Departamento de Física - Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ação efetiva de 1-loop para uma teoria de gauge com campos escalares e interação Yukawa

Dissertação de Mestrado

Lucas Ducastelo de Castro Corrêa Lima
Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro
Fevereiro de 2025

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-graduação em Física

Lucas Ducastelo de Castro Corrêa Lima

Ação efetiva de 1-loop para uma teoria de gauge com campos escalares e modelo Yukawa

Dissertação de mestrado submetida ao programa de Pós-Graduação em física da universidade federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Castro Corrêa Lima, Lucas Ducastelo de .
Ação efetiva de 1-loop para uma teoria de gauge com campos escalares e interação Yukawa / Lucas Ducastelo de Castro Corrêa Lima. -- 2025.
38 p.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Schwinger-DeWitt. 2. Heat-kernel. 3. Teoria de calibre. 4. Escalares reais. 5. Modelo de Yukawa. I. Lvovich Shapiro, Ilya, orient. II. Título.

Lucas Ducastelo de Castro Corrêa Lima

Ação efetiva de 1-loop para uma teoria de gauge com campos escalares e interação Yukawa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 25 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dr. Wagno Cesar e Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Juiz de Fora, 20/02/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro**, **Membro**, em 25/02/2025, às 12:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito**, **Usuário Externo**, em 25/02/2025, às 12:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva**, **Usuário Externo**, em 25/02/2025, às 12:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **José Abdalla Helayêl Neto**, **Usuário Externo**, em 25/02/2025, às 12:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto**, **Professor(a)**, em 25/02/2025, às 12:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2257057** e o código CRC **75A46359**.

Agradecimentos

- À minha família, especialmente aos meus pais, meu irmão, meus padrinhos e à minha namorada, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Estendo minha gratidão à memória da minha avó paterna, Maria, e do meu primo Victor.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Ilya L. Shapiro, pelo problema sugerido para resolver, orientação e discussões científicas.
- Aos colegas da área de TQC, principalmente Guilherme Yoshi Oyadomari, e das demais áreas, que contribuíram com discussões e troca de conhecimentos.
- Aos professores do programa de pós-graduação em Física da UFJF.
- À FAPEMIG, pelo apoio do meu projeto de mestrado.

Resumo

Neste trabalho, iniciamos com a construção da ação efetiva para espaço-tempo curvo e sua expansão em *loops*. A partir da expressão para a ação efetiva de 1-*loop*, mostramos uma forma prática de calcular a parte divergente dessa ação, conhecida como Técnica de Schwinger-DeWitt ou *heat-kernel*, utilizando a representação de tempo próprio de Schwinger-DeWitt.

Em seguida, aplicamos essa técnica em dois exemplos: primeiro, para a teoria de calibre com dois escalares reais e interação $\lambda\varphi^4$, e depois para o modelo de Yukawa. Especificamos como utilizar a técnica para diferentes tipos de campos, tanto bosônicos quanto fermiônicos, e para a representação matricial do operador bilinear nos campos quânticos da ação.

Palavras-chave: Schwinger-DeWitt; *Heat-kernel*; Ação efetiva; Teoria de calibre; Modelo de Yukawa, Escalares reais.

Abstract

In this work, we begin by constructing the effective action for curved spacetime and its loop expansion. From the expression for the one-loop effective action, we present a practical approach to computing its divergent part, known as the Schwinger-DeWitt technique or heat-kernel, using the proper-time representation of Schwinger-DeWitt.

Next, we apply this technique to two examples: first, to gauge theory with two real scalar fields and a $\lambda\varphi^4$ interaction, and then to the Yukawa model. We specify how to employ this method for different types of fields, both bosonic and fermionic, as well as for the matrix representation of the bilinear operator in the quantum field action.

Keywords: Schwinger-DeWitt; Heat-kernel; Effective Action; Gauge Theory; Yukawa Model, real scalars.

Sumário

Introdução **1**

1 Ação efetiva no espaço-tempo curvo **3**
1.1 Integrais funcionais na mecânica quântica . . . 3
1.2 Integral funcional em teoria quântica de campos . . . 5
1.3 Funcional gerador de funções de Green . . . 6
1.4 Ação efetiva . . . 7
1.5 Expansão em *loops* da ação efetiva . . . 8

2 Técnica de Schwinger-DeWitt **11**
2.1 Representação de Schwinger-DeWitt . . . 11
2.2 Função mundial . . . 12
2.3 Expansão de *heat-kernel* . . . 14
2.4 Divergências UV . . . 15
2.4.1 Regularização dimensional . . . 16

3 Teoria de calibre com dois campos escalares **18**
3.1 Teoria de calibre com dois campos escalares reais . . . 18
3.2 Invariância de calibre para $S_{\varphi\chi}$ . . . 19
3.3 Ação efetiva de 1-*loop* . . . 20
3.4 Quantizando o campo A_μ . . . 22

4 Modelo de Yukawa **26**
4.1 Ação efetiva de 1-loop para o modelo de Yukawa . . . 26

Considerações finais **32**

Bibliografia **33**

Introdução

A teoria quântica de campos (TQC) em espaço-tempo curvo representa a unificação da mecânica quântica e da teoria clássica de campos, levando em conta a relatividade geral de Einstein, necessária para estudar interações fundamentais e garantir invariância de Lorentz local em uma teoria gravitacional que, no limite não relativístico, converge para a gravitação de Newton. Sua formulação permite a descrição adequada de fótons, elétrons e outras partículas elementares, como ocorre na eletrodinâmica quântica (QED). Além disso, a TQC também se aplica a outras áreas da física, como cosmologia [1].

A TQC aborda diversos tipos de partículas, como as de spin inteiro e spin semi-inteiro. As partículas de spin 0, como os bósons de Higgs, podem ser estudadas a partir de um modelo de campos escalares complexos, com auto-interação $\lambda(\phi\phi^*)^2$. Já para descrever a interação entre núcleons e píons, pode-se utilizar a interação Yukawa,

$$-g\phi\bar{\Psi}\Psi,$$

mas que também permite modelar a interação entre férmions e bósons, sendo g a constante de acoplamento. Para mais detalhes sobre esse tema em física de partículas, veja [2].

A teoria perturbativa é amplamente utilizada em TQC. Uma de suas aplicações está na ação efetiva, um objeto fundamental baseado em integrais funcionais. A ação efetiva permite estudar as correções quânticas a partir de uma teoria clássica. Para a primeira correção, conhecida como 1-*loop*, existem diversas formas de calcular sua contribuição. Uma delas, apresentada em [3], é a técnica de Schwinger-DeWitt, ou *heat-kernel*, que fornece um mecanismo prático para o cálculo da ação efetiva de 1-*loop*, denotada por $\Gamma^{(1)}$.

Um dos desafios nesse processo é a presença de termos infinitos nas correções. De maneira contraintuitiva, essas divergências fornecem informações valiosas sobre a física da teoria em questão, incluindo o comportamento assintótico no regime ultravioleta (UV), anomalias conformes e grupos de renormalização. Para tratar essas divergências, emprega-se inicialmente o processo de regularização, seguido pela renormalização, cujo objetivo é remover as partes infinitas por meio da introdução de contratermos.

Organizamos esta dissertação da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos a construção da ação efetiva em espaço-tempo curvo, seguindo a abordagem de [1]. Para isso,

utilizamos a integração funcional, apresentada de forma breve no ínicio do capítulo, e construímos a expansão em *loops*.

No Capítulo 2, revisamos a Técnica de Schwinger-DeWitt, também conhecida como *heat-kernel*, tendo como referência [4]. Essa técnica será fundamental nos capítulos seguintes, sendo empregada no cálculo da parte divergente da ação efetiva de 1-*loop*.

Nos Capítulos 3 e 4, aplicamos a técnica introduzida no Capítulo 2. No Capítulo 3, analisamos uma teoria de calibre com dois campos escalares, cuja solução foi baseada em um dos problemas do livro [1] e desenvolvida de forma inédita. No Capítulo 4, aplicamos a Técnica de Schwinger-DeWitt à interação de Yukawa com um escalar real.

CAPÍTULO 1

Ação efetiva no espaço-tempo curvo

Neste primeiro capítulo, faremos uma revisão de conceitos fundamentais para o desenvolvimento da dissertação. Para isso, utilizamos algumas referências, como [1], [2] [5], [6] e [7]. A ação efetiva e sua expansão em *loops* desempenham um papel significativo na teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, sendo fundamentais tanto para a análise das correções quânticas em uma teoria específica quanto para o cálculo das divergências em 1-*loop*. Consideramos definições básicas em espaço plano e depois introduzimos o fundo gravitacional.

1.1 Integrais funcionais na mecânica quântica

Inicialmente, consideremos um sistema unidimensional descrito pela hamiltoniana $H(q,p)$, onde q e p são, respectivamente, a coordenada e o momento canonicamente conjugado. A quantização canônica consiste em reescrever p e q como operadores atuando no espaço de Hilbert das funções complexas $\Psi(q)$, ou seja,

$$q \to \hat{q} \equiv q, \qquad p \to \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \tag{1.1}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck. Analogamente, a hamiltoniana passa a ser representada por

$$H(q,p) \to \hat{H}(q,p) = H(\hat{q},\hat{p}). \tag{1.2}$$

A evolução temporal de um estado é determinada pela equação

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \tag{1.3}$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\Psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\Psi(t_0), \tag{1.4}$$

onde $\hat{U}(t, t_0) = e^{i(t_0-t)\hat{H}}$ é o operador de evolução temporal.

O método da integração funcional permite expressar o operador de evolução temporal como o valor médio de $e^{iS[t_0,t]}$, sobre as trajetórias no espaço de fases, onde $S[t_0, t]$ é a ação clássica, dada por

$$S[t_0, t] = \int_{t_0}^{t} \Big[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H\big(q(\tau), p(\tau)\big)\Big] d\tau, \tag{1.5}$$

avaliada ao longo da trajetória $(q(\tau), p(\tau))$, com $\tau \in [t_0, t]$ e $\dot{q}(\tau) \equiv \frac{dq(\tau)}{d\tau}$. O valor médio sobre essas trajetórias define a chamada integral funcional de Feynman. A seguir, apresentamos uma de suas possíveis formulações.

Para isso, dividimos o intervalo fechado $[t_0, t]$ em N subintervalos de igual comprimento, ou seja,

$$[t_0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \ldots, (\tau_{N-1}, t], \tag{1.6}$$

de modo que, em cada subintervalo, $p(\tau)$ permanece constante e $q(\tau)$ é contínuo. Definimos os valores de $q(\tau)$ nas fronteiras como $q(t_0) = q_0$ e $q(t) = q$. No limite de $N \to \infty$, $q(\tau)$ pode ser aproximado por uma função linear em cada subintervalo (τ_k, τ_{k+1}).

Consideremos então a integral de dimensão finita

$$(2\pi)^{-N} \int dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 \ldots dq_{N-1} dp_N \, e^{iS[t_0,t]} \equiv J_N(q_0, q; t_0, t), \tag{1.7}$$

onde $S[t_0, t]$ é a ação anteriormente definida, agora escrita em termos dos parâmetros discretizados p_i e q_i,$i = 1, 2, \ldots, N$. A ideia central da definição de $J_N(q_0, q; t_0, t)$ é que, para $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} J_N(q_0, q; t_0, t) = \langle q | \, e^{i(t_0-t)\hat{H}} \, |q_0\rangle \, . \tag{1.8}$$

Essa relação pode ser verificada para casos particulares de $H(q, p)$, como discutido em [6], embora sua demonstração geral para um Hamiltoniano arbitrário seja não trivial.

A integral funcional, definida a partir da equação (1.7), pode então ser escrita como

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} e^{iS[t_0,t]} \prod_{\tau} \frac{dp(\tau)dq(\tau)}{2\pi}, \tag{1.9}$$

sendo que, na formulação anterior, havia uma integral adicional sobre o momento, o que esta expressão não explicita. Um ponto crítico dessa abordagem é o ordenamento de p

e q, pois, ao promovermos essas quantidades a operadores, os correspondentes $\hat{p}$ e $\hat{q}$ não necessariamente comutam. No entanto, a maioria das funções Hamiltonianas assume a forma separável $H = H_1(q) + H_2(p)$, o que contorna essa dificuldade.

Para um sistema com n graus de liberdade, a ação assume a forma

$$S[t_0, t] = \int \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H(q^1, q^2, \ldots, q^n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \right) d\tau, \tag{1.10}$$

onde q^i representa a i-ésima coordenada generalizada e p_i é seu momento canonicamente conjugado. Utilizando a equação (1.7), realizamos as substituições

$$(2\pi)^{-N} \to (2\pi)^{-Nn}, \qquad dq_k \to \prod_{i=1}^{n} dq_k^i, \qquad dp_k \to \prod_{i=1}^{n} dp_{i,k}, \tag{1.11}$$

onde i denota a i-ésima coordenada ou seu respectivo momento conjugado, e k indica os valores no subintervalo (τ_{k-1}, τ_k). Assim, a integral funcional correspondente pode ser expressa como

$$\int_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} e^{iS} \prod_t \prod_{i=1}^{n} \frac{dq^i(t) dp_i(t)}{2\pi} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \; e^{iS(t'',t')}. \tag{1.12}$$

1.2 Integral funcional em teoria quântica de campos

A integração funcional em Teoria Quântica de Campos não possui uma correspondência completa com a abordagem operatorial apresentada anteriormente. No entanto, mesmo na ausência de uma definição matemática completamente rigorosa, a formulação via integrais funcionais se mostra extremamente útil e confiável para diversos métodos em TQC.

Neste trabalho, utilizamos a abordagem lagrangeana da integração funcional. Como exemplo, consideramos a teoria de um campo escalar real, cuja ação é dada por

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \right], \tag{1.13}$$

onde $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, e g representa a constante de acoplamento.

Para definir a integral funcional, recorremos ao procedimento de discretização de um volume finito V, com $V \subset V_4$. Dividimos esse volume em N^4 células cúbicas de volume v_i, com $i = 1, 2, \ldots, N^4$. Assumimos que o campo φ_i é aproximadamente constante dentro

de cada célula e aproximamos a derivada parcial $\partial_\mu\varphi$ por

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \approx \frac{1}{\Delta L}\big[\varphi(x_\mu + \Delta L) - \varphi(x_\mu)\big], \tag{1.14}$$

onde ΔL representa a aresta de cada célula v_i.

Consideramos então a integral de dimensão finita

$$\int e^{iS} \prod_{\substack{i=1 \\ x\in v_i}}^{N^4} n(x) d\varphi(x) = \int e^{iS}\mathcal{D}\varphi, \tag{1.15}$$

onde a integração ocorre sobre todos os valores do campo $\varphi(x)$ em cada célula v_i. A ação S é avaliada utilizando as aproximações acima para φ e $\partial_\mu\varphi$. Além disso, o fator $n(x)$, que independe de $\varphi(x)$, é escolhido de modo que, no limite $V \to \infty$ e $v_i \to 0$, a expressão (1.15) seja bem definida e apresente um comportamento suave.

1.3 Funcional gerador de funções de Green

Primeiramente, vamos definir a derivada funcional, com os seguintes axiomas:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad \text{e} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y\, J(y)\phi(y) = \phi(x). \tag{1.16}$$

As regras para derivadas de funções se mantém.

O funcional gerador de funções de Green é definido pela seguinte integral funcional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\left(S[\varphi] + \int \mathrm{d}^4x J(x)\varphi(x)\right)}, \tag{1.17}$$

em que $S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_{int}[\varphi]$ e $J(x)\varphi(x)$ é o termo fonte. Podemos reescrever a expressão anterior usando a notação condensada de B. DeWitt, isto é,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i(S[\varphi] + J(x)\varphi(x))}. \tag{1.18}$$

Expandindo (1.17) em função de $J(x)$, utilizando a notação condensada,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J(x_1)\dots J(x_n) \int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1)\dots\varphi(x_n) e^{iS[\varphi]} \\ &= Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J(x_1)\dots J(x_n) G_n(x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{1.19}$$

sendo $G_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ são as funções de Green de n pontos e $Z_0[J]$, dados por

$$G_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{iS[\varphi]}}{Z_0[J]} \tag{1.20}$$

e

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\left(S_0[\varphi] + \int \mathrm{d}^4x J(x)\varphi(x)\right)}. \tag{1.21}$$

Levando em considereção as expressões acima,

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_0[J]} \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta i J(x_1) \dots \delta i J(x_n)}\right|_{J=0}. \tag{1.22}$$

1.4 Ação efetiva

Para introduzirmos a ação efetiva, considere o funcional $W[J]$, escrito em termos de $Z[J]$ como

$$Z(J) = e^{iW(J)}. \tag{1.23}$$

Agora, definiremos o campo médio ou campo de fundo, a partir da seguinte relação

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x) e^{i(S[\varphi] + J\varphi)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i(S[\varphi] + J\varphi)}} = \langle \hat{\varphi}(x|J) \rangle = \Phi(x|J). \tag{1.24}$$

Assumindo que seja possível resolver a equação abaixo em termos de $J(x)$

$$\Phi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \tag{1.25}$$

ou seja, escrever $J = J(x|\Phi)$, podemos escrever o funcional ação efetiva na forma

$$\Gamma[\Phi] = W[J] - \int dx^4\, \Phi(x) J(x). \tag{1.26}$$

Esse funcional tem grande importância para teoria quântica de campos, sendo sua correspondência com a ação clássica, obtida a partir de sua variação em relação ao campo médio,

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta J}\frac{\delta J}{\delta\Phi(x)} - \Phi\frac{\delta J}{\delta\Phi(x)} - J(x) = -J(x). \tag{1.27}$$

E para o campo clássico,

$$S_J[\varphi] = S[\varphi] + \int d^4x\, \varphi(x)J(x) \implies \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \tag{1.28}$$

Logo, a ação efetiva desempenha o mesmo papel na teoria quântica que $S[\varphi]$ para a teoria clássica.

1.5 Expansão em *loops* da ação efetiva

Introduzimos agora a noção de expansão em *loops* para a ação efetiva e sua relação com a ação clássica. Para essa expansão, utilizaremos como mediador a constante de Planck.

Portanto, retornando essa constante à fórmula antes mencionada

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi]+J(x)\varphi(x))}, \tag{1.29}$$

e realizando a mudança $\varphi \to \varphi + \phi$, com φ campo médio e ϕ o novo parâmetro de integração, denominada como deslocamento de fundo, e tomando o cuidado de perceber que o Jacobiano é unitário, por ser uma mudança linear, podemos expandir $S(\varphi + \phi)$, de tal forma que

$$S[\phi + \varphi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n[\phi]\varphi^n, \tag{1.30}$$

$$S_n[\phi] \equiv \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)}, \tag{1.31}$$

utilizando a notação condensada de DeWitt.

Agora, substituindo (1.29) em (1.30) e fazendo uma nova mudança $\phi \to \sqrt{\hbar}\phi$, chegamos na expressão

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\phi] + \frac{\hbar}{2}S_2[\phi]\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{n/2}}{n!}S_n[\phi]\varphi^n - \hbar^{1/2}\varphi\frac{\delta}{\delta\phi}\big(\Gamma[\phi] - S[\phi]\big)\right\}. \tag{1.32}$$

A ação efetiva entra como uma combinação de $\Gamma[\phi] - S[\phi] = \bar{\Gamma}[\phi]$, em que $\bar{\Gamma}[\phi]$ pode ser escrito em potências de $\hbar$, isto é,

$$\bar{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty}\hbar^n\bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \tag{1.33}$$

Substituindo em (1.32), na ordem zero para $\hbar$,

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty}\hbar^n\bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \tag{1.34}$$

Por fim,

$$\exp\left(i\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma^{(n)}[\phi]\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\left(\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{n/2-1}}{n!}S_n[\phi]\varphi^n - \hbar^{\frac{1}{2}+n}\varphi\frac{\delta\Gamma^{(1)}[\phi]}{\delta\phi}\right], \tag{1.35}$$

que pode ser resolvida para todas as ordens de $\hbar$, mostrando que a ação efetiva pode ser escrita como a soma da ação clássica com a correção quântica perturbativa. Para *1-loop*, ou seja, primeira ordem em $\hbar$,

$$e^{i\Gamma^{(1)}[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{2}\varphi S_2[\phi]\varphi} = (\operatorname{Det} S_2[\phi])^{-1/2}, \tag{1.36}$$

que pode ser reescrito como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\log\operatorname{Det} H = \frac{i}{2}\operatorname{Tr}\log H, \tag{1.37}$$

sendo que Tr denota o traço funcional, isto é,

$$\operatorname{Tr}\hat{A} = \int dx \operatorname{tr}\hat{A}(x,y)\Big|_{x\to y}. \tag{1.38}$$

Além disso, $\hat{H}$ a forma bilinear da ação em campos quânticos

$$\hat{H}(x,x') = S_2[\phi] = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')}. \tag{1.39}$$

Para o espaço-tempo curvo, a ação $S[\phi]$ da equação (1.29) passará a depender da métrica $g_{\mu\nu}$, ou seja,

$$S[\phi] \to S[\phi, g_{\mu\nu}], \tag{1.40}$$

contudo, como a gravitação não será quantizada, a integração de (1.29) será somente sobre os campos de matéria. Repetindo os mesmo cálculos que para o espaço plano, levando em conta que a métrica estará em (1.29) como um parâmetro externo, então

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\,\mathrm{sTr}\,\log H. \tag{1.41}$$

O supertraço, denotado por sTr , é um traço funcional que leva em consideração a natureza dos campos envolvidos. Para campos bosônicos, o operador traço Tr é acompanhado do coeficiente $+1$, enquanto para campos fermiônicos, devido à anticomutatividade, o coeficiente é -2.

CAPÍTULO 2

Técnica de Schwinger-DeWitt

Neste capítulo apresentamos a construção da técnica de Schwinger-DeWitt. Deixaremos alguns passos sem demonstração, porém para mais detalhes, recomendamos [1], [4], [8], [9] e [10]. Iremos seguir, principalmente, a referência [10]. Nos próximos dois capítulos, faremos duas aplicações dessa técnica.

2.1 Representação de Schwinger-DeWitt

Considere o operador bilinear da ação $\hat{H}$ da forma

$$\hat{H} = \hat{1}\Box + \hat{1}m^2 + \hat{\Pi}, \tag{2.1}$$

em que os operadores são aplicados no espaço de campos quânticos e

$$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu. \tag{2.2}$$

Iremos avaliar a variação de (1.41) em relação a um parâmetro externo,

$$\frac{i}{2}\delta \operatorname{Tr} \log \hat{H} = \frac{i}{2} \operatorname{Tr} \hat{H}^{-1}\delta\hat{H}, \tag{2.3}$$

nde $\hat{H}^{-1}$ é o propagador G. Escrevendo na representação de Schwinger-DeWitt, temos

$$G = \hat{H}^{-1} = i\int_0^\infty \mathrm{d}s\, e^{-is\hat{H}}. \tag{2.4}$$

Podemos substituir (2.4) em (2.3) e encontramos

$$\frac{i}{2} \operatorname{Tr} \log \hat{H} = \text{const} - \frac{i}{2} \operatorname{Tr} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}\, \hat{U}(x, x'; s), \tag{2.5}$$

com $\hat{U}(x,x';s) = e^{is\hat{H}}\delta_c(x,x')$. Aqui $\delta_c(x,x')$ é delta de Dirac covariante, com dependência da métrica nas coordenadas x e x',

$$\delta_c(x,x') = \frac{\delta^{(4)}(x-x')}{[-g(x)]^{1/4}\,[-g(x')]^{1/4}}. \tag{2.6}$$

Além disso, $\hat{U}(x,x';s)$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial\hat{U}(x,x';s)}{\partial s} = -\hat{H}_x\hat{U}(x,x';s), \tag{2.7}$$

em que o índice x indica que a derivada do operador do $\hat{H}_x$ é aplicada ao primeiro argumento.

2.2 Função mundial

Definimos a função mundial [11] ou intervalo geodésico a partir da ação com limite variável

$$S(x,\tau|x',\tau') = \int_{x',\tau'}^{x,\tau} L\,d\tau = \frac{\sigma(x,x')}{\tau-\tau'}, \tag{2.8}$$

onde $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$.

Esta função é um biescalar, ou seja, comporta-se como um escalar sob transformações das coordenadas x e x'. A partir da equação de Hamilton-Jacobi, obtemos a primeira relação para a função mundial,

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{;\mu}\sigma^{;\mu}. \tag{2.9}$$

Nessa expressão, o ponto e vírgula denota a derivada covariante, enquanto a vírgula, representa a derivada parcial. Por exemplo, no espaço plano esta função é proporcional ao quadrado da distância entre x e x', que satisfaz a relação anterior,

$$\sigma_{flat}(x,x') = \frac{1}{2}|x-x'|^2. \tag{2.10}$$

Definimos agora o determinante de Van Vleck-Morette, que é um biescalar densidade de peso 1, como sendo

$$D(x,x') = \det\left(D_{\mu\nu'}\right) = \det\left(-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^\mu\partial x'^\nu}\right). \tag{2.11}$$

Lembrando que um $D(x,x')$ é biescalar densidade de peso 1 se

$$g^{-\frac{1}{2}}(x)D(x,x')g^{-\frac{1}{2}}(x') \;\text{ é um biescalar.} \tag{2.12}$$

Após derivar duas vezes a relação (2.9), para dimensão 2ω, obtemos que

$$2\omega = D^{-1}(D\sigma^{;\mu})_{,\mu}, \tag{2.13}$$

que será importante no processo de regularização dimensional, para notarmos que os coeficientes de Schwinger-DeWitt independem da dimensão escolhida.

Como $D(x,x')$ é um biescalar densidade, formalmente, não podemos tomar derivadas covariantes, então definimos o biescalar de Van Vleck-Morette $\Delta(x,x')$ na forma

$$D(x,x') = g^{1/2}(x)\Delta(x,x')g^{1/2}(x'). \tag{2.14}$$

De forma análoga a (2.13), obtemos a relação

$$2\omega = \Delta^{-1}(\Delta\sigma^{;\mu})_{;\mu}. \tag{2.15}$$

A partir de agora, precisaremos das derivadas covariantes da função mundial, $\sigma(x,x')$, e do biescalar de Van Vleck-Morette, $\Delta(x,x')$, no limite de coincidência, ou seja, $x' \to x$. Denotaremos este limite por uma barra vertical, como mostrado abaixo,

$$\big|_{x\to x'} \equiv \big|. \tag{2.16}$$

Antes de derivarmos, não é difícil mostrar que $\sigma\big| = 0$, pela (2.8), e $\sigma_\mu\big| = 0$, tomando o limite de coincidência de (2.9). Portanto, depois de derivar algumas vezes e tomar os limites de coincidência, temos as relações para a função mundial,

$$\sigma_{\mu\nu}\big| = g_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

$$\sigma_{\mu\nu\tau}\big| = 0, \tag{2.18}$$

$$\sigma_{\mu\nu\tau\rho}\big| = \frac{1}{3}\left(R_{\rho\mu\nu\tau} + R_{\rho\nu\mu\tau}\right), \tag{2.19}$$

$$\sigma_{\mu\nu\tau\rho\theta}\big| = \frac{1}{2}(R_{\mu\tau\rho\nu;\theta} + R_{\mu\tau\theta\nu;\rho} + R_{\mu\rho\tau\nu;\theta} + R_{\tau\theta\rho\nu;\mu}), \tag{2.20}$$

$$\sigma_{\mu\dot{\cdot}\nu\dot{\cdot}\alpha\dot{\cdot}}^{\ \ \mu\ \ \nu\ \ \alpha}\big| = \frac{4}{45}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{4}{15}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{8}{5}\Box R, \tag{2.21}$$

onde utilizamos uma nova notação para derivadas covariantes, isto é, $\sigma_{\mu\dot{\nu}}{}^{\dot{\tau}} = g^{\tau\kappa}\nabla_\kappa\nabla_\nu\nabla_\mu\sigma$.

Nas relações para $\Delta(x,x')$, utilizaremos a mesma notação usada para $\sigma(x,x')$. Seguem

abaixo as relações para as derivadas de $\Delta^{\frac{1}{2}}$, com base no fato de que $\Delta\big| = 1$,

$$\left(\Delta^{1/2}\right)_{\nu}\big| = 0, \tag{2.22}$$

$$\left(\Delta^{1/2}\right)_{\nu\alpha}\big| = \frac{1}{6}R_{\nu\alpha}, \tag{2.23}$$

$$\left(\Delta^{1/2}\right)^{\mu}_{\mu\cdot\nu}\big| = -\frac{1}{6}\nabla_{\nu}R, \tag{2.24}$$

$$\left(\Delta^{1/2}\right)^{\mu\cdot\nu}_{\mu\cdot\nu\cdot}\big| = \frac{1}{30}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{30}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{36}R^2 + \frac{1}{5}\Box R. \tag{2.25}$$

2.3 Expansão de *heat-kernel*

O método de *heat-kernel* é baseado na expansão do operador evolução temporal, $U(x, x', s)$, na forma

$$\hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s)\hat{\Omega}(x, x'), \tag{2.26}$$

sendo que

$$\hat{\Omega}(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n(x, x') \tag{2.27}$$

e

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = -\frac{i}{(4\pi s)^{\omega}}\Delta^{1/2}(x, x')e^{\frac{i\sigma(x,x')}{2s} - im^2 s}. \tag{2.28}$$

Os coeficientes $\hat{a}_n(x, x')$ são chamados de coeficientes de Schwinger-DeWitt ou de *heat-kernel*. Iremos incluir o termo m^2 de (1.41) em $\hat{\Pi}$, de tal forma que

$$\hat{H} = \hat{1}\Box + \hat{\Pi}. \tag{2.29}$$

Substituindo (2.26) e (2.29) em (2.7), temos:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\omega\Delta^{1/2}}{(4\pi)^{\omega}s^{\omega+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n + \frac{i\Delta^{1/2}}{(4\pi)^{\omega}s^{\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}n(is)^{n-1}\hat{a}_n - \frac{i}{(4\pi)^{\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\Box(\Delta^{1/2}\hat{a}_n)\\
&+\frac{1}{(4\pi)^{\omega}s^{\omega+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}(\Delta^{1/2}\hat{a}_n) + \frac{\Delta^{1/2}}{2(4\pi)^{\omega}s^{\omega+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n(\Box\sigma)\hat{a}_n\\
&+\frac{i\Delta^{1/2}}{(4\pi)^{\omega}s^{\omega}}\hat{\Pi}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Após analisar a equação para as ordens s^{-1}, s^0 e s^1, temos as expressões para os coeficientes $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$,

$$\hat{a}_0(x,x') = \hat{1}\delta_c(x,x'), \tag{2.31}$$

$$\hat{a}_1\big| = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R, \tag{2.32}$$

$$\hat{a}_2\big| = \frac{\hat{1}}{180}\big(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\alpha\beta} + \Box R\big) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\Box\hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{R}^2_{\mu\nu}, \tag{2.33}$$

sendo $\hat{R}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\hat{1}$. Nas expressões para $\hat{a}_1\big|$ e $\hat{a}_2\big|$, utilizamos as relações (2.17)-(2.25).

Em algumas teorias, é necessário o operador $\hat{H}$ mais geral, na forma

$$\hat{H} = \hat{1}\Box + 2\hat{h}^\mu\nabla_\mu + \hat{\Pi}. \tag{2.34}$$

Podemos absorver o termo linear na derivada covariante D_μ

$$\nabla_\mu \to D_\mu = \nabla_\mu + \hat{h}_\mu, \tag{2.35}$$

e assim, os cálculos para os coeficientes serão os mesmo, exceto para os operadores $\hat{P}$ e $\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu}$, descritos abaixo,

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\nu\mu} + (\nabla_\nu\hat{h}_\mu - \nabla_\mu\hat{h}_\nu) + (\hat{h}_\nu\hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}_\nu), \tag{2.36}$$

$$\hat{a}_1\big| = \hat{a}_1(x,x) = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_\mu\hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu, \tag{2.37}$$

$$\hat{a}_2\big| = \frac{\hat{1}}{180}\big(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\alpha\beta} + \Box R\big) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\Box\hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{S}^2_{\mu\nu}. \tag{2.38}$$

2.4 Divergências UV

Por fim, queremos relacionar as divergências aos coeficientes de Schwinger De-Witt que encontramos. Pela equação (2.5), notamos que nos dois limites da integral temos divergências. No limite superior são divergências IR, enquanto no limite inferior são divergências UV, as quais estamos interessados. Para regularizarmos as divergências IR basta adicionar o termo $e^{\epsilon s}$, com $\epsilon > 0$. Para regularizarmos as divergências UV, usaremos a regularização cut-off no limite inferior da integral (2.5), de tal forma que

$$\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\log\hat{H}\big|_{\text{cut-off}} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\int_{1/\Omega^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\,ie^{-\epsilon s}\left\{\frac{\Delta^{1/2}e^{\frac{i\sigma}{2s}}}{(4\pi)^\omega}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n(x,x')\right\}\Bigg|. \tag{2.39}$$

Estamos interessados no caso para quadridimensional, ou seja, para $\omega \to 2$. Antes de resolvermos a integral, precisamos tomar o limite de coincidência, lembrando das relações para $\sigma(x,x')$ e $\Delta(x,x')$ para $x' \to x$. Portanto,

$$\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\log\hat{H}\big|_{\text{cut-off}} = \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\int\limits_{1/\Omega^2}^{\infty} ds\, e^{-\epsilon s}\left\{\frac{1}{s^3}\hat{a}_0\big| + \frac{1}{s^2}\hat{a}_1\big| + \frac{1}{s}\hat{a}_2\big| + \hat{a}_3\big| + \dots\right\} \tag{2.40}$$

e depois de integrar,

$$\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\log\hat{H}\big|_{\text{cut-off}} = \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\left\{\Omega^4\hat{a}_0\big| + \Omega^2\hat{a}_1\big| - \log\left(\frac{\Omega^2}{\mu^2}\right)\hat{a}_2\big| - \hat{a}_3\big| + \dots\right\}. \tag{2.41}$$

O termo μ^2 foi introduzido para mantermos o logaritmando adimensional.

Logo, após esta última expressão, percebemos a relação entre os coeficientes de Schwinger-DeWitt e as divergências UV. O coeficiente $\hat{a}_0$ está relacionado com as divergências quárticas e como $\hat{a}_0\big| = \hat{1}$, elas serão somente a soma algébrica das contribuições dos diferentes campos, sendo necessário em alguns casos, trocarmos o Tr pelo sTr (supertraço), para levar em conta a natureza dos campos.

Já o coeficiente $\hat{a}_1$, está relacionado com as divergências quadráticas, contudo há uma certa ambiguidade, pois trocando $\Omega^2 \to \Omega^2 + \Omega_0^2$, com $[\Omega_0] = [massa]^{-2}$, o coeficiente a frente de $\hat{a}_1$ se altera, implicando na alteração da divergência quadrática.

Por último, o coeficiente $\hat{a}_2$, as vezes, de forma informal, chamado de coeficiente mágico, se relaciona com as divergências logarítmicas, que como mencionado no início do trabalho, são divergências universais e de grande importância física. Veremos sua importância ao utilizarmos a regularição dimensional, como em [9].

2.4.1 Regularização dimensional

A partir da integral (2.39), para 1-*loop*, podemos ter três tipos de integrais divergentes

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\omega+k}} f(s,\omega), \quad k = -1, 0, 1; \quad \omega \to 2, \tag{2.42}$$

sendo $f(s,\omega)$ função analítica no limite inferior e que mantenha a convergência da integral no limite superior. Para $k = -1$, depois de integrar por partes e utilizar

$$s^{2-\omega} = e^{(2-\omega)\log s} = 1 + (2-\omega)\log s + \mathcal{O}((2-\omega)^2), \tag{2.43}$$

para $\omega \to 2$,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\omega-1}} f(s,\omega) = \frac{1}{2-\omega} f(0,2) - \left.\frac{\partial f(0,\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=2} - \int_0^\infty ds \ln s \frac{\partial f(s,2)}{\partial s}. \tag{2.44}$$

Pelo mesmo processo, podemos fazer para $k = 0$ e $k = 1$, obtendo as seguintes relações ($\omega \to 2$):

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\omega-1}} f(s,\omega) = \frac{1}{2-\omega} \left.\frac{\partial f(s,2)}{\partial s}\right|_{s=0} + \frac{3}{4} \left.\frac{\partial^2 f(s,2)}{\partial s^2}\right|_{s=0} - \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^3 f(s,\omega)}{\partial s^3}\right|_{s=0,\omega=2} - \int_0^\infty ds \ln s \frac{\partial^3 f(s,2)}{\partial s^3}, \tag{2.45}$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\omega}} f(s,\omega) = \frac{1}{2-\omega} \left.\frac{\partial f(s,2)}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial f(s,2)}{\partial s}\right|_{s=0} - \left.\frac{\partial^2 f(s,\omega)}{\partial s^2}\right|_{s=0,\omega=2} - \int_0^\infty ds \ln s \frac{\partial^3 f(s,2)}{\partial s^3}. \tag{2.46}$$

Ou seja, na regularização dimensional sobrevive somente as divergências logarítmicas e comparando as equações (2.41) e (2.44), temos a correspondência entre a regularização cut-off e a regularização dimensional,

$$\frac{1}{2-\omega} \sim \log\left(\frac{\Omega^2}{\mu^2}\right). \tag{2.47}$$

Para terminar, podemos escrever a expressão para divergências de 1-*loop* na regularização dimensional, em que trocamos $\omega \to 2n$,

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\text{div}} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \text{sTr}\, \hat{a}_2(x,x')\Big| = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g}\, \text{str}\, \hat{a}_2(x,x), \tag{2.48}$$

com $\epsilon = (4\pi)^2(n-4)$.

CAPÍTULO 3

Teoria de calibre com dois campos escalares

Neste modelo, trabalhamos com a teoria de calibre abeliana para o campo escalar complexo com auto-interação. A proposta é decompor o campo escalar complexo [12, 13] em dois campos escalares reais e, a partir de uma nova ação, desenvolver a ação efetiva de 1-*loop* para essa teoria. A partir deste capítulo, usaremos a notação

$$\int d^4x\sqrt{-g} = \int_x . \tag{3.1}$$

3.1 Teoria de calibre com dois campos escalares reais

Inicialmente, vamos trabalhar com a ação de um campo escalar complexo com simetria de calibre, isto é,

$$S_\Phi = \int_x \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu\Phi)(D_\nu\Phi)^* - \frac{1}{2}m^2\Phi\Phi^* + \frac{1}{2}\xi R\Phi\Phi^* - \frac{\lambda}{4}(\Phi\Phi^*)^2 \tag{3.2}$$

sendo $(D_\mu\Phi)$ e $(D_\nu\Phi)^*$ derivadas covariantes estendidas, definidas como

$$(D_\mu\Phi) = \nabla_\mu\Phi - igA_\mu\Phi \quad \text{e} \quad (D_\nu\Phi)^* = \nabla_\nu\Phi^* + igA_\nu\Phi^*. \tag{3.3}$$

Iremos reescrever a ação em termos de dois campos escalares reais, ou seja,

$$\Phi \to \Phi' = \varphi + i\chi \tag{3.4}$$

sendo φ e χ campos reais. A ação para este caso torna-se

$$S_{\varphi\chi} = \int_x \frac{1}{2}\Big[(\partial\varphi)^2 + (\partial\chi)^2 + g^2A^2(\varphi^2+\chi^2) - 2gA^\mu(\varphi\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\varphi) \\ - m^2(\varphi^2+\chi^2) + \xi R(\varphi^2+\chi^2) - \frac{\lambda}{12}(\varphi^2+\chi^2)^2\Big], \tag{3.5}$$

onde $(\partial\varphi)^2 = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)$ e $A^2 = A_\mu A^\mu$.

3.2 Invariância de calibre para $S_{\varphi\chi}$

No caso de um campo escalar real, não há invariância de calibre. A questão agora é, com dois campos reais existe alguma transformação para os campos que forneça a teoria esta invariância?
Vamos verificar se a invariância de calibre é preservada para dois campos reais,

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + (\partial^\mu f), \quad f = f(x). \tag{3.6}$$

As transformações de calibre dos campos serão:

$$\begin{aligned} \chi' &= \varphi\sin(gf) + \chi\cos(gf), \\ \varphi' &= \varphi\cos(gf) - \chi\sin(gf). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Verificaremos termo a termo da ação (3.26),

$$\varphi^2 + \chi^2 \to \big(\varphi\cos(gf) - \chi\sin(gf)\big)^2 + \big(\varphi\sin(gf) + \chi\cos(gf)\big)^2 = \varphi^2 + \chi^2, \tag{3.8}$$

$$A^\mu\varphi(\partial_\mu\chi) - A^\mu\chi(\partial_\mu\varphi) \to A^\mu\varphi(\partial_\mu\chi) - A^\mu\chi(\partial_\mu\varphi) + g(A^\mu + \partial^\mu f)\big[\varphi^2(\partial_\mu f) + \chi^2(\partial_\mu f)\big] \\ + (\partial^\mu f)\big[\varphi(\partial_\mu\chi) - \chi(\partial_\mu\varphi)\big], \tag{3.9}$$

$$g^2A^2\left(\varphi^2+\chi^2\right) \to g^2A^2(\varphi^2+\chi^2) + g^2(\partial f)^2(\varphi^2+\chi^2) + 2g^2A_\mu(\partial^\mu f)(\varphi^2+\chi^2), \tag{3.10}$$

$$(\partial\varphi)^2+(\partial\chi)^2\to(\partial\varphi)^2+(\partial\chi)^2+g^2(\partial f)^2\big(\varphi^2+\chi^2\big)-2g(\partial^\mu f)\big[(\partial_\mu\varphi)\chi-(\partial_\mu\chi)\varphi\big]. \tag{3.11}$$

Após substituir todos os termos na ação (3.26), chegamos a conclusão que há invariância de calibre para dois campos escalares reais.

3.3 Ação efetiva de 1-*loop*

Agora, utilizando a técnica de Schwinger-DeWitt iremos encontrar $\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}$. Pelo método de campo de fundo, iremos transformar os campos φ e χ em

$$\varphi\to\varphi'=\varphi+\rho \qquad\qquad \chi\to\chi'=\chi+\sigma, \tag{3.12}$$

sendo ρ e σ campos quânticos. Substituindo (3.30) em (3.26), a forma bilinear da ação em campos quânticos será dada por

$$\begin{aligned}S^{(2)}=-\frac{1}{2}\int_x\rho[\Box+m^2-\xi R-g^2A^2+\frac{\lambda}{2}(\varphi^2+\frac{1}{3}\chi^2)\big]\rho+\rho\big[-2gA^\mu\nabla_\mu+\frac{\lambda}{3}\varphi\chi\big]\sigma\\+\sigma\big[2gA^\mu\nabla_\mu+\frac{\lambda}{3}\varphi\chi\big]\rho+\sigma\big[\Box+m^2-\xi R-g^2A^2+\frac{\lambda}{2}(\chi^2+\frac{1}{3}\varphi^2)\big]\sigma.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Podemos escrevê-la de forma matricial, onde $\hat{H}$ é a forma bilinear da ação,

$$S^{(2)}=-\frac{1}{2}\int_x\begin{pmatrix}\rho & \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

onde as entradas de $\hat{H}$ são

$$\begin{aligned}H_{11}&=\Box+m^2-\xi R-g^2A^2+\frac{\lambda}{2}(\varphi^2+\frac{1}{3}\chi^2),\\ H_{12}&=-2gA^\mu\nabla_\mu-g(\nabla A)+\frac{\lambda}{3}\varphi\chi,\\ H_{21}&=2gA^\mu\nabla_\mu+g(\nabla A)+\frac{\lambda}{3}\varphi\chi,\\ H_{22}&=\Box+m^2-\xi R-g^2A^2+\frac{\lambda}{2}(\chi^2+\frac{1}{3}\varphi^2).\end{aligned} \tag{3.15}$$

O termo $g(\nabla A)$ foi incluído, com sinais opostos, nas entradas H_{12} e H_{21} para assegurar a hermiticidade do operador $\hat{H}$.
O operador $\hat{H}$ pode ser escrito na forma $\hat{H}=\hat{1}\Box+2h^\mu\nabla_\mu+\hat{\Pi}$, com

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -gA^{\mu} \\ gA^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \frac{1}{3}\chi^2) & \frac{\lambda}{3}\varphi\chi - g(\nabla A) \\ \frac{\lambda}{3}\varphi\chi + g(\nabla A) & m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\chi^2 + \frac{1}{3}\varphi^2) \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Para o cálculo do operador $\hat{P}$ precisamos dos seguintes termos

$$\nabla_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -g(\nabla A) \\ g(\nabla A) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

e

$$\hat{h}_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} -g^2A^2 & 0 \\ 0 & -g^2A^2 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

em que ∇A é a notação condensada para $\nabla_{\mu}A^{\mu}$. Assim, podemos escrever $\hat{P}$ como

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_{\mu}\hat{h}^{\mu} - \hat{h}_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \frac{1}{3}\chi^2) & \frac{\lambda}{3}\varphi\chi \\ \frac{\lambda}{3}\varphi\chi & m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda}{2}(\chi^2 + \frac{1}{3}\varphi^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como estamos tratando de um campo vetorial abeliano, o cálculo para $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ é reduzido, pois $\hat{h}_{\nu}\hat{h}_{\mu} - \hat{h}_{\mu}\hat{h}_{\nu} = 0$. Além disso, o comutador de derivadas covariantes no espaço dos campos escalares é nulo. Portanto,

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}\hat{h}_{\mu} - \nabla_{\mu}\hat{h}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & gF_{\mu\nu} \\ -gF_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Agora, tendo calculado os operadores $\hat{P}$ e $\mathcal{S}_{\mu\nu}$, precisamos calcular os str de $\hat{P}^2$, $\Box\hat{P}$ e $\hat{S}^2_{\mu\nu}$. Porém, como estamos tratando de campos bosônicos, basta tomarmos o traço comum. Seguem os cálculos abaixo,

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,\Box\hat{P} = -\frac{1}{3}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Box R + \frac{\lambda}{9}\Box(\varphi^2 + \chi^2), \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\hat{P} &= \frac{1}{2}\Big[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R+\frac{\lambda}{2}(\varphi^2+\frac{1}{3}\chi^2)\Big]^2+\frac{\lambda^2}{9}\varphi^2\chi^2\\ &+\frac{1}{2}\Big[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R+\frac{\lambda}{2}(\chi^2+\frac{1}{3}\varphi^2)\Big]^2\\ &=\Big[m^2-\big(\xi-\frac{1}{6}\big)R\Big]^2+\frac{5}{36}\lambda^2(\varphi^2+\chi^2)^2+\frac{2}{3}\lambda(\varphi^2+\chi^2)\Big[m^2-\big(\xi-\frac{1}{6}\big)\Big],\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{12}\,\mathrm{tr}\,\hat{\mathcal{S}}^2_{\mu\nu}=-\frac{1}{6}g^2F^2_{\mu\nu}. \tag{3.24}$$

Portanto, com todos os termos calculados, podemos usar a técnica de Schwinger-DeWitt para o cálculo de $\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}$,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} &= -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^nx\sqrt{-g}\;\mathrm{tr}\;\hat{a}_2(x,x)\\ &=-\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^nx\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{90}\Big(R^2_{\mu\nu\rho\sigma}-R^2_{\mu\nu}+\Box R\Big)-\frac{1}{3}(\xi-\frac{1}{6})\Box R+\frac{\lambda}{9}\Box(\varphi^2+\chi^2)\\ &+\frac{5\lambda^2}{36}(\varphi^2+\chi^2)^2+[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R]^2+\frac{2\lambda}{3}(\varphi^2+\chi^2)[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R]-\frac{1}{6}g^2F^2_{\mu\nu}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como já discutido, $(\varphi^2+\chi^2)$ é invariante sob transformação de calibre, e $F_{\mu\nu}$ também o é, o que assegura que a invariância seja preservada para $\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div}$. Este problema foi extraído do livro [1], e sua solução foi realizada de forma inédita. Além disso, comparamos este caso com o do campo escalar complexo, conforme apresentado em [1], e com os resultados de [12], observando que as divergências de 1-loop coincidem.

Seria interessante investigar se, mesmo após quantizar o campo A_μ, a invariância é mantida. Apresentaremos a forma bilinear da ação para este caso, sendo que o cálculo da ação efetiva de 1-loop será abordado em um trabalho futuro.

3.4 Quantizando o campo A_μ

Para quantizarmos o campo A_μ, iremos adicionar à ação com dois campos escalares (3.26), o termo $-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}$, responsável por introduzir a dinâmica do campo de calibre. Logo, a nova ação para este caso será

$$S_{\varphi\chi} = \int_x \frac{1}{2}\Big[(\partial\varphi)^2 + (\partial\chi)^2 + g^2A^2(\varphi^2+\chi^2) - 2gA^\mu(\varphi\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\varphi)\Big] \\ - m^2(\varphi^2+\chi^2) + \xi R(\varphi^2+\chi^2) - \frac{\lambda}{12}(\varphi^2+\chi^2)^2\Big] - \frac{1}{4}\int_x F_{\mu\nu}^2. \tag{3.26}$$

Podemos reescrever a ação do setor de calibre como

$$-\frac{1}{4}\int_x F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{2}\int_x (\nabla_\mu A_\nu)(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = \\ = \frac{1}{2}\int_x A^\mu(\delta_\mu^\nu\Box - R_\mu^\nu)A_\nu + \frac{1}{2}\int_x (\nabla_\mu A^\mu)^2. \tag{3.27}$$

Como temos invariância de calibre, podemos utilizar o método de Faddeev-Popov para eliminar a degenerescência do operador,

$$S_{gf} = -\frac{1}{2}\int_x (\nabla_\mu A^\mu)^2. \tag{3.28}$$

Logo,

$$S = S_{\varphi\chi} + S_{gf} = \int_x \frac{1}{2}\Big\{(\partial\varphi)^2 + (\partial\chi)^2 + g^2A^2(\varphi^2+\chi^2) - 2gA^\mu(\varphi\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\varphi) \\ - m^2(\varphi^2+\chi^2) + \xi R(\varphi^2+\chi^2) - \frac{\lambda}{12}(\varphi^2+\chi^2)^2 + A^\mu(\delta_\mu^\nu\Box - R_\mu^\nu)A_\nu\Big\}. \tag{3.29}$$

Utilizando o método de campo de fundo

$$\varphi \to \varphi' = \varphi + \rho \qquad \chi \to \chi' = \chi + \sigma \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + B_\mu, \tag{3.30}$$

sendo ρ, σ e B_μ campos quânticos, a ação em segunda ordem em campos quânticos é dada por

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_x \begin{pmatrix}\rho & \sigma & B^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12} & H_{13}\\ H_{21} & H_{22} & H_{23}\\ H_{31} & H_{32} & H_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\\ B_\nu\end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

em que o operador $\hat{H}$ é matricial 3x3, cujas entradas são

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \Box + m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \frac{1}{3}\chi^2),\\
H_{12} &= 2gA^\mu\nabla_\mu + g(\nabla A) + \frac{\lambda}{3}\varphi\chi,\\
H_{13} &= -2g^2A^\nu\varphi + 2g(\nabla^\nu\chi) + g\chi\nabla^\nu,\\
H_{21} &= -2gA^\mu\nabla_\mu - g(\nabla A) + \frac{\lambda}{3}\varphi\chi,\\
H_{22} &= \Box + m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\chi^2 + \frac{1}{3}\varphi^2),\\
H_{23} &= -2g^2A^\nu\chi - 2g(\nabla^\nu\varphi) - g\varphi\nabla^\nu,\\
H_{31} &= -2g^2A_\mu\varphi + g(\nabla_\mu\chi) - g\chi\nabla_\mu,\\
H_{32} &= -2g^2A_\mu\chi - g(\nabla_\mu\varphi) + g\varphi\nabla_\mu,\\
H_{33} &= -\delta^\nu_\mu\Box + R^\nu_\mu - \delta^\nu_\mu g^2(\varphi^2 + \chi^2).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A matrix $\hat{H}$ pode ser reescrita como

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\hat{H}', \tag{3.33}$$

e podemos usar a técnica de Schwinger-DeWitt para o cálculo das divergências, já que $\hat{H}'$ tem a forma

$$\hat{H}' = \hat{1}\Box + 2\hat{h}^\alpha\nabla_\alpha + \hat{\Pi}\ , \tag{3.34}$$

com $\hat{1} = \text{diag}\,(1, 1, \delta^\nu_\mu)$,

$$\hat{h^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & gA^\alpha & \frac{1}{2}g\chi g^{\alpha\nu}\\ -gA^\alpha & 0 & -\frac{1}{2}g\varphi g^{\alpha\nu}\\ \frac{1}{2}g\delta^\alpha_\mu\chi & -\frac{1}{2}g\delta^\alpha_\mu\varphi & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

e

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \frac{1}{3}\chi^2) & \frac{\lambda}{3}\varphi\chi + g(\nabla A) & -2g^2A^\nu\varphi + 2g(\nabla^\nu\chi)\\ \frac{\lambda}{3}\varphi\chi - g(\nabla A) & m^2 - \xi R - g^2A^2 + \frac{\lambda}{2}(\chi^2 + \frac{1}{3}\varphi^2) & -2g^2A^\nu\chi - 2g(\nabla^\nu\varphi)\\ 2g^2A_\mu\varphi - g(\nabla_\mu\chi) & 2g^2A_\mu\chi + g(\nabla_\mu\varphi) & -R^\nu_\mu + \delta^\nu_\mu g^2(\varphi^2 + \chi^2) \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

O próximo passo é utilizar a técnica de Schwinger-DeWitt para encontrar

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\log\hat{H}' - i\,\mathrm{Tr}\log\hat{H}_{gh}, \tag{3.37}$$

sendo $\hat{H}_{gh}$ a ação fantasma de Faddeev-Popov

$$\hat{H}_{gh} = \Box \implies \hat{h}^{\mu} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{P} = \frac{\hat{1}}{6}R. \tag{3.38}$$

Como mencionado anteriormente, o cálculo da ação efetiva de 1-*loop* para este caso será realizado em outro momento. No entanto, o procedimento segue o mesmo do exemplo anterior, com a diferença de que, antes, não havia quantização de A_{μ}.

CAPÍTULO 4

Ação efetiva de 1-loop para o modelo de Yukawa

Neste capítulo, apresentamos os cálculos e procedimentos para determinar a ação efetiva de 1-loop, utilizando a técnica de Schwinger-DeWitt.

4.1 Ação efetiva de 1-loop para o modelo de Yukawa

Neste modelo, trabalharemos com a interação Yukawa entre espinores e campo escalar real, além da auto-interação do campo escalar. A ação correspondente a este modelo está mostrada abaixo,

$$S = \int_x \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}\xi R\varphi^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + i\bar{\psi}(\gamma^\mu\nabla_\mu + iM + ih\varphi)\psi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \tag{4.1}$$

Como já dito, utilizaremos os coeficientes de Schwinger-DeWitt, para o cálculo da ação efetiva de 1-loop para este modelo. Para isso, é preciso, inicialmente, utilizar o método de campo de fundo para quantizar os campos fermiônicos e o escalar, isto é,

$$\varphi \to \varphi' = \varphi + \sigma, \quad \psi \to \psi' = \psi + \chi \;\; e \;\; \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \bar{\chi}, \tag{4.2}$$

sendo que os campos σ, χ e $\bar{\chi}$ são quânticos.

Agora, podemos encontrar a forma bilinear da ação em campos quânticos, substituindo (4.2) em (4.1). Fazendo este processo, integrando por partes e desprezando as partes finitas, temos a expressão para $S^{(2)}$,

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_x \Big\{\sigma[\Box + m^2 - \xi R + \frac{\lambda}{2}\varphi^2]\sigma + \sigma[2h\bar{\psi}]\chi + \bar{\chi}[2h\varphi - 2i(\gamma^\mu\nabla_\mu + iM)]\chi + \\ + \bar{\chi}[2h\psi]\sigma\Big\}. \tag{4.3}$$

Para conseguirmos utilizar a técnica de Schwinger-DeWitt é necessário que $S^{(2)}$ esteja na forma (2.34). Então, trocaremos o campo quântico χ por

$$\chi \to \chi' = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \nabla_\mu - iM)\eta, \tag{4.4}$$

com η sendo um campo quântico. Substituindo em $S^{(2)}$, pode-se escrever a forma bilinear da ação na forma

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_x \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

sendo as entradas da matriz $\hat{H}$ iguais a

$$\begin{aligned} H_{11} &= \Box + m^2 - \xi R - \frac{\lambda}{2}\varphi^2, \\ H_{12} &= ih\bar{\psi}(\gamma^\mu \nabla_\nu - iM), \\ H_{21} &= 2h\psi, \\ H_{22} &= ih\varphi(\gamma^\mu \nabla_\mu - iM) + (\gamma^\mu \nabla_\nu)^2 + M^2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

com $(\gamma^\mu \nabla \mu)^2 = (\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu)$. Contudo, podemos desenvolver este termo, como mostrado abaixo,

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\nabla_\mu \nabla_\nu \\ &= \Box - \frac{1}{4}R. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Neste último passo, utilizamos a álgebra de Clifford para matrizes gamma e o fato de que o comutador de derivadas covariantes atuando no espinor de Dirac é dado por

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{ab}\gamma_a \gamma_b. \tag{4.8}$$

Substituindo este último termo em $S^{(2)}$,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \Box + m^2 - \xi R + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 & ih\bar{\psi}(\gamma^\mu \nabla_\mu - iM) \\ 2h\psi & \Box - \frac{1}{4}R + ih\varphi(\gamma^\mu \nabla_\mu - iM) + M^2 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

O operador $\hat{H}$ pode ser escrito na forma $\hat{H} = \hat{1}\Box + 2h^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}$, com

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$$\hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h\bar{\psi}\gamma^{\mu} \\ 0 & \frac{i}{2}h\varphi\gamma^{\mu} \end{pmatrix} , \tag{4.11}$$

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} m^2 - \xi R + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 & hM\bar{\psi} \\ 2h\psi & hM\varphi - \frac{1}{4}R + M^2 \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$

Para o cálculo do operador $\hat{P}$, precisamos dos seguintes termos:

$$\nabla_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h(\nabla_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu} \\ 0 & \frac{i}{2}h(\nabla_{\mu}\varphi)\gamma^{\mu} \end{pmatrix} ,$$

$$\hat{h}_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -h^2\varphi\bar{\psi} \\ 0 & -h^2\varphi^2 \end{pmatrix} . \tag{4.13}$$

Assim, podemos escrever $\hat{P}$ como

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_{\mu}\hat{h}^{\mu} - \hat{h}_{\mu}\hat{h}^{\mu} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 & h(M + h\varphi)\bar{\psi} - \frac{i}{2}h(\nabla_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu} \\ 2h\psi & -\frac{1}{12}R + M^2 + h(M + h\varphi)\varphi - \frac{i}{2}h(\nabla_{\mu}\varphi)\gamma^{\mu} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Agora, é preciso calcular o operador $\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu}$. Para o setor escalar, sabemos que $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\hat{1} = 0$ e para o setor fermiônico, $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\hat{1} = \frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^{\lambda}\gamma^{\tau}$.
Para o cálculo de $\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu}$ precisamos também dos seguintes termos

$$\nabla_{\nu}\hat{h}_{\mu} - \nabla_{\mu}\hat{h}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h[(\nabla_{\nu}\bar{\psi})\gamma_{\mu} - (\nabla_{\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu}] \\ 0 & \frac{i}{2}h[(\nabla_{\nu}\varphi)\gamma_{\mu} - (\nabla_{\mu}\varphi)\gamma_{\nu}] \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{h}_{\nu}\hat{h}_{\mu} - \hat{h}_{\mu}\hat{h}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}h^2\varphi\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu} \\ 0 & -\frac{i}{2}h^2\varphi^2\sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix} , \tag{4.15}$$

sendo $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu})$. Então, agrupando todos estes termos, o operador $\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu}$ será

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h[(\nabla_{\nu}\bar{\psi})\gamma_{\mu} - (\nabla_{\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu}] - \frac{i}{2}h^2\varphi\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu} \\ 0 & -\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^{\lambda}\gamma^{\tau} + \frac{i}{2}h\big[(\nabla_{\nu}\varphi)\gamma_{\mu} - (\nabla_{\mu}\varphi)\gamma_{\nu}\big] - \frac{i}{2}h^2\varphi^2\sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix} . \tag{4.16}$$

O próximo passo é calcular str de $\Box\hat{P}$, $\hat{P}^2$ e $\hat{\mathcal{S}}^2_{\mu\nu}$. Lembramos que os termos do setor escalar devem ser multiplicados $+1$, enquanto os termos do setor fermiônico, por -2,

como mostrado no esquema simplificado abaixo,

$$\mathrm{sTr}(\hat{P}^2, \Box\hat{P} \text{ ou } \hat{\mathcal{S}}^2_{\mu\nu}) = +1\,\mathrm{Tr}\,(\textbf{setor escalar}) - 2\,\mathrm{Tr}\,(\textbf{setor fermiônico}). \tag{4.17}$$

Portanto, lembrando que para o setor espinorial $\mathrm{tr}\,\hat{1} = 4$, as expressões para os supertraços dos operadores mencionados acima serão:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\,\mathrm{str}\,\Box\hat{P} &= \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,\big[-(\xi-\frac{1}{6})(\Box R)+\frac{\lambda}{2}(\Box\varphi^2)\big] - 2\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,\big[-\frac{1}{12}(\Box R)+h\Box(M+h\varphi)\varphi- \\
&\quad -\frac{i}{2}h(\Box\nabla_\mu\varphi)\gamma^\mu\big] \\
&= \frac{1}{6}\big[-(\xi-\frac{1}{6})(\Box R)+\frac{\lambda}{2}(\Box\varphi^2)\big] - \frac{4}{3}\big[-\frac{1}{12}(\Box R)+h\Box(M+h\varphi)\varphi\big] \\
&= \big[\frac{1}{9}-\frac{1}{6}(\xi-\frac{1}{6})\big](\Box R)+(\frac{\lambda}{12}-\frac{4}{3}h^2)(\Box\varphi^2)-\frac{4}{3}hM(\Box\varphi),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{str}\,\hat{P}^2 &= \frac{1}{2}\big[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R+\frac{\lambda}{2}\varphi^2\big]^2+\frac{1}{2}2h^2\big[(M+h\varphi)\bar\psi-\frac{i}{2}(\nabla_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\big]\psi- \\
&\quad -2\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\big[M^2-\frac{1}{12}R+h(M+h\varphi)\varphi-\frac{i}{2}h(\nabla_\mu\varphi)\gamma^\mu\big]^2- \\
&\quad -2\frac{1}{2}\,\mathrm{str}\;\;2h^2\psi\big[(M+h\varphi)\bar\psi-\frac{i}{2}(\nabla_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R+\frac{\lambda}{2}\varphi^2\big]^2+h^2\big[(M+h\varphi)\bar\psi-\frac{i}{2}(\nabla_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\big]\psi \\
&\quad -4\big[M^2-\frac{1}{12}R+h(M+h\varphi)\varphi\big]^2+h^2(\nabla\varphi)^2+2h^2\bar\psi\big[(M+h\varphi)\psi+\frac{i}{2}(\nabla_\mu\psi)\gamma^\mu\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[m^2-(\xi-\frac{1}{6})R+\frac{\lambda}{2}\varphi^2\big]^2+3h^2\bar\psi\big[(M+h\varphi)\psi+\frac{i}{2}(\not\nabla\psi)\big]+h^2(\nabla\varphi)^2 \\
&\quad -4\big[M^2-\frac{1}{12}R+h(M+h\varphi)\varphi\big]^2,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}\,\mathrm{str}\,\hat{\mathcal{S}}^2_{\mu\nu} &= \frac{1}{12}\,\mathrm{str}\,\Big[-\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^\lambda\gamma^\tau+\frac{i}{2}h\big[(\nabla_\nu\varphi)\gamma_\mu-(\nabla_\mu\varphi)\gamma_\nu\big]-\frac{i}{2}h^2\varphi^2\sigma_{\mu\nu}\Big]^2 \\
&= -\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,\Big[-\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^\lambda\gamma^\tau+\frac{i}{2}h\big[(\nabla_\nu\varphi)\gamma_\mu-(\nabla_\mu\varphi)\gamma_\nu\big]-\frac{i}{2}h^2\varphi^2\sigma_{\mu\nu}\Big]^2 \\
&= -\frac{1}{6}\Big[\frac{1}{16}R_{\mu\nu\lambda\tau}R^{\mu\nu}{}_{\cdot\cdot\rho\kappa}\,\mathrm{tr}\,(\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma^\rho\gamma^\kappa)+\frac{i}{4}h^2\varphi^2R_{\mu\nu\lambda\tau}\,\mathrm{tr}\,(\gamma^\lambda\gamma^\tau\sigma^{\mu\nu})- \\
&\quad -\frac{1}{4}h^2\,\mathrm{tr}\,\big[(\nabla_\nu\varphi)\gamma_\mu-(\nabla_\mu\varphi)\gamma_\nu\big]^2-\frac{1}{4}h^4\varphi^4\,\mathrm{tr}\,(\sigma^2_{\mu\nu})\Big] \\
&= \frac{1}{12}R^2_{\mu\nu\lambda\tau}-\frac{1}{3}h^2R\varphi^2+h^2(\nabla\varphi)^2+2h^4\varphi^4.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Nas expressões acima, foram utilizadas algumas das seguintes relações:

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2k-1}}) = 0;\ \ k \in \mathbb{N}, \tag{4.21}$$

$$\mathrm{str}(\psi\bar{\psi}) = -\bar{\psi}\psi, \text{pela anticomutatividade dos campos fermiônicos,} \tag{4.22}$$

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^{\lambda}\gamma^{\tau}\gamma^{\rho}\gamma^{\kappa}) = 4(g^{\lambda\tau}g^{\rho\kappa} - g^{\lambda\rho}g^{\tau\kappa} + g^{\lambda\kappa}g^{\tau\rho}), \tag{4.23}$$

$$\mathrm{tr}\left[(\nabla_\nu\varphi)\gamma_\mu - (\nabla_\mu\varphi)\gamma_\nu\right]^2 = 24(\nabla\varphi)^2. \tag{4.24}$$

Portanto, com todos os termos calculados, podemos usar a técnica de Schwinger-DeWitt para o cálculo de $\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}$,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{div}} &= -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\ \mathrm{str}\ \hat{a}_2(x,x) \\
&= -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\Big\{ -\frac{1}{60}(R^2_{\mu\nu\lambda\tau} - R^2_{\mu\nu} + \Box R) + \Big[\frac{1}{9} - \frac{1}{6}(\xi - \frac{1}{6})\Big](\Box R) \\
&+ \big(\frac{\lambda}{12} - \frac{4}{3}h^2\big)(\Box\varphi^2) - \frac{4}{3}hM(\Box\varphi) + \frac{1}{2}\big[m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\big]^2 + \frac{1}{12}R^2_{\mu\nu\lambda\tau} \\
&+ 3h^2\bar{\psi}\Big[(M + h\varphi)\psi + \frac{i}{2}(\not{\nabla}\psi)\Big] + 2h^2(\nabla\varphi)^2 - 4\Big[M^2 - \frac{1}{12}R + h(M + h\varphi)\varphi\Big]^2 \\
&- \frac{1}{3}h^2R\varphi^2 + 2h^4\varphi^4\Big\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

.

Ou, de maneira análoga, podemos dividí-la em duas partes: a parte dos termos de vácuo, com a contribuição apenas da métrica $g_{\mu\nu}$, e os demais termos. Assim,

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{div}} = \bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{vac,div}} + \bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{m,div}}, \tag{4.26}$$

sendo $\bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{vac,div}}$ e $\bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{m,div}}$ iguais a

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{(1)}_{\mathrm{vac,div}} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\Big\{ &+ \frac{1}{15}R^2_{\mu\nu\lambda\tau} + \frac{1}{60}R^2_{\mu\nu} + \frac{17}{180}\Box R - \frac{1}{6}(\xi - \frac{1}{6})\Box R \\
&+ \frac{1}{2}\Big[m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R\Big]^2 - 4\Big(M^2 - \frac{1}{12}R\Big)^2\Big\},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

e

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm m,div} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\Big\{2h^2(\nabla\varphi)^2 - 2h^4\varphi^4 + (\frac{\lambda}{12} - \frac{4}{3}h^2)(\Box\varphi^2) - \frac{4}{3}hM(\Box\varphi) + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\Big[m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R\Big] + \frac{\lambda^2}{8}\varphi^4 + 3h^2\bar{\psi}\Big[(M + h\varphi)\psi + \frac{i}{2}(\not{\nabla}\psi)\Big] - 8h\Big[M^2 - \frac{1}{12}R\Big](M + h\varphi)\varphi - 4h^2M^2\varphi^2 - 8h^3M\varphi^3 - \frac{1}{3}h^2R\varphi^2\Big\}. \tag{4.28}$$

Para o caso conforme, assumindo $m = 0$, $\xi = \frac{1}{6}$ e $M = 0$, como é de se esperar, os termos proporcionais a R^2 devem se anular, de tal forma que $\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div}$ é:

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div,conf} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{15}R^2_{\mu\nu\lambda\tau} + \frac{1}{60}R^2_{\mu\nu} + \frac{17}{180}\Box R - \frac{1}{36}R^2 + 2h^2(\nabla\varphi)^2 + (\frac{\lambda}{12} - \frac{4}{3}h^2)(\Box\varphi^2) + (\frac{\lambda^2}{8} - 2h^4)\varphi^4 + 3h^2\bar{\psi}\Big[h\varphi\psi + \frac{i}{2}(\not{\nabla}\psi)\Big] + \frac{1}{3}h^2R\varphi^2\Big\}. \tag{4.29}$$

Utilizando das relações abaixo, em que $C^2 = C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}$, com $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor de Weyl, e E_4 é o termo topológico de Gauss-Bonnet, mudamos a base e podemos notar que os termos proporcionais a R^2 se anulam,

$$\begin{aligned} R^2_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(C^2 - E_4) + \frac{1}{3}R^2, \\ R^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= 2C^2 - E_4 + \frac{1}{3}R^2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Substituindo em (4.29), obtemos

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div,conf} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\Big\{\frac{17}{120}C^2 - \frac{3}{40}E_4 + \frac{17}{180}\Box R + 2h^2(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{3}h^2R\varphi^2 + \left(\frac{\lambda^2}{8} - 2h^4\right)\varphi^4 + \left(\frac{\lambda}{12} - \frac{4}{3}h^2\right)(\Box\varphi^2) + 3h^2\bar{\psi}\left[h\varphi\psi + \frac{i}{2}(\not{\nabla}\psi)\right]\Big\}. \tag{4.31}$$

Observamos que o coeficiente do termo $R\varphi^2$ apresenta a razão de $\frac{1}{6}$ em relação ao coeficiente do termo cinético do campo escalar, o que garante a simetria conforme para os termos não superficiais. Além disso, comparamos os resultados obtidos com aqueles apresentados em [1], verificando que as divergências de 1-loop coincidem.

Considerações finais

A partir da ação efetiva e de sua expansão em *loops*, pode ser desenvolvido um método para calcular a ação efetiva de 1-*loop*, conhecido como técnica de Schwinger-DeWitt ou *heat-kernel*. Em seguida, de forma simplificada, obtivemos as expressões para $\bar{\Gamma}^1_{div}$ em dois modelos, considerando tanto campos bosônicos quanto fermiônicos.

Ao aplicar esse método à teoria de gauge com dois campos escalares, verificamos que, ao adicionar um campo real à ação de um campo escalar, obtemos a invariância de gauge para essa ação. Além disso, essa invariância foi preservada na expressão para $\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}$. No caso fermiônico, analisamos o modelo de Yukawa e demonstramos como a técnica pode ser aplicada a campos fermiônicos e espinoriais. Também discutimos o tratamento dos operadores matriciais $\hat{P}$ e $\hat{\mathcal{S}}_{\mu\nu}$, bem como a interação entre diferentes tipos de campos.

Apresentamos a solução inédita do cálculo da ação efetiva de 1-*loop* para uma teoria de gauge com dois campos escalares, sem quantizar o campo A_μ. Além disso, deixamos em aberto a análise com a quantização de A_μ, a ser explorada em estudos futuros e possível publicação.

Ao trabalhar com campos escalares reais, este método pode ser particularmente importante, pois ele pode ser aplicável em modelos de inflação, especialmente ao considerar campos com massas diferentes, como em [14, 15, 16].

Bibliografia

[1] I. L. Buchbinder and I. L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*. Oxford University Press, Oxford, 2021.

[2] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wisley, 1 ed., 1996.

[3] I. G. Avramidi, *Heat kernel and quantum gravity*, vol. 64. New York: Springer, 2000.

[4] B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*. Gordon and Breach, 1965.

[5] B. J. R. Morais, *Tensor Energia-Momento de Vácuo em Teoria Quântica de Campos com Quebra Espontânea de Simetria*. PhD thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

[6] V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983.

[7] T. de Paula Netto, "*Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons*," Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

[8] B. S. DeWitt, "*Quantum field theory in curved space-time*," *Phys. Rep. C*, vol. 19, p. 296, 1975.

[9] A. Barvinsky and G. Vilkovisky, "*The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*," *Phys. Repts*, vol. 119, 1985.

[10] B. DeWitt, *The global approach to quantum field theory*, vol. 1 and 2. Clarendon Press, Oxford, 2003.

[11] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*. North-Holland, 1960.

[12] S. Christensen, "*Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method*," *Phys. Rev. D*, vol. 14, p. 2490, 1976.

[13] R. Herman and W. Hiscock, "*Renormalization of the charged scalar field in curved space*," *Phys. Rev. D*, vol. 53, p. 3285, 1996.

[14] A. Liddle, A. Mazumdar, and F. Schunck, "*Assisted inflation*," *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 061301, 1998.

[15] D. Wands, "*Multiple Field Inflation*," in *Inflationary Cosmology*, pp. 275–304, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[16] C. Peterson and M. Tegmark, "*Testing two-field inflation*," *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 023522, 2011.