UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tiago de Oliveira
Amarildo Melchiades da Silva

Variáveis Complexas na Licenciatura: tarefas para o ensino de função complexa

Juiz de Fora - MG
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tiago de Oliveira
Amarildo Melchiades da Silva

Variáveis Complexas na Licenciatura: tarefas para o ensino de função complexa

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora - MG
2024

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro(a) professor(a),

Este trabalho é fruto da pesquisa intitulada “O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura: o caso das funções complexas” (OLIVEIRA, 2024) e faz parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF.

O estudo que desenvolvemos sobre o ensino de variáveis complexas na Licenciatura em Matemática integra um programa de investigação denominado *Programa Linsiano de Investigação*, em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955 - 2017). No macroprojeto deste Programa desenvolvidos no interior da UFJF intitulado Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica, se situa nosso subprojeto de pesquisa relacionado a formação inicial de professor no interior das licenciaturas em Matemática.

Nossa pesquisa se insere no projeto ao tratar do ensino da disciplina Variáveis Complexas para um curso de Licenciatura em Matemática a partir da constatação de que, a concepção da disciplina, sua ementa, sua metodologia de ensino e bibliografia utilizadas historicamente são propostas pela visão do matemático para a formação do futuro matemático e não são voltadas especificamente à formação inicial do professor da educação básica.

Assim, nossa investigação tem seu foco na formação inicial do futuro professor de matemática, visando refletir a respeito de sua formação. Como consequência, por ser uma pesquisa em um Mestrado Profissional, o produto educacional, decorrente de nossa investigação, é a produção deste material didático para o ensino de funções complexas para os licenciandos de um curso de Matemática.

O produto educacional é composto por quatro fichas de trabalho contendo um conjunto de tarefas, envolvendo o tema funções complexas. A elaboração das tarefas nas fichas foi pensada de forma estratégica de modo a estimular a produção de significados dos estudantes.

Uma das finalidades do conjunto de tarefas é provocar a interação entre os alunos e deles com o professor a partir do diálogo na busca da resolução das tarefas consideradas como sendo o instrumento de mediação entre os participantes.

A importância deste produto educacional surgiu quando na revisão da literatura, percebemos a carência de propostas de ensino que pudessem substituir as listas de exercícios dos livros textos da disciplina de Variáveis Complexas para Licenciatura e em relação às disciplinas de matemática acadêmica para formação de professores.

Com base nessa informação, consideramos uma proposta de ensino em que os estudantes pudessem participar ativamente das aulas, como uma alternativa a aulas expositivo-explicativas. Desta forma, a proposta de trabalho fichas contendo tarefas foi inspirada na metodologia de ensino denominada de *Assimilação Solidária* elaborada pelos Cabraldinos[1].

Nosso propósito, mesmo não assumindo os pressupostos da *Assimilação Solidária*, foi o de iniciar um processo de implantar este elemento de uma metodologia alternativa de ensino e oposição ao modelo tradicional de ensino, principalmente quando elas levam a uma mudança de postura do professor e dos alunos, criando a possibilidades de que os estudantes da licenciatura vivenciem outras possibilidades de ensino em sua formação para a docência.

Convidamos o(a)s colegas professore(a)s para vivenciarem esta experiência de proposta de ensino que envolve discussão matemática, mas, também, uma experiência metodológica, ao dar voz a e vez aos alunos para falarem a partir da utilização das fichas de trabalho em sala de aula a partir da nossa experiência descrita a seguir e das fichas de trabalho que ficarão disponíveis no anexo deste produto educacional.

Tiago de Oliveira
Amarildo Melchiades da Silva

[1] Roberto Ribeiro Baldino e Tânia Cristina Baptista Cabral se autodenominaram *Os Cabraldinos*, termo que usaremos quando fizermos menção ao trabalho que desenvolvem em conjunto.

A SALA DE AULA

Nesta seção, apresentaremos algumas informações importantes sobre a dinâmica da sala de aula onde foram aplicadas as tarefas de modo a informar aos colegas sobre algumas questões que surgem quando deixamos de apresentar uma aula expositivo-explicativa, em que o(a)s estudantes tem uma posição passiva para uma proposta em que eles trabalham com fichas contendo situações das mais gerais que eles precisam resolver, tais como, apresentar uma definição, exibir exemplos, calcular domínios de função.

A sala de aula a partir da qual relataremos a atividade de ensino é de um Instituto Federal na Zona da Mata Mineira, em uma disciplina Optativa do 7º período do Curso de Licenciatura em Matemática denominada Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura. A disciplina foi ministrada no primeiro semestre de 2021, primeiro período presencial após o período de isolamento devido à Covid-19.

A disciplina foi dividida em duas partes: a primeira parte foi destinada a discussão a respeito dos números complexos[2] e a segunda parte da disciplina foi destinada ao estudo das funções complexas. O que descreveremos a seguir trata da segunda parte das discussões em que utilizamos um conjunto de tarefas apresentadas em fichas de trabalho focadas em introduzir a noção de funções complexas.

Na disciplina se inscreveram nove estudantes, todos licenciandos em matemática do referido instituto e na entrevista com a turma identificamos que eles haviam estudado o assunto números complexos na disciplina *Trigonometria e Números Complexos* no início do curso.

Nossa expectativa inicial foi observar que informações eles/elas trariam para a sala de aula quando iniciássemos a discussão sobre o tema. Percebemos que, mesmo tendo cursado a disciplina citada anteriormente, a maioria desses alunos não conseguiam produzir significados na direção do assunto de números complexos. Uma aluna afirmou que números complexos é quando envolve o número i e outra já citou a questão de envolver raiz quadrada de um número negativo.

Sabendo da dificuldade apresentada pelos alunos, construímos nossas fichas de trabalho de forma que fosse possível voltar em algum conteúdo introdutório para dar continuidade ao conteúdo que seria proposto. Por exemplo, antes de apresentar as funções complexas, apresentamos algumas atividades de funções reais de variáveis reais como introdução.

[2] Para conhecer as fichas de trabalho sobre Números Complexos veja o produto educacional de Souza (2024).

Ainda na primeira ficha de trabalho, percebemos a dificuldade dos alunos em justificar as tarefas envolvendo definição, exemplos e domínio das funções reais de uma variável real. Entendemos que esse foi um ponto de partida importante para introduzir o trabalho com as funções complexas.

A nossa expectativa era que eles usassem a definição de função real de uma variável real para construírem a definição de função complexa e que eles tivessem mais facilidade para trabalhar com o assunto de funções, conseguindo produzir significados para aquele assunto. Percebemos que a maioria dos discentes usaram a definição de função real apresentada nas aulas anteriores e que no primeiro momento não foram capazes de justificar, com suas palavras a definição de funções complexas e de apresentar os exemplos também solicitados.

Através da dinâmica utilizada em sala de aula, que vamos apresentar a seguir, notamos que no decorrer das aulas os discentes estavam mais familiarizados com as tarefas, sempre produzindo significados e justificando o que era solicitado. As tarefas mais algébricas, como reescrever uma função complexa, identificando a parte real e a parte imaginária, determinar o domínio da função complexa, encontrar a imagem da função dado um ponto, entre outras, foram realizadas com mais facilidade.

Observamos de perto a evolução dos alunos ao decorrer do curso. Inicialmente, muitos estavam tímidos e inseguros, mas ao longo do tempo, tornaram-se mais confortáveis e participativos. Notamos também, que a estratégia de revisitar conteúdos anteriores mostrou-se relevante, permitindo aos alunos relembrarem de conceitos que antes pareciam simples, mas que hora das tarefas muitos não conseguiam produzir significados na direção do que era solicitado. Outro ponto relevante em nossa pesquisa foi o referencial teórico junto com a proposta de dinâmica em nossas aulas, que possibilitou mais abertura para um diálogo com os alunos e para fazer uma leitura em relação a produção de significados dos alunos.

A avaliação da disciplina foi feita baseada no trabalho produtivo dos alunos em sala de aula, inspirado na proposta de avaliação da metodologia Assimilação Solidária proposta por Baldino, em oposição à avaliação exclusiva por provas.

Acreditamos que as fichas de trabalho, com suas tarefas, e a dinâmica abordada em sala de aula foram os dois principais pontos do nosso projeto, permitindo que o professor realize um trabalho diferenciado em suas futuras aulas. Em relação a dinâmica de nossa sala de aula, baseada nas premissas do Modelo dos Campos Semânticos, procedemos metodologicamente considerando os seguintes pontos:

1. Estimular a produção de significados do(a)s estudantes, sugerindo a discussão conjunta na direção de atender as demandas das tarefas de maneira colaborativa;

2. As aulas foram divididas em três momentos: O primeiro de produção individual; o segundo momento de discussão em grupo e o terceiro momento com a intervenção do professor a partir do compartilhamento das produções realizadas com a turma;

3. A proposição da ordem de fala dos alunos e alunas: fala primeiro quem tiver dúvidas e não tiver certeza de como chegar a uma resposta, ou não tiver certeza se o que fez será aceito pela turma e quem acreditar que sabe a resposta falará por último;

4. O docente, durante o primeiro e o segundo momento fez intervenções apenas esclarecimento sobre o que os alunos e alunos disseram, de modo a entende-los.

Assim, na dinâmica de sala de aula a proposta foi gerar a discussão dos diferentes modos de produção de significados que ali emergissem vindo dos alunos.

Por fim, ressaltamos que a dinâmica apresentada foi desafiadora no primeiro momento, principalmente para nós docentes que estávamos acostumados a trabalhar de forma mais tradicional. Somos impulsionados a sanar as dúvidas e, muitas vezes, orientar nossa turma no caminho de uma solução por nós já conhecida. Nosso papel em sala de aula é mediar a discussão e, quando necessário, apresentar maneiras de resolver e utilizar os conceitos matemáticos conhecidos academicamente.

DISCUTINDO AS FICHAS DE TRABALHO

Nesta seção apresentaremos o processo de ensino a partir do uso das tarefas indicando em cada uma delas, o objetivo de sua elaboração, nossa expectativa com relação a resolução da tarefa para que o leitor identifique nossa proposta e, quando houver, alguns comentários sobre o tempo gasto e a fala dos alunos e alunas.

Na primeira aula do curso, aplicamos uma avaliação diagnóstica com intuito de nos programar em relação às tarefas, reconhecer as etapas de aprendizagem em que os alunos estavam inseridos, além de identificar as aptidões e limitações de cada estudante dentro do assunto que seria abordado.

Nossas considerações sobre a avaliação diagnóstica é que a maioria dos discentes não lembravam de assuntos já estudados como os conjuntos numéricos, resolução de equações, fórmula de Bhaskara, hipótese e tese de teoremas e definição de função. Como foi a primeira disciplina depois do ensino remoto emergencial (ERE), alguns discentes informaram que não estudaram com muita frequência no ERE, outros informaram que trancaram o curso e uns finalizaram informando que não precisavam de tanto estudo no ensino remoto.

Na primeira parte da disciplina foi abordado o assunto dos números complexos, de uma maneira diferente da que é proposta nos livros didáticos. Os detalhes e as tarefas propostas estão no trabalho da professora (SOUZA, 2024). Agora vamos apresentar as fichas relacionadas às funções complexas. Começamos com a primeira ficha de trabalho:

Ficha de Trabalho 01 – Introdução às Funções Complexas

A primeira ficha de trabalho começa com a Tarefa 1.1 – Função Real de uma Variável Real, na qual é proposto ao aluno definir uma função real de uma variável real e apresentar alguns exemplos. Utilizamos uma aula de 50 minutos para a realização da tarefa.

O objetivo desta tarefa foi verificar o que o aluno pode dizer sobre uma função real de uma variável real; se ele também consegue exibir alguns exemplos e falar sobre eles, deflagrando assim, seu processo de produção de significados para o objeto Função. Acreditamos que a primeira tarefa seja um ponto de partida para começar a falar da definição de funções complexas, além de exercitar sua escrita.

Depois que os alunos responderam a tarefa 1.1, demos um tempo para eles conversarem entre si e pedimos para eles responderem o que acharam da questão. Uma discente apresentou um estranhamento em relação à questão de “uma variável real” e afirmou que normalmente nas definições de funções não aparecem dessa forma. Outra discente relatou que tentou apresentar uma definição mais formal e que não foi tão fácil quanto ela imaginava. Perguntamos para os discentes o porquê a maioria pensou em uma função afim para colocar como exemplo. Uma discente respondeu que é pelo fato de a função afim ser uma das primeiras funções que eles aprenderam, sendo uma das que eles mais usaram e, portanto, a que veio no pensamento. Por fim, depois de vários relatarem o que considerava ser uma função real de variável real, solicitamos que eles investigassem em casa o que seria uma função real de variável para próxima aula.

Na aula seguinte, usamos um tempo de 50 minutos para apresentar algumas definições de função real de uma variável. Apresentamos a seguinte definição do livro intitulado Um Curso de Cálculo de Guidorizzi em uma ficha de trabalho:

Definição de Função 1: Entendemos por uma função f uma terna

$$(A, B, a \mapsto b)$$

em que A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D_f, assim $A = D_f$. O conjunto B é o contradomínio de f. O único b de B associado ao elemento de a de A é indicado por $f(a)$ (leia-se: f de a): diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a.

Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \longrightarrow B$ (leia: f de A em B).

Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f: A \longrightarrow B$, em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por

$$y = f(x), \qquad x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a variável independente, e y, a variável dependente. É usual, ainda, dizer que y é função de x.

E na sequência apresentamos a seguinte definição:

Definição de Função 2: Seja X um conjunto não vazio e f uma lei ou regra que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de variável real quando $X \subset \mathbb{R}$.

Os discentes relataram que a primeira definição é mais formal, detalhada e complexa. Em contrapartida, a segunda definição foi considerada mais simples. Após a discussão, os discentes informaram que haviam compreendido a definição de uma função real de uma variável real.

Prosseguindo com as atividades, iniciamos a tarefa 1.2 - Introdução a Funções Complexas, a qual demandou duas aulas de 50 minutos para sua realização. Tínhamos como objetivo apresentar as diversas possibilidades de se trabalhar com as funções complexas e através dos exemplos apresentados discutir algumas possibilidades: Na letra a) e b) tínhamos uma função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, em que o domínio e o contradomínio seriam formados pelo conjunto dos números complexos. Já na letra c) tínhamos outra função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, só que aqui apesar do contradomínio ser formado pelo conjunto dos números complexos, existia uma restrição, teria que ser formado apenas pelo conjunto dos números reais.

O exemplo da letra foi descrito da seguinte forma: a) Defina uma função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Como você representaria essa transformação (função)?

Nosso objetivo era proporcionar aos discentes a oportunidade de apresentar a definição de uma função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e analisar como eles representariam essa função, dado que, no exemplo anterior, houve uma discussão sobre a definição da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ressaltamos que na próxima ficha, abordaremos a definição de funções complexas.

A descrição da letra b) foi a seguinte: b) Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Conforme solicitado na tarefa 1.1, esperava-se que o discente fosse capaz de elaborar os dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, seja por meio de uma lei de formação, como:

$$f(z) = z + 1, \qquad f(z) = z^2, \quad f(z) = e^z \text{ em que } z \in \mathbb{C}\,.$$

ou através de gráficos, ou até mesmo como conjunto.

A descrição da letra c), foi: Defina uma função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$. Como você representaria essa transformação (função)? Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Tínhamos como objetivo trazer um estranhamento para o aluno, porém de modo que compreendesse claramente o que estava sendo solicitado, uma vez que anteriormente foram trabalhadas funções do tipo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Deixando claro que os elementos do domínio seriam números complexos e já os do contradomínio seriam números reais.

Alguns exemplos:

$$f(z_1) = f(a + bi) = 2a, \text{ em que } z_1 \in \mathbb{Z} \text{ e } a, b \in \mathbb{R};$$

$$f(z_2) = f(bi) = e^b, \text{ em que } z_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = \cos x, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ (Lembrando que } \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\text{).}$$

Percebemos que os discentes tiveram muita dificuldade para relatar o que foi solicitado e para pensar nos exemplos, porém a interação das soluções encontradas na sala de aula faz com que a tarefa atinja seu objetivo: gerar a atmosfera da necessidade de estender a definição de funções complexas, analisando o domínio e contradomínio da função.

Ficha de Trabalho 02 – Funções Complexas – 1ª parte

A segunda ficha de trabalho inicia com a Tarefa 2.1 – Definição de Funções Complexas, na qual é apresentada a definição e a escrita de uma função complexa, fazendo analogia às funções reais abordadas anteriormente. Em seguida, são fornecidos alguns exemplos para que os alunos identifiquem a parte real e imaginária das funções complexas. Por fim, ainda na Tarefa 2.1, é apresentado e discutido o gráfico das funções complexas. Utilizamos duas aulas de 50 minutos para a realização da Tarefa 2.1.

O Texto apresentado aos alunos foi: Quando estudamos funções reais de variável real, isto é, $f: A \to \mathbb{R}$ com $A \subset \mathbb{R}$, usamos a notação $y = f(x)$. Assim, por analogia, adotamos a notação $w = f(z)$ para funções complexas de variável complexa.

Como $w = f(z) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$w = f(z) = u + iv, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos representar uma função $f: A \to \mathbb{C},\ \ A \subset \mathbb{C}$, com

$$f(z) = u(z) + i\, v(z),$$

onde u e v são funções de A em $\mathbb{R}$.

Temos $u(z) = Re\big(f(z)\big)$ e $v(z) = Im\left(f(z)\right)$ e, de forma mais usual, escreveremos $u(z) = u(x, y)$, $v(z) = v(x, y)$, $z = x + yi$, pensando em u e v como funções de um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Após a discussão e apresentação da definição de funções complexas, espera-se que os discentes sejam capazes de trabalhar com uma função complexa, identificando tanto a parte real quanto a parte imaginária da função dada. Além disso, espera-se que eles possam identificar as partes real e imaginária mesmo quando a função não for explicitamente apresentada, justificando assim a inclusão dos exemplos. O primeiro exemplo proposto foi: **Exemplo 1)** Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Resolução: Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Como $f(z) = z^2 + 1$, temos

$$f(a + bi) = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

sendo $u(z) = u(x, y) = a^2 - b^2$ e $\quad v(z) = v(x, y) = 2ab.$

De forma geral, os discentes conseguiram fazer o exemplo proposto. Eles se reuniram depois do exemplo e os que não chegaram na mesma reposta entenderam onde tinham errado. Um ponto que nos chamou atenção foi em relação a notação, quando eles trocavam o z por $x + yi$, a maioria continuava usando o $f(z)$. O segundo exemplo proposto foi: **Exemplo 2)** Seja $f(z) = 2z^3 - z + i$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

O objetivo do segundo exemplo é o mesmo do anterior, identificar a parte real e imaginária da função dada, porém com uma função diferente e com mais contas.

Resolução: Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Como $f(z) = 2z^3 - z + i$, temos

$$\begin{aligned} f(a + bi) &= 2(a + bi)^3 - (a + bi) + i \\ &= 2[(a^2 - b^2 + 2abi)(a + bi)] - a - bi + i \\ &= 2(a^3 + a^2bi - ab^2 - b^3i + 2a^2bi - 2ab^2) - a - bi + i \\ &= 2a^3 - 6ab^2 - a - (6a^2b + b^3 + b + 1)i \end{aligned}$$

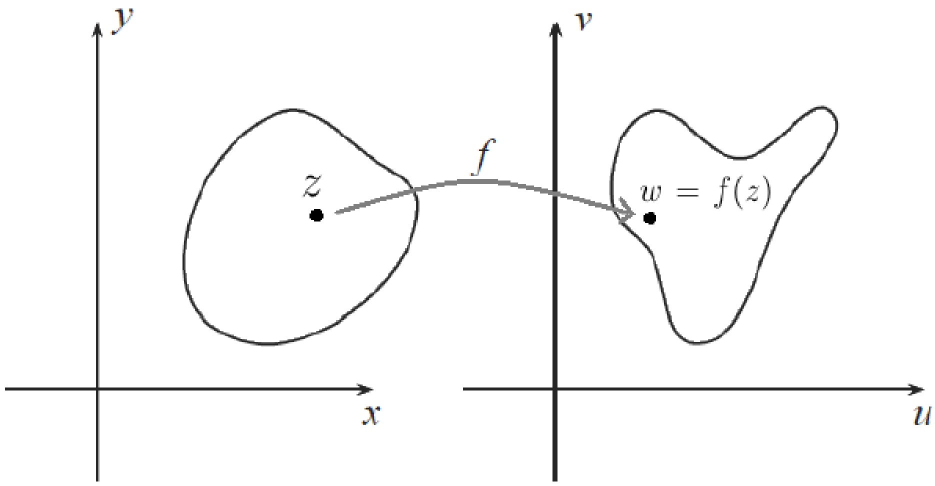
sendo $u(z) = u(x, y) = 2a^3 - 6ab^2 - a$ e $v(z) = v(x, y) = -(6a^2b + b^3 + b + 1)$.

Os discentes conseguiram realizar o exemplo proposto. Novamente, após a atividade, eles se reuniram e aqueles que não chegaram à mesma resposta compreenderam onde haviam errado. Ressaltamos que o objetivo desses dois primeiros exemplos era contribuir para que os discentes se familiarizassem com as funções complexas, analisando o domínio, a lei de formação em função de x e y, e identificando a parte real e imaginária da função. Em seguida, temos o seguinte texto na ficha:

Dada uma função complexa de variável complexa $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar algebricamente, como vimos nos exemplos anteriores, porém, pensando no gráfico dessas funções, vemos que para representar apenas os valores da variável independente z - que é complexa - precisamos do plano de Gauss (duas dimensões); e assim, para fazer um daqueles gráficos necessitaríamos, no total, de quatro dimensões, o que é simplesmente impossível, pois o espaço físico em que vivemos possui somente três dimensões.

Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w = f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificaremos como plano xy, no contradomínio, que identificaremos como plano uv. Deste modo, a função é considerada como uma "transformação". Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Riemann.

Sendo assim, dada uma função $w = f(z)$, é usual imaginar-se $z = x + yi$ variando em um plano denominado plano dos xy e $w = f(z) = u + vi$ variando em outro plano denominado uv. Tem-se, desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$. Exemplo:



Para esta tarefa, apresentamos um breve texto sobre os gráficos das funções complexas e as dificuldades associadas ao seu estudo. Um dos passos é que o aluno compreenda o procedimento para encontrar o conjunto imagem da função. Para isso, incluímos um exemplo em que o aluno deve determinar a imagem de um ponto dado. O exemplo proposto foi o seguinte: Considerando $w = z^2$, em que $w = u + vi$ e $z = x + yi$. Encontre a imagem do ponto $(1,2) \in xy$.

Resolução: Como $w = z^2$, temos que $w = x^2 - y^2 + 2xyi$, sendo assim

$$w(1,2) = 1 - 4 + 2.1.2i = -3 + 4i.$$

Portanto, a imagem do ponto $(1,2)$ é o par $(-3,4)$ em que $u = -3$ e $v = 4$.

Apesar de apresentarem resoluções diferentes, todos os presentes chegaram na mesma resposta. Percebemos que os discentes estavam com mais facilidade para trabalhar com a parte algébrica das funções complexas e que eles estavam produzindo significado na direção do que foi solicitado usando as contas como justificativa.

Ainda na ficha de trabalho 02, temos a Tarefa 2.2 – Domínio das Funções Complexas. Assim como nas funções reais, uma parte significativa dos exercícios é dedicada ao estudo do domínio das funções. Portanto, não poderíamos deixar de abordar o domínio das funções complexas. Por fim, incluímos alguns exemplos para que os alunos praticassem a determinação do domínio das funções complexas. Utilizamos uma aula de 50 minutos para a realização desta tarefa.

O Texto apresentado na ficha foi: Sabemos que, para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f, é preciso especificar também o domínio de definição A. Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de z para os quais faz sentido a expressão analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos "seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z-1)(z+7)}\text{"}$$

estamos usando esta relação para especificar a lei de correspondência f que liga z a w; ao mesmo tempo fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, exceto os pontos $z = 1$ e $z = -7$.

Depois de apresentar uma breve introdução sobre domínio de uma função, solicitamos como exemplo que os discentes encontrassem os valores de z em que a função dada estivesse bem definida. Lembrando que o domínio de f, denotado por $Dom(f)$, é o subconjunto D dos números complexos onde a função está bem definida. O nosso objetivo nessa atividade é verificar se os discentes conseguem produzir significados na direção da definição de domínio de uma função.

A tarefa apresentada foi: Encontre o domínio das seguintes funções: a) $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4}$; b) $g(z) = z^3 - 5z + 1$.

Resolução:

a) $Dom(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm 2i\}$, pois $z^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow z^2 \neq -4 \Rightarrow z \neq \pm 2i$.

b) $Dom(g) = \mathbb{C}$. Lembrando que g é uma função polinomial, ou seja, podemos usar qualquer número complexo.

Como estávamos na parte final da disciplina, três discentes não finalizaram as atividades dessa última ficha de trabalho e apenas duas alunas responderam a tarefa 2.2. As duas alunas chegaram na mesma resposta, conseguindo produzir significados na direção do que foi solicitado.

Olhando para os livros-textos de Matemática que abordam os exemplos e exercícios de funções reais de uma variável real, percebemos que eles não trazem uma caracterização completa. É importante ressaltar que a abordagem que trouxemos para iniciar os estudos das funções complexas é parecida com as abordagens desses livros-textos para as funções reais de uma variável real. Muitos livros de Variáveis Complexas trabalham de forma rápida o assunto das funções complexas, inviabilizando uma discussão aprofundada sobre o tema.

Ficha de Trabalho 03 – Funções Complexas – 2ª parte

A terceira ficha de trabalho começa com a Tarefa 3.1 – Funções Unívocas e Plurívocas, na qual é solicitado ao discente que apresente alguns exemplos de situações que não podem ocorrer em uma função real de uma variável real. O objetivo é preparar o aluno para refletir sobre a existência de casos análogos no contexto das funções complexas, questionando se há situações em que as funções complexas não poderiam existir. Em seguida, são fornecidos exemplos para que os alunos identifiquem se as funções complexas são unívocas ou plurívocas. Como essa ficha não foi aplicada, consideramos a disponibilização de duas aulas de 50 minutos para a realização da tarefa. O Texto apresentado aos alunos foi:

Em relação às funções reais de uma variável real, cite alguns exemplos que não podem acontecer para termos uma função:

Resolução: Nossa expectativa é que o discente cite alguns exemplos em que não pode ocorrer para termos uma função real, por exemplo:

- Um elemento do domínio não pode ter duas imagens distintas;

- Não podemos ter elementos do domínio sem correspondente no contradomínio.

Em seguida apresentamos a seguinte pergunta: Em relação às funções complexas é possível obter imagens diferentes para o mesmo "cara" do domínio? Caso a resposta seja positiva, cite pelo menos um exemplo:

A pergunta anterior foi colocada de forma estratégica, pois um dos primeiros casos que os discentes lembram para não termos uma função real é o fato de que um elemento do domínio não pode ter dois correspondentes distintos. Dessa forma, esperamos que os discentes consigam pensar em exemplos que os levem a uma possível resposta. A resposta à pergunta anterior é sim, e, em seguida, vamos apresentar um texto explicando quando isso ocorre e o nome dado à função nesses casos.

Se a cada z corresponde somente um valor de w, dizemos que w é uma função unívoca de z, ou simplesmente uma função de z. Se a cada valor de z corresponde mais de um valor de w, dizemos que w é uma função plurívoca de z, ou seja, é possível obter imagens diferentes para o mesmo "cara" do domínio.

Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, e cada uma delas é chamada um ramo da função. Dentre todos os ramos, existe um, ao qual damos o nome de ramo principal da função plurívoca e o valor da função correspondente a esse ramo é o valor principal da função plurívoca. Logo depois, apresentamos duas funções como exemplo, para que o discente avalie se a função é unívoca ou plurívoca. **Exemplo:** Identifique se as seguintes funções são unívocas ou plurívocas:

a) $w = z^2$;

Resposta: Temos que para cada z existe um e somente um w. Então, $w = f(z) = z^2$ é uma função unívoca.

b) $w = z^{1/2}$.

Resposta: Como $w = \sqrt{z}$, temos que para cada valor de z, existem dois valores de w. Então, $w = f(z) = \sqrt{z}$ é uma função plurívoca de z.

De fato, escolhendo $z = -15 - 8i$, vamos obter as seguintes imagens distintas: $w_1 = -1 + 4i$ e $w_2 = 1 - 4i$.

Podemos usar as fórmulas apresentadas na primeira parte do curso para encontrar as raízes de um número complexo ou usar o seguinte método: Seja $p + iq$, onde p e q são reais, as raízes quadradas desejadas. Então:

$$\begin{aligned} \sqrt{-15-8i} = p + qi \quad &\Rightarrow \quad -15 - 8i = (p+qi)^2 \\ &\Rightarrow \quad -15 - 8i = p^2 - q^2 + 2pqi \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} p^2 - q^2 = -15 & (1) \\ pq = -4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo $q = -\frac{4}{q}$ de (2) em (1), temos $p^2 - \frac{16}{p^2} = -15$ ou $p^4 + 15p^2 - 16 = 0$, isto é $(p^2+16)(p^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; p^2 + 16 = 0$ ou $p^2 - 1 = 0$, ou seja, $p^2 = -16$ ou $p^2 = 1$. Como p é real, $p = \pm 1$.

De (2) se $p = 1$ então $q = -4$ e se $p = -1$ então $q = 4$. Assim, as raízes são

$$-1 + 4i \qquad \text{e} \qquad 1 - 4i.$$

Observe que: $(-1+4i)^2 = (1-4i)^2 = -15 - 8i$.

Nesta tarefa e nas próximas, não incluiremos comentários dos alunos, pois as tarefas não foram aplicadas. Em vez disso, sugerimos um tempo para a aplicação das fichas, juntamente com comentários e resoluções das tarefas.

Ainda na ficha de trabalho 03, temos a Tarefa 3.2 – Funções Inversas. Nessa tarefa, foi solicitado aos discentes que definissem a função inversa para funções reais de uma variável real. Acreditamos que duas aulas de 50 minutos são o suficiente para Tarefa 3.2. O objetivo é fazer com que os alunos relembrem a definição de uma função inversa, exercitem sua escrita e preparem o caminho para trabalhar com funções inversas das funções complexas. Na sequência, apresentamos duas definições:

Definição do Stewart (Cálculo I): Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.

Definição do Iezzi (Fundamentos de Matemática Elementar I): Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos função inversa de f e indicamos por f^{-1}.

Em relação as definições anteriores, temos que a maioria das definições de funções inversas dos livros de matemática são parecidas. O que diferencia são as propriedades, consequências e como é o procedimento para encontrar a função inversa. Em seguida colocamos a seguinte tarefa: É possível encontrar a função inversa das seguintes funções? a) $y = x^2$; b) $y = x + 1$. Quando for possível, encontre sua inversa.

Depois de trabalhar com a definição de função inversa, é esperado que os discentes consigam produzir significados na direção de quando uma função real possui ou não uma inversa. Para dar continuidade nas próximas tarefas é importante que o discente lembre de como encontrar a inversa de uma função real.

Resposta: a) A função $y = x^2$ não possui inversa, pois ela não é injetora, observe que $f(-1) = f(1) = 1$. Assim como na maioria dos livros de Cálculo, não foi informado o Domínio e nem o Contradomínio, como estamos falando de funções reais, fica subentendido que tanto o Domínio quanto o Contradomínio são o conjunto dos números reais.

Resposta: b) A função $y = x + 1$ é uma função afim crescente, logo bijetora e, portanto, possui inversa. Normalmente usamos o seguinte procedimento para encontrar a inversa de uma função real:

I) Escreva a função na forma $y = f(x)$: $y = x + 1$;

II) Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível): $x = y - 1$;

III) Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y: $f^{-1}(x) = x - 1$.

Diferentemente das propostas anteriores, agora vamos apresentar a definição de Funções Inversas de Funções Complexas e propor novas tarefas.

O texto descrito na ficha foi o seguinte: Seja f uma função de variável complexa definida em $f: A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{C}$, bijetora e tal que $f(z) = w$. Chama-se função g inversa de f, com $g: B \to A$ tal que $g(w) = z$.

Notação: $g = f^{-1}$; Temos também que

$$f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z, \quad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Podemos fazer o mesmo procedimento feito para encontrar a função inversa das funções reais no caso das funções complexas. Na sequência colocamos o seguinte exemplo como tarefa: Obtenha a inversa da função $f(z) = 5z + 2 - 4i$.

Depois de trabalhar com a função inversa das funções reais, é esperado que o discente consiga produzir significados na direção do que foi solicitado.

Resposta: Seja w a imagem de z pela função f. Agora, vamos fazer

$$z = f(w) \;\Rightarrow\; z = 5w + 2 - 4i \quad \Rightarrow \quad w = \frac{z - 2 + 4i}{5}$$

Assim, $f^{-1}(z) = \frac{z-2+4i}{5}$.

Colocamos mais um exemplo de função inversa, mas com uma proposta diferente das anteriores. O discente terá que usar a parte da definição de raiz de um número complexo que foi trabalhado na primeira parte do curso e uma parte mais algébrica para resolver o exemplo. O segundo exemplo apresentado foi: Obtenha a inversa f^{-1} da função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida pela lei $f(z) = z^4$ de modo que

$$f^{-1}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Resposta: Seja w a imagem de z pela função f. Onde $w = z^4$. Agora, vamos reescrever $z = f(w)$, ou seja, $z = w^4$, o que implica

$$\begin{aligned} w = f^{-1}(z) = \sqrt[4]{z} \\ = |z|^4 \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Onde $\theta = Arg\, z$ e $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando a condição dada:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \sqrt[4]{(-1)^2}\,\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{4}$$

$$\frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2n\,\pi$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2n\,\pi \quad \Rightarrow \quad k = 4n.$$

Portanto,

$$f^{-1}(z) = |z|^4 \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)$$

é a inversa de f se, e somente se, k é múltiplo de 4.

Nossa intenção é trabalhar com as funções complexas de forma mais gradual, analisando as definições e discutindo exemplos, assim como é feito no caso das funções reais. Nos livros-texto de Variáveis Complexas, a introdução às funções complexas costuma ser abordada de maneira mais rápida. Na próxima ficha, apresentaremos duas funções elementares: as funções exponenciais e logarítmica, agora no contexto das funções complexas.

Ficha de Trabalho 04 – Funções Elementares

1ª Parte- Funções Exponencias

Nesta última ficha de trabalho, vamos explorar as Funções Exponenciais e Logarítmicas no contexto dos números complexos. As tarefas iniciarão com os discentes sendo convidados a definir as funções exponenciais e logarítmicas no âmbito dos números reais, para que, em seguida, possamos introduzir suas definições na forma complexa. Assim como nas tarefas anteriores, também pediremos aos discentes que definam as funções exponenciais e logarítmicas, agora considerando o contexto dos números complexos. Estimamos que serão necessárias pelo menos duas aulas de 50 minutos para a resolução das tarefas desta primeira parte da Ficha de Trabalho 04. A seguir, propomos a seguinte tarefa: Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Exponencial:

A nossa expectativa é que o discente lembre da definição de função exponencial e as principais propriedades de potência, conseguindo produzir significados para aquele assunto. Assim como na primeira pergunta da primeira ficha, acreditamos ser um momento de partida para começar a se trabalhar com a definição de função exponencial complexa, além de continuar exercitando sua escrita. Dando prosseguimento, temos a seguinte pergunta: Como você definiria função exponencial complexa?

Depois de trabalhar com a definição de função exponencial de uma variável real, nossa expectativa é que o discente consiga produzir significados na direção da definição de função exponencial complexa e talvez pensar em nossas escritas para definição.

Antes de definir a função exponencial complexa, vamos primeiro explorar algumas fórmulas para tornar nossa escrita mais clara e facilitar a compreensão do tema. Em seguida apresentaremos a definição de uma função complexa exponencial e algumas observações. O seguinte texto é acrescentado na Ficha de Trabalho:

Antes de apresentar a definição da função exponencial complexa é importante lembrarmos da fórmula de Euler[3]:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\, sen\,\theta.$$

[3] Demonstração da Fórmula de Euler no Final da Ficha de Trabalho 04.

Um caso especial da fórmula de Euler, também conhecida como identidade de Euler é quando $\theta = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\, sen\, \pi = -1.$$

Definição: Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função. Se $z = x + iy$ é um número complexo com $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial complexa é definida da seguinte maneira:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i\, sen\, y),$$

onde $e = 2{,}71828$ ... é base natural dos logaritmos.

Observações:

i) Se a é real e positivo, definimos

$$a^z = e^{z \ln a}$$

onde $\ln a$ é o logaritmo natural a.

ii) As funções exponenciais complexas têm propriedades semelhantes às das funções exponenciais reais. Por exemplo,

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \text{e} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

iii) A função exponencial complexa nunca se anula. Se $z = x + iy$, então $e^z = e^x(\cos x + i\, sen\, y)$. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função e^z só se anularia se $\cos y + i\, sen\, y$ fosse nulo para algum y real. Mas isso nunca ocorre, pois as funções seno e cosseno não se anulam simultaneamente já que $\cos^2 y + sen^2 y = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, o contradomínio da função exponencial complexa é o conjunto dos números complexos não nulos.

As observações anteriores podem ser sugeridas para os alunos demonstrarem ou para discussões em sala de aula, mas preferimos apresentá-las de forma mais rápida para que os alunos possam se concentrar nos exercícios que vêm a seguir.

Serão propostos os seguintes exercícios, acompanhados pelas respectivas resoluções

1) Mostre que se z for real ($z = x + i \cdot 0$), então $f(z) = e^x$.

Resposta: Seja $f(z) = e^z$ uma função complexa, com $z = x + i.0$. Assim $f(z) = e^{x+0.i} = e^x e^0 = e^x$. Ou ainda, usando a definição apresentada:

$$f(z) = e^x(\cos 0 + i\, sen\, 0) = e^x.$$

2) Em relação a função $f(z) = e^z$, o que acontece quando $z = x + i\pi$? Que conclusão podemos tirar em relação a função exponencial real?

Resposta: Usando a definição, temos:

$$f(z) = e^x(\cos \pi + i\, sen\, \pi) = -e^x < 0,$$

Uma vez que e^x é sempre positivo, para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos concluir que a função exponencial complexa pode assumir valores negativos, diferentemente da função exponencial real.

3) Se $e^z = e^w$ com $z, w \in \mathbb{C}$ podemos afirmar que $z = w$?

Resposta: Vamos considerar $z = x + yi$ e $w = u + vi$ dois números complexos com x, y, u e $v \in \mathbb{R}$. Assim,

$$e^{x+yi} = e^{u+vi} \quad \Rightarrow \quad e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^u\, (\cos v + i \operatorname{sen} v).$$

Disso resulta que $z = x + yi = u + (v + 2k\pi)i = u + vi + 2k\pi i = w + 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $e^z = e^w$ com $z, w \in \mathbb{C}$ quando $z = w + 2k\pi i$. Podemos concluir ainda, que a função e^z é periódica de período $2\pi i$.

4) Calcule o módulo de e^z com $z \in \mathbb{C}$.

Resposta: $|e^z| = |e^x||\cos y + i\, sen\, y| = e^x \sqrt{(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} = e^x$. Assim, podemos reescrever a função exponencial complexa da seguinte forma:

$$f(z) = e^z = |e^z|\,(\cos y + i \text{ sen } y).$$

Ou ainda como $f(z) = |e^z|\, e^{yi}$.

5) Encontre as soluções da equação $e^z = -1$.

Resposta: Queremos encontrar os valores de $z = x + yi$ complexo tal que $e^z = -1$, ou seja,

$$e^x(\cos y + i \text{ sen } y) = -1 = -1 + 0i$$

isso implica que:

$$\begin{cases} e^x \cos y = -1 \\ e^x \text{ sen} y = 0 \end{cases}$$

Olhando para primeira equação, temos que $\cos y < 0$, pois $e^x > 0$. Já olhando para segunda equação, temos que sen $y = 0$, pois $e^x \neq 0$. Então, as únicas possibilidades para y são

$$y = (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrar o valor de x, basta tomar a primeira equação do sistema: $e^x \cos y = -1$ e substituir os valores que encontramos para y:

$$e^x = 1, \qquad \text{logo}, \qquad x = 0.$$

Portanto: $z = 0 + (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em contraste com as fichas de trabalho iniciais, optamos por incluir exercícios que abordam propriedades e resultados importantes das funções exponenciais complexas. Ressaltamos que a abordagem permanece a mesma: os alunos tentam resolver as questões, seguido por discussões em grupo e, por fim, a conversa com o professor.

2ª parte - Funções Logarítmicas

O procedimento adotado nesta segunda parte é semelhante ao anterior: solicitaremos que o discente apresente a definição da função logarítmica real, seguida da sua forma complexa. No entanto, aqui surge a questão da função inversa, e queremos observar como o discente abordará a definição da função logarítmica complexa. Em seguida, apresentaremos a definição da função logarítmica complexa, algumas observações, e, por fim, alguns exercícios, conforme feito para as funções exponenciais. Estimamos que serão necessárias pelo menos duas aulas de 50 minutos para a realização dessas tarefas. A ficha de trabalho prossegue com a seguinte pergunta: Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Logarítmica.

A nossa expectativa é que o discente lembre da definição de função logarítmica e as principais propriedades de logaritmo, conseguindo produzir significados para aquele assunto. Dando continuidade, temos a seguinte pergunta: Como você definiria Logarítmica Complexa? Podemos afirmar que a função logarítmica complexa é a função inversa da função exponencial complexa? Explique:

Lembrando das funções reais de uma variável real, é comum que o discente acredite que a que a função logarítmica complexa seja a função inversa da função exponencial complexa. Até o presente momento, já estudamos funções inversas e as funções exponenciais complexas, dessa forma, esperamos que os discentes consigam produzir significados na direção do que foi solicitado, sem se preocupar com uma reposta “certa” ou “errada”. Para explicar a definição da função logarítmica complexa, temos o seguinte texto na ficha de trabalho:

Sabemos que a função logarítmica real é a função inversa da função exponencial real. Já para as funções complexas temos que tomar um certo cuidado. Vimos anteriormente, que a função exponencial complexa não é injetora (periódica de período $2\pi i$), portanto, não admite inversa em $\mathbb{C}$.

Para definirmos a função logarítmica complexa, vamos primeiramente fixar um número complexo $z \neq 0$ da forma $z = e^w$, em que $w = a + bi \in \mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Lembrando que o número complexo $z = e^w = |z|e^{i\theta}$, assim

$$e^w = e^{a+bi} = e^a . e^{ib} = |z|e^{i\theta}$$

o que implica que

$$\begin{cases} e^{a} = |z| \\ e^{ib} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \ln|z| \\ b = \theta + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, $w = \ln|z| + i\,(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. Em seguida é apresentado a definição da função logarítmica complexa:

Definição: Se $z = e^{w} \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, então escrevemos $w = \ln z$, e chamamos logaritmo natural de z. Assim, a função logarítmica natural pode ser definida por

$$w = \ln z = \ln|z| + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{argumento\ de\ z}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

em que $\ln|z|$ indica o logaritmo natural real de um número positivo $|z|$ e θ medido em radianos.

Antes de iniciamos os exercícios, apresentamos as seguintes observações:

i) Temos que $\ln(z)$ é uma função plurívoca (tem infinitos ramos) e valor principal ou ramo principal de $\ln(z)$ é definido comumente por $\ln|z| + i\,\theta$ (fazendo $k = 0$), onde $0 \leq \theta < 2\pi$. Entretanto, qualquer outro intervalo de comprimento 2π pode ser tomado, por exemplo $-\pi < \theta \leq \pi$, etc.

ii) A função logarítmica pode ser definida para bases reais, diferentes do e. Assim, se

$$z = a^{w}, \text{ então } w = \log_a z, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1,$$

neste caso, $z = e^{w \ln a}$.

iii) Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, temos que:

a) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$;

b) $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$;

c) $\log(z_1)^m = m \log z_1$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$.

Assim como nas funções exponencias complexas, colocamos as observações que podem ser sugeridas para os alunos demonstrarem ou para discussões em sala de aula. A seguir serão propostos os seguintes exercícios, acompanhados pelas respectivas resoluções

1) Calcule os seguintes logaritmos: a) $\ln(i)$

Resposta: $\ln(i) = \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Lembrando que $z = (0,1),\ |z| = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

b) $\ln\,(1 + i)$

Resposta: $\ln(1 + i) = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Lembrando que $z = (1,1),\ |z| = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c) $\ln(-2)$

Resposta: $\ln(-2) = \ln|-2| + (\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$$= \ln 2 + i((2k + 1)\pi)\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Lembrando que $z = (-2,0),\ |z| = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi$.

Diferentemente da função logarítmica real, na função logarítmica complexa podemos calcular logaritmos de números reais negativos, e ainda obtemos infinitas soluções para a equação. Continuando com as perguntas apresentadas na ficha te trabalho, temos:

2) É possível calcular $\ln 1$ e $\ln 0$. Quando for possível, encontre resolva o logaritmo.

a) $\ln 1 = \ln|1| + i(0 + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$

$$= 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Não é possível calcular $\ln 0$, pois $\ln|0| = \ln 0$ não está definido.

Como vimos no exercício anterior, é possível calcular logaritmos de números negativos, porém o logaritmo do complexo $z = (0{,}0)$ continua não definido, pois como esse complexo possui módulo igual a 0, é impossível calcularmos o logaritmo ln 0.

3) As propriedades apresentadas na observação iii) também são válidas para o logaritmo principal?

Resposta: Basta tomar um contraexemplo para ver que as propriedades não são válidas para o logaritmo principal. Vamos considerar os seguintes números complexos $z = w = -1$. Assim,

$$\log(zw) = \log(z^2) = \log(i^2) = \log(-1) = \ln|-1| + i(\pi) = i\pi.$$

Por outro lado, $\log(-i) = \ln|-i| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ln 1 - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\log(z) + \log(w) = 2\log(z) = 2\log(-i) = -\frac{2i\pi}{2} = -i\pi.$$

Portanto, concluímos que $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$.

Poderíamos também, escolher os seguintes números complexos $z = -i$ e $w = i$ para ver que a segunda propriedade não funciona para o logaritmo principal:

$$\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log(-1) = i\pi.$$

E por outro lado, $\log(-i) - \log(i) = -\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} = -i\pi$.

4) Por meio do logaritmo complexo, resolva a seguinte equação:

$$e^{2z} + e^{z} + 1 = 0.$$

Resposta: Seja $x = e^{z}$, assim, a equação dada pode ser escrita como

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

As raízes dessa equação são $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Para $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, temos $e^z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, o que implica $z_1 = \log\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Logo

$$\begin{aligned} z_1 = \log\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \ln\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln 1 + \ + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &= 2\pi i\ \left(\frac{1}{3} + k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Observe que $\ln\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \ln\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \ln 1 = 0$ e que $\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Para $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, temos $e^z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, o que implica $z_2 = \log\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Logo

$$\begin{aligned} z_2 = \log\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \ln 1 + i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &= 2\pi i\ \left(\frac{2}{3} + k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções da equação dada são

$$z_1 = 2\pi i\ \left(\frac{1}{3} + k\right), k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad z_2 = 2\pi i\ \left(\frac{2}{3} + k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

O objetivo desses exercícios era ilustrar o comportamento da função logarítmica no contexto dos números complexos, sempre fazendo uma comparação com as funções reais, para melhor compreendermos seu funcionamento no conjunto complexo. Naturalmente, as operações não se comportam da mesma forma que no conjunto dos reais. Por exemplo, nos primeiros exercícios, solicitamos aos discentes que calculassem os logaritmos de alguns números complexos. Como o domínio aqui é distinto do domínio das funções reais, surgem excelentes oportunidades para discussões entre os alunos e, posteriormente, para uma troca de ideias com a turma, utilizando a dinâmica apresentada neste trabalho.

Não aprofundamos nossos estudos nas funções exponencial e logarítmica complexas, tampouco nos concentramos nas representações gráficas e nas múltiplas transformações possíveis. Nosso foco estava nos estudos introdutórios de funções complexas. Acreditamos que as fichas apresentadas sejam um ponto de partida para esses estudos iniciais de um curso de Variáveis Complexas.

SUGESTÕES DE LEITURA

[1] Para conhecer sobre a metodologia denominada *Assimilação Solidária* veja as seguintes referências:

BALDINO, Roberto R. **Assimilação Solidária**. Rio Claro, SP: Notas do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA, IGCE – Departamento de Matemática, 1995a.

BALDINO, Roberto R. **Desenvolvimento de Essências do Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

[2] Para conhecer dissertações em Educação Matemática que discutem a matemática do ensino superior veja as seguintes referências. O objetivo dessas dissertações consistia em mapear as características das disciplinas da Licenciatura em Matemática, cada uma voltada para um tópico específico.

ALMEIDA, Vitor R. **Álgebra linear como um curso de serviço**: o estudo das transformações lineares. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ALVES, Aretha F. **Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática**: o estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

OLIVEIRA, Tiago **O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas.** 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

PROCOPIO, Ricardo B. **Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos**. 2011. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

SOUZA, Lectícia S. R. **Variaveis Complexas na Licenciatura em Matemática: noções de números complexo,** 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

[3] Para conhecer produtos educacionais em Educação Matemática que discutem a matemática do ensino superior com a proposta de fichas de trabalho veja as seguintes referências.

ALMEIDA, V. R. Produto educacional: **Álgebra linear como um curso de serviço**: o estudo das transformações lineares. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://www2.ufjf.br/ppgedumat/publicacoes/produtos-educacionais/

ALVES, A. F. Produto educacional: **Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática**: o estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://www2.ufjf.br/ppgedumat/publicacoes/produtos-educacionais/

PROCOPIO, R. B. Produto educacional: **Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos**. 2011. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011. Disponível em: https://www2.ufjf.br/ppgedumat/publicacoes/produtos-educacionais/

SOUZA, Lectícia S. R. **O Ensino de Variaveis Complexas na Licenciatura em Matemática: noções de números complexos**. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

[4] São referências de livros-texto utilizadas no Curso de Matemática para a disciplina Variáveis Complexas:

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

CHURCHILL, Ruel V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo, SP: Mcgraw-Hill do Brasil. 1975.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNADES Jr, Nilson C. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. Coleção Textos Universitários, Rio de janeiro, RJ: SBM, 2016.

IEZZI, Gelson, et al. **Fundamentos de Matemática Elementar 6**. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

SPIEGEL, Murray R., **Variáveis Complexas.** Coleção Schaum. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

É fundamental notar que os livros mencionados abordam os números e funções complexas de maneira semelhante, apresentando definições, teoremas, corolários, propriedades, exemplos e exercícios, diferente da nossa proposta neste trabalho.

ANEXOS – FICHAS DE TRABALHO PARA USO EM SALA DE AULA

Ficha de Trabalho 01 - Introdução às Funções Complexas

Caro estudante,

A tarefa a seguir deve ser resolvida individualmente e posteriormente discutida com a turma de modo que cada aluno possa apresentar suas ideias durante a resolução, suas dúvidas e como chegou à resposta.

Como combinamos, a proposta da dinâmica das nossas aulas será conduzida pela seguinte conduta: quem tem dúvidas e não tem certeza de como chegar à resposta ou não tem certeza de o que fez está correto, fala primeiro. Quem na turma tem alguma certeza de como chegar a reposta ou que chegou à resposta da tarefa, fala por último.

Recordamos também que o importante em nosso trabalho de sala de aula não é que você saiba sobre todas as coisas ou apresente sempre a resposta correta, mas é que todos digam o que estão pensando e do resultado de nossa reflexão e discussão conjunta todos aprendam de maneira colaborativa.

Tarefa 1.1 - Função real de uma variável real

Defina função real de uma variável real. Dê exemplos:

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que possui como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais, chamamos de função real de uma variável real ou função de uma variável real a valores reais. Em símbolos:

$$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto y = f(x)
\end{aligned}
$$

Tarefa 1.2 - Introdução a Funções Complexas

Vamos pensar em funções complexas:

a) Defina uma função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Como você representaria essa transformação (função)?;

b) Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

c) Defina uma função $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$. Como você representaria essa transformação (função)? Dê dois exemplos de funções do tipo $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ficha de Trabalho 02 – Funções Complexas – 1ª parte

Tarefa 2.1 – Definição de Funções Complexas

Quando estudamos funções reais de variável real, isto é, $f: A \to \mathbb{R}$ com $A \subset \mathbb{R}$, usamos a notação $y = f(x)$. Assim, por analogia, adotamos a notação $w = f(z)$ para funções complexas de variável complexa.

Como $w = f(z) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$w = f(z) = u + iv, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos representar uma função $f: A \to \mathbb{C},\ \ A \subset \mathbb{C}$, com

$$f(z) = u(z) + i\, v(z),$$

onde u e v são funções de A em $\mathbb{R}$.

Temos $u(z) = Re\big(f(z)\big)$ e $v(z) = Im\,\big(f(z)\big)$ e, de forma mais usual, escreveremos $u(z) = u(x,y)$, $v(z) = v(x,y)$, $z = x + yi$, pensando em u e v como funções de um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

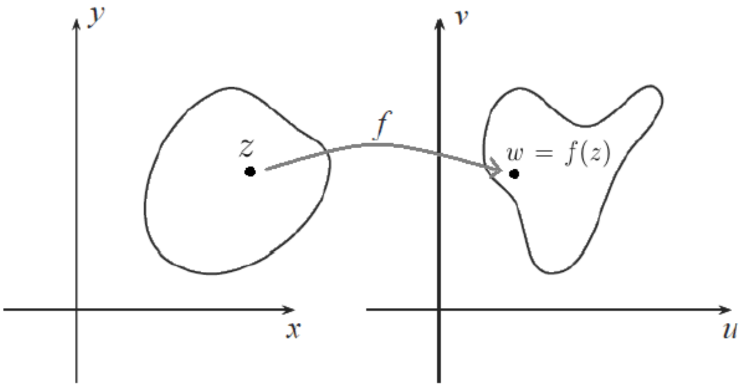
Exemplo: Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x,y)$ e $v(z) = v(x,y)$.

Exemplo: Seja $f(z) = 2z^3 - z + i$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Dada uma função complexa de variável complexa $f: A \to \mathbb{C},\ A \subset \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar algebricamente, como vimos nos exemplos anteriores, porém, pensando no gráfico dessas funções, vemos que para representar apenas os valores da variável independente z - que é complexa - precisamos do plano de Gauss (duas dimensões); e assim, para fazer um daqueles gráficos necessitaríamos, no total, de quatro dimensões, o que é simplesmente impossível, pois o espaço físico em que vivemos possui somente três dimensões.

Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w = f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificaremos como plano xy, no contradomínio, que identificaremos como plano uv. Deste modo, a função é considerada como uma "transformação". Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Riemann.

Sendo assim, dada uma função $w = f(z)$, é usual imaginar-se $z = x + yi$ variando em um plano denominado plano dos xy e $w = f(z) = u + vi$ variando em outro plano denominado uv. Tem-se, desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$. Exemplo:



Exemplo: Considerando $w = z^2$, em que $w = u + vi$ e $z = x + yi$. Encontre a imagem do ponto $(1,2) \in xy$.

Tarefa 2.2 – Domínio das Funções Complexas

Sabemos que, para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f, é preciso especificar também o domínio de definição A. Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de z para os quais faz sentido a expressão analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos "seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z-1)(z+7)}\text{"}$$

estamos usando esta relação para especificar a lei de correspondência f que liga z a w; ao mesmo tempo fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, exceto os pontos $z = i$ e $z = -7$.

Exemplo: Encontre o domínio das seguintes funções

a) $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4}$;

b) $g(z) = z^3 - 5z + 1$.

Ficha 03 – Funções Complexas – 2ª parte

Tarefa 3.1 – Funções Unívocas e Plurívocas

Em relação às funções reais de uma variável real, cite alguns exemplos que não podem acontecer para termos uma função:

Em relação às funções complexas é possível obter imagens diferentes para o mesmo cara do domínio? Caso a resposta seja positiva, cite pelo menos um exemplo:

Se a cada z corresponde somente um valor de w, dizemos que w é uma função unívoca de z, ou simplesmente uma função de z. Se a cada valor de z corresponde mais de um valor de w, dizemos que w é uma função plurívoca de z.

Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, e cada uma delas é chamada um ramo da função. Dentre todos os ramos, existe um, ao qual damos o nome de ramo principal da função plurívoca e o valor da função correspondente a esse ramo é o valor principal da função plurívoca.

Exemplo: Identifique se as seguintes funções são unívocas ou plurívocas:

a) $w = z^2$;

b) $w = z^{1/2}$.

Tarefa 3.2 – Funções Inversas

Em relação às funções reais de uma variável real, defina função inversa.

É possível encontrar a função inversa das seguintes funções?

a) $y = x^2$;

b) $y = x + 1$.

Quando for possível, encontre sua inversa.

Seja f uma função de variável complexa definida em $f: A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{C}$, bijetora e tal que $f(z) = w$. Chama-se função g inversa de f, com $g: B \rightarrow A$ tal que $g(w) = z$. Notação: $g = f^{-1}$.

Temos também que

$$f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z, \quad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Observação: Podemos fazer o mesmo procedimento feito para encontrar a função inversa das funções reais no caso das funções complexas.

Exemplo: Obtenha a inversa da função $f(z) = 5z + 2 - 4i$;

Exemplo: Obtenha a inversa f^{-1} da função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida pela lei $f(z) = z^4$ de modo que

$$f^{-1}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Ficha de Trabalho 04 – Funções Elementares – 1ª parte

Funções Exponenciais

Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Exponencial:

Como você definiria função exponencial complexa?

Antes de apresentar a definição da função exponencial complexa é importante lembrarmos da fórmula de Euler[4]:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sen\,\theta.$$

Um caso especial da fórmula de Euler, também conhecida como identidade de Euler é quando $\theta = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,sen\,\pi = -1.$$

Definição: Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função. Se $z = x + iy$ é um número complexo com $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial complexa é definida da seguinte maneira:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i\,sen\,y),$$

onde $e = 2{,}71828\ldots$ é base natural dos logaritmos.

Observações:

i) Se a é real e positivo, definimos

$$a^z = e^{z\ln a}$$

onde $\ln a$ é o logaritmo natural a.

ii) As funções exponenciais complexas têm propriedades semelhantes às das funções exponenciais reais. Por exemplo,

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{e} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

iii) A função exponencial complexa nunca se anula. Se $z = x + iy$, então $e^z = e^x(\cos x + i\,\text{sen}\,y)$. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função e^z só se anularia se $\cos y + i\,\text{sen}\,y$ fosse nulo para algum y real. Mas isso nunca ocorre, pois as funções seno e cosseno não se anulam simultaneamente já que $\cos^2 y + \text{sen}^2 y = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, o contradomínio da função exponencial complexa é o conjunto dos números complexos não nulos.

[4] Demonstração da Fórmula de Euler no Final da Ficha de Trabalho.

Exercícios:

1) Mostre que se z for real $(z = x + i \cdot 0)$, então $f(z) = e^x$.

2) Em relação a função $f(z) = e^z$, o que acontece quando $z = x + i\pi$? Que conclusão podemos tirar em relação a função exponencial real?

3) Se $e^z = e^w$ com $z, w \in \mathbb{C}$ podemos afirmar que $z = w$?

4) Calcule o módulo de e^z com $z \in \mathbb{C}$.

5) Encontre as soluções da equação $e^z = -1$.

Funções Logarítmicas

Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Logarítmica:

Como você definiria Logarítmica Complexa? Podemos afirmar que a função logarítmica complexa é a função inversa da função exponencial complexa? Explique:

Sabemos que a função logarítmica real é a função inversa da função exponencial real. Já para as funções complexas temos que tomar um certo cuidado. Vimos anteriormente, que a função exponencial complexa não é injetora (periódica de período $2\pi i$), portanto, não admite inversa em $\mathbb{C}$.

Para definirmos a função logarítmica complexa, vamos primeiramente fixar um número complexo $z \neq 0$ da forma $z = e^w$, em que $w = a + bi \in \mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Lembrando que o número complexo $z = e^w = |z|e^{i\theta}$, assim

$$e^w = e^{a+bi} = e^a . e^{ib} = |z|e^{i\theta}$$

o que implica que

$$\begin{cases} e^a = |z| \\ e^{ib} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \ln|z| \\ b = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Portanto, $w = \ln|z| + i\,(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Definição: Se $z = e^w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, então escrevemos $w = \ln z$, e chamamos logaritmo natural de z. Assim, a função logarítmica natural pode ser definida por

$$w = \ln z = \ln|z| + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{argumento\ de\ z}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

em que $\ln|z|$ indica o logaritmo natural real de um número positivo $|z|$ e θ medido em radianos.

Observações:

i) Temos que $\ln z$ é uma função plurívoca (tem infinitos ramos) e **valor principal** ou ramo principal de $\ln z$ é definido comumente por $\ln|z| + i\,\theta$, onde $0 \leq \theta < 2\pi$. Entretanto, qualquer outro intervalo de comprimento 2π pode ser tomado, por exemplo $-\pi < \theta \leq \pi$, etc.

ii) A função logarítmica pode ser definida para bases reais, diferentes do e. Assim, se

$$z = a^w, \text{ então } w = \log_a z, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1,$$

neste caso, $z = e^{w \ln a}$.

iii) Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, temos que:

a) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$;

b) $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$;

c) $\log(z_1)^m = m \log z_1$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$.

Exercícios:

1) Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\ln(i)$;

b) $\ln\,(1 + i)$;

c) $\ln(-2)$.

2) É possível calcular ln 1 e ln 0? Quando for possível, resolva o logaritmo.

3) As propriedades apresentadas na observação iii) também são válidas para o logaritmo principal?

4) Por meio do logaritmo complexo, resolva a seguinte equação:

$$e^{2z} + e^{z} + 1 = 0.$$

Apêndice – Fórmula de Euler

A série de potências

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todo número real ou complexo. Se fizermos $x = i\theta$, θ um número real, então

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,\theta)^n}{n!} = 1 + i\,\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots \qquad (1)$$

Agora, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e assim por diante. Logo, (1) pode ser separada em parte real e parte imaginária:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \qquad (2)$$

Mas, lembramos que

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1},$$

em que cada série converge para todo número real θ. Portanto, (2) pode ser escrita como

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta. \qquad (3)$$

Esse último resultado é conhecido como fórmula de Euler. Note que, em vista de (3), a forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ de um número complexo pode ser expressa de maneira compacta:

$$z = |z|e^{i\theta}.$$