



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

“Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild”

Benny Ribeiro Guedes

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

JUIZ DE FORA

2023

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Guedes, Benny Ribeiro.

Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild / Benny Ribeiro Guedes. -- 2023.
38 f.

Orientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2023.

1. buracos negros de Schwarzschild. 2. termodinâmica de buracos negros. 3. radiação Hawking. I. Abreu, Everton Murilo Carvalho de, orient. II. Título.

Benny Ribeiro Guedes

"Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 26 de Julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Orientador

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 21/07/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Everton Murilo Carvalho de Abreu, Usuário Externo**, em 26/07/2023, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Junior de Oliveira Neves, Usuário Externo**, em 26/07/2023, às 16:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Professor(a)**, em 26/07/2023, às 17:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Professor(a)**, em 27/07/2023, às 13:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.ufff.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1376275** e o código CRC **AB65E798**.

*“Não andem ansiosos por coisa alguma,
mas em tudo, pela oração e súplicas,
e com ação de graças,
apresentem seus pedidos a Deus.
E a paz de Deus, que excede todo o
entendimento, guardará o coração e a mente
de vocês em Cristo Jesus.
Confie n’Ele em todos os momentos, ó povo;
derrame diante d’Ele o coração,
pois Ele é o nosso refúgio.”
Filipenses 4: 6-7; Salmos 62: 8*

Dedico este trabalho, em primeiro lugar, a Deus, pois sem Ele, e a sabedoria e compreensão que d'Ele provém, nada disso teria se concretizado; em seguida, ao meu professor e orientador Everton Murilo Carvalho de Abreu, pelos ensinamentos, apoio, paciência, dedicação, amizade e profissionalismo, e, com certeza, por um dia ter me aceitado como orientando; a minha mãe, familiares e amigos(as), pela dedicação, apoio e força em todos os momentos dessa caminhada. Vocês foram, e são, essenciais na minha jornada, e me proporcionam encontrar forças em todos os momentos, e assim eu continuo caminhando e prosseguindo sempre em frente!

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus!

A minha mãe, Marivone, pelos conselhos, orações, dedicação, apoio, disposição, pela paciência durante os dias que tudo era mais corrido, e eu precisava ficar um pouco ausente, fosse presencial ou virtualmente. Agradeço pelos ensinamentos sempre valiosos, por transmitir valores que me auxiliam a viver na sociedade contemporânea, e por estar sempre disposta a me ajudar, qualquer que seja a situação.

Ao meu orientador, Everton Murilo Carvalho de Abreu, pela paciência, comprometimento, dedicação, conselhos, ensinamentos, instruções e conhecimentos para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho. Com toda certeza, e sem nenhuma dúvida, sou eternamente grato por cada momento e conversas compartilhadas, e pela oportunidade em ter conhecido um exemplo de pessoa, pesquisador, e, sem dúvida, amigo.

Ao Professor Gil de Oliveira Neto, da *Universidade Federal de Juiz de Fora*, pelos preciosos ensinamentos na disciplina de “Relatividade Geral, Elementos de Cosmologia e Física de Buracos Negros”, e inúmeros conselhos, sempre muito valiosos para minha vida acadêmica e intelectual, e ao Professor Júnior Diniz Toniato, da *Universidade Federal do Espírito Santo*, pelas conversas acerca de conteúdos de pesquisa, antes mesmo que eu ingressasse no Mestrado, os quais sempre serão de grande valia.

Aos professores do Departamento de Física, que tanto me ensinaram com dedicação e paciência.

Ao coordenador e vice coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física, Dr. Maikel Yusat Ballester Furones e Dr. Welber Gianini Quirino, por toda disponibilidade, dedicação, apoio e compreensão durante todo o curso.

Ao secretário do Programa de Pós-Graduação em Física, Domingos, por toda dedicação, apoio e interesse no desenvolvimento profissional e acadêmico dos alunos.

Aos meus eternos amigos e amigas, Maithê Vitipó, Mariana Braga (Mari), Alef Tavares, Micael Leite (Mica), Pablo Silveira (Pablito), Lucimar Ribeiro, Ana Clara Beiral, Daniel Ricardo, Tiago Araújo (Formigão), Renata Pegoral, Osvaldo Neto, Laura Ferreira, Eduarda Franco (Duda), que sempre terão um lugar especial em minha vida, e serei eternamente grato pela amizade, companheirismo, conversas, conselhos ímpares, e por cada momento que desfrutamos (e desfrutaremos) juntos. Vocês são demais!

Ao Pr. Samuel Mury, pelas orações, a atenção de sempre, zelo e dedicação, e a Carla Verônica, pelas conversas, preocupação em saber como tudo está caminhando, e a ambos pelo desprendimento em sempre estarem dispostos a ajudar. Com certeza são atitudes que fazem muita diferença em minha vida! Sou eternamente grato à ambos!

Aos meus colegas da Pós-Graduação, pelas conversas, conselhos, força e companheirismo durante esses anos, em especial à Marina Totti, Victor Chirico, Alan Diniz, Alessandro Júnior, Antônio Kaeliton, Anne Fernandes, Marlon Assis, Michelly Andrade, Yuri Soncco, Jhannes Toledo, André.

Aos meus familiares, que sempre torceram por mim.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Física.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tabelas.....	ix
Lista de Siglas.....	x
Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Buracos negros de Schwarzschild	4
2.1 – Introdução.....	4
2.2 – A solução de Schwarzschild.....	5
2.3 – Análise da solução de Schwarzschild.....	6
2.4 – Coordenadas de Eddington-Finkelstein.....	7
Capítulo 3: Termodinâmica clássica de buracos negros	11
3.1 – Leis da termodinâmica dos buracos negros.....	11
3.2 – A lei zero.....	12
3.3 – A primeira lei.....	12
3.4 – A segunda lei.....	16
3.5 – A terceira lei.....	17
Capítulo 4 – A radiação Hawking.....	19
4.1 – A temperatura e a radiação Hawking.....	19
Capítulo 5 - Conclusão e Perspectivas Futuras	23
Referências	25

Lista de Figuras

Figura 2.1: Estrutura dos cones de luz para geodésicas de uma partícula que se aproxima radialmente de $r = 0$9

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Comparativo entre a Termodinâmica Clássica e a Termodinâmica de Buracos Negros.....	18
--	----

Lista de Siglas

TRE – *Teoria da Relatividade Especial*

TRG – *Teoria da Relatividade Geral*

ECE – Equações de Campo de Einstein

UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [(1 - 2m/r), -(1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \text{sen}^2 \theta]$$

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade estabelecer as conexões entre as leis da Termodinâmica de Buracos Negros e as da Termodinâmica Clássica, apontando suas eventuais semelhanças. Na década de 70, os físicos Stephen W. Hawking e Jacob D. Bekenstein buscaram essas conexões, desenvolvendo trabalhos notadamente importantes acerca do assunto. Hawking teve por mérito estabelecer que um buraco negro emite radiação semelhantemente a um corpo negro, possuindo um espectro de temperatura, e, sendo essa temperatura inversamente proporcional a massa do buraco negro. Bekenstein, por sua vez, buscou a correlação entre as leis da Termodinâmica Clássica e os parâmetros dos buracos negros. Portanto, neste trabalho, procuramos inicialmente estudar os buracos negros de Schwarzschild, suas propriedades gerais, e as coordenadas de Eddington-Finkelstein, com o intuito de remover a singularidade presente no horizonte de eventos. Definidas as propriedades gerais, estabelecemos as correlações existentes entre os parâmetros dos buracos negros com a Termodinâmica Clássica, enunciando as leis da Termodinâmica de Buracos Negros. Por fim, mostramos, de forma sucinta, que a radiação Hawking, a qual é emitida por um buraco negro, e se mostra inversamente proporcional a massa do mesmo, é análoga à radiação térmica emitida por um corpo negro.

Palavras-chave: buracos negros de Schwarzschild, termodinâmica de buracos negros, radiação Hawking.

ABSTRACT

This work aims to establish the connections between the laws of Black Hole Thermodynamics and those of Classical Thermodynamics, pointing out their possible similarities. In the 1970s, physicists Stephen W. Hawking and Jacob D. Bekenstein sought these connections, developing remarkably important works on the subject. Hawking had the merit of establishing that a black hole emits radiation similarly to a black body, having a temperature spectrum, and this temperature being inversely proportional to the mass of the black hole. Bekenstein, in turn, looked for a correlation between the laws of Classical Thermodynamics and the parameters of black holes. Therefore, in this work, we initially sought to study Schwarzschild black holes, their general properties, and the Eddington-Finkelstein coordinates, in order to remove the singularity present in the event horizon. Once the general properties are defined, we establish the existing correlations between the parameters of black holes with Classical Thermodynamics, enunciating the laws of Black Hole Thermodynamics. Finally, we show, briefly, that the Hawking radiation, which is emitted by a black hole, and is inversely proportional to its mass, is analogous to the thermal radiation emitted by a black body.

Keywords: Schwarzschild black holes, black hole thermodynamics, Hawking radiation.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O início do século XX começa com a formulação da Teoria da Relatividade Especial (TRE) (1905), que contempla um espaço-tempo plano, e da Teoria da Relatividade Geral (TRG) (1915), que de forma mais abrangente, aborda o espaço-tempo curvo, ambas de autoria do físico alemão Albert Einstein (1879-1955) [1].

Aproximadamente um mês após Einstein publicar seus artigos contendo a TRG, outro físico alemão, Karl Schwarzschild (1873-1916), em contato com esses artigos, encontra a primeira solução das equações de campo de Einstein (ECE), como ficaram conhecidas as equações do campo gravitacional da TRG. Um detalhe muito interessante nesse fato histórico reside nas condições as quais Schwarzschild estava exposto quando obteve tais soluções. Ele estava servindo o exército alemão na frente de batalha contra os russos, na Primeira Guerra Mundial.

As soluções obtidas por Schwarzschild não são apenas meras soluções para um conjunto complexo de equações que descrevem o campo gravitacional em termos de propriedades geométricas do espaço-tempo. Essas soluções se tornam o ponto de partida para o estudo, e compreensão, de um dos objetos mais curiosos, e talvez absurdos, dos quais se tem ideia na natureza, e que, além disso, são previstos pela TRG: os buracos negros. A solução de Schwarzschild para as ECE, possibilita que novos caminhos fossem buscados para compreender o comportamento desses corpos celestes, até então previstos de forma unicamente teórica pela TRG [2].

Podemos mencionar pelo menos quatro soluções exatas para as ECE da TRG que descrevem buracos negros, a saber: as soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman, que descrevem buracos negros estáticos, carregados, em rotação e com rotação e carga, respectivamente.

Neste trabalho nos restringimos apenas ao primeiro tipo, os buracos negros de Schwarzschild.

Schwarzschild apresenta uma solução que descreve como o campo gravitacional gerado por uma distribuição simetricamente esférica de massa, em um vácuo esfericamente simétrico, afeta as regiões vizinhas a esse corpo. Essa solução é conhecida como métrica de Schwarzschild. Mas, essa métrica possui uma singularidade no horizonte de eventos do buraco negro, mais precisamente, em $r = 2m$, sendo removida com uma mudança apropriada de coordenadas, as chamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein [3].

Ao olharmos as soluções das ECE para diversos tipos de buracos negros, vemos que esses objetos podem ser descritos basicamente por três parâmetros: massa M , momento angular L e carga elétrica Q , os quais constituem o Teorema “No-Hair”. E, a partir desse teorema, percebemos uma analogia com a Termodinâmica Clássica, que diz que um sistema termodinâmico fica bem caracterizado por três grandezas, a pressão P , o volume V e a temperatura T . E, com essa analogia, podemos formular e enunciar as leis da Termodinâmica de Buracos Negros [4, 5].

A Termodinâmica de Buracos Negros correlaciona grandezas da Termodinâmica Clássica, e suas respectivas leis, com os parâmetros dos buracos negros, ocasionando a formulação das leis para esses objetos celestes. Conceitos como energia E , gravidade superficial κ , entropia S , temperatura Hawking T_H , encontram-se nas leis da Termodinâmica de Buracos Negros, sendo fomentadas a partir das grandezas clássicas da Termodinâmica [4, 6].

E, dentre todos esses conceitos e leis, um efeito que ocorre comumente nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro chama a atenção. Estamos nos referindo ao fenômeno da radiação Hawking, descoberto por Stephen W. Hawking, na década de 70, ao empregar conceitos da Mecânica Quântica no estudo dos buracos negros.

Hawking percebeu que, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, pares de partículas virtuais eram criadas próximas ao horizonte de eventos, em que uma dessas partículas era capturada pelo buraco negro, antes de sua

aniquilação, enquanto a outra era emitida para o infinito. E, ainda, o desprendimento de energia por parte do buraco negro, para que as partículas fossem capturadas e emitidas, ocasiona a sua evaporação, ou seja, a massa do buraco negro reduz, e, juntamente com ela, o seu horizonte de eventos [7, 8].

Sendo assim, essa dissertação pretende abordar, de forma básica, conceitos relevantes que possibilitem a compreensão da Termodinâmica de Buracos Negros.

No capítulo 2, fazemos um estudo da métrica de Schwarzschild e os buracos negros caracterizados pela mesma. Discutimos suas propriedades, as singularidades envolvidas, bem como a necessidade da mudança para o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein.

O capítulo 3 é dedicado exclusivamente a demonstração das correlações existentes entre os parâmetros que caracterizam os buracos negros e as grandezas da Termodinâmica Clássica. Enunciamos as leis da Termodinâmica de Buracos Negros, juntamente com as equações que representam cada uma dessas leis.

O capítulo 4 é reservado à uma abordagem sucinta acerca do fenômeno da radiação Hawking, a temperatura associada à essa radiação, e fechamos com uma demonstração do tempo de evaporação total de um buraco negro.

O último capítulo encerra o trabalho com perspectivas futuras sobre o tema abordado, possíveis pontos a serem incluídos posteriormente, bem como aprofundamento e aperfeiçoamento do que já foi visto até o momento.

CAPÍTULO 2

BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

Após a formulação da TRG, em 1915, por Albert Einstein, o físico alemão Karl Schwarzschild obteve a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein [9, 10]. A solução de Schwarzschild, publicada em janeiro de 1916, descreve o campo gravitacional do vácuo simetricamente esférico. No presente capítulo, a partir da solução de Schwarzschild, abordamos os buracos negros de Schwarzschild, interpretando algumas de suas principais propriedades [3].

2.1 – Introdução

Buracos negros de Schwarzschild, também chamados de buracos negros estáticos, correspondem à uma das classes mais simples de buracos negros, em que apenas sua massa é considerada. É importante salientar que a solução das equações de campo obtidas por Schwarzschild tinha como foco de estudo o campo gravitacional gerado por objetos simetricamente esféricos, os quais seriam idealizações de estrelas ou partículas carregadas [1]. Todavia, tal solução é hoje reconhecida como uma solução de buracos negros estáticos, simetricamente esféricos e sem carga, o que se deve, em especial, à existência de duas singularidades na solução de Schwarzschild, as quais se tornaram o ponto de partida para a teoria de buracos negros.

A redefinição do conceito de buraco negro pode ser cunhada usando a velocidade de escape do mesmo. Da Mecânica Clássica, a velocidade de escape de um corpo massivo corresponde à velocidade mínima necessária que um segundo corpo deve possuir para escapar do seu campo gravitacional. Nesse caso, a velocidade de escape da Terra é a velocidade mínima com que um corpo deve ser lançado de modo que não volte a cair na superfície terrestre. Logo, um buraco negro pode ser definido como um corpo extremamente denso, e que possua uma velocidade de escape maior que a velocidade da luz. Sendo assim, concluímos que nada pode escapar-lhes, seja matéria ou radiação eletromagnética, uma vez que a velocidade máxima conhecida no universo é a

velocidade da luz. E, a luz, por sua vez, ao tentar escapar do intenso campo gravitacional do buraco negro, é atraída de volta [1].

2.2 – A solução de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild é uma solução das equações de campo de Einstein, a qual descreve a curvatura do espaço-tempo nas vizinhanças de um corpo massivo, estático (sem rotação), com simetria esférica, sem carga elétrica, e no vácuo. O elemento de linha que descreve a métrica de Schwarzschild, nas coordenadas espaço-temporais (t, r, θ, ϕ) , é escrito como [3],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

onde, o termo m é dado por,

$$m \equiv \frac{GM}{c^2}, \quad (2.2)$$

em que, G é a constante gravitacional universal de Newton, M é a massa do corpo responsável pela curvatura do espaço-tempo em sua vizinhança, e c é a velocidade da luz [3, 9].

Identificamos, assim, que a geometria externamente a um corpo simetricamente esférico, é caracterizada unicamente pela sua massa M , e não como essa massa se encontra distribuída radialmente nesse corpo. Portanto, m pode ser entendida como uma massa geométrica, onde, fazendo a análise dimensional da mesma, na equação (2.2), vemos que ela possui dimensão de comprimento, em conformidade com a dimensão de ds .

Da equação (2.1), os coeficientes da métrica, que são os componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, são [3],

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [(1 - 2m/r), -(1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta]. \quad (2.3)$$

2.3 – Análise da solução de Schwarzschild

De forma imediata, observamos que a métrica de Schwarzschild é assintoticamente plana, já que, no limite em que $r \rightarrow \infty$, obtemos a métrica do espaço-tempo plano, recaindo, assim, na métrica de Minkowski. Isso é totalmente plausível, pois, à medida que nos afastamos do corpo massivo, a tendência do espaço é tornar-se plano, visto que a curvatura do espaço-tempo na vizinhança do mesmo está diretamente ligada à sua massa. Podemos interpretar fisicamente a métrica como responsável pela descrição do campo gravitacional no exterior do corpo massivo em questão.

Explorando mais detalhadamente a solução de Schwarzschild, observa-se a existência de dois valores do parâmetro radial r que apresentam um comportamento singular, sendo eles, $r = 0$ e $r = 2m$ [3].

Quando $r = 2m$, temos uma indeterminação no coeficiente de dr^2 , fazendo com que a métrica deixe de valer nesse ponto. Isso pode ser explicado pelo fato da solução de Schwarzschild considerar apenas pontos externos ao corpo massivo e simetricamente esférico, e também por ser válida apenas para $r > 2m$, o que nos permite definir o raio de Schwarzschild como $r_s = 2m$, que representa o raio do horizonte de eventos, que constitui a fronteira de todos os eventos que podem ser observados por um observador externo. Ou seja, eventos que ocorram na região interna ao horizonte de eventos de Schwarzschild não podem ser observados por observadores externos à essa região, bem como partículas que se encontrem no interior da mesma não conseguem mais escapar para a região externa, ou, para o infinito. O raio de Schwarzschild pode ser escrito na forma [9, 10, 11],

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.4)$$

Para sabermos se uma singularidade em um determinado ponto do espaço-tempo é removível, ou não, fazemos uma verificação através do invariante escalar do tensor de Riemann, que, calculado para a métrica de Schwarzschild, fornece [11],

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48m^2}{r^6}, \quad (2.5)$$

e, sendo ele um escalar, seu valor é o mesmo em qualquer sistema de coordenadas adotado.

Então, observamos que em $r = 0$, a quantidade dada por (2.5) diverge, caracterizando o que chamamos de singularidade real ou intrínseca. Além disso, por ser uma singularidade real, estará presente em todos os sistemas de coordenadas, representando, assim, um problema físico real proveniente da métrica de Schwarzschild, não sendo, portanto, removível. Já em $r = r_S$, observamos que a quantidade (2.5) possui um valor finito, o que indica uma singularidade proveniente do sistema de coordenadas adotado para a obtenção da métrica [3, 11]. Porém, é possível escolher um sistema de coordenadas que seja mais adequado e, com isso, reescrever a métrica de Schwarzschild de modo a evitar a singularidade em $r = r_S$.

Na próxima seção apresentamos um sistema de coordenadas que possibilita descrever de forma contínua todo o espaço-tempo externamente ao corpo massivo, removendo a singularidade do horizonte de eventos de Schwarzschild.

2.4 – Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Como dito anteriormente, a métrica de Schwarzschild pode ser modificada, a fim de remover a singularidade em $r = r_S$, adotando-se as coordenadas de Eddington-Finkelstein [3, 11].

Inicialmente, consideremos um raio de luz que se aproxima radialmente do corpo massivo, com θ e ϕ fixos, o que garante $d\theta = d\phi = 0$. Uma vez que teremos geodésicas do tipo luz, $ds^2 = 0$, e a equação (2.1) se resume a,

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.6)$$

Reorganizando (2.6),

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (2.7)$$

e, integrando, encontramos as soluções para as geodésicas radiais do tipo luz para a métrica de Schwarzschild, a saber,

$$t = \pm r_* + C \quad (2.8)$$

onde,

$$r_* = r + 2m \ln|r - 2m|. \quad (2.9)$$

Então, para a mudança de coordenadas, inserimos uma coordenada nula,

$$v = t + r_*, \quad (2.10)$$

que possui a mesma direção de uma geodésica nula incidente, isto é, que se aproxima radialmente do horizonte de eventos. Com isso, a coordenada temporal passa a ser $t = v - r_*$, de modo que ficamos com,

$$t = v - r - 2m \ln|r - 2m|. \quad (2.11)$$

Mantendo as coordenadas r , θ e ϕ constantes, diferenciando (2.11), e substituindo em (2.1), obtemos,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

que corresponde à métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein [3]. O diagrama de espaço-tempo correspondente à essa métrica pode ser visualizado na Figura 2.1.

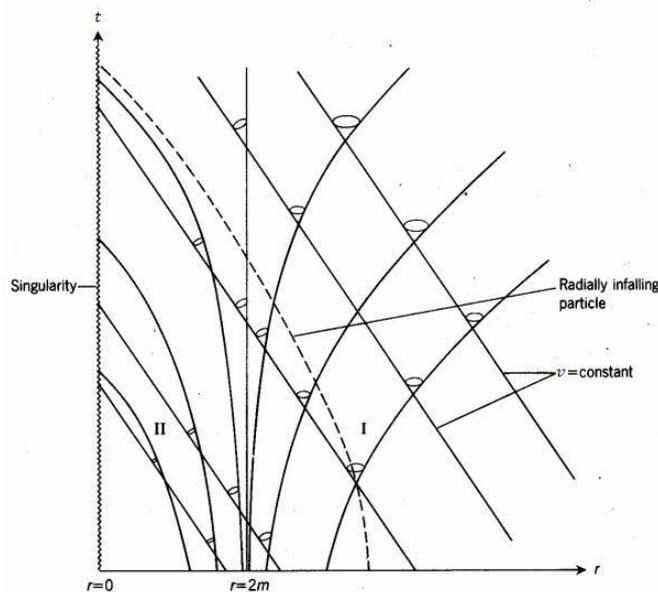


Figura 2.1: Estrutura dos cones de luz para geodésicas de uma partícula que se aproxima radialmente de $r = 0$. Fonte: d'INVERNO, 1992, p. 220.

Com essa nova métrica, removemos a singularidade em $r = r_s$, o que nos permite obter algumas conclusões importantes. Percebemos que os cones de luz tendem a se abrir para cones de 45° à medida que $r \rightarrow \infty$. A região II, à esquerda do horizonte de eventos, é caracterizada por cones de luz inclinados a -45° em relação ao eixo r . A região I, à direita do horizonte de eventos, os cones de luz iniciam-se a 45° em relação ao eixo r no infinito e tendem a se orientar para cima à medida que r diminui, tornando-se vertical em $r = 2m$, e apontando para dentro quando $r < 2m$.

Sabemos que o horizonte de eventos separa todos os eventos que ocorrem em seu interior da região externa a ele. Para um observador que supostamente atravessasse o horizonte de eventos, o seu retorno a região externa, ou, o envio de alguma informação para a mesma, jamais seria possível. Além disso, esse observador não conseguiria evitar sua destruição ao alcançar a singularidade em $r = 0$. A partir disso, evidencia-se, de forma mais explícita, a noção do que é um buraco negro, podendo ser definido como um corpo massivo, simetricamente esférico, que possui um horizonte de eventos, e cujo raio é menor que o raio de Schwarzschild. Entende-se que o horizonte de eventos delimita a região de onde a luz não consegue mais escapar [3].

As coordenadas de Eddington-Finkelstein em (2.10) representam raios de luz se movendo em geodésicas nulas, incidindo na região $r = 2m$. Caso

considerássemos raios de luz se afastando do horizonte de eventos, as coordenadas adotadas seriam do tipo $u = t - r_*$, e a métrica de Schwarzschild tomaria a forma,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.13)$$

a qual descreve o espaço-tempo do que denominamos de buraco branco, que corresponde ao inverso de um buraco negro, isto é, os raios de luz emergem da singularidade, atravessam o horizonte de eventos e se propagam no infinito [2].

Portanto, do ponto de vista clássico, percebemos que um buraco negro de Schwarzschild é descrito pela TRG, além de ser bem caracterizado unicamente pela sua massa, sendo essa a principal propriedade no estudo dessa classe de buracos negros. E, segundo o Teorema “No-Hair”, somente alguns poucos parâmetros são necessários para descrever um buraco negro estacionário, sendo eles, além da massa, o momento angular e a carga elétrica [1]. Fato análogo ocorre na Termodinâmica Clássica, onde sistemas termodinâmicos podem ser descritos, basicamente, por três variáveis macroscópicas, a saber, a pressão, o volume e a temperatura.

Sendo assim, no próximo capítulo procuraremos expor correlações existentes entre as propriedades dos buracos negros com a Termodinâmica Clássica. Enunciaremos as quatro leis da Termodinâmica de Buracos Negros, definindo-as conceitual e matematicamente.

CAPÍTULO 3

TERMODINÂMICA CLÁSSICA DE BURACOS NEGROS

Como mencionado ao final do capítulo anterior, somente alguns poucos parâmetros são necessários para descrever os buracos negros estacionários (Teorema “No-Hair”). Uma vez que na Termodinâmica Clássica ocorre o mesmo, onde, através de poucas variáveis macroscópicas, é possível caracterizar um sistema termodinâmico. Neste capítulo apresentamos a correlação existente entre a Termodinâmica Clássica e as propriedades dos buracos negros, enunciando as quatro leis da Termodinâmica de Buracos Negros.

3.1 – Leis da termodinâmica dos buracos negros

A termodinâmica de buracos negros origina-se na década de 70, mais precisamente em 1973, com o trabalho de Bardeen, Carter e Hawking [4], onde se evidenciam as correlações existentes entre as propriedades dos buracos negros e as grandezas e leis da Termodinâmica Clássica. Na mesma década, Bekenstein postula que um buraco negro possui entropia, todavia, a fundamentação dessa ideia reside no fato da não violação da Segunda Lei da Termodinâmica, uma vez que, ao adentrar um buraco negro, matéria e radiação eletromagnética perderiam entropia [6].

Para Bekenstein, essa perda de entropia seria compensada pelo aumento da entropia do buraco negro, mais especificamente, da área do seu horizonte de eventos. Ao possuir entropia, o buraco negro também possuiria temperatura. A partir disso, ele postulou a segunda lei da termodinâmica generalizada para buracos negros, a qual afirmava que a variação de entropia de um buraco negro acrescida a variação da entropia da região externa nunca diminuiria [12].

Nas seções seguintes faremos um esboço da correlação existente entre as leis da termodinâmica clássica com os parâmetros dos buracos negros, e, ao final de cada seção, enunciaremos a respectiva lei da Termodinâmica de Buracos Negros.

3.2 – A lei zero

A lei zero da termodinâmica diz respeito ao equilíbrio térmico. Se dois sistemas estão em equilíbrio térmico com um terceiro estarão também em equilíbrio térmico entre si. Com isso, a temperatura de um sistema é a propriedade que indica se o mesmo está em equilíbrio térmico com outros sistemas. Para o caso de um único sistema, diz-se que este encontra-se em equilíbrio térmico quando sua temperatura é constante em todos os pontos [13].

Em analogia à essa lei, a temperatura de um buraco negro é dada por

$$T_{BN} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (3.1)$$

sendo κ a gravidade superficial no horizonte de eventos, a qual é escrita na forma,

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}, \quad (3.2)$$

Então, um buraco negro estacionário é dito simetricamente esférico quando a força gravitacional na superfície do horizonte de eventos é constante. Nesse sentido, o buraco negro encontra-se em equilíbrio quando a força gravitacional atuando em seu horizonte é constante. Enunciamos a lei zero da termodinâmica de buracos negros como [9]:

A gravidade superficial κ de um buraco negro estacionário é constante por todo o seu horizonte de eventos.

Para um buraco negro de Schwarzschild, utilizando coordenadas naturais ($G = c = 1$), a gravidade superficial é $\kappa = 1/4M$, em que M é a massa do buraco negro, como visto no Capítulo 2.

3.3 – A primeira lei

A primeira lei da termodinâmica é referente à conservação da energia, sendo escrita como [5]

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W, \quad (3.3)$$

onde é possível perceber a relação entre a variação da energia interna ΔE com a troca de calor ΔQ e o trabalho ΔW . O sistema pode receber calor ($\Delta Q > 0$), ou cedê-lo ($\Delta Q < 0$). Quanto ao trabalho, este pode ser realizado pelo sistema ($\Delta W > 0$), ou absorvido por ele ($\Delta W < 0$). Na forma diferencial, (3.3) torna-se,

$$dE = TdS - dW, \quad (3.4)$$

sendo, $dS = dQ/T$, e, conseqüentemente, $dQ = TdS$. Aqui, para o sistema termodinâmico em questão, E é a energia interna, T a temperatura, S a entropia, e W o trabalho.

Como mencionado, a primeira lei da termodinâmica corresponde à lei da conservação da energia, logo, a versão análoga dessa lei para os buracos negros deve ser obtida através de uma relação das propriedades desses objetos massivos com suas respectivas variações, com o intuito de descrever o comportamento de tais propriedades ao sofrerem variações infinitesimais para um estado estacionário posterior.

De forma geral, a primeira lei da termodinâmica de buracos negros é formulada com relação aos parâmetros listados pelo Teorema “No-Hair”, ou seja, a massa M , o momento angular L e a carga elétrica Q , sendo escrita como,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_h dL + \Phi_h dQ, \quad (3.5)$$

em que, Ω_h é a velocidade angular, Φ_h é o potencial elétrico, e, como já visto, κ é a gravidade superficial, sendo todos esses parâmetros em relação ao horizonte de eventos do buraco negro. Os sinais positivos (+) na equação (3.5) provém da diferencial da massa de um buraco negro, considerando que o mesmo possua momento angular L e carga elétrica Q [14, 15].

Fazendo um paralelo entre as equações (3.4) e (3.5), a massa M equivale à energia interna E , κ equivale a temperatura T , A representa a entropia S , e Ω_h e Φ_h , juntamente com as respectivas variações de momento angular dL , e carga elétrica dQ , representam o trabalho W realizado sobre o buraco negro por algum agente externo, causando uma variação dL no momento angular, e dQ na carga do mesmo [6].

Considerando o buraco negro de Schwarzschild, o qual é caracterizado somente pela sua massa, e pelo fato de ser estático ($L = 0$) e sem carga ($Q = 0$), (3.5) se reduz a,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA. \quad (3.6)$$

Se a massa do buraco negro aumenta de um fator dM , conseqüentemente, sua área aumenta de um fator dA , de modo que $dM \propto dA$.

A primeira lei da termodinâmica para um buraco negro de Schwarzschild é dada por (3.6), sendo enunciada como:

Para um buraco negro de Schwarzschild, com uma massa inicial M , área do horizonte de eventos A , e gravidade superficial κ , uma variação infinitesimal desses parâmetros fornece $dM = (\kappa/8\pi G)dA$.

Antes de formularmos a segunda lei da Termodinâmica de Buracos Negros, lembremo-nos da lei zero, que relaciona a gravidade superficial κ no horizonte de eventos (3.2) com a temperatura de um buraco negro (3.1), o que nos permite considerar a gravidade superficial κ exercendo o papel de temperatura do buraco negro. Portanto, se levamos em conta que um buraco negro emite radiação, existirá uma temperatura associada a essa radiação, podendo ser escrita como [9, 16, 17],

$$k_B T_{BN} = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c}, \quad (3.7)$$

ou, ainda, na forma,

$$T_{BN} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B c}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.2) em (3.8), e reorganizando as grandezas, obtemos,

$$T_{BN} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}, \quad (3.9)$$

sendo que, \hbar é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo, k_B é a constante de Boltzmann, G é a constante gravitacional de Newton e M é a massa do buraco negro [16, 17].

Observando (3.9) percebemos que o único parâmetro é a massa M . E mais, podemos notar que a temperatura do buraco negro é inversamente proporcional à massa do mesmo, ou seja, buracos negros menores apresentam temperaturas mais elevadas em comparação àqueles com maior massa. Para o caso de um buraco negro suficientemente grande, ao ponto de sua temperatura ser menor que a da radiação cósmica de fundo, não seria possível detectar sua radiação.

Utilizando $E = Mc^2$, e considerando que (3.6) possa ser reescrita na forma,

$$dE = d(Mc^2) = c^2 dM = c^2 \left(\frac{\kappa}{8\pi G} \right) dA, \quad (3.10)$$

e, substituindo (3.7) em (3.10), obtemos,

$$dE = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} T_{BN} dA. \quad (3.11)$$

Comparando a equação (3.11) com a primeira lei da termodinâmica na forma $dE = TdS$, e integrando, chegamos a,

$$S_{BH} = \frac{Ak_B c^3}{4\hbar G}, \quad (3.12)$$

mostrando que a entropia é proporcional à área do horizonte de eventos. A equação (3.12) é conhecida como entropia de Bekenstein-Hawking.

Tendo em vista que,

$$\frac{c^2\kappa}{8\pi G}dA = TdS, \quad (3.13)$$

onde, utilizando coordenadas naturais ($G = c = 1$), chegamos a,

$$\frac{\kappa}{8\pi}dA = TdS, \quad (3.14)$$

o que nos permite escrever a equação (3.5) como [16, 17],

$$dM = TdS + \Omega_h dL + \Phi_h dQ, \quad (3.15)$$

sendo essa a formulação geral da primeira lei da Termodinâmica de Buracos Negros, a qual contempla os parâmetros massa (M), momento angular (L) e carga elétrica (Q).

3.4 – A segunda lei

A segunda lei da termodinâmica refere-se às máquinas térmicas, possuindo duas formulações, a de Kelvin e a de Clausius, no entanto, ambas remetem às máquinas térmicas, levando à definição de entropia, cuja propriedade essencial é que [5]

$$dS \geq 0, \quad (3.16)$$

isto é, a variação da entropia do Universo (sistema + meio exterior) será sempre positiva, ou permanecerá nula.

Considerando a equação (3.12), a partir de (3.16) obtemos a segunda lei da Termodinâmica de Buracos Negros [6, 9],

$$dA \geq 0. \quad (3.17)$$

No entanto, à medida que um buraco negro irradia, sua massa diminui e, conseqüentemente, a área do seu horizonte de eventos decresce na mesma proporção. Todavia, teríamos uma contradição, no que diz respeito à segunda lei da termodinâmica, e, também, à equação (3.17). Para contornar essa situação, Bekenstein propôs que mesmo que a entropia S_{BH} do buraco negro diminua, a entropia total S_T , escrita na forma $S_T = S_{BH} + S_{ext}$, em que, S_{ext} é a entropia da região externa ao buraco negro, é uma função que não decresce ao longo do tempo [16]. A partir disso, Bekenstein formula a segunda lei da termodinâmica generalizada para buracos negros [12], a qual é escrita como

$$dS_T \geq 0, \quad (3.18)$$

ou, ainda,

$$dS_{BH} + dS_{ext} \geq 0. \quad (3.19)$$

Podemos enuncia-la da seguinte forma:

A variação da entropia de um buraco negro, acrescida a variação da entropia da região exterior a ele nunca decrescem, ou seja, $dS_T \geq 0$.

Aqui torna-se importante ressaltar que a segunda lei da termodinâmica generalizada faz menção à radiação Hawking. Isso porque, com a diminuição da entropia do buraco negro, devido a diminuição de sua massa e, conseqüentemente, sua área, há uma compensação pelo aumento da entropia da região externa.

3.5 – A terceira lei

A terceira lei da termodinâmica diz respeito a inacessibilidade do zero absoluto. Ou seja, classicamente, é impossível alcançar o zero absoluto realizando um número finito de processos termodinâmicos [5].

No caso dos buracos negros, pela equação (3.1), vemos que a superfície gravitacional κ tem relação direta com a temperatura de um buraco negro. Então, a terceira lei da termodinâmica dos buracos negros pode ser postulada da seguinte forma:

É impossível reduzir a gravidade superficial κ de um buraco negro a zero por um número finito de processos físicos, sejam quais forem esses processos.

A analogia entre as leis da Termodinâmica Clássica com as da Termodinâmica de Buracos Negros pode ser vista na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Comparativo entre a Termodinâmica Clássica e a Termodinâmica de Buracos Negros. Fonte: GOMES, 2016, p. 50.

Leis	Termodinâmica Clássica	Termodinâmica de Buracos Negros
Lei zero	Temperatura T é constante para um sistema em equilíbrio	Gravidade superficial κ é constante para um buraco negro estacionário
Primeira lei	$dE = TdS - dW$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_h dL - \Phi_h dQ$
Segunda lei	$dS \geq 0$	$dS_T = dS_{BH} + dS_{ext} \geq 0$
Terceira lei	Impossível alcançar $T = 0$	Impossível alcançar $\kappa = 0$

Uma vez feita a correlação entre os parâmetros dos buracos negros com a Termodinâmica Clássica, levando às leis da Termodinâmica de Buracos Negros, um efeito interessante, o qual pode ocorrer nas proximidades do horizonte de eventos, chama a atenção em meio às leis descritas até aqui, que é a possibilidade de um buraco negro emitir radiação, conhecida como a radiação Hawking. A descoberta dessa radiação, em 1975, se deve ao físico britânico Stephen W. Hawking, e será discutida com mais detalhes no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

A RADIAÇÃO HAWKING

No presente capítulo, trataremos acerca de um interessante fenômeno que ocorre nas proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro: a radiação Hawking. Faremos uma abordagem sucinta e heurística, com o intuito de levar o leitor a compreender conceitos básicos e diretos sobre o fenômeno.

4.1 – A temperatura e a radiação Hawking

Na década de 70, ao estudar os buracos negros, Stephen Hawking descobriu, ao aplicar conceitos da Mecânica Quântica, que um buraco negro emite radiação nas proximidades do horizonte de eventos. É essa radiação que conhecemos como a radiação Hawking.

O estudo do mundo quântico mostra que o vácuo não é totalmente vazio, mas contém pares de partículas virtuais, as quais se manifestam como um fóton e um anti-fóton, que surgem e se aniquilam muito rapidamente, respeitando o princípio da incerteza de Heisenberg. Se essas partículas surgem muito próximo do horizonte de eventos do buraco negro, o campo gravitacional extremamente intenso nessa região captura o anti-fóton, e emite o fóton para o infinito. Com isso, haverá uma radiação sendo emitida no horizonte de eventos do buraco negro.

Esse fenômeno de captura e emissão das partículas no vácuo resulta em um gasto de energia pelo buraco negro, ocasionando um processo de evaporação, ou seja, uma diminuição do seu tamanho com o passar do tempo. Além disso, a radiação Hawking possui um espectro semelhante ao emitido por um corpo negro, logo, é possível associar ao buraco uma temperatura conhecida como a temperatura Hawking, vista no capítulo 3 [2, 7].

Relembrando a lei zero da Termodinâmica de Buracos Negros, a equação (3.1) nos diz que,

$$T_{BN} = \frac{\kappa}{2\pi},$$

onde, T_{BN} é a temperatura de equilíbrio do horizonte de eventos de um buraco negro, e, por ser a mesma temperatura Hawking mencionada anteriormente, por conveniência, passaremos a chama-la T_H .

A lei de Stefan-Boltzmann para o espectro de radiação de um corpo negro é,

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma A T_H, \quad (4.1)$$

sendo que, $E = Mc^2$, A é a área do corpo negro, porém, no caso que estamos abordando, corresponderá à área do horizonte de eventos. A constante σ é dada por [2, 16],

$$\sigma = \frac{1}{60} \frac{\pi^2 k_B^4}{\hbar^3 c^2}. \quad (4.2)$$

A área A em (4.1) é calculada a partir da área de uma esfera de raio r_s , que é o raio de Schwarzschild, o que fornece,

$$A = 16\pi \frac{M^2 G^2}{c^4}. \quad (4.3)$$

E, T_H é dada pela equação (3.9) [9],

$$T_{BN} \equiv T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.2), (4.3) e (4.4) em (4.1), e fazendo as simplificações necessárias, encontramos [14, 16]

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{15360} \frac{\hbar c^6}{\pi G^2 M^2}, \quad (4.5)$$

e, ainda,

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dM}{dt} = \left(-\frac{1}{15360} \frac{\hbar c^6}{\pi G^2 M^2} \right). \quad (4.6)$$

Integrando (4.6) de um tempo inicial t_0 em que o buraco negro teria uma massa M_0 , até um tempo final t cuja massa é M , temos,

$$\int_{M_0}^M M^2 dM = -\frac{1}{15360} \frac{\hbar c^4}{\pi G^2} \int_{t_0}^t dt, \quad (4.7)$$

onde, β é uma constante dada por,

$$\beta = \frac{1}{15360} \frac{\hbar c^4}{\pi G^2}. \quad (4.8)$$

e, organizando os termos, obtemos,

$$M(t) = (M_0^3 - 3\beta t)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.9)$$

Para o caso em que toda a massa do buraco negro evapora, $M = 0$, (4.9) se reduz a,

$$t = \frac{M_0^3}{3\beta}, \quad (4.10)$$

e, em (4.10), t corresponde ao tempo necessário para que toda essa massa evapore. Se substituirmos (4.8) em (4.10) [8, 16],

$$t = 5120 \frac{\pi G^2 M_0^3}{\hbar c^4}, \quad (4.11)$$

de onde percebemos que, quanto mais massivo o buraco negro, maior o tempo para a sua evaporação completa, e, também, menor a sua temperatura, conforme vemos em (4.4). Buracos negros com massas da ordem de 10^{30} kg, que correspondem a massas solares, possui uma temperatura Hawking de 10^{-7} K, um valor extremamente baixo, o que impossibilita a detecção da radiação Hawking. Casos em que a temperatura Hawking de um buraco negro se torna significativa diz respeito a massas muito pequenas, uma vez que a temperatura é inversamente proporcional à massa. Todavia, da equação (4.10), vemos que o tempo necessário para que a massa do buraco negro evapore é proporcional a M_0^3 . Isso gera uma estimativa da ordem de 10^{67} anos para que toda a massa do buraco negro, da ordem da massa do Sol, evapore. Esse tempo é extremamente longo, ainda mais comparado aos 10^{10} anos estimados para a idade do nosso universo [14].

Uma maneira de contornar esse problema seriam os buracos negros primordiais, com massas menores, da ordem de 10^{12} kg, os quais estariam em seus estágios finais de evaporação nos tempos atuais. Contudo, devido à sua pequena massa, e, conseqüentemente, seu tamanho reduzido, haveria pouca influência gravitacional, prejudicando com isso sua detecção [2].

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Na presente dissertação fizemos uma revisão geral dos aspectos relacionados à Termodinâmica de Buracos Negros de Schwarzschild. A primeira parte foi dedicada a estudar a métrica de Schwarzschild, que é a solução encontrada pelo físico alemão Karl Schwarzschild para as equações de campo de Einstein. E é a partir dessa solução que nos dedicamos, mais especificamente, às propriedades dos buracos negros de Schwarzschild, caracterizados unicamente pela sua massa. Em seguida, fez-se uma analogia entre as leis da Termodinâmica Clássica com alguns dos parâmetros que caracterizam os buracos negros, enfatizando os buracos negros de Schwarzschild. A partir disso, foi possível mostrar que a entropia e a área do horizonte de eventos do buraco negro possuem correlação, e, conforme formulado por Bekenstein, a variação da entropia do buraco negro, acrescida a entropia da região externa a ele, nunca decrescem, ficando conhecida como a segunda lei generalizada da Termodinâmica de Buracos Negros. Por fim, fizemos uma abordagem sucinta acerca da temperatura e da radiação Hawking, essa última atribuída ao físico britânico Stephen W. Hawking, quando o mesmo aplicou conceitos da Mecânica Quântica ao estudo dos buracos negros, obtendo a radiação que leva seu nome.

Com isso, o intuito do trabalho foi mostrar as correlações existentes entre as leis da Termodinâmica Clássica com as propriedades que caracterizam os buracos negros, e, assim, enunciar as quatro leis da Termodinâmica de Buracos Negros de Schwarzschild. Também procuramos mostrar que a radiação Hawking emitida por um buraco negro, está associada à sua temperatura, e esta, por sua vez, relaciona-se de maneira inversa a massa do mesmo. Portanto, foi possível perceber que a emissão de radiação pelo buraco negro torna-se mais intensa à medida que sua massa diminui, o que, conseqüentemente, eleva sua temperatura, conforme vemos na equação para a temperatura Hawking de um buraco negro, T_H .

Futuramente, procuraremos aprofundar tudo o que foi visto neste trabalho, a fim de inserirmos novos tópicos que estejam relacionados com os que já foram expostos. Além disso, também tem-se como possibilidade estender conceitos aqui vistos para outras classes de buracos negros, com outros parâmetros que os caracterizem, além da sua massa, como visto nos buracos negros de Schwarzschild.

REFERÊNCIAS

- [1] C. R. Almeida, *Cadernos de Astronomia* **4** (2023) 16-34.
- [2] TONIATO, J. D. Modelo acústico análogo ao buraco negro de Schwarzschild. 2010. 73 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Físicas) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- [3] d'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. United States: Oxford University Press, 1992.
- [4] BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics* **31**, n. 2, p. 161-170, 1973.
- [5] HUANG, K. *Statistical mechanics*. United States of America: John Wiley & Sons, 1987.
- [6] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D* **7**, n. 8, p. 2333-2346, 1973.
- [7] LIMA, C. C. Evaporação dos buracos negros: uma revisão das contribuições da radiação Hawking para o modelo clássico. 2022. 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Teoria da Relatividade) – Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema.
- [8] PELTOLA, A. *Studies on the Hawking radiation and gravitational entropy*. 2007. 146 f. Academic Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy – Department of Physics, University of Jyväskylä, Finland.
- [9] RYDER, L. *Introduction to general relativity*. UK: Cambridge University Press, 2020.
- [10] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [11] MCMAHON, D. *Relativity Demystified*. New York: McGraw-Hill, 2005.
- [12] BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D* **9**, n. 12, p. 3292-3300, 1974.
- [13] CHAVES, A. S. *Física: sistemas complexos e outras fronteiras*. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso Ed., 2001.

[14] GIUGNO, D. Buracos negros e termodinâmica. 2001. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Departamento de Física Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[15] SILVA, G. V. Alguns resultados acerca da termodinâmica de buracos negros no contexto da Rainbow Gravity. 2022. 56 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

[16] HARTLE, J. B. Gravity: an introduction to Einstein's general relativity. San Francisco: Addison Wesley, 2003.

[17] GOMES, D. A. Aspectos quânticos de buracos negros: radiação Hawking. 2016. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.