

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Laiane Camões Da Silva Velloso

Pensamento Algébrico e Aritmético: interlocuções nos anos iniciais

Juiz de Fora

2024

Laiane Camões Da Silva Velloso

Pensamento Algébrico e Aritmético: interlocuções nos anos iniciais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana de Oliveira

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Velloso, Laiane Camões da Silva.

Pensamento Algébrico e Aritmético : interlocuções nos anos iniciais / Laiane Camões da Silva Velloso. – 2024.
102 p. : il.

Orientadora: Rosana de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Pensamento algébrico. 3. Formação de Professores. 4. Produção de Significados. I. Oliveira, Rosana de, orient. II. Título.

Laiane Camões da Silva Velloso

"Pensamento Algébrico e Aritmético: interlocuções nos anos iniciais."

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 27 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Rosana de Oliveira - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Andreia Carvalho Maciel Barbora - Membro
externo Colégio Pedro II

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Membro interno
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 26/09/2024.



Documento assinado eletronicamente por Andreia Carvalho Maciel Barbosa, Usuário Externo, em 24/02/2025, às 23:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Amarildo Melchiades da Silva, Professor(a), em 21/03/2025, às 10:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Rosana de Oliveira, Usuário Externo, em 22/03/2025, às 18:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufff (www2.ufff.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador 2007348 e o código CRC 923B00D4.

Dedico este trabalho à Deus, que independente das circunstâncias está sempre ao meu lado, e a minha avó Maria José Camões (in memoriam), que foi uma mulher incrível e apesar do pouco letramento sempre nos ensinou o quanto a educação é importante.

AGRADECIMENTOS

Independentemente de quem somos, temos uma trajetória e nesta caminhada há pessoas que tornam o caminho mais leve, satisfatório, que acolhem e nos mostram o quanto somos importantes e capazes e diante disso não posso deixar de agradecer:

Aos meus pais, por todo incentivo e investimento na minha base, por incansavelmente mostrarem o quanto a educação era importante e por isso tanto esforço para me darem a melhor escola que podiam.

À minha irmã, que sempre me dizia pra manter a calma e só me deixava mais nervosa, rs, sei o tanto que torce por mim, é recíproco irmãzinha. Obrigada por estar quando mais precisei.

A minha parentela, que sempre mostra orgulho ao falarem sobre minha trajetória (ainda tenho muito o que melhorar, é muito bom saber que sentem orgulho) e por todas as vezes que ouviram minhas reclamações e me apoiaram.

Às minhas amigas Tayná Vieira, Karen Rodrigues, Renata Pizotti, Fabiane Martins e ao amigo Allan Chaves, por ouvirem, apoiarem, impulsionarem, brigarem quando eu pensava em desistir (e não foram poucas as vezes)

Aos amigos e alunos que direta e indiretamente estiveram comigo em algum momento dessa jornada apoiando de alguma forma.

As amigas de turma Glaucia Pires e Jennefer Condak por terem sido fundamentais no início da caminhada e a também amiga de turma Cristiane, a gentil e elegante, obrigada por todas as vezes que me socorreu.

As minhas queridas alunas do MOI - Meninas Olímpicas do IMPA- (projeto que coordeno na Escola Firjan SESI Jacarepaguá), por mesmo sendo tão novas, sempre traziam uma palavra de motivação e apoio.

A minha orientadora Rosana de Oliveira, pela orientação e suporte e aos membros da banca pela disponibilidade e contribuição, professores Amarildo Melquiades e Andreia Maciel.

Ao meu Pastor Arley Denner, a Pastora Daniela, Pastora Lúcia, a querida irmã Anna Cristina e a Pastora Lúcia Helena Macedo pelo apoio, oração e conselhos.

Por último e de maior relevância, ao meu Deus, sempre, por causa dEle cheguei até aqui e a Ele devo a vida, obrigada pelo cuidado e amor, ainda que eu não mereça tanto.

“Lançando sobre toda a vossa ansiedade; porque Ele tem cuidado de vós.”

I Pedro 5:7

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um conjunto de tarefas voltadas à investigação dos significados atribuídos por licenciandos em Pedagogia acerca de Álgebra e Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como suas interlocuções com a Aritmética e o Pensamento Aritmético. Fundamentando-se no Modelo dos Campos Semânticos (LINS, 1994), que compreende o conhecimento como uma produção de significados matemáticos e não matemáticos justificados pelo sujeito, o trabalho explora a singularidade do processo de construção do conhecimento. A pesquisa inclui uma revisão teórica sobre Álgebra e Pensamento Algébrico, um projeto piloto realizado com licenciandos, uma análise crítica ao documento curricular nacional e uma avaliação preliminar, baseada no MCS, das tarefas aplicadas. O produto que apresenta um conjunto de tarefas que articula diferentes dimensões do Pensamento Algébrico e Aritmético, visando contribuir para práticas pedagógicas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras- chaves: Educação Matemática, Pensamento algébrico, Formação de Professores, Produção de Significados.

Abstract

This This dissertation aims to present a set of tasks aimed at investigating the meanings attributed by undergraduate students in Pedagogy regarding Algebra and Algebraic Thinking in the early years of Elementary School, as well as their interlocutions with Arithmetic and Arithmetic Thinking. Based on the Semantic Fields Model (LINS, 1994), which understands knowledge as a production of mathematical and non-mathematical meanings justified by the subject, the work explores the singularity of the knowledge construction process. The research includes a theoretical review on Algebra and Algebraic Thinking, a pilot project carried out with undergraduate students, a critical analysis of the national curriculum document and a preliminary evaluation, based on the MCS, of the applied tasks. The product presents a set of tasks that articulates different dimensions of Algebraic and Arithmetic Thinking, aiming to contribute to pedagogical practices in the early years of Elementary School.

Keywords: Mathematics Education, Algebraic Thinking, Teacher Training, Meaning Production.

Sumário

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	REVISÃO DE LITERATURA	14
	2.1 Álgebra, Pensamento algébrico e Formação do Professor dos anos iniciais.	14
3.	REFERENCIAL TEÓRICO: MODELO DO CAMPOS SEMÂNTICOS	26
4.	UMA EXPERIÊNCIA PILOTO COM OS LICENCIANDOS EM PEDAGOGIA.....	34
	4.1 A experiência piloto	36
	4.2 A análise das respostas dos licenciandos	37
5.	METODOLOGIA.....	50
6.	ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS LICENCIANDOS	55
7.	PRODUTO EDUCACIONAL	70
8.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
9.	REFERÊNCIAS	101

1. INTRODUÇÃO

A vida escolar apresenta diferentes desafios, em particular as dificuldades que muitos estudantes possuem na aprendizagem matemática. Dentre os temas abordados, a álgebra ocupa um lugar de destaque, sendo frequentemente considerada uma área especialmente desafiadora nesse processo de aprendizagem.

Conforme apontado por Moura e Souza (2008), essas dificuldades em álgebra são consideradas normais devido ao elevado grau de abstração envolvido, o que torna o aprendizado particularmente complexo para iniciantes na disciplina de Matemática.

Há uma compreensão de que, apesar dos esforços contínuos para identificar soluções e explicações para o déficit na aprendizagem da matemática, ele persiste ao longo do tempo. Conforme apontado por Santos; França; Santos (2007), tomada de consciência da dificuldade em aprender Matemática, não é nova. Este estudo não tem como foco discutir as causas do déficit de aprendizagem em álgebra e Pensamento Algébrico, mas enfatizar a importância desses conhecimentos, considerando que são componentes essenciais da trajetória acadêmica de qualquer estudante. A relevância do pensamento algébrico e dos conceitos de álgebra se aplica a todos, independentemente do nível de dificuldade que o aluno possa enfrentar, dada sua presença contínua e significativa no desenvolvimento de competências matemáticas ao longo da formação escolar.

Neste trabalho a investigação será em torno do tema álgebra nos anos iniciais e sua relação com a aritmética, mas considerando a formação inicial do licenciando em pedagogia, que atuará como professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental e Educação Infantil.

A discussão em torno do Pensamento Algébrico e da Álgebra nos anos iniciais não é recente, se faz desde a década de 80 do século XX. Em 2003 no Boletim GEPEM n.42 temático sobre Educação Algébrica, Falcão (2003) explorava a construção do pensamento algébrico com crianças. A partir de 2018 a Álgebra foi inserida como Unidade Temática desde o 1º ano do Ensino Fundamental no documento curricular, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Importante esclarecer que minha inserção na temática acontece após o ingresso no Mestrado. Inicialmente, o tema que trataria em meu trabalho era Educação Financeira, mas indiquei a possibilidade de mudar, vislumbrando a possibilidade de desenvolver uma temática que estivesse vinculada ao ensino de matemática. Por trabalhar com licenciandos em pedagogia e devido ao tempo que me encontro em sala de aula no Ensino Fundamental (anos finais) e no Ensino Médio, sabia que dentro das linhas de pesquisas ofertadas no programa, todas estariam

de acordo com minha prática pedagógica e as quais pretendo aprofundar. Foi o que ocorreu, houve a proposta de pesquisar sobre álgebra, pois é notório que os discentes ao se depararem com a álgebra, “normalmente” no 8º ano, surgem com muitas questões, dentro das quais, eles questionam: Agora tem letra? Virou português? Entre tantas outras que surgem. Mas a proposta deste trabalho é contribuir com um conjunto de tarefas que possam ser aplicadas aos futuros docentes dos anos iniciais, licenciandos em Pedagogia, ou a estudantes dessa etapa da escolaridade.

Esta iniciativa de querer compreender o que os futuros professores dizem e entendem sobre álgebra é motivada também pelas experiências que possuo como tutora presencial do Curso de Licenciatura em Pedagogia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) inserido no Consórcio CEDERJ, onde em diversos momentos, ao discutir sobre o assunto vigente naquele momento, os alunos se desesperavam, pois na maioria das vezes, mesmo que saibam o que se deve fazer, não entendem o motivo da escolha e nem mesmo o porquê do processo.

O objetivo deste trabalho é apresentar tarefas que estimulem os licenciandos em pedagogia a produzir discursos sobre o que sabem sobre Álgebra e Pensamento Algébrico com interlocuções com o Pensamento Aritmético.

Como referencial teórico, escolhemos usar o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Lins (1994) que parte do princípio de que conhecimento é uma crença-afirmação acompanhada de uma justificação, o estudante afirma algo que acredita, e faz a sua justificação para a afirmação dada, e assim, acreditamos que será possível entender qual significado foi atribuído para a tarefa proposta. O que se pretende identificar é como os futuros professores produzem de significados para o tema em questão.

No desenvolvimento deste trabalho escolhemos o seguinte percurso. Trazer no capítulo 2 uma Revisão de Literatura sobre Pensamento Algébrico e Álgebra com objetivo de construir um diálogo com os autores, no capítulo 3 o referencial teórico utilizando o MCS e Oliveira (1997), no capítulo 4 a apresentação de uma experiência piloto que discuti criticamente a BNCC, no capítulo 5 a Metodologia com apresentação do produto educacional e objetivos das tarefas. No capítulo 6 uma leitura sobre a aplicação de duas dessas tarefas as professoras Licenciandas em Pedagogia. O Produto Educacional tem por objetivo apresentar uma proposta de tarefas que possam ser exequíveis de serem aplicadas nos licenciandos em Pedagogia e estudantes do Ensino Fundamental.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentaremos uma revisão da literatura que mostra as diferentes concepções teóricas e práticas a respeito da Álgebra, do Pensamento Algébrico e Formação de Professores. Por meio dessa revisão, busca-se delinear contribuições acadêmicas de diferentes pesquisadores sobre o tema.

2.1 Álgebra, Pensamento algébrico e Formação do Professor dos anos iniciais.

A revisão de literatura foi traçada na busca de trabalhos no Google Acadêmico e em revistas especializadas, utilizando para esta etapa as palavras: álgebra, pensamento algébrico e formação de professores dos anos iniciais, as palavras foram utilizadas separadamente. Após as buscas, os textos encontrados foram categorizados de acordo com a palavra-chave utilizada, ou seja, uniu-se os que tratavam de álgebra, depois os que tratavam de pensamento algébrico e os que se referiam a formação de professores. Ao todo foram encontrados 56 trabalhos, destes, foi realizada a leitura do resumo de 36, pois 20 deles foram descartados, visto que os títulos não explicitavam a temática, mesmo havendo no texto as palavras utilizadas na busca. Após a leitura dos resumos, foram selecionados 7 textos para serem lidos, com intenção de destacar o que pesquisadores afirmam sobre a temática. Com a leitura dos textos foi possível identificar que pensamento algébrico possui distintas caracterizações, embora presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o pensamento algébrico não é singularmente caracterizado, carecendo de uma definição explícita. No documento é recomendado a introdução da álgebra nos estágios iniciais da formação, onde um tipo específico de pensamento é mencionado, denominado pensamento algébrico, mas não caracterizado. Apesar da ausência de uma definição ou caracterização explícita do termo "pensamento algébrico" no documento em questão, observa-se que em todas as análises realizadas, o conceito de pensamento algébrico é consistentemente associado à álgebra, à aritmética ou a ambos. Além disso, o que fica perceptível no documento, é que aspectos diversos da álgebra não são explorados, pois o documento se restringe às sequências, ou seja, um campo que é vasto, aparece de forma abreviada. A seguir, apresentamos uma tabela que apresenta os 7 (sete) textos que serão apresentados neste capítulo.

Tabela 1: Trabalhos Analisados

Autor	Título	Editor	Ano
ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C.	Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico: Proposição De Um Modelo Para Os Problemas De Partilha.	Zetetike	2018
COSTA, N. E POLONI, M.	Percepções De Concluintes De Pedagogia Sobre A Formação Inicial Do Professor Para A Docência De Matemática	Bolema	2012
CYRINO, M.C.C.T E OLIVEIRA, H.	Pensamento Algébrico Ao Longo Do Ensino Básico Em Portugal	Bolema	2011
FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J.	Conhecimento Matemático Para Ensinar Álgebra Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental.	Zetetike	2017
ROCHA FALCÃO, J.	Alfabetização Algébrica Nas Séries Iniciais. Como Começar?	Boletim GEPEM	2003
SANTOS, M.; ORTIGÃO, M. AGUIAR, G.	Construção Do Currículo De Matemática: Como Os Professores Dos Anos Iniciais Compreendem O Que Deve Ser Ensinado?	Bolema	2014
VIOLA DOS SANTOS, J. R.; CORIO DE BURIASCO , R. L.	Uma Análise Do Pensamento E Da Linguagem Algébrica Expressos Na Produção Escrita De Alunos Da Escola Básica.	Boletim GEPEM	2009

Fonte: Autora, 2024

Há distintas ideias quando o assunto é Pensamento Algébrico, algumas se aproximam e outras se distanciam, será possível identificar essas semelhanças e distinções no decorrer deste texto, como quando Lins e Kaput (2004), que após efetuarem uma análise sobre o emprego da expressão educação algébrica, concordam provisoriamente com duas caracterizações para o Pensamento Algébrico:

A primeira “envolve o acto de generalização deliberada e a expressão de generalidades”, e a segunda “envolve, usualmente como um comportamento separado, um raciocínio baseado em formas de generalizações sintaticamente-estruturadas, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente” (LINS; KAPUT, 2004, p. 48 apud CYRINO e OLIVEIRA, 2011 p. 102) .

A afirmação de Lins e Kaput, relatada no texto de Cyrino e Oliveira, apresenta dois tipos de generalização e raciocínio. Envolve a criação consciente e intencional de generalizações a partir da observação de padrões e a expressão dessas generalidades de forma compreensível e aplicável a casos semelhantes, a outra ideia sobre isso é considerar um comportamento separado, envolvendo o raciocínio baseado em generalizações que são estruturadas sintaticamente e semanticamente, ou seja, seguem regras formais e lógicas e têm significados específicos. Desta forma, enquanto a primeira generalização é mais intuitiva e observacional, a segunda é formal e estruturada, utilizando-se de sistemas lógicos e semânticos para guiar ações e pensamentos.

Já para Radford (2006) se ainda não temos uma definição precisa para Pensamento Algébrico, isso se deve ao “extenso escopo de objectos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral” (RADFORD, 2006, p. 2 apud CYRINO e OLIVEIRA, 2011. p.101). Ou seja, para este autor, a dificuldade de definir o que é Pensamento Algébrico está relacionada a ampla gama de elementos e métodos que ele envolve. Já no trabalho de Cyrino e Oliveira (2011), em que a pesquisa é realizada com alunos de níveis distintos, o Pensamento Algébrico é dividido em três categorias: Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional e Modelação, eles definem essas categorias da seguinte maneira:

- Aritmética Generalizada: exploração de propriedades e relações entre números, exploração de propriedades das operações com números, exploração da relação de identidade, exploração da igualdade como uma relação entre quantidades, resolução de sentenças com números desconhecidos, tratamento algébrico do número, pensamento aditivo e multiplicativo;
- Pensamento Funcional: expressão simbólica de quantidades ou operações, estabelecimento de relações funcionais, previsões, identificação e descrição de padrões numéricos, relação de equivalência;
- Modelação: generalizações de cálculos e relações na resolução de problemas. (CYRINO E OLIVEIRA, 2011)

Cyrino e Oliveira (2011), faz uso dessa divisão, para fornecer uma estrutura sobre o que entendem de pensamento algébrico, de forma abrangente, abordando desde a manipulação de números e operações até a compreensão de padrões e a criação de modelos para resolver problemas complexos.

Nessa visão de trazer o que os pesquisadores afirmam sobre pensamento algébrico e suas abordagens sendo realizadas de formas distintas, os trabalhos a seguir apresentam pesquisas com estudantes realizando tarefas que são apresentadas nos textos e que são determinantes para a análise dos autores.

As questões apresentadas no texto de Almeida e Câmara (2018), tem a intensão de atribuir níveis para a forma como os estudantes desenvolvem o Pensamento Algébrico, utilizando problemas de partilha. Os termos utilizados por eles para descrever cada nível trata-se de sugestões de Godino et al. (2014). Almeida e Câmara, alguns anos antes de realizar a análise com os problemas de partilha, afirmam que o pensamento algébrico se manifesta através da capacidade de estabelecer relações, generalizar, modelar e construir conhecimento e com essa perspectiva apresentam o texto sobre problemas de partilha. Tarefas foram aplicadas aos estudantes e em seguida, foram realizadas perguntas alinhadas as suas resoluções, para que fosse identificado o processo pensado pelo discente e assim identificasse o nível que ele se encontrava. Os níveis variam do nível zero ao nível três, cada um desses níveis foi nomeado de forma distintiva para possibilitar uma identificação clara e uma avaliação precisa do progresso dos alunos.

Nível 0 - Ausência de Pensamento Algébrico: os alunos que se encontram no nível 0 deixam o problema sem resposta, ou adotam alguma estratégia que leva à resposta errada. (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 555)

Q2b- Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Figura 1: Resposta da Aluna Ana (7º ano) à Q2b

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left, there is a vertical addition: 37, 5, and 2 are stacked on top of each other. A horizontal line is drawn below the 2, and the result, 44, is written below the line. To the right of the calculation, the text "44 Cada um" is written in cursive.

Fonte: Almeida; Câmara, 2018 p. 554

Na solução apresentada pela aluna Ana (7ºano), ela adiciona $37+5+2$, encontrando 44 balas. Ao ser entrevistada para que justifique a sua resposta, fica evidente que a aluna apenas retirou os números e usou uma operação qualquer, não necessariamente relacionada a ideia proposta no problema.

Nível 1- Pensamento Algébrico Incipiente: é formado pelos alunos que adotam a estratégia atribuir valores na resolução dos problemas de partilha com duas relações, e que a adoção dessa estratégia revela a mobilização de três das cinco características que compõem o pensamento algébrico, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos. (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 558)

Q1b. Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

Figura 2: Resposta da Aluno Caio (6º ano) à Q1b

$F = ?$
 $R = 2 \times F$
 $L = 15 + F$
 $Total = 55$

$F = 10$
 $R = 20$
 $L = 25$
 $Total = 55$

R- Após substituir "?" por um número qualquer. Vejo o resultado e continuo simulando até encontrar. Resultado: Frederico (10), Rogério (20) e Lúcia (25).

Fonte: Almeida; Câmara, 2018 p. 555

Na entrevista feita ao aluno Caio (6º ano), ele enuncia que resolveu o problema por tentativa e que “deu sorte” ao escolher o 10.

Nível 2- Pensamento Algébrico Intermediário: A diferença entre os alunos que se encontram no nível 1 e os que se encontram no nível 2 é que nesse último o modelo matemático se aproxima mais do modelo esperado para o problema, ou seja, a equação polinomial do 1º grau. (ALMEIDA, CÂMARA, 2018, p. 558)

Para o mesmo problema Q1b, outro aluno apresentou a seguinte solução considerada pelo autor como nível intermediário.

Figura 3: Resposta da Aluna Polly (9º ano) à Q1b

$TOTAL \rightarrow 55$
 $ROGÉRIO \rightarrow FREDERICO \times 2$
 $LÚCIA \rightarrow FREDERICO + 15$

55
 $- 15$
 $\hline 40$
 $\div 4$
 10

$ROGÉRIO = 20$ QUADRINHOS
 $FREDERICO = 10$ QUADRINHOS
 $LÚCIA = 25$ QUADRINHOS

RESPOSTA

Fonte: Almeida; Câmara, 2018 p. 559

P: Me explica como você chegou à resposta desse problema?

Polly: Eu subtraí a quantidade que tinha a mais e depois eu dividi pela quantidade de pessoas que tinha.

P: Mas nesse caso tinha três pessoas!

Polly: Isso. Mas tinha uma pessoa que tinha o dobro, então, tinha que ser uma quantidade que conseguisse, tipo, tinha três pessoas, mas uma pessoa tinha o dobro de revistas de Frederico. Rogério tinha o dobro de Frederico, então, teoricamente seriam quatro quantidades. Por isso dividi por 4.

P: Então, você tira os 15, que é o que Lúcia tem a mais?

Polly: Lúcia tem a mais que Frederico.

P: Então você tirou esse 15 para ficar em quantidades iguais para cada um?

Polly: Sim.

P: E quando você dividiu por 4 você achou a quantidade de quem?

Polly: Eu achei a quantidade de Frederico, que é a pessoa que Rogério tem o dobro e Lúcia tem mais 15. Ele seria meio que o único que teria uma quantidade certinha. Então, Frederico teria 10, Rogério

teria duas vezes Frederico, e Lúcia teria Frederico mais 15, como Frederico teria 10, Rogéria teria 20 e Lúcia teria 25.

(Diálogo entre entrevistador e aluna, 2016)

Nível 3- Pensamento Algébrico Consolidado: os alunos conseguem, de forma consolidada, mobilizar todas as cinco características dessa forma de pensar, isto é, além das quatro mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível 2 (capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar; capacidade de generalizar; e capacidade de construir significado), os alunos que se encontram no nível 3 mobilizam a última característica, a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, ou seja, de forma analítica. (ALMEIDA; CÂMARA, 2018, p. 561)

Q5a. João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?

Figura 4: Resposta da Aluno Carlos (9º ano) à Q5b

$$P + 25 + P + 15 + P = 160$$

$$3P + 40 = 160$$

$$P = 120 / 3 = 40$$

$$P = 40$$

$$J = 65$$

$$L = 55$$

Fonte: Almeida; Câmara, 2018 p. 563

P: Me explica como você fez esse quinto?

Carlos: Como ele fala que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, isso significa que João menos 25 é igual a Pedro. Então, eu passei o 25 para o outro lado, que dá que João é igual a Pedro mais 25, que está escrito aqui (apontando para o " $P + 25$ "). A mesma coisa com Pedro e Cláudio, que Cláudio é Pedro mais 15 (apontando para o " $P + 15$ ") e eu tenho que mostrar o de Pedro, adicionar o valor de Pedro (apontando para o " P "), que dá 160.

P: E como você chegou à resposta final?

Carlos: Eu juntei todos os P, juntar todos os números que eu consegui, subtrair os números dos dois lados, que dá P igual a 120 sobre 3, que dá 40.

P: Então me explica melhor como você chegou nesse $3P$ e nesse 40?

Carlos: Eu somei todos os P e somei 25 mais 15.

P: E para chegar em $P = 120/3$, o que você fez?

Carlos: Eu subtraí 40 dos dois lados, que deu $3P = 120$, e depois eu dividi os dois lados por 3, por isso esse $120/3$ aqui. Então P é igual a 40, que é o valor de Pedro.

P: E para achar a quantidade de João e Cláudio, você fez o quê?

Carlos: Eu adicionei 25 para o João, e adicionei 15 para o Cláudio no resultado, que deu isso aqui (apontando para o resultado final).

(Diálogo entre entrevistador e aluno, 2016)

O texto ressalta que esses níveis estão relacionados a problemas de partilha. Portanto, não é viável generalizar e afirmar que se aplicam a todos os conceitos relacionados à álgebra, uma vez que as pesquisas analisadas não abarcaram todos os aspectos desse campo temático.

“defendemos que esses níveis são específicos ao problema, não no sentido de que o nível de complexidade do problema é o que determina o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, apesar de o influenciar, mas, sim, específico ao problema no sentido que o aluno pode encontrar-se em um determinado nível em um tipo de atividade, como os de generalização de padrões e, ao mesmo tempo, encontrar-se em outro nível quando solicitado a resolver outro tipo de situação, como os problemas de partilha, já que as relações necessárias para resolver essas situações são diferentes. (ALMEIDA; CÂMARA, 2018. p. 566).

Essa abordagem reconhece a complexidade do pensamento algébrico e como ele se manifesta de maneiras distintas em diferentes contextos. Isso significa que um aluno pode estar em um nível mais avançado em uma determinada atividade, como generalização de padrões, sequências e em um nível diferente ao enfrentar outro tipo de problema, como problemas de partilha, devido às diferentes relações exigidas para resolvê-los. A justificativa do aluno que o autor classifica como nível 3 nos parece uma reprodução de um procedimento, que não necessariamente implica que esta aluna esteja num processo que faz referência ao Pensamento Algébrico formal.

Outro trabalho que fez uso de tarefa, é o trabalho de Santos e Buriasco (2009), que para identificar o pensamento e a linguagem algébrica, realizaram uma análise da produção escrita de alunos do 5º (antiga 4ª série), 9º (antiga 8ª série) e 3º ano do ensino médio, este trabalho traz a caracterização de pensamento algébrico como sendo expressão de um processo que envolva alguma relação entre estruturas aritméticas por meio de ações sintáticas, que sigam regras procedimentais e formais, e, semânticas, que atribuam algum sentido lógico para a relação dessas estruturas. (SANTOS E BURIASCO, 2009 p. 19). E para que fique compreensível a definição anterior, os autores expõem que entendem como estruturas aritméticas o resultado da construção do procedimento utilizado na realização de uma operação por meio de um enunciado (SANTOS; BURIASCO, 2009 p. 19). Nesta caracterização, é possível identificar que para estes pesquisadores, aritmética e álgebra caminham juntos. “A tarefa utilizada por eles foi a seguinte: Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?” (SANTOS; BURIASCO, 2009 p. 21)

A visão de que a álgebra e aritmética estão intrinsecamente conectadas é uma notável contribuição do trabalho de Santos e Buriasco (2009), haja vista, que evidenciam a importância de compreender a transição ou simultaneidade entre essas temáticas. Além disso, a tarefa envolve um problema de aritmética, mas que exige a aplicação de princípios algébricos para resolução.

O texto: *The Development of Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective*, de SCHMITTAU, 2005, defende que a Álgebra anteceda a aritmética, afirma que a teoria Vygotskiana apoia a inversão desta sequência em prol de orientar as crianças para o nível mais abstrato e geral de compreensão inicialmente (SCHMITTAU, 2005. p. 16). Nessa perspectiva, se faz uso da álgebra para resolver o problema e com esse processo se alcança a aritmética. No trabalho de SCHMITTAU, 2005 é exposta três características essenciais da abordagem Vygotskiana para o desenvolvimento do pensamento algébrico: desenvolvimento inicial a partir da base conceitual mais generalizada, ascensão do abstrato para o concreto e apropriação de ferramentas psicológicas. (SCHMITTAU, 2005. p. 17).

Sobre formação de professores e ensino da álgebra, pesquisas sugerem que muitos educadores nos anos iniciais não se sentem confortáveis ensinando álgebra, muitas vezes devido a lacunas em sua própria compreensão conceitual. Portanto, programas de desenvolvimento profissional que visam melhorar a fluência dos professores em álgebra e fornecer estratégias eficazes de ensino são fundamentais para o sucesso da implementação da álgebra nos anos iniciais. Seja qual for a abordagem, o docente fará parte do processo de aprendizagem da álgebra por seus alunos, ou seja, sua formação e relação com o assunto fará toda diferença. Assim, torna-se claro que simplesmente discutir o tema e registrá-lo em um documento não é suficiente. Isso envolve compreender como o profissional responsável pela mediação do contexto está familiarizado com a temática em questão. É crucial identificar as deficiências existentes e analisar detalhadamente quais são as áreas que necessitam de aprimoramento. Além disso, é necessário desenvolver e implementar estratégias eficazes para abordar essas lacunas, garantindo que todos os aspectos sejam devidamente cobertos e que o profissional esteja preparado para lidar com os desafios apresentados. Torna-se essencial um amplo entendimento sobre o conteúdo do conhecimento do professor nessa temática, de modo a possibilitar, posteriormente, equacionar formas de melhorar a prática, as aprendizagens dos alunos e a própria formação de professores”. (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO; 2017, p. 501). Para que o ensino e a aprendizagem aconteçam de forma satisfatória, é essencial que o professor compreenda e esteja atualizado sobre os conceitos envolvidos e seja capaz de criar um ambiente de aprendizagem favorável ao diálogo e a produção de significados. No trabalho de Ferreira; Ribeiro e Ribeiro (2017), onde o objetivo é debater o conhecimento matemático revelado por um grupo de professores dos Anos Iniciais, ao discutir tarefas com potencial algébrico, o autor faz a seguinte afirmação:

Para que se possa almejar desenvolver um Pensamento Algébrico com os alunos e nos alunos, torna-se essencial que o próprio professor detenha o conhecimento

desse pensamento e sobre ele. Dentre uma diversidade de fatores (e.g., contexto sociocultural e econômico, por exemplo), o conhecimento do professor é aquele que maior influência tem nos resultados (e nas aprendizagens) dos alunos (Nye et al., 2004). Nesse sentido, e tendo em consideração a necessidade de que aos alunos sejam propiciadas oportunidades de aprendizagem que permitam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, torna-se essencial um mais amplo entendimento sobre o conteúdo do conhecimento do professor nessa temática, de modo a possibilitar, posteriormente, equacionar formas de melhorar a prática, as aprendizagens dos alunos e a própria formação de professores. (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017)

A importância do conhecimento do professor no desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos é destacada na afirmação acima. A formação inicial e contínua de professores deve ser robusta e abrangente, garantindo que os professores estejam bem equipados para enfrentar os desafios do ensino. Apenas com um conhecimento sólido e atualizado, os professores poderão proporcionar aos alunos as oportunidades necessárias para desenvolverem plenamente suas habilidades algébricas. O estudo de Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) enfatiza essa necessidade, apontando caminhos para melhorar a formação de professores e, assim, elevar a qualidade do ensino e da aprendizagem da álgebra. Além disso, a formação contínua permite que os professores se mantenham atualizados com as novas metodologias e avanços na educação matemática, adaptando suas práticas para melhor atender às necessidades dos alunos. Assim, a melhoria na formação dos professores não só enriquece seu conhecimento, mas também impacta diretamente a qualidade da educação que os alunos recebem. Por fim, Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) finalizam seu posicionamento afirmando que

Nesse processo de integração e de desenvolvimento do Pensamento Algébrico, não consideramos a necessidade de um acréscimo de conteúdos ao currículo, mas, sim, uma reformulação, em termos de foco e de objetivos associados às práticas – o que implica, necessariamente, uma reformulação na própria formação inicial e continuada. (FERREIRA, RIBEIRO, RIBEIRO, 2017. p. 511)

A declaração realizada por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), enfatiza a necessidade crucial de reformular a formação inicial dos professores. Os autores destacam também a importância de uma reformulação contínua ao longo da carreira, enfatizando que a formação continuada é igualmente essencial.

No texto de Santos, Ortigão e Aguiar (2014), onde foi realizada uma pesquisa com 112 professores que lecionam nas séries iniciais do ensino fundamental, os autores ressaltam uma percepção compartilhada pelos educadores de matemática. Eles estão de acordo que o ensino dessa disciplina não deve se limitar meramente ao manejo de fórmulas, à execução de cálculos

ou à simples identificação da resposta certa em uma questão. Em vez disso, enfatizam a importância de orientar os alunos na interpretação dos conceitos matemáticos, na atribuição de significados e na resolução de problemas. (SANTOS, ORTIGÃO, AGUIAR, 2014, p. 639). Além da afirmação sobre a aprendizagem de matemática a pesquisa, revela que há “uma maior aproximação do professor com expectativas que tratam de habilidades mais simples, como ler, descrever, associar, etc. As que envolvem habilidades mais complexas (resolver e elaborar problemas, compreender, relacionar, discutir, etc.) foram, muitas vezes, rejeitadas pelos professores.” (SANTOS, ORTIGÃO, AGUIAR, 2014, p. 659). Sendo assim, o trabalho mencionado confirma e reforça o que já afirmado neste texto,

Há a necessidade de uma formação para os professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais que permita que eles avancem no conhecimento de ideias matemáticas, que possam ir além daquelas presentes nos livros didáticos. Não se pode deixar de lembrar que o sucesso de uma implementação curricular depende essencialmente da formação do professor que irá trabalhar aquele currículo. Dificilmente o professor irá trabalhar adequadamente com seus alunos algo que ele não compreenda. (SANTOS, ORTIGÃO, AGUIAR, 2014, p. 659-660)

A afirmação, ressalta a importância crucial da formação dos professores que ministram a disciplina de Matemática nos Anos Iniciais do ensino fundamental. Destaca-se a necessidade de uma formação que permita aos professores expandirem seus conhecimentos para além do conteúdo presente nos livros didáticos convencionais. Isso se deve ao fato de que o sucesso na implementação do currículo escolar está intrinsecamente ligado à qualidade da formação dos professores encarregados de ensiná-lo.

Santos, Ortigão e Aguiar (2014), afirmam também em sua pesquisa que o ensino de Matemática em nossas escolas não tem garantido que todos os alunos tenham acesso igualitário aos conteúdos matemáticos fundamentais (SANTOS, ORTIGÃO, AGUIAR. 2014, p. 640). Entendem que esta desigualdade pode resultar em lacunas no conhecimento básico, dificultando o progresso dos estudantes em tópicos mais avançados e comprometendo seu desempenho acadêmico. (SANTOS, ORTIGÃO, AGUIAR. 2014, p. 640).

Outro ponto na formação do professor dos anos iniciais e o ensino de matemática, abrange como será abordagem para iniciar esta educação, os autores Costa e Poloni (2012) declaram que:

O ato de educar é um processo dinâmico e ligado a contextos culturais datados. Não se pode, hoje, pensar em educar uma criança com as metodologias, conteúdos, currículos e planejamentos que foram utilizados no início do século XX. É necessária a ação de todos os sujeitos envolvidos no processo, sejam eles professores, alunos, pais ou instituições. (COSTA, POLONI. 2012 p. 129)

Costa e Poloni (2012), defendem que educar abrange vários aspetos, ressalta a importância da colaboração de todos os atores envolvidos no processo educacional, incluindo professores, alunos, pais e instituições, enfatizando a necessidade de uma abordagem integrada e participativa para promover uma educação eficaz e relevante. Além disso, destaca a inviabilidade de utilizar as mesmas metodologias usadas em tempos passados.

É possível identificar, com os trabalhos citados, que a afirmação acima de que não há uma definição ou caracterização única se confirma, ainda que haja semelhança nas definições, pesquisadores do tema possuem opiniões distintas, o tempo não foi um aliado para que chegassem a um denominador comum. Essas discussões e pesquisas, trouxeram percepções importantes sobre o assunto. Durante um tempo significativo, foi perpetuado que o ensino de álgebra só deveria acontecer após a introdução da aritmética, hoje o documento que norteia a educação no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), diz que a álgebra deve ser trabalhada já nos anos iniciais, mas não é somente a BNCC e nem mesmo a partir dela que ocorreu a defesa da introdução da álgebra nos anos iniciais, haja vista que não se trata de um tema tão recente, em 2003 no Boletim GEPEM n.42 temático sobre Educação Algébrica, Falcão (2003) já explorava a construção do pensamento algébrico com crianças. Falcão (2003), destaca em seu texto a importância de introduzir a álgebra nos anos iniciais. Além disso, ele argumenta que a álgebra não pode ser vista como uma aritmética generalizada, mesmo que retome uma série de relações entre números, estabelecidas no domínio da aritmética e após isso, realizar a generalização (FALCÃO, 2003, p.30).

Para Falcão (2003), é possível estabelecer distinção entre modos de pensar aritmético e algébrico em uma resolução de problemas. Ele considera que “a álgebra é uma ferramenta cultural poderosa de resolução de problemas”. Afirma ainda que: para o pesquisador russo, Bodanskii, a resolução aritmética de um problema matemático implica na decomposição do mesmo em subproblemas interrelacionados, cuja solução vai reduzindo gradativamente o “espaço de problema”, até um ponto no qual a solução final como que se impõe por si mesma. A resolução algébrica, em contrapartida, implica numa sistematização prévia do problema, para a qual a identificação de aspectos-chave dele é essencial, tais como valores conhecidos e incógnitas, relações entre as incógnitas já explícitas e as que decorrem das primeiras, etc. (Falcão, 2003. p. 29)

Portanto, segundo as contribuições deste autor, há um prejuízo nos currículos e programas de matemática que priorizam que o ensino e aprendizagem de aritmética devem anteceder a

introdução ao ensino e aprendizagem de álgebra. Assim, defende que o ensino e aprendizagem da álgebra comecem nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No quadro a seguir, Falcão (2003) resume sua compreensão para atividade em álgebra.

Figura 5: Atividades em Álgebra
Atividades em Álgebra

Ferramenta representacional	Ferramenta de resolução de problemas
Modelização: captura e descrição dos fenômenos do real. Função: explicitação simbólica de relações elementares. Generalização: passagem de descrições específicas, ligadas a um contexto, para leis gerais.	algoritmos, regras sintáticas, prioridade de operações, princípio da equivalência entre equações.

Fonte: Falcão, 2003 p.31

No quadro anterior, é possível identificar o posicionamento de mais um pesquisador, que compreende que atividades em álgebra podem ser dividida em ferramenta representacional e ferramenta de solução de problemas. A ferramenta representacional é dividida em 3 fases: Modelização, função e generalização. Já a ferramenta de resolução de problemas abrange algoritmos, regras sintáticas, prioridade de operações, princípio da equivalência entre equações.

Concluimos, com esta revisão, que existem diversos estudos e perspectivas sobre os temas Álgebra e Pensamento Algébrico. Os pesquisadores têm se dedicado a identificar uma caracterização; no entanto, ainda não há um consenso consolidado entre eles.

3. REFERENCIAL TEÓRICO: MODELO DO CAMPOS SEMÂNTICOS

A álgebra nos anos iniciais assim como se apresenta na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não indica que os estudantes dessa faixa da escolaridade devem aprender sobre incógnitas, equações, fórmulas, entre outros objetos típicos do ensino da álgebra nos anos finais e no ensino médio. Este documento considera que as habilidades a serem aprendidas pelos estudantes pauta-se no estudo das sequências, sendo elas numéricas, ou formadas por formas e desenhos, por situações comparativas e pela identificação de afirmações operacionais a partir de uma dada situação. Os estudos e pesquisas sobre a abordagem da introdução da álgebra nos anos iniciais não é recente, com uma exploração, feita simultaneamente a situações aritméticas.

Considerando o desenvolvimento das políticas curriculares, antes da publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o material produzido no âmbito do Programa Nacional da Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) aborda o Pensamento Algébrico como um dos seus eixos estruturantes para a alfabetização matemática. Os outros eixos são: Números e Operações; Espaço e Forma/Geometria; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação/Estatística e Probabilidade. (Brasil, 2014 p.42)

A BNCC (Brasil, 2018), documento obrigatório e que norteia a educação brasileira apresenta a Álgebra como uma das Unidades Temáticas para todo o Ensino Fundamental. Defendemos que a álgebra não deve ser vista apenas como uma ferramenta a mais para ser usada na aritmética e na geometria, como usualmente é abordada na matemática escolar. Ela pode e deve ser vista com aspectos independentes, porém desde os primeiros anos da escolaridade o ensino e aprendizagem da álgebra e da aritmética devem caminhar no mesmo compasso, de forma que uma possa complementar a outra. Segundo Lins e Gimenez (1997, p.10, grifo dos autores):

Nossa leitura de produção de significados para a álgebra e para a aritmética sugere exatamente o contrário: *é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.* (LINS e GIMENEZ, 1997)

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) propõe uma abordagem sobre o conhecimento que difere da concepção tradicionalmente entendida. Neste trabalho, utilizamos esse modelo como referencial teórico.

De acordo com Lins (1994), autor do modelo, o conhecimento não reside nos livros didáticos; ele é construído pelo sujeito. Sob a perspectiva do MCS, o foco está em compreender como os estudantes produzem significados, tanto matemáticos quanto não matemáticos. Assim,

o conhecimento produzido pelos próprios estudantes é legítimo, pois reflete a perspectiva e compreensão de quem o enuncia.

Segundo Silva (2022):

O Modelo dos Campos Semânticos foi caracterizado por seu autor como um modelo epistemológico em oposição aos modelos cognitivistas existentes na comunidade de Educação Matemática. Em seu processo de construção tomou como ponto de partida uma caracterização do que seria conhecimento a partir da qual todas as outras noções fossem elaboradas.

(SILVA, 2022. p.13)

Para Lins (1994), o fato de exigir que cada conhecimento tenha uma justificação, o MTCS indica que o mesmo texto, falado com diferentes justificações, constitui diferentes conhecimentos. O exemplo dado por Lins (1994), para que haja compreensão de sua fala é o seguinte: Uma criança de 5 anos acredita e diz que " $2+2=4$," o mesmo que um matemático acredita e diz. Mas as justificações de cada um são provavelmente distintas: a criança exhibe os dedos, o matemático fala de conjuntos. Estão constituídos conhecimentos diferentes. (LINS, p.29, 1994). O MCS subsidiará esse trabalho, na produção de tarefas e na análise das produções de significados dos sujeitos da pesquisa.

Utilizamos o termo tarefa para as propostas apresentadas aos estudantes e não atividade, pois considera-se a noção de atividade na contribuição de Leontiev (Leontiev apud Oliveira, 1995) que indica a ideia de atividade está relacionada a objetivos e processos. Assim, ao propor uma tarefa para um estudante, na ação de busca de solução, nas afirmações e justificação, no diálogo com o outro ele se insere numa atividade.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS), ao enfatizar a construção ativa de significados pelos sujeitos, oferece uma perspectiva teórica relevante para analisar o Pensamento Algébrico, entendido como uma forma específica de produzir significados em álgebra (Lins, 1992). De acordo com o MCS, o conhecimento é construído pelo aluno em contextos de interação e reflexão, legitimando os significados atribuídos ao aprendizado pela própria vivência do sujeito.

Nesse sentido, o Pensamento Algébrico, além de ser uma maneira de atribuir significado à álgebra, é caracterizado por Lins por meio de elementos que refletem sua construção dinâmica e contextual. Para ele, o Pensamento Algébrico não é apenas uma competência técnica, mas um processo cognitivo que envolve abstração, generalização e a capacidade de estabelecer conexões entre conceitos. Ao analisarmos essas características sob o enfoque do MCS, percebemos que o

desenvolvimento do Pensamento Algébrico é indissociável da experiência individual dos estudantes, que produzem significados matemáticos de maneira legítima e autônoma.

Assim, o Pensamento Algébrico, conforme descrito por Lins, dialoga diretamente com os princípios do MCS, pois ambos reconhecem a centralidade do sujeito na construção do conhecimento e a importância de compreender como os estudantes articulam e atribuem sentido aos conceitos matemáticos que aprendem. Desta forma, para Lins, Pensamento algébrico é caracterizado pelos seguintes itens: (i) pensar aritmeticamente; (ii) pensar internamente; e, (iii) pensar analiticamente. E traz a definição de cada uma:

(i) Pensar aritmeticamente significa que os objetos com que estou lidando são exclusivamente números, operações aritméticas e, acrescento aqui, uma relação de igualdade.

(ii) Pensar internamente significa que as propriedades destes objetos que sustentam o que faço com eles, isto é, que sustentam a lógica das operações num sentido mais amplo, não fazem referência a nada fora do domínio destes objetos.

(iii) Pensar analiticamente, por fim, significa que números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos, "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados".
(LINS, 1994. p.30)

Para entendermos a caracterização exposta por Lins, abaixo conseguimos identificar exemplos sobre cada um dos modos de pensar expostos por ele:

Exemplo do que é Pensar Aritmeticamente:

Ocorre ao resolver um problema como: "*Quantos laranjas há no total, se tenho 5 laranjas e ganho mais 3?*"

Neste caso, o raciocínio concentra-se nos números (5 e 3) e na operação aritmética de adição ($5+3$ e $3+5$). O resultado 8 é obtido sem recorrer a abstrações mais amplas ou generalizações que transcendam os números e a operação direta.

Exemplo do que é Pensar Internamente:

Pode ser observado ao trabalhar com a propriedade distributiva na matemática. Considere a expressão $3 \times (4+5)$. Ao aplicar a propriedade distributiva, transformamos a expressão em $(3 \times 4) + (3 \times 5)$.

Nesse caso, o raciocínio se dá exclusivamente dentro do domínio dos números e das operações matemáticas, sem fazer referência a objetos ou conceitos fora desse universo. A lógica que sustenta a operação está completamente ancorada nas propriedades internas da aritmética, como a distributividade da multiplicação sobre a adição.

Exemplo do que é Pensar Analiticamente:

Pode ser observado ao resolver o seguinte problema: *"Qual é a relação entre o número de lados de um polígono regular e a soma de seus ângulos internos?"*

Para abordar a questão de forma analítica, o raciocínio envolve identificar padrões e generalizar a relação. Por exemplo:

- 1- Para um triângulo ($n=3$), a soma dos ângulos internos é 180°
- 2- Para um quadrilátero ($n=4$), a soma é 360°
- 3- Para um pentágono ($n=5$), a soma é 540°

Ao observar o padrão, uma fórmula geral pode ser deduzida: a soma dos ângulos internos de um polígono regular é $(n-2) \times 180^\circ$, onde n é o número de lados.

Com os exemplos anteriores é possível interpretar melhor a caracterização de Lins para Pensamento Algébrico e é perceptível a relação íntima entre álgebra e aritmética, essa relação é identificada também quando alguns autores afirmam que a álgebra vem para generalizar um processo aritmético, há sim essa definição, mas não abrange somente isto e nem mesmo se pode afirmar que uma é mais ou menos importante que a outra.

Oliveira (1997), defende a introdução do assunto nos primeiros anos do ensino fundamental, ela afirma:

Os currículos de 1ª a 4ª série privilegiam o ensino da Aritmética. Ao nosso ver a questão central vai além do fato de reduzir o estudo dos primeiros anos da vida escolar à Aritmética. Reside na concepção que a maioria dos professores têm da Aritmética o qual nega ao aluno a possibilidade de vivenciar situações que de alguma forma envolvam o pensamento algébrico. É ainda do senso comum que o estudo da Aritmética se reduz a ensinar os Números Naturais e as quatro operações, enfatizando apenas o uso dos algoritmos. Acreditamos que o ensino da Aritmética e da Álgebra deveriam estar presentes desde a alfabetização matemática da criança. Uma forma de fazê-lo é explorando as relações entre os números e as curiosidades numéricas em busca de padrões numéricos e das relações que se estabelecem entre esses números. (OLIVEIRA, 1997. p.5)

A autora defende que os currículos das séries iniciais privilegiam o ensino da Aritmética, mas isso revela uma concepção limitada adotada por muitos professores, que acabam restringindo o aprendizado dos alunos à manipulação dos números naturais e das quatro operações básicas, enfatizando apenas o uso de algoritmos. Essa abordagem impede os alunos de experimentar situações que envolvam o pensamento algébrico desde cedo. Para uma educação matemática mais completa, é importante que tanto a Aritmética quanto a Álgebra estejam presentes desde a alfabetização matemática, explorando as relações e curiosidades numéricas, e buscando padrões

e conexões entre os números. Isso enriqueceria o desenvolvimento cognitivo das crianças, preparando-as melhor para o pensamento matemático abstrato.

Além de introduzir as duas juntas, Oliveira (1997), também menciona a forma que esse conhecimento é apresentado e que isto também necessita de uma mudança, precisa de uma maneira diferente de proposição, como também a necessidade de ouvirmos o aluno, para que dessa maneira consigamos entender que significados ele está produzindo.

Acreditamos que tanto o ensino da Álgebra como o da Aritmética precisam ser postos sob um novo paradigma. Esse novo paradigma acredita na linguagem como fator constituinte do processo de produção do conhecimento. Portanto são as situações propostas que produzem contextos em que os significados se estabelecem. É no interior desses contextos que os sujeitos vão constituir objetos e estabelecer novos significados. (OLIVEIRA, 1997. p.7)

Outro documento é o Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) afirma que o ensino de matemática deve ser realizado como espiral, ou seja, os temas devem sempre ser retomados e aprofundados. (BRASIL, p. 42, 2014). O Pacto defende como um dos eixos de aprendizagem a abordagem do pensamento algébrico, sendo o objetivo geral “compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos”, ou seja, possibilitar à criança:

Estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos;

Reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples;

Produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas • ou padrões numéricos simples. (BRASIL, p. 50, 2014)

Abaixo há uma tarefa que consta no caderno de jogos do PNAIC, que tem por objetivo compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos. Trata-se do Jogo 17 do caderno:

O QUE MUDOU?

a) Aprendizagem: Reconhecer a sequência numérica de 1 a 20 e identificar o número que falta na sequência.

b) Material: – Cartões numerados de 1 a 20.



c) Número de jogadores: todos os alunos da turma.

d) Regras:

– O professor organiza no chão da sala, a sequência de cartões que contém os números de 1 a 10 e solicita que os alunos observem.

– Depois que observarem, o professor solicita que os alunos fiquem de costas para a sequência disposta no chão. Então, retira-se um cartão da sequência, reorganizando os cartões, sem deixar espaço vazio entre um e outro cartão.

– Após contar até três, os alunos se viram e voltam a observar a sequência tentando descobrir o número que falta.

– Depois de várias rodadas com a sequência numérica de 1 a 10, o professor repete o jogo com todos os cartões, ou seja, de 1 a 20.

– Na primeira rodada com todos os cartões, o professor retira somente um número e, depois, pode retirar mais de um cartão em uma única vez.

– Os alunos poderão revezar a posição com o professor, retirando cartões da sequência.

Variações: Pode-se fazer o mesmo procedimento com outras sequências, como, por exemplo, com múltiplos de 3, de 4, etc.

e) Problematicando

Uma das condições necessárias para que a criança aprenda a contar corretamente é conhecer a sequência dos números. A exploração de parlendas e brincadeiras cantadas com a sequência oral são estratégias eficientes para esse trabalho. Para explorar a sequência de 1 a 10, por exemplo, pode-se explorar a parlenda:

1, 2, feijão com arroz,

3, 4, feijão no prato,

5, 6, feijão inglês,

7, 8, comer biscoito,

9, 10, comer pastéis.

Depois que as sequências numéricas de 1 a 20 forem bem exploradas oralmente, apresenta-se o jogo para os alunos. O grau de dificuldade deve ser aumentado gradativamente. Primeiramente trabalha-se com a sequência de 1 a 10, retirando apenas um dos números. Depois retira-se dois números, três e, assim, sucessivamente. Posteriormente, apresenta-se a sequência de 11 a 20.

Durante o jogo, a verificação do domínio da ordem da sequência pode ser observada por meio de alguns questionamentos: Qual é o número que vem depois do 4? E depois do 7? Que número vem antes do 9? E do 17?

Após o jogo, pode-se estender o trabalho com sequências no quadro de giz, solicitando que observem, por exemplo, a sequência dos números pares ou números ímpares.

As atividades a seguir, podem ser exploradas após o jogo:

• Quais são as fichas que faltam na sequência de 1 a 10?

1	2	3	4	6	8	10
---	---	---	---	---	---	----

• Qual é a próxima ficha da sequência anterior?

• Quais os números que faltam na sequência decrescente?

10	9	7	5	4	2	1
----	---	---	---	---	---	---

- O professor de Daniela criou uma sequência especial.

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

- Quais são os números que estão faltando nessa sequência?
- Que nome esses números recebem?
- Fernando criou uma sequência. Quais são os números que estão faltando?

1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17 19 20

- Para aumentar a sequência até 30, quais os números que devem ser incluídos?

(BRASIL, p. 48- 49, 2014)

O Documento anterior foi o primeiro documento curricular a abordar de forma explícita o Pensamento Algébrico, é possível identificar, com o exemplo, que é explorado padrões e sequências, lembrando que álgebra e pensamento algébrico não se restringe apenas a esses tópicos. Um outro documento que expôs esta temática é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), documento obrigatório e que norteia a educação brasileira apresenta como uma das Unidades Temáticas para todo o Ensino Fundamental a Álgebra. Defendemos que a álgebra não deve ser vista apenas como uma ferramenta a mais para ser usada na aritmética e na geometria, como usualmente é abordada na matemática escolar. Ela pode e deve ser vista com aspectos independentes, porém desde os primeiros anos da escolaridade o ensino e aprendizagem da álgebra e da aritmética devem caminhar no mesmo compasso, de forma que uma possa complementar a outra. Segundo LINS e GIMENEZ (1997):

Nossa leitura de produção de significados para a álgebra e para a aritmética sugere exatamente o contrário: *é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.* (LINS e GIMENEZ, 1997, p.10 – grifo dos autores)

O trecho apresentado por Lins e Gimenez (1997, p. 10) oferece uma perspectiva inovadora e desafiadora no ensino de Matemática, ao sugerir que o trabalho com álgebra deve ser iniciado mais cedo no processo educacional, de forma integrada com a aritmética. Essa abordagem propõe que ambas as áreas se desenvolvam simultaneamente, uma complementando e impulsionando o progresso da outra.

Essa visão contraria a prática tradicional de introduzir a aritmética de forma isolada nas séries iniciais e postergar o ensino da álgebra para etapas mais avançadas. Ao propor essa integração precoce, os autores destacam a importância de estabelecer conexões entre os conceitos

aritméticos e algébricos, permitindo que os alunos construam uma base mais sólida e abrangente de raciocínio matemático desde os primeiros anos escolares.

4. UMA EXPERIÊNCIA PILOTO COM OS LICENCIANDOS EM PEDAGOGIA

Após 20 anos de publicação do Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 2018, é publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que apresenta como Unidade Temática a Álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A proposta dessa experiência piloto, se deve ao fato de que acreditamos ser importante para os Licenciandos em Pedagogia conhecer esses documentos vigentes, para que possam utilizá-los naqueles espaços onde são obrigados a fazê-lo de forma crítica. Mesmo não concordando que a organização curricular deva estar pautada em habilidades em competências, não é possível omitir dos futuros professores o teor da BNCC que desde sua publicação é utilizado como ponto de partir para diferentes políticas públicas curriculares.

Neste capítulo apresentaremos as habilidades e competências constantes na BNCC para os estudantes de 1º ao 5º ano, e a experiência piloto realizada com estudantes do Curso de Licenciatura em Pedagogia na modalidade a distância.

Os quadros a seguir foram retirados da BNCC (2018), onde podemos identificar essa permanência no estudo das sequências utilizando diferentes aspectos.

Tabela 2: Habilidades da BNCC 1º ano

BNCC-1º ano- Unidade: Álgebra	
Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida
<i>Sequências</i> recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em <i>sequências</i> recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Fonte: Brasil, 2018, p. 278- 279

Tabela 3: Habilidades da BNCC 2º ano

BNCC-2º ano- Unidade: Álgebra	
Construção de <i>sequências</i> repetitivas e de <i>sequências</i> recursivas	(EF02MA09) Construir <i>sequências</i> de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer utilizando uma regularidade estabelecida.
Identificação de regularidade de <i>sequências</i> e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de <i>sequências</i> repetitivas e de <i>sequências</i> recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em <i>sequências</i> repetitivas e em <i>sequências</i> recursivas de números naturais objetos ou figuras.

Fonte: Brasil, 2018, p. 282-283

Tabela 4: Habilidades da BNCC 3º ano

BNCC- 3º ano- Unidade: Álgebra	
Identificação e descrição de regularidades em <i>sequências</i> numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em <i>sequências</i> ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da <i>sequência</i> e determinar elementos faltantes ou seguintes.
Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

Brasil, 2018, p. 286-287

Tabela 5: Habilidades da BNCC 4º ano

BNCC- 4º Ano – Unidade: Álgebra	
<i>Sequência</i> numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em <i>sequências</i> numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
<i>Sequência</i> numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Fonte: Brasil, 2018, p.290- 291

Tabela 6: Habilidades da BNCC 5º ano

BNCC- 5º ano- Unidade: Álgebra	
Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Brasil, 2018, p.294- 295

Do 1º ao 3º padrões e sequências estão presentes em todas as sugestões de habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes. No 4º ano as sequências continuam compondo as habilidades, a padronização também, mas além disso se propõem que sejam trabalhadas a igualdade fazendo o uso das operações, incluindo a utilização da calculadora, como ferramenta de auxílio, quando necessário, para o caso de se investigar relações inversas. No 5º ano, as habilidades propostas se encaminham para a investigação relacionada a equivalência, pois ao realizar uma determinada operação em um membro, também deve ser realizada no outro, e assim a equivalência é mantida. Trata também da inclusão da ideia onde um dos termos é desconhecido e esse precisa ser descoberto. Ampliando ainda mais o conhecimento, é trabalhada a proporcionalidade direta e também as desigualdades.

4.1 A experiência piloto

Esta experiência piloto refere-se a uma tarefa que foi proposta na disciplina de Matemática na Educação 1, do curso de Licenciatura em Pedagogia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) em parceria com o Consórcio CEDERJ, no 1º semestre letivo de 2023, especificamente na Avaliação a Distância 1. O curso a que nos referimos é ofertado na modalidade semipresencial, esta avaliação foi realizada a distância e funciona da seguinte forma: é postado no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) a AD1 com as questões referentes ao

conteúdo estudado. Os licenciandos têm em média 15 dias para realizá-la e postar o arquivo no AVA. Após a postagem, as avaliações são corrigidas e as notas lançadas no AVA e no Sistema Acadêmico. O objetivo desta experiência piloto foi apresentar as respostas produzidas pelos licenciandos a uma das questões propostas na AD. Como se trata de formação de professores, foi proposto a escolha de uma habilidade e a proposição de uma tarefa relacionada a habilidade escolhida, restringimos ao 3º ano do Ensino Fundamental da Unidade Temática Álgebra.

A tarefa proposta foi a seguinte:

Figura 6: Tarefa proposta

- Crie ou pesquise uma atividade relacionada a uma habilidade do 3º ano do Ensino Fundamental, referente a Unidade Temática Álgebra.
- a) Escreva a habilidade selecionada.
 - b) Apresente a proposta detalhada com enunciados e as perguntas elaboradas.
 - c) Apresente o desenvolvimento até chegar na resolução e a resposta
 - d) Identifique os objetivos de aprendizagem de sua atividade.
 - e) Justifique porque sua atividade está de acordo com a habilidade selecionada.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

A álgebra é uma das unidades temáticas identificadas na BNCC, a tarefa proposta buscou identificar quais as habilidades são apresentadas nesta Unidade Temática. Observando a BNCC, nota-se que nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as habilidades encontradas na unidade temática são sobre padrões e sequências no 1º, 2º e 3º ano, sendo acrescentado no terceiro ano a ideia de igualdade.

Mais especificamente o objetivo desta tarefa era que o licenciando conhecesse o documento que hoje norteia o currículo nacional, a BNCC, e compreendesse como este documento se organiza, em particular na área de matemática. Além disso, ao apresentar uma proposta a ser realizada com licenciandos que se adequasse a habilidade escolhida, identificando os objetivos da habilidade, os licenciandos podem compreender como explorar o assunto de forma crítica desenvolvendo e justificando suas propostas.

4.2 A análise das respostas dos licenciandos

A tarefa foi proposta para todos licenciandos dos 13 polos que cusam Pedagogia UERJ, porém apresentamos nessa experiência as respostas de apenas um polo localizado na Região Sul do Estado do Rio de Janeiro. No 3º ano do Ensino Fundamental na Unidade Temática Álgebra tem apenas duas habilidades, Brasil (2018, p. 287):

(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes;

(EF03MA11) - Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtração de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

Desta turma, 22 licenciandos enviaram a atividade, sendo que 9 deles escolheram a habilidade (EF03MA10), 9 a habilidade (EF03MA11), 1 escolheu as duas habilidades e 2 escolheram outras habilidades do 3º ano, que não fazem parte da Unidade Temática Álgebra, além disso, 1 licenciando não fez esta questão. Dessa forma, 19 licenciandos escolheram corretamente as habilidades da unidade temática e ano solicitados. Eles puderam criar ou pesquisar atividades em livros didáticos ou na internet. Observamos que todos trouxeram atividades oriundas de pesquisa em livros didáticos, o que nos indica que essa análise piloto sobre as respostas também nos apresenta o que se encontra nos livros didáticos. Sobre as respostas dos 19 licenciandos, referente ao item b da tarefa proposta, realizamos uma análise e construímos categorias de respostas para cada uma das habilidades. As categorias aqui apresentadas tomaram como referência os contextos de apresentação das atividades utilizadas como exemplo pelos licenciandos.

Na habilidade (EF03MA10) foram 4 categorias:

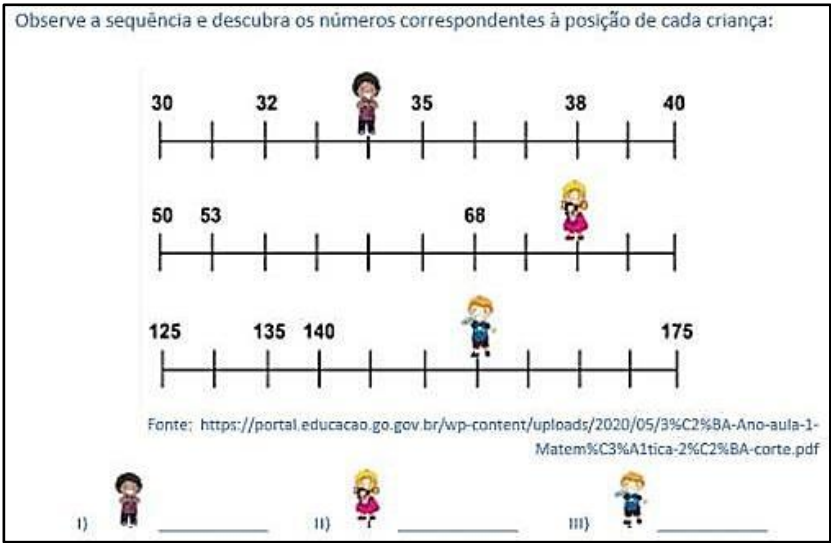
- Categoria 1: a reta numérica
- Categoria 2: recurso pictórico (completar retângulos ou círculos)
- Categoria 3: associação com ordem (prédio e seus andares)
- Categoria 4: uma descrição da imagem da sequência, inserida em um contexto.

A seguir apresentaremos cada uma das categorias seguidas de um exemplo de resposta:

Categoria 1: a reta numérica

Dois licenciandos, apresentaram atividades utilizando a reta numérica. O Licenciando A com três sequências numéricas na reta com razões distintas, 1, 3 e 5. Todas as sequências são para adicionar um mesmo valor, ou seja, são sequências aritméticas crescentes. A pergunta é identificar a localização na reta dos personagens. Na proposta a escolha de usar desenhos ao invés de letra se justifica nessa etapa dos anos iniciais.

Figura 7: Atividade utilizando a reta feita pelo Licenciando A

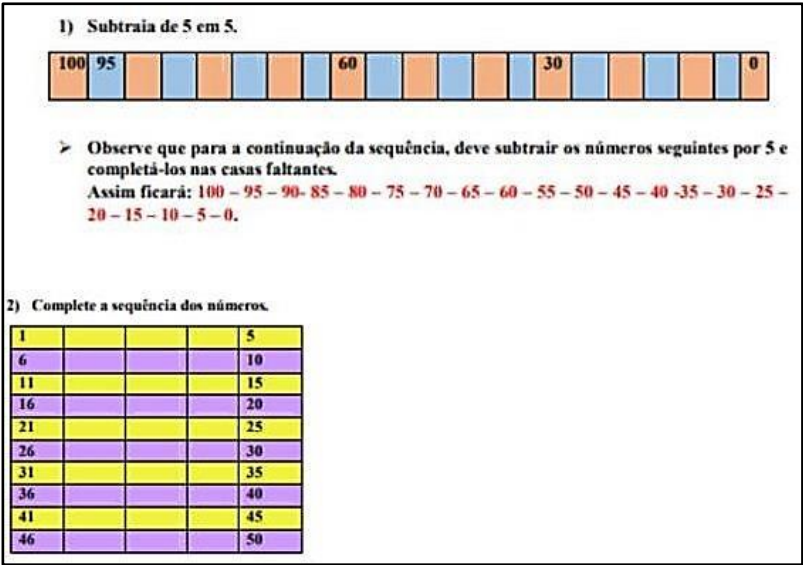


Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 2: recurso pictórico (completar retângulos ou círculos)

Quatro propostas de atividades eram para completar retângulos. O Licenciando C no item (1) propôs uma sequência para subtrair de razão 5, ou seja, uma sequência decrescente. No item (2) o que se pode visualizar inicialmente são duas sequências verticais de razão 5, porém para completar o quadro é preciso identificar que as linhas horizontais possuem razão 1. Após completar todos os retângulos será possível observar que todas as sequências das colunas terão razão 5, em função da quantidade de colunas.

Figura 8: Atividade para completar os retângulos feita pelo Licenciando C

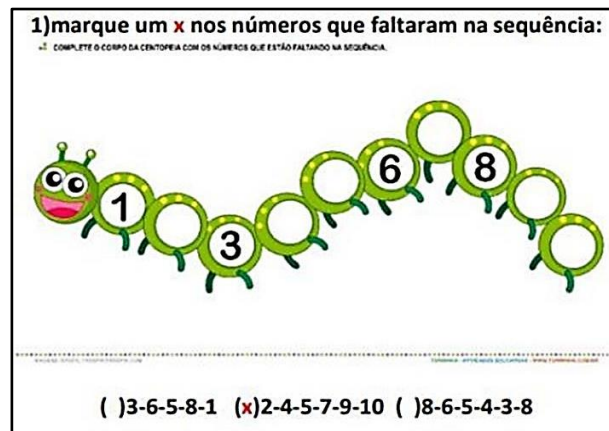


Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Destacamos o Licenciando P, onde apresenta uma sequência de razão 1, numa imagem de uma centopéia onde os anéis representam os números, o objetivo é identificar na imagem os

números faltantes.

Figura 9: Atividade para completar os círculos feita pelo Licenciando P

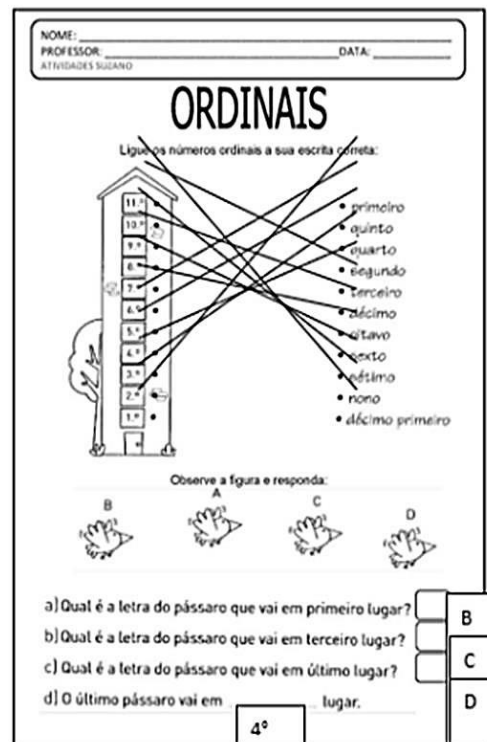


Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 3: associação com ordem (prédio e seus andares)

Um licenciando apresentou uma atividade usando um prédio e seus andares, para relacionar a coluna que continha as palavras: primeiro, segundo e assim por diante, com os andares do prédio ao lado da coluna de palavras. A sequência dos andares tem razão 1, mas nesse caso tem uma relação de ordenação e a proposta aproveita para relacionar com o número ordinal com a sua escrita por extenso. Além disso, é possível identificar que o térreo poderia atribuir significado para o zero, pois na direção da porta não há ligação com nenhuma das palavras da outra coluna e a palavra primeiro (indicando 1º andar), faz ligação ao andar acima da porta. Ou seja, uma atividade deste tipo, pode ser apresentada de maneiras distintas, considerando o térreo como andar zero, como proposto pelo Licenciando J ou considerando o térreo como primeiro andar.

Figura 10: Atividade de associação com ordem feita pelo Licenciando J



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 4: uma descrição da imagem da sequência, inserida em um contexto

Dois licenciandos trouxeram suas atividades com uma apresentação em forma de texto, onde não utilizam nenhum recurso visual. Porém, a descrição pode fazer com que os licenciandos representem através de desenho o texto.

Figura 11: Atividade com a descrição do processo feita pelo Licenciando G

Atividade:

Haverá uma imagem de um caracol, onde sua carapaça estará dividida em pequenos espaços que seguem até o centro do caracol. Os números 1, 3 e 5 estão sequenciados de fora para dentro, dando a entender que os outros espaços estão reservados para outros números a serem preenchidos.

1- Preencha as casinhas do caracol com os números pertencentes a sequência numérica.

O aluno deverá preencher com os números 7, 9, 11.

a) Qual a lógica da sequência numérica?

O aluno deve conseguir responder que a sequência segue de dois em dois números.

b) Seguindo a mesma lógica, como ficaria se o caracol iniciasse com o número dois?

O aluno deve responder: 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Os licenciandos expressam sua produção de significados sobre a habilidade escolhida ao selecionar as tarefas. Os personagens na reta numérica no lugar dos números faltantes expressam

a intenção de comunicação com estudantes dos anos iniciais e suscitam de certa forma o aspecto da ludicidade, que também se apresenta no desenho da centopéia. A busca por elementos do cotidiano é uma outra forma de produção de significado dos licenciando, quando relaciona as sequências aos andares do prédios. Mesmo quando o estudante propõe uma apresentação textual, faz referência a um caracol. Para além da proposição que atenda ao objetivo de explorar a habilidade, esse futuro licenciando expressa através do resíduo de enunciação que ensinar matemática para os anos iniciais, está relacionado ao lúdico, ao visual e a contextos cotidianos.

A escolha da habilidade (EF03MA11) foi feita envolvendo igualdade de várias maneiras, e, assim como a escolha anterior, nesta habilidade também foi possível realizar a separação por categorias, pois houve licenciandos utilizando a balança na atividade, outros apresentaram quadros com que representam equações com números faltantes e problemas com informações. Separando por categoria, tivemos: colocar todas as categorias

- Categoria 5: a balança
- Categoria 6: igualdade e diferença
- Categoria 7: equações com elementos faltantes
- Categoria 8: igualdade de adições

A seguir apresentaremos cada uma das categorias seguidas de um exemplo de resposta:

Categoria 5: a balança

Dois dos licenciandos apresentaram atividade envolvendo a balança, para entrar no assunto de igualdade e desigualdade. Um deles mostra a balança e começa com as perguntas, relacionadas a estar ou não equilibrada e os outros itens da questão serão respondidas de acordo com a resposta inicial, ou seja, as respostas possuem uma interligação. Dando oportunidade aos licenciandos que realizariam a atividade de analisar cada situação e não somente resolver as operações.

Figura 12: Atividade utilizando a balança feita pelo Licenciando B

b). Apresente a proposta detalhada com enunciados e as perguntas elaboradas.(1,0 ponto)

José é feirante e estava pesando algumas frutas na balança. Observe:
Ela está equilibrada ou desequilibrada?
Explique sua resposta.



Peça para que os alunos observem a balança apresentada. Possivelmente eles dirão que a balança está desequilibrada, e observarão os elementos que estão em cada prato. Faça perguntas que os incentive a entender o porquê deste desequilíbrio.

Propósito: Estimular a interpretação de um contexto: visualizar a balança e notar o desequilíbrio e justificar.

Discuta com a turma:

- Esta balança está equilibrada ou desequilibrada?
- De que forma podemos saber se ela está ou não em equilíbrio?
- Por que a balança está desequilibrada? Isso se deve ao fato de haver mais elementos na primeira balança?
- Os elementos possuem o mesmo peso ou pesos diferentes.?

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 6: igualdade e diferença

Na atividade para relacionar igualdade e diferença, a atividade de um dos três licenciandos que escolheram a mesma categoria de atividade, apresentou quatro linhas e em cada uma das linhas havia duas colunas, sendo que em cada coluna apresentou uma operação. A atividade era para verificar se o resultado das operações de uma coluna era igual ou diferente da outra coluna, referente aquela mesma linha. Dessa forma, o licenciando deveria realizar a operação e classificá-las. Dois dos resultados eram iguais e dois diferentes, mostrando ser trabalhado tanto a igualdade como também a desigualdade.

Figura 13: Atividade relacionando igualdade ou diferença feita pelo Licenciando D

b). Apresente a proposta detalhada com enunciados e as perguntas elaboradas.(1,0 ponto)

As fichas abaixo possuem subtrações diversas. Cada linha possui duas subtrações que podem possuir uma relação de igualdade ou de diferença. Observe as fichas, calcule e classifique-as como "IGUAIS" ou "DIFERENTES".

10 - 7	20 - 17
11 - 7	19 - 8
30 - 15	45 - 30
31 - 16	44 - 31

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 7: equações com elementos faltantes

Tratando de elementos faltantes, duas propostas trabalharam nessa perspectiva, a apresentada a seguir, mostra uma atividade em que o licenciando deveria completar a operação com um elemento existente nas opções dadas, que satisfizesse a igualdade, nesta proposta havia operações de adição, subtração e também de multiplicação, a habilidade escolhida abrange as operações de adição e subtração, a operação de multiplicação não faz parte desta habilidade, abaixo é possível verificar como foi a proposta de atividade apresentada:

Figura 14: Problemas com elementos faltantes feita pelo Licenciando M

"Assinale a alternativa e preencha o espaço em branco com o número para que a igualdade esteja correta."

1) $\underline{\quad} + 4 = 6$
 a. 3
 b. 4
 c. 5
 d. 2

2) $12 + \underline{\quad} = 13$
 a. 1
 b. 2
 c. 13
 d. 5

3) $12 * \underline{\quad} = 28$
 a. 3
 b. 1
 c. 4
 d. 2

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Categoria 8: igualdade de adições

Duas das propostas apresentaram problemas com as informações dentro do texto, em seguida são expostas argumentações, que a partir do texto é possível realizar operações, que leve as soluções dos itens.

Figura 15: Problemas com informações dentro do texto feita pelo Licenciando N

b. Apresente a proposta detalhada com enunciados e as perguntas elaboradas.(1,0 ponto)

1- Resolva o problema: MARCOS E BRUNO ESTAVAM JOGANDO VÍDEO GAME. OS DOIS JOGARAM DUAS PARTIDAS. MARCOS COMEÇOU E NA PRIMEIRA FEZ 100 PONTOS E NA SEGUNDA 120. JÁ BRUNO MARCOU NA PRIMEIRA 35 PONTOS E NA SEGUNDA 185.

a) Com quantos pontos Marcos ficou no total?
 b) E Bruno?
 c) Qual dos dois venceu o jogo?

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Como já mencionado, as atividades utilizando a mesma habilidade, apresentaram categorias distintas, atividades com a balança, que não deixa de ser um bom recurso, mas que não serve para todas as situações e isso é necessário ser informado. Atividades relacionando o que é igualdade e diferença foi a mais vista, e dentro deste contexto, tiveram os discentes que descreveram que a primeira etapa da atividade será uma conversa, para identificar se seu licenciando sabe o que é igualdade e o que é diferença.

A habilidade sobre a compreensão da igualdade relacionada as operações com os números do 3º ano, de certa forma, afasta a escolha do licenciando a proposições que façam referência ao lúdico, porém o uso da metáfora da balança confirma mais uma vez que o resíduo da enunciação remete a situações da vida dária, com ressalvas, por balanças de dois pratos não são mais utilizadas nos dias atuais e talvez sejam um contexto estranho inclusive para os estudantes. O uso da balança é um exemplos clássico do MCS quando se discute a produção de significados para números negativos. A igualdade do resultado de operações e a ação de completar com números que faltam remetendo a produção de significado de incógnita, num proposta direta ou numa situação problema.

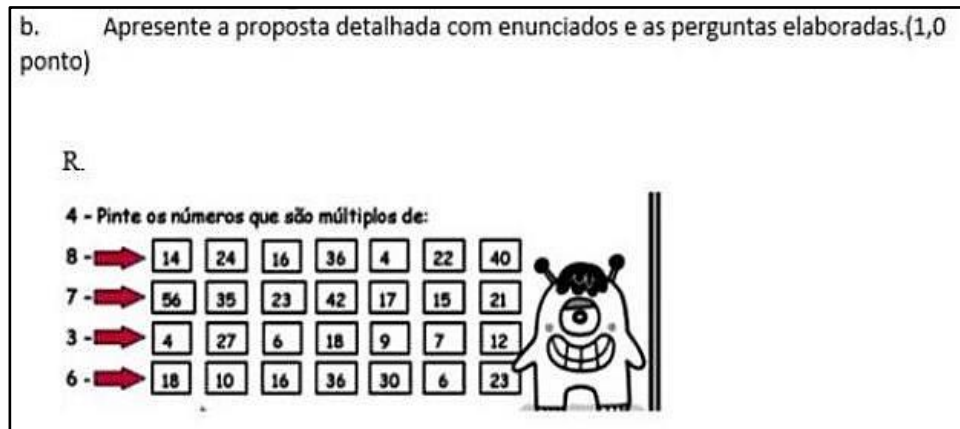
Habilidades Distintas da Unidade Estudada

Abaixo estão as duas habilidades escolhidas por dois dos licenciandos, que escolheram habilidades distintas das que compõem a Unidade Temática Álgebra no 3º ano do Ensino Fundamental, Brasil, (2018, p. 289):

- (EF03MA01) Ler, escrever e comparar números naturais de até a ordem de unidade de milhar, estabelecendo relações entre os registros numéricos e em língua materna.
 (EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.

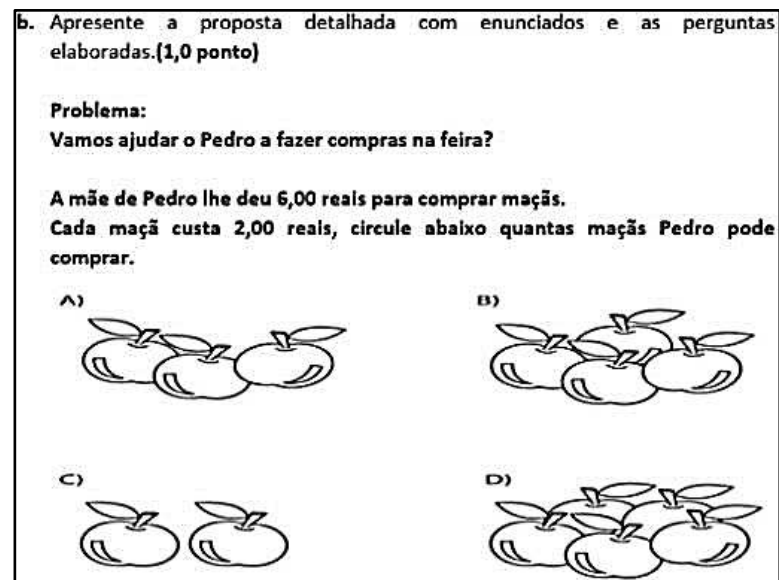
Analisando as habilidades escolhidas, que não se englobam na unidade temática solicitada, podemos supor que ao abrir o arquivo da BNCC, os licenciandos não conseguem identificar a qual unidade temática se refere às habilidades ou escolheram essa pelo fato de haver a palavra comparação, isso pode ter sido levado em conta. É possível chegar nessa suposição, devido a justificativa dada no item e, o Licenciando R, informa que efetuou uma pesquisa na internet sobre os conteúdos dados no 3º ano do Ensino Fundamental, ou seja, não identificou que na BNCC, tem as divisões, especificando qual ou quais habilidades pertence a unidade temática. O Licenciando S, informa que a atividade trata de equivalência e comparação. As atividades propostas por eles são:

Figura 16: Atividade com habilidade diferente feita pelo Licenciando R



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 17: Atividade com habilidade diferente feita pelo Licenciando S



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

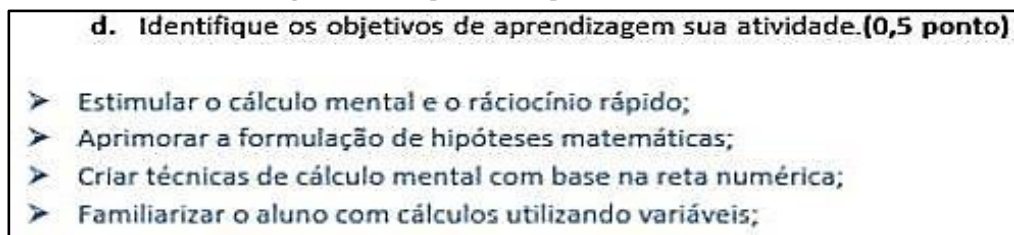
Ao escolherem habilidades diferentes das solicitadas, os licenciandos trazem propostas que possibilitam produções de outros significados porque essas habilidades diferentes podem inspirar a exploração de outros objetos, perspectivas e interpretações aos temas propostos.

Em relação ao item c, que tratava de apresentar o desenvolvimento até chegar na resolução, foi possível identificar que grande parte dos discentes entenderam o propósito e apresentaram todo o desenvolvimento, mas tiveram licenciandos que não apresentaram a resposta completa, ora faltava o desenvolvimento e em outros momentos a resposta final, houve até licenciandos que não responderam a este item. E isso ocorreu em ambas as habilidades.

No item d, é para identificar os objetivos de aprendizagem das atividades proposta por eles, as respostas foram diversas para os licenciandos que escolheram a habilidade (EF03MA10), houve também licenciando que não respondeu este item e licenciando que respondeu utilizando

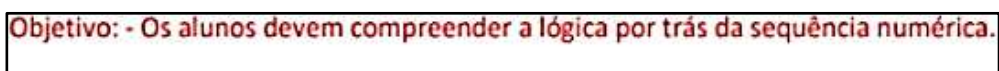
o objeto de conhecimento encontrado na BNCC referente a habilidade. Para que haja melhor compreensão dos tipos de respostas dos licenciandos, abaixo, há alguns exemplos:

Figura 18: Resposta dada pelo Licenciando A



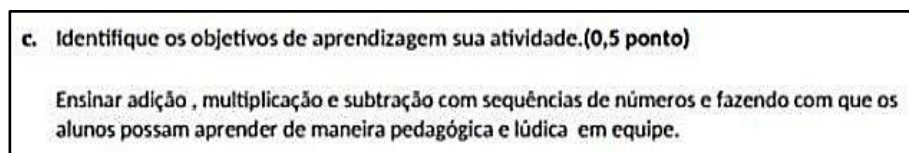
Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 19: Resposta dada pelo Licenciando G



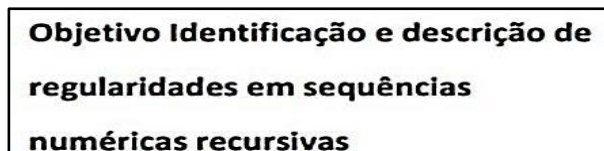
Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 20: Resposta dada pelo Licenciando H



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

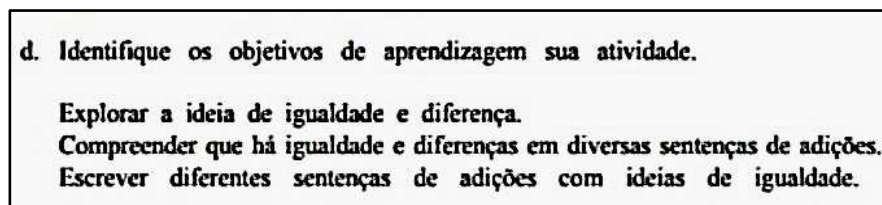
Figura 21: Resposta dada pelo Licenciando P



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

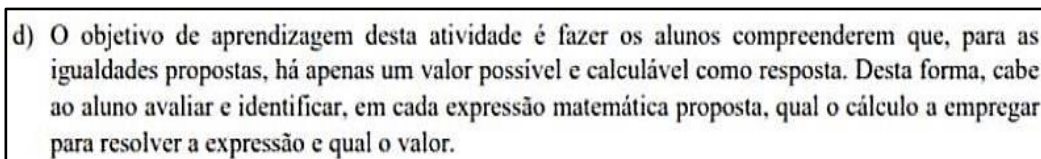
Para a habilidade (EF03MA11), os licenciandos tiveram respostas parecidas e elas ficaram em torno de compreender a ideia de igualdade e diferença, algo mencionado na descrição da habilidade, poucos responderam diferente disso, como é possível confirmar abaixo:

Figura 22: Resposta dada pelo Licenciando L



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 23: Resposta dada pelo Licenciando M



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 24: Resposta dada pelo Licenciando N

d. Identifique os objetivos de aprendizagem sua atividade.(0,5 ponto)
 O objetivo dessa atividade é que os alunos consigam compreender que apesar de as sentenças serem diferentes podem chegar ao mesmo resultado. Estabelecendo uma relação de igualdade.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 25: Resposta dada pelo Licenciando T

d. Identifique os objetivos de aprendizagem sua atividade.(0,5 ponto) R: O trabalho levará os alunos a estimularem a compreensão de igualdade por diferenças sentenças de adição e subtração, logo, compartilhando estratégias onde há mais de um resultado com diversas formas de se resolver um problema.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Chegando ao item “e”, da questão analisada, a pergunta agora pede ao licenciando que informe o motivo da atividade proposta por ele, estar de acordo com a habilidade. A seguir, há exemplos de respostas dadas pelos discentes:

Figura 26: Resposta dada pelo Licenciando A

e. Justifique porque sua atividade está de acordo com a habilidade selecionada.(0,5 ponto)

A atividade contempla todas as especificidades descritas na habilidade contida na BNCC, subsidiando que os alunos identifiquem uma regularidade na sequência, por meio de adições sucessivas de um mesmo número, pense sobre a regra de sequenciação e determine os elementos faltantes na reta numérica.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 27: Resposta dada pelo Licenciando G

Essa atividade está de acordo com a proposta de sequência numérica recursiva pois apresenta fielmente o conteúdo em questão ao avaliar os números disposto no caracol e enxergar que não foram dispostos aleatoriamente.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 28: Resposta dada pelo Licenciando U

e.) Justifique porque sua atividade está de acordo com a habilidade selecionada.(0,5 ponto)

Ela está de acordo porque através da balancá os alunos podem entender a igualdade como equivalência, e a possibilidade de representar a mesma quantidade em frações diferentes.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Figura 29: Resposta dada pelo Licenciando D

e. Justifique porque sua atividade está de acordo com a habilidade selecionada.(0,5 ponto)

A atividade proposta estimula a capacidade de estabelecer relações entre diferentes sentenças e analisar suas semelhanças e diferenças, por isso, está ligada à habilidade “Relações de Igualdade”.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

Observando as respostas dadas, todos afirmaram que sim, suas atividades estavam de acordo e o motivo dado por acharem isso, foi que suas atividades coincidiam com a descrição dada sobre a habilidade.

Direcionada pelas análises realizadas, ficou notável que grande parte dos licenciandos escolheram habilidades relacionadas à álgebra. Em relação às propostas de atividades foi possível realizar uma análise e identificar o que cada proposta solicitava em seu enunciado, pois a intenção neste relato não é afirmar se estava ou não errada a proposta do discente, mas detectar as características de cada uma das atividades. Para isso, no decorrer deste trabalho, separou-se as atividades por categorias de acordo com os contextos observadas. Constatou-se que havia atividades com descrições mais longas e em outras atividades com enunciados mais sucintos, houve atividades que continham todas as informações apresentadas na habilidade e as que traziam tanto o que era apresentado como também assuntos além da descrição. No item c, que foi o momento de registrar o desenvolvimento e a solução final, para os que o realizaram, o fizeram de acordo com o que se esperava e nisso é possível constatar que houve discente que fez o desenvolvimento e apresentou a solução, houve os que apresentaram apenas a solução e também os que não apresentaram desenvolvimento e nem solução, já os itens d e e, onde perguntava se estava de acordo e o porquê estava de acordo, todos afirmaram que sim e que estava em concordância com a habilidade escolhida, pois envolvia o que estava descrito na habilidade escolhida.

Dessa forma, foi possível perceber que grande parte dos licenciandos puderam compreender como é a organização e puderam manusear a BNCC, apresentaram propostas relacionadas à habilidade escolhida, identificaram os objetivos e justificaram a adequação de sua proposta com a habilidade. Esta experiência piloto mostrou também que era sempre possível identificar algo a mais, mesmo que se tratasse de uma atividade já analisada, mostrando que esta “conversa” não finda aqui, mas que dentro de análises como esta ainda há muito o que observar. Mas nos indica uma possibilidade de propor tarefas nessa modalidade de ensino e que as produções dos licenciandos nos permitam fazer uma análise.

5. METODOLOGIA

Essa pesquisa caracteriza-se como de cunho qualitativo, pois se alinha aos princípios que fundamentam essa abordagem metodológica. A pesquisa qualitativa prioriza a compreensão aprofundada dos fenômenos, explorando significados, contextos e perspectivas dos sujeitos envolvidos. Essa abordagem busca analisar dados não numéricos, como entrevistas, observações e documentos, com o objetivo de interpretar e construir significados a partir do material coletado. Flick (2008), relata os seguintes aspectos:

Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos. (FLICK, 2008, p. 23)

Esse tipo de pesquisa, é marcada por sua flexibilidade e pela sensibilidade às características específicas do contexto empírico em que é realizada. Diferente de abordagens padronizadas, ela busca adaptar os métodos de coleta e análise de dados às particularidades do objeto estudado. Cardano (2017), confirma isso ao destacar como traços distintos da pesquisa qualitativa que:

“a utilização de uma forma de observação mais próxima e a harmonização dos procedimentos de construção do dado às características do objeto ao qual se aplicam, a submissão do método às peculiaridades do contexto empírico ao qual ele se aplica.” (CARDANO, 2017, p.10)

Na elaboração das tarefas consideramos a aproximação e diálogo entre álgebra e aritmética, considerando que a função das tarefas elaboradas atende a um objetivo que é fazer uma “sondagem dos processos de algebrização” (Oliveira, 1997).

Nossa defesa para a proposta das tarefas que aqui serão apresentadas, parte da afirmação de Oliveira (1997).

Existe uma crença junto aos professores de Matemática que a Álgebra é cálculos com letras, ou que atividade algébrica é usar a Álgebra. Para ilustrar esta questão observe o exemplo abaixo e os dois tipos de soluções.

Pensei em um número, fiz a diferença com 25, encontrei 13.
Qual é esse número?
Soluções:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x - 25 = 13 \\ & x = 13 + 25 \\ & x = 38 \end{aligned}$$

O número pensado foi 38

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \quad 25 \\
 + 13 \\
 \hline
 38
 \end{array}$$

O número pensado foi 38.

Na concepção desses professores na solução **a** os alunos estariam envolvidos numa atividade algébrica, ao contrário da solução **b** que é considerada aritmética.

Para nós estarmos envolvido em atividade algébrica, não se restringe ao cálculo com letras. Na solução **b** o aluno trabalha com operações inversas e incógnita, portanto, em ambas as soluções, sob a nossa perspectiva, os alunos estão envolvidos numa atividade algébrica.

(OLIVEIRA, 1997, p.8)

Ao defender um diálogo entre Álgebra e Aritmética Lins e Gimenez (1997) já anunciam os “Princípios para um novo currículo” afirmando que:

Se a aritmética não é somente arte de regras e números mas “algo mais”... se não está desvinculada do trabalho algébrico... se se percebe que o mundo real deve formar parte dos núcleos básicos... se isso ocorre, muitas coisas devem funcionar de maneira diferente nas salas de aula. (LINS e GIMENEZ, 1997, p.40)

As tarefas serão elaboradas com intuito de possibilitar a produção de significados para futuros professores dos anos iniciais e também para alunos desta mesma etapa da escolaridade, tomando como referência o MCS. Essas tarefas terão características que permita a percepção dos significados produzidos. Nossa preocupação é com os processos escolhidos em busca da solução das tarefas.

Portanto, nossa escolha pelas tarefas que defendemos que possam ter a função de criar interlocuções entre o Pensamento Algébrico e Aritmético para os anos iniciais considerou algumas premissas:

- Estimular diferentes modos de operar;
- Apresentar objetos diferentes (para além dos números);
- Criar a possibilidade de construção de generalizações.

As tarefas aqui apresentadas não são originais, elas já foram aplicadas em diferentes períodos ao longo de pelo menos 15 anos em avaliações para estudantes do curso de Licenciatura em Pedagogia na modalidade a distância. Algumas sofreram adequações, o trabalho aqui realizado foi de compreender que sentidos podem ser produzidos pelos licenciandos ao

estabelecer esse olhar para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico e sua relação com o Pensamento Aritméticos.

Tabela 7: Aspectos relevantes das tarefas que envolvem o Pensamento Algébrico

	Aspectos relevantes das tarefas que envolvem a relação entre os Pensamentos Algébrico e Aritmético
A	Associar símbolos a operações
B	Associar símbolos a números
C	Estabelecer relações a partir de outras
D	Descobrir números desconhecidos/ operação inversa
E	Reconhecer padrões numéricos e figurados

Fonte: Autora, 2024

A. Associar símbolos a operações

Produzir afirmações matemáticas envolvendo operações, as tarefas que estimulam a produção de afirmações matematicamente corretas, sem a utilização dos números. Através delas, é possível observar que é possível produzir afirmações matemáticas sem o uso de números, este tipo de tarefa é um dos aspectos relevantes na construção do pensamento algébrico, ao contrário do que muitos acreditam, se manifesta não somente em letras, mas em afirmações.

B. Associar símbolos a números

Compreender a função do número como código, pouco explorada nas aulas de matemática dos anos iniciais, mas que tem também uma função na alfabetização matemática que é a de fazer uma correspondência entre números e letras ou letras e desenhos ou ainda entre números e desenho. Para a formação de um código podem aparecer diferentes formas. Seu uso mais usual é através das senhas, documentos, placas de carro dentre outros.

C. Estabelecer relações a partir de outras

Estabelecer relações de igualdade ou desigualdade, utilizando representação pitagórica como tentativa de descolar a produção de significados da representação numérica. Os objetos utilizados para operar são relações.

D. Descobrir números desconhecidos/ operação inversa

Explorar a operação inversa, fazendo com que os alunos percebam qual operação é a inversa da outra e o que acontece ao usar operações inversas. “Entende-se por operação inversa aquela operação que desfaz uma outra operação” (BARBOSA et al., 2014, p.258), feita sobre um número ou letra, ou seja, se é adicionado um valor y a b , sendo w o resultado,

ao subtrair este mesmo valor y de w , a resposta será o próprio b , sendo assim a operação inversa da adição é a subtração, isto é, somando o elemento adicionado e logo após subtraído, será obtido o elemento neutro, assim: $y + (-y) = 0$. Para descobrir números desconhecidos, pode-se ou não fazer uso de operações inversas, mas também da percepção de regularidades numéricas.

E. Reconhecer padrões numéricos e figurados

Na identificação de padrões será possível observar o que acontece na continuidade da sequência de números, figuras ou situações problemas, dessa forma é identifica-se uma regularidade e verifica-se se funcionará para todos os outros. Uma outra exploração é que a tarefa estimule a identificar regras gerais, a lógica de operar, geralmente relacionadas a posição.

As tarefas que serão apresentadas não seguem um processo linear de organização, no sentido que não é preciso esgotar um aspecto, e sim voltar a ele utilizando outros objetos e outras formas de operar.

Serão aqui apresentadas, 13 fichas de trabalho com um total de 23 tarefas organizadas da seguinte forma:

Tabela 8: Organização das Tarefas

Fichas de Trabalho	Número das Tarefas	Aspectos da interlocução entre Pensamento Algébrico e Aritmético
1	1	A
	2	
2	3	C
	4	
3	5	B
4	6	A
5	7	D
	8	
6	9	D
	10	
7	11	D
	12	
8	13	E
	14	
9	15	E
	16	
10	17	E
	18	
11	19	E
	20	
12	21	E
	22	
13	23	D e E

Fonte: Autora, 2024

6. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS LICENCIANDOS

Escolhemos as Tarefas 1 e 5, para análise das respostas dos licenciandos, considerando sua relevância para os objetivos do estudo. Embora inicialmente tenham sido aplicadas quatro tarefas, duas delas foram descartadas após a análise preliminar, pois não apresentaram dados significativos ou contribuições relevantes para a investigação em questão.

No capítulo seguinte, serão apresentadas reflexões detalhadas sobre as produções de significado elaboradas pelos licenciandos, buscando compreender como essas produções dialogam com os conceitos de álgebra e pensamento algébrico, bem como com as relações estabelecidas com o pensamento aritmético.

Os estudantes foram nomeados por P1, P2, P3, P4..., com objetivo de preservar a identidade dos licenciandos em pedagogia.

Tarefa 1

A professora Joana escreveu para seus alunos de 4º ano, a seguinte afirmação: “Renata está montando uma biblioteca pessoal e já possui revistas em quadrinhos e livros didáticos. A professora pediu que os estudantes, com base nessa afirmação escrevesse outra afirmação verdadeira, que envolvesse relações operatórias.”

A aluna Júlia escreveu a seguinte afirmação:

“Se da biblioteca pessoal de Renata retirarmos as revistas em quadrinhos, restarão os livros didáticos.”

A aluna Maria respondeu:

B = Total do material da biblioteca

Q = Quantidade de revistas em quadrinhos

D = Quantidade de livros didáticos

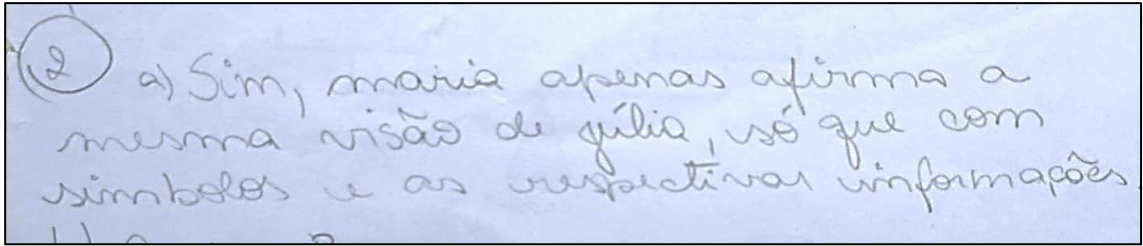
$B - Q = D$

a) A afirmação da aluna está correta? Justifique.

b) Escreva outras 3 afirmações verdadeiras sobre a situação descrita. Você pode usar um texto escrito, ou se desejar símbolos e letras.

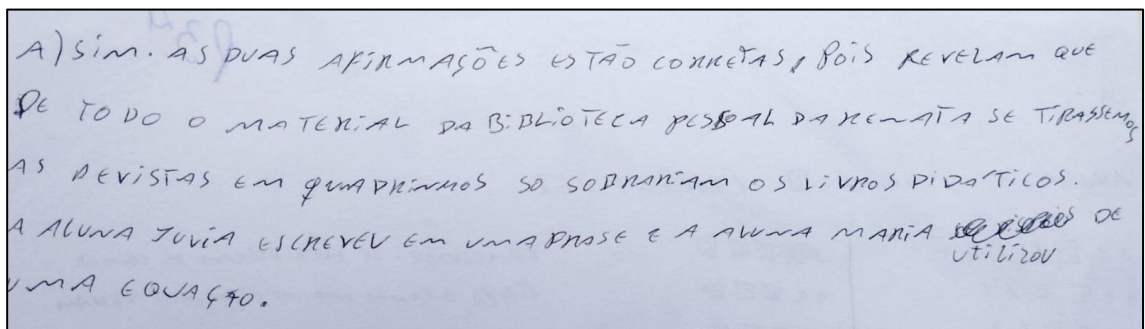
Análise da Tarefa 1a

Grupo de Respostas 1 - Respondeu que as alunas estavam certas e justificou de diferente forma, destacamos a resposta do estudante P1, da Figura 30, indica que as duas representações são correspondentes, uma com texto e outra com símbolos. A resposta do estudante P34, da Figura 31, afirma que essa diferença de representação, uma com uma frase e outra com uma equação.

Figura 30: Resposta do estudante P1


2) a) Sim, maria apenas afirma a mesma visão de júlia, só que com símbolos e as respectivas informações.

Fonte: Acervo da Pesquisa

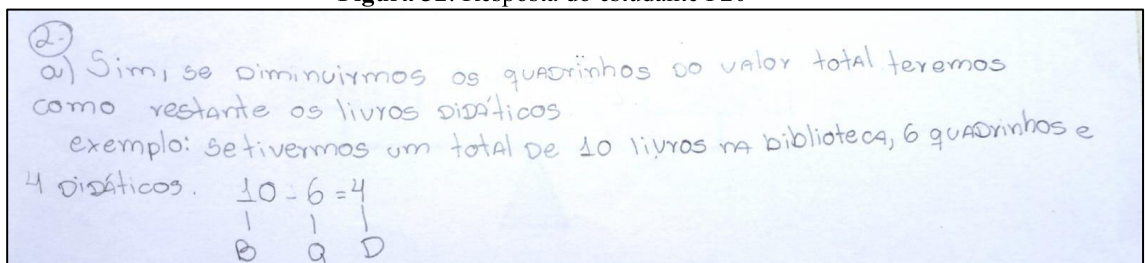
Figura 31: Resposta do estudante P34


A) Sim. AS DUAS AFIRMAÇÕES ESTÃO CORRETAS, POIS REVELAM QUE DE TODO O MATERIAL DA BIBLIOTECA PESSOAL DA MENINA SE TIRASSEM AS REVISTAS EM QUADRINHOS SO SOBRIANAM OS LIVROS DIDÁTICOS. A ALUNA JÚLIA ESCRIOU EM UMA FRASE E A ALUNA MARIA ~~ESCREVOU~~ UTILIZOU UMA EQUAÇÃO.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Alguns estudantes identificaram que as afirmações estavam corretas, mas não apresentaram justificativas.

Grupo de Respostas 2 – Respondeu que sim, na justificativa utilizaram em suas respostas, valores numéricos para fundamentar suas afirmações, como podemos identificar na resposta do estudante P20, na Figura 32. Apesar do enunciado da questão não apresentar nenhum valor numérico específico, os estudantes optaram por incorporar esses elementos em suas explicações. Esse tipo de resposta revelou que estes estudantes utilizaram no modo de pensar aritmético.

Figura 32: Resposta do estudante P20


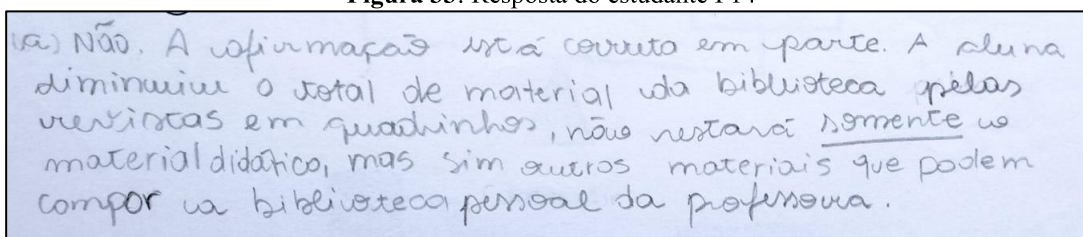
2) a) Sim, se diminuirmos os quadrinhos do valor total teremos como restante os livros didáticos
exemplo: se tivermos um total de 10 livros na biblioteca, 6 quadrinhos e 4 didáticos. $10 - 6 = 4$
B Q D

Fonte: Acervo da Pesquisa

A resposta do estudante P14 representada na Figura 33, indica que a resposta não estava correta. Apenas esse estudante respondeu dessa forma. Sua justificativa foi que na biblioteca não

tinha apenas livros didáticos e revistas em quadrinhos, que a biblioteca da professora é composta por outros tipos de livros, sendo assim a afirmação da aluna estava correta em parte. Ele argumentou que, na biblioteca da professora, poderiam existir outros itens além dos mencionados, o que poderia influenciar a avaliação da correção da afirmação. A justificativa fornecida por esse estudante se destacou por seu caráter detalhado e pela consideração de variáveis adicionais que não foram exploradas por outros discentes.

Figura 33: Resposta do estudante P14

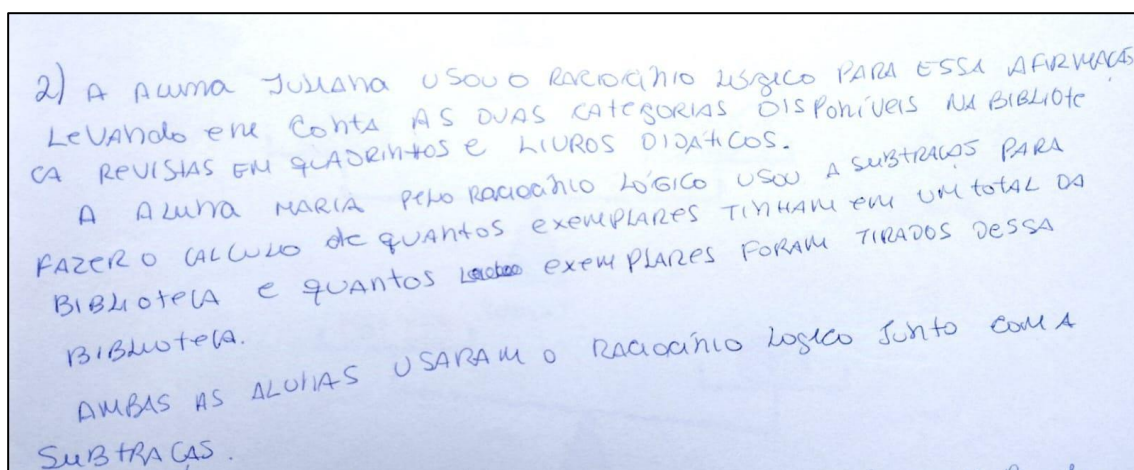


1a) Não. A afirmação está correta em parte. A aluna diminuiu o total de material da biblioteca pelas revistas em quadrinhos, não restará somente o material didático, mas sim outros materiais que podem compor a biblioteca pessoal da professora.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Destaca-se a resposta do estudante P53, na Figura 34, embora não tenha explicitamente afirmado se a aluna estava correta ou não, fez um esforço para justificar sua posição. Esse estudante forneceu uma justificativa, mencionando que as alunas utilizaram raciocínio lógico e aplicaram a operação de subtração em suas respostas, o que indicaria uma análise mais cuidadosa da questão, mesmo na ausência de uma resposta conclusiva.

Figura 34: Resposta do estudante P53



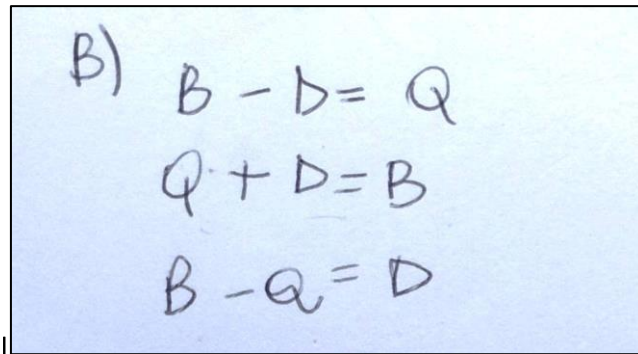
2) A Aluna Juliana usou o raciocínio lógico para essa afirmação levando em conta as duas categorias disponíveis na biblioteca: revistas em quadrinhos e livros didáticos. A Aluna Maria pelo raciocínio lógico usou a subtração para fazer o cálculo de quantos exemplares tinham em um total da biblioteca e quantos ~~livros~~ exemplares foram tirados dessa biblioteca. Ambas as alunas usaram o raciocínio lógico junto com a subtração.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Análise da Tarefa 1b

Grupo de Respostas 1- Na produção das afirmações esse grupo de estudantes utilizaram símbolos foram apresentadas de forma correta. A utilização desses símbolos por esses estudantes indicou operações matemáticas, fórmulas, variáveis e equações. Na resposta do estudante P37, da Figura 35 está um exemplar dessas respostas.

Figura 35: Resposta do estudante P37



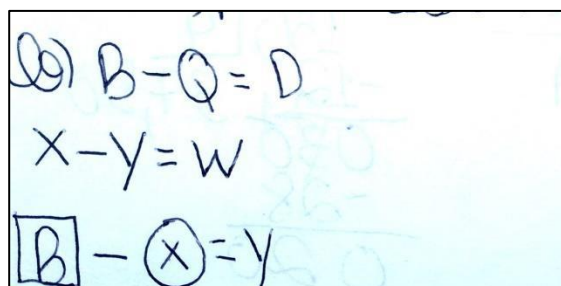
Handwritten mathematical equations on a light blue background:

$$\begin{aligned} B) \quad & B - D = Q \\ & Q + D = B \\ & B - Q = D \end{aligned}$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

O estudante P58, representado na Figura 36, apresentou uma resposta análoga a anterior, porém destacamos, pois identificamos incógnitas como x, y e w. Como se para legitimar as incógnitas fosse necessário usar x, y, w, o que indica a força dos discursos de uma cultura matemática que está presente em nossas salas de aula.

Figura 36: Resposta do estudante P58



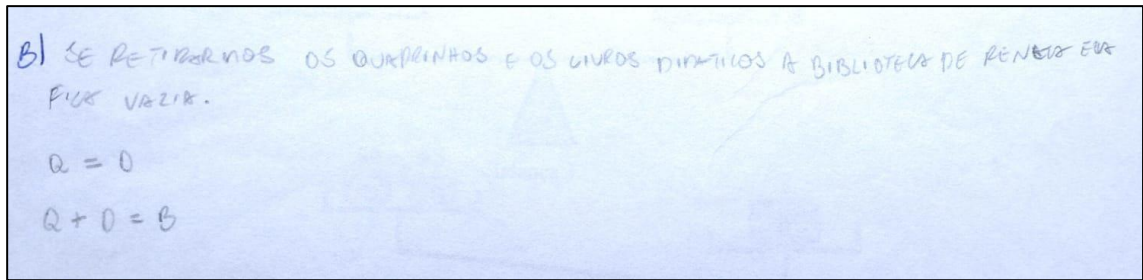
Handwritten mathematical equations on a light blue background:

$$\begin{aligned} B) \quad & B - Q = D \\ & X - Y = W \\ & \boxed{B} - \textcircled{X} = Y \end{aligned}$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

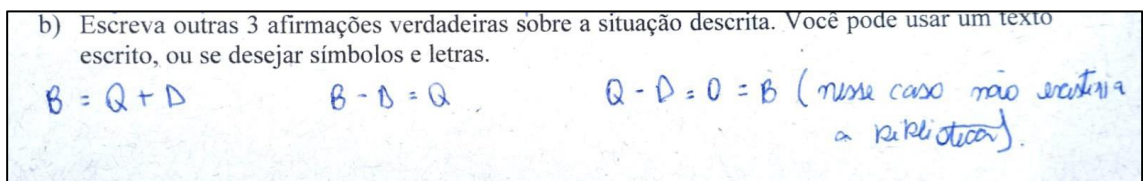
Grupo de Respostas 2- Este grupo de respostas se manifestam de diferentes formas de significados e representações. Os estudantes consideraram e afirmaram que $Q=D$, ou seja, que o número de revistas em Quadrinhos é igual ao número de livros Didáticos. As afirmações classificadas dessa forma incluíram tanto as que diretamente afirmavam essa igualdade quanto aquelas que, de maneira implícita ou indireta, assumiam que os dois tipos de materiais tinham a mesma quantidade. Essa categoria abrange afirmações que podem ter usado diferentes abordagens para expressar essa equivalência, como comparações diretas, analogias ou outras formas de argumentação que sustentavam a ideia de que a quantidade de revistas em quadrinhos e de livros didáticos era a mesma.

Na resposta do estudante P2, representado na Figura 37, a afirmação é direta, $Q = D$.

Figura 37: Resposta do estudante P2

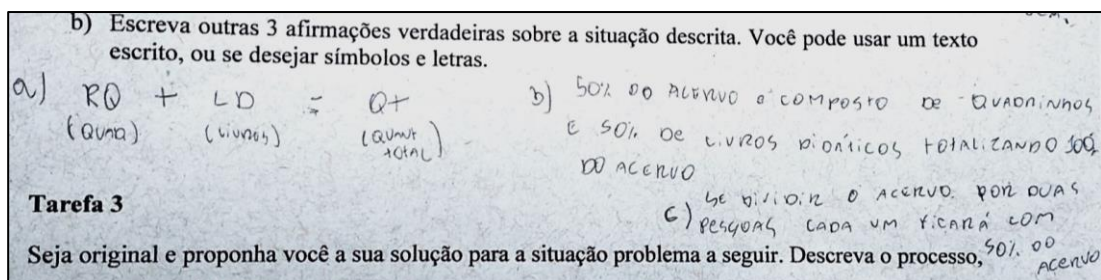
Fonte: Acervo da Pesquisa

No caso do estudante P17, da Figura 38, ele faz uma afirmação onde $Q - D = 0$, ou seja, isso só é possível, pois considerou de forma implícita que $Q = D$. Essa é uma abordagem particular, subtraíram os livros didáticos das revistas em quadrinhos, e encontraram zero itens. Com base nesse raciocínio, concluíram que, se não houvesse mais livros didáticos nem revistas em quadrinhos na biblioteca, o acervo estaria completamente esvaziado, resultando, portanto, na inexistência de uma biblioteca.

Figura 38: Resposta do estudante P17

Fonte: Acervo da Pesquisa

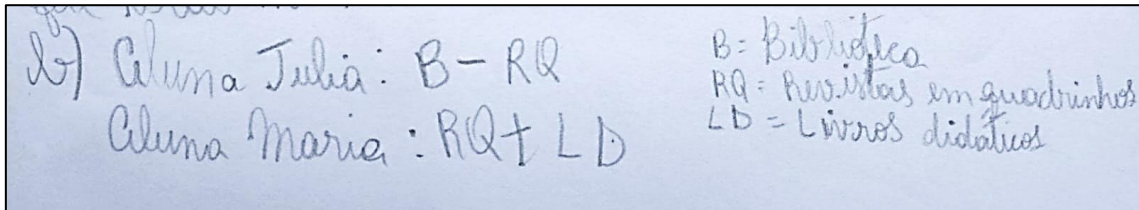
Na resposta do estudante P35, da Figura 39, ele utilizou valores percentuais, neste caso, o estudante também parte do pressuposto de que a quantidade de revistas em quadrinhos (Q) é igual à quantidade de livros didáticos (D), ou seja, ele assume a relação $Q = D$. No entanto, o que diferencia essa resposta é a forma como o estudante justifica essa igualdade. Em vez de apenas afirmar a igualdade, ele argumenta que 50% do acervo da biblioteca é composto por revistas em quadrinhos, enquanto os outros 50% são de livros didáticos. Consideramos nesse caso que o estudante opera no modo de pensar aritmético, embora sua representação da situação ocorra com uso de letras.

Figura 39: Resposta do estudante P35

Fonte: Acervo da Pesquisa

Grupo de Respostas 3 – Neste grupo de respostas os estudantes não apresentam uma equação, e sim uma expressão. Como se cada expressão correspondesse a resposta de uma aluna. Diferente do Grupo anterior, não estabelecem uma relação de igualdade. Em outras palavras, a afirmação apresentada não evidenciou uma igualdade entre os dois “lados” da equação. Na resposta do estudante P47, representado na Figura 40 temos um exemplar deste Grupo.

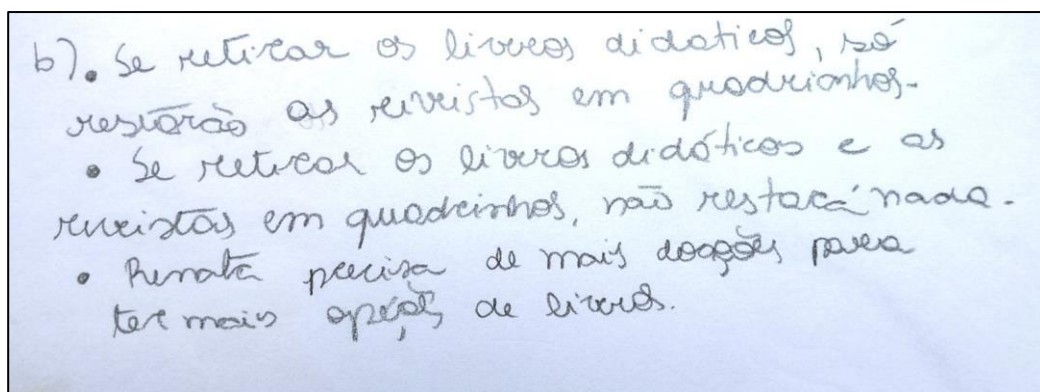
Figura 40: Resposta do estudante P47



Fonte: Acervo da Pesquisa

Grupo de Respostas 4- Nesse grupo de respostas estão as afirmações em forma de frases. Afirmação que não envolve representação com símbolos, mas estabelecem relações, operatórias ou não. Em alguns casos são afirmações não matemáticas, mas legítimas dentro do que o estudante tem a dizer sobre a proposta. Um exemplo, disso, é o fato do estudante argumentar que a biblioteca precisa de mais doações de livros, expressa sua opinião de que é necessário aumentar o acervo da biblioteca. As respostas dos estudantes P5 e P59, representados na Figuras 41 e 42 respectivamente são exemplares desse grupo.

Figura 41: Resposta do Estudante P5



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 42: Resposta do Estudante P59

b). A biblioteca de Renata possui livros didáticos e revistas em quadrinhos.

- Se Renata me emprestar seus livros didáticos, ainda ficará com as revistas em quadrinhos.
- Renata gosta de ler livros didáticos e revistas em quadrinhos.

Fonte: Acervo da Pesquisa

A resposta do estudante P30, se diferencia, pois assume um discurso de um professor, analisando o trabalho das alunas conforme proposição da tarefa. Adotou uma postura analítica ao avaliar as afirmações feitas pelas alunas no enunciado. Em vez de simplesmente fornecerem respostas diretas, ofereceram uma reflexão crítica sobre o que foi apresentado pelas alunas.

Figura 43: Resposta do estudante P30

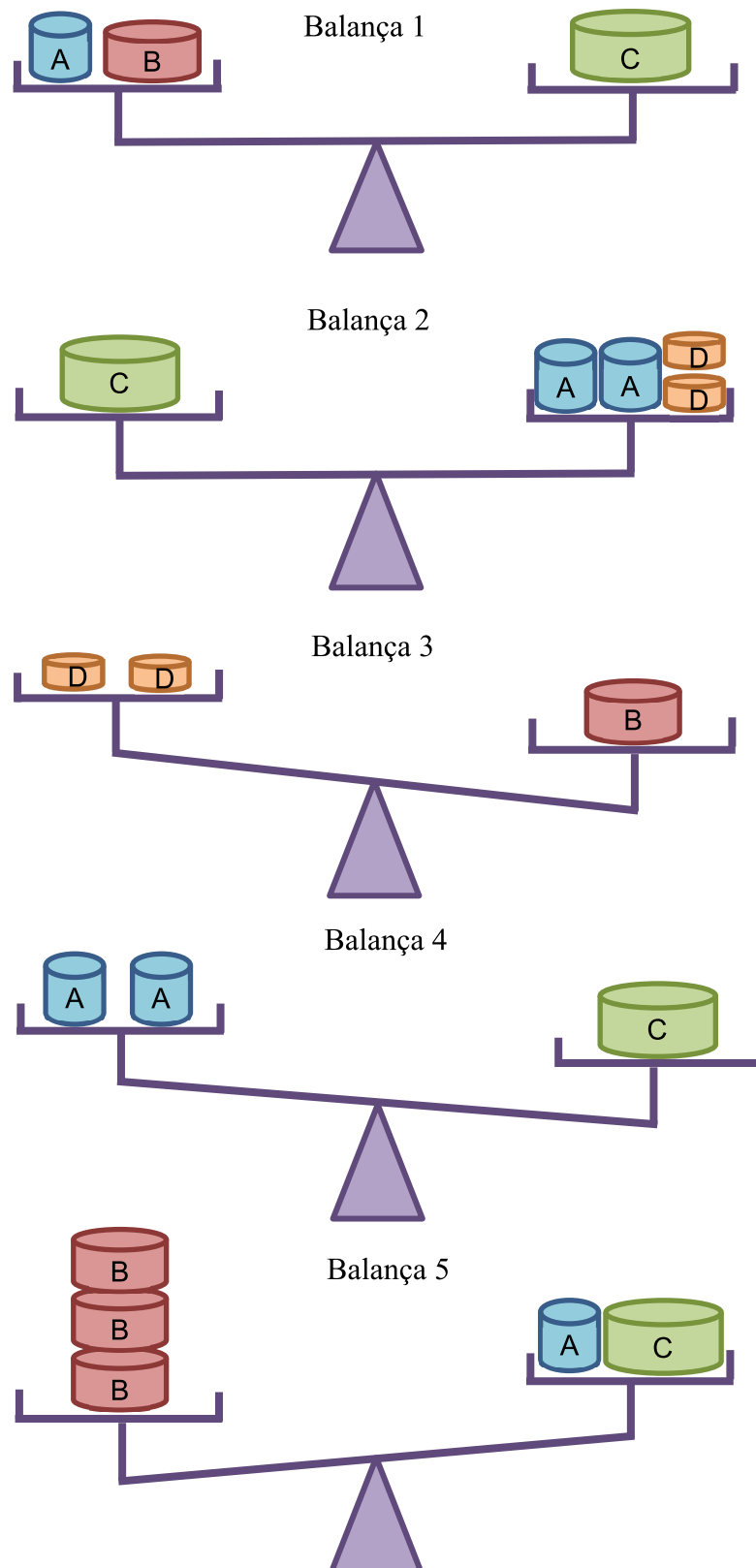
b) ao analisar a lógica descrita da aluna Maria, é possível considerar que:

- a aluna possui noção de soma (considerando o total de materiais presentes na biblioteca), de divisão (ao supor os grupos / categorias de livros didáticos e de revistas em quadrinhos) e de subtração (diminuindo o total de materiais presentes na biblioteca com a quantidade de revistas em quadrinhos).

Fonte: Acervo da Pesquisa

A seguir temos 5 balanças e 4 pesos: Peso A, Peso B, Peso C e Peso D. Observe que as balanças 1 e 2, estão equilibradas e as balanças 3, 4 e 5 não.

Figura 44: Imagem das balanças

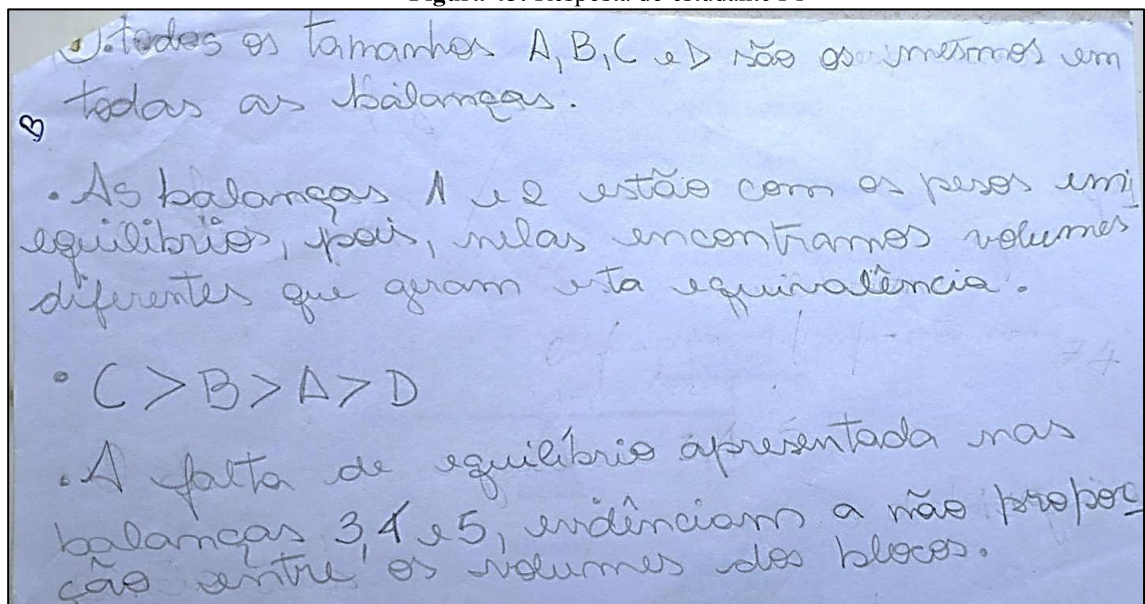


Escreva 4 afirmações verdadeiras que estabeleçam relações entre os possíveis valores dos pesos. Você pode usar um texto escrito, ou se desejar símbolos e letras.

Análise da Tarefa 5

Grupo de Respostas 1: Nesse grupo de respostas os estudantes utilizam as 5 balanças e fazem uma afirmação relacionando os 4 pesos. O estudante P1, representado na Figura 45, estabelece uma relação de desigualdade ordenado do maior para o menor peso. Na sua justificativa não fica evidente de que forma ele constrói esta relação, pode ser por observação do tamanho dos cilindros ou porque estabeleceu relações entre as balanças de equilíbrio e desequilíbrio.

Figura 45: Resposta do estudante P1



Fonte: Acervo da Pesquisa

Na resposta do estudante P54, da Figura 46, o estudante registra que $C = AB = AADD$, esta representação indica uma adição, leia-se $C = A + B = A + A + D + D$, deixa explícito a relação de transitividade, quando representa essa igualdade, supõe uma relação quando compara duas balanças (1 e 5), justifica a desigualdade $C > B > A > D$, pela forma como os pesos estão dispostos nas balanças, e por fim afirma uma igualdade pontual de que $B = ADD$, ou seja, $B = A + D + D$

Figura 46: Resposta do estudante P54

$\rightarrow C = AB = ADD$, relações que explicam o equilíbrio nas balanças 1 e 2.
 $\rightarrow$ Se compararmos a balança 1 e a balança 5, podemos supor que o equilíbrio na balança 5 se daria com a retirada de um peso B.
 $\rightarrow$ Pela disposição dos pesos nas balanças, a hierarquia de valores parece ressaltar a ordem: $C > B > A > D$.
 $\rightarrow$ O valor do peso B é igual a ADD.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Grupo de Respostas 2: Neste grupo de respostas identificamos afirmações sobre cada uma das balanças separadamente, misturam símbolos com textos, priorizando o registro através de textos, consideram a relação de equilíbrio e desequilíbrio. Na resposta do estudante P48, representado na Figura 47, a uma indicação de “movimento”, como se fosse feitas ações sobre a balança, de retiradas e acréscimos dos pesos. Destaque para a terceira afirmação, na “*balança 3 acabou ficando desequilibrada pois o peso D, mesmo estando duplicado ela acaba não alcançando o peso B.*”, esta leitura do estudante associa-se a ideia de uma experiência física com a balança e os pesos.

Figura 47: Resposta do estudante P48

tarefa 1 - A balança 1 está equilibrada porque com a soma do peso A e B ele acaba igualando o peso do C.
 • A balança 2 é a mesma coisa, mas por não ter mais o peso B ~~acaba~~ acabou sendo o peso A duplicado e adicionado o peso D, deixando pra nós bem claro que o peso C é bem grande.
 • Na balança 3 acabou ficando desequilibrada pois o peso D, mesmo estando duplicado ele acaba não alcançando o peso B.
 • Na balança 4 percebemos que mesmo estando desequilibrado, o peso A estando duplicado ele quase alcança o peso C, se colocarmos mais um peso igual a balança 2, ele ficaria equilibrado.
 • Na balança 5 houve um excesso do peso B, deixando assim a balança 5 desequilibrada, se tirarmos um peso B da balança, talvez ficaria equilibrado.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na resposta do estudante P14, da Figura 48 a ênfase das afirmações está no equilíbrio e desequilíbrio, destaque para as palavras “provavelmente”, “aparentemente”, indicando que apenas as imagens não são suficientes para produzirem afirmações.

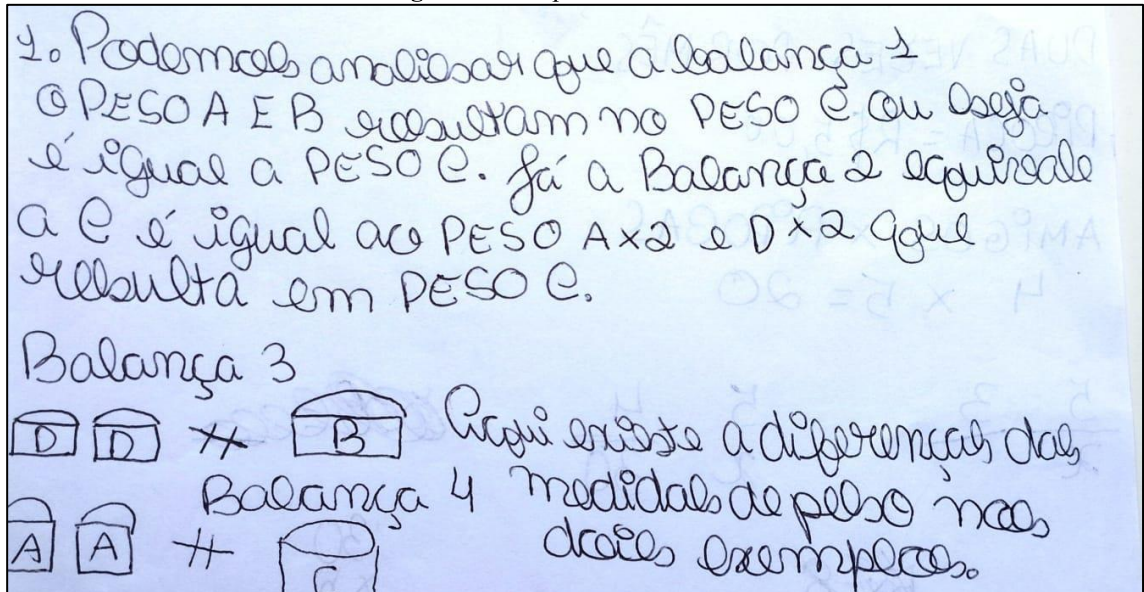
Figura 48: Resposta do Aluno P14

- 1) O peso A e B, juntos, podem formar o mesmo peso do C. Por isso, provavelmente os pesos estão equilibrados, pela igualdade dos pesos A+B e C.
- 2) O peso B, estando sozinho, é mais leve que o peso D. Por isso, a balança não possui o valor de peso igual. Dessa maneira, ocorre o desequilíbrio.
- 3) Aparentemente, o peso A, se for usado sozinho, é mais pesado que o peso C. Tendo em vista que se for colocado A+A na balança, fica pesado para o C. Mas, existe a possibilidade de se o C for colocado somente com o A, o peso maior será para a letra C.
- 4) O peso B, se for usado mais de uma vez na mesma balança, pode desequilibrar o peso A e o C, tendo em vista que eles podem ser considerados "pesados".

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na resposta do estudante P58, da Figura 49, a primeira afirmação é sobre as balanças 1 e 2 registrando as correspondências. Na segunda afirmação, identifica o desequilíbrio das balanças 3 e 4, com o símbolo de diferente ($\neq$).

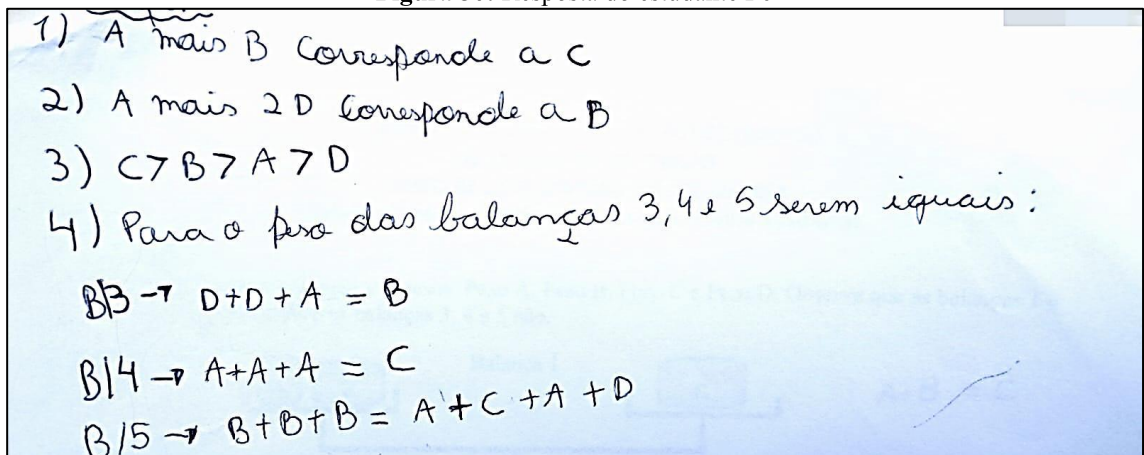
Figura 49: Resposta do Aluno P58



Fonte: Acervo da Pesquisa

Grupo de respostas 3: Neste grupo de respostas identificamos afirmações sobre cada uma das balanças separadamente, o registro com uso de textos ainda aparece, porém, priorizam o registro através de textos, consideram a relação de equilíbrio e desequilíbrio. Identificamos registros em alguns casos que podem se confundir com representações da linguagem matemática. Na resposta do estudante P6, da Figura 50, utiliza mais no lugar do símbolo +, corresponde no lugar do =, e o que merece atenção B/3; B/4, B/5, para indicar balanças 3, 4 e 5, e não uma representação fracionária.

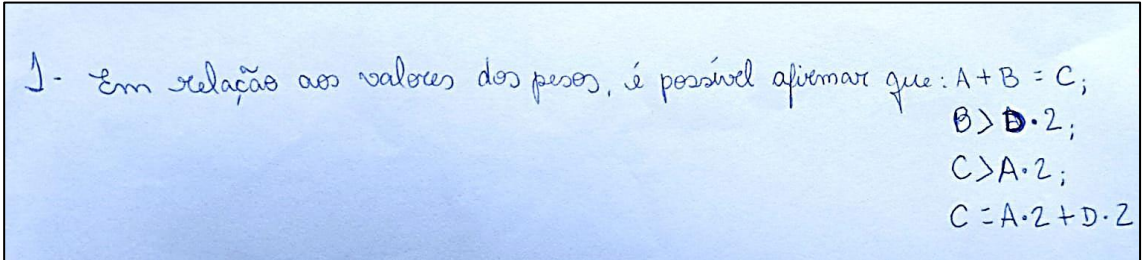
Figura 50: Resposta do estudante P6



Fonte: Acervo da Pesquisa

Na resposta do estudante P4, da Figura 51, se diferencia da resposta anterior, por usar a multiplicação, ao invés de adição de valores iguais.

Figura 51: Resposta do estudante P4

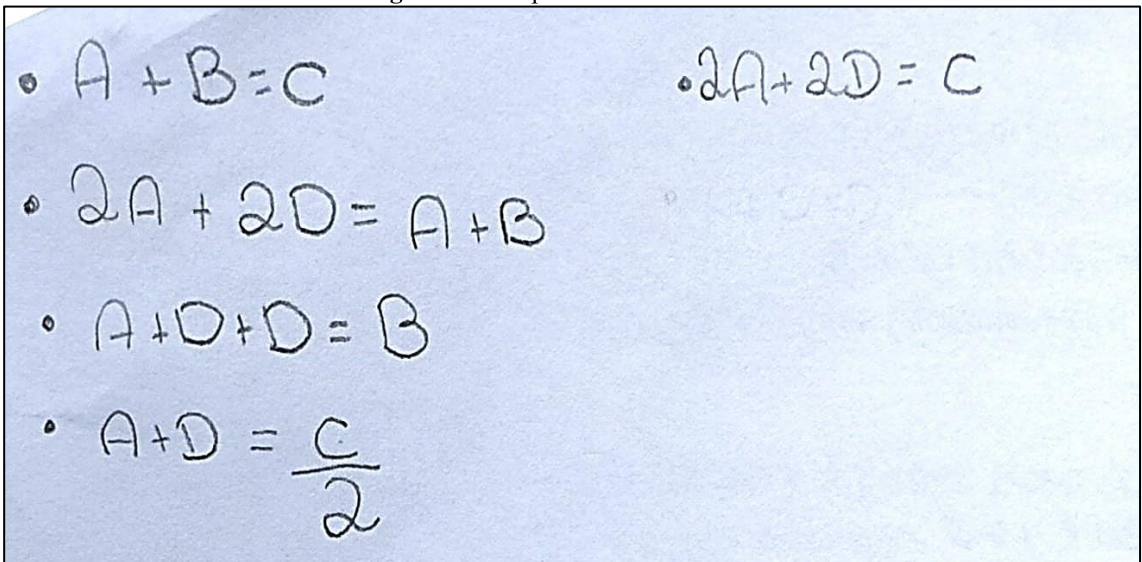


1- Em relação aos valores dos pesos, é possível afirmar que: $A+B=C$;
 $B>D \cdot 2$;
 $C>A \cdot 2$;
 $C=A \cdot 2+D \cdot 2$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na resposta do estudante P20, da Figura 52, considera apenas as balanças em equilíbrio e faz uma “manipulação” a partir das duas afirmações das balanças 1 e 2, $A+B=C$ e $2A+2D=C$ (essa igualdade não aparece na resposta do estudante), portanto $2A+2D=A+B$; $A+D+D=B$ (essa igualdade o estudante faz ($2A-A=A$ e desmembra o $2D$ em $D+D$); a outra igualdade parte de $2A+2D=C$; $2(A+D)=C$ (não representada pelo estudante) e conclui $A+D=C/2$

Figura 52: Resposta do estudante P20



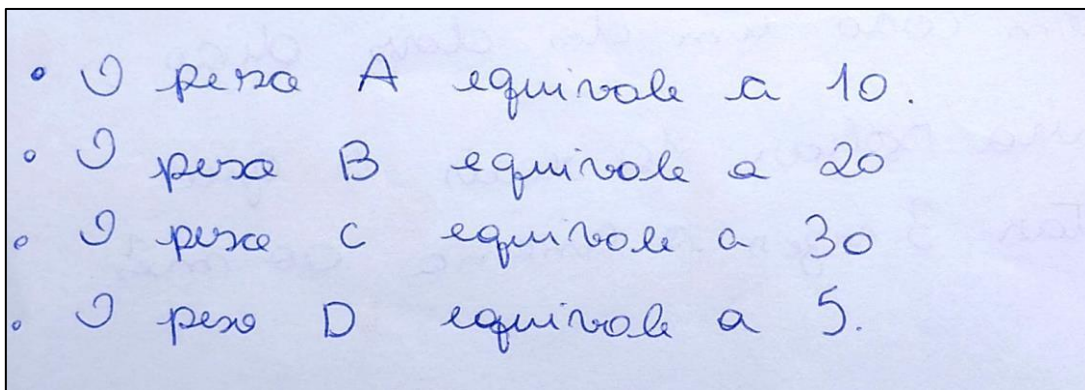
• $A+B=C$ • $2A+2D=C$
 • $2A+2D=A+B$
 • $A+D+D=B$
 • $A+D=\frac{C}{2}$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Grupo de Respostas 4: Esse grupo de respostas os estudantes atribuem valores numéricos ao pessoas para estabelecer relação entre eles. Para cada peso os alunos atribuíram um valor, para fazer as afirmações que consideraram verdadeiras. Embora não tenham afirmado as igualdades correspondentes as balanças, os valores sugeridos tornam as representações das 5 balanças verdadeiras. Na resposta do estudante P5, da Figura 53, os valores são adequados para $A + B = C$; $10 + 20 = 30$ e $2A + 2D = C$; $2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 30$.

E vai tornar verdadeiro todas as desigualdades.

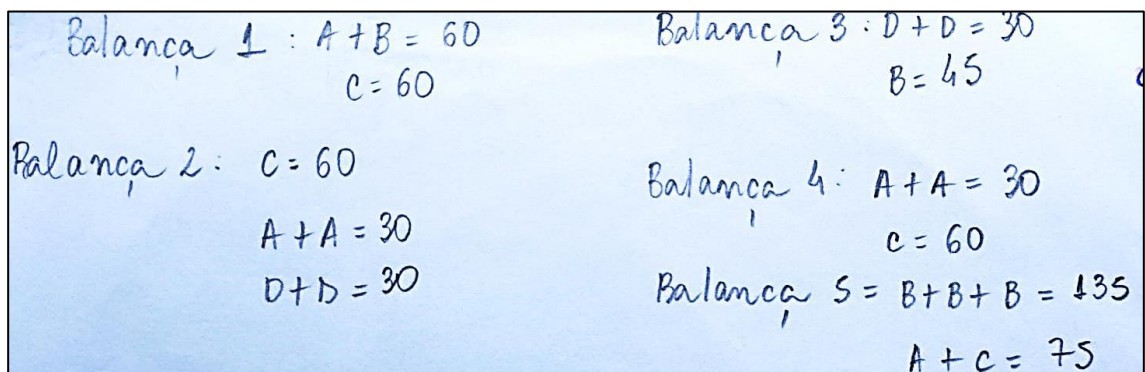
Figura 53: Resposta do estudante P5



Fonte: Acervo da Pesquisa

O estudante P23, atribui os valores para as adições entre os pesos sem registrar todos os valores de cada peso. Registra utilizando as igualdades e desigualdades (pelos valores) representadas nas 5 balanças.

Figura 54: Resposta do estudante P23



Fonte: Acervo da Pesquisa

As tarefas escolhidas para análise sobre interlocuções sobre o pensamento algébrico e aritmético, priorizaram o fato de não apresentarem em seus enunciados números e sim representações e relações. As respostas produzidas pelos licenciandos indicaram argumentações e manipulações para conduzir a significados abstratos. Afirmção que não recorrem ao uso de números e outras que explicitam essa necessidade. Alguns significados que indicamos implícitos são interpretações e leituras possíveis que dialogam com a construção da pesquisadora.

Concordamos com Lins e Gimenez (1997) quando afirmam que a Álgebra e a Aritmética caminham juntas, mas os modos de pensar se adequam as situações e não aos sujeitos que produzem as enunciações. A tarefa proposta pode indicar um determinado modo de pensar para que sugere, porém o que irá determinar o campo de produção (aritmético ou algébrico) é o estudante, através de suas representações e modos de produzir significado. Essa produção é localizada, não é possível classifica de maneira geral que um estudante pensa algebricamente, ou pensa aritmeticamente. É no interior da atividade que esses modos se revelam, sempre considerando que o interlocutor tem papel fundamental nesse processo.

7. PRODUTO EDUCACIONAL

FICHA DE TRABALHO 1

Tarefa 1

A professora Joana escreveu para seus alunos de 4º ano, a seguinte afirmação: “Renata está montando uma biblioteca pessoal e já possui revistas em quadrinhos e livros didáticos. A professora pediu que os estudantes, com base nessa afirmação escrevesse outra afirmação verdadeira, que envolvesse relações operatórias.”

A aluna Júlia escreveu a seguinte afirmação:

“Se da biblioteca pessoal de Renata retirarmos as revistas em quadrinhos, restarão os livros didáticos.”

A aluna Maria respondeu:

B= Total do material da biblioteca

Q= Quantidade de revistas em quadrinhos

D= Quantidade de livros didáticos

$$B - Q = D$$

a) A afirmação da aluna está correta? Justifique.

b) Escreva outras 3 afirmações verdadeiras sobre a situação descrita. Você pode usar um texto escrito, ou se desejar símbolos e letras.

Tarefa 2

As Réguas de Cuisinaire, foram idealizadas pelo professor belga Émile Georges Cuisinaire Hottelet. Ela é formada por diferentes cores e tamanhos, como mostra a tabela abaixo:

Régua	Cor	Código	Régua	Cor	Código
	branca	b		Verde-escura	e
	vermelha	v		preta	p
	Verde-clara	c		marrom	m
	roxa	r		azul	z
	amarela	a		laranja	l

- a. Utilizando as Régua de Cuisenaire, monte e desenhe todas as possibilidades de possibilidades de formar a régua laranja, utilizando duas outras régua.
- b. Represente de outra forma, sem usar o desenho das régua, as igualdades do item a.
 $B + Z = L$, $V + M = L$, $C + P = L$, $R + E = L$, $A + A = L$,
- c. Monte e desenhe cinco régua vermelhas alinhadas e encontre a régua que corresponde ao tamanho total.
- d. Represente de outra forma a igualdade do item c.

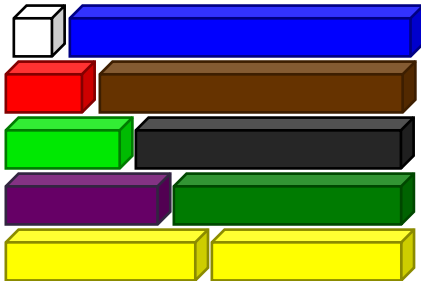
Respostas da Ficha de Trabalho 1

Respostas da Tarefa 1

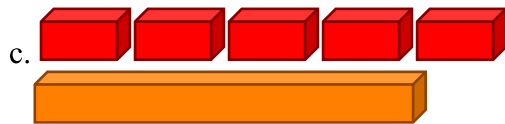
- a. *Sim, pois as afirmações realizadas revelam situações em que ocorreram. Se a biblioteca é composta por dois itens e um deles é retirado, sobrar o outro item.*
- b. $B - D = Q$; $D + Q = B$; $B > D$
- *Se juntarmos os livros didáticos e os livros didáticos teremos a biblioteca de Renata.*
 - *Se da biblioteca de Renata retirarmos os livros didáticos, ficarão as revistas em quadrinhos*
 - *A quantidade total de itens da biblioteca é maior que quantidade total de livros didáticos.*

Respostas da Tarefa 2

a.



b. $b + z = l$, $v + m = l$, $c + p = l$, $r + e = l$, $a + a = l$



d. $v + v + v + v + v = l$

Orientações para a Ficha de Trabalho 1

A Tarefa 1, é sobre o acervo de uma biblioteca que possui livros didáticos (representado pela letra D) e revistas em quadrinhos (representadas pela letra Q), são dadas duas afirmações de alunas distintas e o enunciado pergunta se essas afirmações estão corretas. Para a resposta desta pergunta, o aluno precisa analisar a situação e além de informar se as afirmações estão corretas ou não, é necessário que ele justifique sua resposta. No item b, desta mesma tarefa, é solicitado a criação de afirmações, essas afirmações podem ser através de frases ou símbolos e letras, assim como no item a, tem conexão com as informações dadas no texto expresso no enunciado.

A Tarefa 2 faz uso das Régua de Cuisenaire, o intuito é trabalhar os tamanhos sem usar os números, e para isso cada tamanho da régua foi representado por uma letra. Nesse contexto é possível realizar operações e representações sem que o que discente necessite usar os números. A Tarefa abrange tanto usar os desenhos, como as letras nessas representações.

As duas tarefas possuem a intenção de estimular o discente a realizar operações sem a utilização de números.

FICHA DE TRABALHO 2

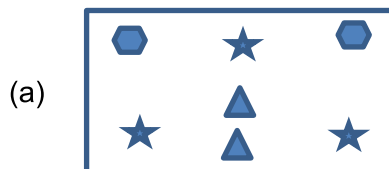
Tarefa 3

A proposta desta questão é a de compreender a relação entre símbolos.

Considerando as equivalências a seguir:

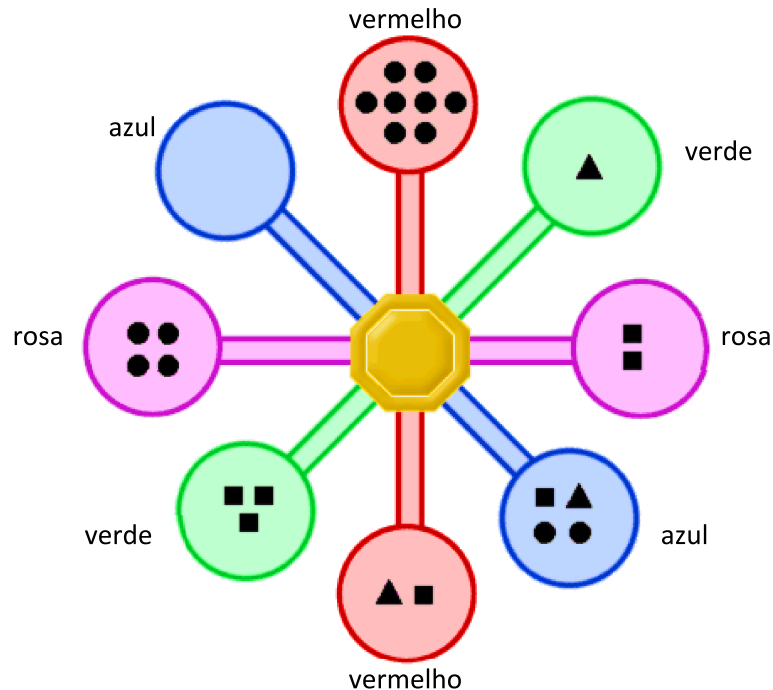


Calcule em cada item o total de triângulos. Explique como encontrou o resultado.



Tarefa 4

Na figura a seguir as formas iguais têm o mesmo peso e as formas diferentes pesos diferentes.



As figuras foram distribuídas, conforme mostra a imagem, respeitando uma regra – as casas com uma mesma cor têm o mesmo peso.

As casas com a mesma cor estão em uma mesma reta e o nome das cores estão ao lado de cada casa.

- Observando as casas rosa, podemos afirmar que um quadrado corresponde ao peso de quantos círculos?
- Qual a relação que existe entre o peso dos triângulos e dos quadrados?
(Dica: observe as casas verdes)
- Quantos quadrados pretos devem ser colocados na casa azul vazia para completar esta distribuição?

Respostas da Ficha de Trabalho 2

Respostas da Tarefa 3

- 23 Triângulos. Sabendo que cada estrela vale 3 triângulos e um hexágono corresponde a duas estrelas, conclui-se que cada hexágono vale 6 triângulos, sendo assim, como há dois hexágonos, calculamos $6 * 2 = 12$ triângulos, há 3 estrelas, logo $3 * 3 = 9$ Triângulos e mais dois triângulos que consta no quadro, adicionando as quantidades de triângulos, temos: $12 + 9 + 2 = 23$ triângulos.

- b. São 22 triângulos. Sabendo que cada estrela equivale a 3 triângulos, como há 6 estrelas, para descobrir quantos triângulos há ao todo é necessário fazer $6 \times 3 = 18$, juntando com os 4 triângulos existentes, totaliza 22 triângulos.*

Respostas da Tarefa 4

- a. 2 Círculos*
- b. 3 quadrados corresponde a 1 triângulo, ou seja, o peso de um triângulo é igual a de 3 quadrados*
- c. 5 Quadrados*

Orientações para a Ficha de Trabalho 2

Essa ideia de igualdade informada é porque uma coisa pode substituir a outra, pois se é afirmado que uma estrela é o mesmo que três triângulos, onde há uma estrela, é possível colocar três triângulos no lugar, assim também é possível realizar o inverso, se é afirmado que 1 estrela vale três triângulos, havendo esses três triângulos e querendo saber quantas estrelas há, ocorre a substituição dos três triângulos por uma estrela. Isso tudo se dá de acordo com o que a questão queira detectar.

A Tarefa 3, se refere a afirmar o valor de algo em função do outro, as figuras que o enunciado mostra apresenta o hexágono sendo igual a 2 estrelas e uma estrela igual a três triângulos, em função destas informações a atividade é saber o total de triângulo e informar o que foi feito para chegar a solução, no item a, há dois hexágonos, que correspondem a duas estrelas (que são iguais a três triângulos, desta forma, para cada hexágono temos 6 triângulos), assim, em relação aos hexágonos, temos 12 triângulos, contando que neste mesmo item se tem três estrelas e cada uma vale três triângulos, logo em relação as estrelas o total de triângulos será de 9, contando os próprios triângulos, há dois. Sendo assim serão 12 triângulos (convertendo os hexágonos) mais 9 triângulos (convertendo as estrelas), mais os 2 que aparecem como triângulo, assim $12 + 9 + 2$, o total de triângulos é de 23 triângulos, aqui a partir substituições chegamos na quantidade de triângulos que o enunciado solicitava, nesta atividade é possível verificar como foi que o discente chegou na resolução, pois pede que explique o caminho percorrido.

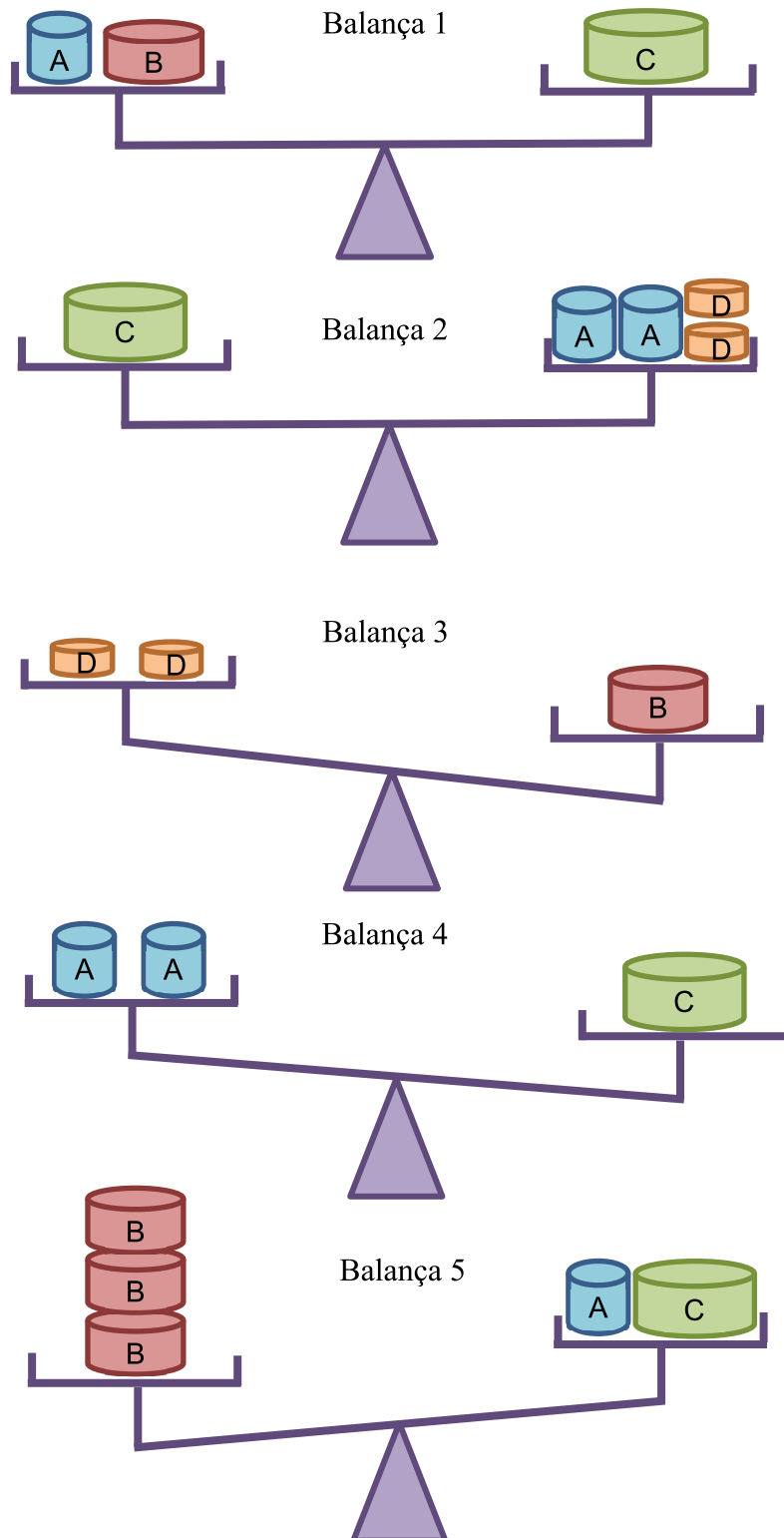
A Tarefa 4, como a 3 trabalha a ideia de igualdade e substituição. Apesar de serem formas distintas uma determinada quantidade equivale a outra quantidade e aí dependerá da reta em que estejam. O item a solicita o peso do quadrado em relação ao círculo, observando que 2 quadrados equivalem a 4 círculos, conclui-se que 1 quadrado pesa o mesmo que 2 círculos. Os itens b e c,

apresentam a mesma perspectiva, pois no b solicita a relação entre triângulos e quadrados e no c quantos quadrados pretos serão necessários para completar o que estava vazio.

FICHA DE TRABALHO 3

Tarefa 5

A seguir temos 5 balanças e 4 pesos: Peso A, Peso B, Peso C e Peso D. Observe que as balanças 1 e 2, estão equilibradas e as balanças 3, 4 e 5 não.



Escreva 4 afirmações verdadeiras que estabeleçam relações entre os possíveis valores dos pesos. Você pode usar um texto escrito, ou se desejar símbolos e letras.

Respostas da Ficha de Trabalho 3

Respostas da Tarefa 5

- $3B > 2A$
- $A+B = 2A+2D$
- $B = A+2D$
- $B < C$
- *O peso C pesa mais que os pesos D e B juntos*
- *Os pesos A e B juntos pesam o mesmo que 2 pesos D junto com 2 pesos A.*

Orientações para a Ficha de Trabalho 3

A Tarefa 5, não faz uso de números, mas como já afirmado aqui, há relações, esta questão é composta por balanças e 4 pesos, utilizando estes pesos, foram apresentadas relações entre eles referentes ao peso. A proposta era que afirmações fossem feitas relacionando o peso das balanças, mas não afirmações das balanças de forma individual, mas que a relação exposta envolvesse 2 ou mais balanças distintas, haja vista que os pesos são os mesmos, ou seja, o peso D vale a mesma coisa em todas as balanças, assim como os outros pesos. E como há balanças equilibradas e desequilibradas o discente pode trabalhar distintas relações. Lembrando que essas afirmações poderiam ser feitas através de frases ou símbolos e letras.

FICHA DE TRABALHO 4

Tarefa 6

Na tabela a seguir, cada letra corresponde a um número. Para decifrar códigos secretos, podemos utilizar essa correspondência.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
U	V	W	X	Y	X	Z			
20	21	22	23	24	25	26			

Assim o código:

4	18	19	20	3	0	13	19	4
---	----	----	----	---	---	----	----	---

Corresponde a palavra **ESTUDANTE**.

Agora é a sua vez de decifrar:

a.

20	13	8	21	4	17	18	8	3	0	3	4
----	----	---	----	---	----	----	---	---	---	---	---

b.

0		20	4	17	9		4		18	20	0
---	--	----	---	----	---	--	---	--	----	----	---

c. Agora escreva o código secreto para: VOCÊ É ESPECIAL

Respostas da Ficha de Trabalho 4

Respostas da Tarefa 6

a. *UNIVERSIDADE*

b. *A UERJ É SUA.*

c.

<i>21</i>	<i>14</i>	<i>2</i>	<i>4</i>		<i>4</i>		<i>4</i>	<i>18</i>	<i>15</i>	<i>4</i>	<i>2</i>	<i>8</i>	<i>0</i>	<i>11</i>
-----------	-----------	----------	----------	--	----------	--	----------	-----------	-----------	----------	----------	----------	----------	-----------

Orientações para a Ficha de Trabalho 4

Na Tarefa 6 os elementos usados para formar um ou mais códigos foram números, cada número possui uma correlação com uma letra, e assim juntando esses números formavam-se códigos, que sendo substituídos pelas letras se identificava uma palavra ou frase.

A Tarefa consiste em uma tabela formada por 26 números e 26 letras e é composta por dois itens, no item a, são dados os números e é solicitado que seja traduzida a expressão, ou seja, os números serão substituídos pelas letras correspondentes e ao terminar, haverá uma expressão. No item b, é o inverso do a, é exposta a frase: Você é especial, e é solicitado que seja representada esta palavra com os números correspondentes.

FICHA DE TRABALHO 5

Tarefa 7

Considerando o conceito de operações e aspectos referentes às operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais. Vamos explorar aqui alguns desses aspectos, fazendo o seguinte desafio, respondendo a cada passo, em sequência, sempre considerando o resultado anterior.

- a. Escreva um número natural qualquer.
- b. Multiplique esse número por 4.
- c. Some ao resultado 15.
- d. Subtraia ao resultado 7.
- e. Subtraia ao resultado 8.
- f. Divida por 4 o resultado encontrado.
- g. Explique o porquê do resultado encontrado.

Tarefa 8

Ana e Mário pensaram em dois números naturais diferentes. E depois afirmaram:

- Ana – Pensei em um número e adicionei 2.
- Mário – Pensei em um número e subtraí 5.

Efetuada as operações, Ana e Mário descobriram que o resultado foi o mesmo número.

- a. Dê dois números que possam ter sido inicialmente pensados por Ana e Mário?
- b. A resposta é única? Se sua resposta for não, apresente outra solução.

Respostas da Ficha de Trabalho 5

Respostas da Tarefa 7

São individuais, depende do número escolhido. Porém, ao final volta-se ao mesmo número.

Exemplo de Resposta:

- a. Pensei no 2*
- b. Ao multiplicar por 4 obtive 8*
- c. Adicionando 15 o resultado foi 23*
- d. Subtraindo 7 de 23, chega-se no 16*
- e. Ao subtrair 8 de 16, encontra-se 8*
- f. Dividindo o resultado anterior por 4, obtém-se 2.*
- g. Pois foram realizadas operações inversas.*

Respostas da Tarefa 8

a. 1 e 8; 30 e 37; 13 e 20

b. Não. Qualquer outro exemplo de dois números naturais cuja diferença é 7.

Orientações para a Ficha de Trabalho 5

A Tarefa 7, solicita um número qualquer, o que confirma que funciona para qualquer número natural, são feitas 5 operações no decorrer dos itens e ao final é solicitado que o discente explique o porquê do resultado encontrado, busca-se que o aluno compreenda que ao pegar um número e realizar operações inversas nele, o resultado será o próprio número, mesmo que o número seja uma incógnita, é possível perceber isso. A Tarefa 8 também se enquadra aqui, mas foi trazida de uma maneira diferente, pois são dois números diferentes, e o aluno vai precisar entender que a diferença inicial entre eles é de 7, pois para que ao final possuam resultados iguais uma adicionou 2 e a outra subtraiu 5, ou seja, se ocorresse apenas a adição 2, ainda faltaria 5 para chegar na igualdade.

FICHA DE TRABALHO 6

Tarefa 9

O quadrado mágico se caracteriza por ter uma soma mágica (número mágico), que é sempre a mesma em todas as linhas, colunas e diagonais e pela possibilidade de preenchermos todas as células com determinados números sem repetição. Um dos mais conhecidos didaticamente é o quadrado mágico 3x3 com soma mágica igual a 15. Devemos preencher esse quadrado utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Veja uma das soluções a seguir:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

a. Uma outra possibilidade de quadrado mágico 3x3 é fazendo a soma mágica **igual a 12**. Neste caso, devemos preenchê-lo utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Complete os quadrados de soma mágica 12, dispostos a seguir, considerando as características do quadrado mágico.

7		5
	4	

3	2	
	4	

b. Existem outras soluções além das indicadas no item (a). Apresente mais uma solução, diferente das anteriores.

c. Compare duas soluções de dois quadrados mágicos Soma Mágica 15 e Soma Mágica 12 e escreva três observações.

Respostas da Ficha de Trabalho 6

Respostas da Tarefa 9

a.

<i>c</i>	0	5
2	4	6
3	8	1

3	2	7
8	4	0
1	6	5

b.

3	8	1
2	4	6
7	0	5

5	6	1
0	4	8
7	2	3

c. Na soma mágica 12, o zero compõe os números que preenchem o quadrado.

- Em ambos o número central é $\frac{1}{3}$ da soma mágica.
- O maior número que pode preencher o quadrado, não pode estar nas pontas.
- No quadrado mágico de soma 12, os números dos vértices são ímpares e no de soma 15 os números dos vértices são pares
- Os números que ocupam as posições nos quadrados mágicos conforme o desenho: , de soma 12 são pares e de soma 15, são ímpares

Orientações para a Ficha de Trabalho 6

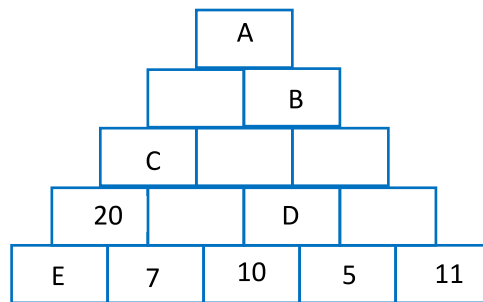
A tarefa 9 relacionada a este tema, é o quadrado mágico. É dado um quadrado dividido em 9 quadradinhos de mesmo tamanho, onde a linha tem a mesma quantidade que a coluna (3 linhas e 3 colunas), o resultado da adição de cada linha, coluna e diagonais é o mesmo. No item a, o somatório deve ser 12 e os números utilizados serão 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Sabendo que o

somatório dá 12, a primeira linha do primeiro quadrado é composta pelos números 7 e 5, que somados resulta em 12, desta forma o número que falta é o 0, a ideia para solucionar esta questão é essa, sempre observando, a linha, coluna e diagonal que possui mais números, pois assim, será verificado o que falta para chegar na soma informada, que no caso deste item dá 12. No item b, é solicitado a apresentação de uma solução diferente da que foi dada no item a. Já no item c, a proposta é observar quadrados que a soma seja igual a 15 e 12 e relatar três observações em relação a estes dois quadrados mágicos.

FICHA DE TRABALHO 6 (continuação)

Tarefa 10

Vamos descobrir o valor dos tijolos A, B, C, D e E, sabendo que cada tijolo é a soma dos dois abaixo e que tocam nele.



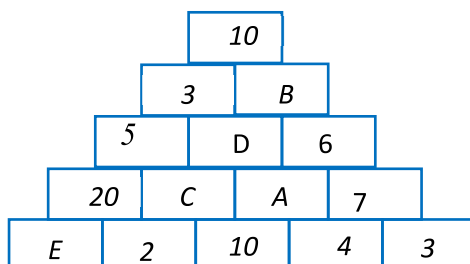
- a. A = B = C = D = E =
b. Construa uma parede de tijolos similar a esta com valores a serem descobertos.

Respostas da Ficha de Trabalho 6 (Continuação)

Respostas da Tarefa 10

a. A = 132 B = 63 C = 37 D = 15 E = 13

b.



Orientações para a Ficha de Trabalho 6 (continuação)

A Tarefa 10 é uma pirâmide que contém números e letras, que possuem um valor, este valor será descoberto de acordo com os números ali relacionados, cada número é formado pela adição dos dois que se localizam abaixo dele. Dessa forma se há o número 20 (como exposto na pirâmide) e abaixo dele consta o 2 e uma letra esta letra valerá 18, pois para que o resultado dê 20, o número que deve ser adicionado ao 2 só poderá ser o 18. O item b, pede que se construído uma pirâmide como a outra, ou seja, aqui é estimulado que o estudante encontre os valores desconhecidos, mas que depois crie situações de valores desconhecidos. De uma forma ou de outra, ele trabalhará situações de igualdade.

FICHA DE TRABALHO 7

Tarefa 11

Descubra os valores do círculo e do triângulo na operação abaixo. Explique sua estratégia.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} \bigcirc & \triangle & \bigcirc \\ + & \triangle & \bigcirc & \triangle \end{array} \\
 \hline
 1554
 \end{array}$$

Tarefa 12

A partir do resultado dessa adição descubra o valor dos símbolos.

$$\begin{array}{r}
 \triangle \text{😊} \star 7 \\
 + 2 \triangle 4 \\
 \hline
 8826
 \end{array}$$

Respostas da Ficha de Trabalho 7

Respostas da Tarefa 11

Não existe uma única resposta, são três pares de números possíveis: 7 e 7; 6 e 8; 9 e 5. A casa das unidades tem o número 4, o valor deve ser 4 ou algum número que termine com o 4, como na casa das dezenas o número é o 5, entende-se que a adição do círculo com triângulo deve dar 14 para que o um seja adicionado a casa das dezenas. Sendo assim, para dar 14, os números possíveis, são os informados acima.

Respostas da Tarefa 12

A adição de $7 + 4 + \text{😊}$, precisa ter um resultado, em que a casa das unidades deve ser o 6, para isso ocorrer a 😊 só 😊 pode valer 5. Subindo o um, concluímos $\triangle$ adicionado a $\star$ o resultado deve terminar em 1, para que fique compatível com o que consta na casa das dezenas, que $\triangle$ é o número 2. Como já $\triangle \triangle \star \text{😊}$ concluímos

que vale 5 e na casa das centenas, consta o número 8, da adição de e obteve-se o valor 11. Por fim, é possível concluir que o vale 8. Deste modo,

$$\triangle = 8, \star = 3 \text{ e } \text{😊} = 5$$

Orientações para a Ficha de Trabalho 7

Em relação a Tarefa 11, é apresentada a adição de dois números de três algarismos, mas esses números são representados por triângulo e círculo, os dois números somados resultam em um valor dado por números, este resultado possui 4 algarismos, o que indica que em algum momento a soma passou de 9, é possível sustentar que isso ocorreu nas unidades, pois adicionou círculo e triângulo e o resultado na unidade foi 4, no somatório das dezenas, havia triângulo e círculo e o resultado foi 5, ou seja, foi somada uma dezena referente a soma das unidades, o que dá para admitir que a soma de triângulo e círculo é 14, logo, as possíveis respostas são: 8 e 6, 9 e 5 e 7 e 7. A Tarefa 12 é dado também um somatório, utilizando o algoritmo da adição, há 3 parcelas uma com 4, 3 e 1 algarismos, há símbolos e há números nelas, o resultado é todo composto por números, que possui 4 algarismos, na adição das unidades os números que aparecem, se somados, já passam de 9, dessa forma é necessário identificar qual número equivale a carinha (um dos símbolos que há na conta), para identificar qual símbolo é o quê. Para resultar em 6 na unidade, a carinha tem que valer 5, pois $4+7$ (que são os outros números) resulta em 11. Continuando a resolução, a estrela e o triângulo, somados, devem dar 11, pois no resultado há o número 2 na dezena, e com a adição das unidades há mais uma dezena. Ao testar os valores que resultasse em 11, ficou notório que a estrela vale 3 e o triângulo 8, devido aos demais resultados, como é possível identificar diretamente na questão.

FICHA DE TRABALHO 8

Tarefa 13:

Nessa questão vamos observar regularidades nas adições.

- a. Encontre o resultado das seguintes adições (somas).
 - $1 = 1$
 - $1 + 11 = 12$
 - $1 + 11 + 111 = 123$
 - $1 + 11 + 111 + 1111 = 1234$
- b. A partir dos resultados indicados, escreva as adições (somas), cujo padrão seja o mesmo descrito acima:

- $12345 =$
 - $123456 =$
- c. Que padrão você identifica **nas parcelas** e na **soma** (resultado)?
- d. Na sequência 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, ... o que acontece com o valor posicional do algarismo 2?

Tarefa 14

Chamam-se número *em escada* aos números que podem ser escritos como a soma de números naturais consecutivos.

Vejam alguns exemplos:

7 é um número *em escada*, pois pode ser escrito como $3 + 4$;

12 também é um número *em escada*, pois pode ser escrito como $3 + 4 + 5$;

$4 + 5 + 6$ ou $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ são duas formas de representar o número 15 (*em escada*).

Agora, responda as perguntas:

- a. Vamos investigar regularidades ou padrões na seguinte sequência de números *em escada*. Seguindo a lógica de construção, escreva **as três** próximas adições que resultarão em números em escadas.
- $1 + 2 + 3 = 6$
 - $2 + 3 + 4 = 9$
 - $3 + 4 + 5 = 12$
- b. Escreva uma sequência com os seis números *em escadas* do item anterior (os resultados).
- c. Qual a regularidade encontrada na sequência do item (b)?
- d. Crie 2 números escadas que sejam soma de 4 números consecutivos?

Respostas da Ficha de Trabalho 8

Respostas da Tarefa 13

a.

- $1 = 1$
- $1 + 11 = 12$
- $1 + 11 + 111 = 123$
- $1 + 11 + 111 + 1111 = 1234$

b.

- $12345 = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111$
- $123456 = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + 111111$

- c. *Ao somar uma parcela nela se acrescenta mais um algarismo 1 e a soma obtida é o resultado da última acrescentando mais um algarismo, sendo ele o sucessor do último algarismo da última soma, ou seja, se a última foi 1234567, a soma do próximo será 12345678.*
- d. *Muda de ordem e classe, primeiro é unidade, depois se torna dezena, depois centena e assim sucessivamente.*

Respostas da Tarefa 14

- a.
- $4 + 5 + 6 = 15$
 - $5 + 6 + 7 = 18$
 - $6 + 7 + 8 = 21$
- b. 6; 9; 12; 15; 18; 21
- c. *Os números aparecem de 3 em 3. Ou seja, o primeiro é o 6, somando 3 o próximo é o 9.*
- d. $2 + 3 + 4 + 5 = 14$
 $3 + 4 + 5 + 6 = 18$

Orientações para a Ficha de Trabalho 8

Na Tarefa 13 a regularidade estabelecida é a seguinte: O primeiro número é o 1, que é igual a um, no segundo será $1 + 11$, resultando 12, depois $1 + 11 + 111$, que é igual a 123. O que se identifica aqui é que a próxima parcela será a parcela anterior com um dígito a mais, que é o próprio 1, e no resultado se percebe que é acrescentado também uma casa, mas o número que aparece é o sucessor do último, como no exemplo acima: 1, 12, 123, seguindo esta sequência, o próximo será 1234, o outro 12345.

A Tarefa 14 é sobre números em escada, o número é chamado assim, pois pode ser representado por uma adição de números consecutivos, como é apresentado no exemplo. O enunciado do item a, solicitou as próximas adições que teriam como resultado no número escada. Já no item b pede os 6 números encontrados no item a. A letra c pergunta sobre a regularidade desses números e a d, solicita que encontre número em escada usando a adição de 4 números. Trabalhando nessa questão sequência e regularidade e não só na visualização mas fazendo o estudante construir.

FICHA DE TRABALHO 9

Tarefa 15

Um ano bissexto é um ano com 366 dias, ao invés de 365, onde a cada 4 anos acrescenta-se um dia ao final do mês de fevereiro. Este dia “a mais” é acrescentado, porque um ano não tem

365, mas sim 365,25 dias. Ao acrescentar um dia ao ano cada 4 anos este problema fica resolvido. Dessa forma, os anos que são múltiplos de 4 são bissextos.

a. Complete a tabela a seguir com anos bissextos:

2016	2020			2032		2040			
------	------	--	--	------	--	------	--	--	--

- b. No ano de 2014, foi um ano que ocorreu a Copa do Mundo de Futebol. Em algum ano de Copa do Mundo será ano bissexto? Justifique.
- c. O ano de 2092 é ano bissexto? Justifique sua resposta.
- d. Em que ano nasceu uma pessoa que em 2020 tem 28 anos? O ano em que ela nasceu era bissexto? Justifique.

Tarefa 16

O calendário é um ótimo material para explorar regularidades e sequências numéricas. Escolhemos os calendários de maio, junho e julho de 2021 para identificar algumas possibilidades de tarefas.

Mês de Maio						
Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
					01	02
A	04	05	06	07	08	09
B	11	12	13	14	15	16
C	18	19	20	21	22	23
D	25	26	27	28	29	30
E						

Mês de Junho						
Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
	01	02	03	04	05	06
07	08	09	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Mês de Julho						
Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
			01	02	03	04
05	06	07	08	09	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Agora responda:

- O mês de maio tem 5 segundas-feiras. No calendário esses dias estão representados pelas letras, A, B, C, D e E. Qual a sequência numérica formada pelos valores destas letras?
- Qual o dia da semana cai o dia 28 de cada um dos meses destacados (maio, junho e julho de 2021)?
- Observe nos calendários dos três meses as sequências de 5 dias que caem em um mesmo dia da semana. Em quais dias do mês (números) começam essas sequências?
- Observe no mês de junho, os quatro números marcados em verde. A soma na diagonal é a mesma, ou seja, $10 + 18 = 28$ e $17 + 11 = 28$, ou se escrevermos uma sequência com estes números, temos 10, 11, 17, 18. Nesse caso, a soma dos extremos (1º e 4º termos) é igual a soma dos dois números internos (2º e 3º termo). Escolha uma sequência diferente desta em que a soma do 1º e 4º termos seja igual a soma dos 2º e 3º termos.
- Quantas semanas completas transcorreram do dia 03 de maio até o dia 25 de julho?

Respostas da Ficha de Trabalho 9

Respostas da Tarefa 15

a.

2016	2020	2024	2028	2032	2036	2040	2044	2048	2052
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

b.

Não, porque como a Copa do Mundo também acontece de 4 em 4 anos e este ano não é bissexto, não existe possibilidade de ocorrer em Copa do Mundo em ano bissexto

- Sim. Pois, $2092:4 = 523$ e deixa resto zero, logo 2092 é múltiplo de 4 e, portanto, é um ano bissexto*
- $2020 - 28 = 1992$
 $1992:4 = 498$
Logo 1992 é múltiplo de 4, portanto foi um ano bissexto.*

Respostas da Tarefa 16

a. 03, 10, 17, 24, 31

b. Em maio – sexta; Em junho – segunda; Em julho - quarta

c. 01, 02 e 03

d. 08, 09, 15, 16 (junho)

23, 24, 30, 31 (julho)

e. 12 semanas completas

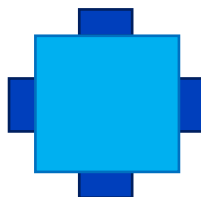
Orientações para a Ficha de Trabalho 9

As Tarefas 15 e 16 trabalham com um padrão estabelecido, na Tarefa 15, se descobre o próximo número adicionando 4 unidades e dessa forma é possível completar a tabela, pois há regularidade para cada um desses números, esta mesma questão traz informações sobre o que é ano bissexto, algo que é importante o discente saber, pois além disso, informa que os anos bissextos são divisíveis por 4. Tarefa 16, como já informado, é uma tarefa que envolve regularidade, mas como trata de dias da semana, é possível identificar que as datas referentes as segundas feiras, terão uma regularidade de 7 em 7, haja vista que a semana possui 7 dias, logo, de uma segunda a outra, a diferença será essa.

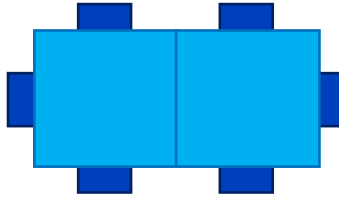
FICHA DE TRABALHO 10

Tarefa 17

Fernando e Ricardo organizaram um almoço para a família. Começaram a colocar no quintal as mesas para os convidados sentarem-se. Sabiam que podiam sentar 4 pessoas numa mesa, como se mostra na figura.



Se juntassem 2 mesas, poderiam sentar 6 pessoas, como se mostra na figura.



Seguindo o mesmo padrão de organização das mesas e cadeiras, responda:

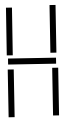
- Quantas pessoas podem se sentar em 4 mesas juntas?
- Quantas mesas juntas são necessárias para acomodar 14 pessoas sentadas?
- Escreva a sequência do número de cadeiras que corresponde a sequência do número de mesas juntas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Mesa	1	2	3	4	5	6	7	8
Cadeira								

- Explique qual a relação entre o número de mesas juntas e cadeiras.

Tarefa 18

Uma fábrica de escadas de madeira, produz modelos com diferentes números de degraus. Ela é construída usando pedaços iguais de madeiras e encaixes para tornar o preço de custo menor e, portanto, a venda fica com valores mais acessíveis. As medidas dos pedaços de madeira correspondem a 30 cm. Para produzir escadas de um degrau, eles usam 5 pedaços de madeira, para construir escadas de 2 degraus usam 8 pedaços de madeira, e seguem a mesma lógica na construção de escadas de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 degraus. A seguir apresentamos o modelo de três escadas:



Escada de um degrau



Escada de dois degraus



Escada de três degraus

Escreva **duas** afirmações verdadeiras que apresentem relações corretas entre o número de degraus e o número de pedaços de madeira e escreva três afirmações falsas sobre esta relação.

Respostas da Ficha de Trabalho 10

Respostas da Tarefa 17

- 10 pessoas

- b. 6 mesas
 c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
 d.

Mesa	1	2	3	4	5	6	7	8
Cadeira	4	6	8	10	12	14	16	18

- e. A relação é: O número de cadeiras é igual ao dobro do número de mesas somado com dois.

Respostas da Tarefa 18

Afirmações Verdadeiras:

- O número de pedaços de madeira é igual ao triplo do número de degraus somado com dois.
- Para encontrar o número de pedaços de madeira com quatro degraus a partir da escada de três degraus, basta somar 3 pedaços de madeira.

Afirmações falsas:

- O número de pedaços de madeira é igual a número de degraus somado com quatro.
- O número de pedaços de madeira é igual ao dobro do número de degraus somado com três.
- Para encontrar o número de pedaços de madeira com cinco degraus a partir da escada de três degraus, basta somar 3 pedaços de madeira.

Orientações para a Ficha de Trabalho 10

A Tarefa 17 é referente a uma mesa com quatro cadeiras, que acrescentando outra mesa, grudada na primeira, há lugar para 6 pessoas, como o padrão se repete, o item a questiona quantas pessoas poderiam se sentar caso juntassem 4 mesas, seguindo a regularidade, a cada mesa colocada são acrescentados 2 lugares, desta forma, serão 10 pessoas, item b, solicita que informe quantas mesas são necessárias para 14 pessoas sentarem, embora seja dada a informação diferente do item a, a ideia é a mesma, a informação dada é que é inversa do item a. Em um diz a quantidade de mesas e pede a quantidade de pessoas sentadas, já no outro é dada a quantidade de pessoas que sentará e é pedido a quantidade de mesas necessárias, partindo da mesma regra é possível saber também esta informação, pois se em 4 mesas sentam 10 pessoas, em 5 sentarão 12 e em 6 sentarão 14. Item c, é para montar a sequência que corresponde as quantidades de mesas dadas, até 8 mesas, ou seja, colocar quantas cadeiras há para cada quantidade de mesas, indo do 1 até 8 mesas. Item d, o enunciado pede a relação entre o número de cadeiras e de mesas, pois é notório que uma quantidade está em função da outra. A resolução é 2 vezes a quantidade de mesas mais 2, ou seja, 1 mesa ficará: 2 vezes 1 (quantidade de mesas) + 2 = 4 cadeiras.

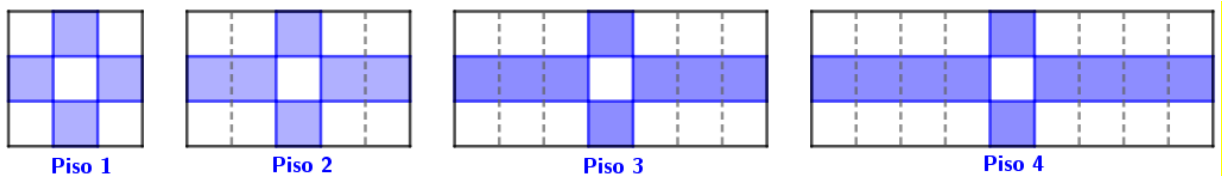
A Tarefa 18 fala de uma fábrica me que constrói escadas, é exposto 3 exemplos destas escadas, com 1 degrau, possui 5 pedaços de madeira, com 2 degraus 8 pedaços e com 3 degraus 11 pedaços, o enunciado solicita que marque a afirmação correta em relação a essas quantidades,

observando a regularidade é possível identificar um padrão, a cada degrau acrescentado, há o acréscimo de 3 pedaços de madeira, uma outra relação envolve a quantidade de degraus, pois se com um degrau há 5 pedações, com 2 degraus 8 pedaços de madeira, uma relação entre a quantidade de degraus e a de madeira é que a quantidade de pedaços de madeira é igual a 3 vezes a quantidade de degraus mais 2.

FICHA DE TRABALHO 11

Tarefa 19

Em uma loja de material de construção existem cinco pisos retangulares de um mesmo padrão, porém de diferentes tamanhos. Encontram-se no mostruário apenas quatro modelos.



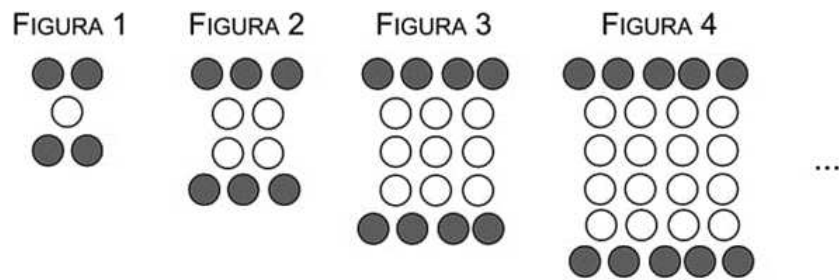
- a. Observando cada um dos pisos complete a tabela, identificando cada letra ao total de quadrados:

	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 4	Piso 5
Total de quadrados azuis	4	6	A	B	C
Total de quadrados brancos	D	E	13	17	21
Total de Quadrados	F	15	21	G	H

- b. Escreva a sequência de números com o total de quadrados azuis de cada modelo, considerando os modelos de 1 a 5. Qual a lógica dessa sequência?
- c. Escreva a sequência de números com o total de quadrados brancos de cada modelo, considerando os modelos de 1 ao 5. Qual a lógica dessa sequência?

Tarefa 20

Observe a sequência de figuras:



- A Figura 5 terá quantos círculos sem colorir (brancos)?
- A Figura 6 terá quantos círculos coloridos de cinza?
- Escreva uma sequência numérica com o total de círculos coloridos de cada figura, da 1ª a 8ª.
- Explique qual a lógica da sequência, ou seja, como você fez para encontrar o número de círculos que formam a próxima figura?

Respostas da Ficha de Trabalho 11

Respostas da Tarefa 19

a.

	<i>Piso 1</i>	<i>Piso 2</i>	<i>Piso 3</i>	<i>Piso 4</i>	<i>Piso 5</i>
Total de quadrados azuis	4	6	8	10	12
Total de quadrados brancos	5	9	13	17	21
Total de Quadrados	9	15	21	27	33

b. 4, 6, 8, 10, 12.

São os números pares a partir do 4. Ou o número de quadrados azuis aumenta de 2 em 2.

c. 5, 9, 13, 17, 21.

O número de quadrados brancos aumenta de 4 em 4.

Respostas da Tarefa 20

a. 25

b. 12

c.

$$1^a \rightarrow 4$$

$$2^a \rightarrow 6$$

$$3^a \rightarrow 8$$

$$4^a \rightarrow 10$$

$$5^a \rightarrow 12$$

$$6^a \rightarrow 14$$

$$7^a \rightarrow 16$$

$$8^a \rightarrow 18$$

d. Somar 2 ao total de círculos da figura anterior;

Se considerar como referência a posição é o dobro da posição menos 1.

Orientações para a Ficha de Trabalho 11

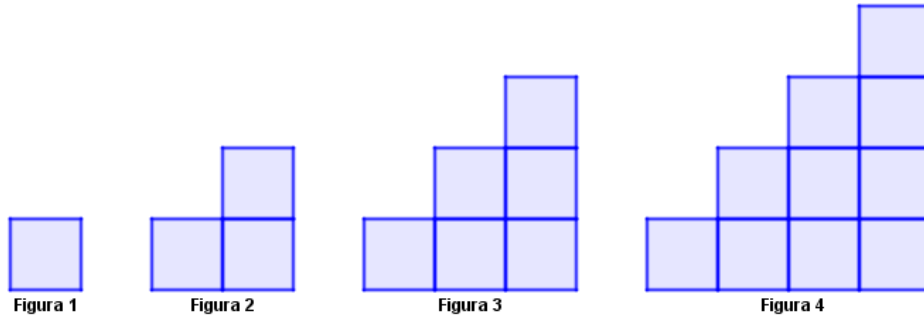
Na Tarefa 19, são apresentados pisos retangulares de diferentes tamanhos. O que diferencia um piso do outro é que ao mudar de tamanho são acrescentados 2 quadrados azuis e 4 quadrados brancos nas suas laterais, havendo aí uma regularidade, para solucionar essa questão o discente precisa entender o padrão. No item a, o estudante deveria completar uma tabela, em que tinha algumas informações sobre os pisos e em outras células havia letras, que entendendo o padrão estabelecido o aluno consegue resolver e informar o valor que deve colocar no lugar dessas letras. As informações que necessitavam ser preenchidas eram referentes o total de quadrado branco, de quadrado azul e o total de quadrado (juntando os brancos e os azuis). Os itens b e c solicitam a sequência e a lógica dela, em relação aos quadrados azuis e os brancos.

A tarefa 20, é semelhante a Tarefa 19, entretanto, o desenho é diferente e ao acrescentar as a o aumento é realizado em cima da quantidade anterior, ou seja, se acrescenta o que foi acrescentado na anterior mais 2. Então fica, figura 1, possui 4 bolas pretas e uma branca, na figura 2, serão 6 bolas (adicionou 2) pretas e 4 brancas (adicionou o que já tinha mais 2, ou seja $1+2=3$), na figura 3, 8 bolas (adicionou 2) pretas e 9 brancas (adicionou o que já tinha mais 2, ou seja, $3+2=5$), percebe que as pretas aumentam de constantemente, e as brancas não, mas continuam possuindo regularidade

FICHA DE TRABALHO 12

Tarefa 21

Observe a sequência a seguir:

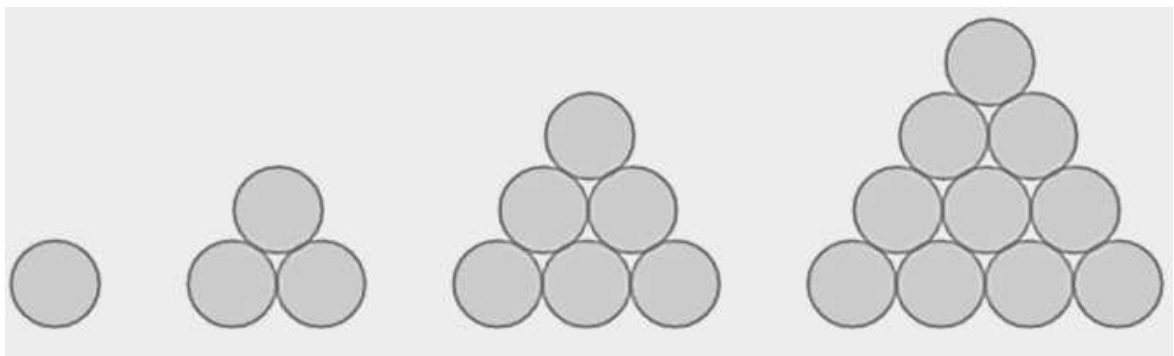


Considerando o padrão, escolha duas opções verdadeiras e apresente justificativa para as afirmações falsas.

- () A sequência numérica que expressa o número total de quadrados é 1, 3, 6, 10, 15, 21,
- () Uma possibilidade de leitura de cada um dos termos é: 1, 2+1, 3+2+1, 4+3+2+1,
- () A sequência numérica que expressa o número total de quadrados é 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16,
- () Seguindo o padrão, a Figura 7 terá 30 quadrados.
- () Uma possibilidade de leitura de cada um dos termos é: 1, 2x1, 3x2x1, 4x3x2x1,

Tarefa 22

Observe a sequência de quatro figuras:



Suponha que as demais figuras são formadas com o mesmo padrão.

- a. Quantos círculos terá a 5ª e a 6ª figuras?
- b. Escreva uma sequência numérica com o total de círculos de cada figura, da 1ª a 8ª.
- c. Explique qual a lógica da sequência, ou seja, como você fez para encontrar o número de círculos que formam a próxima figura?

Respostas da Ficha de Trabalho 12

Respostas da Tarefa 21

Afirmações verdadeiras:

- *A sequência numérica que expressa o número total de quadrados é 1, 3, 6, 10, 15, 21,*
- *Uma possibilidade de leitura de cada um dos termos é: 1, 2+1, 3+2+1, 4+3+2+1,*

Afirmações Falsas:

- *A sequência numérica que expressa o número total de quadrados é 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16,...*

Esta afirmação é falsa, pois o padrão de acréscimo de quadrado de uma figura numa certa posição para a próxima não aumenta de forma regular e sim o acréscimo se altera sempre uma unidade a mais que a anterior.

- *Seguindo o padrão, a Figura 7 terá 30 quadrados.*

Essa afirmação é falsa, pois, seguindo o padrão, a Figura 7 terá 28 quadrados, ou seja, $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

- *Uma possibilidade de leitura de cada um dos termos é: 1, 2x1, 3x2x1, 4x3x2x1,*

Essa afirmação é falsa, pois as multiplicações não apresentam o resultado igual a quantidade de quadrados de cada figura.

Respostas da Tarefa 22

a. 15 e 21

b. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36,...

c. Soma-se o número de círculos da base, ou seja, a partir do 1, +2, +3, +4, +5....

Outras respostas são possíveis.

Orientações para a Ficha de Trabalho 12

As Tarefas da ficha de trabalho 12, tanto a Tarefa 21 como a Tarefa 22, a quantidade de quadrados e círculos, segue a sequência de adicionar quantidades dessas formas de maneira também sequencial, ou seja, da figura 1 para a figura 2, adiciona 2, totalizando 3 círculos, da figura 2 para a 3 adiciona 3 círculos, totalizando 6, da figura 3 para a 4, adiciona 4, totalizando 10 e assim sucessivamente.

A Tarefa 21, apresenta os desenhos das figuras e apresenta afirmações sobre regularidades, seu enunciado solicita que sejam identificadas e justificadas as afirmações verdadeiras. Já a Tarefa 22, como já mencionado trabalha a mesma ideia de sequência, mas seu enunciado, faz perguntas sobre as figuras seguintes, sobre a sequência das quantidades no geral e assim por diante.

FICHA DE TRABALHO 13

Tarefa 23

Laura brinca de escrever sequências de números. A partir de um número natural maior do que 1, ela procede da seguinte forma para obter o próximo número.

- ✓ Se o número for par ela divide por 2.
- ✓ Se o número for ímpar e tiver apenas um algarismo ela soma 1 a esse número e divide por 2.
- ✓ Se o número for ímpar e tiver mais de um algarismo ela apaga o número das unidades.

Laura repete o procedimento com o número obtido até aparecer o número 1, quando termina a sequência.

Por exemplo, a sequência que começa com 1101 é formada por estes números:

1101, 110, 55, 5, 3, 2, 1

Baseado no procedimento criado por Laura, responda as perguntas a seguir.

- a. Escreva a sequência que começa com 2357.
- b. Qual o primeiro número de uma sequência que os próximos termos são:

?

 , 482, 241, 24, 12, 6, 3, 2, 1

- c. A resposta do item anterior é única? Justifique sua resposta.
- d. Os dois últimos termos de qualquer sequência sempre serão 2 e 1? Justifique sua resposta.

Respostas da Ficha de Trabalho 13

Respostas da Tarefa 23

- a. 2357, 235, 23, 2, 1
- b. 4823
- c. Não, pode ser qualquer 482 terminando por um algarismo ímpar, ou seja, 4821, 4823, 4825, 4827 ou 4829.
Ou ainda pode ser um número par que seja o dobro de 482, ou seja, 964.

d. Sim, considerando que a premissa no enunciado é de que com as regras colocadas temos sempre que terminar com 1, e estamos usando números naturais o número anterior a 1, deverá ser 2 para encontrarmos a metade.

Orientações para a Ficha de Trabalho 13

A Tarefa 23 envolve o conceito de sequência, mas abrange outras temáticas. Entre essas, destaca-se o trabalho com divisão, no qual os alunos devem aplicar seus conhecimentos para dividir números adequadamente, bem como a capacidade de identificar se um número é par ou ímpar. Além disso, a tarefa inclui a aplicação da operação inversa, exigindo que os alunos compreendam a relação entre operações, como a inversão da adição pela subtração ou da multiplicação pela divisão.

Dessa forma, a Tarefa 23 não apenas reforça o entendimento de sequências, mas também adiciona outros assuntos.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da álgebra e do pensamento algébrico nos anos iniciais representa um grande desafio, especialmente no que diz respeito à integração desses conceitos ao contexto da educação básica. Ao longo das leituras realizadas e das tarefas propostas, identificamos que a relação entre álgebra e pensamento aritmético é imprescindível. Contudo, essa relação não deve se restringir apenas ao estudo de números e operações. É necessário conceber uma abordagem aritmética que permita a identificação de núcleos conceituais, conforme indicado pelo MCS. Esses núcleos, por sua vez, devem ser interpretados de maneira integrada, utilizando tanto as lentes da aritmética quanto as da álgebra.

Além disso, constatamos que a caracterização do pensamento algébrico ainda está distante de alcançar uma definição consensual entre os pesquisadores da área. Entretanto, há um ponto de convergência nas discussões: a álgebra e a aritmética devem ser desenvolvidas de maneira simultânea. Essa articulação é essencial para construir um entendimento mais amplo e significativo desses conceitos nos anos iniciais.

Com base nessa perspectiva, decidimos propor tarefas que buscassem promover essa interlocução entre álgebra e aritmética. As atividades foram selecionadas com o objetivo de permitir que os alunos transitem entre esses dois campos, construindo significados matemáticos que reflitam a complementaridade entre as abordagens aritmética e algébrica. Esse trabalho reafirma a importância de uma prática pedagógica que valorize a integração desses elementos, reconhecendo seu papel na formação do pensamento matemático desde os primeiros anos de escolaridade.

Identificamos a importância de realizar uma revisão de literatura sobre o pensamento algébrico, o que nos permitiu compreender a complexidade e os desafios envolvidos na distinção entre o pensamento algébrico e o pensamento aritmético.

Além disso, concluímos que as tarefas propostas não determinam, por si só, o tipo de pensamento envolvido no processo de aprendizagem. Pelo contrário, é a análise das produções dos estudantes que fornece indícios sobre a forma como eles estão construindo significados e traçando caminhos em sua compreensão matemática. Dessa maneira, o foco deve estar nas interpretações e estratégias apresentadas pelos alunos, que refletem os processos cognitivos subjacentes ao desenvolvimento do raciocínio algébrico ou aritmético.

Tivemos neste trabalho o que chamamos de experiência piloto, que teve como principal objetivo exercitar a análise das respostas dos participantes com base no MCS e construir uma abordagem inicial para o pensamento algébrico. Esse projeto foi essencial como etapa preparatória para o trabalho final, proporcionando reflexões valiosas sobre os desafios e potencialidades da aplicação prática dos conceitos investigados. Uma das contribuições mais importantes da experiência piloto foi a identificação de diferentes níveis de familiaridade dos participantes com a BNCC. Observou-se que alguns discentes demonstraram habilidade para trabalhar com as competências e habilidades descritas no documento, enquanto outros enfrentaram dificuldades nesse aspecto. Esse dado é relevante, pois evidencia a necessidade de maior atenção à formação docente no que diz respeito ao uso efetivo da BNCC como ferramenta de planejamento e execução de práticas pedagógicas.

Além disso, a experiência revelou uma discrepância entre a identificação das habilidades relacionadas à temática da álgebra para o terceiro ano do ensino fundamental e a elaboração de tarefas compatíveis com essas habilidades. Embora os participantes conseguissem reconhecer as competências prescritas pela BNCC, as atividades propostas nem sempre se alinhavam de forma precisa aos objetivos pedagógicos indicados. Esse ponto reforça a importância de um acompanhamento criterioso e de uma formação mais direcionada para a construção de tarefas que dialoguem efetivamente com as habilidades previstas. Embora o projeto piloto tenha sido limitado pelo tempo de aplicação das tarefas e pelo estágio inicial de amadurecimento do próprio MCS, ele cumpriu um papel crucial ao apontar áreas que precisam ser refinadas e ao orientar os próximos passos do trabalho final. A experiência possibilitou uma análise inicial de como o modelo teórico pode ser utilizado para interpretar as respostas dos discentes e destacou a relevância de ajustes metodológicos para alcançar os objetivos propostos com maior profundidade.

As tarefas analisadas ao longo deste trabalho proporcionaram a extração de aspectos fundamentais mencionados ao longo do texto, contribuindo para uma reflexão mais aprofundada sobre o tema. A análise realizada revelou-se de grande relevância ao evidenciar a lacuna que ainda persiste quando se trata do ensino de Álgebra. Foi a partir dessa constatação que se tornou evidente a necessidade de propor, neste produto educacional, tarefas que promovessem a interlocução entre o Pensamento Algébrico e o Aritmético, considerando que ambos devem ser trabalhados de maneira simultânea e integrada. Essa abordagem busca evitar a fragmentação no ensino da matemática, permitindo uma transição mais fluida e significativa entre os dois tipos de raciocínio.

Espero que esta dissertação possa não apenas contribuir para o entendimento dessa relação, mas também servir como ponto de partida para novos estudos e iniciativas que explorem o diálogo entre álgebra e aritmética de forma mais consistente e estruturada. O fortalecimento dessa integração é fundamental para o avanço das práticas pedagógicas e para a formação de um pensamento matemático mais abrangente e articulado desde os anos iniciais da escolaridade.

9. REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J.; CÂMARA, M. **Desenvolvimento do pensamento algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha**. Zetetiké: Campinas, SP, v. 26, n. 3, p. 546-568, set/dez. 2018. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650717/18882>. Acesso em: 23 dez. 2023.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação**. Brasília: MEC/SEB, 2014
- CARDANO, M. **Manual de Pesquisa Qualitativa: a contribuição da teoria da argumentação**. Petrópolis (BR):Vozes;2017
- CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia. **Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 97-126, abr. 2011.
- COSTA, N. M. L.; POLONI, M. Y. **Percepções de concluintes de pedagogia sobre a formação inicial do professor para a docência de matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1289-1314, dez. 2012.
- FALCÃO, J. T. R. **Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar?** Boletim GEPEM, 42, 27-36, 2003. (pp 42, 27- 36)
- FERREIRA, Miriam Criez Nobrega; RIBEIRO, Miguel; RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental**. Zetetike, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 496–514, 2017. DOI: 10.20396/zet.v25i3.8648585. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648585>. Acesso em: 19 Jan. 2024.
- FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- LINS, R. C. **O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Revista Dynamis, Blumenau, v.1(7), p.29-39, abr./jun., 1994b
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI** Campinas: Papirus, 1997.

- LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: Angelo, C.L. et Al. (orgs). **Modelo dos Campos semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012.
- MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. **Dando movimento ao pensamento algébrico**. Zetetike, v. 16, n. 2, p. 63-76, 2008.
- NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.
- OLIVEIRA, Marta K. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento um processo histórico**. 2 ed. São Paulo: Scipione, 1995.
- OLIVEIRA, R. **Pensando Algebricamente Antes da 7ª série: Uma outra concepção para a construção do conhecimento**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Santa Úrsula, USU, Brasil.
- SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na aprendizagem de matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso- TCC (Licenciatura em Matemática pelo Centro Universitário Adventista de São Paulo. São Paulo. 2007.
- SANTOS, M. C.; ORTIGÃO, M. I. R.; AGUIAR, G. S. SANTOS, M. C.; ORTIGÃO, M. I. R.; AGUIAR, G. S. **Construção do Currículo de Matemática: como os professores dos anos iniciais compreendem o que deve ser ensinado?** Bolema, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 638-661, ago. 2014
- SCHMITTAU, Jean. *The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective*. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 37, p. 16-22, 2005.
- SILVA, A. M. **O Modelo dos Campos Semânticos: Um modelo epistemológico em Educação Matemática**. 1º Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2022.
- VIOLA DOS SANTOS, J. R.; CORIO DE BURIASCO, R. L. Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 54, 2009. DOI: 10.69906/GEPEM.2176-2988.2009.315. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/315>. Acesso em: 21 mar. 2024