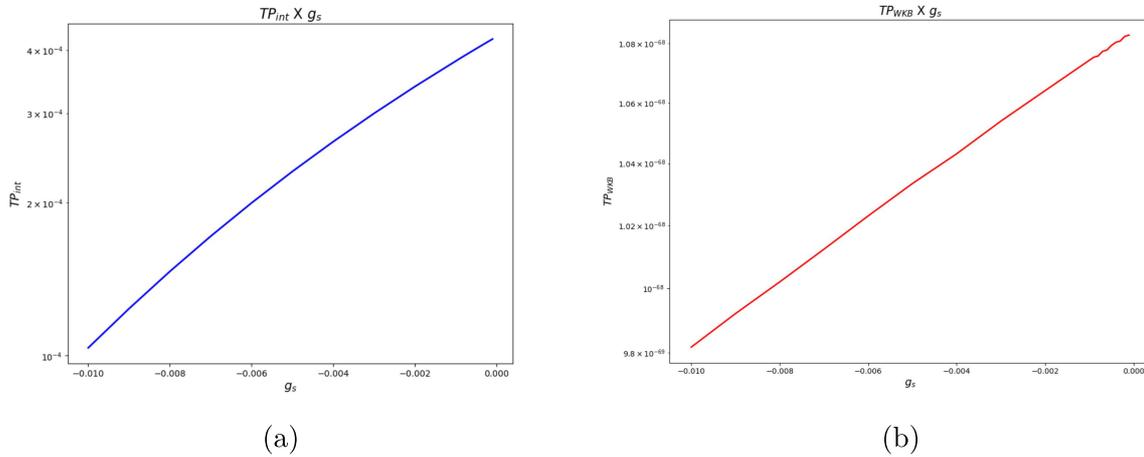


Figura 40 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} conforme \bar{g}_s varia para uma energia fixa $E = 1.5$ e tempo de simulação $t = 10$.

4.5 Conclusão

Neste trabalho foi estudado o nascimento do Universo dentro de um modelo cosmológico utilizando a teoria de Hořava-Lifshitz para descrever o setor gravitacional do modelo. Foi assumido que o modelo consistiria em um espaço-tempo FLRW homogêneo e isotrópico, com seções espaciais curvadas positivamente ($k = 1$). O conteúdo de matéria escolhido para o modelo é poeira ($\omega = 1$). Foi utilizada a versão projetável da teoria HL,

E	TP_{int}	TP_{WKB}	x_{ltp}	x_{rtp}
1	$5.2238e - 74$	$1.6327e - 253$	0.1551	25.7168
2	$4.666e - 70$	$1.9563e - 239$	0.2991	25.2731
3	$6.8954e - 65$	$3.9325e - 225$	0.4906	24.8156
4	$8.6226e - 61$	$1.2132e - 210$	0.7237	24.3430
5	$6.7319e - 57$	$5.3887e - 196$	0.9938	23.8536
6	$5.5236e - 53$	$3.2875e - 181$	1.2998	23.3453
7	$4.6236e - 49$	$2.6566e - 166$	1.6408	22.8156
8	$5.2326e - 45$	$2.7627e - 151$	2.0183	22.2616
9	$8.0725e - 41$	$3.6107e - 136$	2.4341	21.6794
10	$1.6664e - 36$	$5.8145e - 121$	2.8924	21.0641
11	$4.9408e - 32$	$1.1342e - 105$	3.3981	20.4093
12	$2.4256e - 27$	$2.6421e - 90$	3.9601	19.7055
13	$1.895e - 22$	$7.2557e - 75$	4.5907	18.9396
14	$2.5069e - 17$	$2.3234e - 59$	5.3104	18.0905
15	$6.1348e - 12$	$8.5886e - 44$	6.1542	17.1222
16	$1.6272e - 06$	$3.6342e - 28$	7.1958	15.9601
17	0.069747	$1.7479e - 12$	8.6501	14.3868
17.5	0.20844	0.00012729	9.8414	13.1288
17.7	0.26759	0.16619	10.7599	12.1519

Tabela 10 – Variação de TP_{int} e TP_{WKB} com $\bar{g}_s < 0$ conforme E cresce para um tempo de simulação $t = 10$.

sem a condição de balanço detalhado. O hamiltoniano total do modelo é escrito usando o hamiltoniano do setor gravitacional obtido pelo formalismo ADM e o hamiltoniano do setor da matéria obtido pelo formalismo de Schutz. O potencial utilizado neste trabalho vem do hamiltoniano total. O potencial tem o formato de um poço seguido de uma barreira. Isto acontece devido aos valores escolhidos dos parâmetros HL. Foi estudada a dinâmica clássica do fator de escala. Esta análise começa ao desenhar o retrato de fase do modelo. A seguir, resolvemos as equações de Hamilton. Eles podem ser usados para encontrar uma equação diferencial para o fator de escala. As soluções para esta equação nos fornecem todos os fatores de escala possíveis para o modelo. A seguir, quantizamos o modelo usando o formalismo de Dirac. Isso produz a equação de Wheeler-DeWitt. A equação de Wheeler-DeWitt é resolvida numericamente. Esta solução é usada para calcular as probabilidades de tunelamento. Uma investigação mostra que as probabilidades de tunelamento para o universo passar pela barreira infinita e alta são zero. Isso significa que o universo não pode partir de um fator de escala zero ou que o modelo se mostra livre de singularidades já no nível quântico. Devido a isso, assumiu-se que o Universo foi formado com fator de escala diferente de zero entre a barreira alta infinita e a segunda barreira, na região do poço. Assume-se que o Universo nasce no momento em que atravessa a segunda barreira. Então, foram calculadas as probabilidades de tunelamento TP_{int} e TP_{WKB} para o nascimento do Universo. Foi realizada uma investigação individual para cada parâmetro HL e para a energia. Isto é feito para mostrar como eles afetam individualmente as probabilidades de tunelamento. O resultado dessas investigações foi o seguinte: TP_{int} e TP_{WKB} diminuem quando se aumenta \bar{g}_c . TP_{int} e TP_{WKB} crescem quando se aumenta

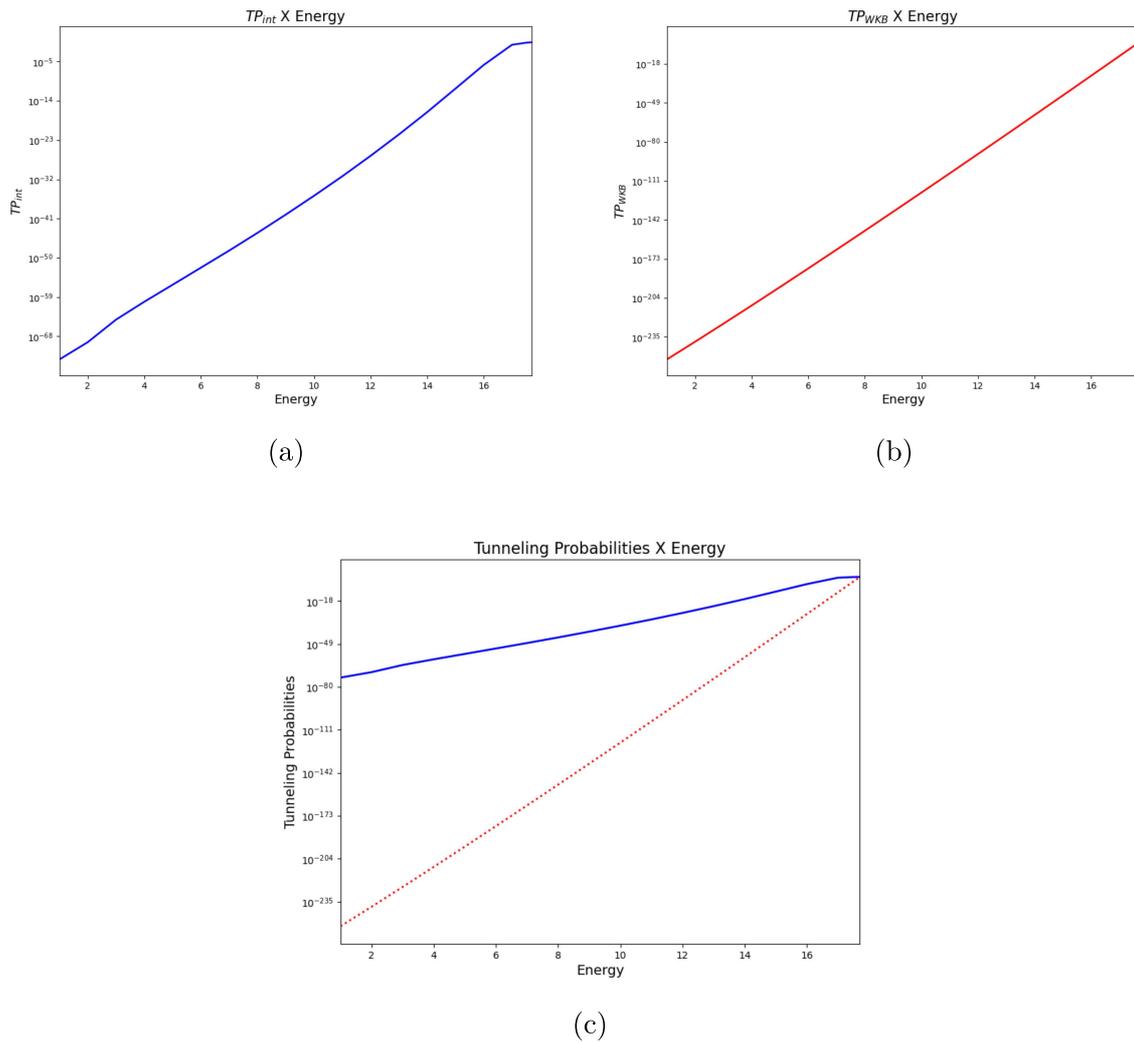


Figura 41 – (a)Variação de TP_{int} com o aumento da energia. (b)Variação de TP_{WKB} com o aumento da energia. (c) Comparação da evolução de TP_{int} e TP_{WKB} conforme a energia aumenta.

\bar{g}_Λ , \bar{g}_r , \bar{g}_s e E .

5 Conclusão

O presente trabalho consiste em estudos de modelos cosmológicos onde se utiliza a teoria Hořava-Lifshitz para descrever a parte gravitacional do modelo. O uso da teoria de HL faz com que esses modelos sejam livres de singularidades.

O estudo de ambos modelos foi feito seguindo uma mesma metodologia: assume-se um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica FLRW com curvatura positiva ($k = +1$) permeado por um fluido perfeito que obedece uma equação de estado $p = \omega\rho$. Seguindo, a hamiltoniana total do modelo é obtida fazendo uso do formalismo ADM para a parte gravitacional e do formalismo de Schutz para a parte relacionada a matéria. De posse da hamiltoniana, fez-se o estudo clássico dos modelos onde são calculadas as equações de Hamilton do modelo. Isso possibilita a obtenção de uma equação para o momento canonicamente conjugado para a construção de um espaço de fase (q, p_q) para um estudo qualitativo da dinâmica do fator de escala. Através de uma manipulação das equações de Hamilton também é possível a obtenção de uma equação diferencial para o fator de escala cujas soluções mostraram que para ambos modelos existem as soluções chamadas periódica, expansão, bounce ou ricochete e contração, vistas nas figuras 25a, 25b, 26a, 26b, 35a, 35b, 36a e 36b.

O próximo passo foi a quantização do modelo, onde foi utilizado o formalismo de Dirac, dado que a RG é uma teoria com vínculos. A quantização leva à equação de Wheeler-DeWitt do modelo, que foi discretizada fazendo uso do método de Crank-Nicolson para que pudesse ser trabalhada computacionalmente. O estudo computacional possibilitou traçar a evolução temporal da função de onda e, uma vez obtida essa informação, foi possível calcular as probabilidades de tunelamento integrada e utilizando a aproximação WKB denotadas por TP_{int} e TP_{WKB} , respectivamente. Para os dois modelos estudados foi feita uma investigação de como a energia E e os parâmetros da teoria de HL, g_c , g_Λ , g_r e g_s , afetam as probabilidades TP_{int} e TP_{WKB} . Para os dois modelos foi possível ver que as probabilidades de tunelamento caem conforme g_c cresce e que as probabilidades de tunelamento são maiores conforme E , g_Λ , g_r e g_s aumentam. Em suma, as melhores condições para o nascimento de um universo seriam aquelas com o menor valor possível de g_c e com os maiores valores possíveis para E , g_Λ , g_r e g_s .

Como perspectivas futuras pretendemos usar a teoria de Hořava-Lifshitz para estudar modelos mais complexos como (i) um modelo com o gás de Chaplygin, que é um fluido mais complicado; (ii) um modelo cuja constante cosmológica varia no tempo; (iii) um modelo descrito com mais de um fluido cosmológico.

APÊNDICE A – A ação completa na teoria de Hořava-Lifshitz

Seguindo o desenvolvimento apresentado em [138], o objetivo deste apêndice é mostrar como obter a ação da teoria de Hořava-Lifshitz na forma utilizada ao longo dos trabalhos desenvolvidos que foram mostrados nos capítulos anteriores. A ação completa da versão projetável ($N = N(t)$) da teoria de Hořava-Lifshitz sem a condição de balanço detalhado é dada por

$$S_{HL} = \frac{1}{2}M_p^2 \int d^3x dt N \sqrt{h} \left[K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_p^2 - g_1 R - M_p^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij}R^{ij}) - M_p^{-4} (g_4 R^3 + g_5 R R_j^i R_i^j + g_6 R_j^i R_k^j R_i^k + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}) \right] + \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K. \quad (\text{A.1})$$

Os termos que compõe a ação S_{HL} são

$$\left\{ \begin{array}{l} M_p = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = \text{Massa de Planck} \\ h_{ij} = \text{Métrica da hipersuperfície tridimensional} \\ K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2 = \text{Parte cinética da ação} \\ K_{ij} = \text{Curvatura extrínseca} \\ R = \text{Escalar de curvatura} \\ R_{ij} = \text{Tensor de Ricci} \\ g_i (i = 0, 1, \dots, 8) = \text{Constantes de acoplamento.} \end{array} \right.$$

Do formalismo ADM, a métrica $g_{\mu\nu}$ é

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -N^2(t, \mathbf{x}) + N_a(t, \mathbf{x})N^a(t, \mathbf{x}) & N_b(t, \mathbf{x}) \\ N_a(t, \mathbf{x}) & h_{ab}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

No caso de um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica FLRW, o vetor de shift N^i some e tem-se

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -N^2(t) & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

com elemento de linha

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (\text{A.4})$$

O termo $N = N(t)$ é a função lapso, e \sqrt{h} que vem da métrica h_{ij} :

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$h^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1-kr^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{\det(h)} = \sqrt{\frac{a(t)^6 r^4 \sin^2 \theta}{1-kr^2}} = \frac{a(t)^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (\text{A.7})$$

A.1 Parte cinética

Primeiramente será trabalhada a parte cinética da ação (A.1). O ponto de partida será a curvatura extrínseca que é dada por

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Para o caso específico da métrica (A.4), essa equação fica

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Ao calcular para os termos não-nulos de h_{ij} obtém-se

$$K_{rr} = -\frac{1}{2N} \left[\frac{\partial h_{rr}}{\partial t} \right] = -\frac{a\dot{a}}{N(1-kr^2)}, \quad (\text{A.10})$$

$$K_{\theta\theta} = -\frac{1}{2N} \left[\frac{\partial h_{\theta\theta}}{\partial t} \right] = -\frac{a\dot{a}r^2}{N}, \quad (\text{A.11})$$

$$K_{\phi\phi} = -\frac{1}{2N} \left[\frac{\partial h_{\phi\phi}}{\partial t} \right] = -\frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{N}. \quad (\text{A.12})$$

Usando a relação $K^{ij} = h^{li} h^{mj} K_{lm}$, obtém-se os termos

$$K^{rr} = h^{rr} h^{rr} K_{rr} = -\frac{\dot{a}(1-kr^2)}{Na^3}, \quad (\text{A.13})$$

$$K^{\theta\theta} = h^{\theta\theta} h^{\theta\theta} K_{\theta\theta} = -\frac{\dot{a}}{Na^3 r^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$K^{\phi\phi} = h^{\phi\phi} h^{\phi\phi} K_{\phi\phi} = -\frac{\dot{a}}{Na^3 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (\text{A.15})$$

Com isso, é possível calcular o termo

$$K_{ij} K^{ij} = K_{rr} K^{rr} + K_{\theta\theta} K^{\theta\theta} + K_{\phi\phi} K^{\phi\phi} = \frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2}. \quad (\text{A.16})$$

Fazendo uma contração com a métrica h_{ij} obtém-se o termo

$$K = h_{ij}K^{ij} = h_{rr}K^{rr} + h_{\theta\theta}K^{\theta\theta}h_{\phi\phi}K^{\phi\phi} = -\frac{3\dot{a}}{Na}, \quad (\text{A.17})$$

de onde vem

$$K^2 = \frac{9\dot{a}^2}{N^2a^2}. \quad (\text{A.18})$$

Usando (A.7), (A.16) e (A.18) na parte cinética da ação (A.1) chega-se a

$$S_k = \frac{M_p^2}{2} \int dx^3 dt \frac{r^2 a^3 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2} - \lambda \frac{9\dot{a}^2}{N^2a^2} \right). \quad (\text{A.19})$$

A.2 Parte potencial

Para calcular a parte potencial da ação (A.1) serão necessários os termos

$$R_{ijkl}^i = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk}, \quad (\text{A.20})$$

$$R_{ij} = h^{kl}R_{kilj}, \quad (\text{A.21})$$

$$R_{ijkl} = h_{im}R^m_{jkl}, \quad (\text{A.22})$$

$$R = h^{ij}R_{ij}, \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}h^{li}(h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{kj,l}), \quad (\text{A.24})$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}, \quad (\text{A.25})$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Usando essas definições, calcula-se os termos

$$R = h^{ij}R_{ij} = h^{rr}R_{rr} + h^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + h^{\phi\phi}R_{\phi\phi}, \quad (\text{A.27})$$

$$R_{rr} = h^{kl}R_{krlr} = h^{rr}R_{rrrr} + h^{\theta\theta}R_{\theta r\theta r} + h^{\phi\phi}R_{\phi r\phi r}, \quad (\text{A.28})$$

$$R_{rrrr} = h_{rr}R^r_{rrr}, \quad (\text{A.29})$$

$$R^r_{rrr} = \Gamma^r_{rr,r} - \Gamma^r_{rr,r} + \Gamma^r_{mr}\Gamma^m_{rr} - \Gamma^r_{mr}\Gamma^m_{rr} = 0. \quad (\text{A.30})$$

Os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^\theta &= \Gamma_{rr}^\theta = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta r,r} + h_{\theta r,r} - h_{rr,\theta}) = 0, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta r,\theta} + h_{\theta\theta,r} - h_{\theta r,\theta}) = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,r} + h_{rr,r} - h_{rr,r}) = \frac{kr}{1-kr^2}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\theta,\theta} + h_{\theta\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\theta}) = 0, \\
\Gamma_{\phi\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta\phi}^\theta = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\phi,\theta} + h_{j\theta,\phi} - h_{\theta\phi,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\phi,\theta} + h_{\theta\theta,\phi} - h_{\theta\phi,\theta}) = 0, \\
\Gamma_{rr}^\phi &= \frac{1}{2}h^{j\phi}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}(h_{\phi r,r} + h_{\phi r,r} - h_{rr,\phi}) = 0, \\
\Gamma_{r\theta}^r &= \Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,\theta} + h_{r\theta,r} - h_{\theta r,r}) = 0, \\
\Gamma_{\phi r}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\theta = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\phi,r} + h_{jr,\phi} - h_{r\phi,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\phi,r} + h_{\theta r,\phi} - h_{r\phi,\theta}) = 0, \\
\Gamma_{r\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta r}^\phi = \frac{1}{2}h^{j\phi}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}(h_{\phi r,\theta} + h_{\phi\theta,r} - h_{\theta r,\phi}) = 0.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

e também

$$\begin{aligned}
R_{rrrr} &= 0, \\
R_{\theta r\theta r} &= h_{\theta\theta}R_{r\theta r}^\theta, \\
R_{r\theta r}^\theta &= \Gamma_{rr,\theta}^\theta - \Gamma_{r\theta,r}^\theta + \Gamma_{m\theta}^\theta\Gamma_{rr}^m - \Gamma_{mr}^\theta\Gamma_{r\theta}^m \\
&= \Gamma_{rr,\theta}^\theta - \Gamma_{r\theta,r}^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta\Gamma_r^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta\Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\theta\Gamma_{rr}^\phi \\
&\quad - \Gamma_{rr}^\theta\Gamma_r^r - \Gamma_{\theta r\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\theta\Gamma_{r\theta}^\phi.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Usando os símbolos de Christoffel(A.31) em $R_{r\theta r}^\theta$ obtém-se

$$R_{r\theta r}^\theta = \frac{k}{1-kr^2}. \tag{A.33}$$

Usando esse resultado em $R_{\theta r\theta r}$,

$$R_{\theta r\theta r} = \frac{a^2r^2k}{1-kr^2}. \tag{A.34}$$

A seguir, calcula-se

$$\begin{aligned}
R_{\phi r\phi r} &= h_{\phi\phi}R_{r\phi r}^\phi, \\
R_{r\phi r}^\phi &= \Gamma_{rr,\phi}^\phi - \Gamma_{r\phi,r}^\phi + \Gamma_{m\phi}^\phi\Gamma_{rr}^m - \Gamma_{mr}^\phi\Gamma_{r\phi}^m \\
&= \Gamma_{rr,\phi}^\phi - \Gamma_{r\phi,r}^\phi + \Gamma_{r\phi}^\phi\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\phi}^\phi\Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi\Gamma_{rr}^\phi \\
&\quad - \Gamma_{rr}^\phi\Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{\theta r}^\phi\Gamma_{r\phi}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi\Gamma_{r\phi}^\phi, \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{2}h^{j\phi}(h_{jr,\phi} + h_{j\phi,r} - h_{\phi r,j}) = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}(h_{\phi r,\phi} + h_{\phi\phi,r} - h_{\phi r,\phi}) = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Usando esses resultados calcula-se $R_{r\phi r}^\phi$

$$R_{r\phi r}^\phi = \frac{k}{1 - kr^2} \quad (\text{A.36})$$

e, em seguida,

$$R_{\phi r \phi r} = \frac{ka^2 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.37})$$

Esse resultado possibilita calcular R_{rr} :

$$R_{rr} = \frac{2k}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.38})$$

A seguir, deve-se calcular

$$R_{\theta\theta} = h^{kl} R_{k\theta l\theta} = h^{rr} R_{r\theta r\theta} + h^{\theta\theta} R_{\theta\theta\theta\theta} + h^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta}. \quad (\text{A.39})$$

Usando a propriedade (A.25),

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta\theta\theta} &= 0, \\ R_{r\theta r\theta} &= R_{\theta r \theta r} = \frac{ka^2 r^2}{1 - kr^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Calculando os símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= \frac{1}{2} h^{j\phi} (h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{\phi\phi} (h_{\phi\theta,\theta} + h_{\phi\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\phi}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{1}{2} h^{j\phi} (h_{j\theta,\phi} + h_{j\phi,\theta} - h_{\phi\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{\phi\phi} (h_{\phi\theta,\phi} + h_{\phi\phi,\theta} - h_{\phi\theta,\phi}) = \text{cot}g\theta \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} h^{jr} (h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{rr} (h_{r\theta,\theta} + h_{r\theta,\theta} - h_{\theta\theta,r}) = -r(1 - kr^2). \\ \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= \frac{1}{2} h^{j\phi} (h_{j\phi,\phi} + h_{j\phi,\phi} - h_{\phi\phi,j}) = \frac{1}{2} h^{\phi\phi} (h_{\phi\phi,\phi} + h_{\phi\phi,\phi} - h_{\phi\phi,\phi}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

é possível calcular

$$\begin{aligned} R_{\phi\theta\phi\theta} &= h_{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta}^\phi \\ R_{\theta\phi\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\theta,\phi}^\phi - \Gamma_{\theta\phi,\theta}^\phi + \Gamma_{m\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^m - \Gamma_{m\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^m \\ &= \Gamma_{\theta\theta,\phi}^\phi - \Gamma_{\theta\phi,\theta}^\phi + \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi \\ &\quad - \Gamma_{r\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

que resulta em

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta}^\phi &= kr^2, \\ R_{\phi\theta\phi\theta} &= ka^2 r^4 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Com esses valores em mãos, calcula-se

$$R_{\theta\theta} = 2kr^2. \quad (\text{A.44})$$

O último termo a ser calculado é

$$R_{\phi\phi} = h^{kl} R_{k\phi l\phi} = h^{rr} R_{r\phi r\phi} + h^{\theta\theta} R_{\theta\phi\theta\phi} + h^{\phi\phi} R_{\phi\phi\phi\phi}. \quad (\text{A.45})$$

Usando a assimetria novamente,

$$\begin{aligned} R_{r\phi r\phi} &= R_{\phi r\phi r} = \frac{ka^2 r^2 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}, \\ R_{\theta\phi\theta\phi} &= R_{\phi\theta\phi\theta} = ka^2 r^4 \sin^2 \theta, \\ R_{\phi\phi\phi\phi} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Esses termos possibilitam calcular o termo restante

$$R_{\phi\phi} = 2kr^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.47})$$

Agora é possível calcular o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= h^{ij} R_{ij} = h^{rr} R_{rr} + h^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + h^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\ R &= \frac{1 - kr^2}{a^2} \frac{2k}{1 - kr^2} + \frac{1}{a^2 r^2} 2kr^2 + \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} 2kr^2 \sin^2 \theta \\ R &= \frac{6k}{a^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Também serão úteis

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{36k^2}{a^4}, \\ R^2 &= \frac{216k^3}{a^6}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Os termos R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ e $R_{\phi\phi}$ podem ser escritos como

$$R_{ij} = \frac{2k}{a^2} h_{ij}. \quad (\text{A.50})$$

O tensor R^{ij} é obtido levantando os índices de R_{ij} :

$$R^{ij} = h^{ki} h^{lj} R_{kl} = \frac{2k}{a^2} h^{ij}. \quad (\text{A.51})$$

O produto dos dois é

$$R^{ij} R_{ij} = \frac{4k^2}{a^4} h^{ij} h_{ij} = \frac{12k^2}{a^4}. \quad (\text{A.52})$$

Também será necessário calcular

$$R^i_j = h^{ki} R_{kj} = h^{ki} \frac{2k}{a^2} h_{kj} = \frac{2k}{a^2} h^{ki} h_{kj} = \frac{2k}{a^2} h^i_j. \quad (\text{A.53})$$

Com isso,

$$R^i_j R^j_i = \frac{2k}{a^2} \frac{2k}{a^2} h^i_j h^j_i = \frac{4k^2}{a^4} h^i_i = \frac{12k^2}{a^4}. \quad (\text{A.54})$$

Agora é possível calcular o termo

$$RR^i_j R^j_i = \frac{6k^2}{a^2} \frac{12k^2}{a^4} = \frac{72k^3}{a^6}. \quad (\text{A.55})$$

Também será necessário o termo

$$R^i_j R^j_k R^k_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_k h^k_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_i = \frac{24k^3}{a^6}. \quad (\text{A.56})$$

Como a derivada covariante da métrica é nula, tem-se que

$$R_{jk} \nabla^i R^{jk} = 0. \quad (\text{A.57})$$

sendo o laplaciano de uma função f qualquer dado por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{h} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right], \quad (\text{A.58})$$

para o caso onde $f = R$ tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 R &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial r} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial R}{\partial \phi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Como o escalar de Ricci R é independente das coordenadas, tem-se que os termos restantes serão simplesmente

$$\nabla^2 R = 0, \quad (\text{A.60})$$

e

$$R \nabla^2 R = 0. \quad (\text{A.61})$$

A.3 Ação Completa

Após calcular todos estes termos, ao substituí-los na equação (A.1) considerando o termo de superfície nulo e fazendo $g_0 M_p^2 = 2\Lambda$ e $g_1 = -1$, tem-se

$$\begin{aligned} S_{HL} &= \beta \int dt N \left[3(1-3\lambda) \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + 6ka - 2\Lambda a^3 - M_p^{-2} \left\{ \frac{12k^2}{a} (3g_2 + g_3) \right\} \right. \\ &\quad \left. - M_p^{-4} \left\{ \frac{24k^3}{a^3} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right\} \right] \\ &= \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + \frac{1}{3(3\lambda-1)} \left(6ka - 2\Lambda a^3 - \frac{12k^2}{a M_p^2} (3g_2 + g_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{24k^3}{a^3 M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

onde foi usado

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{M_p^2}{2} \int d^3x \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} \\
\eta &= 3\beta(3\lambda - 1) \\
V_0 &= \int d^3x \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}}, \\
1 &= \frac{3M_p^2 V_0 (3\lambda - 1)}{2}, \\
g_c &= \frac{2}{3\lambda - 1}, \\
g_\Lambda &= \frac{2\Lambda}{3(3\lambda - 1)}, \\
g_r &= 6V_0 (3g_2 + g_3), \\
g_s &= 18V_0^2 (3\lambda - 1) (9g_4 + 3g_5 + g_6).
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Aqui, η é uma constante numérica vindo da integração da parte espacial. Os termos g_c, g_Λ, g_r e g_s são constantes de acoplamento e o termo g_c precisa ser positivo ($g_c > 0$). Usando esses termos na ação, chega-se a

$$S_{HL} = \eta \int dt N \left[-\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \tag{A.64}$$

APÊNDICE B – Discretização da equação de Wheeler-DeWitt

Este apêndice tem o propósito de mostrar como obter a versão numérica da equação de Wheeler-DeWitt para ser usada no código. Como exemplo, será usada a equação (3.17) que descreve o primeiro modelo,

$$\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - V(a)\right)\Psi(a, \tau) = -i\frac{\partial\Psi(a, \tau)}{\partial\tau}. \quad (\text{B.1})$$

onde o potencial é, usando $k = 1$,

$$V(a) = g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2}. \quad (\text{B.2})$$

O método de Crank-Nicolson[107] diz que as derivadas de uma função $f(x, t)$ qualquer podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2(dx)^2} \left[(f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}) + (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) \right], \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{dt}, \quad f(x, t) = \frac{f_i^{n+1} + f_i^n}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Aqui, a derivada primeira foi feita em relação a t e a derivada segunda foi feita em relação a x simplesmente para já ser feita a substituição pela função de onda. Elas poderiam ter sido escritas em termos de qualquer outra variável, caso necessário. Para evitar confusão com os índices, será usado $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ e $i =$ índice para discretizar a coordenada x . Usando (B.3) na equação de Wheeler-DeWitt(B.1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\frac{1}{2(da)^2} \left[(\Psi_{i+1}^{n+1} - 2\Psi_i^{n+1} + \Psi_{i-1}^{n+1}) + (\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n) \right] - V(a)\frac{\Psi_i^{n+1} + \Psi_i^n}{2} \\ = -\mathbf{i}\frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{d\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde $\Psi = \Psi(a, \tau)$. Continuando,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8(da)^2} \left[(\Psi_{i+1}^{n+1} - 2\Psi_i^{n+1} + \Psi_{i-1}^{n+1}) + (\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n) \right] - V(a)\frac{\Psi_i^{n+1}}{2} - V(a)\frac{\Psi_i^n}{2} \\ + \mathbf{i}\frac{\Psi_i^{n+1}}{d\tau} - \mathbf{i}\frac{\Psi_i^n}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Multiplicando por $d\tau$,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{8(da)^2} \left[(\Psi_{i+1}^{n+1} - 2\Psi_i^{n+1} + \Psi_{i-1}^{n+1}) + (\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n) \right] - V(a)\frac{\Psi_i^{n+1}}{2}d\tau - V(a)\frac{\Psi_i^n}{2}d\tau \\ + \mathbf{i}\Psi_i^{n+1} - \mathbf{i}\Psi_i^n = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

O próximo passo consiste em juntar os termos de mesmo índice temporal. Então, os termos no tempo $(n + 1)$ ficarão de um lado da equação e os termos no tempo n ficaram do outro lado. Para simplificar, será definido $\beta = \frac{d\tau}{(da)^2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{8}\Psi_{i+1}^{n+1} - \frac{\beta}{4}\Psi_i^{n+1} + \frac{\beta}{8}\Psi_{i-1}^{n+1} - V(a)\frac{\Psi_i^{n+1}}{2}d\tau + \mathbf{i}\Psi_i^{n+1} \\ & = -\frac{\beta}{8}\Psi_{i+1}^n + \frac{\beta}{4}\Psi_i^n - \frac{\beta}{8}\Psi_{i-1}^n + V(a)\frac{\Psi_i^n}{2}d\tau + \mathbf{i}\Psi_i^n. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Juntando os termos com Ψ_i^{n+1} e Ψ_i^n ,

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{8}\Psi_{i+1}^{n+1} + \left(\mathbf{i} - \frac{\beta}{4} - \frac{V(a)d\tau}{2}\right)\Psi_i^{n+1} + \frac{\beta}{8}\Psi_{i-1}^{n+1} \\ & = -\frac{\beta}{8}\Psi_{i+1}^n + \left(\mathbf{i} + \frac{\beta}{4} + \frac{V(a)d\tau}{2}\right)\Psi_i^n - \frac{\beta}{8}\Psi_{i-1}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt discretizada. A equação (B.8) descreve uma equação matricial cujas matrizes são tridiagonais. A equação tem o formato

$$\underbrace{C_1\Psi^{n+1}}_{\text{Futuro}} = \underbrace{C_2\Psi^n}_{\text{Presente}}, \quad (\text{B.9})$$

onde as matrizes são

$$C_1 = \begin{pmatrix} X & A & 0 & \cdots \\ A & X & A & \cdots \\ 0 & A & X & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} Y & -A & 0 & \cdots \\ -A & Y & -A & \cdots \\ 0 & -A & Y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

onde os elementos são dados por

$$A = \frac{\beta}{8}, \quad X = \left(i - \frac{\beta}{4} - \frac{V(a)d\tau}{2}\right), \quad Y = \left(i + \frac{\beta}{4} + \frac{V(a)d\tau}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

Com isso em mãos, o loop para obter a evolução temporal de $\Psi(a, \tau)$ no código será construído usando

$$\Psi^{n+1} = C_1^{-1}C_2\Psi^n. \quad (\text{B.12})$$

Como exemplo, no código para o modelo com poeira o loop temporal no código é mostrado na figura (42).

```

# Time evolution
for j in range(0, T-1): # here we have t = 0 all the way up to t = T-2
    # We need to prepare the matrices which are going to be solved by Thomas Algorithm
    # Thomas Algorithm deals with matrix equations like [A][x] = [d] where [A] and [d] are known and [x] is what we'll get
    # In the present code, [A]->[C1], [d] -> [C2]*[Psi(a,t)](B.C. added) and [x]->[Psi(a,t+1)]

    psi_present = []
    for i in range(1,N-1): # here, i = 0, 1, 2, ..., N-2
        x = i*dx
        if(i == 1):
            p = eta*psi[i-1][j+1] -eta*psi[i-1][j] + (2*eta + dt*(Veff(x)+ min_value)/2. + img)*psi[i][j] - eta*psi[i+1][j]
        elif(i == N-2):
            p = eta*psi[i+1][j+1] -eta*psi[i-1][j] + (2*eta + dt*(Veff(x)+ min_value)/2. + img)*psi[i][j] - eta*psi[i+1][j]
        else:
            p = -eta*psi[i-1][j] + (2*eta + dt*(Veff(x)+ min_value)/2. + img)*psi[i][j] - eta*psi[i+1][j]
        psi_present.append(p)

    psi_futuro = TDMA(diag, maindiag, diag, psi_present)
    for i in range(1,N-1): # here, i = 0, 1, 2, ..., N-2
        psi[i][j+1] = psi_futuro[i-1]

```

Figura 42 – Loop para obter a evolução temporal da função de onda $\Psi(x, t)$.

APÊNDICE C – Obtendo a equação de 2º grau para o fator de escala

Este apêndice servirá para mostrar como obter a equação diferencial para o fator de escala de onde são extraídas suas soluções clássicas. O modelo com radiação será usado como exemplo. O ponto de partida são as equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{a} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_a} = -\frac{p_a}{2}, \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial a} = -\frac{p_a^2}{4a} + g_c a - 3g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + 3\frac{g_s}{a^3} + p_T, \\ \dot{T} &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial p_T} = 1, \\ \dot{p}_T &= \frac{\partial N\mathcal{H}_{HL}}{\partial T} = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Como o objetivo é obter uma equação de derivada segunda para o fator de escala, será usada a primeira equação

$$\dot{a} = -\frac{p_a}{2}. \quad (\text{C.2})$$

Ao derivá-la no tempo, obtém-se

$$\ddot{a} = -\frac{\dot{p}_a}{2} \quad \text{ou então,} \quad \ddot{a} + \frac{\dot{p}_a}{2} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Ao olhar para as equações de Hamilton (C.1) nota-se que o valor de p_a é conhecido. Portanto,

$$\ddot{a} + \frac{1}{2} \left(-\frac{p_a^2}{4a} + g_c a - 3g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + 3\frac{g_s}{a^3} + p_T \right) = 0. \quad (\text{C.4})$$

$$\ddot{a} - \frac{p_a^2}{8a} + \frac{g_c a}{2} - \frac{3}{2}g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{2a} + \frac{3}{2}\frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{2} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Ao impor o vínculo $\mathcal{H} = 0$ para a Hamiltoniana total

$$-\frac{p_a^2}{4a} - g_c a + g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + \frac{g_s}{a^3} + \frac{p_t}{a} = 0, \quad (\text{C.6})$$

e resolver para p_a , obtém-se

$$p_a(a) = \pm 2 \left[-g_c a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} + p_T \right]^{1/2}. \quad (\text{C.7})$$

Agora basta usar p_a na equação (C.5),

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} - \frac{1}{8a} \left[2 \left(-g_c a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} + p_T \right)^{1/2} \right]^2 + \frac{g_c a}{2} - \frac{3}{2}g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{2a} + \frac{3}{2}\frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{2} = 0. \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} - \frac{1}{8a} \left[4 \left(-g_c a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} + p_T \right) \right] + \frac{g_c a}{2} - \frac{3}{2}g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{2a} + \frac{3}{2}\frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{2} = 0. \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} - \frac{1}{2a} \left(-g_c a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} + p_T \right) + \frac{g_c a}{2} - \frac{3}{2} g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{2a} + \frac{3}{2} \frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{2} = 0. \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} + \frac{g_c a}{2} - \frac{1}{2} g_\Lambda a^3 - \frac{g_r}{2a} - \frac{g_s}{2a^3} - \frac{p_T}{2a} + \frac{g_c a}{2} - \frac{3}{2} g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{2a} + \frac{3}{2} \frac{g_s}{a^3} + \frac{p_T}{2} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Por fim, eliminando os termos com sinais opostos e tomando $p_T = 0$, chega-se a equação diferencial para o fator de escala (3.12):

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} + g_c a - 2g_\Lambda a^3 + \frac{g_s}{a^3} = 0. \quad (\text{C.12})$$

APÊNDICE D – Obtendo as equações de Friedmann

Ao considerar um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão, o ponto de partida é a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)\Sigma^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)\Sigma^2(\chi)\text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

onde a função $\Sigma^2(\chi)$ é

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \text{sen}^2(\chi) & \text{curvatura esférica,} \\ \chi^2 & \text{plano,} \\ \text{senh}^2(\chi), & \text{curvatura hiperbólica.} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Fazendo uma mudança de variáveis

$$r \equiv \Sigma(\chi) = \begin{cases} \text{sen } \chi \\ \chi \\ \text{senh } \chi \end{cases}, \quad dr^2 = \begin{cases} \cos^2 \chi d\chi^2 \\ d\chi^2 \\ \cosh^2 \chi d\chi^2 \end{cases}, \quad (\text{D.3})$$

tem-se que

- Curvatura esférica

$$r = \text{sen } \chi \rightarrow dr^2 = \cos^2 \chi d\chi^2 \Rightarrow d\chi^2 = \frac{dr^2}{\cos^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 - \text{sen}^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 - r^2}, \quad (\text{D.4})$$

- Espaço plano

$$r = \chi \Rightarrow d\chi^2 = dr^2, \quad (\text{D.5})$$

- Curvatura hiperbólica

$$r = \text{senh } \chi \Rightarrow dr^2 = \cosh^2 \chi d\chi^2 \Rightarrow d\chi^2 = \frac{dr^2}{\cosh^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 + \text{senh}^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 + r^2}. \quad (\text{D.6})$$

Esses três casos podem ser unidos como

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad \text{onde } k = \begin{cases} +1, & r = \text{sen } \chi, \quad (\text{curvatura esférica}) \\ 0, & r = \chi, \quad (\text{espaço plano}) \\ -1, & r = \text{senh } \chi, \quad (\text{curvatura hiperbólica}) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Isso possibilita escrever o elemento de linha da métrica FLRW como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \quad (\text{D.8})$$

que fornece a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{(1+1/4kr^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2(t)r^2}{(1+1/4kr^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}{(1+1/4kr^2)^2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

e sua inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(1+1/4kr^2)^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1+1/4kr^2)^2}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(1+1/4kr^2)^2}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

As equações de Friedmann virão dessa métrica. O próximo passo será calcular os símbolos de Christoffel usando

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (\text{D.11})$$

Para o presente caso tem-se

- $\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} = -\frac{1}{2}1\partial_t \left[-\frac{a^2(t)}{(1+1/4kr^2)^2} \right] = \frac{\dot{a}a}{(1+1/4kr^2)^2}$
- $\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{22} = \frac{r^2 \dot{a}a}{(1+1/4kr^2)^2}$
- $\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{33} = \frac{r^2 \sin^2 \theta \dot{a}a}{(1+1/4kr^2)^2}$
- $\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} = \frac{\dot{a}}{a}$
- $\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_0 g_{22} = \frac{\dot{a}}{a}$
- $\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{03}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{33} = \frac{\dot{a}}{a}$
- $\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} = -r \sin^2 \theta + \frac{kr^3 \sin^2 \theta}{2(1+\frac{1}{4}kr^2)}$
- $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -r + \frac{kr^3}{2(1+\frac{1}{4}kr^2)}$
- $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} = \frac{-2kr}{4+kr^2}$
- $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} = \frac{1}{r} - \frac{kr}{2(1+\frac{1}{4}kr^2)}$
- $\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} = \frac{1}{r} - \frac{kr}{2(1+\frac{1}{4}kr^2)}$
- $\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} = -\sin \theta \cos \theta$
- $\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} = \cot \theta$

Com todos esses valores em mãos, pode-se calcular os termos do tensor de curvatura de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\partial_0\Gamma^1_{01} - \partial_0\Gamma^2_{02} - \partial_0\Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30} \\
&= -3\partial_t\left[\frac{\dot{a}}{a}\right] - 3\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]^2 \\
&= -3\left[\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right] - 3\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]^2 \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^2_{12} - \partial_1\Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{11}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{11}\Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} \\
&\quad + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&= \frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2}{(1 + 1/4kr^2)^2} - 2\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{k}{2(1 + \frac{1}{4}kr^2)} + \frac{k^2r^2}{4(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}\right] \\
&\quad + \frac{\dot{a}^2}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - \frac{4kr}{(4 + kr^2)}\left[\frac{1}{r} - \frac{kr}{2(1 + \frac{1}{4}kr^2)}\right] - 2\left[\frac{1}{r} - \frac{kr}{2(1 + \frac{1}{4}kr^2)}\right]^2 \\
&= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_0\Gamma^0_{22} - \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^3_{23} + \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} \\
&\quad + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\
&= \frac{r^2(\ddot{a}a + \dot{a}^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - 1 + \frac{(3/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} + \csc^2\theta + \frac{r^2\dot{a}^2}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \\
&\quad + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - 1 + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \\
&\quad - \left[-1 + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}\right] - \cot^2\theta \\
&= \frac{r^2(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_0\Gamma^0_{33} - \partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33} + \Gamma^0_{33}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} \\
&\quad + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta(\ddot{a}a + \dot{a}^2)}{(1 + 1/4kr^2)} + \left[-\sin^2\theta + \frac{(3/2)kr^2\sin^2\theta}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4\sin^2\theta}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}\right] + \sin^2\theta - \cos^2\theta \\
&\quad + \frac{r^2\sin^2\theta\dot{a}^2}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} + \frac{(1/2)kr^2\sin^2\theta}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4\sin^2\theta}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - \sin^2\theta + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} \\
&\quad - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - \left[-\sin^2\theta + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} + \frac{(1/2)kr^2}{1 + \frac{1}{4}kr^2} - \frac{(1/4)k^2r^4}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}\right] + \cos^2\theta \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}
\end{aligned} \tag{D.15}$$

Com esses resultados, pode-se escrever o tensor $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2(\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k)}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2\sin^2\theta(\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k)}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

possibilitando calcular o escalar de curvatura de Ricci, R :

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{00}g^{00} + R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} + R_{33}g^{33} \\ &= -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Com isso, pode-se escrever a componente 00 do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$:

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\ &= -3\frac{\ddot{R}}{a} + \frac{1}{2}6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Segundo o postulado de Weyl, o tensor $T_{\mu\nu}$ para o fluido perfeito é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad \text{com } u_\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (\text{D.19})$$

Isso implica que a componente 00 desse tensor é $T_{00} = \rho$, e assim

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} \\ G_{00} - \Lambda g_{00} &= 8\pi T_{00} \\ 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi\rho \quad (1^{\text{a}} \text{ Eq. de Friedmann}). \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

A segunda equação pode vir de qualquer um dos outros $G_{\mu\nu}$ (exceto por G_{00}). Tomando como exemplo G_{11} :

$$\begin{aligned} G_{11} &= 8\pi T_{11} + \Lambda g_{11} \\ R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} &= 8\pi[(\rho + p)u_1u_1 - pg_{11}] + \Lambda g_{11} \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

que, ao substituir os valores, fornece

$$\begin{aligned} \frac{(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} - \frac{1}{2} \left[-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \frac{(-a^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \\ = 8\pi(-p) \frac{(-a^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} + \Lambda \frac{(-a^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \\ \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p \quad (2^{\text{a}} \text{ Eq. de Friedmann}). \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Bibliografia

- [1] Carl Sagan. *Cosmos*. Ballantine Books, 1980. ISBN: 9780345539434; 978-0345539434.
- [2] Cindy Parker. *Sobral – The eclipse that shaped a century of gravity*. URL: <https://www.gov.uk/government/news/sobral-the-eclipse-that-shaped-a-century-of-gravity>. (accessed: 20.07.2024).
- [3] Sidney Perkowitz. *Experimental evidence for general relativity*. URL: <https://www.britannica.com/science/relativity/Intellectual-and-cultural-impact-of-relativity>. (accessed: 22.07.2024).
- [4] Roger Penrose. “Gravitational Collapse and Space-Time Singularities”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 14 (3 jan. de 1965), pp. 57–59. DOI: 10.1103/PhysRevLett.14.57. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [5] Ronaldo Rogério de Freitas Mourão. *O livro de ouro do universo*. Harper Colins, 2002.
- [6] Peter Coles. *Cosmology: A very short introduction*. OUP Oxford, 2001.
- [7] Jonathan J Halliwell. “Quantum Cosmology and the Creation of the Universe”. Em: *Cosmology*. CRC Press, 2023, pp. 477–498.
- [8] Tracy Schaaf. In *MedTech History: The Hubble Space Telescope’s Contribution to Digital Breast Biopsy Technology*. URL: https://www.mystrategist.com/blog/article/in_medtech_history_the_hubble_space_telescopes_contribution_to_digital_breast_biopsy_technology.html. (accessed: 22.07.2024).
- [9] Pratap Misra. *Inside the box: GPS and relativity*. URL: <https://www.gpsworld.com/inside-the-box-gps-and-relativity/>. (accessed: 22.07.2024).
- [10] Mohinder S Grewal, Lawrence R Weill e Angus P Andrews. *Global positioning systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley & Sons, 2007.
- [11] E. Aguayo et al. “Cosmic Ray Interactions in Shielding Materials”. Em: *Pacific Northwest National Laboratory* (2011).
- [12] Masayuki Naito et al. “Investigation of shielding material properties for effective space radiation protection”. Em: *Life sciences in space research* 26 (2020), pp. 69–76.
- [13] James Ball. *The Charge-Coupled Device: Revolutionizing How Astronomers See the Universe*. URL: <https://noirlab.edu/public/blog/50-years-ccds/>. (accessed: 22.07.2024).
- [14] Burke et al. *CCD Imager Development for Astronomy*. URL: https://archive.ll.mit.edu/publications/journal/pdf/vol16_no2/16_2_09Burke.pdf. (accessed: 22.07.2024).

- [15] Sagar Shinde. *Introduction to Modeling and Simulation Systems*. URL: <https://uh.edu/~lcr3600/simulation/historical.html#:~:text=The%20history%20of%20computer%20simulation,problem%20of%20behavior%20of%20neutrons..> (accessed: 21.07.2024).
- [16] EHT. *Astronomers Capture First Image of a Black Hole*. URL: <https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole>. (accessed: 22.07.2024).
- [17] Daisy Elizabeth Gates et al. “Quantitative host resistance drives the evolution of increased virulence in an emerging pathogen”. Em: *Journal of evolutionary biology* 31.11 (2018), pp. 1704–1714.
- [18] Dai Tang et al. “Molecular dynamics simulation of the effect of angle variation on water permeability through hourglass-shaped nanopores”. Em: *Materials* 8.11 (2015), pp. 7257–7268.
- [19] Katharina Kaiser et al. “An sp-hybridized molecular carbon allotrope, cyclo[18]carbon”. Em: *Science* 365(6459) (2019), pp. 1299–1301. DOI: 10.1126/science.aay1914.
- [20] News Staff / Source. *Cyclocarbon: New Form of Carbon Synthesized*. URL: <http://www.sci-news.com/physics/cyclocarbon-07503.html>. (accessed: 23.12.2019).
- [21] G. Oliveira-Neto, A. Oliveira Castro Junior e G. A. Monerat. *Tunneling probability for the birth of an universe with radiation in Horava-Lifshitz theory*. 2023. arXiv: 2308.07478 [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/2308.07478>.
- [22] A Oliveira Castro Junior, G Oliveira-Neto e GA Monerat. “Primordial dust universe in the Hořava–Lifshitz theory”. Em: *Modern Physics Letters A* 39.23n24 (2024), p. 2450112.
- [23] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 8.1. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [24] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 3.1. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [25] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 8.2. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [26] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 3.3. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.

- [27] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 8.4. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [28] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 9.4. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [29] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 4.2. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [30] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 5.1. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [31] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 6.8. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [32] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 5.2. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [33] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 6.12. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [34] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 5.3. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [35] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 13.3. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [36] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 6.1-6.2. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.

- [37] Torsten Fließbach (auth.) *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Spektrum, 2016. Cap. 13. ISBN: 9783662531051; 3662531054; 9783662531068; 3662531062. DOI: 10.1007/978-3-662-53106-8. URL: libgen.li/file.php?md5=e8c7a9a593e718e330b0b090026
- [38] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 24.2 - 24.3. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [39] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 9.1. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [40] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 24.4. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [41] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 9.3. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [42] Torsten Fließbach (auth.) *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Spektrum, 2016. Cap. 50. ISBN: 9783662531051; 3662531054; 9783662531068; 3662531062. DOI: 10.1007/978-3-662-53106-8. URL: libgen.li/file.php?md5=e8c7a9a593e718e330b0b090026
- [43] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 24.7. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [44] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 9.4. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [45] George Efstathiou e Steven Gratton. “The evidence for a spatially flat Universe”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 496.1 (2020), pp. L91–L95.
- [46] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 24.9. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [47] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 10.1. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.

- [48] Torsten Fließbach (auth.) *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Spektrum, 2016. Cap. 53. ISBN: 9783662531051; 3662531054; 9783662531068; 3662531062. DOI: 10.1007/978-3-662-53106-8. URL: libgen.li/file.php?md5=e8c7a9a593e718e330b0b090026
- [49] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 25.1, 25.2, 25.3. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [50] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 10.2. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [51] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 26.7. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [52] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 11.2. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [53] Torsten Fließbach (auth.) *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Spektrum, 2016. Cap. 53. ISBN: 9783662531051; 3662531054; 9783662531068; 3662531062. DOI: 10.1007/978-3-662-53106-8. URL: libgen.li/file.php?md5=e8c7a9a593e718e330b0b090026
- [54] J. C. Mather et al. “A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite”. Em: 354 (mai. de 1990), p. L37. DOI: 10.1086/185717.
- [55] G. Smoot et al. “COBE Differential Microwave Radiometers: Instrument Design and Implementation”. Em: 360 (set. de 1990), p. 685. DOI: 10.1086/169154.
- [56] Dale J Fixsen et al. “The cosmic microwave background spectrum from the full cobe* firas data set”. Em: *The Astrophysical Journal* 473.2 (1996), p. 576.
- [57] James Vickers Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2021. Cap. 26.3. ISBN: 0198862024; 9780198862024. URL: libgen.li/file.php?md5=474683fae747aa7c489b5771f92c3bcd.
- [58] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction (2005)(en)(356s)*. illustrated edition. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, USA, 2005. Cap. 10.5. ISBN: 9780198529569; 0198529562. URL: libgen.li/file.php?md5=2c927a1cd3a07e7ba76b68626772e5d2.
- [59] Alan H Guth. “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”. Em: *Physical Review D* 23.2 (1981), p. 347.

- [60] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973. Cap. 21.4, 21.6, 21.7. ISBN: 9780716703440. URL: <https://books.google.com.br/books?id=ExAbAQAAIAAJ>.
- [61] Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W Misner. “Republication of: The dynamics of general relativity”. Em: *General Relativity and Gravitation* 40 (2008), pp. 1997–2027.
- [62] Luther Pfahler Eisenhart. *Non-Riemannian Geometry*. Vol. 8. College Offset Press, 1927.
- [63] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973. Cap. 21.5. ISBN: 9780716703440. URL: <https://books.google.com.br/books?id=ExAbAQAAIAAJ>.
- [64] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 15 junho 1984, eq. E.2.28, p. 464.
- [65] Jonathan J Halliwell. *INTRODUCTORY LECTURES ON QUANTUM COSMOLOGY*. arXiv:0909.2566v1, 2009. Cap. 3.
- [66] C.J. Isham e K.V. Kuchař. “Representations of spacetime diffeomorphisms. I. Canonical parametrized field theories”. Em: *Annals of Physics* 164.2 (1985), pp. 288–315. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(85\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90018-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491685900181>.
- [67] Karel V. Kuchař. “Canonical geometrodynamics and general covariance”. Em: *Found Phys* 16 (1986), pp. 193–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01889472>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01889472#Bib1>.
- [68] S.W. Hawking e D.N. Page. “Operator ordering and the flatness of the universe”. Em: *Nuclear Physics B* 264 (1986), pp. 185–196. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(86\)90478-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90478-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386904785>.
- [69] Jonathan J Halliwell. *INTRODUCTORY LECTURES ON QUANTUM COSMOLOGY*. arXiv:0909.2566v1, 2009. Cap. 4, 5.
- [70] Bryce Seligman Dewitt e Neill Graham. *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*. Vol. 61. Princeton University Press, 2015.
- [71] Wim B Drees. “Interpretation of “the wave function of the Universe””. Em: *International Journal of Theoretical Physics* 26 (1987), pp. 939–942.
- [72] Eugen Merzbacher. *Quantum mechanics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [73] David J Griffiths e Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2018.

- [74] Jonathan J Halliwell. *INTRODUCTORY LECTURES ON QUANTUM COSMOLOGY*. arXiv:0909.2566v1, 2009. Cap. 7.
- [75] S. W. Hawking. “The boundary conditions of the universe”. Em: (jan. de 1982), pp. 563–572.
- [76] J. B. Hartle e S. W. Hawking. “Wave function of the Universe”. Em: *Phys. Rev. D* 28 (12 dez. de 1983), pp. 2960–2975. DOI: 10.1103/PhysRevD.28.2960. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.2960>.
- [77] Alexander Vilenkin. “Creation of universes from nothing”. Em: *Physics Letters B* 117.1 (1982), pp. 25–28. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90866-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90866-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382908668>.
- [78] Alexander Vilenkin. “Quantum creation of universes”. Em: *Phys. Rev. D* 30 (2 jul. de 1984), pp. 509–511. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.509. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.509>.
- [79] A. D. Linde. “Quantum creation of the inflationary universe”. Em: *Lett. Nuovo Cimento* 39 (abr. de 1984), pp. 401–405. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02790571>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02790571>.
- [80] A D Linde. “The inflationary Universe”. Em: *Reports on Progress in Physics* 47.8 (ago. de 1984), p. 925. DOI: 10.1088/0034-4885/47/8/002. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/47/8/002>.
- [81] K Kuchar. *Quantum Gravity 2: a Second Oxford Symposium ed CJ Isham, R Penrose and DW Sciama*. 1981.
- [82] Jonathan J Halliwell. *INTRODUCTORY LECTURES ON QUANTUM COSMOLOGY*. arXiv:0909.2566v1, 2009. Cap. 8.
- [83] A. Einstein. “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”. Em: *Annalen der Physik* 354.7 (jan. de 1916), pp. 769–822. DOI: 10.1002/andp.19163540702.
- [84] Albert Einstein. *The General Theory of Relativity*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1922, pp. 54–75. ISBN: 978-94-011-6022-3. DOI: 10.1007/978-94-011-6022-3_3. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-011-6022-3_3.
- [85] Petr Hořava. “Quantum gravity at a Lifshitz point”. Em: *Phys. Rev. D* 79 (8 abr. de 2009), p. 084008. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084008. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.084008>.
- [86] John A. Hertz. “Quantum critical phenomena”. Em: *Phys. Rev. B* 14 (3 ago. de 1976), pp. 1165–1184. DOI: 10.1103/PhysRevB.14.1165. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.14.1165>.

- [87] Petr Hořava. “Membranes at quantum criticality”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2009.03 (mar. de 2009), p. 020. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/03/020. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/03/020>.
- [88] Bertrand I. Halperin. “Theory of dynamic critical phenomena”. Em: *Physics Today* 72.2 (fev. de 2019), pp. 42–43. ISSN: 0031-9228. DOI: 10.1063/PT.3.4137. eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/72/2/42/10122309/42_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/PT.3.4137>.
- [89] L.Ts. Adzhemyan et al. “The dynamic critical exponent z for 2d and 3d Ising models from five-loop expansion”. Em: *Physics Letters A* 425 (fev. de 2022), p. 127870. ISSN: 0375-9601. DOI: 10.1016/j.physleta.2021.127870. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127870>.
- [90] Petr Hořava. “Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 102 (16 abr. de 2009), p. 161301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.161301. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.161301>.
- [91] B. Vakili e V. Kord. “Classical and quantum Hořava-Lifshitz cosmology in a minisuperspace perspective”. Em: *Gen. Rel. Grav.* 45 (2013), pp. 1313–1331. DOI: 10.1007/s10714-013-1527-8. arXiv: 1301.0809 [gr-qc].
- [92] D. Blas, O. Pujolàs e S. Sibiryakov. “Consistent Extension of Hořava Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 104 (18 mai. de 2010), p. 181302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.181302. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.181302>.
- [93] D. Blas, O. Pujolàs e S. Sibiryakov. “Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy”. Em: *J. High Energ. Phys.* (18 2011). DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2011\)018](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2011)018). URL: [https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP04\(2011\)018](https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP04(2011)018).
- [94] Thomas P. Sotiriou, Matt Visser e Silke Weinfurtner. “Phenomenologically Viable Lorentz-Violating Quantum Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 102 (25 jun. de 2009), p. 251601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.251601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.251601>.
- [95] Thomas P. Sotiriou, Matt Visser e Silke Weinfurtner. “Quantum gravity without Lorentz invariance”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2009.10 (out. de 2009), p. 033. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/10/033. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/10/033>.
- [96] G. Oliveira-Neto et al. “Quantum cosmology of a Hořava-Lifshitz model coupled to radiation”. Em: *International Journal of Modern Physics D* 28.10 (2019), p. 1950130. DOI: 10.1142/S021827181950130X. eprint: <https://doi.org/10.1142/S021827181950130X>. URL: <https://doi.org/10.1142/S021827181950130X>.

- [97] Fatimah Tavakoli, Babak Vakili e Hossein Ardehali. “Hořava-Lifshitz scalar field cosmology: Classical and quantum viewpoints”. Em: *Advances in High Energy Physics* 2021 (2021), pp. 1–12.
- [98] Orfeu Bertolami e Carlos AD Zarro. “Hořava-Lifshitz quantum cosmology”. Em: *Physical Review D* 84.4 (2011), p. 044042.
- [99] Thomas P Sotiriou. “Hořava-Lifshitz gravity: a status report”. Em: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 283. 1. IOP Publishing. 2011, p. 012034.
- [100] Bernard F Schutz Jr. “Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle”. Em: *Physical Review D* 2.12 (1970), p. 2762.
- [101] Bernard F Schutz Jr. “Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid”. Em: *Physical Review D* 4.12 (1971), p. 3559.
- [102] EMC Abreu et al. “Hořava–Lifshitz cosmological models with noncommutative phase space variables”. Em: *General Relativity and Gravitation* 51 (2019), pp. 1–27.
- [103] Gordon Moore. “Cramming more components onto integrated circuits (1965)”. Em: (2021).
- [104] Richard L Burden e J Douglas Faires. *Numerical analysis*. Brooks Cole, 1997.
- [105] Rubin H Landau, Manuel J Páez e Cristian C Bordeianu. *Computational physics*. Vol. 7. 2007, pp. 2–3.
- [106] Murad Elarbi. *Programming Numerical Methods in Python*.
- [107] John Crank e Phyllis Nicolson. “A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type”. Em: 43.1 (1947), pp. 50–67.
- [108] Wen-mei Hwu. *GPU computing gems jade edition*. Vol. 2. Elsevier, 2011.
- [109] Pradip Niyogi. *Introduction to computational fluid dynamics*. Pearson Education India, 2006, p. 76.
- [110] Bryce S DeWitt. “Quantum theory of gravity. I. The canonical theory”. Em: *Physical Review* 160.5 (1967), p. 1113.
- [111] Paul Adrien Maurice Dirac. “Generalized hamiltonian dynamics”. Em: *Canadian journal of mathematics* 2 (1950), pp. 129–148.
- [112] Paul Adrien Maurice Dirac. “Generalized hamiltonian dynamics”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 246.1246 (1958), pp. 326–332.
- [113] Paul Adrien Maurice Dirac. “The theory of gravitation in Hamiltonian form”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 246.1246 (1958), pp. 333–343.

- [114] Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W Misner. “The dynamics of general relativity, Gravitation: An introduction to current research”. Em: *Chap 7* (1962), pp. 227–265.
- [115] John A Wheeler. “Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics.” Em: *pp 615-724 of Topics in Nonlinear Physics. Zabusky, Norman J.(ed.). New York, Springer-Verlag New York, Inc., 1968.* (1969).
- [116] GA Monerat et al. “The dynamics of the early universe in a model with radiation and a generalized Chaplygin gas-Early universe with radiation and a generalized Chaplygin gas”. Em: *The European Physical Journal Plus* 136.1 (2021), p. 34.
- [117] Dongshan He, Dongfeng Gao e Qing-yu Cai. “Spontaneous creation of the universe from nothing”. Em: *Physical Review D* 89.8 (2014), p. 083510.
- [118] G. A. Monerat et al. “Dynamics of the early universe and the initial conditions for inflation in a model with radiation and a Chaplygin gas”. Em: *Phys. Rev. D* 76 (2 jul. de 2007), p. 024017. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.024017. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.024017>.
- [119] Stephen William Hawking e Neil Turok. “Open inflation without false vacua”. Em: *Physics Letters B* 425.1-2 (1998), pp. 25–32.
- [120] Andrei Linde. “Quantum creation of an open inflationary universe”. Em: *Physical Review D* 58.8 (1998), p. 083514.
- [121] Raphael Bousso e Andrei Linde. “Quantum creation of a universe with $\Omega \neq 1$: Singular and nonsingular instantons”. Em: *Physical Review D* 58.8 (1998), p. 083503.
- [122] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973. ISBN: 9780716703440. URL: <https://books.google.com.br/books?id=ExAbAQAAIAAJ>.
- [123] Fatimah Tavakoli, Babak Vakili e Hossein Ardehali. “Hořava-Lifshitz Scalar Field Cosmology: Classical and Quantum Viewpoints”. Em: *Advances in High Energy Physics* 2021.1 (2021), p. 6617910.
- [124] Hossein Ardehali e Pouria Pedram. “Chaplygin gas Hořava-Lifshitz quantum cosmology”. Em: *Physical Review D* 93.4 (2016), p. 043532.
- [125] GS Vicente. “Quantum Hořava-Lifshitz cosmology in the de Broglie–Bohm interpretation”. Em: *Physical Review D* 104.10 (2021), p. 103525.
- [126] Naritaka Oshita, Niayesh Afshordi e Shinji Mukohyama. “Lifshitz scaling, ringing black holes, and superradiance”. Em: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.05 (2021), p. 005.
- [127] J Furtado, JF Assunção e ACA Ramos. “Bose-einstein condensation in Hořava-Lifshitz theory”. Em: *Europhysics Letters* 134.1 (2021), p. 11003.

- [128] Jarvin Mestra-Páez, JM Pena e A Restuccia. “Gravitational waves in the anisotropic Horava-Lifshitz theory”. Em: ().
- [129] Shinji Mukohyama. “Dark matter as integration constant in Hořava-Lifshitz gravity”. Em: *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 80.6 (2009), p. 064005.
- [130] Silke Weinfurtner, Thomas P Sotiriou e Matt Visser. “Projectable Hořava–Lifshitz gravity in a nutshell”. Em: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 222. 1. IOP Publishing. 2010, p. 012054.
- [131] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. Vol. 2. Courier Corporation, 2001.
- [132] GA Monerat et al. “The effects of dark energy on the early Universe with radiation and an ad hoc potential”. Em: *The European Physical Journal Plus* 137.1 (2022), pp. 1–15.
- [133] James B Hartle. “Quantum Cosmology and Baby Universe”. Em: *Proceedings of the 7th Jerusalem Winter School, Jerusalem, Israel, 1990* (1991).
- [134] J Acacio de Barros et al. “Tunneling probability for the birth of an asymptotically de Sitter universe”. Em: *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 75.10 (2007), p. 104004.
- [135] W Morven Gentleman. “Implementing Clenshaw-Curtis quadrature, I methodology and experience”. Em: *Communications of the ACM* 15.5 (1972), pp. 337–342.
- [136] F. Mandl e G. Shaw. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2010. ISBN: 9780471496830. URL: <https://books.google.com.br/books?id=Ef4zDW1V2LkC>.
- [137] J Acacio de Barros, N Pinto-Neto e MA Sagioro-Leal. “The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies”. Em: *Physics Letters A* 241.4-5 (1998), pp. 229–239.
- [138] L.G.R. Rodrigues. *Modelos cosmológicos não-comutativos nas teorias de Hořava-Lifshitz e Relatividade Geral*. Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2019.