UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números complexos

Juiz de Fora

2024

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números complexos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr, Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Lectícia Sobreiro Rezende de.
Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática : o caso dos números complexos / Lectícia Sobreiro Rezende de Souza. -- 2024.
100 f.

Orientador: Amarildo Melchiades da Silva
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Formação Inicial de Professores. 3. Produção de Significados. 4. Variáveis Complexas. 5. Ensino Superior. I. Melchiades da Silva, Amarildo, orient. II. Título.

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números complexos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em 13 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti - Membro externo
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco - Membro interno
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 06/09/2024.

---

seil assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchiades da Silva**, **Professor(a)**, em 11/10/2024, às 19:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **HERNANDO JOSE ROCHA FRANCO**, **Usuário Externo**, em 14/10/2024, às 18:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Krüger Zocolotti**, **Usuário Externo**, em 16/10/2024, às 09:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1972360** e o código CRC **249B26C5**.

RESUMO

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa elaborada em mestrado profissional no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora/Brasil, inserida na linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem da Matemática, Análise dos condicionantes da sala de aula e Intervenção Pedagógica em Matemática. Esta investigação compõe o macroprojeto de pesquisa do Programa Linsiano de Investigação intitulado Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica, sendo um dos subprojetos ao tratar da formação inicial de educadoras e educadores matemáticos nas disciplinas matemáticas, mais especificamente nas disciplinas destinadas às discussões de tópicos relacionados a números complexos e variáveis complexas. Caracterizada como uma pesquisa qualitativa, seu objetivo foi o de investigar quais devem ser as características de uma disciplina de variáveis complexas, no conjunto das disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, para que esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de matemática, e delimitar tais características como uma proposta de sala de aula, em consonância com o referencial teórico metodológico utilizado, o Modelo dos Campos Semânticos, proposto por Romulo Campos Lins. Delimitamos características para uma disciplina de variáveis complexas após realização de análise das matrizes curriculares e projetos pedagógicos disponíveis para acesso de onze Universidades Federais mineiras, revisão de literatura relacionada a formação matemática na Licenciatura em Matemática e leitura dos resíduos de enunciação obtidos após aplicação em campo do Produto Educacional formatado em nossa pesquisa, constituído de Fichas de Trabalho com textos para discussão e tarefas com intenção de inserir discentes em uma proposta metodológica baseada nos conceitos do Modelo dos Campos Semânticos, propicia experiências ao professor e professora em formação para além do conhecimento matemático, relacionadas à futura prática docente como vivências metodológicas e pedagógicas frente aos conteúdos de variáveis complexas. Concluímos reforçando a necessidade de construção de textos que sejam suficientes para integrar bibliografia base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, fazendo-se necessário realizarem cada vez mais pesquisas com objetivos de criação de materiais para a licenciatura em matemática com uma perspectiva diferente da já apresentada pelos matemáticos.

Palavras-chave: educação matemática; formação inicial de professores; produção de significados; variáveis complexas; ensino superior.

ABSTRACT

This work is the result of a research project carried out in a professional master's degree program in the Mathematics Education Postgraduate Program of the Federal University of Juiz de Fora/Brazil, inserted in the research line Teaching and Learning of Mathematics, Analysis of classroom conditions and Pedagogical Intervention in Mathematics. This investigation is part of the macro research project of the Linsiano Research Program entitled Mathematics Education in Schools in the 21st Century: the training of students and teachers of Basic Education, being one of the subprojects that deals with the initial training of mathematics educators in mathematical disciplines, more specifically in disciplines aimed at discussing topics related to complex numbers and complex variables. Characterized as qualitative research, its objective was to investigate what the characteristics of a discipline of complex variables should be, within the set of disciplines of a Bachelor's Degree in Mathematics, so that it is at the service of the training of future mathematics teachers, and to delimit such characteristics as a classroom proposal, in line with the theoretical methodological framework used, the Semantic Fields Model, proposed by Romulo Campos Lins. We defined characteristics for a discipline of complex variables after analyzing the curricular matrices and pedagogical projects available for access at eleven Federal Universities in Minas Gerais, reviewing the literature related to mathematical training in the Mathematics Degree Program, and reading the enunciation residues obtained after field application of the Educational Product formatted in our research, consisting of Worksheets with texts for discussion and tasks with the intention of introducing students to a methodological proposal based on the concepts of the Semantic Fields Model, providing experiences to teachers in training that go beyond mathematical knowledge, related to future teaching practice as methodological and pedagogical experiences in the face of complex variables content. We conclude by reinforcing the need to construct texts that are sufficient to integrate the basic bibliography of syllabuses of disciplines with mathematical content, making it necessary to conduct more and more research with the objective of creating materials for the mathematics degree program with a different perspective from that already presented by mathematicians.

Keywords: mathematics education; initial teacher training; production of meanings; complex variables; higher education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AS	Assimilação Solidária
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CES	Câmara de Educação Superior
CNE	Conselho Nacional de Educação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
IES	Instituição de Ensino Superior
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
MEC	Ministério da Educação
OA	Objeto de Aprendizagem
PPP	Projeto Político Pedagógico
Unifal MG	Universidade Federal de Alfenas
Unifei	Universidade Federal de Itajubá
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFLA	Universidade Federal de Lavras
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João del-Rei
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UFV	Universidade Federal de Viçosa
UFTM	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
UFVJM	Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente investigação é um dos projetos de pesquisa que integram o Programa de Investigação intitulado “Programa Linsiano”, em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955- 2017). Os objetivos do Programa interinstitucional são investigar a matemática escolar com o propósito de educar matematicamente estudantes da Educação Básica no século XXI e investigar, no interior das licenciaturas em Matemática, a formação inicial de licenciandas e licenciandos em matemática.

Nossa pesquisa integra um dos macroprojetos dp Programa, intitulado Programa de Investigação ao tratar do ensino da disciplina Variáveis Complexas para a Licenciatura em Matemática a partir da constatação de que, a concepção da disciplina, sua ementa e bibliografia utilizada são propostas pela visão do matemático para a formação do futuro matemático, e não voltado especificamente à formação inicial do futuro professor ou professora da Educação Básica.

Em minha graduação, me deparei com perguntas do tipo: “Como o conteúdo matemático – dito “puro” em oposição a “aplicado” – agregará na experiência de minha futura prática docente?”, ou seja, “Para que serve o estudo das disciplinas de matemática pura?”. O educador matemático Romulo Campos Lins, em 2005, já havia discutido sobre essa temática com o que usualmente eram, e ainda são atribuídas como justificativas para a permanência dessas disciplinas na formação inicial de professores(as) de matemática:

> Os papéis usualmente considerados são dois: ensinar o conteúdo a ser ensinado na escola (que, sempre supomos, não foi aprendido direito na escola), e prover os *verdadeiros* fundamentos daquilo que se vai ensinar. As duas coisas devem ser consideradas separadamente, embora certo discurso argumente que não, que a pessoa só sabe mesmo a Matemática se sabe os *verdadeiros* fundamentos matemáticos de cada assunto. (LINS, 2005a, p. 119)

Tais questões rondavam minha formação curricular matemática, causando certo desconforto, pois ao mesmo tempo em que eu deslumbrava o prazer de conhecer mais da matemática, barreiras se estabeleciam de alguma forma.

Utilizando termos de Lins, do artigo intitulado *Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática* (2004a), eu estava, de alguma forma, tentando cruzar um território que não era meu, que não tinha sido pensado e planejado para mim, aquele era um território muito bem demarcado, pelo e para o matemático. Era além da matemática como eu entendia, como um campo, aberto, e eu, como licencianda não tinha um convite para entrar e acessar tudo que eu queria da forma com que eu queria, eu apenas poderia avistar de fora o que já estava posto, por cima de um muro, o muro do jardim do Matemático.

Foi frustrante, em minha experiência, não sentir que o Matemático me via além de seus monstros de estimação, não sentir que havia outras formas de contemplar aquelas criações de maneira a possibilitar a produção de outros significados. Eu apenas precisava, observando, aprender e reproduzir como os conceitos e objetos se comportavam, como funcionavam. Foi com esses sentimentos que segui o caminho até chegar ao projeto dessa pesquisa.

Essa formação matemática, para além de uma vivência pessoal, aponta características da estrutura curricular dos Cursos de Licenciatura em Matemática. No Brasil as diretrizes traçadas para a educação nacional são de responsabilidade do Estado. Em função disto, utilizamos as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores (DCFP)[1] para embasar nossa discussão curricular.

Ressaltamos que Diretriz Curricular não é o mesmo que o currículo de um curso. As Diretrizes Curriculares Nacionais, por exemplo, são definidoras dos "marcos curriculares e regulatórios para a formação docente, instituindo normas como carga horária e estruturação curricular das licenciaturas, além de questões como princípios formativos a serem considerados pelos cursos." (FICHTER FILHO; OLIVEIRA; COELHO, 2021, p. 941). Diferentemente do exemplificado, o currículo de um curso, inserido no dia a dia da sala de aula, é um processo vivo, sujeito a ser submetido por algumas fases de formatação, como "[…] a de prescrição e regulamentação (âmbito político e administrativo); a de planejamento (âmbito de materiais, guias, etc.); organização (âmbito da escola); ação (prática do ensino); e avaliação (âmbito do controle interno e externo)." (GOLLO JUNIOR, 2019, p. 2).

Quando voltamos nossa atenção para as Diretrizes Curriculares para as licenciaturas em matemática, encontramos as indicações no Parecer CNE/CES nº 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001, primeiro e último até o momento de escrita deste trabalho. Perfil dos Formandos, Competências e Habilidades, Estrutura do Curso, Conteúdos Curriculares e Estágio e Atividades Complementares são tópicos tratados neste documento.

A respeito dos Conteúdos Curriculares, mesmo diferenciando o currículo do bacharelado do currículo da licenciatura, o parecer afirma uma perspectiva de que o professor que ensina matemática é um matemático ao afirmar que: os currículos "devem assegurar o desenvolvimento de conteúdos dos diferentes âmbitos do conhecimento profissional de um matemático" (BRASIL, 2002a, p.5) de acordo com o perfil, competências e habilidades descritos no próprio parecer, como por exemplo a

[1]As Diretrizes Curriculares para a formação de professores (DCFP), formuladas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) por meio do Parecer CES 776/97, visava conduzir os cursos de graduação em uma trajetória que abandonaria a finalidade de apenas transmitir conhecimentos, tratando de investir no oferecimento e garantia de uma formação básica que preparasse graduandos e graduandas para a prática profissional em sua totalidade de atuações e desafios.

"habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema" (BRASIL, 2002a, p.3).

A demarcação da docência ser uma das possibilidades para um profissional dito matemático é suficiente para justificar os conteúdos específicos indicados pelo parecer à Licenciatura em Matemática.

> Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licenciatura, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES: · Cálculo Diferencial e Integral; · Álgebra Linear; · Fundamentos de Análise; · Fundamentos de Álgebra; · Fundamentos de Geometria; · Geometria Analítica. A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática (BRASIL, 2002a, p. 6)

Essas disciplinas citadas como comuns a todos os cursos de Licenciatura, em sua maioria, possuem uma proposta curricular e metodológica generalista, o que em teoria atende a diferentes Cursos, como as Engenharias, Física, Química, Computação, ao Bacharelado em Matemática, dentre outros, não atendendo, ao nosso ver, a formação profissional da licencianda e licenciando em matemática.

> Enquanto o conteúdo matemático ensinado nas escolas, e nos cursos de licenciaturas, possuírem seu foco principal nas ciências modernas, no desenvolvimento tecnológico da sociedade, não poderemos rumar para o ensino de uma matemática que contribua com a emancipação do educando. (GOLLO JÚNIOR, 2019, p. 10)

Acreditamos que, na Licenciatura em Matemática, como está formulada hoje, mesmo que os conteúdos não sejam diretamente aplicados em nosso dia a dia profissional como professores e professoras da Escola Básica, a forma com que lidamos e os manipulamos é que faz com que sejam ou não, nos termos de D' Ambrósio (1991, p.1), "obsoletos, desinteressantes e inúteis". Como Lins, acreditamos que

> [...] a Matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum do cotidiano, da rua (LINS & GIMENEZ, 1997). É apenas ao se tornar sensível a este estranhamento, por tê-lo vivido como aluno-futuro-professor, que o professor poderá ser sensibilizado para a necessidade de ler seus alunos sempre, ao invés de apenas compará-lo contra um mapa do que deveria ser. (LINS, 2005a, p. 121)

Decidir estudar conteúdos específicos de disciplinas presentes num currículo de Licenciatura em Matemática, no tempo limite permitido a um mestrado profissional, nos restringe a escolha de uma única disciplina para ser analisada minuciosamente. Essa escolha também partiu da experiência pessoal vivida na graduação.

A disciplina denominada de *Funções do Plano Complexo*, como é mais conhecida entre os licenciandos e licenciandas em matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, é uma disciplina indicada a ser cursada no final da graduação. Segui essa indicação, mas os pré-requisitos cumpridos para o ingresso não foram suficientes para inibirem o estranhamento que vivi. Foi a disciplina mais desafiadora que cursei e os sentimentos que experimentei iam de um extremo prazer em estudar algo totalmente diferente do que eu tinha conhecimento para uma extrema impotência em internalizar aquele modo de produção de significado do matemático.

Realmente não internalizei tudo que imaginei que poderia e a oportunidade de escolher uma disciplina para a pesquisa me despertou de que esse seria o momento de sanar, em parte, a vontade que era ainda muito recente na minha curta trajetória. Tornou-se necessário para mim, por meio da análise do próprio currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática, identificar outra(s) maneira(s) de abordar os conteúdos específicos que lá estão identificados.

Assim, chegamos à problemática dessa pesquisa: "quais devem ser as características da disciplina Variáveis Complexas, no conjunto das disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, para que esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de matemática?".

Inserida em um Mestrado Profissional, o produto educacional, intrínseco à investigação, é formatado como fichas de trabalho compostas de tarefas disparadoras adequadas de serem trabalhadas no ensino de números complexos, tópico este associado a disciplinas de variáveis complexas. Para alcançarmos nosso objetivo, traçamos três ações a serem consideradas e trabalhadas ao longo da pesquisa.

A primeira ação realizada foi considerar a disciplina a partir da contribuição que ela pode dar a formação da futura e futuro professor de matemática da Educação Básica. Com isso sugerimos que nosso foco não está primariamente e exclusivamente no conteúdo, mas também numa proposta metodológica em que a/o estudante em formação experiencie falar a partir de um texto matemático tomado como demanda de produção de significados, e que assim vivencie o estranhamento em novas situações.

A segunda ação, na continuação, caracterizou-se como a identificação de possíveis características da disciplina de Variáveis Complexas para um curso de Licenciatura em Matemática.

Tendo essas características propostas, seguimos para a última ação, que seria a de desenvolver e aplicar o produto educacional, um material didático para que os professores e professoras possam utilizar, baseado nas características que propomos para o curso.

Vale observar que ao mencionar fichas de trabalho para uso em sala de aula estamos sugerindo um rompimento com a proposta metodológica de ensino exclusivamente expositiva/explicativa – a qual iremos nos referir neste trabalho como perspectiva tradicional – e que considera como verdade apenas significados legitimados pela matemática do matemático[2].

Em nossa pesquisa, utilizamos como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), proposto por Romulo Campos Lins (1999, 2001, 2005), que compartilha ideias com Vygotsky e Leontiev.

Para atender nossas expectativas, o presente trabalho possui seis capítulos. No Capítulo 1, intitulado *O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática*, analisamos brevemente propostas de ensino de variáveis complexas de universidades federais mineiras, por meio das matrizes curriculares e projetos pedagógicos disponíveis para acesso em suas páginas oficiais.

No Capítulo 2, denominado *Revisão da Literatura,* apresentamos uma revisão de textos, mais especificamente dissertações, referenciadas teórica e metodologicamente de maneira próxima à nossa proposta e que tratam do ensino de tópicos relacionados a variáveis complexas.

No Capítulo 3, intitulado *Pressupostos Teóricos,* esclarecemos noções acerca do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) – nosso referencial teórico, como s*ignificado, conhecimento, estranhamento* e *descentramento*.

No Capítulo 4, denominado *Metodologia de Pesquisa*, tratamos a metodologia de nossa pesquisa e da proposta metodológica caracterizada em nossa investigação para utilização em sala de aula junto de nosso produto educacional.

No Capítulo 5, intitulado *A Dinâmica da Sala de Aula*, relatamos o processo de aplicação de nosso produto educacional, juntamente da apresentação das tarefas criadas e análise dos resíduos de enunciação obtidos na aplicação delas.

O último capítulo, Capítulo 6, denominado *Comentários Finais*, discutimos o que foi realizado na pesquisa e perspectivas para pesquisas futuras.

---

[2]Utilizamos a diferenciação entre *matemática do professor de matemática* e *matemática do matemático* proposta por Lins em suas produções, de maneira que a do matemático se caracteriza por internalista e simbólica – a definição de um objeto diz apenas sobre como ele performa e no que dele se pode dizer em discussões e problemas internos à matemática –, sendo constituinte da matemática do professor de matemática, que também contém modos de produção de significados de quem não é matemático, como alunos e alunas, e que não são legitimados pelo matemático.

1 O ENSINO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Neste capítulo, analisaremos características relacionadas à caracterização, organização e planejamento curricular do ensino de disciplinas de tópicos de variáveis complexas adotadas nos cursos de Licenciatura em Matemática nas IES do Estado de Minas Gerais. Metodologicamente, escolhemos analisar apenas universidades federais de nosso estado, considerando o fato de que a instituição onde nossa pesquisa se desenvolve é uma universidade federal mineira.

Assim, dissertamos sobre a presença da temática de Variáveis Complexas na formação inicial de licenciandos e licenciandas em matemática, incluindo o conteúdo relacionado a esse aprendizado.

1.1 Instituições e disciplina

Em nosso levantamento das Instituições de Ensino Superior mineiras com Licenciatura em Matemática identificamos onze universidades mineiras, são elas:

- Universidade Federal de Alfenas (Unifal – MG);
- Universidade Federal de Itajubá (Unifei);
- Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF);
- Universidade Federal de Lavras (UFLA);
- Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG);
- Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP);
- Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ);
- Universidade Federal de Uberlândia (UFU);
- Universidade Federal de Viçosa (UFV);
- Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM);
- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Ao analisarmos as grades curriculares disponibilizadas na página oficial de cada uma dessas instituições, percebemos a presença de ao menos uma disciplina que aborda temas relacionados a números complexos ou variáveis complexas.

Identificamos na análise dos planos de curso três classificações em relação à obrigatoriedade, ou não, dessa temática para as licenciaturas em Matemática: eletiva, optativa e obrigatória.

Na tabela a seguir, organizamos informações básicas sobre as disciplinas analisadas.

Tabela 1: Disciplinas de Variáveis Complexas nas Universidades Federais Mineiras

Universidades Federais Mineiras	**Disciplinas Relacionada a Números Complexos**	**Classificação da Disciplina**
Unifal – MG	Funções de uma Variável Complexa	Eletiva
Unifei	MAT454 - Variável Complexa	Obrigatória
UFJF	MAT162 - Funções do Plano Complexo	Obrigatória
UFLA	GEX175 - Int. a Variáveis Complexas GEX210 - Trigonometria e Números Complexos	Eletiva Obrigatória
UFMG	MAT118-DIG - VARIÁVEL COMPLEXA	Obrigatória
UFOP	MTM224 - Funções de uma variável complexa	Obrigatória
UFSJ	Polinômios e Números Complexos Análise Complexa	Obrigatória Optativa
UFU	GMT031 - Funções de uma variável complexa	Obrigatória
UFV	MAT343 - Variáveis Complexas	Optativa
UFTM	Funções de Variáveis Complexas	Obrigatória
UFVJM	CEX053- F. de Variável Complexa	Eletiva

Fonte: Criado pela autora.

Cada graduanda(o) deve cumprir uma determinada carga horária, em acordo com as diretrizes de sua graduação, de disciplinas ditas eletivas, dentro da grade oferecida para essa finalidade.

Ufla, UFVJM e Unifal oferecem a temática dos complexos em disciplinas classificadas como eletivas, ou seja, disciplinas não obrigatórias. Porém, de acordo com o que consta no Projeto Político Pedagógico (PPP) de cada um de seus cursos de Licenciatura em Matemática, notamos que, mesmo não oferecendo disciplinas obrigatórias que possuam os números complexos como conteúdo exclusivo, elas garantem o contato das alunas e alunos com esse conteúdo ao inseri-lo em outras disciplinas obrigatórias de sua grade.

Destacamos na *Tabela 1* duas disciplinas da Ufla: GEX175 (Int. a Variáveis Complexas) e GEX210 (Trigonometria e Números Complexos). A primeira é uma disciplina eletiva, que se propõe a estudar exclusivamente temáticas relacionadas com variáveis complexas. Já a segunda disciplina indica que essa temática divide atenção com trigonometria, além de ser uma disciplina obrigatória.

Analisando a ementa das disciplinas da UFVJM e Unifal, encontramos o conteúdo de nosso interesse inserido em disciplinas obrigatórias que não levam o termo “números complexos” ou “variáveis complexas” em seus títulos.

Na UFVJM, a disciplina obrigatória intitulada Matemática Elementar III é responsável por tratar dos números complexos simultaneamente aos conteúdos de trigonometria e polinômios. Segue abaixo as informações complementares dessa disciplina.

Figura 1: Ementa da disciplina Matemática Elementar III

<table>
<tr><td colspan="5">Disciplina: Matemática Elementar III</td></tr>
<tr><td colspan="3">Período: 2º período</td><td>C.H. Semestral: 60 horas</td><td>Créditos: 4</td></tr>
<tr><td>CH Teórica
60</td><td>C. H. PCCs
00</td><td>Estágio
00</td><td colspan="2">PRÉ-REQUISITOS
Matemática Elementar I</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivos: Proporcionar uma visão mais crítica e profunda dos conteúdos do ensino médio.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ementa: Trigonometria no triângulo retângulo; Trigonometria na circunferência; Funções Trigonométricas; polinômios e números complexos.</td></tr>
</table>

Fonte: Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM

Já na Unifal notamos a presença do tema em duas disciplinas obrigatórias de sua grade – Cálculo I e Cálculo IV.

Figura 2: Ementa da disciplina Cálculo I

<table>
<tr><td colspan="5">Disciplina: Cálculo I</td></tr>
<tr><td colspan="5">Pré-requisitos: Não possui.</td></tr>
<tr><td>C.H. Total: 60</td><td>Teórica: 60</td><td>Prática :</td><td>Prática como componente curricular:</td><td>Estágio:</td></tr>
<tr><td colspan="5">EMENTA: Conjuntos numéricos. Função: definição, domínio, contradomínio, conjunto imagem e gráfico. Função afim. Função quadrática. Inequações produto e quociente. Função composta. Função exponencial. Função inversa. Função logarítmica. Funções Trigonométricas. Funções trigonométricas inversas. Números complexos: Forma algébrica e polar, potenciação e radiciação de complexos (1ª e 2ª fórmula de Moivre). Limite e continuidade: conceito, definição e propriedades. Derivadas: definição, regras de derivação, derivação implícita, Teorema do Valor Médio. Aplicações da derivada.</td></tr>
</table>

Figura 3: Ementa da disciplina Cálculo IV

Disciplina: Cálculo IV				
Pré-requisitos: Cálculo III.				
C.H. Total: 60	Teórica: 60	Prática :	Prática como componente curricular:	Estágio:
EMENTA: Séries: Sequências, Sequências monótonas e limitadas, Séries definição, Séries com termos não negativos, Convergências Absoluta e Condicional, Séries de Potência, Séries de Taylor e Maclaurin. Números Complexos: Números Complexos, Forma Polar, Conjugado, Fórmula de Moivre, Conjuntos no Plano Complexo, Funções Complexas: polinomial, exponencial, trigonométrica, logarítmica e potências. Equações Diferenciais Ordinárias: Definição de equação diferencial ordinária e de solução, Teorema de Existência e Unicidade. Equações lineares de primeira ordem, Equações Homogêneas, Equações Exatas, Mudança de Variável (Equações de Bernoulli, Ricatti, Clairault), Equações lineares de ordem superior, Exponencial de Matriz.				

Fonte: Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura da Unifal

Essa característica identificada no PPP da Unifal, de tratar de números complexos em disciplinas de Cálculo, nos chamou atenção para o fato de que a não existência de uma disciplina exclusiva para esse tema não implica a ausência dessas discussões em outras disciplinas, reforçando a importância da análise dos Projetos Político Pedagógicos além da observação das Grades Curriculares.

A terceira e última classificação é a de disciplina optativa. Pelo que notamos por meio do PPP da UFSJ e da UFV, o termo "optativa" é sinônimo de "eletiva" para esses documentos, então nossa análise foi próxima à realizada acima para os cursos que disponibilizavam disciplinas eletivas no tema estudado neste trabalho.

Na UFSJ, os estudos acerca de números complexos estão restritos nas duas disciplinas já identificadas anteriormente – na disciplina obrigatória o tema está inserido motivado pela discussão dos polinômios, e na disciplina optativa possui um espaço exclusivo, com uma ementa focada no estudo do plano complexo (funções analíticas, teoria da integral, séries de potências e singularidades, resíduos e integrais).

A UFV possui, em uma disciplina obrigatória indicada para o primeiro período, chamada Fundamentos de Matemática Elementar II (MAT – 206), uma ementa englobando trigonometria e números complexos, parecida com a da disciplina GEX210 presente na grade curricular da Ufla.

Figura 4: Ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar II

Departamento de Matemática - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Catálogo: 2022
Número de créditos: 4 Carga horária semestral: 60h Carga horária semanal teórica: 3h Carga horária semanal prática: 1h Semestres: I

Objetivos
• Desenvolver conceitos elementares da Matemática, bem como estudar as suas diversas propriedades. Compreender métodos básicos e necessários à resolução de alguns problemas que envolvam conceitos de trigonometria e funções trigonométricas. Compreender e aplicar as principais propriedades dos números complexos. Estudar as principais propriedades dos polinômios com coeficientes reais.

Ementa
Trigonometria e funções trigonométricas. Introdução aos números complexos. Polinômios.

Fonte: Programa Analítico de Disciplina da UFV - MAT 206 - Fundamentos de Matemática Elementar II

No capítulo 4, em que discutiremos um design para a disciplina Variáveis Complexas para a Licenciatura, trataremos das escolhas metodológicas que fizemos a respeito da ementa e bibliografia básica do curso. Por isso, analisaremos a seguir a ementa/plano de ensino indicado para essas disciplinas, a fim de estabelecer futuramente uma comparação com a nossa proposta.

1.2 Ementas e suas referências

Por nosso olhar estar voltado para a formação básica do licenciando e licencianda, e desenvolvermos uma disciplina que trata exclusivamente de variáveis complexas, restringimos nossa análise às ementas das disciplinas obrigatórias citadas acima que possuem também temáticas relacionadas exclusivamente à variáveis complexas.

Tabela 2: Ementa das Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complexas

Universidades Federais Mineiras	**Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complexas**	**Ementa das Disciplinas**
Unifei	MAT454 - Variável Complexa	Plano Complexo; Funções analíticas; Teoria da integral; Séries de potências. Singularidades, resíduos e integrais. Funções homomorfas. Teoria de Cauchy.
UFJF	MAT162 - Funções do Plano Complexo	Números Complexos, Funções Analíticas, Funções Elementares, Transformações por Funções Elementares.
UFMG	MAT118-DIG - VARIÁVEL COMPLEXA	Números complexos. Topologia de C. Funções analíticas, Equações de Cauchy-Riemann. Funções Harmonicas. Integração. Teorema de Cauchy-Gor sat. Fórmula integral de Cauchy. Séries de Taylor. Princípio de Máximo. Teorema de Liouville. Singularidades isoladas. Séries de Laurent. Teoremas de resíduos e aplicações.
Ufop	MTM224 - Funções de uma variável complexa	Números Complexos. Topologia do Plano. Funções Holomorfas. Séries. Teoria de Cauchy. Singularidades e Resíduos.
UFU	GMT031 - Funções de uma variável complexa	Números complexos. Cálculo no plano. Funções holomorfas. Séries. Teoria de Cauchy. Singularidades.
UFTM	Funções de Variáveis Complexas	Funções de Variável Complexa. Limite e Continuidade. Diferenciabilidade. Integral definida. Integral de Linha. Teorema, Fórmula de Cauchy. Séries de Potências. Séries de Laurent. Singularidades e Resíduos.

Fonte: Criado pela autora.

É possível notar que, em geral, as ementas se organizam em torno dos mesmos pontos principais: números complexos, alguns tipos de funções, séries, singularidades, resíduos e integrais.

Em um primeiro momento podemos supor que são poucos tópicos a serem trabalhados em um semestre e que o tempo destinado à disciplina seria suficiente.

Gostaria de utilizar o tema de funções como exemplo para refutar essa crença. Essa discussão está presente, mesmo que de maneira reduzida, desde a Educação Básica na formação discente, ou seja, alunos e alunas podem chegar ao Ensino Superior familiarizados com essa palavra e, possivelmente, com o que ela se relaciona.

Ainda assim, boa parte do trabalho realizado nas disciplinas de Cálculo é fundamentado por funções, justamente por ser um tópico essencial para muitos temas tais como limites, derivada e integral. Assim, é de se esperar que, quando funções são trabalhadas num conjunto diferente do qual usualmente são tratadas (conjunto dos números reais), mais tempo será necessário para sua discussão. Porém, ao retornarmos para as ementas no quadro explicitadas, notamos que essa temática divide espaço com outras que demandam tanto tempo quanto para o seu ensino e aprendizagem.

O tempo destinado ao estudo completo de uma ementa é um problema não só para discentes, mas também para docentes. Como promover um estudo detalhado e individualizado de um tema como variáveis complexas tendo que percorrer uma ementa tão extensa?

Torna-se necessário pontuar que nossa perspectiva não reflete o posicionamento de extinguir a matemática do matemático na formação inicial do licenciando e licencianda, pelo contrário, acreditamos, em concordância com Lins (2005), que

> o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. (LINS, 2005a, p. 122).

A abundância de tópicos junto do tempo reduzido podem ser agentes da escolha, por parte docente, de um ensino tradicional – “o problema não é o giz e o quadro negro, mas o uso que muitas vezes se faz deles” (OLIVEIRA, 2002, p. 100). Nesse formato, torna-se inviável a proposta metodológica que gostaríamos de fazer ao professor e professora dessas disciplinas. Para vivenciar o estranhamento, é preciso tempo.

Para além dos conteúdos previstos de serem abordados, a bibliografia básica sugerida também nos indicou a tendência existente no que diz respeito à referência utilizada pelos professores e professoras de como trabalhar esses conteúdos em sala de aula. Do mesmo modo, segue abaixo a relação dos livros-texto nas ementas indicados e a quantidade de vezes em que aparecem nos documentos como bibliografia básica:

Tabela 3: Bibliografia das Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complexas

Livro	**Autor(a)**	**Número de Repetições**
Variáveis complexas e Aplicações	AVILA, G.	5
Variáveis Complexas e suas Aplicações	CHURCHILL, R.V.	3
Introdução às funções de uma variável complexa	FERNANDEZ, Cecília S.; BERNADES Jr, Nilson C.	2
Cálculo em uma variável complexa	SOARES, M. G.	2
Funções de uma variável complexa	LINS NETO, A.	1
Trigonometria e Números Complexos.	CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E.	1
Introdução às variáveis complexas	COLWELL / MATHEWS	1
Complex Number and Geometry	HAHN, L.	1
Matemática Superior	KREYSZIG, E.	1
Introdução as Funções Complexas	MEDEIROS, L. A. J.	1
Variável complexa 1	SHOKRANIAN, Salahoddin.	1
Variáveis complexas	SPIEGEL, M. R.	1

Fonte: Criado pela autora.

Mesmo apontando no mínimo três livros como bibliografia básica, foi possível identificar o destaque de quatro obras matemáticas, possuindo ao menos duas indicações em ementas. Independente da repetição, a listagem nos indica um certo padrão, o texto matemático utilizado para futuros e futuras educadoras matemáticas ainda é escrito por matemáticos.

A preocupação do matemático não passa pelas necessidades de um licenciando e licencianda, logo, um matemático ministrando uma disciplina de conteúdo matemático com textos-base escritos também por matemáticos dificilmente romperá com o tradicional, evitando correr o risco de não cumprir com a ementa prevista no prazo estabelecido.

A *Tabela 1* foi resultado da análise das grades curriculares. Esse tipo de exploração nos proporcionou informações baseadas não nos conteúdos programáticos das disciplinas, e sim nos títulos atribuídos a elas. A partir da classificação de eletivas, optativas e obrigatórias poderíamos afirmar que aproximadamente 72% dos cursos de Licenciatura em Matemática nas Universidades Federais mineiras tomam o ensino de temas relacionados a números complexos como obrigatórios, quando na verdade, após a análise dos Projetos Político Pedagógicos, chegamos à conclusão de que o estudo desse tema, em teoria, ocorre em 100% dos cursos identificados.

Esse percentual é muito expressivo para nossa pesquisa. Por um momento é cabível imaginar que tratar dos números complexos nesse trabalho se justifica apenas por uma escolha pessoal, pois não é uma temática de muito destaque comparando com disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, mas por ser tão representativa na nossa região, sinaliza a necessidade de se falar, estudar e pesquisar sobre, e é isso que nos propomos fazer.

O padrão notado pelo levantamento da bibliografia básica indicada estar de acordo com uma das premissas deste trabalho, a concepção de disciplina, sua ementa, metodologia de ensino e bibliografia utilizada são propostas pela visão do matemático para a formação do futuro matemático. Lins (2005a) aponta que no âmbito do ensino de matemática, “a questão central não é ‘qual conhecimento ensinar’ e sim ‘ensinar o conhecimento de quem’”(LINS, 2005a, p. 118).

Ensinar o conhecimento do matemático não significa precisar agir como um – “ao levar o futuro professor a passear pelo Jardim do Matemático, não o faço com a intenção de doutrinação, e sim com a intenção de permitir que eles experimentem a diferença.” (LINS, 2005a, p. 121). É experimentando a diferença como discente que se torna sensível à diferença que será futuramente experimentada quando no papel de docente estiver.

Assim, afirmamos nossa posição como professores e pesquisadores que o foco não deve ser exclusivo no conteúdo, a atenção deve estar voltada para o processo. Nossa concepção vai de encontro à de Alves (2013), os “cursos conteudistas ministrados com o enfoque da Educação Matemática e que levem em conta a ampliação de horizontes do futuro professor de Matemática, podem e devem contribuir para a sua formação pré-serviço, enquanto estudante de Graduação.” (ALVES, 2013, p. 50).

Nesse sentido, posicionamos nossas escolhas metodológicas com um enforque de Educação Matemática. Não pretendemos apontar uma ementa extensa, mas suficiente para criar o estranhamento pretendido a partir de tópicos relacionados a variáveis complexas; nossos textos de apoio provavelmente não estão de todo em direção contrária dos anteriormente destacados, mas serão lidos e utilizados partindo de outra perspectiva. Não seguir o padrão não faz de nossa proposta melhor ou pior, apenas demarca nossa posição educacional em apontar outra possibilidade.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste Capítulo, apresentaremos a revisão de literatura resultante de nossa pesquisa no acervo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), em bancos de teses e dissertações - na área de Educação Matemática em sites de Programas de Pós-Graduação, e no acervo digital do Sigma-t - Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática.

Visando encontrar trabalhos em que o ensino de variáveis complexas estivesse relacionado à formação da futura e futuro professor, combinações como "'Formação Matemática' e 'Números Complexos' e 'Licenciatura em Matemática'" e "'Formação Matemática' e 'Variáveis Complexas' e 'Licenciatura em Matemática'" foram utilizadas, mas os resultados obtidos, além de não serem numerosos, após leitura dos resumos notamos que não eram compatíveis com nossa expectativa.

Retomamos então os objetivos deste trabalho cujo foco não está primariamente no conteúdo, mas sim na formação matemática de licenciandos e licenciandas.

Além disso, nosso pressuposto teórico precisava ser um norteador de trabalhos que nos serviriam de referencial. Assim uma nova *string* foi criada, e dessa vez retornando pesquisas que muito nos auxiliaram em nosso levantamento, e foi ela "'Formação Matemática' e 'Produção de Significados' e 'Licenciatura em Matemática'".

Com esse formato de busca, tivemos como resultado 46 trabalhos, dos quais quatro foram selecionados como constituintes da revisão de literatura de nossa pesquisa.

Tabela 4: Trabalhos provenientes da pesquisa em banco de teses e dissertações

Título do Trabalho	Autor(a)	Ano de Defesa
Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática	ELIAS, Henrique Rizek	2017
Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares	ALMEIDA, Vitor Rezende	2013
Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais	ALVES, Aretha Fontes	2013
Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos	PROCÓPIO, Ricardo Bevilaqua	2011

Fonte: Criado pela autora.

Com essas pesquisas, foi possível compreender a visão dos autores e autoras sobre temática intrínseca de nosso trabalho – *A formação matemática do(a) professor(a) de matemática*.

A tese de Elias (2017) traz a problemática do distanciamento entre a matemática discutida durante o curso de uma Licenciatura em Matemática e a matemática que compõe o dia-a-dia do trabalho de um docente dessa disciplina na escola. Sua pesquisa, de cunho qualitativo, se enquadra nas discussões a respeito da formação inicial de professores de matemática, com ênfase na formação matemática de docentes de matemática.

Os referenciais teóricos citados por Elias são o Perfil Conceitual (MORTIMER, 2000; MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al., 2014a; MORTIMER et al., 2014b), o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (JAKOBSEN et al., 2012; JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013) e a diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2010).

Com essa bagagem teórica discutida e ênfase em um tópico matemático específico - os números racionais, desenvolveu em seu trabalho uma sequência composta por três tarefas, a fim de propor possibilidades para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática que aproximem essa temática da matemática escolar, favorecendo o desenvolvimento do conhecimento profissional do futuro e futura professora. Com isto, frisamos que esta pesquisa se aproxima de nosso estudo pela produção de tarefas, mas não compartilhamos o mesmo referencial teórico.

As dissertações de Almeida (2013), Alves (2013) e Procópio (2011), com abordagens também qualitativas, se assemelham quanto a produção de tarefas e utilização de mesmo referencial teórico, com finalidade em aprofundar o estudo entre os processos de ensino e aprendizagem em disciplinas do Ensino Superior e a formação matemática do licenciando e licencianda em Matemática.

O referencial teórico em comum dos três trabalhos é o Modelo dos Campos Semânticos, mas o tópico matemático em foco nos estudos se diferencia: Almeida (2013) trata de Transformações Lineares em Álgebra Linear, Alves (2013) discute Espaços Vetoriais também em Álgebra e Procópio (2011) se dedica a tópicos de Geometria Plana e Espacial.

Os objetivos dessas dissertações estavam em torno do mapeamento de características para disciplinas da Licenciatura em Matemática, voltadas para o tópico específico de cada trabalho, de forma que essas disciplinas desempenhassem o papel de um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática.

A respeito da nomenclatura Curso de Serviço, apontamos que ela “surgiu para denominar as disciplinas voltadas para a formação em uma área específica” (ALMEIDA, 2013, p. 2), mas é preciso esclarecer que, em pesquisas inseridas na Educação Matemática, a “proposta direcionada a Cursos de Serviço está voltada às disciplinas de conteúdo específico das Licenciaturas em Matemática e, como consequência, para a formação inicial do Professor de Matemática.” (PROCÓPIO, 2011, p. 20).

Por consequência de serem disciplinas de conteúdo matemático atentas à formação inicial, se caracterizam por serem disciplinas “que também se preocupam com a formação didática e pedagógica do futuro professor de Matemática” (ALMEIDA, 2013, p. 2).

Elias (2017), mesmo não utilizando o termo Curso de Serviço, disserta sobre a licenciatura ser também um curso profissional. Em seu texto, afirma a necessidade da proposição de uma formação que, em seus termos, não priorize uma educação *para* a matemática, e sim “ofereça maneiras de lidar com as demandas da prática docente e que priorize os valores da Matemática Escolar em suas múltiplas possibilidades.” (ELIAS, 2017, p. 35).

O termo Matemática Escolar acima é caracterizado por Elias (2017), com apoio teórico de Moreira e David (2010), “como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente” (MOREIRA; DAVID, 2010 apud ELIAS, 2017, p. 35). Assim, seus valores seriam “os significados produzidos e mobilizados pelos professores naquele contexto da sala de aula da Educação Básica, considerando toda a heterogeneidade dos modos de pensar dos estudantes.” (ELIAS, 2017, p. 35)

Uma observação pertinente é a de que o termo *significado* utilizado por Elias (2017) não possui a mesma conotação de quando utilizado em nosso trabalho e nos outros aqui referenciados que também utilizam o Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico. Para o Modelo, *significado* possui definição específica, que discutiremos com mais atenção no capítulo seguinte.

Voltando à nossa discussão anterior, em resumo, Elias (2017) aponta que a matemática para a formação do futuro e futura professora de matemática deve ser caracterizada como

> … uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar, que permita ao professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pensar os conceitos matemáticos em contextos variados da Educação Básica, e que possibilite ao professor, ao mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo escolar e possíveis relações com a Matemática Acadêmica. (ELIAS, 2017, p. 57)

Almeida (2013), ao dissertar a respeito de concepções do que seriam competências designadas a professores e professoras de matemática, nos brinda expondo sua concepção de que a prática docente deve ser guiada pela

> … preocupação em utilizar metodologias alternativas de ensino que propiciem aos alunos uma oportunidade de leitura e ampliação dos modos de produção de significados deles, considerando a prática docente como um processo dinâmico, onde não só os conteúdos e noções matemáticas estejam envolvidas. (ALMEIDA, 2013, p. 8)

Na mesma direção, Procópio (2011), ao discutir a criação de uma conexão e interação entre a teoria e a prática na docência, exemplifica metodologias de ensino que são conhecidas pela academia como campos de estudo dentro da Educação Matemática, mas é assertivo ao dizer que, “porém, essas possibilidades não têm entrado nas salas de aula das universidades de maneira efetiva.” (PROCÓPIO, 2011, p. 14).

Esses recortes nos possibilitam uma importante reflexão. Normalmente voltamos nossa atenção ao docente escolar, da Educação Básica, mas essa prática docente perpassa todos os níveis de atuação, ou seja, é importante que professores e professoras da Educação Superior também se atentem às suas práticas e atuações.

É preciso ir além do estudar diferentes metodologias, passando a vivenciá-las como licenciandas(os) para sermos motivadas(os) a, ao menos, tentar também fazer o diferente. "… necessitamos de professores que tenham uma perspectiva ampla de sua sala de aula antes mesmo que inicie sua docência" (ALVES, 2013, p. 81), por isso a atenção à formação inicial segue sendo reforçada.

As leituras realizadas nos apontam a necessidade de se pesquisar o que nos propomos. Muitos são os conteúdos matemáticos ditos como puros e acadêmicos, pertencentes ao matemático, e quanto mais eles forem discutidos em perspectivas além da tradicional teórica/axiomática, mais rica poderá ser a experiência discente e docente.

Além disso, uma característica marcante dessas leituras é o apontamento para a atenção ao que vem como produção de significados da e do discente para o texto matemático. Essas disciplinas matemáticas precisam estar a serviço dessa produção de significados para e pela(o) discente, como exercício para suas práticas futuras, sejam elas acadêmicas ou não. Essa demarcação muito tem a ver com o referencial teórico que lança luz à nossa questão e objetivos, o Modelo dos Campos Semânticos.

Realizamos busca também em uma plataforma que nos possibilitasse o contato direto com as publicações de autoras e autores que utilizam o Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico e/ou metodológico, denominada Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática – Rede Sigma-t, uma rede de pesquisa constituída por oitenta pesquisadores e pesquisadoras, professores e professoras com interesse no Modelo dos Campos Semânticos.

Ao pesquisarmos em seu acervo digital de teses e dissertações disponíveis e digitalizadas, e restringirmos a busca entre os trabalhos que foram orientados pelo pesquisador Romulo Campos Lins, encontramos duas dissertações que se relacionam com nossa pesquisa e com as temáticas dos quatro trabalhos discutidos no tópico anterior, por restringirem suas investigações a uma temática da matemática do matemático.

Tabela 5: Trabalhos provenientes da pesquisa na rede Sigma-t

Título do Trabalho	Autor(a)	Ano de Defesa
Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para dimensão.	JÚLIO, Rejane Siqueira	2007
Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear.	OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de	2002

Fonte: Criado pela autora.

Júlio (2007) disserta sobre a produção de significados para a noção de dimensão, presente nas discussões de disciplinas matemáticas relacionadas a Álgebra Linear. Caracteriza seus interesses como parte da reflexão teórica denominada “As idéias fundamentais da Matemática da Educação Matemática” por Lins (2006).

Uma das motivações do trabalho era divergir da crença de que antes de saber ensinar matemática é preciso aprender muita matemática. Suas ações e pensamentos eram voltados para um curso de licenciatura que fosse baseado

> … em uma educação matemática, que lide com situações de sala de aula, tipos de demandas a que os professores estão sujeitos na prática profissional. Além disso, é central que os professores discutam e experienciem nos cursos de licenciatura os processos de produção de significados matemáticos, não-matemáticos e as diferenças entre eles. (JÚLIO, 2007, p. 13)

Tendo o Modelo como referencial teórico, ao tratar não só do que se faz pertinente experienciar enquanto licencianda(o) num curso de matemática, mas também como fazê-lo, Júlio (2007) explicita que

> … a matemática é o meio pelo qual se pode discutir a produção de significados matemáticos e não-matemáticos e suas diferenças, mas, não a matemática pautada num internalismo matemático onde o que é verdade se dá por meio de axiomas, definições e teoremas e sim numa matemática apresentada de modo que dê abertura para se discutir os processos de produção de significados. (JÚLIO, 2007, p. 14)

Esse modo de apresentar a matemática, de maneira diferente da dita tradicional, valoriza uma abordagem em que o conteúdo não seja justificado por suas aplicações, ou apenas por ele mesmo, e sim pelas possíveis reflexões que serão motivadas aos licenciandos e licenciandas (OLIVEIRA, 2002).

Como forma de explicitar a relação do Modelo com a abordagem citada, usaremos as palavras de Oliveira (2002), que em sua dissertação aponta três consequências de se utilizar o MCS como base teórica:

> • em qualquer processo cognitivo, em especial naqueles que se dão em sala de aula, o nosso olhar de pesquisador ou professor deve estar voltado para a produção de significados, lembrando que a diversidade dos modos de produção de significados vem enriquecer o processo. Explicitar essas diferenças e apontar o que elas acarretam deve fazer parte da ação do educador matemático;

> • a diferença dos significados de que estamos falando não é questão de estilo, preferência, interpretação ou versões de uma mesma essência: caracteriza, de fato, conhecimentos distintos; e
> • concebemos que a prática do professor deve ser na direção de criar na de sala de aula um espaço comunicativo compartilhado por todos. (OLIVEIRA, 2002, p. 26)

Oliveira (2002), mesmo investigando sobre transformações lineares, aponta que com sua pesquisa poderá, também, subsidiar discussões mais amplas sobre a formação inicial do professor e professora de Matemática, como a nossa atualmente.

As discussões seguidas por essas duas dissertações nos orientaram na compreensão do que é o Modelo dos Campos Semânticos visto no decorrer de uma pesquisa, desde o entendimento a respeito dos instrumentos da teoria até a utilização desses na análise proposta. Por esse motivo, não aprofundarei neste momento a respeito de suas contribuições para minha escrita sem antes ter lhes apresentado os instrumentos do Modelo.

Entretanto, antes de seguirmos para o próximo capítulo, fez-se necessário consultar trabalhos de nosso conhecimento que tratam de aplicações do conteúdo relacionado a variáveis complexas e diferentes formas de abordá-lo em sala de aula para essa determinada finalidade. Seguem informações dos dois trabalhos analisados.

Tabela 6: Trabalhos relacionados à temática de Variáveis Complexas

Título do Trabalho	**Autor(a)**	**Ano de Defesa**
Objeto de aprendizagem para o ensino de números complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica	PINTO, José Eustáquio	2015
Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos	REIS NETO, Raimundo Martins	2009

Fonte: Criado pela autora.

As justificativas e objetivos desses trabalhos são diferentes das existentes em nosso, porém nos mostrou ser importante ter contato com discussões que envolvem o mesmo conteúdo que escolhemos – variáveis e números complexos.

Pinto (2015) centra sua pesquisa na criação de um Objeto de Aprendizagem (OA) que promova comunicação e interação no processo de ensino e aprendizagem de números complexos na área técnica em eletroeletrônica. A preocupação do autor está voltada não só para o docente, mas também para discentes em Educação Profissional Técnica, mais especificamente no nível médio.

A concepção de OA utilizada na dissertação de Pinto (2015) é que esse objeto "é um recurso digital reutilizável *[pode-se criar um mais completo à partir de um mais simples]* voltado para o ensino, de modo que os propósitos educacionais estejam bem definidos com relação aos elementos de análise, síntese e reflexões." (PINTO, 2015, p. 23, grifo nosso). Na pesquisa, o OA desenvolvido é composto de uma sequência didática que totalizou seis atividades digitais e interativas.

A criação de um OA advém da necessidade de abordar os números complexos de uma maneira diferente da dita tradicional. Pinto (2015) afirma que a dificuldade em contextualizar esse conteúdo com a vivência estudantil, mesmo utilizando aplicações da área técnica em eletroeletrônica, e a prática docente de trabalhar esse conteúdo apenas em final de ano letivo fazem com que o ensino se torne pouco atraente.

Além disso, para o autor, o tópico números complexos "é quase sempre trabalhado de maneira superficial, enfatizando-se mais a parte algébrica que a geométrica, com cálculos repetitivos e poucas atividades envolvendo aplicações." (PINTO, 2015, p. 27).

O autor abordou o conteúdo de números complexos de uma perspectiva que prioriza a representação geométrica, uma alternativa didática para se trabalhar aplicabilidades da área de eletroeletrônica, diversificando análises de circuitos elétricos antes realizadas por meio da trigonometria.

Esse recurso, que foi nomeado pelo autor de Descomplicando os Complexos, somado à liberdade proveniente da tecnologia possibilitou o desenvolvimento da pesquisa com uma preocupação também institucional, já que objetivou "com o OA construído minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos das disciplinas que envolvem os números complexos e circuitos elétricos, bem como buscar a redução dos elevados índices de repetência e evasão escolar. (PINTO, 2015, p. 16).

Reis Neto (2009), assim como Pinto (2015) possuía preocupações relacionadas ao ensino de Nível Médio, mas voltadas para a Educação Básica, e não Educação Técnica.

Em sua dissertação, o autor procura "investigar, refletir e buscar formas alternativas para o ensino e aprendizagem desses números." (REIS NETO, 2009, p. 15). A necessidade de uma nova metodologia advém da crença do autor na insuficiência do ensino mecanizado, que se baseia no uso de técnicas operatórias e memorização, fazendo "com que os alunos apresentem muita dificuldade ao trabalhar com números complexos e até mesmo se neguem a aceitar sua existência." (REIS NETO, 2009, p. 15)

Produzindo uma proposta de ensino em oposição à visão tradicional, Reis Neto (2015) estrutura sua metodologia por meio de uma abordagem geométrica do conteúdo, utilizando a representação de números complexos como vetores, tendo como foco a unidade imaginária (i) do conjunto dos números complexos.

Segundo o autor,

> a unidade imaginária é sem dúvida o principal obstáculo para o entendimento dos alunos (expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos), pois além da dificuldade no processo de abstração, muitos trazem, de forma muito categórica, o conceito de que não existe um número que elevado ao quadrado seja igual a um número negativo. (REIS NETO, 2009, p. 16)

Cabe ressaltar que a opção do autor não foi a de privilegiar uma abordagem em detrimento da outra, e sim estabelecer conexões entre a Álgebra e a Geometria, mas partindo da Geometria para esse fim. Em sua pesquisa de campo, Reis Neto (2015) constata que existe uma relação entre a dificuldade de manipulação de números complexos e definições existentes para números pertencentes ao conjunto dos reais (R).

O fato de aprenderem que todo número elevado ao quadrado é igual a um número positivo se torna um grande obstáculo no momento de apresentar a unidade imaginária. A escolha de apresentar a unidade pelo método vetorial já permite a visualização da existência do número, antes mesmo dele ser definido.

Como recurso, sequências de atividades didáticas foram utilizadas na pesquisa, criadas de modo a impulsionar manipulações geométricas que desencadeavam manipulações algébricas. As atividades foram desenvolvidas e analisadas com referenciais teóricos de Resoluções de Problemas e Aprendizagem Significativa.

Nossa pesquisa possui referencial diferente dos utilizados nas duas pesquisas citadas neste recorte, e por isso a fase das análises não é de nosso interesse. Porém, o modo de tratar a necessidade de uma nova abordagem de números complexos e as justificativas utilizadas acrescenta e reforça nosso questionamento e posicionamento, ou seja, que a discussão desse tema é necessária não só para nós acadêmicos, é preciso que essa discussão, textos, e materiais cheguem às salas de aula do Curso de Licenciatura em Matemática e da Educação Básica.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O referencial tem a função de nos dar embasamento teórico sobre o assunto que queremos investigar. Não podemos avaliar as situações de pesquisa apenas com nossas opiniões, é preciso abordar os assuntos estando fundamentados em preceitos que tomamos como nossos guias.

Neste capítulo esclarecemos "de onde estamos falando" teoricamente, ou seja, qual é a nossa visão de mundo, de educação, do que é conhecimento, de como se dá a aprendizagem, dentre outras questões importantes em uma pesquisa educacional dada sua tendência, e para isso utilizamos a literatura já disponível e publicada na área em que estamos investigando.

Em nossa pesquisa, utilizamos como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), proposto pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins (1999, 2001, 2005), que compartilha ideias com Vygostky e Leontiev.

> O objetivo que guia, e guiou, sua criação e desenvolvimento [do MCS] é propor um instrumento (teórico) que possa oferecer suporte (teórico) ao professor em suas atividades profissionais, em particular na sala de aula, ou, mais especificamente, permitir uma leitura dos processos de produção de significado que sejam finos o bastante para permitir uma interação produtiva com os alunos. (LINARDI, 2006, p. 31)

Para o Modelo, produzir significado é exatamente "*falar*" a respeito de "*algo*". Utilizando as palavras de Alves (2013) como suporte, esclarecemos que "quando dizemos falar estamos nos referindo tanto à fala propriamente dita (oral) quanto à escrita, aos gestos, representações gráficas, ou seja, a todas as formas que um indivíduo tem para se expressar." (ALVES, 2013, p. 37). Esse recorte trás luz à importância de conhecer os termos de um referencial teórico antes de utilizá-lo, pois as palavras utilizadas para caracterizar situações não necessariamente possuem seu sentido literal.

Ainda com a função de elucidar os termos, Almeida (2015) afirma que esse "algo", dito objeto, é constituído durante a fala do sujeito, acrescentando que "pode ser qualquer coisa sobre a qual uma pessoa está falando, seja ela 'concreta', por exemplo, uma mesa em nossa frente, ou 'simbólica', como, por exemplo, palavras e desenhos em um livro" (ALMEIDA, 2013, p. 12). Entretanto, "produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade." (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 102).

Esse processo de produção de significado é uma das noções centrais do MCS, até porque, para Lins, "o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados." (LINS, 1999, p. 86).

Na produção de significados podemos identificar o que Lins caracterizou como sendo a produção de conhecimento. No MCS conhecimento é "entendido como uma crença - algo em que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação - junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação” (LINS, 1993, p. 86).

Ou seja, primeiro o sujeito precisa acreditar em algo, e a maneira dele demonstrar essa crença por meio de uma enunciação é afirmando-a. Ressaltamos que a afirmação se refere a “alguma forma de comunicação aceita por um interlocutor; não precisa ser de forma linguística” (LINS, 2001, p. 42).

Já sobre a justificação, é preciso pontuar que diferentes justificações representam conhecimentos diferentes, isso porque a justificação está estreitamente relacionada com a noção de legitimidade. Nem tudo que é legítimo para um leitor (direção para qual o autor enuncia) será legítimo para um outro.

Com esse pensamento é possível dizer da ausência de juízo de valores em uma análise baseada na leitura positiva – não existe uma verdade universal ao discutir sobre produção de conhecimentos em uma dada atividade, o que é possível de ser feito é uma negociação de legitimidades, que seria como uma sugestão de outros modos de produzir significados à partir dos identificados.

Torna-se pertinente ressaltar que até os significados identificados podem não ser realmente fiéis ao que o sujeito enunciou, eles dizem respeito a nossa leitura dos resíduos. Isso acontece pois, de acordo com o Modelo, a noção de comunicação é diferente da tradicional, como veremos a seguir.

Para o MCS, o processo de convergência de informações de fato acontece apenas ao estarmos em um espaço comunicativo, que é quando o autor (sujeito que produz a enunciação) e o leitor possuem os mesmos modos de produção de significados (interlocutores).

O processo comunicativo proposto por Lins possui três elementos constitutivos já citados anteriormente: autor, texto e leitor.

> O autor é aquele que, nesse processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, ainda nesse processo, se propõe a produzir significados para os resíduos das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte que analisa a obra de um artista plástico ou uma pessoa que leia um romance buscando entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 103)

Separando o processo nas duas perspectivas possíveis – a do autor e a do leitor – podemos elaborar a seguinte dinâmica:

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma plateia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa plateia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este ‘um leitor’ que ‘o autor’ fala (LINS, 1999, p.81).

Este “um leitor”, que denominamos como a direção para qual o autor enuncia, é chamado de interlocutor.

> Por outro lado, em processos comunicativos, na perspectiva do leitor, ele “sempre constitui um autor, e é em relação ao que este ‘um autor’ diria que o leitor produz significado para o

> resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto". (LINS, 1999, p. 82) Além disso, "é apenas na medida que o leitor fala, isto é, produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor" (LINS, 1999, p. 82). (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 104)

Ao longo desse processo, a comunicação efetiva ocorre apenas se existir o compartilhamento de interlocutores entre autor e leitor. "Numa inversão conceitual, 'comunicação' não corresponde mais a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para a outra', e sim a 'dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor.'" (LINS, 2012, p. 24). Para nossa pesquisa – que propõe a aplicação de um produto educacional em sala de aula, seguida de uma análise do material aplicado juntamente dos resíduos de enunciação produzidos – os processos de impermeabilização, estranhamento e descentramento serão incorporados a nossa leitura.

Em sala de aula, é possível identificar momentos em que alunos e alunas aparentam estar fechadas ao que está sendo dito pelo professor ou professora, ou seja, quando as(os) estudantes estão em uma posição de "não compartilharem novos interlocutores em situação de interação face a face, diferente daqueles para o qual eles estavam voltados; de não se propor a produzir significados numa outra direção." (SILVA, 2012, p. 79).

Esta situação foi denominada por Silva (2003) como processo de impermeabilização, "em que um aprendiz em uma sala de aula, fica impermeável a tudo o que se diz ali, não mudando à sua maneira de operar." (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 111).

Silva (2012) nos alerta que "alguns casos de impermeabilidade podem levar a um obstáculo ou limite epistemológico e a menos que o estudante mude sua maneira de operar, ele não resolverá o problema ou situação proposta." (SILVA, 2012, p. 79).

Torna-se necessário um olhar atento e aberto por parte do professor e professora, em identificar as dificuldades apresentadas, seja ela um obstáculo ou um limite epistemológico, durante as atividades propostas.

O papel docente, mais uma vez, não será de fazer juízo de valor, mas sim de mediação na função de apresentar outras formas de operar, diferentes da que o aluno ou aluna em questão estiver operando, inclusive a legitimada pela matemática, pois "[...] na medida em que o professor não sabe lidar com os conhecimentos que os alunos produzem para idéias matemáticas a partir de suas experiências fora da escola e até mesmo dentro da escola, torna-se impraticável criar em sala de aula um espaço comunicativo [...]" (OLIVEIRA, 2002, p. 104).

Quando compreendido o formato de comunicação acreditado pelo Modelo, torna-se mais fácil para a parte docente aceitar que o mais comum de acontecer vai ser a não compreensão integral do que ele ou ela está dizendo pela parte discente. A comunicação não é direta, como uma transmissão, logo nenhum conteúdo pode ser transmitido completamente por meio de uma aula, seja ela como for.

A docência carrega uma grande responsabilidade, como se fôssemos detentoras e detentores de um conhecimento e ainda capazes de transpô-lo para quem quer que seja, com apenas palavras, didaticamente, e sabemos que isso não ocorre na prática, o que gera insegurança e frustração. Precisamos aprender a lidar com o erro e dificuldades sem ser pela falta.

"Para Lins (1993b), uma dificuldade deve ser entendida de duas maneiras excludentes: ou ela caracteriza-se como um obstáculo epistemológico ou como um limite epistemológico." (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 117). Ou seja, a impermeabilização que gera a dificuldade, mas como identificá-las e, principalmente, diferenciá-las?

Segundo o Modelo, "limite epistemológico é a impossibilidade do sujeito produzir significados para o resíduo de uma enunciação numa certa direção devido a sua maneira de operar.". (SILVA, 2012, p. 88). Assim, "frente a um limite epistemológico, ou o aluno não consegue mudar sua maneira de operar (e, portanto, nem mesmo realizando interações, altera sua produção de significados) ou ele continua sem produzir algum significado." (ALVES, 2013, p. 28)

Este é o caso em que, se o sujeito não alterar seu modo de operar pode se encontrar em um local paralisante, onde não conseguirá produzir novos significados, sendo de total importância o papel mediador docente, já que "o problema não está na diferença, mas exatamente na recusa em reconhecê-la e lidar com ela frente a frente. Naturaliza-se a recusa passando ao aluno a responsabilidade de lidar com ela: decifra-me ou te devoro, nada mais." (LINS, 2004a, p. 116).

Lins (2001) nos aponta a importância dessa noção de limite para a(o) docente, principalmente em momento de planejamento de sua aula, quando afirma que

> i) toda vez que significado é produzido existe uma restrição no horizonte das posteriores produções de significado, implicando que, (ii) se aprendizagem é entendida – corretamente, eu penso – como aprender a produzir significado, ensinar deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesse processo. (LINS, 2001, p. 45)

Já o obstáculo epistemológico pode acontecer de duas maneiras:

> ou o aluno não produz significados numa determinada atividade ou produz significados em uma direção distinta da do professor, mas que num segundo momento, após interagir com alguém – seja o professor ou a leitura de um livro, por exemplo – ou mesmo sozinho, poderá *transpor* este *obstáculo* e produzir significado em alguma direção, mudando seu modo de operar. (ALVES, 2013, p. 28)

A citação acima reforça a importância da interação. Interação essa, professor(a)/aluno(a) ou aluno(a)/aluno(a), que possibilita a "negociação" de modos de operar. É a interação que possibilita uma posterior intervenção nas dificuldades, "a própria percepção da sua existência, só acontece a partir da interação com os estudantes, quando se dá espaço para que digam o que sabem." (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 120), cabendo ao professor exercitar e promover o espaço para que isso ocorra.

A noção de estranhamento já surgiu anteriormente em nossa escrita, no momento em que apontamos o estudo da matemática do matemático, pelo licenciando e licencianda, como uma oportunidade de se tornar sensível à sensação de estranhamento.

Esse estranhamento é descrito no MCS como “o processo no qual o sujeito, identifica a enunciação do outro como algo que não possa ser dito, como algo que não seja legítimo.”(SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 112).

Um exemplo cotidiano para qualquer docente é a fala de que “a matemática não faz sentido”, ou seja, em algum momento o conteúdo enunciado em sala de aula não foi legitimado pelo sujeito enunciador dessa frase. Se não foi legitimado, ele não produzirá significados para a demanda estabelecida, não porque não quer, mas, como em Lins (2004a) porque não pode:

> “o que é que o aluno pode dizer quando o professor afirma - e ‘demonstra’ - que a cardinalidade dos números reais é maior que a cardinalidade dos números racionais. Um infinito maior que o outro? Isso é verdadeiramente monstruoso para o aluno, e para o professor - o representante da Matemática do matemático - embora este ‘fato’ seja reconhecido como peculiar, é nada mais que um monstro de estimação.” (LINS, 2004a, p. 116)

O interessante é notar que esse comportamento não é intrínseco de alunos e alunas da Educação Básica.

Os números complexos demoraram a serem aceitos como números por matemáticos que eram referência na época, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a “unidade imaginária” e os números desse novo conjunto, os “complexos”. Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão (ou estranhamento) – irracionais eram os “inexprimíveis” e “quantidades fictícias” nomeavam os negativos.

Isso ocorreu, pois, a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roque (2012) de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de entidade abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confortáveis e, por consequência, aceitas socialmente.

O modelo nomeia como descentramento a ação que “passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo.” (OLIVEIRA, 2012, p. 214).

A respeito do processo de descentramento como ação docente, faz-se necessário ter em mente que

> Quando priorizamos manter a interação em sala de aula, criando um espaço comunicativo, a utilização de qualquer situação (seja ela realista ou não) não se sustenta se não houver, por parte do professor, a tentativa de compreender de onde o aluno fala, se não se buscar entender o "intrinsecamente" desse aluno, que é o exercício do descentramento. (OLIVEIRA, 2012, p. 208)

Já para a formação docente,

> Com o movimento de descentramento pretende-se que o professor/futuro professor de Matemática evite naturalizar seus modos de produção de significados (o que poderia impossibilitá-lo de conseguir ler o estranhamento acontecendo em sua sala de aula) e, com isso, possa direcionar suas ações na tentativa de criar em sala de aula um espaço comunicativo (LINS, 1999 apud OLIVEIRA, 2012, p. 212)

A centralidade dessas duas noções, de estranhamento e descentramento, justifica a criação de cursos como os que foram propostos nas dissertações que aqui utilizamos como referencial e na que propomos nessa dissertação para um Curso de Variáveis Complexas.

Por meio das noções gerais descritas e de outras mais internas à teoria, reunimos ferramentas para desde a criação de nosso material didático até a análise dos resíduos de enunciação que obtivemos na aplicação de nosso produto educacional.

No próximo capítulo, descrevemos nossa metodologia de pesquisa e também metodologia proposta para um Curso de Variáveis Complexas para a Licenciatura em Matemática, caracterizando nosso produto educacional.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, composto de duas seções, discutiremos na primeira os aspectos relativos à caracterização de nossa pesquisa, abrangendo nossa abordagem metodológica, ambiente de pesquisa, sujeitos da investigação e método de coleta dos resíduos que foram posteriormente analisados.

Na segunda, apresentamos a caracterização metodológica da disciplina de Variáveis Complexas formatada durante a pesquisa, pontuando as decisões tomadas quanto à postura docente nesta sala de aula, o material didático utilizado e o formato de avaliação utilizado.

4.1 Caracterização da pesquisa

Nossa metodologia de pesquisa é caracterizada por uma abordagem qualitativa de investigação, na direção definida por Bogdan e Biklen (2013). Esses autores demarcam uma pesquisa como sendo qualitativa desde que ela se aproxime das cinco características listadas abaixo:

> I) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. II) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. III) Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. IV) Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente. V) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 47-51).

Além de notarmos uma identificação de nossa pesquisa às características citadas acima, somos capazes de relacionar um dos focos de nossa pesquisa (tornar o texto matemático um recurso de demanda de produção de significados por parte discente para vivenciar o estranhamento) ao objetivo de uma pesquisa qualitativa, que pode ser visto como a ação de tentar "compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados[3] e descrever em que consistem estes mesmos significados." (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 70).

Nosso ambiente de pesquisa foi composto por uma sala de aula do Ensino Superior em um curso de Licenciatura em Matemática. Essa sala de aula estava localizada em um campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais. As aulas da disciplina em que fizemos nossa observação na pesquisa de campo ocorreram na modalidade presencial, duas vezes na semana, totalizando quatro aulas semanais (4h) de encontro.

---

[3] Nossa concepção acerca do entendimento que é significado é baseada no MCS e, por este motivo, preferimos a utilização do termo produção de significados ao invés de construção de significados.

O professor regente dessa disciplina e coordenador do curso de Licenciatura em Matemática na ocasião possuía pesquisa em andamento sobre temáticas intrínsecas ao assunto de Variáveis Complexas. Assim, a pesquisa de campo foi realizada em colaboração de modo a atender os dois projetos de pesquisa.

A disciplina que observamos, intitulada Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura, foi ofertada como uma disciplina eletiva para estudantes da Licenciatura em Matemática desse Instituto, possuindo ementa a necessária para a ocorrência das duas pesquisas complementares.

Bogdan e Biklen (2013) afirmam que independente do material utilizado para a coleta em campo, como caderno de campo, equipamento de vídeo ou de áudio, as informações e dados coletados sempre passam pelos olhos de quem realizou a pesquisa no momento de análise, "sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise" (BOGDAN e BIKLEN, 2013 , p. 48).

Essa concepção reforça a importância do contato direto não só com o universo da pesquisa, mas com os sujeitos dessa pesquisa enquanto ela acontece. Aplicamos um Questionário e uma Avaliação Diagnóstica, anexos I e II deste trabalho – respectivamente, antes das aulas de fato começarem. Nossa intenção com esses dois recursos foi de conhecer parte do histórico acadêmico e leituras das(os) estudantes participantes, além de recolher informações que poderiam ser úteis no momento de análise dos resíduos de enunciação das tarefas finais da disciplina.

Assim, as próprias tarefas aplicadas nos serviram de recurso para coleta de resíduos de enunciação por parte das(os) participantes da pesquisa, além dos registros do caderno de campo, realizados nos dois encontros que foram possíveis no semestre de aplicação da pesquisa.

Visto que precisaríamos utilizar registros próprios das(os) participantes, além de relatos observacionais, diretrizes relativas à ética precisaram ser aplicadas em nossa pesquisa.

Segundo Bogdan e Biklen (2013), existem dois pontos cruciais para uma investigação com sujeitos humanos estar de acordo com preceitos de proteção de informações. O primeiro é que as e os "sujeitos aderem voluntariamente aos projetos de investigação, cientes da natureza do estudo e dos perigos e obrigações nele envolvidos." (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 75). Para isso, um Termo de Compromisso Ético (apêndice III) foi redigido e assinado por todas e todos os participantes da pesquisa, tendo sido escrito e revisado pela pesquisadora e pelo professor regente da disciplina que nos serviu de investigação.

O segundo ponto indica que as e os "sujeitos não são expostos a riscos superiores aos ganhos que possam advir.". Em nosso Termo, garantimos o sigilo da identidade das(os) participantes, sendo necessária a indicação do pseudônimo para utilização no texto dissertativo, já indicando o caso de haver publicação dos resultados da pesquisa para além da dissertação.

Para Lins (2012), o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, “em ação”, por isso dizemos que a construção teórica do MCS visa servir de ferramenta para pesquisadores(as) e professores(as) produzirem seus significados a partir da análise dos resíduos de enunciação que possuem, sejam esses resíduos os registros produzidos em meio a uma pesquisa, um desenho ou enunciações feitas por alunos e alunas em meio a uma atividade proposta em sala de aula (mantendo o conceito de “atividade” no sentido proposto por Leontiev).

É preciso ressaltar que a análise feita pelo pesquisador ou pesquisadora, a partir dos resíduos de enunciação coletados, precisa ser realizada a partir de uma leitura positiva dos resíduos.

> Para nós, a Matemática do professor de matemática é caracterizada por nela serem aceitos, além dos significados matemáticos, significados não matemáticos. Há os tradicionais exemplos, como o de que 'fração é pizza', 'decimais são dinheiro' e 'números negativos são dívidas'. Mas isto não basta, porque o professor não tem que dar conta apenas do que concorda com o que ele diz, com o que está 'certo'. O professor precisa ser capaz de ler o que seu aluno diz, mesmo que esteja 'errado', tanto quanto como quando está 'certo'. (LINS, 2004b, p. 3)

A leitura positiva visa uma imersão de quem está analisando ao que foi registrado, numa busca de entender de onde o sujeito enunciador está falando, ou seja, ao invés de analisar os resultados visando o que ali falta, precisa-se entender como esse sujeito opera e porque diz o que diz. Para essa imersão, contamos com as noções gerais do MCS que foram discutidas no terceiro capítulo desta dissertação.

Na sessão seguinte, explicitamos nossa proposta metodológica, dizendo da aplicação e formatação das tarefas até o processo avaliativo do Curso formatado.

4.2 Caracterização da disciplina

Nossa proposta para a metodologia de ensino para a disciplina, tomando como referência as premissas do Modelo dos Campos Semânticos, se distancia da ação docente que, enganada, acredita numa transmissão efetiva de conhecimento de uma pessoa para outra. Para nós essa prática não era possível. Conhecer a matemática como algo preconcebido e imutável não causaria o estranhamento aos licenciandos e licenciandas, seria apenas uma repetição do que acompanhamos que tem sido feito por anos e anos nas disciplinas matemáticas nas Licenciaturas em Matemática.

Queríamos proporcionar em nossa sala de aula aquele primeiro estranhamento, vivido pelos(as) matemáticos(as), quando ainda não sentiam segurança de manipular nem ao menos os números negativos, mas dessa vez vivenciado pelos licenciandos e licenciandas que tivessem o contato com o nosso material de variáveis complexas.

Para isso, precisariam se deparar com o desafio e, invés de aplicar as soluções já criadas, divulgadas e conhecidas pelo mundo matemático, precisariam por si só, e as vezes em grupo, elaborar uma estratégia em busca do entendimento. Em suas mãos estaria a necessidade de criação de uma nova ferramenta. Isto se relaciona com o nosso objetivo de investigação, era preciso analisar os resíduos de informações produzidos frente a temas de Variáveis Complexas. Logo, era de suma importância receber a reflexão discente, sem juízo de valor e sem intervenções ou cortes bruscos às linhas de raciocínio ali criadas.

Além disso, nossa pesquisa é de cunho qualitativo, abordagem essa que “exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.” (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 49). Nesse exercício de se ver como um(a) produtor(a) de significados, assim como em uma sala de aula tradicional, o diverso acontece.

Neste ponto, reforçamos a preocupação de que a tarefa possua um texto não-usual. Como Silva (2003) afirma, “o fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando.” (SILVA, 2003, p. 42). Logo, não basta criar um ambiente propício e confortável para que a pessoa fale, é preciso que o texto a ela entregue mobilize-a a resolvê-lo.

Para essa finalidade, desenvolvemos o que denominamos de fichas de trabalho. As fichas de trabalho são constituídas de tarefas, situações problema e textos para discussão, redigidos com atenção em duas características centrais de enunciados destinados à produção de significados: serem familiares e não-usuais. Segundo Silva (2003), um enunciado é “familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo.” (SILVA, 2003, p. 41).

Cada tema trabalhado na disciplina contava com até três fichas de trabalho. Nessa progressão, o processo de apresentação e desenvolvimento esperado do tema foi nomeado de ciclo.

A estrutura da primeira ficha de um ciclo contava com a introdução, em que textos com viés histórico eram apresentados. Este é um recurso utilizado para aproximar o leitor do contexto em que surgiram as primeiras discussões acerca do que seria tratado à diante.

Nas fichas seguintes ao primeiro encontro de um ciclo, a introdução passava a desempenhar a função de recapitulação da ficha anterior, muita das vezes realizando a conclusão da antiga discussão, não deixando de instigar o que viria posteriormente.

Seguindo da introdução, o problema a ser investigado e resolvido era posto. A partir deste momento, o desenrolar da resolução era iniciado individualmente para, em um momento seguinte, ser proposto o trabalho em grupo. Após discussão em grupo, era aberta a discussão para a turma, em que diferentes legitimidades seriam expostas e negociadas. Justificamos metodologicamente essa ordem de produção e discussão a uma influência da Assimilação Solidária. Na AS,

> … quem "não sabe" fala, explica, e quem "sabe" faz perguntas. Se um aluno diz que entendeu, o resto do grupo deve perguntar de volta: "o quê você entendeu?" Apenas nas ocasiões de síntese, aquele que "sabe" explica. O sujeito falante deve ocupar a posição central da sua própria aprendizagem: "o sujeito é 'ouvido' e devolve-se a ele aquilo que se entende do que ele diz, o significado do que disse; é falando que se aprende, é ouvindo que se ensina". (SILVA, 1998, p. 163).

Essa dinâmica foi benéfica para nossa sala de aula devido nosso entendimento de como se dá a produção de conhecimento. O trabalho inicial em grupo pode, por vezes, beneficiar um modo de produção de significados, e nossa intenção era gerar a discussão dos diferentes modos que ali emergissem, por isso a opção de organizar o tempo nesses três momentos.

Porém, mesmo estabelecendo esta dinâmica, se a ordem de fala não for combinada previamente, um modo de produção de significados pode, ainda assim, ser beneficiado no momento de discussão em grupo, assim, é preciso propor um novo comportamento. No nosso caso, definimos que a ordem de fala fosse iniciada por quem tivesse dúvidas e incertezas, seguido por quem tivesse mais confiança de que a resposta obtida era a almejada na tarefa em questão.

Um ponto desafiador nessa dinâmica constituída é relacionado ao impulso docente de sanar as dúvidas e muitas vezes orientar nossa turma no caminho de uma solução por nós já conhecida.

É preciso ter em mente que esse comportamento, no ambiente que queremos criar com as fichas de trabalho, mina toda e qualquer produção de significados que esteja em uma direção diferente da nossa como regente da aula, pois "se para nós o significado produzido é a fala, não há como observarmos e interferirmos no seu processo de produção se não dermos voz aos nossos alunos." (OLIVEIRA, 2002, p. 100).

Nosso papel nessa sala de aula foi o de mediar a discussão e, no momento certo, apresentar uma maneira, a legitimada pelo matemático, de resolver e utilizar os conceitos matemáticos conhecidos academicamente, porém, "conduzir atividades que possibilitem ao aluno produzir significados exige também do professor certa experiência matemática, no que diz respeito ao lidar com possíveis significados produzidos para idéias matemáticas." (OLIVEIRA, 2002, p. 100).

Em outras palavras, é possível que, em algum momento, a discussão iniciada em um tópico de variáveis complexas seja redirecionada para uma discussão de função do 2º grau, o que não significa que devemos também saber discutir com a turma sobre todos os assuntos matemáticos que possam surgir, e sim que é preciso termos noção de que quando se ouve mais e fala menos, estamos abrindo portas para certa interdisciplinaridade.

A noção de tempo, de quando agir e quando interferir, tendo o Modelo como referencial, é adquirida com o uso, como dito por quem compartilha de nosso mesmo referencial teórico, estudar o Modelo é colocá-lo em prática.

A teoria matemática vigente era também apresentada e formalizada. Isso foi necessário para permitir a utilização das fichas não só como atividades em sala, mas também como texto básico teórico para uma disciplina. Isso implica que a teoria matemática envolvida num determinado ciclo está inserida nas fichas de trabalho programadas para essa discussão, o diferencial é o modo com que ela é apresentada, após os momentos de discussão e produção.

Esse movimento metodológico faz com que o andamento das discussões siga o desenvolvimento da turma. As definições nunca são apresentadas de antemão em um ciclo, a produção matemática da turma é uma prioridade, seguida do trabalho com a produção matemática vigente.

Destacamos desde já a importância da adaptação frente ao que ocorre em sala de aula. O produto educacional aqui desenvolvido não está fechado e finalizado, cada sala de aula possui suas próprias características e necessidades, sendo necessária uma leitura por parte docente daquele ambiente. A nossa proposta é uma das possíveis, e serve para mostrar que esse formato também é possível.

A avaliação do curso foi inspirada no trabalho desenvolvido por Baldino (1987, 1993b, 1994a, 1995c; Cabral, 1992), denominado Contrato de Trabalho.

O Contrato de Trabalho é um dos instrumentos integrantes da Assimilação Solidária (AS), tal qual

> caracteriza-se como proposta interventora na sala de aula, mudando o conceito de mérito, ou seja, instituindo valores que vão além do valor atribuído à competência de conteúdos. Considera-se, nessa abordagem, acoplado ao prêmio ao saber, o justo prêmio ao trabalho coletivo produzido em sala de aula. (SILVA, 1998, p. 157)

Utilizar os preceitos da AS para avaliação implica na projeção de uma avaliação por trabalho realizado. Isso significa que a produção ocorrida em sala de aula constitui instrumento avaliativo.

Vale ressaltar que, mesmo existindo discussões e produção em grupo, a avaliação/pontuação da disciplina seria contabilizada individualmente, proporcional ao número total de aulas da disciplina cursada. Em situações de ausência que não fosse por motivo de força maior, como em adoecimento, por exemplo, a pontuação da(o) discente ainda poderia ser contabilizada, desde que o material fosse produzido e entregue na aula seguinte, porém, a presença não era garantia de pontuação, já que a intenção avaliativa é o trabalho produtivo.

Esse formato de avaliação, ao mesmo tempo que fora do convencional para um curso de disciplina matemática, não é para ser considerado como um método de fácil aprovação. A produção frente uma nova metodologia, seja individual ou em grupo, é a demanda da disciplina, logo nada mais justo que a avaliação ser sobre a ação discente durante esse processo.

Ao adaptarmos nossa proposta metodológica às necessidades que visualizamos para um Curso de Variáveis Complexas, dividimos o tempo disponível de um semestre letivo em dois grandes momentos de estudo.

O primeiro momento era centrado no estudo de Geometria Analítica e Números Complexos, em que pudemos realizar nossa investigação e intervenção. O segundo momento foi destinado às Equações Algébricas e Funções Complexas, voltado para a investigação do outro pesquisador, também participante do Programa Linsiano.

Utilizamos textos acadêmicos para consulta, como o *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* (2012), de Tatiana Roque, e *Conceitos fundamentais da matemátic*a (2010), de Bento de Jesus Caraça para produção de nosso material didático, que constitui nosso Produto Educacional, composto por 10 tarefas (fichas de trabalho) inseridas em 5 ciclos, apresentadas a seguir na ordem de aplicação por nós escolhida, juntamente de seus respectivos objetivos.

No capítulo seguinte, relatamos nossa experiência na pesquisa de campo durante observação da disciplina para ensino de variáveis complexas para Licenciatura em Matemática, e acrescentamos à discussão nossa análise a partir dos resíduos de enunciação coletados em nossa aplicação do produto educacional.

5 A DINÂMICA DA SALA DE AULA

Neste capítulo, discutiremos a dinâmica da sala de aula em que ocorreu nossa observação da disciplina Introdução a Variáveis Complexas para Licenciatura. Nosso interesse esteve em identificar os elementos envolvidos nessa dinâmica entendidos como importantes na formação matemática, metodológica e epistemológica do futuro professor e professora de matemática. Com isso, afirmamos que a disciplina não foi concebida como apenas de conteúdo matemático, como sugere o ensino tradicional, as(os) estudantes vivenciaram uma experiência diferente em sala de aula.

Observamos as dimensões epistemológicas, metodológicas e cognitivas que envolvem os processos de ensino e aprendizagem. Em particular, nosso interesse esteve em avaliar e analisar as fichas de trabalho quanto a suas potencialidades para orientar o processo de ensino da disciplina de maneira alternativa a aulas exclusivamente expositivo-explicativas a fim de elaborar nosso Produto Educacional.

5.1 A história da disciplina

Nosso ambiente de pesquisa foi uma sala de aula de Ensino Superior, localizada em um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais.

A disciplina então acompanhada, intitulada Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura, foi ofertada como uma disciplina eletiva para estudantes da Licenciatura em Matemática desse Instituto. Os tópicos indicados na ementa foram divididos em duas temáticas relacionadas a variáveis complexas: números complexos e sua representação geométrica e funções complexas. Nossa pesquisa se debruçou no primeiro momento da disciplina, trabalhando com os conceitos de números complexos, operações com números complexos e representação geométrica deles.

Nossa pesquisa contou com nove participantes. Este grupo era composto por alunas e alunos da Licenciatura em Matemática desse Instituto, estudantes do 7º período do curso, identificados pelos seguintes pseudônimos: Cristina, Doronice, Jota, Juliana, Lero, Malu, Manoel, Nyna e Sandóra.

A disciplina inicia, no primeiro dia letivo, com a apresentação de cada estudante para a turma, seguida de uma breve discussão das motivações pessoais em cursar um curso de licenciatura. Em sequência, realizou-se a aplicação de Questionário Docente e de uma Avaliação Diagnóstica - apêndices I e II deste trabalho, realizada pelo professor regente da turma.

No segundo encontro demos início ao processo de ensino e o processo de produção de significados discente, à partir da aplicação da primeira ficha de trabalho. No tópico seguinte explicitamos os processos postos em marcha, junto do texto das tarefas e análise realizada pela leitura por nós realizada em contato com os resíduos de enunciação coletados nos encontros.

Pontuamos de antemão que os resíduos a seguir expostos são de quatro dos nove participantes. A escolha de Doronice, Jota, Lero e Sandora é justificada pelo volume de resíduos produzidos, já que foram as pessoas com menor número de faltas durante o período letivo de aplicação, possibilitando uma leitura com maior continuidade das produções individuais e coletivas.

A primeira ficha de trabalho constituída pela tarefa 1, denominada *Resolvendo Equações Algébricas*, visava discussão, decorrente de quatro equações algébricas propostas, do significado atribuído à expressão “resolver uma equação” e resolução das equações propostas. O processo de produção de significados das(os) discentes é deflagrado a partir da primeira tarefa proposta:

***

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0;$

b) $x^2 + 4 = 0;$

c) $x^2 - 12x + 36 = 0;$

d) $x^2 - 4x + 13 = 0.$

1. O que significa a expressão matemática ”resolver uma equação”?

2. Resolva as equações acima.

3. Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?

***

Com essa discussão, tínhamos como objetivo observar o que os alunos podiam falar sobre resolução de equações e gerar a necessidade de estender o conjunto dos números reais, de modo que as equações admitam solução.

A motivação da discussão de propriedades do conjunto dos números reais esteve presente ao longo dos ciclos seguintes desde este primeiro, não só a fim de estabelecer um comparativo com o novo a ser desenvolvido, mas também porque acreditamos que, ao estudar o novo, aprendemos mais também sobre o que consideramos conhecido, no caso, os números reais. Para a primeira questão, a respeito do significado de “resolver uma equação”, tivemos as seguintes enunciações:

Lero: Confirmar a igualdade.

Jota: Significa encontrar (ou não) o valor ou valores que tornam uma expressão de um lado da igualdade equivalente ao outro.

Doronice: Expressão matemática é uma combinação matemática que define a igualdade da equação.

Sandora: Existem três coeficientes a, b e c, onde o coeficiente angular a, determina se a equação é crescente ou decrescente. O delta pode ser $\Delta = 0$, única raiz real; $\Delta < 0$, não existe raízes reais e sim complexas; $\Delta > 0$, existem duas raízes reais.

Lero, Jota e Doronice, ao produzirem seus significados, sugerem novos objetos relacionados à parte constituinte de uma equação, tais como a igualdade e expressão matemática. Não apontam que manipulações podem ser realizadas, mas a necessidade de definir/confirmar uma igualdade.

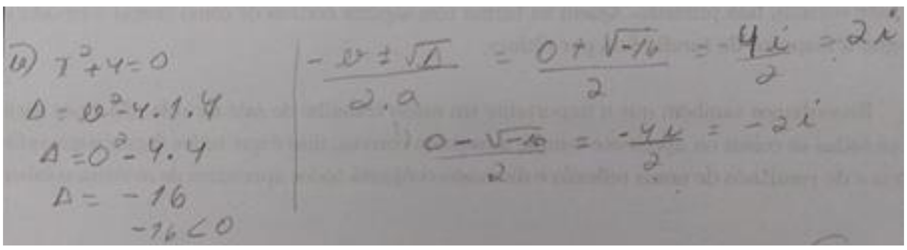
Sandora já produz significado para um tipo específico de equação, as de 2º grau. Acreditamos que sua direção decorre da exposição de quatro equações de 2º grau na própria questão, mas ainda assim a exposição de suas crenças-afirmações não indica sua produção de significados para o que significa resolver uma equação.

Após indagação, houve o momento dedicado a resolução da tarefa das quatro equações. Nosso propósito era o de fazê-los reencontrar uma situação comum no estudo de equações do segundo grau, que é o surgimento de raízes quadradas de valores negativos – casos das letras b) e d).

Nesses dois casos específicos, Lero afirma não ser possível resolver a partir do momento que se depara com as raízes negativas.

Jota e Sandora justificam de outra maneira, indicando que esses casos são de equações que não possuem raízes reais ao calcularem o valor de Δ e encontrarem valores negativos. Ambas as enunciações são condizentes com o que responderam na questão anterior. Jota diz que resolver significa encontrar ou não os valores que satisfazem a igualdade, ou seja, o fato dele não ter encontrado não implicou no apontamento de ser impossível resolver as equações. Entretanto, Sandora em nenhum momento afirmou que o encontro ou não de raízes implica em ter resolvido uma equação. Ainda assim, suas afirmações podem ser lidas como estipulações locais, já que a forma de operar na segunda questão foi baseada na afirmação realizada anteriormente.

Doronice é a única participante que não encerra os cálculos ao encontrar $\Delta < 0$, utilizando inclusive notação de números complexos, ainda não apresentada por nós, na manipulação para encontro de duas raízes complexas como solução. Porém, ao solicitarmos na discussão final que Doronice falasse sobre o surgimento do índice i em seus cálculos, nos respondeu que "a gente não sabe explicar, mas sabe aplicar".



Doronice e Sandora são participantes que já haviam cursado disciplina intitulada Trigonometria e Números Complexos. Por isso, ao analisarmos o questionário oferecido para a turma, já contávamos com a possibilidade de obtermos resíduos de enunciação que apontassem a existência do conjunto dos números complexos, mas é perceptível a diferença dos significados produzidos por cada uma à respeito deste conteúdo ao analisarmos seus resíduos de enunciação.

Em nossa leitura, Sandora utiliza a noção de números complexos como uma justificativa para a existência de raízes quadradas de números negativos; Doronice utiliza essa mesma noção não só para justificar a existência, mas também para manipular os cálculos até a notação própria desse "novo" conjunto.

Nosso último questionamento dessa primeira ficha motivava os participantes a refletirem a partir das resoluções individuais e do grupo, e em seguida apontarem as informações que pode-se obter à partir dessas resoluções.

Lero: Eu não consegui chegar em um resultado final da igualdade em algumas equações.

Nossa leitura perante os resíduos de enunciação de Lero é de que pode existir um limite ou obstáculo epistemológico em sua produção de significados. Lero não afirmou que as soluções não existem apenas no conjunto dos números reais, apontando a possibilidade de existência em um conjunto numérico ainda desconhecido, mas sim que a resolução é impossível, ou seja, até esse momento ele não havia criado/definido objetos que tornassem possível as resoluções propostas.

Nossa leitura partindo da escrita de Sandora nos aponta também para uma noção de que, se as raízes não forem reais, não podem ser consideradas uma solução:

Sandora: O delta vai determinar se a equação terá raízes ou será complexa.

A afirmação nos aponta para uma possível distinção entre raiz e resultado, partindo do princípio de que um resultado complexo não é considerado uma raiz, sendo apenas um resultado para a equação.

Doronice: Utilização de método sem compreensão.

Doronice, que até o momento líamos como a participante que havia produzido significados relacionados ao conjunto dos números complexos nos faz refletir a partir de sua enunciação se a manipulação automática, meramente mecânica, poderia ser considerada como conhecimento produzido. Porém, na ausência de justificação, concluímos a leitura de que é uma crença-afirmação.

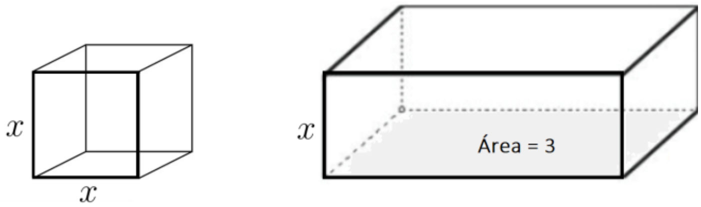
Para o **Ciclo 2**, tomamos a posição metodológica de definir os números complexos pela motivação da necessidade de construção de um novo conjunto, à partir de um problema geométrico apresentado.

Assim, no segundo ciclo, dividimos a discussão em duas tarefas, *Tarefa 2.1 – Um problema geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico*. O objetivo dessa tarefa é uma tentativa da(o) estudante observar, em uma situação geométrica, a existência de uma raiz complexa para analisarmos a sua produção de significados. Segue abaixo o problema motivador.

***

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico[4]

Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo.



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que V = V' + 1 na tabela abaixo:

X	*V*	*V'+ 1*
1		
2		
3		
4		

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

***

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0), \qquad (1)$$

cujas raízes podem ser escritas sob a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad (2)$$

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado discriminante) for negativa? Neste caso a radiciação não é possível em R, por consequência a expressão das raízes (2) não tem significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindus e árabes não tinha passado despercebido este caso embaraçoso. Mas sempre que ele se dava, o problema concreto que tinha dado origem a equação, via-se que era um problema

[4] Texto e tarefas do segundo ciclo foram adaptados de CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o problema não tinha solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado porque essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse como resolver as do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebristas italianos, herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resolução.

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), empregando a linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (3)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$*, reduz-se a equação (3) à forma*

$$y^3 + ay + b = 0 \qquad (4)$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \qquad (5)$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e mais grave que se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à resta do cubo. Determine x de modo que V = V' + 1.

Como $V = x^3$ *e* $V' = 3x + 1$*, o problema leva imediatamente à seguinte equação:* $x^3 = 3x + 1$*, que é da forma (4).*

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}; \frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}; \frac{a^3}{27} = -1; \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$*. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$*, mas esta raiz não existe.*

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da experiência anterior concluiríamos que a não existência da raiz de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ *quer dizer que o nosso problema é impossível.*

Porém, uma análise mais detalhada sugere que o problema proposto não é impossível. De fato, quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume $V = x^3$ *é também pequeno e menor que a soma 3x + 1, mas, à medida que x aumenta V vai se aproximando de V' + 1 = 3x + 1 e chega mesmo a ultrapassá-lo, por exemplo, para x = 1, temos V = 1 e V' + 1 = 4, mas para x = 2, temos V = 8 e V' + 1 = 7. Conclui-se deste raciocínio que deve haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da equação do* *problema: $x^3 = 3x + 1$. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida entre 1, 8 e 1, 9 visto que para x = 1, 8; V = 5, 832 < V' + 1 = 6, 4 e para x = 1, 9, V = 6, 859 > V ' + 1 = 6, 7.*

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos calculá-la.

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

***

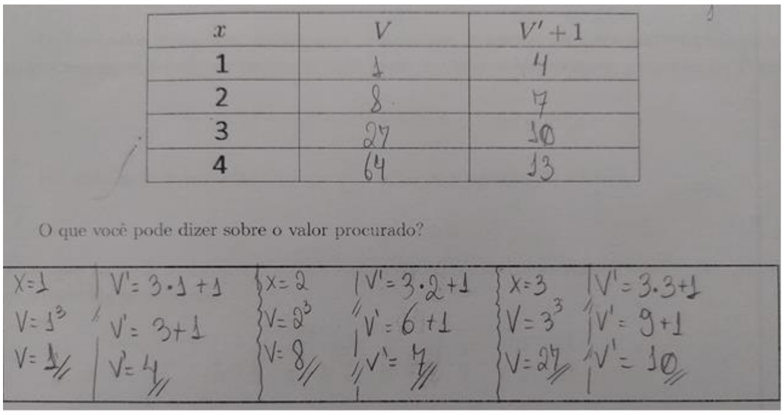
Nosso problema motivador pode ser simplificado por uma equação. Esta escolha pode ser vista como mais do que já é realizado, já que a existência dos números complexos é normalmente motivada em textos didáticos, considerando o conhecimento relacionado aos números reais, como uma manipulação algébrica tendo como finalidade o encontro de uma solução para uma equação que, até pouco tempo, considerávamos não existir.

Porém, o estranhamento aqui gerado é justamente por não apresentarmos uma equação sem contexto. A equação é proveniente de um problema real, palpável, envolvendo uma medida linear. "Se podemos medir o comprimento dessa aresta, como encontrá-lo através de uma equação considerada sem solução?", ou ainda, "Se o valor de x precisa estar compreendido entres 1,8 e 1,9, que são dois valores reais, porque não encontramos x como uma solução também real da equação?"

A questão final desse ciclo aponta para o traçado de uma estratégia, é preciso entender o que é o problema e o que precisa ser manipulado, ou o que está impedindo a manipulação, para em seguida elaborar um método de resolução. Esperávamos obter resíduos de enunciação na direção da insuficiência de ferramentas conhecidas, pelo conjunto dos números reais, que permitam a resolução da situação proposta.

Iniciada a produção da Tarefa 2.1, constatamos uma primeira "dificuldade", relacionada ao cálculo do volume de um paralelepípedo. Neste momento a intervenção docente foi mobilizada, e como o objetivo da lista não era a utilização da fórmula do volume em si, e sim a comparação de seus resultados, não vimos problema em motivá-los a discutirem sobre qual seria o formato dessa tal fórmula a ser utilizada.

Lero não produziu significado na direção que imaginávamos para a primeira demanda solicitada. Ao indagarmos na Tarefa 2.1 sobre o que poderiam dizer sobre o valor procurado após preenchimento da tabela, Lero apenas indicou formalmente os cálculos realizados.



x	V	$V'+1$
1	1	4
2	8	7
3	27	10
4	64	13

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

X=1	V'= 3·1 +1	x=2	V'=3·2+1	x=3	V'=3·3+1
V= 1³	V'= 3+1	V=2³	V'=6 +1	V=3³	V'= 9+1
V= 1	V'= 4	V=8	V'= 7	V=27	V'= 10

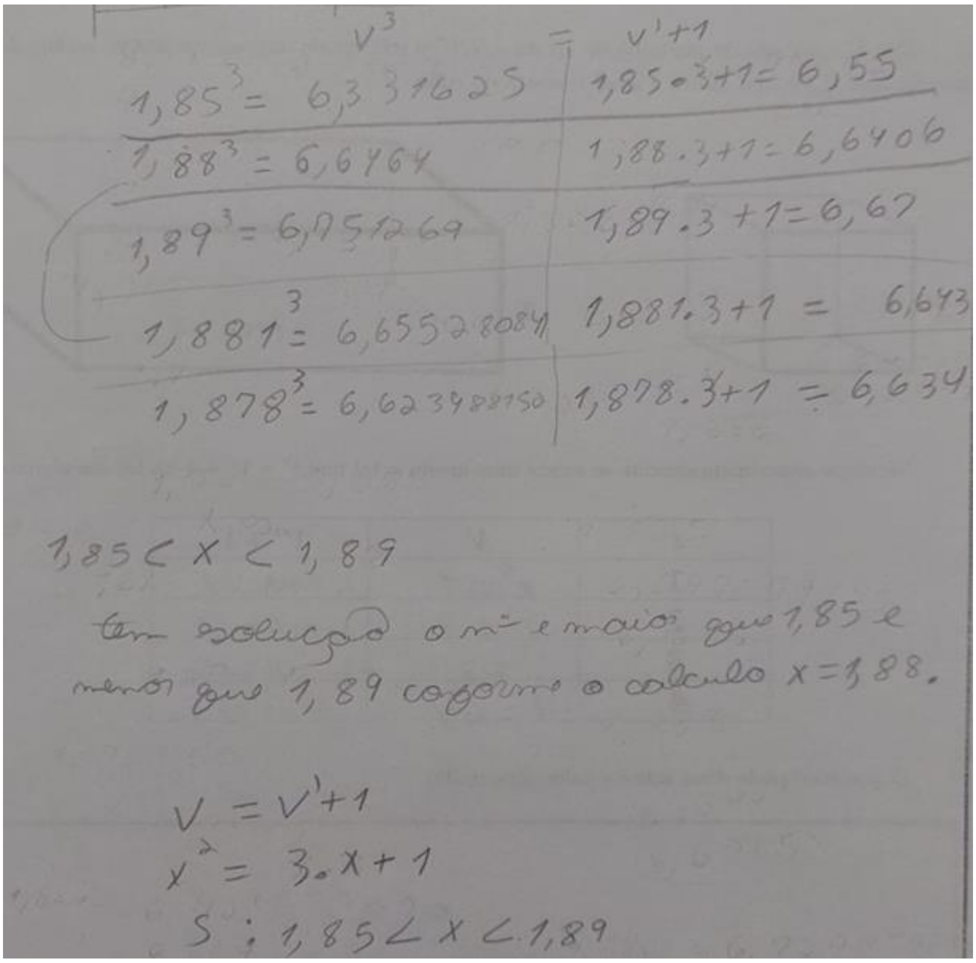
Jota, Sandora e Doronice também indicam seus cálculos na tabela fornecida, mas apontam certa previsão para o valor x de nosso interesse, ao notarem pelos seus cálculos a mudança de comportamento de quando x = 1 para quando x > 1.

Jota: O valor de x está próximo da raiz de 3.

Sandora: O que eu percebo é que o valor de x está próximo quando x está entre 1 e 2.

Doronice: Tem solução, o número é maior que 1,85 e menor que 1,89. Conforme o cálculo x = 1,88.

Doronice inclusive indicou formalmente a equação algébrica referente à situação enunciada, como podemos notar no recorte de sua ficha a seguir.



V^3	$= V'+1$
$1,85^3 = 6,331625$	$1,85 \cdot 3+1 = 6,55$
$1,88^3 = 6,6464$	$1,88 \cdot 3+1 = 6,6406$
$1,89^3 = 6,751269$	$1,89 \cdot 3+1 = 6,67$
$1,881^3 = 6,65528084$	$1,881 \cdot 3+1 = 6,643$
$1,878^3 = 6,623988150$	$1,878 \cdot 3+1 = 6,634$

$1,85 < x < 1,89$

tem solução o nº e maior que 1,85 e menor que 1,89 conforme o calculo x = 1,88.

$V = V'+1$

$x^3 = 3 \cdot x + 1$

$S: 1,85 < x < 1,89$

Realizamos então em seguida a leitura da Tarefa 2.2. Este momento transformou a expectativa da turma frente ao que estavam manipulando. Na Tarefa 2.1, por meio de testes individuais e posterior discussão em grupo afirmaram existir soluções reais para o valor x de interesse, inclusive apontando intervalos para melhor demarcação desse valor até então desconhecido.

Quando a produção do matemático para o mesmo problema é exposta, surge o questionamento geral, como através da fórmula da equação do 3º grau aparentemente não existe uma raiz real pela presença da raiz quadrada de – ¾ sendo que, por aproximação, foi possível determinar um intervalo de solução para o problema proposto?

Com essa nova situação instaurada, Lero enuncia que achava mais fácil então encontrar a raiz procurada por aproximação, já que não tinha conhecimento para achar uma solução. Em sua lista, relata:

Lero: O problema fica menos difícil de responder se for por eliminação, utilizando várias contas com valores aproximados ao resultado da equação. Concluo que eu não possuo conhecimento para resolver tais problemas.

Mesmo com a sugestão da própria tarefa de que a altura solicitada (valor de x) está compreendida em um intervalo numérico muito próximo do que alguns estudantes apontaram na discussão da primeira tarefa, o contato com a resolução matemática muda a direção da produção de significados, focando a atenção em dizer sobre a raiz quadrada de – ¾, quando questionados sobre "*Qual é então o problema que temos que resolver?*".

Jota: O conjunto dos reais não tem um número que atenda à esta raiz, então teria que existir outro conjunto.

Sandóra: No problema proposto uma maneira que vejo é retirar o $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ da raiz.

Doronice: Podemos realizar o desmembramento $\sqrt{\frac{-3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{-1}$.

Como continua raiz negativa $\sqrt{-1}$ crio uma unidade imaginária (i) ficando $\sqrt{-1}$ = i. Dessa forma consigo realizar a operação tomando $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot$ i.

Entendido o problema apresentado e sabendo da necessidade de desenvolvimento de novas ferramentas, tratamos no **Ciclo 3** da produção de um novo conjunto numérico e o que isso mobiliza.

Utilizamos de uma discussão à partir das necessidades nascidas pelas "insuficiências" de outros conjuntos numéricos ao longo da produção matemática a fim de motivar a produção discente. Duas tarefas foram desenvolvidas, *Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico* e *Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)*, a fim de inserir a turma em um ambiente de criação. A unidade imaginária, i, surge pela primeira vez em nosso material nesse ciclo.

***

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução de problemas não é um tema novo em Matemática. A muito tempo atrás, se verificou, por exemplo, que no conjunto dos números naturais, que denotamos por IN, a adição de dois números é uma operação sempre possível em IN pois seu resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a subtração.

A subtração $10 - 2$*, por exemplo, leva à adição pois a operação equivale a perguntar: qual é o número natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação* $x + 2 = 10$*. Cuja solução, existindo em IN, é a resposta procurada; um número natural.*

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturais quaisquer?

Suponha que para respondermos a essa pergunta comecemos a fazer experimentos com diferentes números e chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o que podemos concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número $x \in IN$ *tal que* $x + 10 = 2$*? Concluiremos que esse número não existe.*

Logo, concluímos que em IN a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a concluir que a equação $x + b = a$ *nem sempre tem solução em IN. Essa limitação do conjunto IN não passou despercebido historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.*

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto IN, construir um conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possível ampliar o conjunto IN, construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação $a + x = b$ *tenha sempre solução, quando a e b pertencem a IN?*

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteiros, denotado por Z.

O problema que passaremos a discutir é análogo ao anterior. A nossa questão atual é: será possível construir um conjunto numérico, ampliando o conjunto R, dos números reais, no qual a raiz de um número negativo – como na equação $x^2 + 1 = 0$ *– tenha solução nesse novo conjunto?*

Questão: Entendido nosso problema, devemos discutir (a) o que devemos fazer? (b) Por onde começar?

***

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto R são:

(i) Resolver as deficiências que o conjunto numérico anterior. No nosso caso, resolver o problema das equações que não possuem solução em R, ou seja, que possuem raiz negativa.

(ii) Preservar, ao máximo, as propriedades do conjunto R na construção do novo conjunto. Isto quer dizer, que é desejável, que tentemos manter as propriedades operatórias dos números reais, tais como, a associatividade e a comutatividade das operações de adição e multiplicação em R, a distributividade da multiplicação em relação à adição e todas as outras propriedades dos números reais.

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a ampliação do conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso consideremos a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x^2 = \sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi criar o símbolo i, chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R.

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejamos alguns exemplos:

Seja $a \in R$, $a > 0$, $x = \sqrt{-a^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{(-1) \cdot a^2}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow x = ia$$

Assim, operamos com o novo número i "como se ele fosse um número real", isto é, efetuando as propriedades operatórias dos números reais. Por exemplo,

$$(5i)^2 = (5i) \cdot (5i) = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25.$$

Questão:

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ *e* $x^2 - 4x + 13 = 0$*. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.*

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conjunto?

(c) Chamaremos a esse novo número de número complexo e lembrando que representamos o conjunto dos números racionais pela representação:

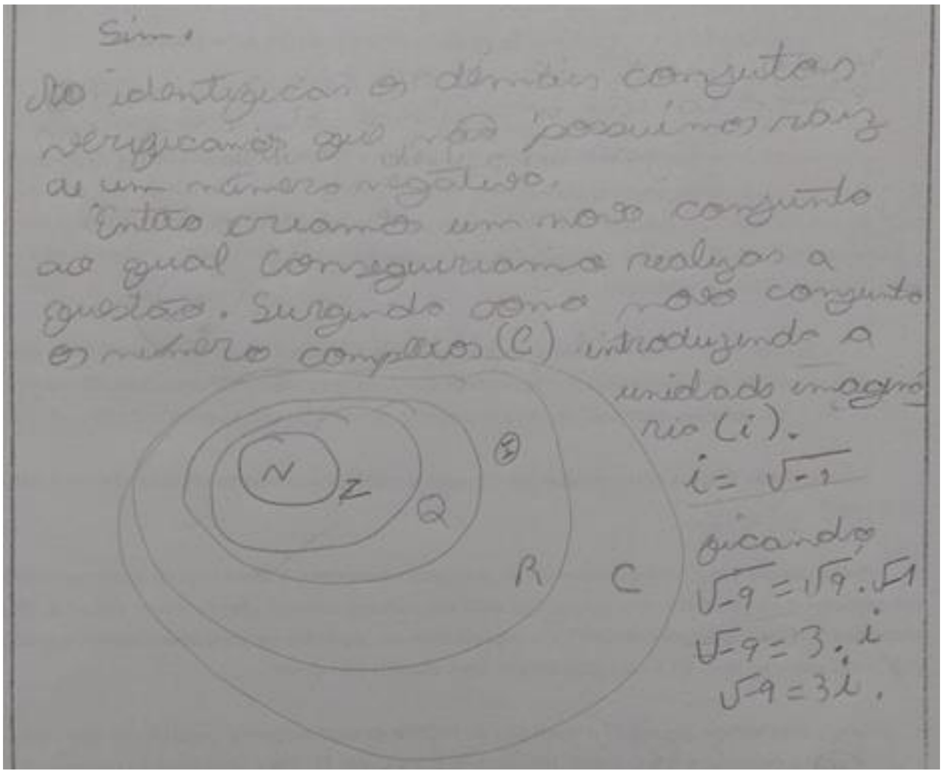
$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

A partir da questão (a) "O que devemos fazer?" e da questão (b) "Por onde começar?", recolhemos os seguintes resíduos de enunciação.

Jota: Entendendo que não existe raiz de índice par de números negativos em R, poderíamos tentar "corrigir" este fato utilizando algum argumento algébrico que esteja nos reais.



Doronice: Sim. Ao identificar os demais conjuntos verificamos que não possuímos raiz de um número negativo. Então criamos um novo conjunto ao qual conseguiríamos realizar a questão. Surgindo como novo conjunto os números complexos C introduzindo a unidade imaginária (i). i = raiz quadrada de -1 ficando raiz quadrada de -9 = raiz de nove vezes raiz de -1 = 3 vezes i = 3i.

Lero: Para que a equação informada acima possa ter um resultado “aceitável”, será necessário a utilização de um conjunto que é um tanto complexo, pois historicamente sem a utilização deste “novo” tipo de conjunto, o conjunto dos números complexos C, tal resultado não seria possível, no caso da equação o valor que poderia atender a necessidade seria raiz quadrada de -1.

A partir da forma que Lero enuncia sua conclusão, realizamos a leitura de que o que ele enuncia não é algo ainda legitimado por ele. Ele aponta o que é necessário de ser feito mas não incorpora esse resultado como algo em que ele acredita ou compartilha como verdade, diferente das enunciações de Doronice e Jota, que utilizam as expressões “verificamos”, “criamos”, “entendo”, “poderíamos”.

Após motivarmos a investigação do que é necessário para o novo conjunto a fim de satisfazer as necessidades matemáticas, damos certa direção às construções ao apresentarmos a solução criada pelos matemáticos, que é a unidade imaginária.

Apontamos essa sequência de tarefas como exemplo de nossa escolha metodológica, primeiro se constrói, depois tomamos conhecimento do que o matemático construiu.

***

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e $x^2 - 4x + 13 = 0$. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conjunto?

(c) Chamaremos a esse novo número de número complexo e lembrando que representamos o conjunto dos números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

Na primeira questão após formalização do cálculo com raízes quadradas de números negativos obtivemos resíduos de enunciação quase que idênticos, dos quais identificamos a legitimação pela parte discente da operação com a parte imaginária i, devidamente identificada e operada como o matemático define.

Entretanto, na representação mais geral de um número complexo tivemos divergências.

Jota: (b) xi e x + yi

(c) C = {a + bi; a, b pertence R e I = raiz quadrada de -1}

Jota aponta duas representações gerais, baseado nos resultados da questão (a), mas quando formaliza o conjunto dos números complexos apresenta a maneira mais geral possível de se representar. Lemos nesse caso que no primeiro momento havia um obstáculo epistemológico, ou seja, ele poderia produzir significados para a primeira demanda, mas não produziu da maneira esperada.

Notamos que ele poderia produzir significados, denotando como obstáculo e não limite, devido sua enunciação na questão seguinte, onde ele demonstra conhecimento legitimado pelo matemático a respeito do tópico em questão. Essa situação nos aponta novamente um cuidado a ser tomado na escrita de nossas tarefas ao motivar a produção de significados.

Doronice: (b) Representaria que os reais estão contidos no conjunto dos complexos tal que i é a unidade imaginária criada para satisfazer z = a + bi (a real e b imaginário).

(c) Símbolo = C, C = {a + bi; a,b pertence R e b diferente de 0 | i é o número imaginário}.

Doronice constrói uma representação mais geral na primeira questão, indicando ainda uma definição mais precisa para as constantes a e b, que é divergente da definição estabelecida na questão seguinte (b é um valor imaginário ou real?)

Lero: (b) ?

(c) C = {raiz quadrada de x: a menor ou igual a 0}

Lero não produz significado para nossa primeira demanda. Na segunda questão, nossa leitura indica que Lero produz significados para a direção de que um número complexo é apenas a parte imaginária, ou seja, apenas a raiz quadrada de um valor negativo.

O **quarto ciclo**, de tarefa única [*Tarefa 4 – Construção do novo conjunto numérico (parte II)*], foi utilizado para o trabalho de criação e manipulação de operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), além da validação, ou não, pela parte discente, de propriedades pertinentes à partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e existência de elementos neutro e simétrico.

***

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a "unidade imaginária" e os números desse novo conjunto, os "complexos". Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão – irracionais eram os "inexprimíveis" e "quantidades fictícias" nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de entidade abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confortáveis e, por consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam apresentadas algumas definições e verificadas se algumas propriedades de R continuam a valer em C.

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

a) Defina igualdade de dois números complexos.

b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em C.

c) Na operação de adição em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

d) Na operação de multiplicação em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

e) Em R é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é também válida em C.

***

Projetávamos que essa tarefa nos daria informações de como as(os) discentes estariam manipulando os elementos do conjunto a pouco construído, além da crença ou não crença do que se pode ou não fazer com os mesmos, a partir do que até ali foi discutido e apresentado.

As produções quanto a definição das operações de adição e subtração foram semelhantes, indicando a operação de parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária, como efetuamos em expressões algébricas, por exemplo, operando com semelhantes. Já a produção das definições de multiplicação e divisão trouxe elementos a serem discutidos.

Destacamos que nenhuma produção de participante aqui analisada utilizou apenas termos generalizantes, o que é interessante para discutir se a forma com que foi definida pela(o) participante é válida exclusivamente para o exemplo utilizado ou se é generalista.

Doronice e Sandora, por exemplo, definem a multiplicação de números complexos apenas como a multiplicação de um fator real por um fator complexo, e não de dois fatores complexos.

$$2(7 - 2i) = 14 - 4i$$

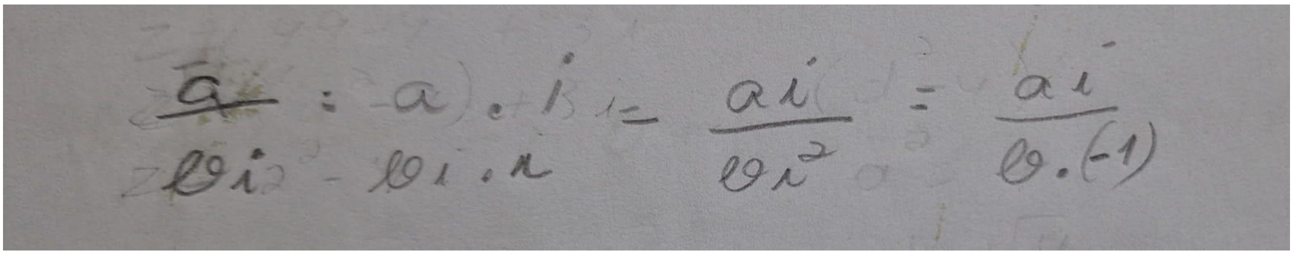
Jota já define a multiplicação de duas maneiras, uma semelhante ao processo utilizado na propriedade distributiva da multiplicação, e outro que mantém a forma de operar semelhante com semelhante utilizada para a adição e subtração.

$$(2 + 3i)x(3 + 2i) = 6 + 4i + 9i + 6i^2 = 0 + 13i$$

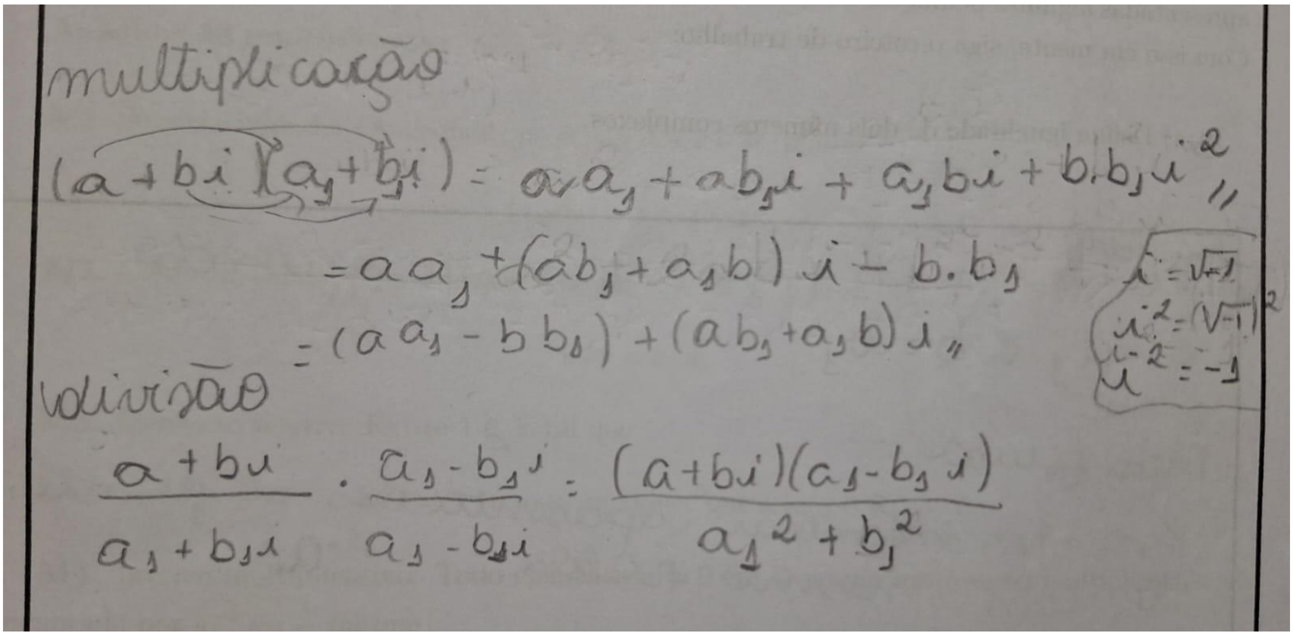
$$(2 + 3i)x(3 + 2i) = 6 + 6i^2 = 6 – 6 = 0$$

Porém, quando verifica na letra d) as propriedades da operação de multiplicação em C, utiliza da primeira definição para afirmar que a operação de multiplicação em C é associativa e comutativa. Essa escolha é interessante para nos questionarmos se Jota testou as duas definições e, como apenas a primeira verifica a comutatividade e associatividade, manteve essa verificação no papel, ou se ao notar que a primeira definição foi suficiente para verificar as propriedades já descartou a segunda produção. Esse comportamento reflete a produção matemática realizada por matemáticos por todos esses anos, o que é definido é assim porque só existe uma única representação ou porque é essa que funciona dentro do interesse do matemático?

Um elemento que não havia sido previamente apresentado à turma e que foi importante para a produção das verificações de propriedades da multiplicação foi o conjugado. Doronice e Sandora, que já haviam tido contato com a disciplina, lembravam da necessidade de reescrever a fração que indica a divisão de números complexos de forma que o denominador seja formado apenas de parte real. Em sua ficha, elas registram esse conhecimento partindo da forma geral a/bi :



A partir da discussão dessa definição, a turma foi motivada a pensar em um padrão generalista que permitiria reescrever uma fração complexa com denominador apenas real, chegando na representação registrada na ficha de Lero, que nesta aula dividiu sua produção com a participante **Malu:**



A noção de conjugado foi utilizada, mas não foi nomeada nem formalizada previamente, derivada do conhecimento de parte do grupo, sendo discutida e aperfeiçoada a partir de testes numéricos até uma formalização mais generalista. Entendemos o que ocorreu na aplicação desta tarefa como um ótimo exemplo do que pode acontecer em uma sala de aula que permite a troca entre estudantes e que põe em marcha a produção de significados a partir de uma demanda, e não apenas a partir de um conhecimento pronto e imutável.

Por fim, analisamos a produção discente nas tarefas do **Ciclo 5**. Composto de quatro tarefas (*Tarefa 5.1 – A representação geométrica do conjunto dos números complexos, Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss, Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss, e Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo),* pode-se dizer que o quinto ciclo teve o papel de inserir o Plano para permitir a discussão da representação geométrica de números complexos, ao mesmo tempo que encerrou o primeiro momento da disciplina e a fase de aplicação de nossa pesquisa.

Motivadas pela noção de que propriedades e características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, essas três tarefas, à partir de comparações com o conjunto dos números reais, demandavam produção de significados para a visualização dos números complexos agora em um Plano.

***

Tarefa 5.1 - A representação geométrica do conjunto dos números complexos

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos números complexos nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, como o conjunto dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser repelida, e até Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números inteiros e reais enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Álgebra.

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, propriedades e características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades são ganhas. Podemos dizer que a representação geométrica em C deixa visível a perda de ordenação[5] *de elementos no conjunto dos números complexos, que por consequência implica em uma disposição geométrica diferente da que estamos habituados.*

Os números reais estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identificados como todos os pontos pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente necessária para identificarmos a posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior que entre os reais.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse conjunto, como poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente os seguintes números complexos:

A. $2 + i$	B. $2 - i$	C. $-4 + 6i$	D. $\sqrt{3} + 2i$
E. 5	F. $-3i$	G. $1 + i$	H. $-1 + i$

***

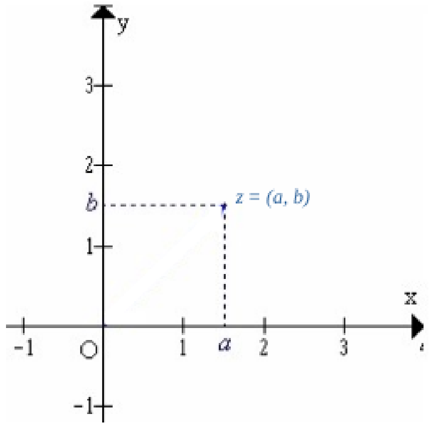
Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss

O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de Gauss. Wessel, um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números complexos - através de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Gauss como um grande matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais tempo para chegar na mesma conclusão que Wessel.

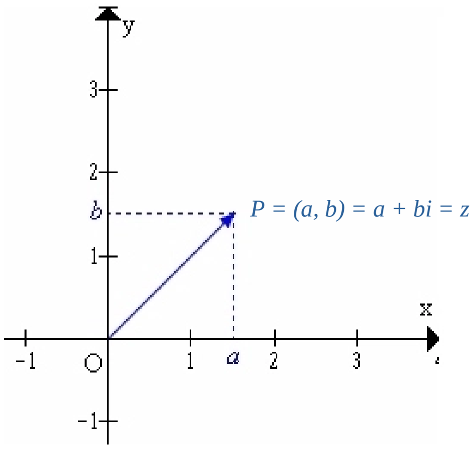
Nessa representação, cada número complexo $z = a + bi$ é identificado como um ponto do Plano de Gauss pelo par ordenado (a, b). O eixo Ox é o eixo real, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo Oy é chamado de eixo imaginário, onde representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando $z = a + bi$, tal que $1 < a = b < 2$.

[5] A lista de exercícios aplicada após do 4º Ciclo contava com um exercício de enunciado "Mostre, com base nas condições adotadas, que o número i não é positivo, não é negativo e não é igual a zero, ou seja, que as relações $i > 0$, $i < 0$ e $i = 0$ não têm significado.", auxiliando o entendimento da impossibilidade em ordenar os números complexos.



Além de localizarmos um número complexo z = a + bi no plano por coordenadas ditas cartesianas (a , b), interpretando z como um ponto P, podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela seta $\overrightarrow{OP}$.



Com a interpretação vetorial, é possível visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para os números complexos.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um número complexo, identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o módulo do vetor determinado pelo número complexo em questão.

A. 2 + i

B. 2 – i

C. - 4 + 6i

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula para o cálculo do módulo de um vetor gerado por um número complexo z = a + bi para quaisquer valores de a e b?

***

Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss

Texto para discussão

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilita visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses números, como a soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- ***Produto de um número complexo por um número real***

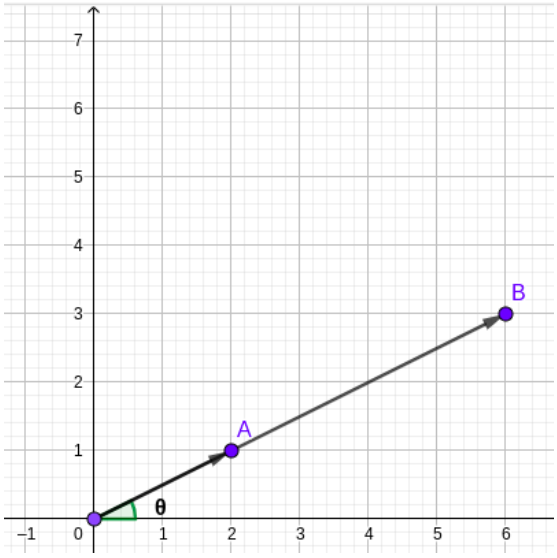
Considere $\boldsymbol{m} = 2 + i \in \mathbb{C}$ *e* $3 \in \mathbb{R}$. *O produto desses dois números resulta em* $\boldsymbol{n} = 6 + 3i$:

$$3 \cdot \boldsymbol{m} = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$\boldsymbol{m} = 2 + i = (2, 1) = A$

$\boldsymbol{n} = 6 + 3i = (6, 3) = B$



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada **homotetia** *– ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as características originais, como forma e angulação.*

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambos em relação ao eixo Ox das abscissas.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do plano, pode ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$|n| = \sqrt{a^2 + b^2} = |n| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Assim, verifica-se que o módulo de $\boldsymbol{n}$ *é três vezes maior que o módulo de* $\boldsymbol{m}$, *ou seja, ocorreu uma ampliação da distância. Agora precisamos verificar se a angulação do primeiro vetor,* $\boldsymbol{m}$, *foi preservada.*

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo 0 ≤ θ ≤ 2π, é chamada de **argumento** *desse vetor, ou melhor, argumento do número complexo dado – Arg (z). Essa angulação é demarcada no sentido anti-horário, a partir do eixo das abscissas Ox até o vetor indicado.*

A angulação θ de z complexo é tal que $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ *e* $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

Em relação a m, $cos(\alpha) = \frac{a}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\alpha) = \frac{b}{|m|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Em relação a n, $cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, como cos (α) = cos (β) e sen (α) = sem (β), α = β. Esse resultado nos indica que o argumento de ***m*** *é o mesmo argumento de* ***n****, logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!*

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último item da tarefa anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma de números complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos ***m*** *e* ***n*** *quaisquer. Em seguida identifique-os no plano e calcule o módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre* ***m*** *e* ***n*** *e identifique o resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localização no plano e o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano abaixo para uma melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano cartesiano com linhas pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]*

***

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de como calcular o módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de argumento, podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas também pelo que chamamos de ***forma trigonométrica****.*

A forma trigonométrica de um número complexo z = a + bi é escrita em função do argumento desse mesmo número, sendo um ângulo θ. Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um complexo:

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \ e \ sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$a = |z|cos(\theta) \ e \ b = |z|sen(\theta)$$

Como z = a + bi, podemos substituir o equivalente a a e b, encontrando o que chamamos de forma trigonométrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|cos(\theta) + |z|sen(\theta)i$$

$$z = |z|\left(cos(\theta) + isen(\theta)\right)$$

Vejamos um exemplo de escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica:

Seja $z = 1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, *então*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar Arg (z), então seguindo os cálculos…

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \;\; e \;\; sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{2} \;\; e \;\; sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e como } 0 \le \theta \le 2\pi,\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de |z| e Arg|z|, reescrevemos z como:

$$z = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de ***forma trigonométrica****, é equivalente ao que chamam de* ***forma polar de um número complexo****. Na forma polar ganhamos as coordenadas polares, (r, θ), em que* ***r*** *representa a distância do número z até a origem, ou seja, |z|, e θ o argumento desse mesmo número: Arg(z).*

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

m $= 2 + 2\sqrt{3}i$

n $= \sqrt{3} + i$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plano, indicando |z| e θ.

z $= 1 + i$

w $= \sqrt{3} - i$

x $= 2i$

***

Diferente dos resíduos produzidos nas tarefas dos quatro ciclos anteriores, os do quinto ciclo foram de difícil análise pela ausência de textos. Pelo relato do professor que ministrou a disciplina, as tarefas do quinto ciclo demandaram muitas intervenções docente, o que fez com que a metodologia que vinha sendo utilizada ao longo das aplicações fosse parcialmente modificada. Essa postura indica uma sala de aula viva e um material em construção, que é preciso ser adaptado para as necessidades das(os) discentes.

Interpretamos que a passagem da temática das operações para a temática da representação geométrica pode ter sido muito abrupta, necessitando um novo olhar para o material para que alterações sejam realizadas a fim de tornar o texto das tarefas não usual e familiar, como exercitamos para que assim fossem desde o início da confecção de nosso produto educacional.

O **sexto ciclo** realiza a transição dos dois momentos do Curso de Introdução às Variáveis Complexas desenvolvido. É composto de três tarefas (*Tarefa 6.1 – Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica, Tarefa 6.2 – Radiciação na Forma Trigonométrica e Tarefa 6.3 – Resolvendo o Problema Inicial),* que além de serem de extrema importância para as inferências das temáticas seguintes produzidas pelo trabalho de Tiago de Oliveira, também foram essenciais para a conclusão de nossa motivação inicial, o problema do volume, que após obtenção de todas essas ferramentas, ao longo dos 6 ciclos, pode ser efetuado.

Apresentamos apenas a *Tarefa 6.3 – Resolvendo o Problema Inicial*, a fim de expor o fechamento de nossa motivação inicial, que para resolução também contou com o "colocar a mão na massa" pela turma participante da pesquisa.

***

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação do 3º grau. A resolução desta equação pela fórmula de Cardamo-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao depararmos com a raiz quadrada de um número negativo.

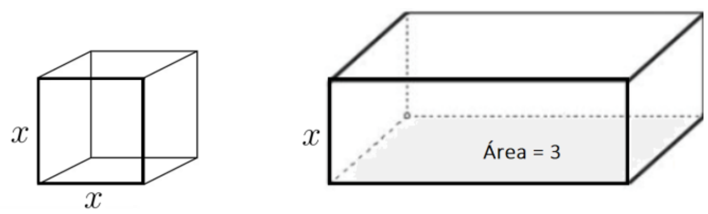
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém tivemos que interromper, novamente, a resolução quando chegamos no seguinte cálculo (envolvendo raízes cúbicas de um número complexo):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos através da forma trigonométrica. Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o volume de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo.



Encontre os valores da aresta x tal que V = V’ + 1.

Resolução: Como $V = x^3$ e $V' = 3x + 1$, o problema leva imediatamente `a seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma $y^3 + ay + b = 0$ e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. *e, portanto, a fórmula de resolução dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com vocês, encontrem a solução desse problema.

***

5.2 Nossa análise para além das fichas de trabalho

A questão de nossa pesquisa estava em torno da busca das características da disciplina Variáveis Complexas que caracterizassem a mesma como um curso em serviço da formação da futura e futuro professor de matemática.

Ao questionarmos as(os) participantes sobre o que acharam da metodologia baseada em fichas de trabalho, obtivemos as seguintes respostas:

Doronice: “Legal pois proporciona uma análise crítica.”.

Jota: “Achei muito boa, pois ela permitiu analisar com calma os aspectos relacionados ao conteúdo, como o aspecto histórico em torno do problema dos volumes que deu início a discussão do conteúdo, isso para mim sem dúvida agregou ao conhecimento adquirido.”

Lero: “Interessante e bastante didático”.

Sandora: “Legal, porém fazer questões sem compreender o conteúdo abordado, perde muito tempo.”.

Percebemos que a experiência foi positiva para a turma quando as respostas são realmente relacionadas à forma com que o conteúdo foi apresentado, e não sobre os tópicos que foram ou não aprendidos - o aspecto metodológico sobressai.

Como apontado por Sandora, entendemos que na prática docente o tempo sempre será nosso adversário, seja na prática, seja no planejamento. Porém quando estamos em um processo de ensino e aprendizagem, nos questionamos, o que seria perder tempo?

Ao questionarmos as(os) participantes sobre quais as vantagens e desvantagens que viram nessa metodologia, obtemos as seguintes respostas:

Jota: “As desvantagens acredito que seja o tempo, pois, toda ficha necessita do tempo para resolver, discutir e isso talvez atrapalhe em praticar o conteúdo”.

Sandora: “Desvantagem: perda de tempo quando não compreende os conteúdos.”.

Interpretamos que essa sensação pode ter sido despertada pela vivência escolar de não nos debruçarmos sobre o novo e já sermos apresentados aos resultados e definições prontas, o que causa certa inquietação - isto não já foi descoberto? Por que preciso pensar sobre isso?

Produzir a partir de tarefas é trabalhoso e demanda longos prazos, assim como criá-las a partir dessa metodologia também é. É preciso construir textos que sejam suficientes para integrar bibliografia base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, e para isso faz-se necessário realizarem cada vez mais pesquisas com objetivos de criação de materiais para a licenciatura em matemática com uma perspectiva diferente da já apresentada pelos matemáticos.

Sendo possível, enquanto não tivermos bibliografia suficiente relacionada à educação matemática, incentivamos a utilização de ementas que sejam abertas às necessidades do corpo discente dentro da temática trabalhada. No caso de nossa pesquisa, as fichas, que serviram como nosso material didático, foram criadas durante a aplicação delas, o que nos dava perspectiva do que acrescentar, ou não, nas fichas e listas de exercício seguintes dentro da temática que tínhamos programado.

Entretanto, os ajustes feitos durante o período de aplicação foram realizados a partir de nossa leitura do que a turma necessitava a partir dos resíduos de enunciação. É importante, após avaliação discente, avaliarmos também que seria possível intercalar listas de exercícios em mais momentos do curso, e que isso poderia ter minimizado a sensação de perda de tempo relatada.

Uma ferramenta que não foi utilizada em nossa pesquisa e que, se utilizada, seria de grande valia é a gravação das aplicações. Os registros do caderno de campo somados aos áudios das gravações nos inseririam muito mais, posteriormente, ao ambiente de aplicação das tarefas, já que algumas falas podem passar despercebidas no momento, influenciando diretamente no que será utilizado como base em uma futura intervenção.

Para além da discussão sobre o tempo, a falta de registros de áudio pode prejudicar a análise dos resíduos de enunciação em tarefas que demandam representações geométricas, como as fichas de trabalho do ciclo 5.

Lero apresenta outro tópico em sua avaliação sobre vantagens e desvantagens da metodologia: o erro.

Lero: “Vantagem que aprendemos com os nossos erros pois iniciamos os trabalhos com as fichas utilizando o que imaginamos saber e depois discutimos os resultados com o professor e toda a turma e conseguimos detectar o que fizemos de errado e aprendemos com os erros. A desvantagem é que não sabemos no primeiro momento se o que fizemos está bem direcionado.”.

Frisamos que nos manter dentro do proposto e não apresentar o conteúdo de maneira expositiva foi um desafio. A prática do professor ser o detentor do conteúdo e interferir a todo momento evitando os erros e direcionando para a produção de significados por ele desejada é quase que intrínseca da prática docente, uma ação automática, e vivenciar algo novo foi extremamente enriquecedor para nossa prática e pesquisa.

Este desafio se estende para toda a turma, que provavelmente lida com o erro de forma negativa, já que socialmente o erro é sinônimo de equívoco, absurdo e falha. Trabalhar em sala de forma que o erro não seja um fator desmotivador não é simples. Em nossa prática, lidar com a exposição do erro não foi tão delicada pela proximidade das(os) participantes, que se identificavam como turma e já se conheciam há muito tempo, porém é um fator de atenção ao utilizar metodologias que demandam mais participação e exposição da produção discente.

Doronice inclusive sugere em sua avaliação que seja incentivada uma pesquisa prévia à aplicação das atividades de determinado tema, para que a turma esteja mais preparada no momento de produção. Entretanto, nos questionamos se a pesquisa prévia não seria uma espécie de, novamente, apresentação das definições e resultados do tópico a ser estudado, o que tornaria o processo de produção de significados mais uma vez condicionado ao que o matemático já produziu.

Por fim, a avaliação da disciplina também esteve presente na avaliação discente ao ser apontada como uma vantagem da utilização dessa metodologia.

Jota: “A primeira vantagem do ponto de vista do aluno é não haver prova, o que para mim é uma vantagem, pois tira a preocupação com a nota, que geralmente rem disciplinas convencionais sobrepõe a preocupação com a aprendizagem, além disso a interação com o professor e com os outros alunos nas discussões sobre as fichas ajudam, pois o colega pode ter uma visão diferente que contribui para o entendimento, essa abertura para a discussão dos conceitos, acredito que também proporciona uma avaliação do aluno, pois o professor irá observar o entendimento do aluno pelas interações.”.

Acrescentamos que mesmo avaliando com base na produção discente, a aprovação da turma não foi total, justamente pelo número de faltas, que prejudica o estudo individual e coletivo que é preciso na metodologia utilizada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste trabalho era o de investigar quais devem ser as características de uma disciplina de variáveis complexas para que ela esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de matemática. Delimitamos tais características como uma proposta de sala de aula a luz de nosso referencial teórico, o Modelo dos Campos Semânticos, e em nossas considerações finais apontamos tais escolhas, justificadas, juntamente de reflexões sobre esse processo.

Após análise da organização da oferta de disciplinas que tratam de tópicos de variáveis complexas em onze universidades federais mineiras, confirmamos um argumento introdutório deste trabalho de que, na licenciatura em matemática, a concepção de disciplina é tradicionalmente, para além dos documentos oficiais discutidos, proposta pela visão do matemático para a formação do futuro matemático, e não do(a) futuro(a) professor(a) de matemática.

No caso, realizamos análise por meio das matrizes curriculares e projetos pedagógicos disponíveis para acesso da Universidade Federal de Alfenas (Unifal – MG), Universidade Federal de Itajubá (Unifei), Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Universidade Federal de Lavras (Ufla), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal de Ouro Preto (Ufop), Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Universidade Federal de Viçosa (UFV), Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Nossa revisão de literatura embasou nossa constatação de que podemos generalizar para além das disciplinas de tópicos de variáveis complexas que muitas disciplinas refletem a visão do matemático. Esta constatação aponta a necessidade de produção de materiais didáticos – livros, por exemplo - que possibilitem uma discussão diferente da tradicional do matemático, seja para o trabalho com números racionais, tópicos de geometria, álgebra linear, números complexos ou temáticas de cálculo, análise, estruturas algébricas, dentre outras.

Fundamentados teórica e metodologicamente pelo Modelo dos Campos Semânticos, por nossa revisão da literatura e pela aplicação de nosso produto educacional, elencamos as características que, em nossa concepção, são necessárias para a formação não só matemática, mas também metodológica de um licenciando e licencianda em matemática a partir de uma disciplina de variáveis complexas.

Como **primeira característica**, sugerimos, com base no que constatamos, que é interessante restringir os tópicos a serem trabalhados em uma disciplina de variáveis complexas em quatro grandes temas: Números Complexos e operações, Geometria Analítica no Plano Complexo, Equações Algébricas e Funções Complexas.

Reforçamos que essa sugestão está baseada na discussão que realizamos ao longo de todo nosso trabalho a respeito da impossibilidade de conclusão de ementas extensas devido a diferença existente entre o tempo real de aprendizagem e o tempo institucional de ensino como observado em Silva (2015). Além disso, retomamos que é de grande valia trabalhar esses mesmos quatro grandes temas fazendo referências ao que já é ensinado por anos na Educação Básica, esses mesmos quatro temas centrados no conjunto dos números reais.

Acreditamos que a discussão de algo novo é capaz de elucidar conceitos antes não compreendidos, sendo um recurso para justificar a presença desse estudo na grade curricular da licenciatura em matemática. Os documentos oficiais indicam o estudo do tema, torna-se necessário direcionar esse estudo para a prática futura docente, e não para uma formação distinta como a do matemático.

Em nossa concepção de pesquisa, nosso foco não estava primaria e exclusivamente no conteúdo, logo buscamos contribuições para além do conhecimento matemático, também relacionadas à futura prática docente como vivências metodológicas e pedagógicas frente aos conteúdos de variáveis complexas, ou seja, buscamos identificar uma proposta metodológica em que a(o) estudante em formação experienciasse falar a partir de um texto matemático.

Consequentemente, como **segunda característica** indicamos que a bibliografia básica, mesmo que formada por livros escritos para a formação de matemáticos, também englobe fichas de trabalho, semelhante às desenvolvidas nesta investigação e na pesquisa desenvolvida pelo Oliveira (2024), que podem ser utilizadas, modificadas e adaptadas de acordo com a necessidade.

Sabemos que o tempo de planejamento é curto, e que criar tarefas não é um trabalho simples, porém acreditamos que, para que o curso esteja a serviço de uma formação também metodológica e pedagógica, as(os) discentes precisam ser apresentados ao estranhamento, para que assim se tornem sensíveis aos futuros estranhamentos que vivenciarão sem suas salas de aula, e a maneira que encontramos em nossa pesquisa de tornar isso possível é inserir a turma em uma situação de mão na massa, de resolver uma tarefa sem uma orientação prévia de como obter uma solução, estando atentos sempre à relação de serem tarefas de textos familiares e não-usuais.

Esta prática se relaciona ao nosso referencial teórico por não apresentar o resultado matemático já estabelecido como o único possível. O estranhamento vivido pelos matemáticos, antes de terem desenvolvido diversas definições e resultados, pode ser assim vivenciado em menor escala dentro de sala de aula, e os desafios que seguem essa produção podem nos apontar as potencialidades metodológicas de determinados conteúdos e propostas.

Cientes da necessidade de estabelecer a ementa da disciplina a ser cursada, valorizamos a possibilidade de disciplina que está a serviço da formação da(o) futura(o) docente ser ofertada como uma disciplina de ementa aberta, ou seja, que a(o) docente tenha a liberdade de planejar o conteúdo a ser trabalhado dentro de cada tema, frente à dinâmica naquela turma específica de acordo com a evolução de suas aulas. Isto evita a existência de assincronismo, já que o tempo institucional de ensino estará alinhado ao processo de aprendizagem em ação na sala de aula.

Paralelamente, consideramos a **terceira característica** - a postura docente nesta disciplina, um fator fundamental para que ela esteja a serviço do licenciando e licencianda em sua formação matemática e pedagógica/metodológica.

A(o) docente, sendo educador(a) matemático(a) ou matemático(a), é o mediador desta sala de aula, e por isso cabe a ele(a) a função de proporcionar um ambiente em que diferentes produções de significado sejam valorizadas, que o trabalho em grupo e individual seja realizado, que o erro não seja lido com o juízo de valor que já é normalmente associado, e que diferentes metodologias tenham espaço de atuação.

Em nosso texto, descrevemos o processo metodológico que foi utilizado em nossa sala de aplicação, mas sugerimos, em concordância com nossa revisão de literatura, que outros modos também possam ser experimentados, desde que o trabalho frente ao conteúdo não seja direcionado à formação de matemáticos, e sim de futuros e futuras professoras de matemática.

Para a quarta e última característica, apontamos o processo de avaliação como merecedor de atenção. O sistema de avaliação por nota a partir de uma avaliação tradicional, com perguntas relacionadas ao tema, não foi aplicado por nós, e não é o que acreditamos como característica para uma disciplina neste formato. O trabalho produtivo ser avaliado já é uma mudança metodológica, já que nas disciplinas matemáticas esse tipo de valorização não é o padrão, e justamente por isso é necessário realizar uma conscientização da turma de que, além da frequência, o trabalho a partir das tarefas em sala também é importante, já que todas as discussões são pautadas a partir do que as(os) discentes produzirem. Sem que a turma se aproprie dessa ação é difícil que o curso seja concluído seguindo seu objetivo formativo.

Acreditamos que as características apontadas para o curso podem ser adaptadas e utilizadas em outras disciplinas matemáticas, já que em nosso texto, propomos e discutimos características possíveis, mais metodológicas do que conteudistas, de acordo com nossa premissa de que nosso foco não estava no conteúdo matemático, e sim na potencialidade de trabalhar com ele.

A utilização da metodologia explicitada em nosso capítulo 4 juntamente do apoio nas quatro características anteriormente apresentadas nos possibilitou vivenciar o novo como docentes, presenciando uma experiência em campo que consideramos satisfatória.

Ressaltamos mais uma vez que docentes são diferentes e salas de aula também. Incentivamos que o novo seja praticado e vivenciado, e para isso adaptações serão sempre necessárias, o que não inviabiliza a necessidade de pesquisas como a nossa, que podem servir de exemplo e motivação a outras(os) pesquisadoras(es) e professoras(es) a pensarem a formação além do conteúdo.

A experiência desse estudo e pesquisa me elucidaram que, em termos de Lins (2004a), um monstro monstruoso pode tornar-se de estimação, e nós, educadoras e educadores matemáticos não precisamos apenas reproduzir nossa formação ao trabalhar com a matemática do matemático, pelo contrário, podemos pesquisar, experimentar e implementar diferentes metodologias não só para Números Complexos, mas para toda a diversidade de tópicos matemáticos a ser acessada.

Existe a necessidade de construção de textos que sejam suficientes para integrar bibliografia base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, com perspectivas diferentes das já apresentadas pelos matemáticos. Faz-se necessário fomentar pesquisas, desde iniciação científica até pesquisas mais longas, como os doutorados, para que materiais sejam construídos, como tarefas, sequências didáticas e livros-texto. É preciso que a referência exista para que possamos notar que temos escolha de fazer diferente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. R. Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ALVES, A. F. Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação:** Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Porto: Porto Editora, 2013. 335 p.

BRASIL, Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Matemática, Ensino e Educação: Uma Proposta Global. Temas & Debates, SBEM, Ano IV, n. 3, p. 1 – 15, 1991.

ELIAS, Henrique Rizek. Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

FICHTER FILHO, G. A.; OLIVEIRA, B. R.; COELHO, J. I. F. A trajetória das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação docente no Brasil: uma análise dos textos oficiais. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 16, n. esp. 1, p. 940-956, mar. 2021. e-ISSN: 1982-5587. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v16iEsp.1.14930

GOLLO JUNIOR, R. A. Diretrizes Curriculares para Formação de Professores de Matemática – O Estado em Ação. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23, 2019, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, Campus Anália Franco, 2019, p. 1 – 13.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "dimensão"**. 2007. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2007.

LINARDI, P. R. **Rastros da Formação matemática na prática profissional de uma professora de matemática: do problema inicial ao estudo real.** ULBRA. Canoas. 2007.

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. Campinas: n.18, p.117-123, 2005a.

LINS, R. C. Categories of everyday life as elements organizing mathematics teacher education and development projects. In: ICMI, 15., 2005, Águas de Lindóia - Brazil. **Proceedings…** Brazil, 2005b. 1CD.

LINS, R. C. Design e Implementação de um programa de formação continuada de professores de Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa ao CNPq.**, 2004b, p. 01-13.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. **Revista da Educação Matemática da SBEM-SP**. Ano 1, n.1, 1993, p.75-91.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M. A. V., Borba, M. C. (org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004a. p.92-120.

LINS, R. C. O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos de notas e de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, p.110-128.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

LINS, R. C. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

OLIVEIRA, T. O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

OLIVEIRA, V. C. A. Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear. 2002. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2002.

OLIVEIRA, V. C. A. Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na formação de professores de matemática. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, cap. 12, p. 199-216.

OLIVEIRA, V. C. A. Uma Leitura sobre a Formação Continuada de Professores de Matemática Fundamentada em uma Categoria do Cotidiano. 2011. 207f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

PINTO, J. E. Objeto de aprendizagem para o ensino de números complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica. 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

PROCÓPIO, R. B. Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos. 2011. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

REIS, G. L. dos; Silva, V. V. da. **Geometria Analítica**. 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 252 p.

REIS NETO, R. M. Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos. 2009. 142 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

SILVA, A. M. Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 2003. 244 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estatual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, A. M. Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álgebra Linear. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, cap. 4, p. 79-90.

SILVA, A. M.; OLIVEIRA, V. C. A.; ALMEIDA, V. R. O Modelo dos Campos Semânticos: Teorização e Desdobramentos para a Pesquisa e para o Ensino. In: MAGINA, S. M. P.; LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. (Org.). **Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática** teoria, pesquisa e sala de aula [livro eletrônico] 1. ed. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022, cap. 3, p. 98-122.

SILVA, A. M. Sobre o Assincronismo nos Processos de Ensino e de Aprendizagem em uma Sala de Aula de Matemática. **Revista de Educação, Ciências e Matemática.** v. 5, n. 3, p. 92-102, dez. 2015.

SILVA, M. R. S. Avaliação: um contrato de trabalho. In: **Interface** — Comunicação , Saúde, Educação, Botucatu, SP: Fundação UNI, 1998. v.2, n.2, p. 155-172.

ANEXOS

ANEXO I: Questionário Discente

DISCIPLINA: Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura – MAT06025
PERÍODO LETIVO: 2022.1
PROFESSOR: Tiago de Oliveira

Questionário

Nome:
Período:
( ) Licenciatura em Matemática
( ) Outro curso. Se sim, qual?
É formando neste semestre? ( ) SIM ( ) NÃO
Disciplinas que cursará em 2022/1:
1)
2)
3)
4)
5)
6)

Marque com um X a(s) disciplina(s) abaixo que você já estudou:
( ) TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS
( ) CÁLCULO I
( ) CÁLCULO II
( ) CÁLCULO III
( ) INTRODUÇÃO À TEORIA DOS NÚMEROS
( ) ANÁLISE REAL I
( ) ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Você leciona:
SIM ( ). Onde:
NÃO ( ).
Quais outras atividades você fará no IF Sudeste MG – Campus Santos Dumont neste semestre?
( ) Iniciação Científica

( ) PIBID ou outras atividades com bolsa

( ) Monitoria

( ) Prática de ensino

( ) Outra. Qual?

Quantos livros você leu, de capa a capa:

(a) No ano de 2020: ( )

(b) No ano de 2021: ( )

(c) Em toda a sua vida (aproximadamente): ( )

ANEXO II: Avaliação Diagnóstica

Com intuito de nos programar e até mesmo para saber como vamos conduzir nossas tarefas, gostaríamos que respondessem as seguintes perguntas:

1) Descreva o conjunto dos números:

Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q), Irracionais (I) e Reais (R).

2) Resolva as seguintes equações: (a) $x^2 + x - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ e (b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

3) Considere o seguinte Teorema:

Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par.

i) Qual é a hipótese do Teorema?

ii) Qual é a tese do Teorema?

iii) Demonstre o Teorema.

4) Defina com suas palavras o que é função, em seguida apresente alguns exemplos.

ANEXO III: Termo de Compromisso Ético

A problemática da pesquisa intitulada O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática se expressa pela seguinte questão: “quais devem ser as características da disciplina Variáveis Complexas, no conjunto das disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, para que esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de matemática?”. Um dos objetivos é a criação de um material didático para que os professores e professoras possam utilizar, baseados nas características que teremos proposto para a disciplina. A aplicação desse material didático, juntamente da análise de resíduos de enunciação que serão coletados, servirão como material para embasar as conclusões da pesquisa.

Durante a aplicação e discussão do material didático os encontros poderão ser gravados e registros escritos de participantes podem ser solicitados, a fim de que seus dados sejam analisados posteriormente pela pesquisadora e pesquisador. Esses dados respeitarão o sigilo da identidade das(os) participantes, que poderão escolher seus nomes fictícios no caso de haver publicação dos resultados da pesquisa.

A participação nesta pesquisa é voluntária, podendo ser interrompida a qualquer momento se for do desejo da(o) participante. Assim, o presente termo torna-se necessário com a perspectiva de esclarecer e firmar o compromisso de participantes da pesquisa com as ações explicitadas acima.

___________________________________, _____ de abril de 2022.

____

Nome da(o) licencianda(o) participante da pesquisa

____

Pesquisadora

____

Pesquisador

ANEXO IV: Fichas de Trabalho constituintes do Produto Educacional

Ficha de Trabalho 1

Para a primeira ficha de trabalho, de tarefa única intitulada *Resolvendo Equações Algébricas*, questionamos, a partir da exposição de quatro equações algébricas, o significado atribuído à expressão “resolver uma equação” e o que pode ser dito após resolução das equações propostas.

****

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0$;

b) $x^2 + 4 = 0$;

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

1. O que significa a expressão matemática “resolver uma equação”?

2. Resolva as equações acima.

3. Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?

****

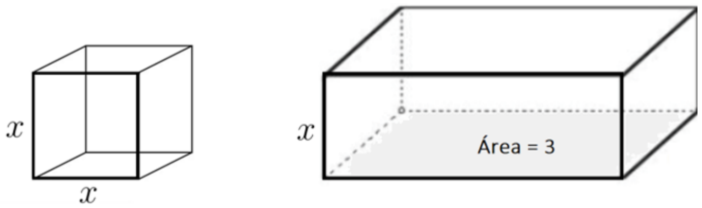
Ficha de Trabalho 2

A discussão de segunda ficha de trabalho é dividida em duas tarefas, *Tarefa 2.1 – Um problema geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico,* ambas com textos adaptados e tarefas inspiradas no seguinte problema geométrico observado em CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010 Este é o momento de apresentação de um problema, geométrico, que demanda a criação de novas ferramentas para que sua solução seja desenvolvida por completo.

***

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico

Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo.



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que V = V' + 1 na tabela abaixo:

x	*V*	*V'+ 1*
1		
2		
3		
4		

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

***

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0), \qquad (1)$$

cujas raízes podem ser escritas sob a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad (2)$$

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado discriminante) for negativa? Neste caso a radiciação não é possível em R, por consequência a expressão das raízes (2) não tem significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindus e árabes não tinha passado despercebido este caso embaraçoso. Mas sempre que ele se dava, o problema concreto que tinha dado origem a equação, via-se que era um problema sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o problema não tinha solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado porque essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse como resolver as do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebristas italianos, herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resolução.

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), empregando a linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (3)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$*, reduz-se a equação (3) à forma*

$$y^3 + ay + b = 0 \qquad (4)$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \qquad (5)$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e mais grave que se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à resta do cubo. Determine x de modo que V = V' + 1.

Como $V = x^3$ *e* $V' = 3x + 1$*, o problema leva imediatamente à seguinte equação:* $x^3 = 3x + 1$*, que é da forma (4).*

Temos, nesse caso, $a = -3$*;* $b = -1$*;* $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$*;* $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$*;* $\frac{a^3}{27} = -1$*;* $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$*. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$*, mas esta raiz não existe.*

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da experiência anterior concluiríamos que a não existência da raiz de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ *quer dizer que o nosso problema é impossível.*

Porém, uma análise mais detalhada sugere que o problema proposto não é impossível. De fato, quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume V = x^3 é também pequeno e menor que a soma 3x + 1, mas, à medida que x aumenta V vai se aproximando de V' + 1 = 3x + 1 e chega mesmo a ultrapassá-lo, por exemplo, para x = 1, temos V = 1 e V' + 1 = 4, mas para x = 2, temos V = 8 e V' + 1 = 7. Conclui-se deste raciocínio que deve haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da equação do problema: x^3 = 3x + 1. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida entre 1, 8 e 1, 9 visto que para x = 1, 8; V = 5, 832 < V' + 1 = 6, 4 e para x = 1, 9, V = 6, 859 > V ' + 1 = 6, 7.

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos calculá-la.

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

****

Ficha de Trabalho 3

Nesta sequência, iniciamos a discussão à partir das necessidades nascidas pelas "insuficiências" de outros conjuntos numéricos ao longo da produção matemática a fim de inseri a turma em um ambiente de criação. Duas tarefas foram desenvolvidas, *Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico* e *Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)*, que possui fechamento apenas na Ficha de Trabalho 4.

***

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução de problemas não é um tema novo na sua vida escolar e acadêmica. Há muito tempo se verificou, por exemplo, que no conjunto dos números naturais, que denotamos por IN, a adição de dois números é uma operação sempre possível em IN pois seu resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a subtração.

A subtração $10 - 2$, por exemplo, pode levar à adição pois a operação equivale a perguntar: qual é o número natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação $x + 2 = 10$. Cuja solução, existindo em IN, é a resposta procurada; um número natural.

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturais quaisquer?

Suponha que para respondermos a essa pergunta comecemos a fazer experimentos com diferentes números até chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o que podemos concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número $x \in IN$ tal que $x + 10 = 2$? Concluiremos que esse número não existe.

Logo, concluímos que em IN a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a concluir que a equação $x + b = a$ nem sempre tem solução em IN. Essa limitação do conjunto IN não passou despercebido historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto IN, construir um conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possível ampliar o conjunto IN, construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação $a + x = b$ tenha sempre solução, quando a e b pertencem a IN?

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteiros, denotado por Z.

O problema que passaremos a discutir é análogo ao anterior. A nossa questão atual é: será possível construir um conjunto numérico, ampliando o conjunto R, dos números reais, no qual a raiz de um número negativo – como na equação $x^2 + 1 = 0$ – tenha solução nesse novo conjunto?

Questão: Entendido nosso problema, devemos discutir (a) o que devemos fazer? (b) Por onde começar?

***

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto R são:

(i) Resolver as deficiências que o conjunto numérico anterior. No nosso caso, resolver o problema das equações que não possuem solução em R, ou seja, que possuem raiz negativa.

(ii) Preservar, ao máximo, as propriedades do conjunto R na construção do novo conjunto. Isto quer dizer, que é desejável, que tentemos manter as propriedades operatórias dos números reais, tais como, a associatividade e a comutatividade das operações de adição e multiplicação em R, a distributividade da multiplicação em relação à adição e todas as outras propriedades dos números reais.

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a ampliação do conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso consideremos a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x = \pm\sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi criar o símbolo i, chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R.

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejamos alguns exemplos:

Seja $a \in R$, $a > 0$, $x = \sqrt{-a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)\cdot a^2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ia$$

Assim, operamos com o novo número i "como se ele fosse um número real", isto é, efetuando as propriedades operatórias dos números reais. Por exemplo,

$$(5i)^2 = (5i) \cdot (5i) = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25.$$

Questão:

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e $x^2 - 4x + 13 = 0$. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conjunto?

(c) Chamaremos esse novo número de número complexo e, lembrando que representamos o conjunto dos números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

Ficha de Trabalho 4

A *Tarefa 4 – Construção do novo conjunto numérico (parte II)* foi planejada para o trabalho de criação e manipulação de operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de propriedades pertinentes à partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e existência de elementos neutro e simétrico.

***

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a "unidade imaginária" e os números desse novo conjunto, os "complexos". Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão – irracionais eram os "inexprimíveis" e "quantidades fictícias" nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de entidade abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confortáveis e, por consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam apresentadas algumas definições e verificadas se algumas propriedades de R continuam a valer em C.

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

a) Defina igualdade de dois números complexos.

b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em C.

c) Na operação de adição em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

d) Na operação de multiplicação em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

e) Em R é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é também válida em C.

***

Ficha de Trabalho 5

A Ficha de Trabalho 5 é a mais longa das 6 constituintes deste trabalho, composta por 4 tarefas: *Tarefa 5.1 – A representação geométrica do conjunto dos números complexos, Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss, Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss, e Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo,* tendo como objetivo iniciar a discussão da representação geométrica de números complexos a partir de comparações com o conjunto dos números reais.

***

Tarefa 5.1 - A representação geométrica do conjunto dos números complexos

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos números complexos nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, como o conjunto dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser repelida, e até Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números inteiros e reais enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Álgebra.

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, propriedades e características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades são ganhas.

Os números reais, por exemplo, estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identificados como todos os pontos pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente necessária para identificarmos a posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior que entre os reais.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse conjunto, como poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente os seguintes números complexos:

A. $2 + i$ *B.* $2 - i$ *C.* $-4 + 6i$ *D.* $\sqrt{3} + 2i$

E. 5 *F.* $-3i$ *G.* $1 + i$ *H.* $-1 + i$

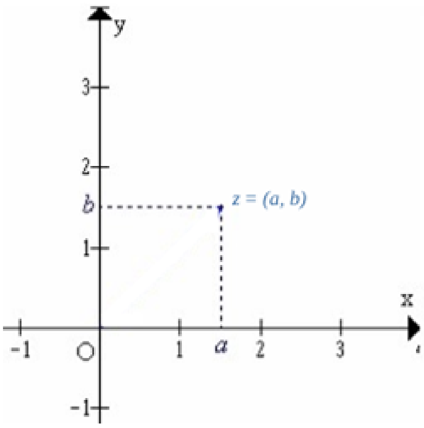
***

Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss

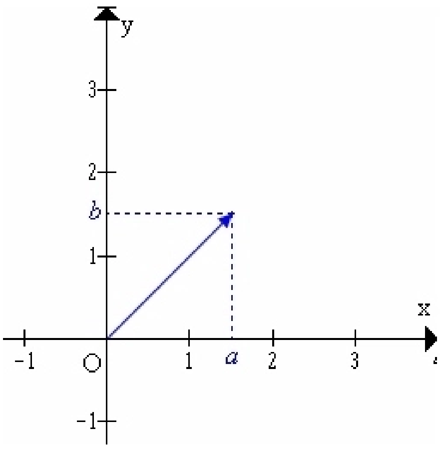
O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de Gauss. Wessel, um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números complexos - pormeio de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Gauss como um grande matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais tempo para chegar na mesma conclusão que Wessel.

Nessa representação, cada número complexo z = a + bi é identificado como um ponto do Plano de Gauss pelo par ordenado (a, b). O eixo Ox, do Plano Cartesiano, passa a ser chamado de eixo real (Re) no Plano de Gauss, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo Oy passa a ser chamado de eixo imaginário, onde representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando z = a + bi, tal que 1 < a = b < 2.



Além de localizarmos um número complexo z = a + bi no plano por coordenadas ditas cartesianas (a , b), interpretando z como um ponto P, podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela seta $\overrightarrow{OP}$*.*



Com a interpretação vetorial, é possível visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para os números complexos.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um número complexo, identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o módulo do vetor determinado pelo número complexo em questão.

A. 2 + i

B. 2 – i

C. - 4 + 6i

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula para o cálculo do módulo de um vetor gerado por um número complexo z = a + bi para quaisquer valores de a e b?

***

Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss

Texto para discussão

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilita visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses números, como a soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- ***Produto de um número complexo por um número real***

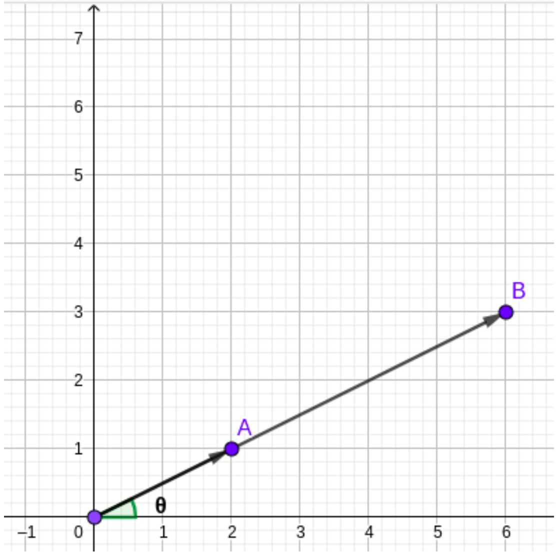
Considere $\mathbf{m} = 2 + i \in \mathbb{C}$ *e* $3 \in \mathbb{R}$*. O produto desses dois números resulta em* $\mathbf{n} = 6 + 3i$*:*

$$3 \cdot \mathbf{m} = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$\mathbf{m} = 2 + i = (2, 1) = A$

***n** = 6 + 3i = (6, 3) = B*



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada ***homotetia*** *– ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as características originais, como forma e angulação.*

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambos em relação ao eixo real.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do plano, pode ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$|n| = \sqrt{a^2 + b^2} = |n| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Assim, verifica-se que o módulo de ***n*** *é três vezes maior que o módulo de* ***m****, ou seja, ocorreu uma ampliação da distância. Agora precisamos verificar se a angulação do primeiro vetor,* ***m****, foi preservada.*

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada de ***argumento*** *desse vetor, ou melhor, argumento do número complexo dado – Arg (z). Essa angulação é demarcada no sentido anti-horário, a partir do eixo das abscissas Ox até o vetor indicado.*

A angulação θ de z complexo é tal que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ *e* $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

Em relação a m,$\cos(\alpha) = \frac{a}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\alpha) = \frac{b}{|m|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Em relação a n, $\cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, como cos (α) = cos (β) e sen (α) = sem (β), α = β. Esse resultado nos indica que o argumento de ***m*** *é o mesmo argumento de* ***n****, logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!*

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último item da tarefa anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma de números complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos ***m*** *e* ***n*** *quaisquer. Em seguida identifique-os no plano e calcule o módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre* ***m*** *e* ***n*** *e identifique o resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localização no plano e o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano abaixo para uma melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano cartesiano com linhas pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]*

***

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de como calcular o módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de argumento, podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas também pelo que chamamos de ***forma trigonométrica****.*

A forma trigonométrica de um número complexo z = a + bi é escrita em função do argumento desse mesmo número, sendo um ângulo θ. Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um complexo:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \;\; e \;\; sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$a = |z|\cos(\theta) \;\; e \;\; b = |z|sen(\theta)$$

Como z = a + bi, podemos substituir o equivalente a a e b, encontrando o que chamamos de forma trigonométrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|sen(\theta)i$$

$$z = |z|(\cos(\theta) + isen(\theta))$$

Vejamos um exemplo de escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica:

Seja z = 1 + $\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*, então*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar Arg (z), então seguindo os cálculos…

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \; e \; sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \; e \; sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \textit{ e como } 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de |z| e Arg|z|, reescrevemos z como:

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3}))$$

Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de ***forma trigonométrica****, é equivalente ao que chamam de* **forma polar de um número complexo***. Na forma polar ganhamos as coordenadas polares, (r, θ), em que* ***r*** *representa a distância do número z até a origem, ou seja, |z|, e θ o argumento desse mesmo número: Arg(z).*

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

m = $2 + 2\sqrt{3}i$

n = $\sqrt{3} + i$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plano, indicando |z| e θ.

z = $1 + i$

w = $\sqrt{3} - i$

x = $2i$

***

Ficha de Trabalho 6

Concluindo nossa sequência de Fichas de Trabalho temos a Ficha 6, constituída de três tarefas: *Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica*, *Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica* e *Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial.* Com elas, foi possível realizar o fechamento de nossa discussão inicial inserida na Ficha de Trabalho 02, envolvendo o volume de dois sólidos geométricos, tendo agora todos os elementos operatórios necessários para chegarmos em uma solução.

***

Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica

Dados os seguintes números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, com a, b, c e d $\in \mathbb{R}$ e seus respectivos argumentos $Arg(z_1) = \theta_1$ e $Arg(z_2) = \theta_2$, defina a multiplicação desses dois números complexos na forma trigonométrica.

Sejam dados os números complexos z1 e z2 na forma trigonométrica:

$$z1 = | z1 |(\cos\theta1 + i\text{sen}\theta1) \text{ e } z2 = | z2 |(\cos\theta2 + i\text{sen}\theta2)$$

Então, calculando o produto z1 · z2 obteremos:

$$z1 \cdot z2 = | z1 | \cdot | z2 |[(\cos\theta1 \cdot \cos\theta2 - \text{sen}\theta1 \cdot \text{sen}\theta2) + i(\text{sen}\theta1 \cdot \cos\theta2 + \text{sen}\theta2 \cdot \cos\theta1)]$$

Portanto:

$$z1 \cdot z2 = | z1 | \cdot | z2 |[\cos(\theta1 + \theta2) + i\text{sen}(\theta1 + \theta2)]$$

Agora que sabemos multiplicar dois números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.

Questão:

a) Como vocês fariam para resolver z^9 , sendo $z = \sqrt{3} + i$?

b) Existe uma fórmula ou um resultado para resolver à potência zn, com n ∈ N* , sendo z um número complexo da forma z = a + bi?

Quanto à potencia zn , com n ∈ N∗ , ela nada mais é que um produto de n fatores iguais a z:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{nfatores}$$

Então, sendo dado o número complexo z na forma trigonométrica z = | z |(cosθ + isenθ), fórmula anterior nos mostra que:

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{multiplicar os n fatores} \cdot [\cos\ \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{somar os argumentos} + isen\ \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{somar os argumentos}],$$

logo

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

Obs: Para elevar um número complexo a n, n ∈ N∗ , devemos elevar seu módulo a n e multiplicar seu argumento por n.

Questão:

a) Calcule z^8, sendo $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$.

b) Efetue $(1 + i)^{12}$.

***

Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica

A forma trigonométrica também nos será de grande utilidade na radiciação. Encontre as raízes cúbicas de 8i, ou seja, quais são os números que elevados a 3 são iguais a 8i?

Vejamos o seguinte exemplo: Dado um número complexo z na forma trigonométrica, z = | z |(cosθ + isenθ), não é difícil perceber que para obter uma raiz cúbica de z devemos realizar com seu módulo e argumento as operações inversas daquelas que efetuamos quando elevamos z ao cubo: extrair a raiz cúbica do módulo - ao invés de elevá-lo ao cubo - e dividir o argumento por 3 - ao invés de multiplicá-lo por 3. Assim fazendo, encontraremos:

$$w1 = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\theta}{3} + isen\frac{\theta}{3})$$

Podemos verificar, através da potenciação na forma trigonométrica, que:

$$(w1)^3 = (\sqrt[3]{|z|})^3[\cos\frac{3\cdot\theta}{3} + isen\frac{3\cdot\theta}{3}] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$$

No entanto, se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w1, encontraremos outro número complexo:

$$w2 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$

Constate que:

$$(w2)^3 = |z|[\cos(\underbrace{\theta + 2\pi}_{3\cdot(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})}) + isen(\theta + 2\pi)] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$$

Acrescentando, agora, $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w2, encontraremos um terceiro número complexo:

$$w3 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})]$$

$$(w3)^3 = |z|[\cos(\underbrace{\theta + 4\pi}_{3\cdot(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})}) + isen(\theta + 4\pi)] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$$

Observe que se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w3, voltaremos a encontrar w1. Portanto, $(w1)^3 = (w2)^3 = (w3)^3 = z$, e w1, w2 e w3 são raízes cúbicas de $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$.

Propriedade: Todo número complexo z, não nulo, admite n raízes n=ésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Questão:

a) Com base nessas informações, encontre as raízes cúbicas de 8i e faça sua representação geométrica.

b) Olhando para a propriedade anterior, resolva em C, a equação $x^6 - 1 = 0$.

***

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação do 3º grau. A resolução desta equação pela fórmula de Cardamo-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao depararmos com a raiz quadrada de um número negativo.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém tivemos que interromper, novamente, a resolução quando chegamos no seguinte cálculo (envolvendo raízes cúbicas de um número complexo):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos por meio da forma trigonométrica. Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Resolução: Como V = x^3 e V' = 3x + 1, o problema leva imediatamente à seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma $y^3 + ay + b = 0$ e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. *e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com você, encontre a solução deste problema!

***