

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Matheus Tobias Mendonça

Análise de um modelo simplificado para descrever a instabilidade de
Saffman-Taylor em meios porosos

Juiz de Fora

2025

Matheus Tobias Mendonça

Análise de um modelo simplificado para descrever a instabilidade de
Saffman-Taylor em meios porosos

Dissertação apresentada ao Programa de pós
graduação em matemática da Universidade
Federal de Juiz de Fora como requisito parcial
à obtenção do título de Mestre em Matemá-
tica. Área de concentração:

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Coorientador: Dr. Pavel Zenon Sejas Paz

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mendonça, Matheus Tobias.

Análise de um modelo simplificado para descrever a instabilidade de Saffman-Taylor em meios porosos / Matheus Tobias Mendonça. – 2025.

73 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Pavel Zenon Sejas Paz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de pós graduação em matemática, 2025.

1. Lei de conservação. 2. meio poroso. 3. dedilhado viscoso. I. Chapiro, Grigori, Paz, Pavel Zenon Sejas . II. Análise de um modelo simplificado para descrever a instabilidade de Saffman-Taylor em meios porosos.

Matheus Tobias Mendonça

Análise de um modelo simplificado para descrever a instabilidade de Saffman-Taylor em meios porosos

Dissertação
apresentada
ao Programa de Pós-
graduação em
Matemática da Universidade
Federal de Juiz de Fora
como requisito parcial
à obtenção do título
de Mestre em
Matemática. Área de
concentração:
Matemática Aplicada.

Aprovada em 25 de março de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Pavel Zenon Sejas Paz - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexei Mailybaev
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 25/03/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Grigori Chapiro, Professor(a)**, em 25/03/2025, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Iury Higor Aguiar da Igreja, Professor(a)**, em 25/03/2025, às 16:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pavel Zenon Sejas Paz, Usuário Externo**, em 25/03/2025, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexey Maylybaev, Usuário Externo**, em 25/03/2025, às 17:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2315177** e o código CRC **6A27BA43**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Rita de Cássia Mendonça e José dos Santos Mendonça, por todo o apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, pois graças a Deus em Cristo, por meio de nós, difunde em todo lugar o cheiro do seu conhecimento.

Agradeço aos meus pais, Rita de Cássia Mendonça e José dos Santos Mendonça, por me ensinarem desde pequeno as coisas mais importantes da vida e me formarem o adulto que me orgulho em ser, por estarem ao meu lado em todos os momentos do mestrado, a cada degrau e a cada batalha, me concedendo apoio incondicional, e a oportunidade que sempre, ao voltar pra casa, ter um lar.

Agradeço a minha noiva Júlia Costa Mariano por todo carinho e conforto nos momentos mais turbulentos, e por ser fonte de inspiração dos meus sonhos e objetivos. Me proporcionando sempre força e segurança para continuar trilhando meu caminho.

Agradeço ao meu orientador Grigori Chapiro por ter me acolhido como seu aluno e compartilhado seu conhecimento com tanta dedicação ao longo do mestrado, ao meu coorientador Pavel Zenon Sejas Paz que dedicou seu tempo durante vários meses, finais de semana para me ajudar nas dificuldades enfrentadas durante a dissertação e ao professor Sandro Rodrigues Mazorche por me orientar na graduação e no início do mestrado, sempre me aconselhando e me dando suporte quando precisei.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos, que estiveram comigo durante todos esses anos, me trazendo a alegria necessária para sorrir durante os dias mais difíceis.

RESUMO

Neste trabalho, conduziu-se uma investigação analítica e numérica do fenômeno de dedilhado viscoso, que ocorre durante o deslocamento de um fluido mais viscoso por um fluido menos viscoso em um meio poroso, decorrente da instabilidade de *Saffman-Taylor*. Para tal, foi proposta uma modelagem matemática simplificada, que considera apenas as diferenças de viscosidade entre o fluido residente e o injetado, caracterizados por dois dedos com seus respectivos estados à direita e à esquerda, representando a troca de massa e desconsiderando os efeitos capilares. Adicionalmente, assumiu-se que os fluidos são imiscíveis, isto é, não ocorre mistura entre eles durante o processo. A análise resultou em uma estimativa analítica para a velocidade das frentes, estabelecendo condições sob as quais um dos dedos encontra-se na frente do outro. A formulação derivada dessa modelagem foi validada por meio de simulação numérica 2D, evidenciando um erro percentual máximo de 5% na estimativa das velocidades, mostrando a eficácia da abordagem adotada na captura do comportamento do fenômeno.

Palavras-chave: Lei de conservação, meio poroso, dedilhado viscoso.

ABSTRACT

In this work, an analytical and numerical investigation of the viscous fingering phenomenon was conducted. This phenomenon occurs during the displacement of a more viscous fluid by a less viscous fluid in a porous medium, resulting from the Saffman-Taylor instability. To achieve this, a simplified mathematical model was proposed, considering only the differences in viscosity between the resident and injected fluids. These differences are characterized by two fingers with their respective states on the right and left, representing mass exchange and neglecting capillary effects. Additionally, it was assumed that the fluids are immiscible, meaning that no mixing occurs between them during the process. The analysis yielded an analytical estimate for the speed of the fronts, establishing conditions under which one finger is ahead of the other. The formulation derived from this model was validated through 2D numerical simulation, showing a maximum percentage error of 5% in the velocity estimates, thereby demonstrating the efficacy of the approach in capturing the behavior of the phenomenon.

Keywords: Conservation law, porous medium, viscous fingering.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Plano das características $x - t$. A curva de descontinuidade Γ divide os conjunto dos estados à direita u^+ e à esquerda u^- , e o vetor normal unitário exterior \vec{n} ao conjunto formado por u^- | 22 |
| Figura 2 – Curvas características se abrindo em $x = 0$ no plano $x - t$. Fonte [18]. | 29 |
| Figura 3 – Interseção entre características no plano $x - t$. Fonte [40]. | 29 |
| Figura 4 – Permeabilidade relativada água e do óleo com expoentes de Corey igual 2. | 32 |
| Figura 5 – Função de fluxo fracionário da água. | 33 |
| Figura 6 – Função da derivada do fluxo fracionário da água $f'(S)$, onde S^i representa o ponto de inflexão da $f(S)$ | 33 |
| Figura 7 – Função de fluxo fracionário, com S^* representando o ponto de tangência com a saturação à direita $S^+=0$, sendo S^- a saturação à esquerda e σ a inclinação da reta tangente. | 34 |
| Figura 8 – Modelo esquemático da formação de dedos em um reservatório com a injeção de água à esquerda e produção de petróleo à direita, com a região tracejada indicando o foco de estudo deste trabalho. | 36 |
| Figura 9 – Diagrama esquemático da troca de massa entre S_2^+ e S_1^- indicados pelas setas duplas verticais. | 37 |
| Figura 10 – Zoom do modelo esquemático: os dedos estudados são divididos pela linha tracejada horizontal, com o dedo 1 encontrado na seção superior denotado de faixa 1 e o dedo 2 presente no seção inferior denotada pela faixa 2, e as saturações à esquerda e à direita divididas pela linha tracejada na vertical. | 40 |
| Figura 11 – Representação do caso <i>I</i> da demonstração do Teorema 8 com $S^i < S_2^* < S_2^- < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$ | 42 |
| Figura 12 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso <i>I</i> da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita da água tomados como $S_w^- = 0.1$, $S_w^+ = 1$ respectivamente no tempo $t = 0.2$ | 43 |
| Figura 13 – Representação do caso <i>II</i> da demonstração do Teorema 8 com $S^i < S_2^- < S_2^* < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$ | 44 |

| | |
|---|----|
| Figura 14 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso <i>II</i> da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita tomados como $S_w^- = 0.2$, $S_w^+ = 0.0$ respectivamente no tempo $t = 0.2$ | 45 |
| Figura 15 – Representação do caso <i>III</i> da demonstração do Teorema 8 com $S_2^- < S^i < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$ | 46 |
| Figura 16 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso <i>III</i> da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita tomados como $S_w^- = 0.16$, $S_w^+ = 0.0$ respectivamente no tempo $t = 0.2$ | 47 |
| Figura 17 – Comparação entre a saturação de água e óleo do dedo 1 com a do dedo 2, caso <i>I</i> da demonstração do Teorema 8. | 48 |
| Figura 18 – Comparação entre a saturação de água e óleo do dedo 1 com a do dedo 2, caso <i>II</i> da demonstração do Teorema 8. | 49 |
| Figura 19 – Representação esquemática do reservatório contendo inicialmente óleo, com injeção de água à esquerda, utilizado nas simulações. | 52 |
| Figura 20 – Mapa de permeabilidade 1 utilizando função senoide no inicio do reservatório. | 54 |
| Figura 21 – Mapa de permeabilidade 2 utilizando o coeficiente de Dykstra-Parsons $vd = 0.5$ e mediana da permeabilidade $k_{50} = 0.5$ | 56 |
| Figura 22 – Mapa de permeabilidade com permeabilidade variando entre 0.8 e 1.5 mD. | 57 |
| Figura 23 – Evolução temporal da simulação 2D para dois cenários: (a) e (b) correspondem a um reservatório perturbado por uma função senoidal, enquanto (c) e (d) ilustram um reservatório com permeabilidade lognormal, conforme o modelo de Dykstra-Parsons. Em ambos os casos, o reservatório se encontra inicialmente preenchido com óleo, e a água é injetada a uma velocidade constante. | 58 |
| Figura 24 – Evolução temporal da simulação 2D de um reservatório usando um k variando aleatoriamente no intervalo $[0.8, 1.5]$ mD, inicialmente contendo óleo onde é injetada água a uma velocidade constante. | 60 |
| Figura 25 – dedo 1 e dedo 2 selecionados no reservatório com mapa de permeabilidade aleatório num tempo $t = 0.3$, referente à Fig 24(c). | 61 |
| Figura 26 – Esquema do calculo da velocidade numérica, com o perfil das saturações em tempos diferentes com a saturação fixa no choque para o cálculo de velocidade. | 62 |
| Figura 27 – Velocidade numérica calculada a partir do simulador FOSSIL considerando os tempos $t = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$ e 0.4 para o dedo 1 e 2. | 63 |

| | |
|--|----|
| Figura 28 – Saturação média da frente do óleo para o tempo $t = 0.3$ (pontos vermelhos). A linha verde destaca o dedo 1 enquanto a linha azul o dedo 2 | 64 |
| Figura 29 – Velocidade dos dedos a partir do cálculo analítico do método 1. | 65 |
| Figura 30 – Perfil da saturação do óleo, em preto do dedo 1, em vermelho o dedo 2, em azul a frente da saturação do óleo sem perturbação da permeabilidade. | 66 |
| Figura 31 – Velocidades analíticas utilizando posição do choque sem perturbar, com a velocidade do dedo 1 maior que a do dedo 2 (método 2). | 67 |
| Figura 32 – Comparação da velocidade analítica com a área abaixo da curva (método 1) representada pela linha contínua com a velocidade numérica representada pela linha tracejada, com quadrado representando o dedo 1 e círculo representando o dedo 2. | 68 |
| Figura 33 – Comparação da velocidade analítica utilizando a posição do choque sem perturbação com a velocidade numérica obtida no FOSSIL. | 69 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|--------|--|
| EOR | Enhanced Oil Recovery |
| CFD | Computational Fluid Dynamics |
| IPM | Incompressible porous media |
| TFE | Transverse flow equilibrium |
| CCS | Carbon Capture and Storage |
| B-L | Buckley and Leverett |
| RCD | Reaction Convection Diffusion Equations Solver |
| FOSSIL | FOam diSplacement SIMuLator |
| LAMAP | Laboratório de Matemática Aplicada |
| RCF | Randomly Correlated Fields |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------|--|
| \forall | Para todo |
| \in | Pertence |
| α | Identifica a fase (água w ou óleo o); |
| ρ_α | Densidade da fase α [kg/m ³]; |
| S_α | Representa a saturação da fase α [-]; |
| S_{wc} | Saturação de água conata |
| S_{or} | Saturação de óleo residual |
| S^i | Ponto de inflexão na na função de fluxo fracionário |
| S^- | Saturação à esquerda |
| S^+ | Saturação à direita |
| S^* | Saturação na frente do choque |
| p_α | Denota a pressão da fase α [Pa]; |
| $k_{r\alpha}$ | Permeabilidade relativa da fase α [-]; |
| μ_α | Viscosidade dinâmica da fase α [Pa·s]; |
| μ_{ln} | Média do logaritmo natural |
| u_α | Velocidade de Darcy da fase α [m/s]; |
| ϕ | Porosidade do meio [-]; |
| K | Tensor de permeabilidade intrínseca [m ²]; |
| g | Aceleração gravitacional [m/s ²]; |
| z | Coordenada de profundidade, com $\nabla z = (0, 0, 1)$. |
| V_P | Volume poroso |
| V_α | Volume ocupado por cada fase |
| k_α | Permeabilidade efetiva de cada fase |
| k | Permeabilidade |
| λ | Mobilidade total |
| λ_α | Mobilidade de cada fase |
| f_α | Fluxo fracionário de cada fase |
| M | Razão de mobilidade |
| σ_{ln} | Desvio padrão do logaritmo natural |
| vd | Coeficiente de Dykstra-Parsons |
| k_{50} | Mediana da permeabilidade |

SUMÁRIO

| | | |
|----------------|--|-----------|
| | LISTA DE ILUSTRAÇÕES | 8 |
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 15 |
| 1.2 | OBJETIVO | 17 |
| 1.3 | ORGANIZAÇÃO DO TEXTO | 17 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 19 |
| 2.1 | LEIS DE CONSERVAÇÃO | 19 |
| 2.1.1 | Lei de conservação escalar | 19 |
| 2.1.2 | Solução clássica e o método das características | 20 |
| 2.1.3 | Soluções fracas | 21 |
| <i>2.1.3.1</i> | Solução contínua por partes e condição de choque | 21 |
| <i>2.1.3.2</i> | Solução entropica | 23 |
| <i>2.1.3.3</i> | Existência e unicidade da solução entropica | 27 |
| 2.1.4 | Problema de Riemann | 28 |
| <i>2.1.4.1</i> | Onda de Rarefação: $u^- < u^+$ | 28 |
| <i>2.1.4.2</i> | Onda de choque: $u^- > u^+$ | 29 |
| 2.2 | TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO | 30 |
| 2.2.1 | Equação de Buckley-Leverett | 31 |
| 3 | MODELAGEM MATEMÁTICA | 36 |
| 3.1 | FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 36 |
| 3.2 | ABORDAGEM MATEMÁTICA | 37 |
| 3.3 | COMPARAÇÃO NUMÉRICA | 39 |
| 4 | ABORDAGEM NUMÉRICA BIDIMENSIONAL | 50 |
| 4.1 | SIMULADOR FOSSIL | 50 |
| 4.1.1 | Mapas de Permeabilidade | 52 |
| 4.1.2 | Geração de dedos | 57 |
| 5 | APLICAÇÃO DA ESTIMATIVA DA VELOCIDADE DOS DEDOS EM CASOS 2D | 61 |
| 5.1 | ESTIMATIVA DA VELOCIDADE NUMÉRICA DOS DEDOS | 61 |
| 5.2 | ESTIMATIVA DA VELOCIDADE ANALÍTICA DOS DEDOS | 63 |
| 5.2.1 | Calculo da área abaixo da curva (método 1) | 64 |
| 5.2.2 | Posição do choque sem perturbação (método 2) | 65 |
| 5.3 | ESTIMATIVA DAS VELOCIDADE DOS DEDOS | 67 |
| 5.3.1 | Comparação do resultado analítico (método 1) com o numérico | 67 |
| 5.3.2 | Comparação do resultado analítico (método 2) com o numérico | 68 |
| 6 | CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS | 70 |
| | REFERÊNCIAS | 71 |

1 INTRODUÇÃO

A indústria petrolífera tem concentrado seus esforços no desenvolvimento de técnicas mais eficientes para a extração de petróleo em reservatórios naturais. Esses reservatórios consistem em rochas porosas, tornando o estudo do fluxo de fluidos em meios porosos essencial para otimizar o processo de recuperação de petróleo.

O processo de recuperação de petróleo pode ser dividido em três fases: recuperação primária, secundária e terciária. A recuperação primária ocorre assim que o poço de petróleo é perfurado, onde a diferença de pressão entre o reservatório e a superfície movimenta o petróleo. Nesta etapa, cerca de 15 a 30% do petróleo presente no reservatório costuma ser recuperado [11]. Na recuperação secundária, fluidos como água ou gás são injetados em um dos poços do reservatório, garantindo que a pressão se mantenha elevada o suficiente para sustentar a extração de petróleo em outro poço de produção. Técnicas ainda mais avançadas são chamadas de recuperação terciária ou recuperação avançada (*Enhanced Oil Recovery - EOR*); é a recuperação de petróleo pela injeção de materiais normalmente não presentes no reservatório, onde esses métodos alteram as propriedades físicas ou químicas do óleo, da rocha ou dos fluidos injetados, com o objetivo de aumentar a eficiência da extração [22].

O estudo do deslocamento imiscível de óleo por água em meios porosos tem sido investigado há mais de um século, uma vez que processos de recuperação secundária frequentemente envolvem esse tipo de mecanismo. Exemplos incluem a injeção de água ou gás. Quando o fluido deslocante possui viscosidade menor que a do fluido deslocado, o deslocamento torna-se instável, resultando na formação de dedilhado viscoso no meio poroso do reservatório. Esse fenômeno resulta em baixa recuperação de óleo, devido ao desvio significativo do fluido, observado tanto em escala laboratorial quanto em campo. Instabilidades viscosas dependem não apenas da razão de viscosidade, mas também de fatores como difusão, dispersão, geometria do sistema, heterogeneidade da permeabilidade, tensão interfacial, número capilar e molhabilidade da rocha [3, 22].

Caminho preferencial (*channeling*), dedilhado viscoso (*viscous fingering*) e segregação gravitacional (*gravity override*) são três dos maiores problemas no que diz respeito a injeção e deslocamento de fluidos em meios porosos, especialmente no *EOR* e em processos de deslocamento miscível e imiscível [3]. O fenômeno de caminho preferencial acontece devido às formações geológicas serem heterogêneas e geralmente compostas por camadas de diferentes materiais, onde diferentes permeabilidades geram um caminho preferencial para o líquido, formando padrões de dedos [41]. Já o fenômeno de segregação gravitacional baseia-se em fluidos mais densos que, quando injetados no reservatório, deslocam-se em direção a regiões mais baixas, como também fluidos menos densos, quando injetados no reservatório, deslocam-se em direção ao topo devido ao efeito de gravidade, como por

exemplo no caso de gás sendo injetado num meio poroso contendo óleo, o gás tende a subir para o topo do reservatório [41]. Este trabalho está voltado para o estudo do dedilhado viscoso, que se trata de uma instabilidade em meios porosos que ocorre na interface entre dois fluidos de diferentes viscosidades, quando o fluido menos viscoso, devido à sua maior mobilidade, penetra no fluido mais viscoso em um meio poroso. A interface entre os fluidos tende a se tornar instável, formando dedos que avançam no fluido mais viscoso [35]. O estudo analítico desse fenômeno pode permitir minimizar o dedilhado viscoso, melhorando a recuperação de óleo.

Neste trabalho, consideramos um reservatório horizontal saturado por fluidos imiscíveis constituídos por um meio poroso. Onde temos água sendo injetada na fronteira à esquerda a uma velocidade constante em um meio poroso saturado por óleo, buscando abordar um estudo analítico com a simulação numérica 2D. De acordo com os nossos conhecimentos, poucos estudos foram encontrados a respeito deste tema.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo do comportamento e das características dos dedos formados em meios porosos tem ganhado destaque devido à sua relevância na indústria do petróleo. Esse fenômeno tem sido amplamente abordado na literatura, tanto sob uma perspectiva analítica [32], numérica [2, 20, 38] quanto experimental [27, 34, 42].

Homsy investiga o fenômeno de dedilhado viscoso em [20], onde esse fenômeno ocorre tanto em sistemas de fluidos miscíveis quanto imiscíveis. O autor utiliza células de Hele-Shaw ¹ para realizar experimentos que simulam o comportamento do fluxo em meios porosos, permitindo a observação dos dedos formados. Homsy explora os mecanismos físicos por trás dessa instabilidade, conhecida como a instabilidade de *Saffman-Taylor* destacando como a diferença de viscosidade entre os fluidos, a tensão interfacial (no caso de fluidos imiscíveis) e a difusão (no caso de fluidos miscíveis) influenciam a formação e o crescimento dos dedos. O artigo também aborda a importância de simulações numéricas para prever e analisar o comportamento da instabilidade em diferentes cenários.

No trabalho de Bakharev et al. [2], o fenômeno de dedilhado viscoso é investigado numericamente em um modelo bidimensional de reservatório horizontal com meios porosos homogêneos e fluidos imiscíveis em que a perturbação é introduzida através de uma saturação inicial periódica. Neste trabalho, foram realizadas simulações numéricas abrangendo diferentes combinações de permeabilidade relativa, pressão capilar e viscosidade do óleo, com o objetivo de analisar as propriedades dos dedos sob condições realistas de campo. O

¹ Dispositivos experimentais usados para estudar o comportamento de fluidos em meios porosos ou em fluxos confinados que consistem em duas placas planas e paralelas separadas por uma pequena distância, geralmente da ordem de milímetros, criando um espaço estreito onde os fluidos podem se deslocar.

estudo propõe uma classificação fenomenológica para os dedos e avalia a confiabilidade dos resultados numéricos comparando dois simuladores de CFD (Comsol e Dumu^x). Os autores identificaram diferenças marcantes entre dedos internos e externos, sendo os externos associados à saturação residual de água e os internos à saturação no choque. A frente móvel foi descrita como a saturação pertencente a esses dois casos. Enquanto os dedos externos mostram boa concordância com os critérios de mobilidade da frente de choque, os internos sugerem que outros fatores, além do critério de mobilidade, influenciam seu comportamento, onde o raio de mobilidade é definido pela razão entre as viscosidades. Essas análises destacaram a importância de fatores como viscosidade relativa e forças capilares na evolução dos dedos.

Já o estudo de Sorbie et al. [38] foca na simulação numérica do dedilhado viscoso imiscível, contrapondo estudos que utilizam esquemas numéricos de ordem superior de vários tipos, os presentes autores não veem isso como sendo a questão central na modelagem de resultados imiscíveis, e sim como um problema de estabelecer a física correta e a matemática relacionada. Introduzindo uma abordagem em quatro etapas, centrada no que eles denominaram resolução do "M–paradox", onde M é o raio de mobilidade, dada pela razão entre a mobilidade da água e a mobilidade do óleo. A metodologia inclui a formulação do problema com base em fluxos fracionários experimentais, a seleção de funções de permeabilidade relativa que maximizem a mobilidade total e minimizem a queda de pressão. Essa abordagem oferece uma visão estruturada e refinada para tratar os desafios associados ao dedilhado viscoso. Com a resolução do "M–paradox", os autores resolvem as inconsistências no comportamento de saturação e estabilidade calculados em 1D, especialmente para deslocamentos com alta razão de viscosidade, ajustando funções de fluxo fracionário para refletir de forma mais real os fenômenos físicos observados.

Por outro lado, Petrova et al. [32] apresentam um modelo semi-discreto para a equação bidimensional de meios porosos incompressíveis, (incompressible porous media–IPM), considerando líquidos miscíveis sob a lei de Darcy em faixas verticais com interfluência. O trabalho caracteriza o perfil de propagação por ondas consecutivas denominadas terraços; essas ondas conectam estados de concentração intermediários e descrevem a propagação da zona de mistura entre os fluidos. A velocidade das ondas é determinada pela convecção transversal e pela presença de concentrações intermediárias. Os autores utilizam um modelo reduzido a um regime de equilíbrio de fluxo transversal livre de pressão (TFE) e utilizam a teoria de perturbação singular geométrica e a persistência de variedades estáveis e instáveis [16]. O modelo TFE é usado como uma aproximação para o modelo IPM. Essa redução simplifica a análise matemática e permite obter resultados via ondas viajantes para o sistema original.

Por fim, Berg et al. [26] analisam a instabilidade viscosa que pode ocorrer em um meio poroso quando um fluido com maior mobilidade desloca um fluido com menor mobilidade, como a injeção de CO_2 para o armazenamento de carbono (*CCS*) e o resíduo

mais viscoso presente no reservatório. Os autores propõem um novo critério geral para prever a instabilidade, baseado no perfil completo de saturação de Buckley-Leverett, eliminando ambiguidades presentes em critérios anteriores, como, por exemplo, que, para o critério da taxa de mobilidade da frente de choque, o deslocamento de CO_2 —salmoura pode ser estável, enquanto a taxa de mobilidade total da frente de choque ou o critério da taxa de mobilidade do ponto final sugerem um deslocamento instável. Este novo critério foi validado por meio de simulações numéricas em escala de Darcy, contribuindo para o maior entendimento do comportamento instável durante processos de *CCS*. O estudo demonstra como essa instabilidade pode reduzir a eficiência de armazenamento e influenciar interpretações de experimentos laboratoriais.

1.2 OBJETIVO

No presente trabalho conduzimos uma investigação analítica e numérica do fluxo de um fluido oleoso deslocado pela injeção de um líquido aquoso num meio poroso. O objetivo principal é estimar a velocidade dos dedos tanto analiticamente quanto numericamente e compará-los. A estimativa analítica dos dedos é feita usando a teoria das leis de conservação, utilizando o problema de Riemann associado ao sistema de leis de conservação. Enquanto a abordagem numérica é feita com um simulador robusto 2D [24, 29, 30]. Para simular a geração dos dedos, usamos um mapa de permeabilidade aleatório. Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- Propor uma modelagem analítica da velocidade dos dedos, observando que a estrutura de interação dos dedos com o meio influencia a dinâmica do processo.
- Estimar a velocidade analítica dos dedos a partir de um teorema baseado na Teoria de Leis de Conservação e Teoria de Fluxo fracionário.
- Gerar dedos a partir de simulações 2D, avaliando o comportamento dos *viscous fingerings* com a injeção de água, para a produção de óleo, no meio poroso homogêneo.
- Estimar numericamente a velocidade dos dedos a partir de uma simulação 2D, realizando uma extração de um caminho linear (Over Line) da simulação.
- Comparar a velocidade analítica e numérica obtidas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está organizado da seguinte forma: apresentamos uma breve revisão da teoria de leis de conservação no Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos a modelagem matemática de dois dedos e o resultado principal deste trabalho através do teorema que classifica a velocidade dos dedos; nesta abordagem, comparamos os resultados do

teorema com um simulador 1D para um exemplo. No Capítulo 4, construímos mapas de permeabilidades e apresentamos as simulações 2D. Estimamos as velocidades dos dedos utilizando abordagens analíticas e numéricas, e comparamos os resultados obtidos em cada caso no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6, apresentamos conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos apresentar a base teórica desse trabalho que será utilizada para gerar e estimar as velocidades dos dedos, apresentando a teoria das Leis de conservação que são princípios fundamentais na modelagem matemática de fenômenos físicos, descrevendo a evolução de grandezas como massa, momento e energia, conservadas dentro de um sistema. Exibiremos também as características das Leis de conservação escalares [12, 24, 36, 40].

Em seguida, será apresentada a Teoria do fluxo fracionário, uma teoria muito importante na engenharia de petróleo que visa descrever o deslocamento simultâneo de fluidos imiscíveis em meios porosos [5].

2.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Sistemas hiperbólicos de leis de conservação constituem uma classe fundamental de equações diferenciais parciais que modelam fenômenos de evolução temporal e espacial em diversas áreas da física e matemática [12, 24, 36].

Inicialmente, considere a formulação geral de um sistema de leis de conservação. Seja $u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial que descreve m grandezas conservadas, definida para cada ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e um instante $t > 0$. A dinâmica do sistema é regida por:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \nabla \cdot f(u(x, t)) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ é o tensor fluxo; $u(x, t)$ representa as variáveis conservadas, por exemplo: conservação da massa, do momento e da energia no contexto de fluidodinâmica.

A equação (2.1) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} U + A(U) \frac{\partial}{\partial x} U = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

onde $A(U) = Jf(U)$ é a matriz Jacobiana de f .

2.1.1 Lei de conservação escalar

As leis de conservação escalares representam um caso específico de sistemas de leis de conservação para $m = 1$, em que a solução u possui como contradomínio o conjunto \mathbb{R} e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ [36], assim a partir de (2.1) obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (2.3)$$

onde ela deve assumir condições iniciais, sendo o exemplo mais simples denominado como problema de Cauchy, com as condições iniciais da forma

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{com } -\infty < x < \infty. \quad (2.4)$$

2.1.2 Solução clássica e o método das características

Definição 1. Dizemos que u é uma solução clássica de (2.3) e (2.4) em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, se u é de classe \mathcal{C}^1 , e satisfaz (2.3) e (2.4) em todo ponto do domínio.

Em particular, se $u_0 \in \mathcal{C}^1$, a solução clássica u também pertence à classe \mathcal{C}^1 para $t \geq 0$ e satisfaz as equações (2.3) e (2.4). Para prevenir os efeitos associados à propagação com velocidade infinita, assumimos que u_0 é limitada. Também supomos que o fluxo f pertence à classe \mathcal{C}^∞ e denotamos $f'(u) = c(u)$ sua derivada.

Definição 2 (Curvas Características). *Seja $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ uma solução clássica de (2.3) e (2.4). As curvas características no plano (x, t) são trajetórias $t \mapsto (x(t), t)$ determinadas pela equação diferencial:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(u(x(t), t)). \quad (2.5)$$

Aplicando a lei de conservação ao longo das características, verifica-se que u é constante nessas curvas. De fato, pela regra da cadeia:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial t} u + c(u) \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (2.6)$$

onde a última igualdade decorre diretamente da Eq. (2.3). Consequentemente, $u(x(t), t) = u_0(x_0)$ para todo $t \geq 0$, sendo $x_0 = x(0)$ a posição inicial da característica. A geometria das curvas é dada por:

$$x(t) = x_0 + tc(u_0(x_0)), \quad (2.7)$$

revelando que as características são linhas retas no plano (x, t) com inclinação $c(u_0(x_0))$.

A construção da solução clássica reduz-se assim a resolver implicitamente a equação (2.7) para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, definindo $u(x, t) := u_0(x_0)$.

Observação. *Embora o Teorema do Valor Intermediário garanta a existência de x_0 para u_0 contínua, a unicidade da solução clássica falha globalmente devido à interseção de características quando $c(u_0(x_0))$ não é monótona.*

Proposição 1 (Tempo de aparição de um choque). *Seja $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ limitada e de derivada limitada. Seja*

$$t^* = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (c(u_0))' \text{ é crescente} \\ -\frac{1}{\inf(c(u_0))'}, & \text{no outro caso.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Então, (2.3) tem uma única solução de classe \mathcal{C}^1 em $\mathbb{R} \times [0, t^]$ e não pode se estender além de t^* .*

Demonstração. Pode ser encontrada no livro [36]. \square

Contudo, o importante é que, nas leis de conservação, pode haver um instante t^* em que a solução explode, podendo perder sua continuidade e deixar de ser limitada. Por isso, se quisermos encontrar soluções para (2.3) e (2.4) para qualquer tempo, precisamos enfraquecer as hipóteses iniciais [36].

2.1.3 Soluções fracas

A estratégia consiste em multiplicar a equação (2.3)-(2.4) por uma função suave (classe \mathcal{C}^∞), chamada função teste ϕ :

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad \text{de suporte compacto,} \quad (2.9)$$

em seguida, realizar a integração por partes, deixando as derivadas em função de ϕ . Dessa forma, obtemos:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0, \quad (2.10)$$

onde usamos o fato das funções testes se anularem fora do intervalo compacto.

Definição 3. Dizemos que u é uma solução fraca da (2.3)-(2.4), se u satisfaz (2.10) para toda função teste [40].

É possível demonstrar que o conceito de solução fraca é uma generalização da solução clássica, ou seja, qualquer solução clássica satisfaz as condições para ser considerada uma solução fraca. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois o conceito de solução fraca abrange também funções que podem não ser contínuas [36].

Teorema 1. Se u é uma solução clássica do problema de Cauchy (2.3)-(2.4), então é uma solução fraca de (2.3)-(2.4).

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista com detalhes em [37]. \square

2.1.3.1 Solução contínua por partes e condição de choque

Nesta subseção, o objetivo é investigar soluções de classe \mathcal{C}^1 por partes; utilizamos os trabalhos [17, 31, 37] como referência.

Definição 4 (Função de classe \mathcal{C}^1 por partes). Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Dizemos que uma função v é de Classe \mathcal{C}^1 por partes em Ω se existir um número finito de curvas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ da seguinte forma:

$$\Gamma_i : \left\{ \begin{array}{l} x = \xi_i(t), \quad t \in [t_1^i, t_2^i], \quad \text{com } i \text{ correspondente à curva } \Gamma_i, \end{array} \right.$$

onde ξ_i é uma função de Classe \mathcal{C}^1 . A função v coincide com a restrição de uma função de Classe \mathcal{C}^1 em cada componente conexa do conjunto complementar

$$\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p).$$

Uma função $v(x, t)$ é de Classe \mathcal{C}^1 por partes em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ se, para todo aberto limitado contido em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, ela for de Classe \mathcal{C}^1 .

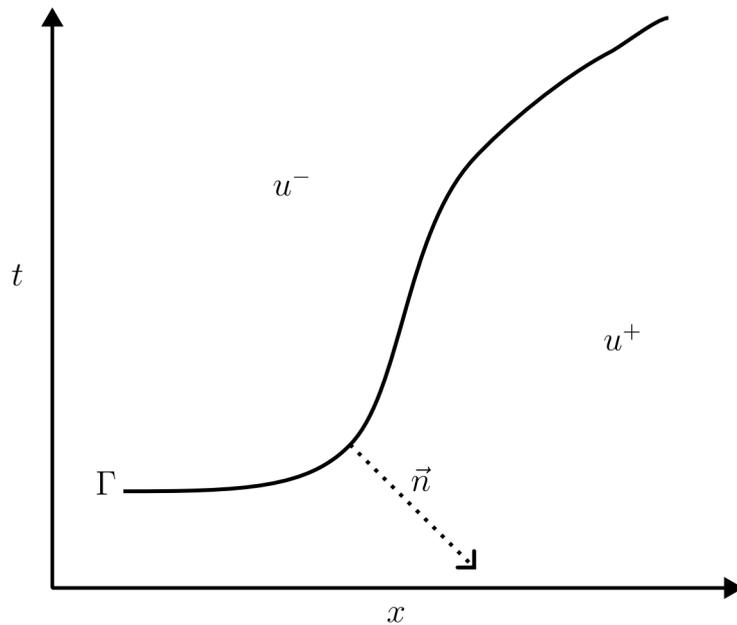


Figura 1 – Plano das características $x - t$. A curva de descontinuidade Γ divide os conjuntos dos estados à direita u^+ e à esquerda u^- , e o vetor normal unitário exterior \vec{n} ao conjunto formado por u^- .

O resultado a seguir é fundamental, pois caracteriza as soluções fracas, quando estas são de classe \mathcal{C}^1 por partes, do problema (2.3)-(2.4). A Figura 1 apresenta um exemplo de curva de descontinuidade Γ .

Teorema 2. *Seja u uma função de Classe \mathcal{C}^1 por partes em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Então u é uma solução fraca de (2.3)-(2.4), se e somente se*

- i. u é solução clássica de (2.3)-(2.4) em todo o domínio onde é de Classe \mathcal{C}^1 ,
- ii. u satisfaz a condição,

$$f(u^+) - f(u^-) = \xi'(t) (u^+ - u^-). \quad (2.11)$$

ao longo da curva de descontinuidade Γ .

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista em [37]. □

A condição de Rankine-Hugoniot diz que a velocidade de propagação s da descontinuidade ao longo de Γ é dada por:

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]}, \quad \text{com} \quad s = \xi'(t), \quad (2.12)$$

sendo $[u] = u^+ - u^-$ e $[f(u)] = f(u^+) - f(u^-)$ os saltos das funções u e $f(u)$ ao longo de Γ [40].

Exemplo 1. Consideremos a equação de Burgers,

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (2.13)$$

a condição de Rankine-Hugoniot (2.12) escreve-se como:

$$s = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

ou seja, a média dos valores dos estados à direita e à esquerda da descontinuidade é a velocidade de propagação do choque.

O seguinte resultado é uma consequência importante do Teorema 2.

Corolário 1 (Caso de funções C^1 por partes e contínuas). *Seja u uma função de classe C^1 por partes e globalmente contínua em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Se u é uma solução clássica do problema (2.3)-(2.4) em todo domínio onde é de classe C^1 , então u é uma solução fraca do problema (2.3)-(2.4).*

2.1.3.2 Solução entropica

Ao trabalhar com soluções fracas, podemos trabalhar com soluções que não são clássicas, porém se perde a garantia de unicidade da solução fraca. Vejamos alguns exemplos para ilustrar:

Exemplo 2. Considere a equação de Burgers (2.13) com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Apresentamos uma solução global clássica para o problema de Cauchy:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{se } x \geq t. \end{cases} \quad (2.15)$$

A função u é contínua e solução clássica da equação de Burgers. Pelo Teorema 1, verifica-se que também é solução fraca. Ainda podemos apresentar outra solução fraca

descontínua, calculando a velocidade de propagação do choque via condição de Rankine-Hugoniot (2.12):

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < t/2, \\ 1 & \text{se } x > t/2. \end{cases} \quad (2.16)$$

No Exemplo 2, para o mesmo problema, obtivemos duas soluções. Constatamos que é possível obter uma solução contínua (2.15) mesmo partindo de uma condição inicial descontínua.

Em seguida, identificamos que a solução que faz sentido do ponto de vista físico é a que deve ser adotada. Para isto, é proposto o problema viscoso associado ao problema de Cauchy (2.3)-(2.4):

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno.

Admitiremos que o problema de Cauchy (2.17), com condição inicial onde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, possui uma única solução $u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Caracterizamos a solução do problema não viscoso através do problema viscoso (2.17) como o limite de u^ε quando ε tende a 0.

Lema 1. *Seja $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ um conjunto de soluções de (2.17), com f convexa tal que:*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.18)$$

e

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ q.t.x de } \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (2.19)$$

então u é uma solução fraca de (2.3).

Demonstração. Esta demonstração pode ser vista em [19]. □

Para caracterizar o limite u das soluções da Eq. (2.17) utilizamos a noção matemática de entropia.

Definição 5 (Entropia). *O par (U, F) de funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ forma uma entropia para (2.3)-(2.4), se:*

(i) U é uma função estritamente convexa.

(ii) $F'(u) = U'(u)f'(u), \forall u \in \mathbb{R}$.

Observe que, considerando funções regulares U e F que atendem ao item mencionado anteriormente, caso u seja uma solução clássica das equações (2.3)-(2.4), então temos

$$U'(u)u_t + U'(u)f'(u)u_x = 0,$$

o que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0. \quad (2.20)$$

Entretanto, no caso de u ser uma solução fraca, definida por partes na classe \mathcal{C}^1 , das equações (2.3)-(2.4), a relação em (2.20) não é, em geral, válida no sentido fraco. De fato, para que isso ocorra, é imprescindível que

$$s[U(u)] = [F(u)]$$

em toda a curva de descontinuidade de u , condição que, em geral, não se verifica juntamente com a condição de Rankine-Hugoniot $s[u] = [f(u)]$.

Por outro lado, se a solução fraca u é o limite das soluções u^ε do problema viscoso, a igualdade em (2.20) torna-se uma desigualdade.

Teorema 3. *Seja $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ um conjunto de soluções regulares de (2.17) que verificam (2.18) e (2.19), e seja (U, F) uma entropia para (2.3)-(2.4). Então u verifica a condição:*

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) \leq 0, \quad (2.21)$$

para toda função teste $\phi \geq 0$, definido na Equação (2.9).

Demonstração. A demonstração desse teorema é extensa e pode ser vista em [15]. \square

A definição de solução entrópica, retirada de [37], diz que:

Definição 6 (Solução Entrópica). *Uma solução fraca de (2.17) chama-se solução entrópica se satisfaz a condição de entropia (2.21) para toda entropia (U, F) da equação (2.3)-(2.4).*

Teorema 4 (Entropia para soluções de Classe \mathcal{C}^1 por partes). *Seja u uma solução fraca de Classe \mathcal{C}^1 de (2.17). Então u é uma solução entrópica se e somente se, para toda entropia (U, F) , se verifica a condição:*

$$\int_{\Gamma} \xi'(t) [U(u^+(t)) - U(u^-(t))] \frac{\phi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma \geq \int_{\Gamma} [F(u^+(t)) - F(u^-(t))] \frac{\phi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma, \quad (2.22)$$

para toda função teste não negativa ϕ ao longo da curva de descontinuidade $\Gamma = \{\xi(t), t\}$.

Podemos observar que para o Teorema 4 ser válido, é suficiente que

$$\xi'(t) [U(u^+(t)) - U(u^-(t))] \geq [F(u^+(t)) - F(u^-(t))]. \quad (2.23)$$

Para o caso de uma função f convexa, esta condição se simplifica ainda mais como pode ser visto a seguir.

Teorema 5. (*Choque entrópico de Lax, caso convexo*) *Suponhamos que f é estritamente convexa. Então, a condição suficiente (2.23) para um choque entrópico equivale a*

$$u^- > u^+. \quad (2.24)$$

ao longo da curva de descontinuidade Γ .

Demonstração. Vamos definir a função G da forma (2.25), onde $G(u^-) = 0$ e por (2.23) $G(u^+) \geq 0$, e assim mostrando que ela é uma função decrescente de u , as condições (2.23) e (2.24) serão equivalentes, logo o teorema estará provado.

Tomando a função:

$$G(u) = \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} (U(u) - U(u^-)) - (F(u) - F(u^-)). \quad (2.25)$$

Ao derivarmos a função G obtemos

$$G'(u) = \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) + \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} U'(u) - F'(u).$$

Pela definição de entropia, podemos tomar $F'(u) = U'(u)f'(u)$, desta forma, temos:

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) \\ &+ \frac{f(u) - f(u^-) - f'(u)(u - u^-)}{u - u^-} U'(u), \end{aligned}$$

$$G'(u) = \frac{(f'(u)(u - u^-) - f(u) + f(u^-))(U(u) - U(u^-) - U'(u)(u - u^-))}{(u - u^-)^2},$$

como f e U são convexas, temos que

$$f'(u)(u - u^-) < f(u) - f(u^-),$$

como também,

$$U'(u)(u - u^-) - U(u) + U(u^-) < 0,$$

e,

$$(u - u^-)^2 > 0,$$

então, $G'(u) < 0$, logo $G(u)$ é decrescente.

Note que (2.24) e (2.23) são equivalentes para o caso convexo já que $G(u^-) = 0$ e que (2.23) escreve-se como $G(u^+) \geq G(u^-) = 0$. \square

O teorema anterior significa que, no caso de uma função de fluxo convexa, as retas características devem convergir para a curva que determina o choque e não emergir dela.

Definição 7. (*Condição de entropia de Oleinik*) Temos uma solução na forma de choque entrópico se

$$\frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+}, \quad (2.26)$$

para todo u entre u^- e u^+ , onde u^- e u^+ representam os estados à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente. Para mais detalhes, ver [24].

Teorema 6. (*Choque entrópico de Oleinik, caso geral*) A condição de choque entrópico (2.23) equivale a

$$\begin{cases} f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \geq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+), & \text{se } u^+ > u^-, \\ f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \leq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+), & \text{se } u^+ < u^-, \end{cases} \quad (2.27)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Geometricamente o teorema acima significa que um choque é entrópico (de Oleinik), se verifica uma das seguintes condições:

- $u^+ > u^-$ e o gráfico de f está acima do segmento formado por $[u^-, u^+]$.
- $u^+ < u^-$ e o gráfico de f está abaixo do segmento formado por $[u^+, u^-]$.

Realçar que, no caso de f convexa, a condição $u^+ > u^-$ é suficiente para garantir que o choque seja entrópico. No caso da f côncava, é suficiente $u^+ < u^-$.

2.1.3.3 Existência e unicidade da solução entropica

O resultado a seguir confirma que o problema de Cauchy (2.3)-(2.4) está bem formulado no sentido de Hadamard, isto é, possui uma única solução entrópica que depende e é contínua em relação ao dado inicial (veja [19] para mais informações).

Teorema 7 (Existência e Unicidade da Solução Entrópica). *Suponha que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, o problema de Cauchy (2.3)-(2.4) admite uma única solução entrópica $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ que satisfaz*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \text{para quase todo } t \geq 0.$$

Sejam u e v as soluções entrópicas correspondentes às condições iniciais u_0 e v_0 ; então,

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| dx, \quad (2.28)$$

para todo $t \geq 0$ e para todos $x_1 < x_2$, onde

$$A = \max\{|f'(\xi)| : |\xi| \leq \max(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})})\}.$$

Observação (Velocidade de Propagação). *A desigualdade (2.28) indica que o valor de u no ponto (x, t) depende exclusivamente dos valores de u_0 no intervalo $[x - At, x + At]$. Assim, a solução entrópica apresenta uma velocidade de propagação finita.*

2.1.4 Problema de Riemann

Iremos calcular a solução entrópica do problema de Riemann (2.29) considerando $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa (ou seja $f'' > 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (2.29)$$

com condições iniciais da forma,

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^- & \text{se } x < 0, \\ u^+ & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

onde u^- (estado de injeção à esquerda) e u^+ (estado inicial à direita) são constantes [36].

Lema 2 (Solução autosemelhante). *Se a solução do problema de Riemann (2.29)-(2.30) é autosemelhante (ou seja, $u(x, t) = v(x/t)$), então:*

$$v'(x/t) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(v(x/t)) = x/t \quad \text{no domínio onde } v \text{ é de classe } \mathcal{C}^1.$$

Demonstração. Suponha que u seja de classe \mathcal{C}^1 em um aberto $K \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Substituindo $u(x, t) = v(x/t)$ na equação (2.29), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + f'(u) \frac{\partial}{\partial x} u &= -\frac{x}{t^2} v' \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} f' \left(v \left(\frac{x}{t} \right) \right) v' \left(\frac{x}{t} \right), \\ &= v' \left(\frac{x}{t} \right) \left(\frac{f' \left(v \left(\frac{x}{t} \right) \right) - \frac{x}{t}}{t} \right) = 0, \quad \forall (x, t) \in K. \end{aligned}$$

Portanto, para $t \neq 0$:

$$v' \left(\frac{x}{t} \right) \left(f' \left(v \left(\frac{x}{t} \right) \right) - \frac{x}{t} \right) = 0, \quad \forall (x, t) \in K,$$

o que implica $v' = 0$ ou $f'(v) = x/t$ nas regiões de regularidade de v . \square

Com essa caracterização, obtêm-se diretamente as soluções explícitas para (2.29).

2.1.4.1 Onda de Rarefação: $u^- < u^+$

No plano $x - t$, as soluções em forma de rarefação são caracterizadas conforme ilustrado na Fig. 2, a inclinação dessas curvas ocasiona que no plano $x - t$ nenhuma informação seja propagada.

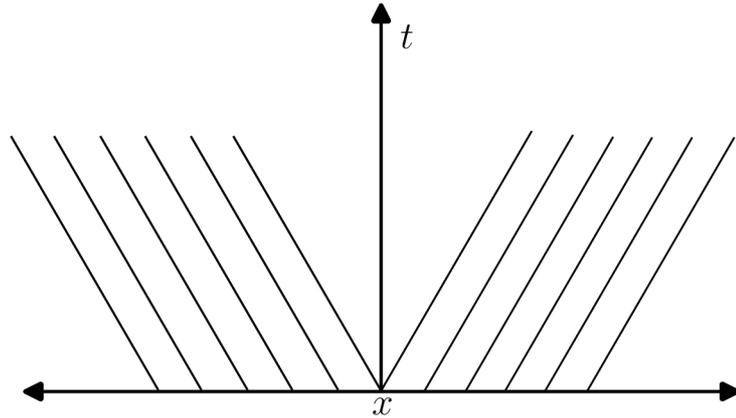


Figura 2 – Curvas características se abrindo em $x = 0$ no plano $x - t$. Fonte [18].

Usando o método das características, construímos a solução nas regiões onde $x \leq f'(u^-)t$ e $x \geq f'(u^+)t$.

Assim, temos:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{se } x \leq f'(u^-)t, \\ u^+, & \text{se } x \geq f'(u^+)t. \end{cases} \quad (2.31)$$

Para a região central, isto é, quando $f'(u^-)t \leq x \leq f'(u^+)t$, utilizamos o Lema 2. Como f' é uma função crescente, podemos escrever: $u(x, t) = (f')^{-1}(x/t)$, para $f'(u^-)t \leq x \leq f'(u^+)t$. Essa solução é contínua e é chamada de onda de rarefação.

2.1.4.2 Onda de choque: $u^- > u^+$

No plano $x-t$, as soluções em forma de choque são caracterizadas pela convergência das curvas características. Conforme ilustrado na Figura 3, a inclinação dessas curvas leva ao seu encontro no instante $t = t_2$, ocasionando um salto na solução, que transita de u_1 para u_2 .

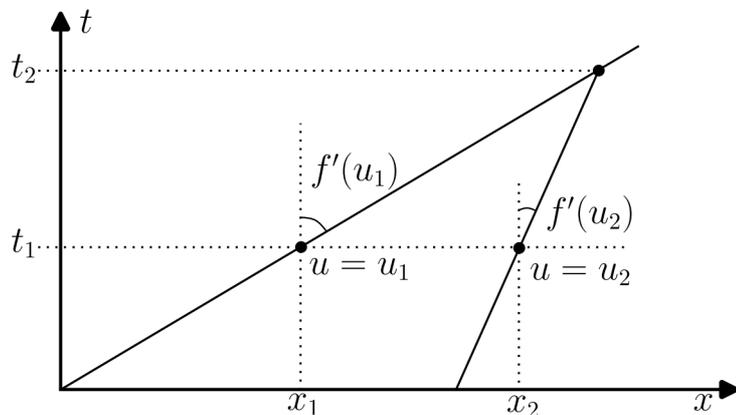


Figura 3 – Interseção entre características no plano $x - t$. Fonte [40].

Neste caso, a solução é definida pela condição de Rankine-Hugoniot. Como o choque é entrópico (devido a $u^- > u^+$), a solução é:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{se } x \leq st, \\ u^+, & \text{se } x \geq st, \end{cases}$$

com a velocidade do choque dada por

$$s = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}.$$

Na seção seguinte, será abordada a teoria do fluxo fracionário, fundamental para compreender a equação de Buckley-Leverett.

2.2 TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO

A abordagem do fluxo fracionário analisa a dinâmica do movimento de fluidos imiscíveis em meios porosos [5]. O nome se origina da avaliação das funções que determinam a parcela do fluxo total associada a cada fase.

Ao se trabalhar em meios porosos é necessário definir o volume que pode ser preenchido pelo fluido, chamado de volume poroso acessível V_p , e o volume total do meio V , desta forma a porosidade ϕ , definida em uma região fixa, será dada por

$$\phi = \frac{V_p}{V}. \quad (2.32)$$

Em meios porosos que possuem um escoamento multifásico, a saturação em cada fase S_α é dada como se em cada porção do domínio coexistissem uma fração de cada uma das fases, dada pela razão do volume ocupado por uma fase V_α e o volume poroso V_p

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p}, \quad (2.33)$$

sendo um meio poroso considerado saturado quando seus poros estão inteiramente ocupados pelas diferentes fases, ou seja, quando $\sum(S_\alpha) = 1$. A fração de fluido que não pode ser mobilizada é denominada saturação residual $S_{\alpha r}$ [22].

A lei de Darcy consiste em uma relação empírica que caracteriza o fluxo de um fluido monofásico através de um meio poroso [13]. Essa lei estabelece uma relação proporcional entre a velocidade do fluxo, u , e o gradiente de pressão, ∇P , no reservatório. Desconsiderando os efeitos da gravidade, a equação pode ser escrita como

$$u(x) = -\frac{k(x)}{\mu} \nabla P, \quad (2.34)$$

onde $u(x) \in \mathbb{R}^n$ indica a velocidade no ponto x e $k(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constitui o tensor que mensura a permeabilidade local. A resistência ao escoamento do fluido, dada por sua

viscosidade μ , é fundamental nesse contexto. Em determinadas situações, pode-se assumir que k possui uma estrutura diagonal (ou seja, $k_{i,j} = 0$ sempre que $i \neq j$) [22], onde cada elemento $k_{i,j}$ indica a facilidade com que o fluido se move na direção i quando submetido a um gradiente de pressão na direção j . Em meios isotrópicos, a permeabilidade não varia com a direção, o que se reflete em $k_{ii} = k$. Além disso, em um meio homogêneo, o tensor k mantém-se constante em todos os pontos, não dependendo de x . Assim, k quantifica a capacidade do meio poroso de permitir o fluxo do fluido; valores menores de k correspondem a uma maior dificuldade para o deslocamento do fluido.

Escoamentos multifásicos em meios porosos levam em conta, além da permeabilidade intrínseca k , a permeabilidade efetiva k_α como a capacidade de escoamento da fase α no meio poroso na presença de outras fases. Desta forma, podemos definir a permeabilidade relativa de uma fase como a razão entre a permeabilidade efetiva de um fluido e a permeabilidade do meio poroso.

$$k_{r\alpha} = \frac{k_\alpha}{k}. \quad (2.35)$$

Podemos definir a mobilidade de cada fase λ_α , que descreve a capacidade de uma fase se deslocar no meio poroso, onde ela é dada pela razão entre a permeabilidade efetiva k_α e a viscosidade μ_α e a permeabilidade k [5] como

$$\lambda_\alpha = \frac{k k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad (2.36)$$

da mesma forma podemos definir a mobilidade relativa, dada pela razão entre a permeabilidade relativa $k_{r\alpha}$ e a viscosidade μ_α

$$\lambda_{r\alpha} = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad (2.37)$$

e a mobilidade total dada pelo somatório das mobilidades em cada fase α

$$\lambda = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha. \quad (2.38)$$

Podemos definir a função de fluxo fracionário f_α que descreve a parcela do fluxo composta pela fase α dada pela razão entre a mobilidade da fase pela mobilidade total

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}. \quad (2.39)$$

2.2.1 Equação de Buckley-Leverett

A equação Buckley-Leverett (B-L), fundamentada na conservação de massa e na Lei de Darcy, descreve o transporte de dois fluidos imiscíveis em meios porosos, onde os fluidos são incompressíveis, o meio homogêneo, a ausência de efeitos capilares e o elemento que está sendo conservado é a saturação da água ou do óleo [3, 5, 22],

$$\frac{\partial}{\partial t}S + \frac{\partial}{\partial x}f(S) = 0, \quad (2.40)$$

com condição inicial do tipo Riemann (2.30),

$$S(x, 0) = \begin{cases} S^-, & x < 0, \\ S^+, & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

onde $S(x, t)$ representam a saturação da água, t e x são tempo e comprimento adimensionais ($x = x'/L$ e $t = ut'/\phi L$), respectivamente, com L denotando o comprimento do meio poroso, ϕ a porosidade e u a velocidade de injeção constante do fluido, em que S^- é chamado de estado à esquerda (ou condição de injeção) e S^+ de estado à direita (ou condição inicial). Desta forma a saturação normalizada fica da seguinte forma:

$$S = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}, \quad (2.42)$$

onde S_{wc} representa a saturação de água conata e S_{or} a saturação residual do óleo.

A permeabilidade relativa da água e do óleo no meio, são dadas por k_{rw} e k_{ro} respectivamente, segue a relação de Brooks-Corey [4], onde:

$$k_{rw} = k_{rw}^0 S^{n_w}, \quad k_{ro} = k_{ro}^0 (1 - S)^{n_o}, \quad (2.43)$$

onde as permeabilidades no ponto final do óleo k_{ro}^0 e da água k_{rw}^0 estão representadas graficamente na Figura 4, onde podemos observar a permeabilidade relativa do óleo k_{ro} e a permeabilidade relativa da água k_{rw} em relação à saturação normalizada denotada por S .

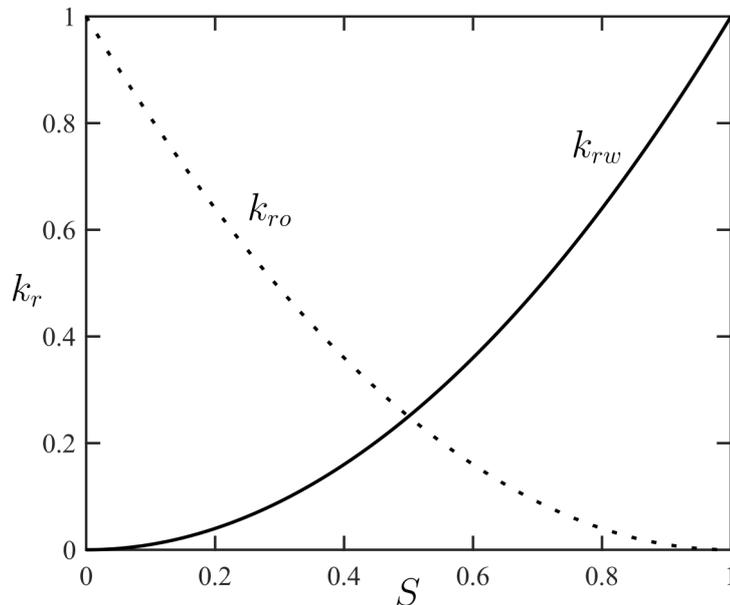


Figura 4 – Permeabilidade relativada água e do óleo com expoentes de Corey igual 2.

A função de fluxo fracionário f deduzida a partir das equações (2.35)-(2.39) é dada da seguinte forma:

$$f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{k_{rw}(S) + (\mu_w/\mu_o)k_{ro}(S)}, \quad (2.44)$$

onde, μ_w e μ_o são as viscosidades da água e do óleo, respectivamente. Sendo a razão da mobilidade definida por ($M = \mu_o/\mu_w$), podemos observar que o $(1/M)$ aparece na função de fluxo fracionário (2.44). A Figura 5 apresenta o gráfico da função de fluxo fracionário (2.44) pela saturação normalizada.

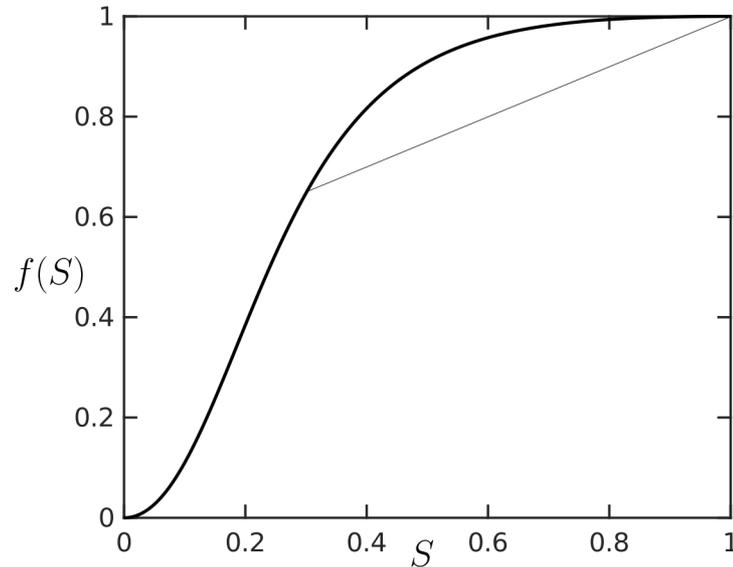


Figura 5 – Função de fluxo fracionário da água.

Outro fator importante a se observar na função de fluxo fracionário é o ponto de inflexão na sua curva denotado como S^i , podemos observar esse ponto na Figura 6 que representa a derivada do fluxo fracionário $f'(S)$.

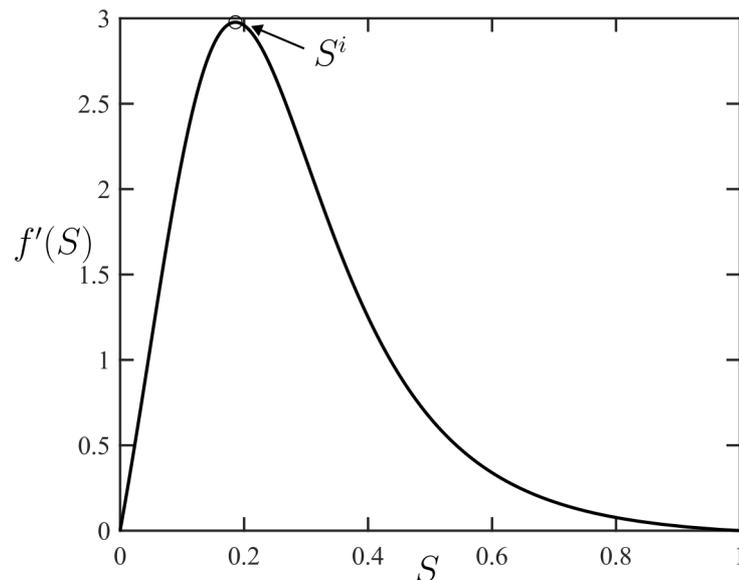


Figura 6 – Função da derivada do fluxo fracionário da água $f'(S)$, onde S^i representa o ponto de inflexão da $f(S)$.

A Equação (2.40) é simplificada da seguinte forma:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (2.45)$$

Para determinar a solução analítica, é necessária a identificação do ponto de transição entre onda de rarefação e choque. Para isto, é preciso encontrar o valor crítico S^* , definido como a saturação em que a inclinação da reta que conecta dois estados, como pode ser visto na Figura 7, satisfazendo a condição de Rankine-Hugoniot:

$$\frac{f(S^+) - f(S^*)}{S^+ - S^*} = f'(S^*). \quad (2.46)$$

A análise da concavidade da função $f(S)$, representado na Figura 7 permite caracterizar os tipos de ondas que compõe a solução desse problema [5]:

- No intervalo (S^+, S^*) : $f(S)$ é convexa ($f'(S)$ é crescente), gerando uma onda de choque que conecta S^+ a S^* ;
- No intervalo (S^*, S^-) : $f(S)$ é côncava ($f'(S)$ é decrescente), resultando em uma onda de rarefação entre S^* e S^- .

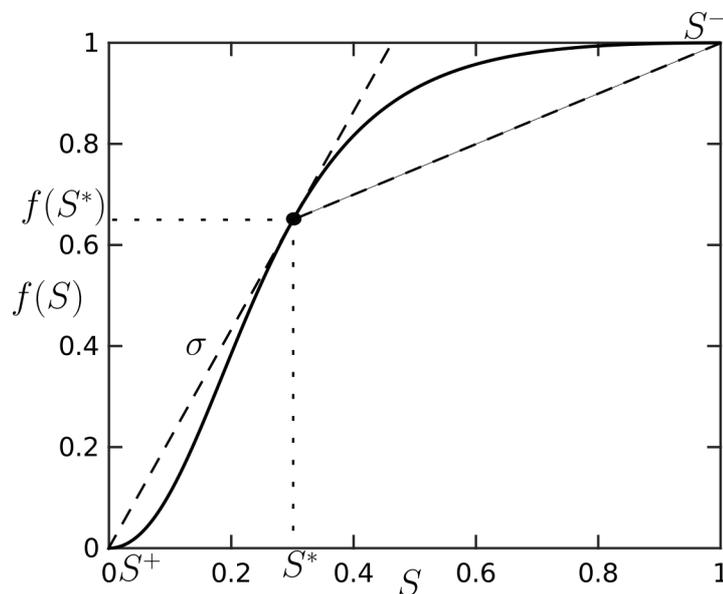


Figura 7 – Função de fluxo fracionário, com S^* representando o ponto de tangência com a saturação à direita $S^+=0$, sendo S^- a saturação à esquerda e σ a inclinação da reta tangente.

A solução pode ser expressa como:

$$S(x, t) = \begin{cases} S^- & x \leq f'(S^-)t, \\ (f')^{-1}(x/t) & f'(S^-)t < x < f'(S^*)t, \\ S^* & f'(S^*)t < x < st, \\ S^+ & x > st, \end{cases} \quad (2.47)$$

denotando a solução entrópica de (2.29), o caso $S^- < S^+$ é feito de forma análoga.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, iremos apresentar a modelagem matemática para o estudo das velocidades dos dedos, baseada na Teoria de Leis de Conservação e Teoria de Fluxo fracionário vistas no Capítulo 3. Apresentaremos o teorema principal deste trabalho, que estima a ordem de velocidade dos dedos; e, por fim, esses resultados serão comparados com resultados obtidos numericamente em simulações unidimensionais.

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, propomos um modelo simples para estudar a velocidade dos dedos. Para isto, consideramos a injeção de água para a produção de óleo num meio poroso homogêneo. Considera-se a instabilidade de *Saffman-Taylor*, que surge do contraste de viscosidades entre os fluidos e a competição entre forças viscosas e capilares (que não serão consideradas neste trabalho). Ao injetar um fluido, água no presente estudo, para deslocar outro mais viscoso, óleo neste caso, diferenças na razão de mobilidades M favorecem a formação de padrões de dedos [2, 26, 38]. Neste caso, $M > 1$ indica que o fluido deslocante é mais móvel, tornando o deslocamento instável. O fenômeno do caminho preferencial que ocorre devido às formações geológicas serem heterogêneas, onde diferentes permeabilidades geram um caminho preferencial para o líquido, também favorece a formação de dedos. A Figura 8 apresenta um modelo esquemático deste fenômeno, representando o primeiro momento antes da formação da instabilidade, onde a frente é uniforme. O quadro vermelho na Figura 8 destaca o nosso objeto de modelagem, no caso conformado por apenas dois dedos, onde um deles está à frente do outro no meio poroso.

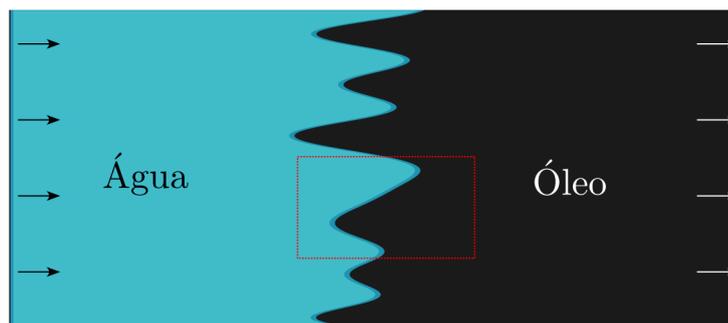


Figura 8 – Modelo esquemático da formação de dedos em um reservatório com a injeção de água à esquerda e produção de petróleo à direita, com a região tracejada indicando o foco de estudo deste trabalho.

Na modelagem, abordaremos o fenômeno de troca de massa por difusão (cross-flow), que caracteriza a transferência de massa entre o dedo 1, localizado na faixa 1, e o dedo 2, situado na faixa 2. Essa transferência ocorre quando a saturação à esquerda do dedo 1 (S_1^-) entra em contato com a saturação à direita do dedo 2 (S_2^+). A Figura 9 ilustra esse

processo onde as setas horizontais indicam a direção de propagação dos dedos no meio poroso, enquanto as setas verticais evidenciam o fluxo responsável pela troca de massa entre eles. Assim, no momento após a formação de dedos, onde já possuímos o dedo 1 na frente do dedo 2, podemos tomar $S_2^+ < S_1^+ < S_2^- < S_1^-$, pois S_2^+ está saturado de água com um pouco de óleo, enquanto S_1^+ está saturado de óleo; por sua vez, S_2^- está saturado de água, e S_1^- contém água com um pouco de óleo. Essa troca de massa pode ocorrer tanto por troca de massa por difusão, conforme apresentado em [6], quanto por consequência da incompressibilidade, como mostra a abordagem apresentada em [32]. Neste texto, não iremos abordar o fenômeno da troca de massa em si, somente as consequências desta troca, embutida nos parâmetros S_1^- e S_2^+ .

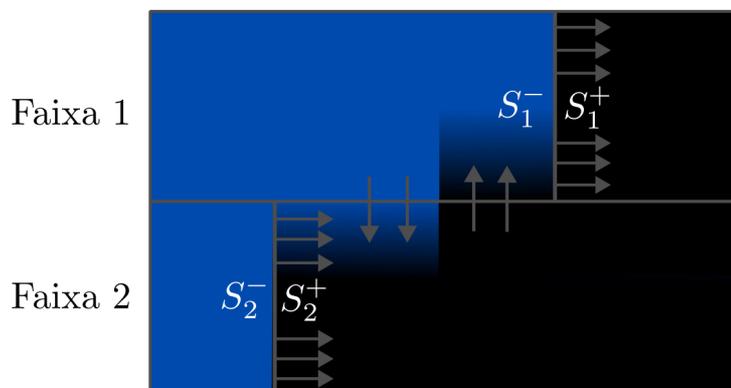


Figura 9 – Diagrama esquemático da troca de massa entre S_2^+ e S_1^- indicados pelas setas duplas verticais.

Na seguinte subseção, combinaremos a informação apresentada acima sobre a modelagem dos dedos e a teoria de fluxo fracionário para obter um resultado sobre a velocidade dos dedos.

3.2 ABORDAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção iremos apresentar o principal resultado deste trabalho, que, a partir da modelagem descrita na seção 2, estabelece uma ordem entre as velocidades de propagação de dedos em meios porosos.

Considera-se o deslocamento unidimensional da saturação da água, dada pela equação da conservação da massa e seu respectivo problema de Riemann associado, dependendo da faixa 1 ou 2 representada na Figura 9. A propagação dos dedos é descrita através do sistema de equações diferenciais parciais desacopladas a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_1 + \frac{\partial}{\partial x} f(S_1) &= 0, & S_1(x, 0) &= \begin{cases} S_1^-, & x < 0, \\ S_1^+, & x \geq 0, \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial t} S_2 + \frac{\partial}{\partial x} f(S_2) &= 0, & S_2(x, 0) &= \begin{cases} S_2^-, & x < 0, \\ S_2^+, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

no qual a troca de massa ocorre em função da relação entre os estados localizados à esquerda de S_1 e à direita de S_2 .

Teorema 8. *Seja um meio poroso com permeabilidade k e porosidade ϕ , dividido em duas faixas. Considerando o sistema de equações em (3.1), tomando a função de fluxo f apresentada na Eq. (2.44), denotamos a saturação da água da faixa 1 e da faixa 2 com os subíndices 1 e 2, respectivamente. Se $S_2^+ < S_1^+ < S_2^- < S_1^-$ e a solução é composta de uma rarefação seguida de choque ou apenas um choque. Então, a velocidade da frente de onda na faixa 1 (σ_1) é maior do que a velocidade da frente de onda na faixa 2 (σ_2), i.e.*

$$\sigma_1 > \sigma_2. \quad (3.2)$$

Demonstração. Para verificarmos que a velocidade com que se desloca a frente de onda na faixa 1 é maior que o da frente de onda da faixa 2, basta verificar que a inclinação da reta tangente da curva de fluxo fracionário é maior que a da faixa 2. Além disso, precisamos da informação do ponto de inflexão S^i da função de fluxo f .

Antes é necessário encontrar os pontos S_1^* do primeira faixa e S_2^* do segunda faixa, usando a igualdade entre a inclinação da reta do estado '+' e a derivada da função de fluxo.

Temos que as equações que definem a inclinação da reta tangente de cada faixa estão dadas a seguir

$$\sigma_1 = \frac{f(S_1^+) - f(S_1^*)}{S_1^+ - S_1^*} = f'(S_1^*), \quad (3.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^*)}{S_2^+ - S_2^*} = f'(S_2^*). \quad (3.4)$$

Dividiremos a demonstração em três casos:

$$I. S^i < S_2^* < S_2^- < S_1^-.$$

$$II. S^i < S_2^- < S_2^* < S_1^-.$$

$$III. S_2^- < S^i < S_1^-.$$

Caso I. Devido a monotonicidade da f , $S_1^* < S_2^* \implies f(S_1^*) < f(S_2^*)$ e como S_1^* e S_2^* são maiores que S^i e a derivada do fluxo fracionário f' é monótona decrescente a partir do ponto de inflexão, então $f(S^i) < f_1(S^*) < f_2(S^*) \implies f'(S_1^*) > f'(S_2^*)$, logo

$$\sigma_1 = \frac{f(S_1^+) - f(S_1^*)}{S_1^+ - S_1^*} = f'(S_1^*) > f'(S_2^*) = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^*)}{S_2^+ - S_2^*} = \sigma_2. \quad (3.5)$$

Portanto, $\sigma_1 > \sigma_2$.

Caso II. Basta ver que o segmento ligando os estados S_2^- e S_2^+ com solução na forma de

choque entrópico, nas condições de entropia de Oleinik, ver na Definição 7, a velocidade do choque é dada por $\sigma_2 = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^-)}{S_2^+ - S_2^-} < f'(S_2^*)$. Logo,

$$\sigma_1 = \frac{f(S_1^+) - f(S_1^*)}{S_1^+ - S_1^*} = f'(S_1^*) > f'(S_2^*) > \frac{f(S_2^+) - f(S_2^-)}{S_2^+ - S_2^-} = \sigma_2. \quad (3.6)$$

Caso III. Com o segmento ligando os estados S_2^- e S_2^+ com solução na forma de choque entrópico, nas condições de entropia de Oleinik, ver na Definição 7, a velocidade do choque é dada por $\sigma_2 = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^-)}{S_2^+ - S_2^-}$. Chamaremos a inclinação da reta tangente do ponto $(S_2^+, f(S_2^+))$ a função de fluxo f como $\sigma_2^* = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^*)}{S_2^+ - S_2^*}$, Notando que neste caso $\sigma_2^* > \sigma_2$, por convexidade. Logo,

$$\sigma_1 = \frac{f(S_1^+) - f(S_1^*)}{S_1^+ - S_1^*} = f'(S_1^*) > f'(S_2^*) = \frac{f(S_2^+) - f(S_2^*)}{S_2^+ - S_2^*} = \sigma_2^* > \sigma_2. \quad (3.7)$$

Os três itens acima concluem o resultado. \square

Os casos *I*, *II*, *III* estão representados pelas figuras 11, 13, 15 respectivamente.

3.3 COMPARAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção foram realizados alguns testes numéricos no *software Reaction Convection Diffusion Equations Solver* (RCD) comparando os resultados analíticos associados aos itens listados no Teorema 8. O RCD combina um esquema implícito Crank-Nicolson [11] de discretização simétrica no tempo e de segunda ordem de precisão temporal e espacial [23] com o método de Newton. Para realizar as simulações, foi adotada à esquerda a condição de contorno de Dirichlet, e à direita a condição de contorno de Neumann (sem fluxo), e os efeitos difusivos foram negligenciados. Para a simulação usamos uma malha espacial de 300 pontos com o espaçamento de 6×10^{-5} . Para o avanço no tempo utilizamos passos de 1×10^{-5} e tempo final de simulação de 0.44.

A Figura 10 apresenta uma ampliação da região destacada na Figura 8, evidenciando a interação entre duas regiões de estudo: a faixa 1 (área associada ao fenômeno denominado dedo 1) e a faixa 2 (área associada ao fenômeno chamado de dedo 2). Observa-se que a estrutura de interação dos dedos com o meio influencia a dinâmica do processo, de modo que o dedo 1 está localizado à frente do dedo 2 logo após a instabilidade inicial, que será o ponto de partida para as simulações. Neste contexto, os subíndices da saturação $S_{1,2}$ representam a saturação do dedo 1 e 2, respectivamente. Além disso, observa-se que, como o dedo 1 está à frente do dedo 2, a saturação à esquerda (S_1^-) do dedo 1 é composta exclusivamente por água, enquanto sua saturação à direita (S_1^+) contém predominantemente óleo, com a presença de uma pequena quantidade de água. Já no

dedo 2, a saturação à esquerda (S_2^-) consiste em água com uma pequena quantidade de óleo, do mesmo modo que sua saturação à direita (S_2^+) é constituída unicamente por óleo.

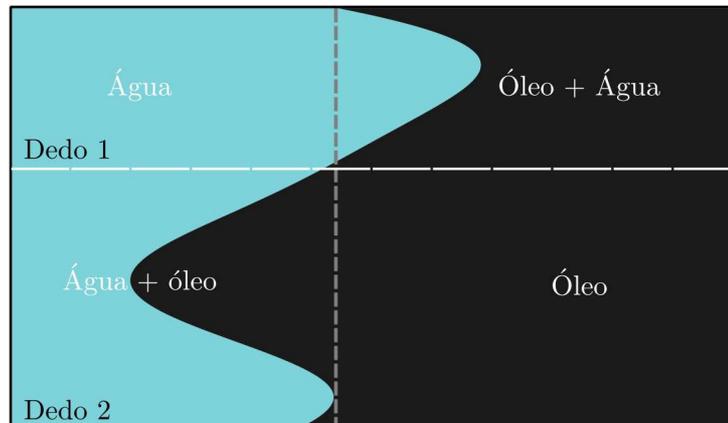


Figura 10 – Zoom do modelo esquemático: os dedos estudados são divididos pela linha tracejada horizontal, com o dedo 1 encontrado na seção superior denotado de faixa 1 e o dedo 2 presente no seção inferior denotada pela faixa 2, e as saturações à esquerda e à direita divididas pela linha tracejada na vertical.

Para exemplificar o teorema, consideraremos o momento da formação dos dedos, os valores da Tabela 1, que indicam o seguinte cenário:

- Na faixa 1 (localização do dedo 1):
 - Saturação de água injetada S_1^- : 100% saturado de água.
 - Saturação inicial S_1^+ : 10% de água e 90% de óleo.
- Na faixa 2 (localização do dedo 2):
 - Saturação de água injetada S_2^- : 90% de água e 10% de óleo.
 - Saturação inicial S_2^+ : 100% saturado de óleo.

| Simbologia | Valor | Unidade | Parâmetro |
|------------|-------|---------|---------------------------------------|
| S_1^- | 1 | - | Saturação de água injetada na faixa 1 |
| S_1^+ | 0.1 | - | Saturação inicial de água na faixa 1 |
| S_2^- | 0.9 | - | Saturação de água injetada na faixa 2 |
| S_2^+ | 0 | - | Saturação inicial de água na faixa 2 |

Tabela 1 – Valores dos estados de injeção e inicial para a solução analítica.

Na Figura 11, apresenta-se um diagrama referente ao caso *I* da demonstração do Teorema 8, o qual ilustra os estados à esquerda e à direita dos dedos 1 e 2 em relação à função de fluxo fracionário na Eq. (2.44), conforme a Figura 10. Nessa representação, S denota a saturação de água no reservatório, sendo S_1^- e S_2^- as saturações à esquerda dos

dedos 1 e 2, respectivamente, enquanto S_1^+ e S_2^+ correspondem às saturações à direita de cada frente.

A partir das saturações à direita (S_1^+ e S_2^+), traçam-se retas tangentes à curva de B-L, designadas por σ_1 e σ_2 . O ponto de tangência entre cada reta e a curva é identificado por S_j^* , onde $j = 1$ refere-se ao dedo 1 e $j = 2$ ao dedo 2. Para comparação das inclinações, a reta σ_1 foi transladada para a origem do sistema, conforme ilustrado pela linha tracejada em azul na Figura 11.

A partir da fundamentação teórica apresentada no Capítulo 2, iremos apresentar na Tabela 2 as condições físicas que serão utilizadas na abordagem matemática dessa seção.

| Simbologia | Valor | Unidade | Parâmetro |
|------------|-------|---------|---------------------------------|
| k_{rw}^0 | 1 | - | Permeabilidade relativa da água |
| k_{ro}^0 | 1 | - | Permeabilidade relativa do óleo |
| n_w | 2 | - | Expoente do Corey |
| n_o | 2 | - | Expoente do Corey |
| S_{wc} | 0.0 | - | Saturação de água conata |
| S_{or} | 0.0 | - | Saturação de óleo residual |
| μ_w | 1 | Pa s | Viscosidade da água |
| μ_o | 10 | Pa s | Viscosidade do óleo |

Tabela 2 – Tabela de valores usados para definir a função de fluxo fracionário.

Observação. *Foram tomadas densidades da água e do óleo ρ_w e ρ_o de forma usual, porém os seus valores não intervêm fortemente na equação de (B-L) na Eq. (2.40). Entretanto, podemos observar pela equação do fluxo fracionário na Eq. (2.44) que a viscosidade da água e a viscosidade do óleo são relevantes. Enquanto a física do problema com o deslocamento de cima para baixo, a densidade se torna crítica no modelo, como foi bem explorado no trabalho [1].*

A análise geométrica evidencia que σ_1 possui inclinação superior à de σ_2 . Considerando que a velocidade de propagação de um dedo é proporcional à inclinação de sua reta tangente associada, conclui-se que o dedo 1 desloca-se mais rapidamente que o dedo 2.

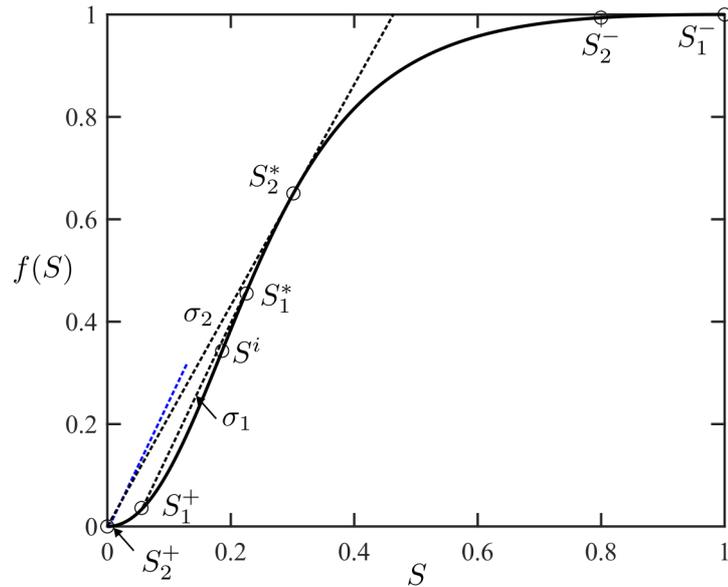


Figura 11 – Representação do caso *I* da demonstração do Teorema 8 com $S^i < S_2^* < S_2^- < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$.

Na Figura 12, é realizada uma comparação entre a saturação de água na solução analítica e a solução numérica obtida via RCD, analisando-se o perfil de saturação S em função da posição x . A linha azul corresponde à saturação de óleo na solução analítica, enquanto a vermelha representa a saturação de água na solução analítica. Em tracejado, são exibidos os resultados numéricos para as saturações da água e do óleo simuladas pelo RCD. Ambas as curvas exibem uma onda de rarefação seguida por uma onda de choque, padrão característico do dedo 1 ao adotar $S_w^- = 0.1$ e $S_w^+ = 1$, condição que se alinha ao caso *I* da demonstração do Teorema 8, com uma rarefação ligando S_w^- a S_w^* e um choque de S_w^* a S_w^+ .

Observa-se que a simulação numérica reproduz com precisão o comportamento analítico, demonstrando quantitativamente a dinâmica de saturação prevista teoricamente.

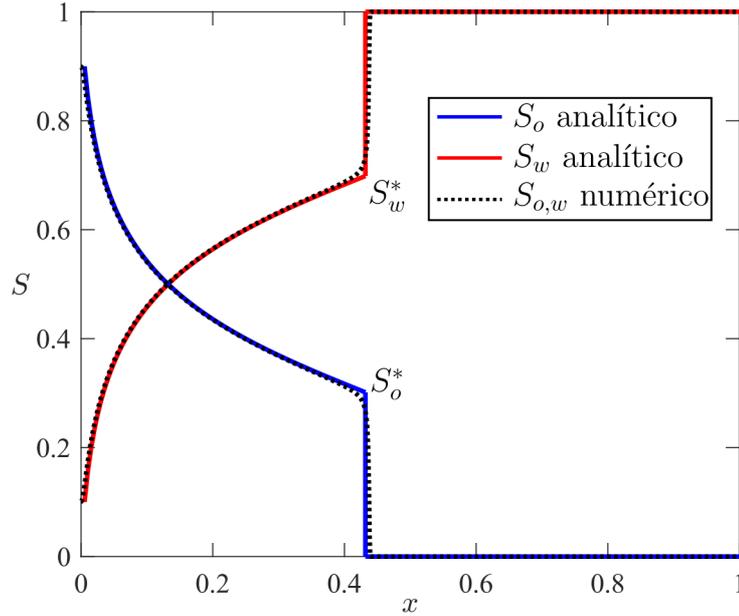


Figura 12 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso *I* da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita da água tomados como $S_w^- = 0.1$, $S_w^+ = 1$ respectivamente no tempo $t = 0.2$.

A Figura 13 ilustra o caso *II* da demonstração do Teorema 8, empregando a função de fluxo fracionário da Eq. (2.44). As saturações à esquerda e à direita do dedo 1 são denotadas por S_1^- e S_1^+ , respectivamente, enquanto para o dedo 2, utilizam-se S_2^- (esquerda) e S_2^+ (direita).

A partir dessas saturações, traçam-se as retas tangentes à curva de fluxo fracionário:

- σ_1 (associada ao dedo 1), que conecta S_1^+ a S_1^* ;
- σ_2 (associada ao dedo 2), ligando S_2^+ a S_2^- , posicionado abaixo de S_2^* na curva.

Para comparação direta das inclinações, a reta σ_1 foi transladada até a origem do sistema, representada pela linha tracejada em azul na Figura 13. A análise geométrica revela que a inclinação da reta σ_1 supera a de σ_2 . Como a velocidade de avanço de um dedo é proporcional à inclinação de sua reta tangente correspondente, conclui-se que o dedo 1 propaga-se mais rapidamente que o dedo 2.

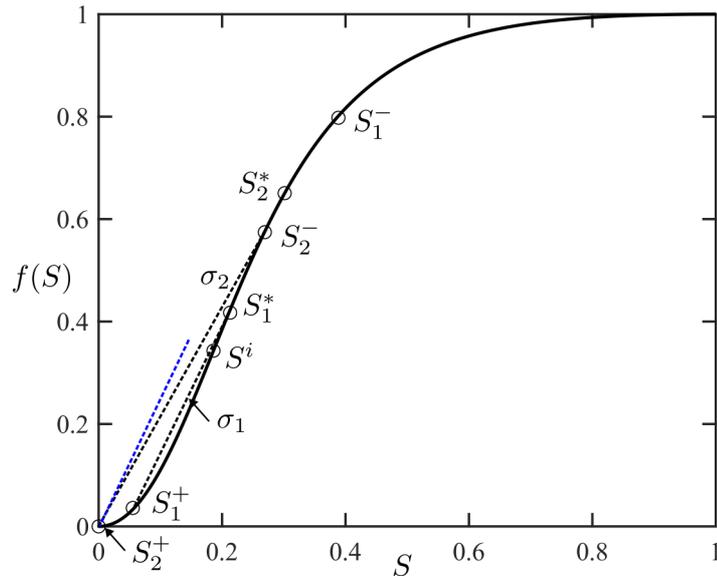


Figura 13 – Representação do caso *II* da demonstração do Teorema 8 com $S^i < S_2^- < S_2^* < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$.

Na Figura 14, compara-se o perfil de saturação analítico com resultados numéricos gerados pelo RCD, analisando-se a distribuição de S em função da posição x . Foram adotados os seguintes parâmetros de saturação:

- Saturação à esquerda do óleo: $S_o^- = 0.8$;
- Saturação à direita do óleo: $S_o^+ = 1$;
- Saturação à esquerda da água: $S_w^- = 0.2$;
- Saturação à direita da água: $S_w^+ = 0$.

A linha azul representa a saturação analítica do óleo, enquanto a vermelha descreve a saturação analítica da água. Os resultados numéricos, exibidos em tracejado, reproduzem fielmente as curvas analíticas para ambos os fluidos, exibindo boa concordância entre a solução analítica e numérica. Observa-se que o perfil de saturação é constituído exclusivamente por uma onda de choque, conforme previsto pela análise gráfica da Figura 13.

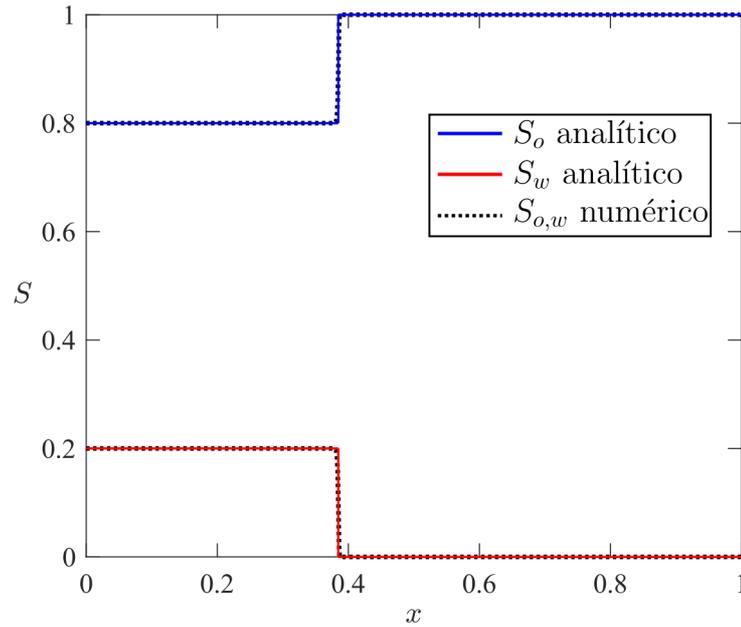


Figura 14 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso *II* da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita tomados como $S_w^- = 0.2$, $S_w^+ = 0.0$ respectivamente no tempo $t = 0.2$.

Na Figura 15, apresenta-se a função de fluxo fracionário na Eq. (2.44) em função da saturação. Nesta representação, a saturação à esquerda S_2^- posiciona-se abaixo do ponto de inflexão S^i da curva, enquanto o ponto S_1^* localiza-se inferiormente à saturação à esquerda do dedo 1 (S_1^-). Esta configuração ilustra o caso *III* da demonstração do Teorema 8, no qual as inclinações das retas σ_1 e σ_2 correspondem às velocidades dos dedos 1 e 2, respectivamente.

Para comparação direta das inclinações, a reta σ_2 foi transladada até a origem do sistema, representada pela linha tracejada em azul. A análise geométrica demonstra que a inclinação de σ_1 é maior que a de σ_2 , indicando que a velocidade do dedo 1 é superior à velocidade do dedo 2.

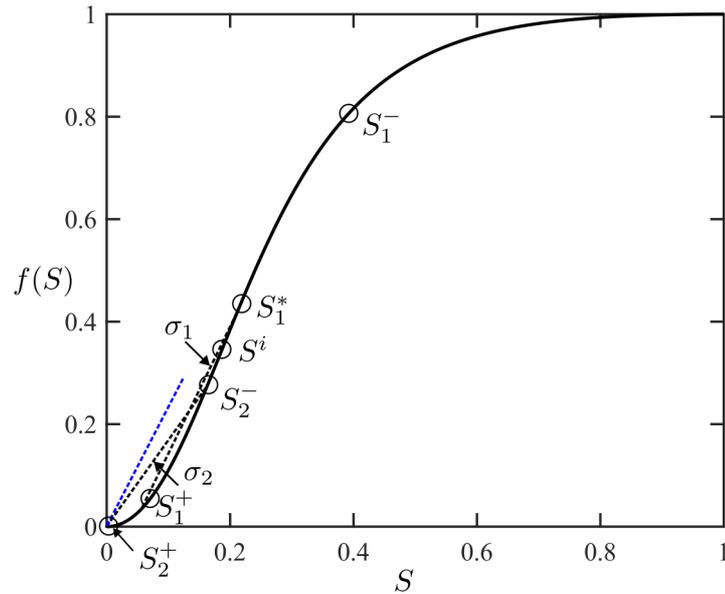


Figura 15 – Representação do caso *III* da demonstração do Teorema 8 com $S_2^- < S^i < S_1^-$, onde temos a função de fluxo fracionário f , com S^i o seu ponto de inflexão, $S_{1,2}^+$ o estado a direita do dedo 1 e 2 respectivamente e $S_{1,2}^-$ os seus estados a esquerda, onde a linha tracejada mostra a reta de inclinação de seus estados, σ_1 para o dedo 1 e σ_2 para o dedo 2 e o tracejado azul, a inclinação de σ_1 transladado para o ponto $(0, 0)$.

A Fig. 16 ilustra o comportamento da saturação associada ao dedo 1 em função da posição, conforme descrito no caso *III* da demonstração do Teorema 8. Os parâmetros de saturação adotados são:

- Saturação à esquerda do óleo: $S_o^- = 0.83$ e $S_o^+ = 0.17$;
- Saturação da água: $S_w^- = 0.16$ e $S_w^+ = 0$.

O perfil resultante é composto exclusivamente por uma onda de choque, padrão consistente com a previsão teórica representada na Figura 15. Assim, obtemos uma excelente concordância entre a solução analítica (linhas contínuas) e os resultados numéricos (tracejados).

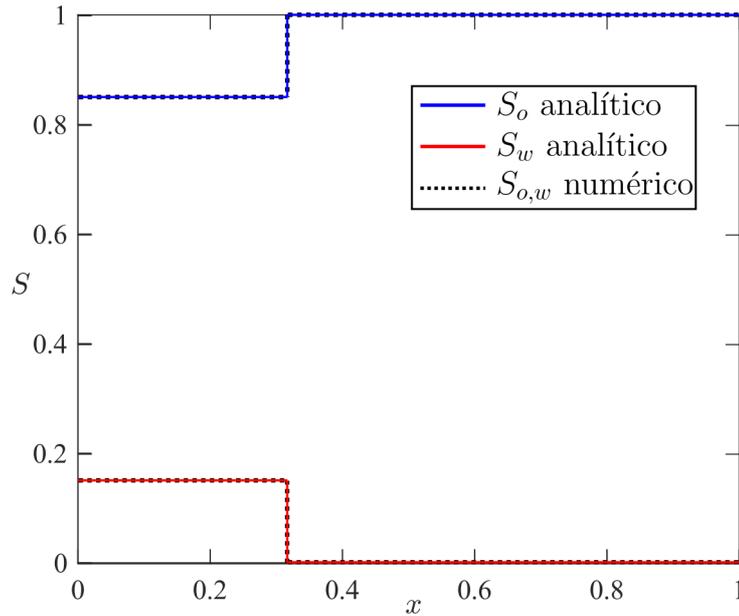


Figura 16 – Comparação numérica realizada pelo RCD com o resultado analítico do caso *III* da demonstração do Teorema 8 com os estados a esquerda e à direita tomados como $S_w^- = 0.16$, $S_w^+ = 0.0$ respectivamente no tempo $t = 0.2$.

Na Figura 17 apresentamos um exemplo numérico correspondente ao caso *I* da demonstração do Teorema 8, que é caracterizado por um choque seguido de rarefação, onde o dedo 1 é representado por linha contínua e o dedo 2 por linha tracejada. De forma similar, a Fig. 18 ilustra o exemplo numérico do caso *II*, no qual ocorre apenas um choque, mantendo a mesma representação gráfica para os dedos. O estudo abrangeu quatro instantes temporais $t = 0.05, 0.1, 0.2$ e 0.3 , permitindo observar a evolução comparativa dos dedos 1 e 2.

Os resultados, ilustrados nas Fig. 17 e 18, revelam que a frente de saturação do dedo 1 (representada por linhas contínuas para óleo e água) avança mais rápido que a frente de saturação do dedo 2 (indicada por linhas tracejadas). Essa disparidade de velocidades corrobora a relação teórica entre as inclinações da função de fluxo fracionário na Eq. 2.44, conforme estabelecido no Teorema 8.

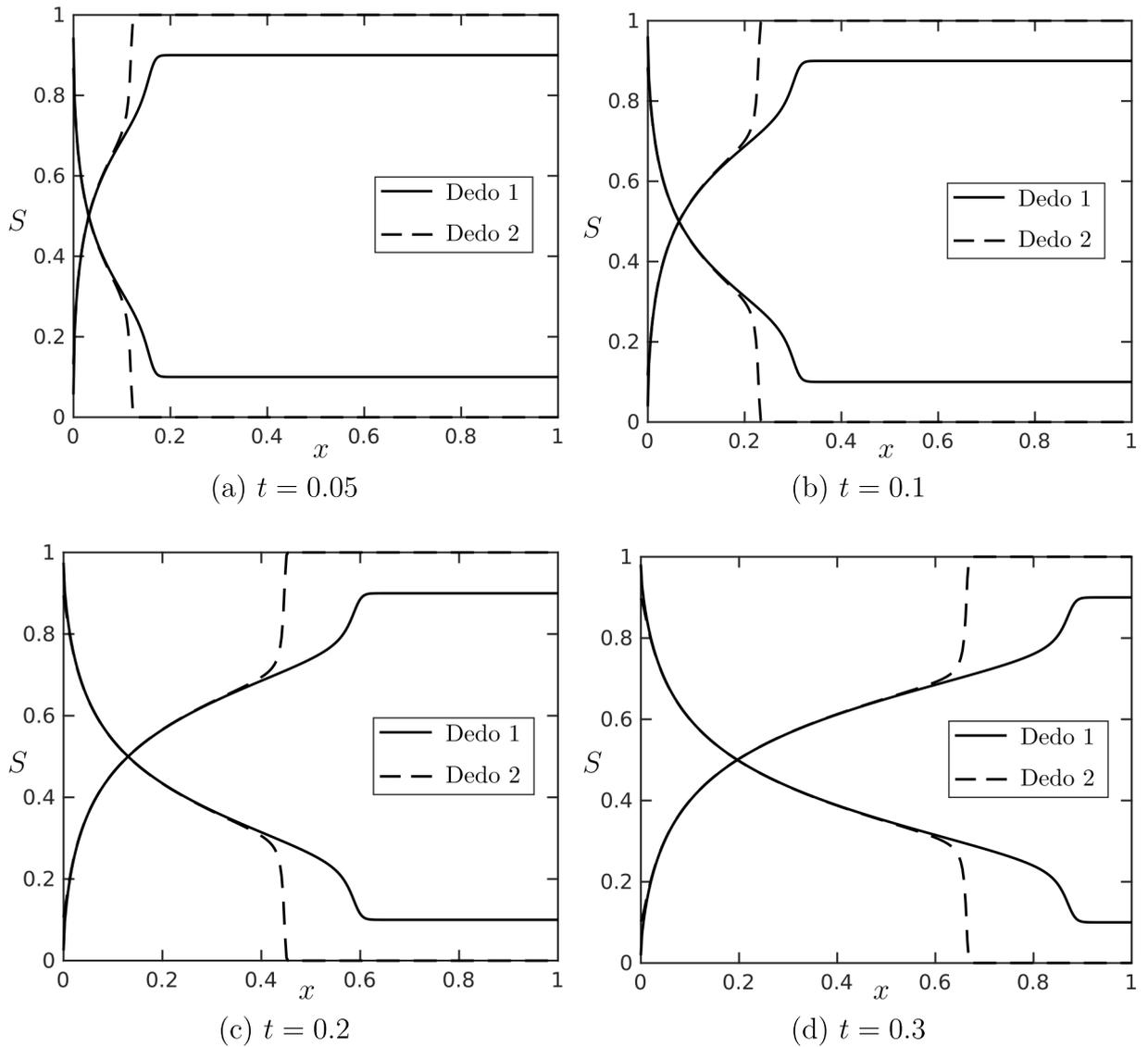


Figura 17 – Comparação entre a saturação de água e óleo do dedo 1 com a do dedo 2, caso *I* da demonstração do Teorema 8.

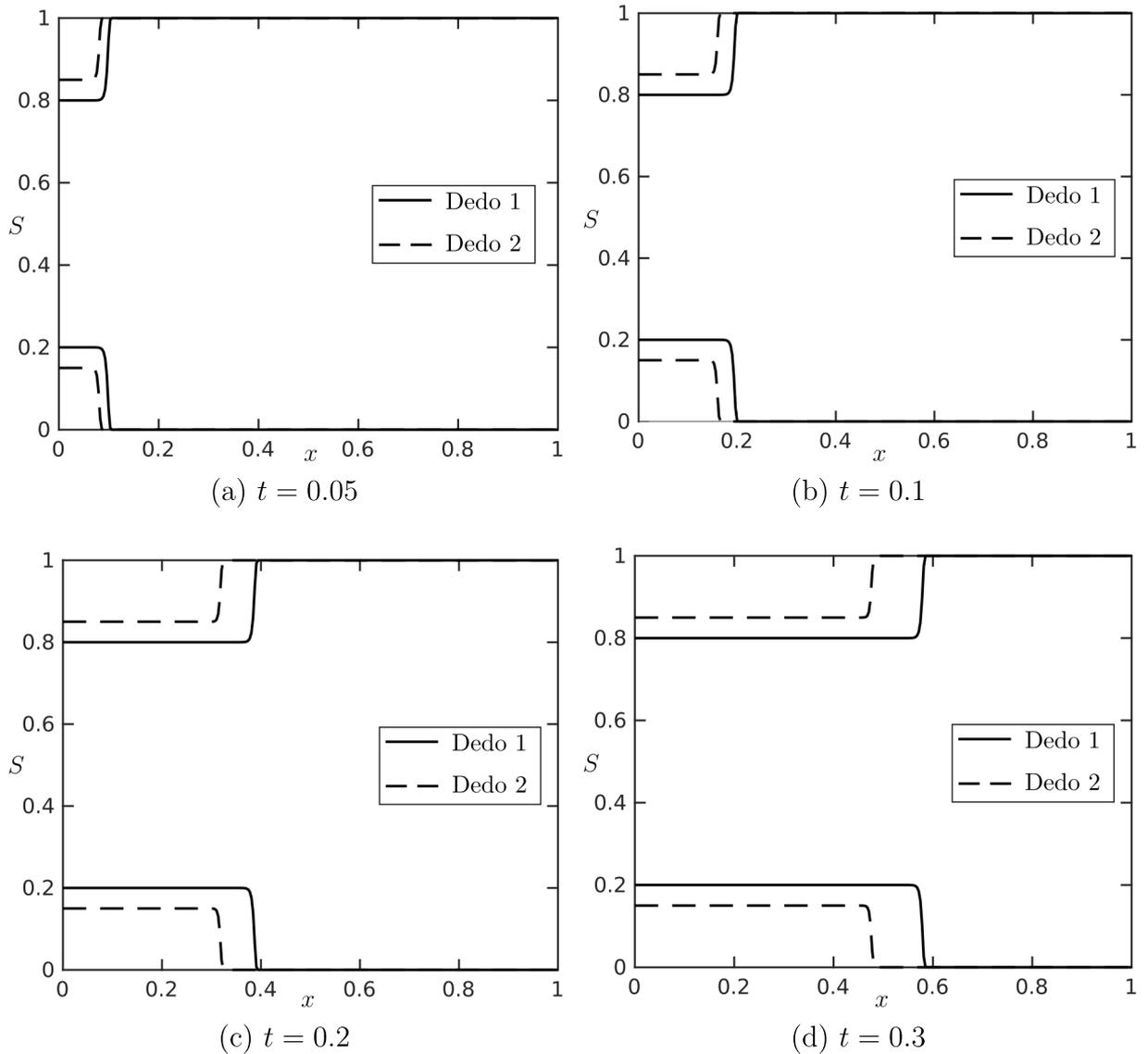


Figura 18 – Comparação entre a saturação de água e óleo do dedo 1 com a do dedo 2, caso II da demonstração do Teorema 8.

Observação. *Devido à semelhança da solução entre o caso II e III da demonstração do Teorema 8, com apenas uma onda de choque, a exemplificação numérica realizada no RCD do caso III será omitida.*

4 ABORDAGEM NUMÉRICA BIDIMENSIONAL

Este capítulo aprofunda a análise da dinâmica do dedilhado viscoso por meio de simulações bidimensionais (2D). Inicialmente, apresenta-se o simulador numérico utilizado para gerar as simulações; em seguida, expõe-se a abordagem para gerar o mapa de permeabilidades que aproxima a geração do dedilhado viscoso; e, por fim, comentam-se os resultados das simulações e a escolha dos dedos a serem comparados.

4.1 SIMULADOR FOSSIL

Neste trabalho, empregamos simulações numéricas bidimensionais para investigar o comportamento dos dedos. Para isso, utilizamos o FOam diSplacement SIMuLator (FOSSIL), um simulador desenvolvido no Laboratório de Matemática Aplicada da Universidade Federal de Juiz de Fora (LAMAP-UFJF). O FOSSIL foi concebido para ser um software extensível, confiável e versátil, acessível a todos os pesquisadores do laboratório. Seu objetivo principal é simular escoamentos multifásicos com espuma em meios porosos, combinando métodos numéricos avançados: um método híbrido misto de elementos finitos para resolver o sistema de Darcy e um esquema de volumes finitos central-upwind para aproximar as equações de transporte, além da aplicação de um método adaptativo implícito no tempo. Dessa forma, o software possibilita a realização de simulações para problemas com alta heterogeneidade, fluxos compressíveis, efeitos de adsorção e influências gravitacionais. Para maiores detalhes sobre a implementação, veja [10, 21, 29, 30, 33].

O software também foi utilizado em trabalhos analíticos para o estudo do deslocamento de espuma em várias camadas horizontais com permeabilidades diferentes, destacando-se os trabalhos de Castrillón Vásquez et al. [6, 7, 8]. Destaca-se ainda o estudo feito em [30] por de Paula et al., que explora os impactos da adsorção de surfactantes em meios porosos heterogêneos e a eficiência da espuma na redução da mobilidade do gás. Como também, a pesquisa de Miranda et al. [28] em que se utiliza uma estrutura de quantificação de incertezas para avaliar simulações de espuma multifásica em meios porosos.

As equações governantes do fluxo bifásico imiscível em meios porosos são descritas pelo balanço de massa e pela lei de Darcy generalizada para cada fase. O sistema de equações desconsiderando a pressão capilar e assumindo que os fluidos são incompressíveis:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_\alpha) + \nabla \cdot (\vec{u}_\alpha) = 0, \quad (4.1)$$

$$\vec{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}k}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha), \quad (4.2)$$

onde α identifica a fase (água w ou óleo o); S_α representa a saturação da fase α [-]; p_α denota a pressão da fase α [Pa]; $k_{r\alpha}$ é a permeabilidade relativa da fase α [-]; μ_α

corresponde à viscosidade dinâmica da fase α [Pa s]; u_α é a velocidade de Darcy da fase α [m/s]; ϕ indica a porosidade do meio [-]; k é o tensor de permeabilidade intrínseca [m²]; g é a aceleração gravitacional [m/s²] e z representa a coordenada de profundidade, com $\nabla z = (0, 0, 1)$.

Desta forma, considera-se o meio poroso saturado, isto é:

$$S_w + S_o = 1. \quad (4.3)$$

Desta forma, vamos considerar o sistema (4.2)-(4.3) em duas dimensões $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, assumindo o meio rígido (porosidade ϕ constante) simplificamos (4.1) e (4.2), para:

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha} k}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha. \quad (4.5)$$

A mobilidade de cada fase α é dada pela Eq. (2.36), enquanto a função e fluxo fracionário é dada pela Eq. (2.39).

A velocidade total é dada por:

$$\vec{u} = \vec{u}_w + \vec{u}_o, \quad \text{e} \quad \vec{u} = -k\lambda \nabla p, \quad (4.6)$$

onde p é a pressão global aproximada da Eq.(4.5), definida por:

$$p = p_w \lambda_w + p_o \lambda_o. \quad (4.7)$$

A equação da saturação da água, considerando $u_w = u f_w$ pode ser escrita como [11]

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot (u f_w). \quad (4.8)$$

Neste trabalho, utilizamos simulações com o escoamento de água em óleo, a partir da injeção de água pela fronteira à esquerda em um poço totalmente saturado de óleo com comprimento $x = 1$ e altura $y = 1$, com fronteiras superior e inferior sem fluxo, como pode ser observado na Figura 19 e assim observamos o fenômeno dedilhado viscoso. Para maiores informações sobre a implementação, consultar [10, 21, 29, 30, 33].

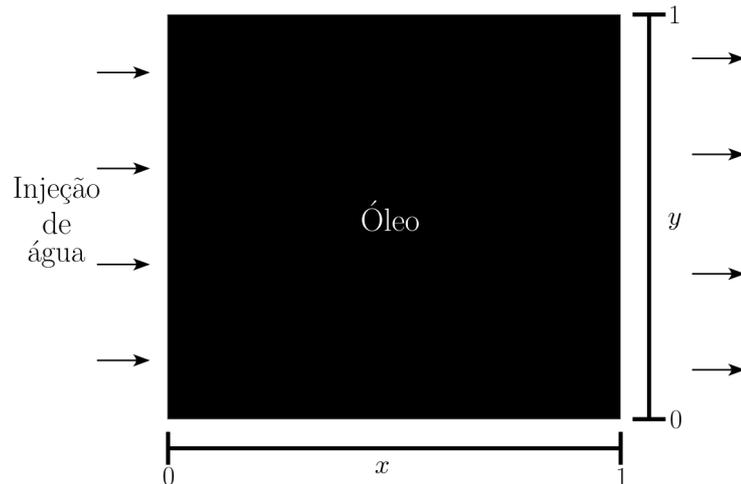


Figura 19 – Representação esquemática do reservatório contendo inicialmente óleo, com injeção de água à esquerda, utilizado nas simulações.

Observação. *Note-se que, a partir do modelo bidimensional (4.4)-(4.5), pode-se obter a Eq. (2.40) no caso unidimensional, conforme realizado em Bakharev et al [2]. Nas simulações desenvolvidas neste trabalho, optou-se por simplificar a física, de modo que a pressão capilar não foi considerada. Ressalta-se, ainda, que o fenômeno de dedilhado viscoso origina-se essencialmente das forças viscosas.*

4.1.1 Mapas de Permeabilidade

Para simular o fenômeno de dedilhado viscoso em meios porosos, utilizou-se mapas de permeabilidade que representassem um meio poroso estatisticamente homogêneo. Essa estratégia visa reproduzir numericamente padrões de instabilidade, conforme abordado em estudos prévios.

Como exemplos metodológicos, destaca-se o trabalho de Sorbie et al. [38], que utiliza campos de permeabilidade heterogêneos baseados em estruturas aleatórias correlacionadas (Randomly Correlated Fields – RCF), parametrizados pelo coeficiente de Dykstra-Parsons. O estudo de Van der Meer et al. [41], que aplica um campo logarítmico aleatório para gerar um permeabilidade com porosidade constante, também usando o coeficiente de Dykstra-Parsons como parâmetro. E a pesquisa de Bakharev et al. [2], que emprega um mapa de permeabilidade determinístico para a geração de dedos, com uma condição inicial que gera uma pequena perturbação no momento inicial do reservatório, permitindo a comparação de dedos entre diferentes simuladores.

Neste contexto, conduziu-se uma avaliação comparativa de diferentes configurações de mapas de permeabilidade, com o objetivo de selecionar aquele que melhor atendesse aos requisitos para estudo da geração e propagação de dedos. Esta seleção foi fundamentada a partir da necessidade de uma boa formação dos dedos, com padrões bem definidos, para um estudo numérico e analítico de suas velocidades.

Iniciamos com a tentativa utilizando um mapa perturbado por uma função senoidal no início do reservatório, com o restante do mapa homogêneo. Para a implementação do mapa de permeabilidade senoidal no início do reservatório, o Algoritmo 1 foi desenvolvido.

Algoritmo 1: Pseudocódigo para geração de um mapa de permeabilidade com perturbação senoide.

Input: Dimensões do grid: $n_x = 100$, $n_y = 100$.

Output: Arquivo `output.dat` contendo o mapa de permeabilidade.

Abrir o arquivo `output.dat` para escrita;

for $k \leftarrow 0$ **to** $n_y - 1$ **do**

 Calcular o ponto médio da linha: $midpoint \leftarrow k/2$;

for $j \leftarrow 0$ **to** $n_x - 1$ **do**

if $j < 5$ **then**

 Escrever 1 no arquivo;

else

if $5 \leq j < 15$ **then**

if $k > midpoint$ **then**

 Calcular o valor da senoide;;

$$senoide_value \leftarrow 0.5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{100}\right) + 1$$

 Escrever $senoide_value$ no arquivo;

else

 Escrever 1 no arquivo;

end

else

 Escrever 1 no arquivo;

end

end

end

end

Fechar o arquivo `output.dat`;

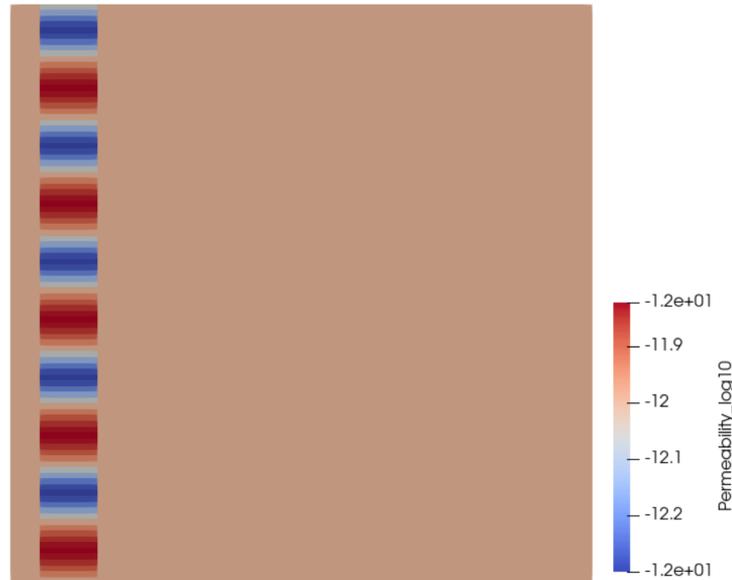


Figura 20 – Mapa de permeabilidade 1 utilizando função senoide no início do reservatório.

Em seguida, utilizamos um mapa de permeabilidade aleatório baseado no coeficiente de Dykstra-Parsons [14] amplamente utilizado na literatura devido à sua capacidade de representar reservatórios estatisticamente homogêneos.

Definição 8. *O coeficiente de Dykstra-Parsons vd é uma métrica amplamente utilizada para quantificar a heterogeneidade de um reservatório, especialmente em contextos de engenharia de petróleo. Definido por*

$$\sigma_{\ln} = \sqrt{-\ln(1 - vd^2)} \quad (\text{Desvio padrão do logaritmo natural}) \quad (4.9)$$

$$\mu_{\ln} = \ln(k_{50}) \quad (\text{Média do logaritmo natural})$$

onde vd denota o coeficiente de Dykstra-Parsons e k_{50} representa a mediana da permeabilidade.

Para a implementação do mapa de permeabilidade lognormal utilizando o coeficiente de Dykstra-Parsons, o Algoritmo 2 foi desenvolvido:

Algoritmo 2: Pseudocódigo para geração de um mapa de permeabilidade lognormal com base no modelo de Dykstra-Parsons.

Input: Dimensões do grid: $n_x = 100, n_y = 100$;

Coefficiente de Dykstra-Parsons: $vd = 0.5$;

Mediana da permeabilidade: $k_{50} = 0.5$.

Output: Arquivo `output.dat` contendo o mapa de permeabilidade.

Calcular o desvio padrão do logaritmo natural:

$$\sigma_{ln} \leftarrow \sqrt{-\ln(1 - vd^2)};$$

Calcular a média do logaritmo natural:

$$\mu_{ln} \leftarrow \ln(k_{50});$$

Criar uma matriz `permeability_field` de dimensões (n_y, n_x) com valores lognormais;

$$permeability_field \leftarrow \text{lognormal}(\mu_{ln}, \sigma_{ln}, (n_y, n_x));$$

Abrir o arquivo `output.dat` para escrita;

for `linha` \in `permeability_field` **do**

for `valor` \in `linha` **do**

 | Escrever `valor` no arquivo `output.dat`;

end

end

Fechar o arquivo `output.dat`;

Esse algoritmo calcula os parâmetros do campo log-normal com base nos valores do coeficiente de Dykstra-Parsons (vd) e da mediana de permeabilidade (k_{50}), gerando uma matriz representativa da permeabilidade do reservatório e salvando-a em um arquivo de saída no formato `.dat`.

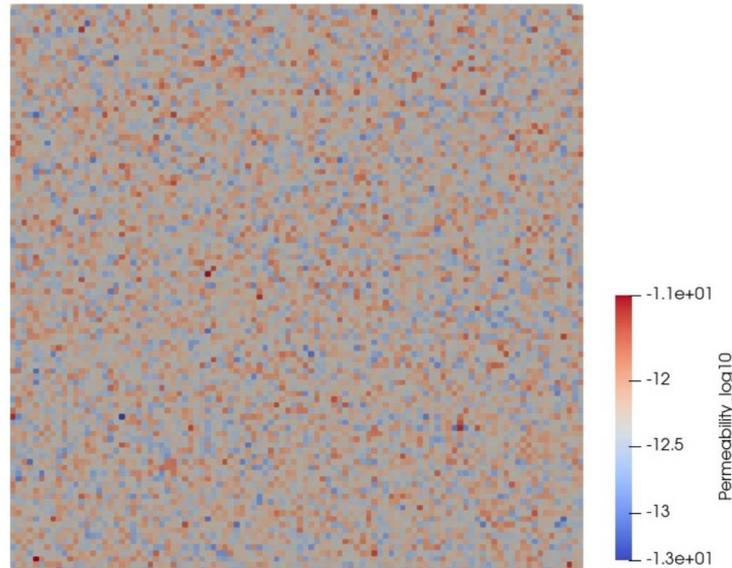


Figura 21 – Mapa de permeabilidade 2 utilizando o coeficiente de Dykstra-Parsons $vd = 0.5$ e mediana da permeabilidade $k_{50} = 0.5$.

Como o objetivo principal consiste na análise dos padrões de dedilhado viscoso em que os dedos estejam bem definidos, foi elaborado um mapa de permeabilidade aleatório, que melhor atendeu ao objetivo de analisar os dedos, devido à consistência no avanço dos dedos utilizando a linguagem de programação Python para gerar um arquivo no formato .dat. Para gerar o mapa de permeabilidade aleatório, utilizou-se o Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Pseudocódigo para geração do mapa de permeabilidade

Input: Dimensões do mapa: $n_x = 100$, $n_y = 100$

Output: Arquivo `output.dat` com valores aleatórios de permeabilidade

Abrir arquivo `output.dat` para escrita;

for $k \leftarrow 1$ **to** n_y **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** n_x **do**

 Gerar número aleatório *random_value* no intervalo $[0.8, 1.5]$;

 Escrever *random_value* no arquivo `output.dat`;

end

end

Fechar o arquivo `output.dat`;

O código acima cria uma matriz de dimensões 100×100 , onde cada célula é atribuída a um valor aleatório dentro do intervalo de 0.8 mD a 1.5 mD.

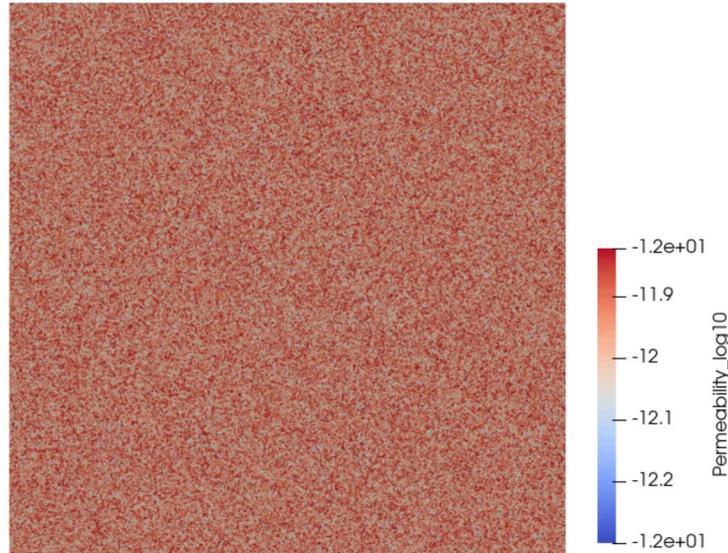


Figura 22 – Mapa de permeabilidade com permeabilidade variando entre 0.8 e 1.5 mD.

4.1.2 Geração de dedos

Realizamos um estudo numérico observando a velocidade dos dedos em um meio poroso com o mapa de permeabilidade aleatório, com a viscosidade da água $\mu_w = 1$ [Pa s] e a viscosidade do óleo $\mu_o = 10$ [Pa s], como reportado na Tabela 2, com o número de pontos na malha espacial de 100×100 com o tamanho de passo na malha igual a 1 em ambas as direções. O tempo final da simulação foi igual a 1 com o tamanho de passo no tempo de 0.01, com condições de contorno à esquerda de Neumann (definindo o fluxo constante correspondente a 1 m/s) e à direita de Dirichlet ($S = 0$). As condições de fronteira superior e inferior foram de Neumann com fluxo 0 na vertical. O tempo inicial da simulação é $t = 0$, enquanto o tempo final, quando o dedo atinge o final do reservatório (irrupção ou *breakthrough*) é $t \approx 0.44$. Para visualizar os dados da simulação numérica usamos o software ParaView.

Optou-se por não utilizar o mapa de permeabilidade perturbado por uma função senoide no início do reservatório, pois os seus dedos apresentam uma estabilidade excessiva e um formato que diverge do padrão observado de formação de dedos, isto é, a perturbação não precisa ser regular, nela existem ondas curtas e longas, por exemplo, no trabalho de Bakharev et al [2] ver Figuras. 23(a) e (b). De maneira semelhante, o mapa de permeabilidade lognormal, baseado no modelo de Dykstra-Parsons, foi descartado devido à difusão excessiva e ramificação dos seus dedos, ver Figuras. 23(c) e (d).

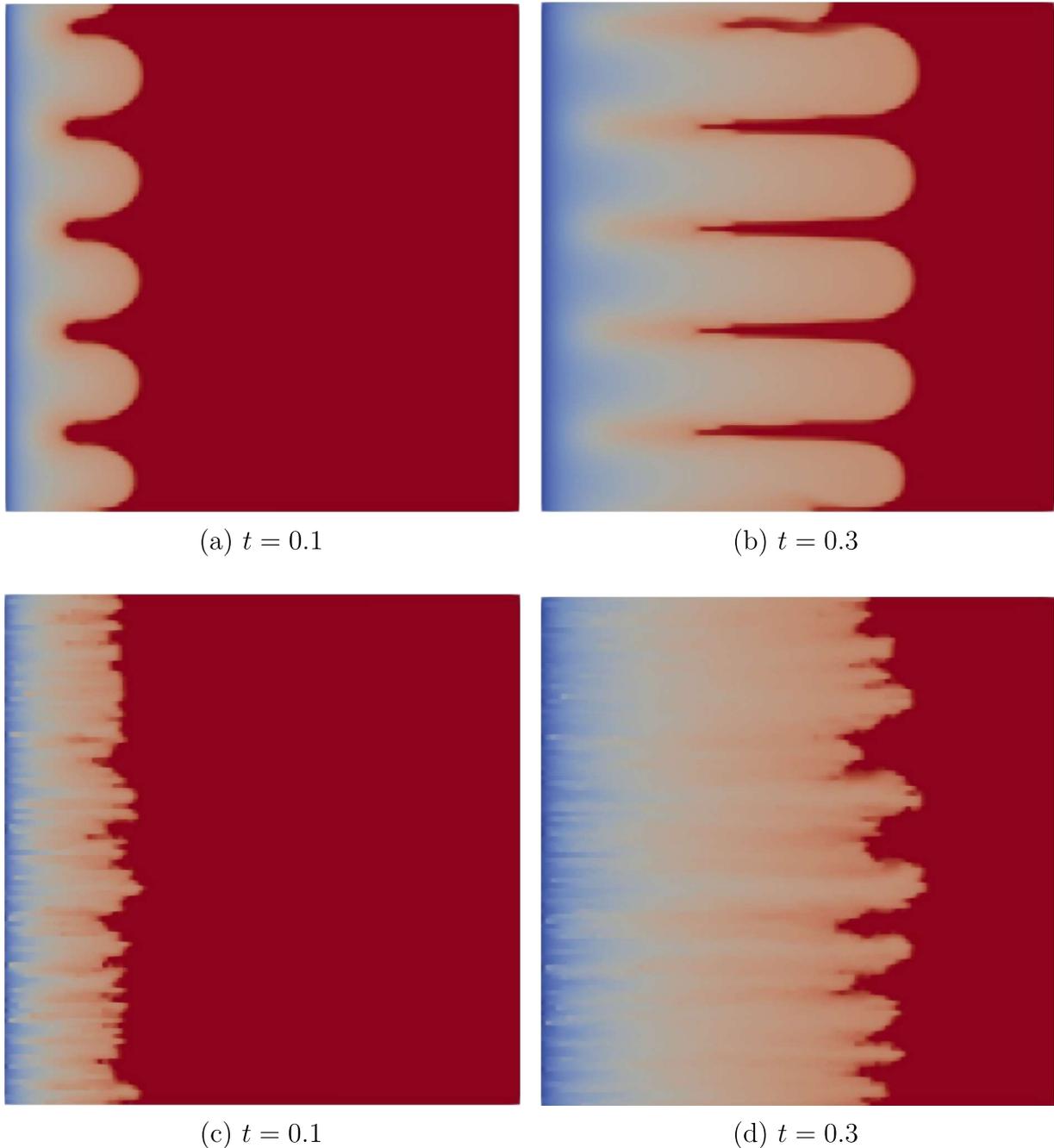


Figura 23 – Evolução temporal da simulação 2D para dois cenários: (a) e (b) correspondem a um reservatório perturbado por uma função senoidal, enquanto (c) e (d) ilustram um reservatório com permeabilidade lognormal, conforme o modelo de Dykstra-Parsons. Em ambos os casos, o reservatório se encontra inicialmente preenchido com óleo, e a água é injetada a uma velocidade constante.

Desta forma, ao utilizar o mapa de permeabilidade aleatório e analisar o reservatório em cada instante t , avalia-se a dinâmica entre o líquido injetado (água) e o fluido residente (óleo). No tempo $t = 0.1$ após a injeção inicial, conforme ilustrado na Fig. 24(a), observa-se uma saturação moderada de água na região inicial (área azul) e dominância de óleo no final do reservatório (área vermelha). Entre essas zonas, surge uma região de transição onde os fluidos interagem, com a água (menos viscosa) deslocando o óleo (mais viscoso),

indicando a formação de dedos ainda pouco definidos.

Na Fig. 24(b) mostra-se a evolução do padrão, a zona de mistura expande-se significativamente, e os dedos começam a obter uma forma mais definida. Contudo, mantêm-se próximos em posição, sem sobreposição ou distinção clara entre si. A evolução torna-se mais nítida na Fig. 24(c), em que no instante $t = 0.3$ os dedos diferenciam-se em velocidade, criando vales entre si devido aos diferentes deslocamentos dos dedos. Esse padrão acentua-se em $t = 0.4$, como mostrado na Fig. 24(d), onde os vales alargam-se e a disparidade de velocidades entre os dedos torna-se visualmente evidente. Por fim, em $t \approx 0.44$, registra-se o *breakthrough* do primeiro dedo na extremidade do reservatório, como pode ser observado na Fig. 24(e).

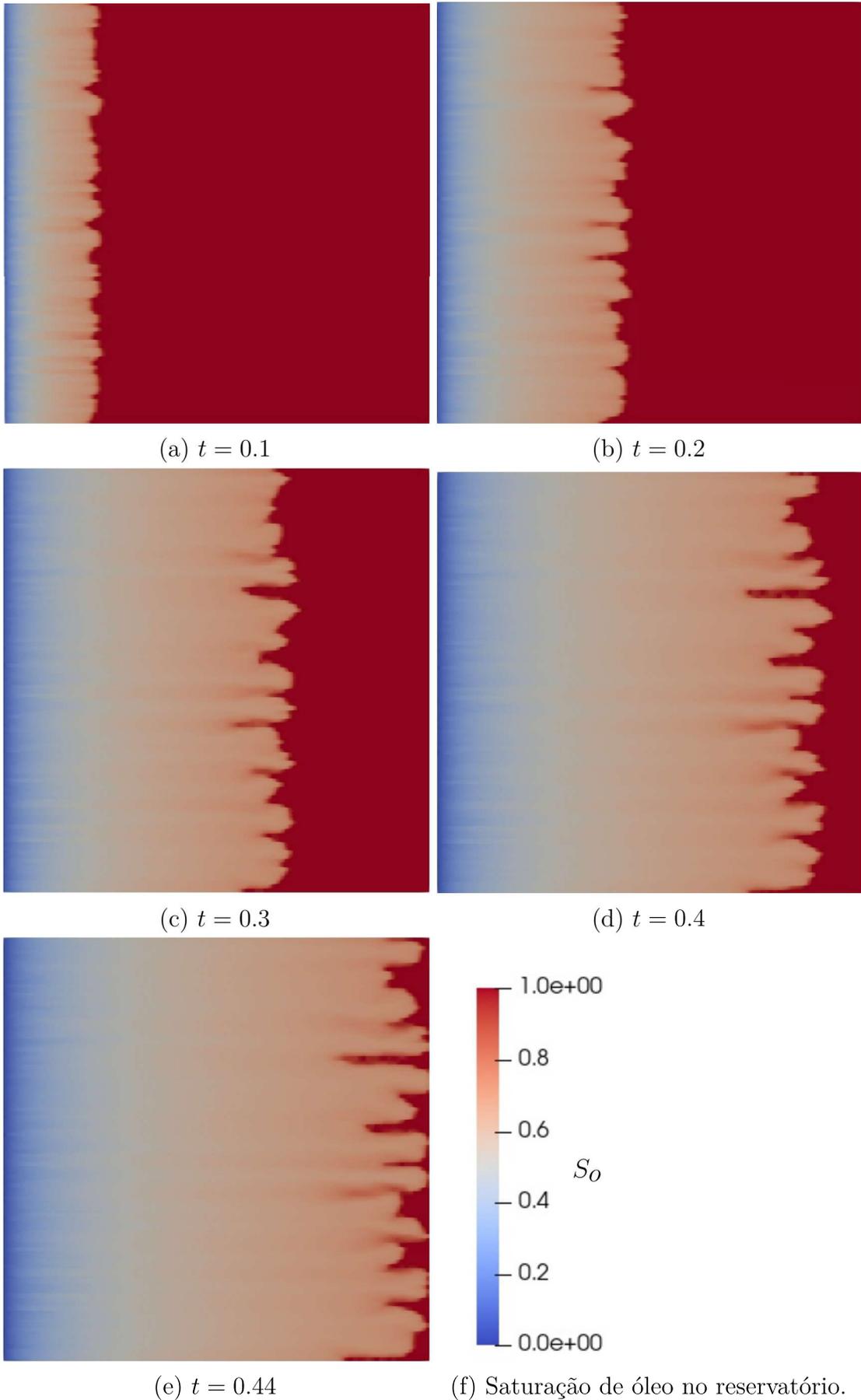


Figura 24 – Evolução temporal da simulação 2D de um reservatório usando um k variando aleatoriamente no intervalo $[0.8, 1.5]$ mD, inicialmente contendo óleo onde é injetada água a uma velocidade constante.

5 APLICAÇÃO DA ESTIMATIVA DA VELOCIDADE DOS DEDOS EM CASOS 2D

Neste capítulo, aborda-se a estimativa da velocidade de propagação dos dedos a partir da simulação numérica 2D, extrai-se informações sobre os estados à esquerda e à direita do problema de Riemann para calcular a velocidade dos dedos por meio da abordagem analítica apresentada no Capítulo 3, e comparam-se esses resultados.

Para o estudo comparativo, selecionaram-se dois dedos específicos, conforme ilustrado na Fig. 25 no tempo $t = 0.3$, com o dedo 1 posicionado inicialmente à frente do dedo 2, caracterizado por um formato bem definido e com menos efeitos difusivos. A escolha do dedo 1 e 2 justifica-se por seu perfil de avanço mais definido, o que reduz interferências de difusão numérica e facilita a obtenção de resultados quantitativamente confiáveis.

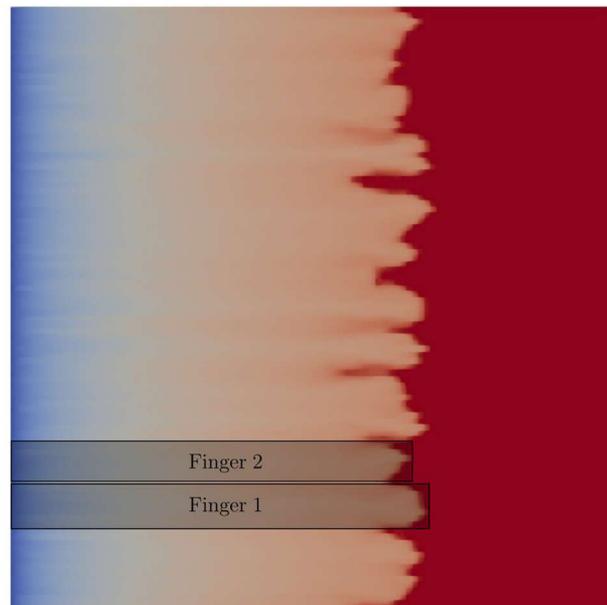


Figura 25 – dedo 1 e dedo 2 selecionados no reservatório com mapa de permeabilidade aleatório num tempo $t = 0.3$, referente à Fig 24(c).

5.1 ESTIMATIVA DA VELOCIDADE NUMÉRICA DOS DEDOS

Para realizar o cálculo da velocidade numérica dos dedos, foi definido um caminho linear (Over Line do ParaView de $x = 0$ até $x = 1$) e foram extraídos os resultados da média da saturação da água nessa linha, sendo $y = 0.175$ para o dedo 1 e $y = 0.255$ para o dedo 2 (linhas escolhidas no centro do dedo). No entanto, temos percebido que um caminho linear não representa apropriadamente um dedo, dessa forma optamos por definir n -caminhos lineares no dedo 1 e 2, sendo n a quantidade de células na vertical que comportam o dedo escolhido.

Para o dedo 1 foram utilizados 7 Over Lines (linhas horizontais), enquanto no

dedo 2 foram utilizados 6 Over Lines (linhas horizontais). Sendo importante tomar o cuidado de tomar o meio de cada célula vertical, evitando tomar as fronteiras da célula para utilizar a ferramenta Over Line, dessa forma evitando oscilações no resultado numérico.

Assim, tomando uma saturação de óleo fixa no meio da frente do choque nos tempos $t = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40$, tempos abaixo de 0.2 foram omitidos pois a formação de dedo não era evidente, ver esquema na Figura 26, foi calculada a velocidade numérica em cada linha, depois calculou-se a média entre as linhas para cada tempo t , ver Tabela 3 para o dedo 1 e Tabela 4 para o dedo 2.

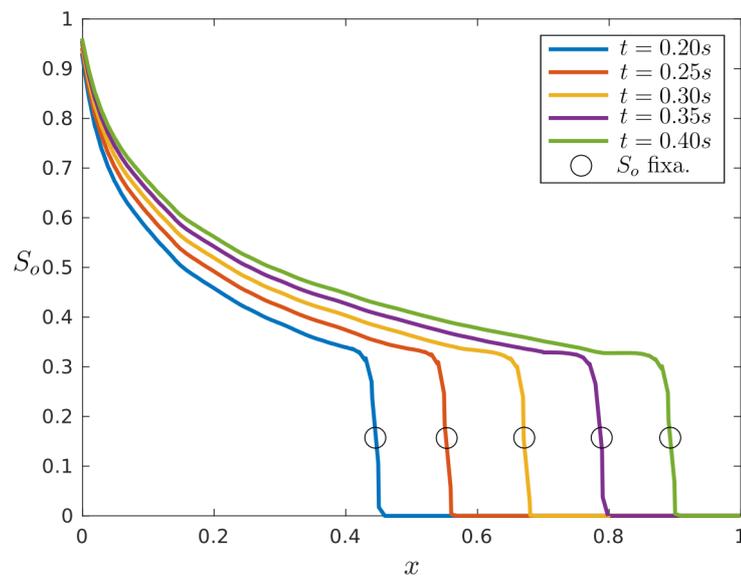


Figura 26 – Esquema do cálculo da velocidade numérica, com o perfil das saturações em tempos diferentes com a saturação fixa no choque para o cálculo de velocidade.

| dedo 1 | | | | | |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| n -linhas | Velocidade | | | | |
| | $t = 0.20$ | $t = 0.25$ | $t = 0.30$ | $t = 0.35$ | $t = 0.40$ |
| 1-linha | 2.1500 | 2.1520 | 2.1667 | 2.2086 | 2.0625 |
| 2-linha | 2.2100 | 2.2240 | 2.2333 | 2.2314 | 2.2500 |
| 3-linha | 2.2350 | 2.2400 | 2.2567 | 2.2600 | 2.2500 |
| 4-linha | 2.2200 | 2.2000 | 2.2333 | 2.2457 | 2.2275 |
| 5-linha | 2.2300 | 2.2280 | 2.2333 | 2.2257 | 2.2500 |
| 6-linha | 2.1750 | 2.2000 | 2.2233 | 2.2543 | 2.2650 |
| 7-linha | 2.0900 | 2.1200 | 2.1633 | 2.2229 | 2.2675 |
| Média | 2.188 | 2.195 | 2.216 | 2.236 | 2.225 |

Tabela 3 – Tabela de velocidades do dedo 1 agrupadas por tempo e número de linhas.

| dedo 2 | | | | | |
|--------------|------------|----------|----------|----------|----------|
| n -linhas | Velocidade | | | | |
| | $t=0.20$ | $t=0.25$ | $t=0.30$ | $t=0.35$ | $t=0.40$ |
| 1-linha | 2.1150 | 2.1040 | 2.0667 | 2.0657 | 2.0375 |
| 2-linha | 2.0950 | 2.1240 | 2.1067 | 2.0886 | 2.0750 |
| 3-linha | 2.0950 | 2.1360 | 2.1300 | 2.1343 | 2.1150 |
| 4-linha | 2.1450 | 2.1480 | 2.1633 | 2.1571 | 2.1475 |
| 5-linha | 2.1000 | 2.1200 | 2.1233 | 2.1371 | 2.1300 |
| 6-linha | 2.0050 | 1.9880 | 2.0433 | 2.0343 | 2.0825 |
| Média | 2.093 | 2.103 | 2.106 | 2.103 | 2.098 |

Tabela 4 – Tabela de velocidades do dedo 2 agrupadas por tempo e número de linhas.

A partir dos valores de velocidade média dos dedos 1 e 2, extraídos das Tabelas 3 e 4, gerou-se a Figura 27. Nesta representação gráfica, o dedo 1 é identificado por uma linha tracejada com marcadores em formato de quadrado (\square), enquanto o dedo 2 é representado por uma linha tracejada com marcadores em formato de círculo (\circ).

A disposição dos dados permite comparar diretamente a evolução temporal das velocidades médias de cada frente, destacando a relação dinâmica entre os dois perfis de avanço.

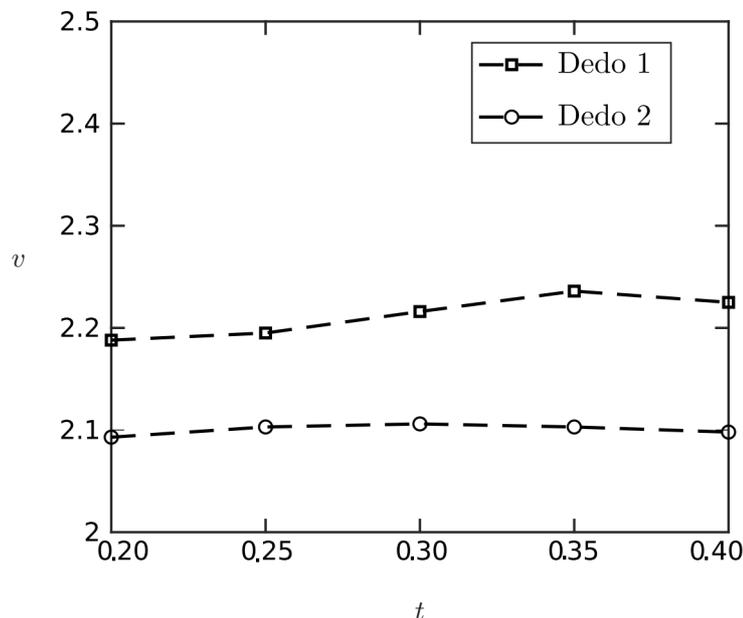


Figura 27 – Velocidade numérica calculada a partir do simulador FOSSIL considerando os tempos $t=0.20, 0.25, 0.30, 0.35$ e 0.4 para o dedo 1 e 2.

5.2 ESTIMATIVA DA VELOCIDADE ANALÍTICA DOS DEDOS

Nesta seção, apresentamos os resultados analíticos fundamentados no Teorema 8. Foram adotadas diversas abordagens para determinar as saturações à esquerda, S^- , e à direita, S^+ , com o intuito de estimar as velocidades correspondentes ao dedo 1 e dedo 2. São

apresentadas aqui duas abordagens na determinação dos estados do problema de Riemann de cada dedo, sendo elas o cálculo da área abaixo da curva da (método 1), apresentada na subseção 5.2.1 e a posição do choque sem perturbação (método 2) apresentada na subseção 5.2.2.

5.2.1 Cálculo da área abaixo da curva (método 1)

Para extrair os dados da simulação numérica, usam-se os seguintes passos: primeiro, define-se uma saturação de óleo representativa da frente do choque. Para cada linha em y , define-se o valor mínimo e máximo da saturação. Depois, calcula-se a média desse intervalo para cada linha em y . Os resultados da saturação média do óleo são mostrados como pontos vermelhos na Figura 28 para $t = 0.3$, como feito em [6]. Assim, traçamos uma curva em volta dos dedos para os tempos $t = 0.2, 0.25, 0.30, 0.35$ e 0.40 , como pode ser vista na Figura 28 a representação dessa frente para o tempo $t = 0.30$.

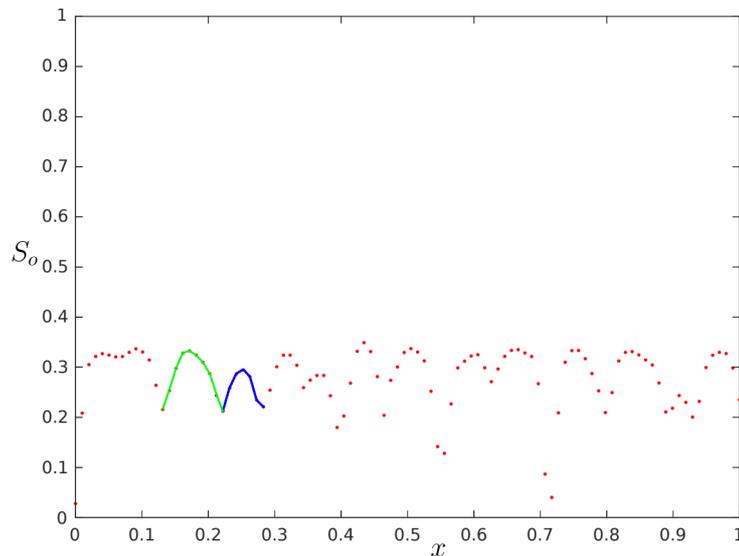


Figura 28 – Saturação média da frente do óleo para o tempo $t = 0.3$ (pontos vermelhos). A linha verde destaca o dedo 1 enquanto a linha azul o dedo 2

Podemos observar na Fig. 28 a frente do dedo 1 e 2 representados pela curva em verde e azul, respectivamente, onde os pontos contornados representam a curva da média de saturação em volta do dedo estudado.

Para calcularmos o valor da saturação à esquerda S_w^- , foi utilizada uma integração dos valores contornados pela linha em verde (dedo 1) e azul (dedo 2) na Figura 28, obtendo-se o valor da saturação da área abaixo da curva, usando a seguinte expressão

$$S_w^- = \frac{1}{l} \int_0^l S_w(z) dz, \quad (5.1)$$

sendo l a distância entre o primeiro e o último ponto.

A saturação à direita, S_w^+ , foi definida como $S_w^+ = 0$, correspondendo a um reservatório inicialmente saturado por óleo. Utilizando os valores de saturação à esquerda

e à direita na solução analítica, obteve-se o perfil de velocidades dos dedos, conforme ilustrado na Figura 29. Na representação gráfica: o dedo 1 é identificado por uma linha com marcadores quadrados (\square). Já o dedo 2 é representado por uma linha com marcadores circulares (\circ).

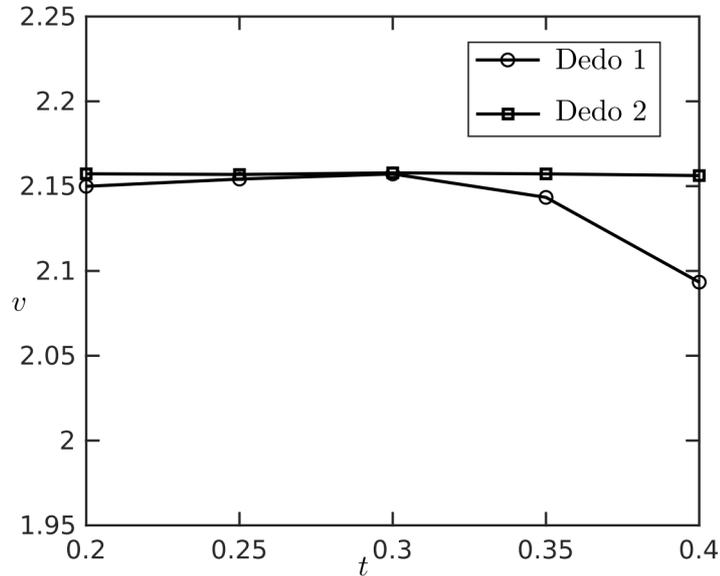


Figura 29 – Velocidade dos dedos a partir do cálculo analítico do método 1.

Este resultado mostra que a velocidade do dedo 1 é maior que a do dedo 2 durante todo o tempo calculado, porém a diferença de velocidades é muito inferior ao esperado na simulação numérica. No tempo $t = 0.4$, a diferença de velocidade entre os dedos teve uma melhoria considerável.

5.2.2 Posição do choque sem perturbação (método 2)

Utilizamos a posição do choque do modelo sem perturbação (B-L simples sem mapa de permeabilidade aleatório), ao decorrer do tempo, para usar como posição fixa para o cálculo das saturações do dedo 1 e 2, utilizando uma média da saturação à esquerda e à direita a partir desta posição fixa, como pode ser observada na Fig. 30 e assim usá-la no Teorema 8 e calcular suas respectivas velocidades.

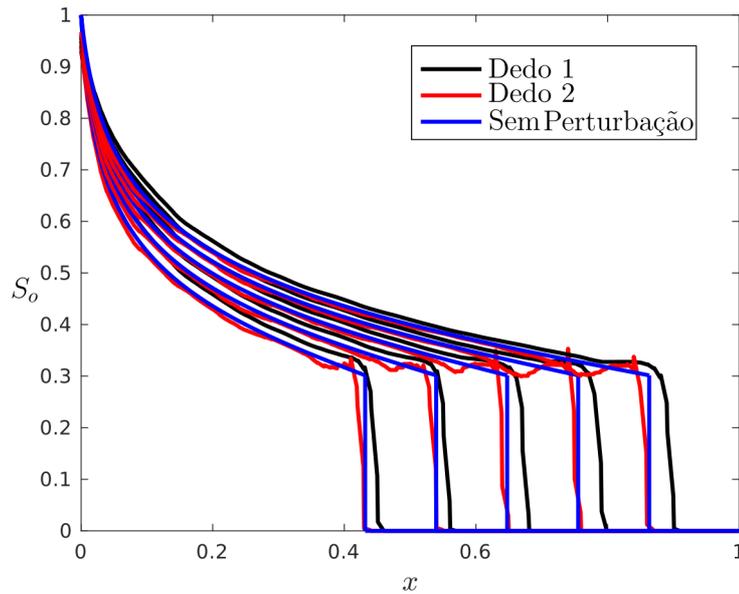


Figura 30 – Perfil da saturação do óleo, em preto do dedo 1, em vermelho o dedo 2, em azul a frente da saturação do óleo sem perturbação da permeabilidade.

Os resultados da Tabela 5 foram obtidos a partir desse cálculo médio das saturações à esquerda e à direita, sendo todas do caso *I* da demonstração do Teorema 8, compostas por uma onda de rarefação seguida de uma onda de choque; caso a posição fosse tomada mais à direita, obteríamos os outros casos da demonstração do teorema, com apenas uma onda de choque. Esta posição é extremamente sensível devido à saturação à direita influenciar drasticamente na velocidade do dedo.

| Tempo | Velocidade dedo 1 | Velocidade dedo 2 |
|------------|-------------------|-------------------|
| $t = 0.20$ | 2.20 | 2.15 |
| $t = 0.25$ | 2.22 | 2.15 |
| $t = 0.30$ | 2.31 | 2.18 |
| $t = 0.35$ | 2.43 | 2.16 |
| $t = 0.40$ | 2.60 | 2.15 |

Tabela 5 – Velocidades adimensionais analíticas no tempo $t = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40$ para o dedo 1 e 2.

A partir das velocidades médias obtidas (Tabela 5), gerou-se o gráfico da Figura 31, que compara a evolução temporal das velocidades dos dedos 1 e 2. Na representação gráfica, o dedo 1 é identificado por uma linha contínua com marcadores em quadrado (\square), enquanto o dedo 2 é representado por uma linha contínua com marcadores em círculo (\circ).

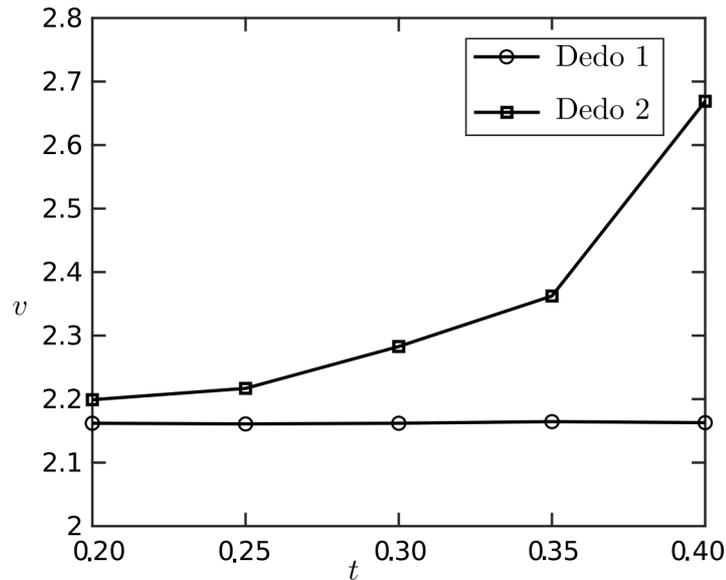


Figura 31 – Velocidades analíticas utilizando posição do choque sem perturbar, com a velocidade do dedo 1 maior que a do dedo 2 (método 2).

Podemos observar que a velocidade do dedo 2 permanece praticamente constante desde o tempo inicial de geração do padrão de dedos em $t = 0.2$ até o tempo de $t = 0.4$, enquanto o dedo 2 obteve um aumento de velocidade ao chegar perto do tempo de *breakthrough*.

5.3 ESTIMATIVA DAS VELOCIDADE DOS DEDOS

Nesta seção, iremos comparar os resultados analíticos, obtidos na Subseção 5.2.1 e 5.2.2 com os resultados numéricos obtidos na Seção 5.1.

5.3.1 Comparação do resultado analítico (método 1) com o numérico

Nesta subseção iremos demonstrar os resultados obtidos comparando a velocidade encontrada no cálculo da velocidade analítica utilizando o cálculo da integral da área que representa a média de saturação dos dedos com a velocidade obtida no cálculo da velocidade numérica dos dedos.

A Figura 32 apresenta a comparação entre as velocidades obtidas de forma analítica (método 1) e as velocidades numéricas, conforme abordado na seção 5.1. Na figura, a linha contínua representa as velocidades analíticas, enquanto a linha tracejada indica as velocidades numéricas. Em ambos os casos, os marcadores quadrados (\square) correspondem às velocidades referentes ao dedo 1, e os marcadores circulares (\circ) às velocidades referentes ao dedo 2, referentes ao tempo $t = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40$.

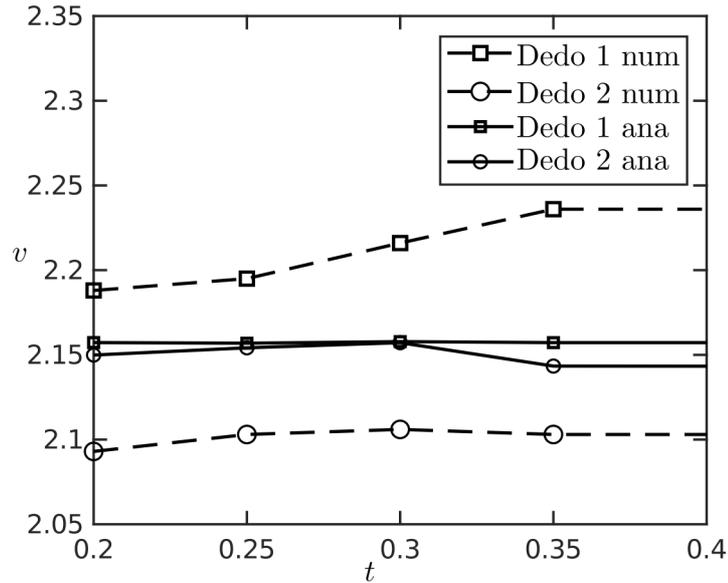


Figura 32 – Comparação da velocidade analítica com a área abaixo da curva (método 1) representada pela linha contínua com a velocidade numérica representada pela linha tracejada, com quadrado representando o dedo 1 e círculo representando o dedo 2.

Embora a ordem que estabelece que a velocidade do dedo 1 seja maior que a do dedo 2 seja mantida, observa-se que o método analítico 1 não é o mais adequado para determinar os valores dessas velocidades. Isso ocorre porque os resultados obtidos apresentam velocidades excessivamente próximas entre si, além de divergirem dos valores fornecidos pela solução numérica.

Usando a equação do erro percentual relativo para comparar as velocidades médias obtidas pelos métodos analítico e numérico, constatou-se que o erro aproximado foi de $E_{r1} \approx 2.55\%$ para o dedo 1 e $E_{r2} \approx 1.82\%$ para o dedo 2.

5.3.2 Comparação do resultado analítico (método 2) com o numérico

Nesta subseção, iremos apresentar os resultados obtidos comparando a velocidade encontrada no cálculo da velocidade analítica utilizando a média das saturações à esquerda e à direita, definindo a saturação S^+ e S^- para utilizar no modelo analítico.

A Fig. 33 compara as velocidades dos dedos numéricos (linhas tracejadas) com as velocidades analíticas (linhas contínuas). Inicialmente, observa-se uma concordância significativa entre os modelos, com o dedo 1 (representado por marcadores quadrados, \square) exibindo velocidade superior à do dedo 2 (marcadores circulares, \circ), conforme previsto analiticamente. O erro relativo entre as abordagens é de aproximadamente 5%.

Contudo, próximo ao *breakthrough*, a velocidade analítica do dedo 1 aumenta abruptamente, enquanto a do dedo 2 mantém-se aproximadamente constante até o final do reservatório.

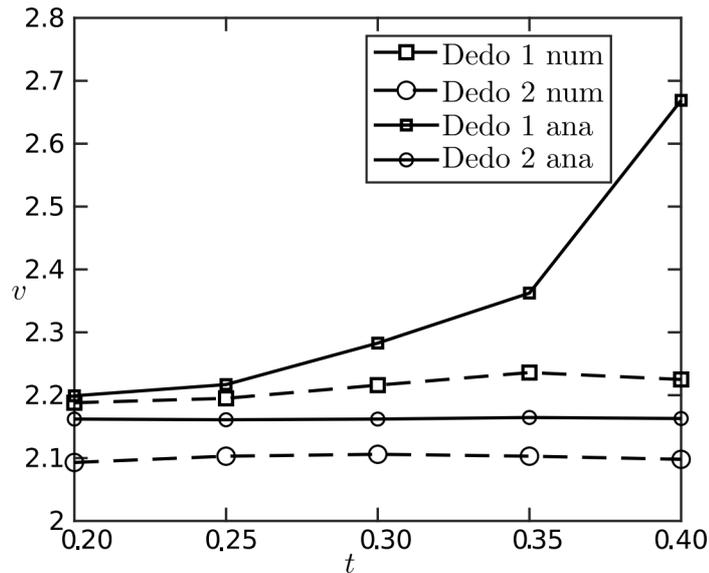


Figura 33 – Comparação da velocidade analítica utilizando a posição do choque sem perturbação com a velocidade numérica obtida no FOSSIL.

O aumento abrupto da velocidade do dedo 1 ocorreu devido ao aumento da saturação à direita S^+ , já que a saturação à direita é extremamente sensível em relação à velocidade, pois está intrinsecamente ligada à inclinação da reta tangente, como pode ser observada na Fig. 11; qualquer pequena alteração nela altera drasticamente a velocidade do dedo; a saturação à esquerda S^- está ligada à rarefação, logo sua alteração não influencia na velocidade do dedo, podendo assim tomar a média da saturação à esquerda a partir do ponto que melhor representar a realidade física sem alterar o resultado de forma significativa.

Utilizando a equação do erro percentual relativo para comparar as velocidades médias obtidas pelos métodos analítico e numérico, verificou-se que o erro aproximado foi de $E_{r1} \approx 5.71\%$ para o dedo 1 e $E_{r2} \approx 2.87\%$ para o dedo 2.

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, realizamos uma investigação analítica e numérica do deslocamento de um fluido mais viscoso por um fluido menos viscoso em um meio poroso, fenômeno conhecido como dedilhado viscoso, decorrente da instabilidade de Saffman-Taylor. Para isso, propusemos uma modelagem matemática simplificada que considera apenas a diferença de viscosidade entre o fluido residente e o fluido injetado, representados por dois dedos com seus respectivos estados à direita e à esquerda, indicando a troca de massa entre os dedos, desconsiderando os efeitos das forças capilares. A partir dessa abordagem, obtivemos um resultado analítico para a velocidade das frentes, definindo as condições sob as quais um dedo se encontra à frente do outro. A validação dessa análise foi realizada por meio de simulações numéricas 1D, obtendo uma excelente concordância com a solução analítica. Também foi realizada uma comparação entre simulações 2D e a solução analítica a partir de estimativas das saturações iniciais e de injeção, que apresentaram um erro percentual relativo de, no máximo, 5% na estimativa das velocidades, evidenciando que, mesmo com sua simplicidade, o modelo proposto capta adequadamente o fenômeno estudado.

Esta investigação pode ser estendida em trabalhos futuros, visando:

A inclusão do termo de troca de massa, omitido neste estudo, pode enriquecer a modelagem apresentada ao proporcionar uma compreensão mais aprofundada sobre a interação entre os dedos no reservatório, permitindo uma estimativa mais precisa de suas velocidades. Além disso, ampliar o estudo dos limites do resultado analítico por meio de testes em diferentes regimes, simulações em reservatórios de maior extensão e da incorporação da pressão capilar ao modelo, o que pode contribuir significativamente para uma melhor caracterização do fenômeno.

REFERÊNCIAS

- 1 Araujo, L. N., Rodríguez-Bermúdez, P, Rodríguez-Núñez, Y. Numerical Study for Two-Phase Flow with Gravity in Homogeneous and Piecewise-Homogeneous Porous Media. *TEMA (São Carlos)*, v. 21, n. 1, p. 0021, Jan.-Abr. 2020.
- 2 Bakharev, B. F., Campoli, L., Enin, A., Matveenko, S. (2020). Numerical investigation of viscous fingering phenomenon for raw field data. *Transport in Porous Media*, 133(3), 695–717.
- 3 Bear, J. (2018). Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media. *Theory and Applications of Transport in Porous Media (Vol. 31)*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-72826-1>.
- 4 Brooks, R. H.; Corey, A. T. Hydraulic Properties of Porous Media. *Colorado State University Hydrology Paper*, n. 3, 1964.
- 5 Buckley, S. E., Leverett, M. C. (1942). Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, 146(1), 107–116.
- 6 Castrilon Vásquez, A. J., Lozano, L. F., Pereira, W. S. (2022). The traveling wavefront for foam flow in two-layer porous media. *Computational Geosciences*, 26(5), 1045–1063.
- 7 Castrilon Vásquez, A. J. , Lozano, L. F., Chapiro, G. (2024). The traveling foam wavefront in fractured porous medium. *Journal of Computational Physics* <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113437>.
- 8 Castrilon Vásquez, A. J., Lozano, L. F., Chapiro, G. (2024). On the Viscous Crossflow During the Foam Displacement in Two-Layered Porous Media. *Transport in Porous Media*, 147(1), 2835–2857.
- 9 Cedro, J. B. S. (2020). Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos com espuma em meios porosos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.
- 10 Cedro, Jhuan B.; de Paula, Filipe F.; Chapiro, G. On the modeling of the foam dynamics in heterogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, v. 196, p. 104882, 2025.
- 11 Chen, Z., Huan, G., Ma, Y. (2006). Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia, PA: SIAM.
- 12 Dafermos, C. M. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. 2^a ed. Springer, 2005.
- 13 Darcy, H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris: Victor Dalmont, 1856.
- 14 Dykstra, H.; Parsons, R. The prediction of oil recovery by water flood. In: Secondary Recovery of Oil in the United States. 2. ed. Washington, D.C.: American Petroleum Institute, 1950.
- 15 Evans, L. (2010). Partial Differential Equations (2^a ed.). Graduate Studies in Mathematics, AMS.

- 16 Fenichel, N. Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations, *Journal of Differential Equations*, 31 (1979), 53–98.
- 17 S. Fliss, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, P. Moireau, Introduction aux équations aux dérivées partielles hyperboliques et à leur approximation numérique, *ENSTA Paris*, 2020.
- 18 Fritis, G. C. (2023). Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.
- 19 Godlewski, E.; Raviart, P.-A. (1996). Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Applied Mathematical Sciences*, 118. New York: Springer.
- 20 Homsy, G. M. (1987). Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(1), 271–311. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.19.010187.001415>
- 21 Igreja, I.; Quinelato, T. O.; Chapiro, G. A numerical investigation into the influence of the surfactant injection technique on the foam flow in heterogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, v. 171, p. 104358, 2023.
- 22 Lake, L. W. (1989). Enhanced Oil Recovery. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- 23 Lambert, W., Alvarez, A., Ledoino, I., Tadeu, D., Marchesin, D., Bruining, J. (2020). Mathematics and Numerics for Balance Partial Differential-Algebraic Equations (PDAEs), *Journal of Scientific Computing*, 84, 29.
- 24 LeVeque, R. J. (1992). Numerical Methods for Conservation Laws (2^a ed.). Lectures in Mathematics, ETH Zurich. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.
- 25 Leverett, M. C., Capillary Behavior in Porous Solids, Presented at the Tulsa Meeting, October 1940. Manuscript received at the office of the Institute; issued as Technical Paper No. 122 in Petroleum Technology, August 1940.
- 26 Maas, J. G., Springer, N., Hebing, A., Snippe, J., Berg, S. (2024). Viscous fingering in CCS: A general criterion for viscous fingering in porous media. *International Journal of Greenhouse Gas Control*, 132, 104074. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2024.104074>.
- 27 McCloud, K. V.; Maher, J. V. Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow. *Physics Reports*, v. 260, p. 139–185, 1995.
- 28 de Miranda, G. B., dos Santos, R. W., Chapiro, G. (2025). Uncertainty Quantification on Foam Modeling: The Interplay of Relative Permeability and Implicit-texture Foam Parameters. *Transport in Porous Media*, 144(1), 67–89.
- 29 de Paula, F. F., Igreja, I., Quinelato, T. O Chapiro, G.(2020). A numerical algorithm to solve the two-phase flow in porous media including foam displacement. *Computational Geosciences*, 5(4), 301–330. <https://doi.org/10.1023/A:1014281612163>.
- 30 de Paula, F. F., Igreja, I., Quinelato, T. O. (2024). Numerical simulation of foam displacement impacted by kinetic and equilibrium surfactant adsorption. *Advances in Water Resources*, 171.

- 31 Paz, P. Z. S. Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em um meio poroso contendo óleo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.
- 32 Petrova, Y., Tikhomirov, S., Efendiev, Y. (2025). Propagating terrace in a two-tubes model of gravitational fingering. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 57(1).
- 33 Quinelato, T. O.; de Paula, F. F.; Igreja, I.; Lozano, L. F.; Chapiro, G. On the injectivity estimation in foam EOR. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 12, p. 2723–2734, 2022. <https://doi.org/10.1007/s13202-022-01474-5>.
- 34 Rabaud, M.; Couder, Y.; Gerard, N. Dynamics and stability of anomalous Saffman-Taylor fingers. *Physical Review A*, v. 37, n. 3, 1988.
- 35 Saffman, P.G., Geoffrey Taylor, F.R.S. (1958). The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Royal Society Publishing, 312-329.
- 36 Serre, D. (1999). *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- 37 Smoller, J. (2012). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations (2^a ed.)*. New York, NY: Springer.
- 38 Sorbie, K. S., Al Ghafri, A. Y., Skauge, A. (2020). On the modelling of immiscible viscous fingering in two-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, 133(2), 469–500.
- 39 Thomas, J. W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws. Texts in Applied Mathematics*, 33. New York: Springer.
- 40 Van Duijn, C.J. *An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow*. Eindhoven University of Technology, 2003.
- 41 Van der Meer, J. M., Farajzadeh, R., Rossen, W. R. (2018). Influence of foam on the stability characteristics of immiscible flow in porous media. *Physics of Fluids*, 30(1), 014106. <https://doi.org/10.1063/1.5000891>.
- 42 Zocchi, G.; Shaw, B. E.; Libchaber, A.; Kadanoff, L. P. Finger narrowing under local perturbations in the Saffman-Taylor problem. *Physical Review A*, v. 36, n. 4, 1987.