UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

De Anomalia de Traço à Renormalização: Um Estudo em Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo

Juiz de Fora - MG

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale

De Anomalia de Traço à Renormalização: Um Estudo em Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.
Orientador: Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora - MG
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

do Vale, Públio Rwany Batista Ribeiro.
De Anomalia de Traço à Renormalização: Um Estudo em Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo / Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale. -- 2025.
149 f.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Renormalização. 2. Procedimento de Stückelberg. 3. Simetria conforme. 4. Ação efetiva induzida por anomalia. 5. Nambu-Jona-Lasínio. I. Shapiro, Ilya Lvovich , orient. II. Título.

Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale

Título: De Anomalia de Traço à Renormalização: Um Estudo em Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Dmitry Vasilevich
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes
Universidade de São Paulo (USP)

Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dr. Wagno Cesar e Silva
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Juiz de Fora, 18/02/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro**, **Membro**, em 24/02/2025, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito**, **Usuário Externo**, em 24/02/2025, às 14:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Júlio César Fabris**, **Usuário Externo**, em 24/02/2025, às 14:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gabriel Santos Menezes**, **Usuário Externo**, em 24/02/2025, às 14:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Dmitry Vasilevich**, **Usuário Externo**, em 24/02/2025, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva**, **Usuário Externo**, em 24/02/2025, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto**, **Membro**, em 24/02/2025, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2252335** e o código CRC **30261D78**.

Aos meus pais Baltazar e Hilda meus primeiros professores e a minha cara metade Ana Carolina por todo o apoio e amor.

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido possível sem a colaboração de inúmeras pessoas que contribuíram, e ainda contribuem, para minha formação, tanto acadêmica quanto pessoal. Infelizmente, não há espaço para listar e agradecer a todos individualmente, mas expresso desde já minha profunda gratidão a cada um que, de alguma forma, fez parte desta jornada. Deixo aqui meus sinceros agradecimentos.

- Ao Prof. Dr. Ilya Shapiro, por sua orientação, sugestões de problemas e pelo incentivo contínuo ao longo do doutorado;

- Aos professores Dr. Manuel Asorey, por me receber na Universidade de Zaragoza e por sua valiosa colaboração nos trabalhos desta tese; Dr. Łeslaw Rachwał, pelos cursos ministrados durante minha pós-graduação e pelas contribuições às pesquisas aqui desenvolvidas; e Dr. Iosif Buchbinder, cuja colaboração foi indispensável nos trabalhos apresentados nesta tese. A todos, meu sincero reconhecimento e gratidão;

- Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, em especial ao Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto e ao coordenador do programa, Prof. Dr. Maikel Ballester;

- Aos secretários do Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, Sr. Domingos e Sr. Gustavo, pelo profissionalismo, eficiência e constante disposição em auxiliar com questões burocráticas;

- Aos colegas e grandes amigos que conheci ao longo da graduação, do mestrado e do doutorado: Wagno César e Nícolas Bertini, pelos estudos e inúmeras discussões sobre diversos tópicos de Física. Agradeço também a Vítor Barra, Felipe Augusto, Hemily Gomes, Samuel William, João Paulo e Mirian Reetz, por todo apoio e companheirismo;

- Aos meus familiares, em especial ao meu irmão Pablo do Vale, pelos ensinamentos, pelo entusiasmo, pelo incentivo e pelos intermináveis diálogos epistemológicos; à minha irmã, que contribuiu significativamente para minha formação pessoal; e aos meus pais, Baltazar do Vale e Hilda do Vale, meus primeiros professores e fontes inesgotáveis de inspiração.

- À minha família de São João del Rei: Lucas e Vitor Davin, Guilherme Yoshi, Airton Junior, Glênia, Celina e à família Lombello (Sebastião, Maria do Carmo, Juliana, Larissa e Ana Carolina), por me acolherem com tanto carinho e paciência;

- À minha amada noiva, Ana Carolina Lombello, pelo carinho e amor incondicionais. Obrigado por estar ao meu lado em todos os momentos, por me confortar nas aflições e por compartilhar comigo cada conquista e realização. Sem você, esta jornada não teria sido possível;

- A minha família do sul de Minas Gerais, em especial ao meu avô José Ribeiro do Vale e à minha avó Leonor Ribeiro do Vale (in memoriam), cuja memória e valores continuam a me guiar.

- À Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFísica)

- À CAPES pelo financiamento e suporte que possibilitaram a realização deste longo e desafiador trabalho;

- Finalmente, agradeço a Deus por ter criado este universo magnífico, que tanto me fascina e me enche de indagações e estímulos para explorar seus mistérios.

Lista de Publicações

O conteúdo desta tese está diretamente relacionado aos seguintes artigos publicados:

- I.L Buchbinder, P.R.B.R do Vale, G.Y. Oyadomari and I.L. Shapiro, *Renormalization of massive vector field theory coupled to scalar in curved spacetime*, Phys. Rev. **D110** (2024) 125015.

- M. Asorey, W.C. e Silva, I.L. Shapiro and P.R.B. do Vale, *Trace anomaly and induced action for a metric-scalar background*, Eur. Phys. J. **C83** (2023) 157.

- P.R.B.R. do Vale, *Possibility of spontaneous symmetry breaking in the Nambu-Jona-Lasinio model with torsion*, Eur. Phys. J. Plus **139** (2024) 1051.

- L. Rachwał and P.R.B.R. do Vale, *Generalization of conformal Hamada operators*, Eur. Phys. J. **C84** (2024) 948.

"Uma palavra que não representa uma idéia é uma coisa morta, da mesma forma que uma idéia não incorporada em palavras não passa de uma sombra".

-Lev Vygotsky.

Resumo

Esta tese investiga aspectos da renormalização e das teorias conformes, explorando a estrutura de diferentes modelos em espaço-tempo curvo. Primeiramente, analisamos a renormalização de uma teoria de eletrodinâmica escalar com campo vetorial massivo, onde a massa do campo vetorial acarreta na violação da simetria de calibre, desta forma, a simetria de calibre pode ser restaurada usando o procedimento de Stückelberg. Argumentos formais indicam a possível necessidade de termos não mínimos lineares no tensor de Ricci, mas mostramos por meio do *power counting* que tais termos violam o desacoplamento do modo longitudinal e, portanto, são proibidos. Utilizando a técnica de *heat-kernel*, calculamos as divergências em *one-loop* e demonstramos a renormalizabilidade multiplicativa da teoria sem termos não-mínimos. A partir da simetria conforme, exploramos a ação efetiva induzida por anomalia em um modelo com fundo constituído pela métrica e campos escalares. No regime de baixas energias, a análise da ação induzida revelou um novo método para a obtenção do potencial efetivo. Esta técnica foi, então, aplicada ao modelo de Nambu-Jona-Lasínio com torção, considerando um campo gravitacional externo. Após a bosonização do modelo, utilizamos a ação induzida por anomalia para determinar o potencial efetivo, o que permitiu verificar a quebra espontânea de simetria e derivar a equação de gap. Por fim, investigamos a construção de operadores conformes generalizados em d dimensões do espaço-tempo, a partir de duas abordagens distintas. A primeira se baseia em transformações conformes infinitesimais, com a introdução de novos termos por meio de análise dimensional. A segunda abordagem utiliza derivadas covariantes conformes de Wünsch para a construção dos operadores.

Palavras-chaves: Renormalização, procedimento de Stückelberg , Simetria conforme, Ação efetiva induzida por anomalia, Nambu-Jona-Lasínio.

Abstract

This thesis investigates aspects of renormalization and conformal theories, exploring the structure of different models in curved spacetime. Initially, we analyze the renormalization of a theory of scalar electrodynamics with a massive vector field, where the mass of the vector field leads to the violation of gauge symmetry, making the Stückelberg procedure necessary. Formal arguments suggest the possible need for non-minimal linear terms in the Ricci tensor, but we show, through power counting, that such terms violate the decoupling of the longitudinal mode and, therefore, are forbidden. Using the heat-kernel technique, we calculate the divergences in one-loop and demonstrate the possibility of renormalizing the theory. From the conformal symmetry, we explore the effective action induced by anomaly in a model with a background consisting of the metric and scalar fields. In the low-energy regime, the analysis of the induced action revealed a new method for obtaining the effective potential. This technique was then applied to the Nambu-Jona-Lasinio model with torsion, considering an external gravitational field. After the bosonization of the model, we use the anomaly-induced action to determine the effective potential, which allows us to verify spontaneous symmetry breaking and derive the gap equation. Finally, we investigate the construction of generalized conformal operators in d dimensions of spacetime, from two distinct approaches. The first is based on infinitesimal conformal transformations, with the introduction of new terms through dimensional analysis. The second approach uses Wünsch's conformal covariant derivatives for the construction of the operators.

Keywords: Renormalization, Stückelberg procedure, Conformal symmetry, Anomaly-induced effective action, Nambu-Jona-Lasinio.

Sumário

1 Introdução **16**

2 Sobre renormalização de teoria de campo vetorial massivo **23**

2.1 Eletrodinâmica escalar em espaço-tempo curvo com campo vetorial massivo . 24

2.1.1 Reformulação usando o procedimento de Stückelberg 25

2.2 *Power Counting* e Renormalização no Espaço-Tempo Curvo 26

2.2.1 Modelo com Campo Auxiliar 27

2.2.2 O modelo sem campo auxiliar 30

2.2.3 Renormalizabilidade da teoria vetorial mínima 32

2.3 Procedimento de Stückelberg e divergências em *one-loop* 35

2.4 Equações do grupo de renormalização em *one-loop* 40

3 Traço anômalo e ação efetiva induzida por anomalia **43**

3.1 Anomalia conforme com campos escalares 44

3.2 Integração da anomalia com um campo escalar 48

3.3 Ação efetiva induzida por anomalia em baixas energias 51

3.4 Ambiguidades nos termos de derivadas totais 55

4 A influência da torção na quebra espontânea de simetria no modelo NJL **62**

4.1 O modelo de Nambu-Jona-Lasínio 63

4.2 Inclusão de campos auxilares 64

4.3 Ação efetiva induzida por anomalia 66

4.4 Ação efetiva no limite IR no setor escalar-torção 68
4.5 Potencial Efetivo e Equação de Gap 70

5 Operadores Conformes: Generalização do operador Hamada 75
5.1 Operadores conformes e ações conformes 76
5.2 Operador Hamada em $d = 6$ 78
5.2.1 Termos na generalização do Operador Hamada 79
5.3 Método de derivação de Δ_6 em d geral 82
5.3.1 Consequências da invariância de escala global 83
5.3.2 Transformações conformes infinitesimais linearizadas 84
5.4 O Operador Hamada em $d = 6$ reconsiderado 87
5.5 Teorema sobre a inexistência de Δ_n em $d = n - 2$ 88
5.6 Derivadas Conformes Covariantes de Wünsch 91
5.7 Nova construção do operador Hamada generalizado 99

6 Conclusão 107

A Do Espaço curvo à torção: Uma breve revisão de gravitação 111
A.1 Convenções, notações e demais utensílios 111
A.2 Relatividade Geral 113
A.3 ECT com termo de Holst e ação de Dirac 114

B Usando a abordagem do operador auxiliar 117
B.1 Operador de Barvinsky-Vilkovisky para SQED com massa vetorial 117

C Expressões intermediárias para divergências de *one-loop* 120
C.1 Expressões intermediárias do método de Schwinger-DeWitt 120

D Cálculos pormenores do potencial efetivo de NJL 123
D.1 Obtenção do Potencial efetivo 123
D.2 Equação de Gap no espaço-tempo plano 125

E Sobre os operadores de Ørsted e Paneitz 126
E.1 Operador de Ørsted 126
E.2 Operador de Paneitz 128

F Soluções para dedução do Operador Hamada em diferente bases 131
F.1 Soluções para os coeficientes presentes em Δ_6 131

F.2 Identidades algébricas das derivadas de Wünch 135

Lista de Figuras

2.1 *Diagramas que contribuem para termos vetoriais bilineares na ordem de one-loop.* 32

2.2 *Um dos diagramas de ordens superiores esperado para gerar termos não mínimos.* 33

4.1 *O comportamento de diferentes potências efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$, curvatura $R/\Lambda^2 = 0.05$ e torção $S^2/\Lambda^2 = 0.01$.* 71

4.2 *O comportamento do potencial efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$ em função de diferentes valores de torção* 72

4.3 *O gráfico da massa dinâmica em função de diferentes valores de torção.* . . 73

4.4 *A torção é representada em função da constante de acoplamento que demarca a fronteira entre a região de fase simétrica e fase quebrada.* 73

4.5 *O potencial efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$ e torção $S^2/\Lambda^2 = 0.01$ para diferentes valores de n.* 74

1

Introdução

"Se a aparência e a essência das coisas coincidissem, a ciência seria desnecessária.".
-Karl Marx.

As simetrias desempenham um papel fundamental na Física Teórica, especialmente na Teoria Quântica de Campos (*Quantum Field Theory*, QFT). Sabemos que à existência de simetrias estão sempre associadas grandezas conservadas, o que nada mais é do que uma consequência do Teorema de Noether. De fato, a própria natureza evidencia a importância das simetrias, pois, mesmo sem conhecer as soluções detalhadas das equações de movimento, é possível extrair informações valiosas analisando as invariâncias da ação.

Exemplos importantes de simetrias na física incluem a simetria de Poincaré, que está associada à Relatividade Especial (ou Relatividade Restrita), e a simetria de calibre, essencial em teorias que descrevem interações fundamentais. Um exemplo notável é o grupo $U(1)$, que representa a simetria de calibre da Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). Da mesma forma, a Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD), que descreve a interação forte entre quarks e glúons, possui como grupo de simetria de calibre o grupo $SU(3)_{\text{cor}}$, responsável pela estrutura da carga de cor.

Embora as simetrias desempenhem um papel fundamental na formulação das teorias

físicas, a introdução de termos massivos pode, em certas situações, levar à quebra de simetria no nível clássico. Um exemplo importante ocorre em teorias com campos vetoriais massivos (modelo do tipo Proca), onde a presença de um termo de massa pode comprometer a invariância de calibre. Outro caso relevante surge em teorias com simetria conforme, onde a introdução de um termo massivo viola a invariância sob transformações conforme. Vamos analisar casos e modelos particulares de ambas teorias com simetria de calibre e conforme. Neste primeiro momento, focaremos na análise de teorias com campos vetoriais massivos, estabelecendo o problema central do modelo que desejamos investigar e os objetivos que buscamos alcançar.

A teoria de um campo vetorial massivo (modelo de Proca) descreve uma partícula vetorial massiva de spin-1, no qual a presença de um termo massivo na Lagrangiana distingue essa teoria das teorias de calibre, onde os campos vetoriais correspondem a partículas sem massa. Além de ser um tema bem estabelecido na física de partículas e nas formulações formais da QFT, o modelo de Proca tem despertado crescente interesse, especialmente em espaço-tempo curvo, devido a suas aplicações recentes em cosmologia. Para algumas dessas abordagens, veja, por exemplo, [1–4]. Também se destacam modelos cosmológicos baseados em ações modificadas ou generalizadas para campos vetoriais massivos, como discutido em [5–7]. Além disso, aplicações anteriores desse modelo na gravitação podem ser encontradas em [8–10].

A exploração de uma teoria no nível quântico é relevante, não apenas por causa das correções quânticas à ação clássica. Pelo menos igualmente importante é o fato de que a consistência da teoria quântica de campos permite restringir a forma da ação clássica. Nesse aspecto, o campo vetorial massivo e suas extensões para o espaço-tempo curvo atraíram alguma atenção. Em particular, as publicações [11–13] foram dedicadas à formulação da teoria em espaço-tempo curvo e à avaliação dos efeitos quânticos do vácuo. O problema a ser resolvido nesses artigos mostrou-se muito difícil, e os cálculos correspondentes produziram resultados conflitantes. A razão foi que, nesses trabalhos, o modelo livre de Proca em espaço curvo foi formulado de forma geral, com dois termos não mínimos $R_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$ e $RA^{\mu}A_{\mu}$, onde R é o escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, e A_{μ} os campos vetoriais. Por outro lado, deve-se questionar por que é necessário incluir esses termos. Considerando a situação bem conhecida com a interação não mínima entre curvatura e campo escalar (veja, por exemplo, [14]), a resposta requer uma análise cuidadosa de uma teoria interagente.

Uma característica fundamental das teorias de campos em espaço-tempo curvo é a possibilidade de um acoplamento não mínimo entre os campos e a gravidade. Um exemplo clássico desse tipo de interação é o termo $\xi R\varphi^2$ no Lagrangiano de um campo escalar. A necessidade

desse termo torna-se evidente no contexto da teoria quântica de campos interagente, onde o acoplamento não mínimo é essencial para garantir a renormalizabilidade da teoria [14].

Dado esse cenário, é natural questionar se uma situação análoga ocorre para um campo vetorial massivo acoplado à matéria em espaço-tempo curvo. Em princípio, a interação com a matéria pode induzir termos divergentes não mínimos da forma $R_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$ e $RA^{\mu}A_{\mu}$ no setor vetorial. Nesse caso, a exigência de renormalizabilidade implicaria a introdução desses termos já na ação clássica, servindo como uma completude ultravioleta da teoria.

A renormalizabilidade do campo vetorial massivo acoplado a férmions em espaço plano foi amplamente estudada por diversos autores [15]. Uma análise abrangente sobre a renormalizabilidade no espaço plano foi apresentada no trabalho de [16]. Além disso, vale mencionar a recente revisão [17], onde são discutidos aspectos relacionados ao tema e se encontram referências adicionais.

Nessa tese, desejamos provar a renormalizabilidade do modelo de Proca acoplado a um campo escalar complexo em espaço curvo usando dois métodos: um é a generalização para o espaço curvo da análise considerada em [16], e o outro é a análise da integral funcional para a teoria de calibre correspondente com o campo de Stückelberg. O *power counting* (contagem de potências), em ambas as abordagens, indica que os termos não mínimos mencionados são formalmente necessários. No entanto, esses termos não mínimos violam o desacoplamento do modo longitudinal do campo vetorial e, portanto, são proibidos. O mesmo resultado segue da análise baseada na simetria de calibre restaurada por meio do truque de Stückelberg e na conhecida dependência de fixação de calibre em QFT. Como resultado, a renormalizabilidade multiplicativa em um fundo de espaço-tempo curvo não exige que levemos em conta os termos não mínimos dependentes da curvatura.

Os cálculos de *one-loop* tanto na teoria livre do campo vetorial massivo quanto nos modelos interagentes podem ser realizados usando a técnica covariante de Schwinger-DeWitt (veja, por exemplo, [18, 19] e também [14, 20] para uma introdução detalhada). A aplicação dessa técnica à teoria livre do campo vetorial em espaço curvo pode ser encontrada em [19] e [21] usando duas abordagens diferentes, mas com resultados equivalentes. O método de [19] é baseado na introdução de um operador auxiliar que elimina a degenerescência da forma bilinear da ação [19]. A segunda abordagem baseia-se no procedimento de Stückelberg [21] (veja também [12] e [13]), que envolve a introdução de um campo escalar auxiliar, restaurando a simetria de calibre violada pela massa do vetor. Aqui, seguimos a segunda abordagem, que acreditamos ser a mais elegante e simples o suficiente para cálculos diretos de *loop*.

Outra simetria de grande interesse em Teoria Quântica de Campos (QFT) é a simetria

conforme, pois está na base das teorias conformes e desempenha um papel fundamental na obtenção da ação efetiva por meio de um método distinto do formalismo de Schwinger-DeWitt, conhecido como ação induzida por anomalia.

No entanto, antes de explorarmos a simetria conforme em detalhes, é útil compreender alguns aspectos da gravitação clássica, pois essa teoria fornece o cenário natural para a formulação de teorias conformes em espaço-tempo curvo.

A teoria da relatividade geral (GR) é uma teoria relativística bem-sucedida da gravitação que nos forneceu uma nova compreensão do espaço e do tempo, desde então renomeados como espaço-tempo. Nesse contexto, a gravidade deixa de ser interpretada como uma força e passa a ser entendida como a curvatura do tecido espaço-tempo. Essa teoria geral de Einstein nos mostrou que o próprio espaço-tempo pode ser visto como tendo várias características incomuns e também possuindo conjuntos específicos de simetrias, diferentes das simetrias presentes no espaço plano (espaço euclidiano ou espaço-tempo de Minkowski), que anteriormente era geralmente considerado como o pano de fundo para toda a física não gravitacional. Estamos falando aqui de uma coleção de aspectos e propriedades dos espaços-tempo que mostram que eles são mais flexíveis e dinâmicos do que se pensava anteriormente. Portanto, podemos dizer nesse conjunto teórico que a "gravidade" é um subproduto da presença de um espaço-tempo tangível e elástico, que por si só é um objeto proeminente na relatividade geral.

Uma característica fundamental dessa nova compreensão do espaço e do tempo é conhecida como invariância por difeomorfismos, que pode ser interpretada simplesmente como "uma invariância das leis da física entre sistemas de coordenadas distintos", também conhecida como covariância dessas leis físicas em relação a transformações gerais de coordenadas. Quando estas últimas são assumidas como mapeamentos diferenciáveis entre diferentes coordenações da mesma variedade, então falamos de difeomorfismos. A simetria em relação a difeomorfismos arbitrários (mudanças arbitrárias de sistemas de coordenadas e referenciais) é tipicamente considerada como a única simetria da teoria gravitacional einsteiniana.No entanto, essa não representa necessariamente a simetria mais ampla que uma teoria gravitacional relativística pode admitir. A invariância por difeomorfismos pode ser estendida de diversas maneiras sem comprometer a consistência da teoria. Uma das direções para tais extensões é a introdução de uma outra simetria muito importante para GR, conhecida como simetria conforme.

A simetria conforme foi introduzida e estudada pela primeira vez por Hermann Weyl [22, 23] e tem um papel significativo na física, principalmente devido às suas aplicações que

cobrem várias áreas, como a matéria condensada, mecânica estatística, física de altas energias, cosmologia e teoria quântica de campos.

Podemos afirmar que a simetria conforme é uma das ferramentas mais fundamentais na teoria semiclássica da gravidade. E esse tipo de teoria conforme, teorias com simetria conforme, permite a obtenção da anomalia conforme [24–27] e da ação efetiva induzida por anomalia [28–31]. Ambas desempenham papéis cruciais na descrição de correções em *loop* dentro da abordagem semiclássica.

Lembre-se que na QFT, a ação efetiva quântica, ou simplesmente ação efetiva, representa uma formulação modificada da ação clássica, que inclui as correções quânticas. A ação efetiva desempenha um papel crucial ao fornecer uma representação visual e um entendimento mais profundo das interações quânticas, oferecendo uma abordagem eficiente para analisar fenômenos quânticos.

Existem diversas abordagens para calcular a ação efetiva, cada uma com suas vantagens e limitações, dependendo da natureza específica do problema em questão. Um exemplo notável é a expansão de Schwinger-DeWitt [18], na qual a ação efetiva é expressa como uma soma infinita de termos dependentes do tensor de curvatura e suas derivadas. Apesar de os cálculos serem geralmente limitados aos primeiros termos dessa expansão, essa abordagem se mostra útil na resolução de uma variedade de problemas, como pode ser observado em [14]. Outra abordagem relevante para a obtenção da ação efetiva baseia-se na anomalia conforme, levando à formulação da chamada ação efetiva induzida por anomalia.

A anomalia em uma teoria métrico-escalar, incluindo autointeração no setor escalar, foi bem discutida na literatura usando diferentes métodos [32–35], no entanto, esperamos adicionar vários aspectos relevantes ao assunto. A seguir, derivamos e discutimos a anomalia do traço e a ação efetiva induzida por anomalia para o caso em que o fundo é formado pela métrica e também por campos escalares.

Demonstramos, por meio de um modelo com fundo métrico-escalar, como avaliar as contribuições baseadas na anomalia conforme em baixas energias. De fato, tomar o limite IR em uma teoria sem massa é uma questão não trivial. Posteriormente, por meio de uma técnica associada ao grupo de renormalização, foi possível obter o potencial efetivo para o modelo, introduzindo, assim, uma abordagem alternativa para a sua determinação.

Recentemente essa nova técnica foi aplicada em uma ação fermiônica em [36], demonstrando a possibilidade de quebra de simetria no setor de torção. Motivados por esse resultado e inspirados em [37], buscamos compreender como o mecanismo de quebra espontânea de simetria ocorre no modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) sob a influência de torção externa,

empregando a mesma metodologia. Diferentemente dos trabalhos anteriores, nosso foco será investigar como o setor escalar pode influenciar o potencial efetivo, explorando seu papel na dinâmica da quebra de simetria.

Por fim, ainda no contexto das teorias conformes, ou mais precisamente, da construção de teorias conformes, este trabalho também se dedica ao estudo das propriedades conformes de operadores escalares com duas, quatro e seis derivadas em dimensões gerais d do espaço-tempo. Esses estudos são particularmente relevantes devido à ampla gama de aplicações, que vão além das já esperadas na geometria diferencial conforme euclidiana de variedades curvas. Em especial, nossos resultados também encontram utilidade na teoria da matéria condensada, permitindo a descrição do comportamento conforme de certas excitações de quase-partículas escalares de ordem superior acopladas à geometrias de espaços efetivamente de dimensões mais altas.

Como exemplo de aplicação, consideramos excitações de fônons que se propagam em folhas bidimensionais curvadas de grafeno, sujeitas a movimento e deformações temporais. Além disso, nossos resultados são pertinentes para modelos análogos de gravidade euclidiana na presença de campos escalares e simetria de Weyl. No caso de assinatura métrica Minkowskiana, o operador escalar conforme estudado fornece uma solução natural para o problema do acoplamento conforme à gravidade de um campo escalar cujo operador cinético, em espaço-tempo plano, contém derivadas de ordem superior—no caso específico deste trabalho, seis derivadas.

Os invariantes conformes, como tensores, operadores diferenciais conformemente covariantes e grupos de holonomia, desempenham um papel central tanto na geometria diferencial quanto na física teórica. Entre os exemplos bem conhecidos, estão os operadores de Ørsted-Penrose [38–40], Paneitz [41–43] e Hamada [44, 45].

Proporemos uma forma geral de operadores escalares conformes em dimensões gerais d com coeficientes a priori indeterminados. A estrutura tensorial dos termos na expansão dos operadores será mantida fixa, enquanto buscaremos os valores desses coeficientes numéricos exigindo a covariância conforme completa desses operadores ao atuar em um campo escalar com peso conforme adequadamente atribuído sob transformações de Weyl no cenário da GR.

Embora os operadores escalares conformes de segunda e quarta ordem nas derivadas em suas formas generalizadas para qualquer dimensão d (operadores de Ørsted e Paneitz, respectivamente) já tenham sido relatados na literatura [40–43], vamos analisá-los novamente. Isso ocorre porque eles têm características interessantes que não podem ser ignoradas, por exemplo, sua dependência singular nos coeficientes de expansão em termos escalares da GR no

número de dimensões d e a presença de algumas dimensões críticas d_{crit} relacionadas à ordem das derivadas. Além disso, esses operadores conformes são blocos de construção úteis para obter uma forma generalizada do operador Hamada [44,45] (que chamamos de operador com seis derivadas atuando em escalares e transformando-se covariantemente sob transformações conformes gerais) em qualquer dimensão d.

A estrutura desta tese está ordenada na seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentamos a teoria da eletrodinâmica escalar com campo vetorial massivo. Utilizamos o procedimento de Stückelberg para restaurar a simetria de calibre do modelo e, em seguida, construímos sua versão renormalizável.

No Capítulo 3, aplicamos a anomalia conforme para obter a ação efetiva induzida por anomalia em diferentes formas para o *toy model*. A partir da forma não local, derivamos o potencial efetivo.

No Capítulo 4, utilizando a nova técnica para obtenção do potencial efetivo apresentada na seção anterior, mostramos um cenário de quebra espontânea de simetria no modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) com torção.

No Capítulo 5, construímos operadores conformes generalizados de 2, 3 e 4 derivadas em d dimensões do espaço-tempo, utilizando duas abordagens distintas. O teorema da não-existência é demonstrado de maneira independente, porém simplificada.

No Capítulo 6, apresentamos as conclusões e discutimos possíveis perspectivas para o trabalho.

Os apêndices deste trabalho foram elaborados com dois objetivos principais: complementar o conteúdo teórico apresentado nos capítulos centrais com material adicional de Física e Matemática, e preservar a fluidez do texto principal através da transferência de desenvolvimentos matemáticos mais extensos. Em particular, recomenda-se ao leitor consultar a Seção A do Apêndice, onde são estabelecidas de forma sistemática todas as convenções de notação adotadas ao longo desta tese.

2

Sobre renormalização de teoria de campo vetorial massivo

Este capítulo é baseado no trabalho publicado [46].

> *"O matemático está envolvido num jogo do qual ele mesmo escreve as regras, enquanto o físico joga com as regras fornecidas pela natureza".*
> -Paul Dirac.

Neste capítulo, analisamos a renormalização de um campo vetorial massivo interagindo com um campo escalar carregado em um espaço-tempo curvo. Iniciando com a teoria minimamente acoplada à gravidade externa e utilizando formulações com e sem campos de Stückelberg, demonstramos que o modo longitudinal do campo vetorial é completamente desacoplado, e a teoria restante, composta pelo campo vetorial transversal, é renormalizável por *power counting*.

Os argumentos formais baseados na covariância e no *power counting* indicam que a renormalizabilidade multiplicativa da teoria interagente poderia exigir a introdução de dois termos não mínimos, lineares no tensor de Ricci, para o setor vetorial. No entanto, uma análise mais detalhada demonstra que esses termos não mínimos violam o desacoplamento do modo longitudinal, o que os tornam proibidos.

Para verificar os argumentos gerais, derivamos as divergências em *one-loop* na QED escalar com campo vetorial massivo, utilizando o procedimento de Stückelberg e a técnica de *heat-kernel*. A teoria, desprovida dos termos não mínimos para o setor vetorial, confirma-se

renormalizável em *one-loop*. As funções beta em *one-loop* mostram-se independentes da escolha do fixador de calibre e podem ser utilizadas para derivar o potencial efetivo.

O conteúdo desse capítulo está organizado da seguinte maneira. Inicialmente, apresentamos uma revisão breve do modelo escalar-vetorial com um campo vetorial massivo e introduzimos o procedimento de Stückelberg. Posteriormente, demonstramos a prova da renormalizabilidade da teoria por *power counting*, concluindo com argumentos que sustentam a renormalizabilidade multiplicativa da teoria mínima. A Seção 2.3 aborda o cálculo das divergências em *one-loop*, utilizando o método de campo de fundo, o procedimento de Stückelberg e da técnica de Schwinger-DeWitt. Embora o texto principal forneça detalhes técnicos suficientes, algumas fórmulas intermediárias foram separadas e se encontram reunidas no Apêndice C. Adicionalmente, uma abordagem alternativa para os cálculos, que emprega o operador auxiliar e analisa as dificuldades associadas, é apresentada no Apêndice B. Por fim, os elementos do grupo de renormalização, como as funções beta e gama, são examinados na Seção 2.4, onde também introduzimos a expressão para o potencial efetivo do campo escalar.

2.1 Eletrodinâmica escalar em espaço-tempo curvo com campo vetorial massivo

Começaremos com a formulação geral da teoria de campo vetorial massivo, acoplado a um campo escalar complexo e a um campo gravitacional externo. Diferentemente da eletrodinâmica escalar usual, que possui uma simetria de calibre Abeliana, a teoria considerada aqui não é invariante de calibre devido à presença da massa do campo vetorial.

A ação da eletrodinâmica escalar massiva, minimamente acoplada à gravidade no setor vetorial, é descrita na forma

$$S[A,\Phi^*,\Phi] \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\frac{1}{2}M_v^2A_\mu^2+\left(\mathscr{D}^\mu\Phi\right)^*\left(\mathscr{D}_\mu\Phi\right)-V\left(\Phi^*\Phi\right)\right\}, \tag{2.1}$$

onde

$$V\left(\Phi^*\Phi\right)=m^2\Phi^*\Phi+\lambda\left(\Phi^*\Phi\right)^2-\xi R\Phi^*\Phi\,, \tag{2.2}$$

e as demais grandezas são definidas como $F_{\mu\nu}^2=F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ e $A_\mu^2=A_\mu A^\mu$. A massa do campo vetorial é M_v, a massa do campo escalar é m, e ξ é o parâmetro de interação não mínima entre o escalar e a curvatura, conhecido por ser relevante em espaço-tempo

curvo [14]. Além disso, as derivadas covariantes são

$$\mathscr{D}_\mu\Phi = \nabla_\mu\Phi - ieA_\mu\Phi, \qquad \left(\mathscr{D}_\mu\Phi\right)^* = \nabla_\mu\Phi^* + ieA_\mu\Phi^*. \tag{2.3}$$

Aqui, λ e e representam, respectivamente, as constantes de auto-interação escalar e o acoplamento entre os campos vetorial e escalar.

2.1.1 Reformulação usando o procedimento de Stückelberg

Uma peculiaridade da teoria em consideração é que, embora o setor vetorial da teoria (2.1) como um todo não seja invariante de calibre, o termo cinético do campo vetorial é derivado de uma teoria invariante de calibre. Essa característica introduz dificuldades nos cálculos quânticos. Em particular, a técnica covariante de Schwinger-DeWitt, utilizada para obter a ação efetiva em um campo gravitacional externo, não pode ser aplicada diretamente.

Para o caso de uma teoria de vetor massivo livre em um campo gravitacional externo, essas dificuldades foram superadas com o uso de dois métodos distintos, como descrito em [19,21]. Entretanto, ao tentar estender esses métodos ao modelo interativo que inclui um vetor massivo e um campo escalar (2.1), surge uma nova situação: diferentemente do caso puramente vetorial, os dois métodos fornecem resultados distintos na presença de um campo escalar.

A próxima seção descreve um dos procedimentos de cálculo utilizados para tratar essa dificuldade, enquanto as complicações associadas ao outro método são discutidas em detalhes no Apêndice B.

Uma abordagem para lidar com essas dificuldades envolve o procedimento de Stückelberg, que introduz um campo escalar real adicional, θ, redefinindo o campo vetorial como

$$A_\mu \;\longrightarrow\; A_\mu - \frac{1}{M_v}\nabla_\mu\theta. \tag{2.4}$$

Com essa redefinição, a ação da teoria assume a forma

$$\begin{aligned} S'[A,\theta,\Phi^*,\Phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\Bigg\{ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}M_v^2\left(A_\mu - \frac{1}{M_v}\nabla_\mu\theta\right)^2 \\ &+ g^{\mu\nu}\left(D_\mu\Phi\right)^*\left(D_\nu\Phi\right) - V\left(\Phi^*\Phi\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

A última ação é invariante sob as transformações de calibre

$$\begin{aligned} &\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{ie\zeta(x)}\Phi, \qquad \Phi^* \longrightarrow \Phi'^* = e^{-ie\zeta(x)}\Phi^*, \\ &A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu\zeta(x) \quad \text{e} \quad \theta \longrightarrow \theta' = \theta + M_v\zeta(x)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando a invariância de calibre da ação acima, podemos impor a condição de calibre $\theta = const$, que recupera a ação original (2.1). Isso mostra até que ponto as teorias (2.1) e (2.5) são classicamente equivalentes. A vantagem da teoria (2.5) é que ela possui invariância de calibre e permite a aplicação do esquema correspondente de quantização.

As equações de movimento para todos os campos da ação (2.5) têm a forma

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^* &= \mathscr{D}_\mu\Big(\mathscr{D}^\mu\Phi\Big)^* - \Big(m^2 - \xi R + 2\lambda\Phi^*\Phi\Big)\Phi^* = 0,\\
\mathscr{E} &= \mathscr{D}^\mu\Big(\mathscr{D}_\mu\Phi\Big) - \Big(m^2 - \xi R + 2\lambda\Phi^*\Phi\Big)\Phi = 0,\\
\mathscr{E}_\theta &= -\nabla^\mu\nabla_\mu\theta + M_v\nabla_\mu A^\mu = 0,\\
\mathscr{E}^\nu &= \partial_\mu F^{\mu\nu} - M_v^2\Big(A^\nu - \frac{1}{M_v}\nabla^\nu\theta\Big) + J^\nu = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $J^\nu = ie\Big[\Phi^*\mathscr{D}^\nu\Phi - \Phi(\mathscr{D}^\nu\Phi)^*\Big]$.

É útil considerar uma combinação linear real das Eqs. (2.7) com constantes arbitrárias α_1, α_2 e α_3, teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{2}\Big(\Phi^*\mathscr{E} + \Phi\mathscr{E}^*\Big) + \alpha_2\mathscr{E}_\theta + \alpha_3 A_\nu\mathscr{E}^\nu = \frac{\alpha_1}{2}\Big[\Phi^*\mathscr{D}^\mu\Big(\mathscr{D}_\mu\Phi\Big) + \Phi\mathscr{D}^\mu\Big(\mathscr{D}_\mu\Phi\Big)^*\Big]\\
&- \alpha_1\Big(m^2 - \xi R\Big)\Phi^*\Phi - 2\alpha_1\lambda\Big(\Phi^*\Phi\Big)^2 - \alpha_2\theta\nabla^\mu\nabla_\mu\theta + \alpha_2 M_v\theta\nabla_\mu A^\mu\\
&+ \alpha_3 A_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} - \alpha_3 M_v^2 A_\nu^2 + \alpha_3 M_v A_\nu\nabla^\nu\theta + ie\alpha_3 A_\nu\Big[\Phi^*\mathscr{D}^\nu\Phi - \Phi(\mathscr{D}^\nu\Phi)^*\Big].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Uma expressão equivalente será usada na Sec. 2.3 para identificar cargas efetivas essenciais no grupo de renormalização.

2.2 *Power Counting* e Renormalização no Espaço-Tempo Curvo

Nesta seção, generalizamos a análise de *power counting* feita no artigo [16] para um campo vetorial massivo minimamente acoplado a férmions no espaço-tempo plano (ver também a revisão [17]) para a teoria no espaço-tempo curvo. Nosso objetivo principal é formular a ação no espaço-tempo curvo que garanta a renormalizabilidade da teoria de um campo vetorial massivo acoplado a escalares carregados. Similarmente a [16], mostramos que a teoria em consideração é renormalizável por *power counting*, mas também destacamos novos aspectos de sua renormalização no espaço-tempo curvo. A análise é realizada de duas maneiras: no contexto de um modelo com um campo auxiliar de Stückelberg (2.5) e diretamente usando a forma original do modelo (2.1). Os resultados relacionados à renormalizabilidade obviamente

coincidem, o que não é surpreendente, já que os modelos são classicamente equivalentes e não há fontes de anomalias quânticas.

A consideração pode ser facilmente estendida para incluir a interação com férmions de Dirac ou com ambos os campos escalares e férmions no espaço-tempo curvo.

2.2.1 Modelo com Campo Auxiliar

Nosso ponto de partida será a ação invariante de calibre apresentada na equação (2.5). As transformações de calibre possuem a forma (2.6). Para iniciar a análise, consideramos o funcional gerador das funções de Green

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, J, J^*] \;=\; & \int \mathscr{D}A\, \mathscr{D}\theta\, \mathscr{D}\,\Phi^*\, \mathscr{D}\,\Phi\; \delta[\chi] \\ & \times\; \exp\left\{ iS'[A,\theta,\Phi^*,\Phi] + i\int d^4x\sqrt{-g}\Big(A_\mu J^\mu + \Phi^* J + \Phi J^*\Big)\right\}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde χ é uma função do fixador de calibre.

Reescrevemos agora o campo vetorial como a soma de suas componentes transversal e longitudinal, $A_\mu = A^\perp_\mu + \partial_\mu\varphi$, onde a condição $\nabla^\mu A^\perp_\mu = 0$ é satisfeita. Com essa decomposição, a ação assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} S'[A^\perp,\varphi,\theta,\Phi^*,\Phi] \;=\; & \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ -\frac{1}{4}F^\perp_{\mu\nu}F^{\perp\mu\nu} + \frac{1}{2}M_v^2 g^{\mu\nu}\Big(A^\perp_\mu + \partial_\mu\varphi - \frac{1}{M_v}\partial_\mu\theta\Big) \\ & \times\Big(A^\perp_\nu + \partial_\mu\varphi - \frac{1}{M_v}\partial_\nu\theta\Big) + g^{\mu\nu}\Big(\partial_\mu + ieA^\perp_\mu + ie\partial_\mu\varphi\Big)\Phi^*\Big(\partial_\nu - ieA^\perp_\nu - ie\partial_\mu\varphi\Big)\Phi \\ & - V\left(\Phi^*\Phi\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde o potencial escalar clássico $V(\Phi^*\Phi)$ é dado por (2.2). Para prosseguir, é conveniente realizar uma mudança de variáveis no integral funcional, $A_\mu \to (A^\perp_\mu, \varphi)$, com $F^\perp_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Esta é uma mudança linear de variáveis, portanto, o Jacobiano correspondente depende apenas da métrica externa e não dos campos $A^\perp_\mu, \varphi$. Como estamos interessados na renormalização do setor de matéria da ação efetiva (ver, por exemplo, [21]), este Jacobiano será omitido no restante desta tese. O funcional gerador será dado por

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, J, J^*] \;=\; & \int \mathscr{D}A^\perp\, \mathscr{D}\varphi\, \mathscr{D}\theta\, \mathscr{D}\Phi^*\, \mathscr{D}\Phi\; \delta[\chi] \\ & \times\; \exp\left\{ iS'[A^\perp,\varphi,\theta,\Phi^*,\Phi] + i\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big(A_\mu J^\mu + \Phi^* J + \Phi J^*\Big)\right\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde χ é a condição de fixação de calibre.[1] É conveniente adotar tal condição na forma

$$\chi \;=\; \frac{\theta}{M_v} \;-\; \varphi. \tag{2.12}$$

Devido ao fator $\delta\Big(\chi\Big)$ em (2.11), obtemos

$$g^{\mu\nu}\Big(A^{\perp}_{\mu} + \partial_{\mu}\varphi - \frac{1}{M_v}\partial_{\mu}\theta\Big)\Big(A^{\perp}_{\nu} + \partial_{\nu}\varphi - \frac{1}{M_v}\partial_{\nu}\theta\Big) \;=\; g^{\mu\nu}A^{\perp}_{\mu}A^{\perp}_{\nu}. \tag{2.13}$$

Como resultado, obtemos a seguinte ação no integrando

$$\begin{aligned} S'[A^{\perp},\Phi,\Phi^*,\Phi] \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}{M_v}^2 g^{\mu\nu}A^{\perp}_{\mu}A^{\perp}_{\nu} \\ &+ g^{\mu\nu}\Big(\partial_{\mu} + ieA^{\perp}_{\mu} + ie\partial_{\mu}\varphi\Big)\Phi^*\Big(\partial_{\nu} - ieA^{\perp}_{\nu} - ie\partial_{\mu}\varphi)\Phi - \;V\left(\Phi^*\Phi\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Em seguida, realizamos mudanças de variáveis no integral funcional

$$\Phi \to e^{ie\varphi}\Phi \qquad \text{e} \qquad \Phi^* \to e^{-ie\varphi}\Phi^*, \tag{2.15}$$

sem alterar as notações para as variáveis. Após isso, o campo φ desaparece completamente da ação, e obtemos o funcional gerador na forma

$$\begin{aligned} Z[J_{\mu},J,J^*] \;=\; &\int \mathscr{D}A^{\perp}\,\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\theta\,\mathscr{D}\Phi^*\,\mathscr{D}\Phi\;\delta\Big(\frac{\theta}{M_v} - \varphi\Big) \\ &\times\;\exp\Big\{iS'[A^{\perp},\theta,\Phi^*,\Phi] \;+\; i\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big(A_{\mu}J^{\mu} + \Phi^*J + \Phi J^*\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Integrando sobre φ, obtemos

$$\begin{aligned} Z[J_{\mu},J,J^*] \;=\; &\int \mathscr{D}A^{\perp}\,\mathscr{D}\theta\,\mathscr{D}\Phi^*\,\mathscr{D}\Phi\;\exp\Big\{iS'[A^{\perp},\theta,\Phi^*,\Phi] \\ &+\; i\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big(A^{\perp}_{\mu}J^{\perp\mu} + \frac{1}{M_v}J^{\mu}\partial_{\mu}\theta \;+\; \Phi^*J + \Phi J^*\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Na última expressão, introduzimos as fontes transversais e longitudinais de acordo com $J^{\mu} = J^{\perp}_{\mu} + \partial_{\mu}j$, onde $\nabla^{\mu}J^{\perp}_{\mu} = 0$. Desconsiderando derivadas totais, $J^{\mu}\partial_{\mu}\theta = -\,\theta\Box j$. Agora podemos integrar sobre θ. De acordo com a propriedade da função delta, essa operação dá

$$\delta[\Box j] \;=\; \frac{1}{Det\,\Box}\;\delta[j]\,. \tag{2.18}$$

[1] O determinante de Faddeev-Popov correspondente depende apenas da métrica externa e, portanto, não afeta a renormalizabilidade no setor de matéria. Por essa razão, ele será omitido.

A expressão $Det\,\Box$ depende apenas da métrica externa e pode ser ignorada ao analisar a renormalizabilidade no setor de campos de matéria. Assim, chegamos à expressão

$$Z[J_\mu, J, J^*] = \delta[j] \int \mathscr{D}A^\perp \, \mathscr{D}\Phi^* \, \mathscr{D}\Phi \, \exp\Big\{ i[S[A^\perp, \theta, \Phi^*, \Phi] + i \int d^4x \sqrt{-g} (A^\perp_\mu J^{\perp\mu} + \Phi^* J + \Phi J^*) \Big\}. \tag{2.19}$$

Obtivemos o funcional gerador para a teoria dos campos $A^\perp, \Phi^*, \Phi$ com a ação

$$S'[A^\perp, \theta, \Phi^*, \Phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_v^2 \, g^{\mu\nu} A^\perp_\mu A^\perp_\nu + g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi^* + ie A^\perp_\mu \Phi^*) (\partial_\nu \Phi - ie A^\perp_\nu \Phi) - V(\Phi^* \Phi) \Big\}. \tag{2.20}$$

Para analisar o grau superficial de divergências, é suficiente representar a métrica externa na forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e expandir todos os termos contendo $g_{\mu\nu}$ em séries de potências em $h_{\mu\nu}$. Todos esses termos podem ser tratados como perturbações. Nesse caso, os propagadores do campo $A^\perp$ e dos campos Φ^*, Φ são, respectivamente,

$$\frac{1}{p^2 - M_v^2} \left(\delta_\mu{}^\nu - \frac{p_\mu p^\nu}{p^2} \right) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{p^2 - m^2}. \tag{2.21}$$

Após a rotação de Wick, o comportamento de ambos os propagadores em $p \to \infty$ é do tipo p^{-2}. Como o campo $h_{\mu\nu}$ é adimensional, suas potências não contribuem para o grau superficial de divergência ω. Então, a estimativa padrão é

$$\omega = 4 - N_A - N_\Phi, \tag{2.22}$$

onde N_A é o número de linhas externas do campo $A^\perp$ e N_Φ é o número de linhas externas dos campos Φ^*, Φ. Como resultado, concluímos que a teoria é renormalizável por *power counting*. Contudo, como é comum no espaço-tempo curvo, isso não garante a renormalizabilidade multiplicativa da teoria se apenas o acoplamento mínimo à gravidade for considerado (veja, por exemplo, [14]). Vamos analisar quais são os possíveis contratermos covariantes e locais que se ajustam à estimativa (2.22).

Primeiro consideramos a opção com $N_\Phi = 2$ e $N_A = 0$. Nesse caso, o único contratermo não mínimo é aquele da forma $R\Phi^*\Phi$, que é amplamente discutido na literatura (veja, por exemplo, [14]). Observemos que esse termo já está incluído no potencial escalar clássico $V(\Phi^*\Phi)$. Vale ressaltar que incluir esse termo na ação clássica não modifica nem os argumentos apresentados a seguir, nem a contagem de potências.

Vamos nos concentrar em outra possível opção, com $N_\Phi = 0$ e $N_A = 2$. Nesse caso, $\omega = 2$. Portanto, os contratermos no setor dos campos $A^\perp$ podem ter a forma

$$-\frac{1}{4}\delta z_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \delta z_2\,\frac{1}{2}M_v^2 A^{\perp\mu}A^\perp_\mu + \frac{1}{2}\,\delta z_3\, RA^{\perp\mu}A^\perp_\mu + \frac{1}{2}\delta z_3'\, R^{\mu\nu}A^\perp_\mu A^\perp_\nu. \tag{2.23}$$

Devido à localidade e covariância das divergências, pode-se substituir $A^\perp_\mu$ por A_μ na última expressão. Assim, podemos esperar, no setor vetorial, os contratermos da forma

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad M_v^2 A_\mu A^\mu, \qquad RA_\mu A^\mu, \qquad R^{\mu\nu}A_\mu A_\nu. \tag{2.24}$$

Os dois primeiros termos estão presentes na ação clássica com acoplamento mínimo à gravidade no setor vetorial, o que corresponde à renormalizabilidade por *power counting*. Por outro lado, os dois últimos termos são não mínimos e não foram incluídos no Lagrangiano inicial. De acordo com a abordagem convencional usada no caso de escalares (e em outros casos, por exemplo, a teoria com torção [47] ou outros campos externos [48]), para alcançar a teoria renormalizável, devemos incluir na ação clássica esses termos não mínimos, com o acoplamento do campo vetorial abeliano massivo à gravidade externa. No entanto, o presente caso é diferente. Deixamos a discussão desses termos para a última parte desta seção, após uma análise adicional da contagem de potências por um método diferente.

Finalmente, há um outro tipo de termos, com $N_\Phi = 0$ e $N_A = 4$, de modo que $\omega = 0$. Nesse caso, os contratermos no setor dos campos $A^\perp$ devem ter a forma $\delta z_4\,(A^{\perp\mu}A^\perp_\mu)^2$. Na forma local covariante, o contratermo correspondente é $(A^\mu A_\mu)^2$. Em princípio, a renormalizabilidade multiplicativa exige que incluamos esse tipo de termo na ação clássica inicial, já em um espaço-tempo plano. Como sabemos da análise (incluindo cálculos explícitos de dois *loops*) do modelo vetorial axial [49], esse termo pode resultar em divergências longitudinais da forma $(\partial_\mu A^{\parallel\mu})^2$ em ordens de *loop* mais altas. Por sua vez, isso significa a violação da unitaridade no nível quântico [50]. Esses argumentos foram operacionais e efetivamente usados em [51] para construir a ação de um vetor axial propagante dual à torção antissimétrica. A contagem de potências sozinha não pode fornecer a proteção contra esse cenário, de modo que requer uma consideração detalhada adicional. Veremos, na última parte desta seção, que, no caso do modelo de Proca em espaço curvo, há uma proteção contra esse cenário.

2.2.2 O modelo sem campo auxiliar

Para fins de completude, consideremos o *power counting* sem recorrer ao truque de Stückelberg. Essa abordagem é bastante similar à apresentada em [16]. A ação inicial é dada por

(2.1), e o funcional gerador das funções de Green assume a forma

$$Z[J_\mu, J, J^*] = \int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}\theta\,\mathscr{D}\Phi^*\,\mathscr{D}\Phi\ \exp\Big\{iS[A,\Phi^*,\Phi] + i\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big(A_\mu J^\mu + \Phi^* J + \Phi J^*\Big)\Big\}. \tag{2.25}$$

Como na versão anterior da demonstração, pode-se realizar a mudança de variáveis $A_\mu = A^\perp_\mu + \partial_\mu\varphi$. Após essa substituição, o termo de massa no setor vetorial transforma-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu &= g^{\mu\nu}(A^\perp_\mu + \partial_\mu\varphi)(A^\perp_\nu + \partial_\nu\varphi) \\ &= g^{\mu\nu}A^\perp_\mu A^\perp_\nu + g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \text{derivadas totais.} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Após a mudança de variáveis (2.15) no setor escalar, obtemos a ação

$$S[A^\perp,\varphi,\Phi^*,\Phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\frac{1}{4}F^\perp_{\mu\nu}F^{\perp\mu\nu} + \frac{M_v^2}{2}\,g^{\mu\nu}A^\perp_\mu A^\perp_\nu + \frac{M_v^2}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g^{\mu\nu}\Big(\partial_\mu + ieA^\perp_\mu\Big)\Phi^*\Big(\partial_\nu - ieA^\perp_\nu\Big)\Phi - m^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2\Big\}.$$

O funcional gerador torna-se

$$Z[J^\perp_\mu, j, J, J^*] = \int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}\theta\,\mathscr{D}\varphi\,\mathscr{D}\Phi^*\,\mathscr{D}\Phi\,\exp\Big\{iS[A^\perp,\varphi,\Phi^*,\Phi] + i\int d^4x\sqrt{-g}\,(A^\perp_\mu J^{\perp\mu} - \varphi\Box j + \Phi^* J + \Phi J^*)]\Big\}. \tag{2.27}$$

A integral sobre φ é fatorizada na forma de $Z_2[j]$ e não depende de $A^\perp$, sendo:

$$\begin{aligned} Z_2[j] &= \int \mathscr{D}\varphi\exp\Big\{i\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big(-\frac{M_v^2}{2}\,\varphi\Box\varphi - \varphi\Box j\Big)\Big\} \\ &= \Big[Det\ \Box\Big]^{-1/2}\exp\Big\{\frac{i}{2M_v^2}\int d^4x\sqrt{-g}\ j\Box j\Big\}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Como resultado, temos:

$$Z[J^\perp_\mu, j, J, J^*] = Z_1[J^\perp_\mu, J, J^*]Z_2[j], \tag{2.29}$$

onde $Z_1[J^{\perp}_{\mu}, J, J^*]$ é o funcional gerador para a teoria com a ação

$$S[A^{\perp}, \Phi^*, \Phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{M_v^2}{2}g^{\mu\nu}A^{\perp}_{\mu}A^{\perp}_{\nu} + g^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA^{\perp}_{\mu})\Phi^*(\partial_\nu - ieA^{\perp}_{\nu})\Phi - m^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2\Big\}. \tag{2.30}$$

É fácil observar que todas as divergências relevantes estão concentradas apenas em $Z_1[J^{\perp}_{\mu}, J, J^*]$. As considerações subsequentes seguem as mesmas do caso tratado na seção anterior.

2.2.3 Renormalizabilidade da teoria vetorial mínima

Agora estamos em posição de discutir se as divergências das formas não mínimas $RA^{\mu}A_{\mu}$ e $R^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu}$, bem como da forma de auto-interação $\left(A^{\mu}A_{\mu}\right)^2$, podem ser esperadas em ordens de um ou mais *loops*.

No nível de *one-loop*, na teoria abeliana, os diagramas com duas linhas vetoriais externas são aqueles mostrados na Fig. 2.1. Esses diagramas são exatamente os mesmos da QCD escalar e, portanto, preservam a invariância de calibre nos contratermos. Essa característica elimina os termos não mínimos, pois tais termos violam a simetria.

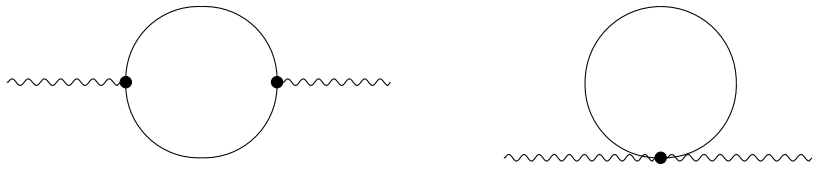

Figura 2.1: *Diagramas que contribuem para termos vetoriais bilineares na ordem de one-loop.*

A principal razão pela qual os diagramas de *one-loop* preservam a invariância de calibre é que não há linhas internas vetoriais massivas que violem a invariância de calibre. A partir do segundo *loop*, a situação é diferente. No diagrama de *two-loop* mostrado na Fig. 2.2, há uma linha interna desse tipo e, portanto, de acordo com o *power counting*, os termos não mínimos parecem possíveis em ordens de dois ou mais *loops*.

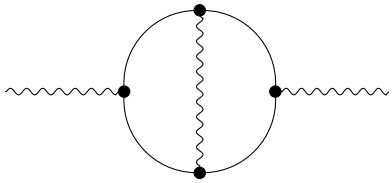

Figura 2.2: *Um dos diagramas de ordens superiores esperado para gerar termos não mínimos.*

A situação é bastante semelhante no caso de $\left(A^\mu A_\mu\right)^2$, de modo que omitiremos os detalhes desse caso. O resultado final é que esse tipo de divergência pode ser esperado em ordens superiores, se seguirmos argumentos dimensionais sem levar em consideração as simetrias.

Vamos mostrar que esses argumentos não são válidos e que, na verdade, a teoria mínima (2.1), sem introduzir novos termos dependentes da curvatura ou de $\left(A^\mu A_\mu\right)^2$, é renormalizável em todas as ordens. O ponto de partida de nossa consideração será a formulação simétrica da ação (2.5).

Então, os teoremas gerais da teoria quântica de campos (ver, por exemplo, [52] e as referências ali citadas) nos dizem que, mesmo em um espaço-tempo curvo, a simetria de calibre sob (2.6) é preservada nos contratermos e, além disso, os contratermos são locais.

Os termos não mínimos e de auto-interação na versão original (2.1) têm a forma

$$\Delta S[A,\Phi^*,\Phi] \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}\zeta_1 R_{\mu\nu}A^\mu A^\nu \;+\; \frac{1}{2}\zeta_2 R A^\mu A_\mu \;-\; \frac{f}{4!}(A^\mu A_\mu)^2\right\}. \tag{2.31}$$

Por outro lado, a versão simétrica desses termos, na formulação (2.5), é mais complicada,

$$\begin{aligned}\Delta S[A,\Phi^*,\Phi]\Big|_{Stuck} \;=\; &\int d^4x\sqrt{-g}\Bigg\{\frac{1}{2}\zeta_1 R^{\mu\nu}\left(A_\mu-\frac{1}{M_v}\nabla_\mu\theta\right)\left(A_\nu-\frac{1}{M_v}\nabla_\nu\theta\right)\\ &+\frac{1}{2}\zeta_2 R\left(A_\mu-\frac{1}{M_v}\nabla_\mu\theta\right)^2-\;\frac{f}{4!}\left[\left(A_\mu-\frac{1}{M_v}\nabla_\mu\theta\right)\left(A^\mu-\frac{1}{M_v}\nabla^\mu\theta\right)\right]^2\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

A principal observação é que essa expressão é incompatível com o *power counting* da teoria, conforme estabelecido anteriormente. O ponto é que existem termos com potências inversas de massa M_v, e esses fatores são compensados pelas derivadas extras do campo escalar θ. Esses termos são típicos de teorias não renormalizáveis pelo *power counting*, mas isso contradiz a avaliação apresentada acima, na subseção 2.2.1. Concluímos que os contratermos da forma (2.32) não podem surgir na teoria com a simetria de calibre restaurada (2.5).

Essa última conclusão se aplica à teoria original (2.1)? Para responder a essa pergunta, notamos que essa teoria corresponde a (2.5) sob um calibre fixado específico. Por outro lado, os teoremas gerais da QFT [53–56] nos dizem que a diferença entre as divergências em

dois diferentes calibre é sempre proporcional às equações de movimento. No nosso caso, as divergências na teoria (2.1) diferem das da teoria (2.5) apenas por termos proporcionais às equações de movimento da teoria com correções quânticas.

Pode-se usar essa informação para provar a renormalizabilidade. Para isso, pode-se utilizar o método baseado em iterações. Levando em consideração a localidade das divergências e assumindo a renormalizabilidade multiplicativa da teoria mínima (ou seja, começando da ação sem os termos (2.31)) na ordem n-ésima de *loop*, podemos ver que as equações de movimento correspondentes formam a mesma combinação (2.8) que encontramos no nível clássico. A única mudança diz respeito aos coeficientes $\alpha_{1,2,3}$ nessa combinação. Em vista da forma das Eqs. (2.7), concluímos que os termos (2.31) são eliminados como divergências na teoria original (2.1) em todas as ordens de *loop*.

Também existem argumentos mais simples que levam à mesma conclusão. Vamos decompor o campo vetorial em partes transversal e longitudinal, de acordo com $A_\mu = A^\perp_\mu + \partial_\mu\varphi$, e substituir isso em (2.31). Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta S[A] \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ &\frac{1}{2}\zeta_1 R^{\mu\nu}(A^\perp_\mu A^\perp_\nu + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 2A^\perp_\mu\partial_\nu\varphi) \\ &+ \frac{1}{2}\zeta_2 R(A^{\perp\,\mu}A^\perp_\mu + \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi) \;+\; \frac{f}{4!}\Big(A^\perp_\mu A^{\perp\mu} + \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi + 2A^\perp_\mu\nabla^\mu\varphi\Big)^2\Big\}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

É claro que o modo longitudinal φ nos termos contendo $R_{\mu\nu}$ e A^4 não se desacopla do componente transversal $A^\perp$. Por outro lado, na subseção 2.2.2 foi provado que o modo longitudinal não físico se desacopla na teoria mínima. Isso significa que, partindo da teoria mínima, os termos não mínimos mencionados não podem ser gerados. O único termo em (2.33) onde o modo longitudinal se desacopla do vetor transversal é aquele com o coeficiente ζ_2.

Para entender a diferença entre os termos com $M_v A^2$ e RA^2, observamos que, para o termo massivo, o desacoplamento dos modos transversais e longitudinais é descrito pela expressão

$$\frac{1}{2}\,M_v^2 A_\mu A^\mu \;=\; \frac{1}{2}\,M_v^2\Big[A^\perp_\mu A^{\perp\mu} + \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi\Big], \tag{2.34}$$

enquanto para a parte dependente da curvatura obtemos

$$\frac{1}{2}\,\zeta_2 R A_\mu A^\mu \;=\; \frac{1}{2}\zeta_2\,R\Big[A^\perp_\mu A^{\perp\mu} + \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi\Big]. \tag{2.35}$$

É necessário fazer o redimensionamento $\chi = M_v\varphi$, de forma que o novo escalar χ ganhe a

dimensão canônica. Após isso, a soma dos setores escalares em (2.34) e (2.35) torna-se

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\zeta_2 R}{M_v^2}\right)\nabla_\mu\chi\nabla^\mu\chi. \tag{2.36}$$

No caso de $\zeta_2 \neq 0$, esta relação contém o coeficiente de massa inverso que não pode ser obtido como uma divergência na teoria mínima devido aos argumentos de *power counting*. Portanto, o parâmetro ζ_2 deve ser igual a zero. Como resultado, vemos que todos os termos não mínimos no setor vetorial são proibidos. Podemos afirmar que a teoria mínima é renormalizável multiplicativamente, inclusive no espaço-tempo curvo.

2.3 Procedimento de Stückelberg e divergências em *one-loop*

Nesta seção, calculamos as divergências de *one-loop* na teoria interativa. A utilização do truque de Stückelberg, conforme sugerido no modelo de Proca livre em [21], torna esses cálculos práticos. Para realizar cálculos covariantes em *one-loop*, adotamos a ação invariante de calibre $S'[A, \theta, \Phi^*, \Phi]$, definida em (2.5), que inclui o campo de Stückelberg θ.

A quantização é conduzida por meio do *ansatz* de Faddeev-Popov, que incorpora o termo de fixação de calibre e a ação dos campos fantasmas. A forma covariante da ação de fixadora de calibre, que será utilizada nos cálculos subsequentes, é dada por

$$S_{\rm gf} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\chi^2, \quad \text{onde} \quad \chi = \nabla_\mu A^\mu - M_v\theta\,. \tag{2.37}$$

Vale ressaltar que esta condição de calibre difere de $\theta = const$, que estabelece a equivalência entre a teoria original (2.1) e a teoria com simetria de calibre restaurada (2.5). É claro que esse calibre é inconveniente para cálculos em *one-loop*. Felizmente, existem argumentos gerais que permitem levar em conta a dependência do fixador de calibre nos resultados finais. Esses argumentos serão apresentados no encerramento desta seção. Esta parte é especialmente relevante, pois um método alternativo baseado no *heat kernel*, descrito no Apêndice B, apresenta dificuldades significativas para ser aplicado ao caso em questão.

A soma da ação (2.5) e do termo de fixação de calibre (2.37) tem a forma

$$\begin{aligned} S' + S_{\rm gf} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{&\frac{1}{2}A^\nu\left(\delta^\mu_\nu\,\Box - R^\mu{}_\nu - \delta^\mu_\nu M_v^2\right)A_\mu + \frac{1}{2}\,\theta\left(\Box - M_v^2\right)\theta \\ &+ g^{\mu\nu}\left(D_\mu\Phi\right)^*\left(D_\nu\Phi\right) - m^2\Phi^*\Phi - \lambda\left(\Phi^*\Phi\right)^2 + \xi R\Phi^*\Phi\Big\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Para aplicar o método de campo de fundo, decompomos os campos em contrapartes clássicas e quânticas (φ, φ^*, B^μ, ϑ),

$$\Phi^* \to \Phi^* = \Phi^* + \varphi^*, \;\; \Phi \to \Phi = \Phi + \varphi, \;\; A_\mu \to A_\mu = A_\mu + B_\mu, \;\; \theta \to \theta = \theta + \vartheta, \tag{2.39}$$

e extraímos a forma bilinear nos campos quânticos da ação (2.38)

$$S'^{(2)} + S_{\rm gf} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\begin{pmatrix}\varphi^* & \varphi & \vartheta & B^\mu\end{pmatrix}\hat{H}'\begin{pmatrix}\varphi \\ \varphi^* \\ \vartheta \\ B_\nu\end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

O operador diferencial $\hat{H}'$ tem uma forma matricial

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \hat{H}'_{\varphi^*\varphi} & \hat{H}'_{\varphi^*\varphi^*} & \hat{H}'_{\varphi^*\vartheta} & \hat{H}'_{\varphi^* B_\nu} \\ \hat{H}'_{\varphi\,\varphi} & \hat{H}'_{\varphi\,\varphi^*} & \hat{H}'_{\varphi\,\vartheta} & \hat{H}'_{\varphi\, B_\nu} \\ \hat{H}'_{\vartheta\,\varphi} & \hat{H}'_{\vartheta\,\varphi^*} & \hat{H}'_{\vartheta\,\vartheta} & \hat{H}'_{\vartheta\, B_\nu} \\ \hat{H}'_{B^\mu\varphi} & \hat{H}'_{B^\mu\varphi^*} & \hat{H}'_{B^\mu\vartheta} & \hat{H}'_{B^\mu B_\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

com os seguintes elementos não nulos:

$$\begin{aligned}
\hat{H}'_{\varphi^*\varphi} &= -\Box - m^2 - 4\lambda\Phi^*\Phi + \xi R + 2ieA_\mu\nabla^\mu + ie\left(\nabla_\mu A^\mu\right) + e^2A_\mu^2, \\
\hat{H}'_{\varphi\,\varphi^*} &= -\Box - m^2 - 4\lambda\Phi^*\Phi + \xi R - 2ieA_\mu\nabla^\mu - ie\left(\nabla_\mu A^\mu\right) + e^2A_\mu^2, \\
\hat{H}'_{B^\mu B_\nu} &= \delta^\nu_\mu\Box - R_\mu{}^\nu + \delta^\nu_\mu M_v^2 + 2\delta^\nu_\mu e^2\Phi^*\Phi, \\
\hat{H}'_{\varphi^* B_\nu} &= ie\Phi\nabla^\nu + 2ie\left(\nabla^\nu\Phi\right) + 2e^2A^\nu\Phi, \\
\hat{H}'_{B^\mu\varphi} &= ie\Phi^*\nabla_\mu - ie\left(\nabla_\mu\Phi^*\right) + 2e^2A_\mu\Phi^*, \\
\hat{H}'_{\varphi\, B_\nu} &= -ie\Phi^*\nabla^\nu - 2ie\left(\nabla^\nu\Phi^*\right) + 2e^2A^\nu\Phi^*, \\
\hat{H}'_{B^\mu\varphi^*} &= -ie\Phi\nabla_\mu + ie\left(\nabla_\mu\Phi\right) + 2e^2A_\mu\Phi, \\
\hat{H}'_{\varphi^*\varphi^*} &= -2\lambda\Phi\Phi, \\
\hat{H}'_{\varphi\,\varphi} &= -2\lambda\Phi^*\Phi^*, \\
\hat{H}'_{\vartheta\,\vartheta} &= \Box - M_v^2.
\end{aligned}$$

O operador matricial (2.41) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \hat{H}\,, \tag{2.42}$$

onde o novo operador $\hat{H}$ tem a forma canônica

$$\hat{H} \;=\; \hat{1}\,\Box + 2\hat{h}^{\alpha}\nabla_{\alpha} + \hat{\Pi}\,, \tag{2.43}$$

com $\hat{1} = \mathrm{diag}\left(1,\,1,\,1,\,\delta^{\nu}_{\mu}\right)$,

$$\hat{h}^{\alpha} \;=\; \begin{pmatrix} -ieA^{\alpha} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}ieg^{\alpha\nu}\Phi \\ 0 & ieA^{\alpha} & 0 & \frac{1}{2}ieg^{\alpha\nu}\Phi^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}ie\delta^{\alpha}_{\mu}\Phi^{*} & -\frac{1}{2}ie\delta^{\alpha}_{\mu}\Phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

e

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} m^2 + 4\lambda\Phi^{*}\Phi - \xi R \\ -ie\left(\nabla_{\mu}A^{\mu}\right) - e^2A^2_{\mu} & 2\lambda\Phi\Phi & 0 & -2ie\left(\mathscr{D}^{\nu}\Phi\right) \\ 2\lambda\Phi^{*}\Phi^{*} & \begin{matrix} m^2 + 4\lambda\Phi^{*}\Phi - \xi R \\ +ie\left(\nabla_{\mu}A^{\mu}\right) - e^2A^2_{\mu} \end{matrix} & 0 & 2ie\left(\mathscr{D}^{\nu}\Phi\right)^{*} \\ 0 & 0 & -M_v^2 & 0 \\ -ie\left(\nabla_{\mu}\Phi^{*}\right) + 2e^2A_{\mu}\Phi^{*} & +ie\left(\nabla_{\mu}\Phi\right) + 2e^2A_{\mu}\Phi & 0 & \begin{matrix} -R_{\mu}{}^{\nu} + \delta^{\nu}_{\mu}M_v^2 \\ +2\delta^{\nu}_{\mu}e^2\Phi^{*}\Phi \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

A contribuição de *one-loop* para a ação efetiva é dada por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\hat{H} - i\mathrm{Tr}\ln\hat{H}_{\mathrm{gh}}, \tag{2.46}$$

no qual $\hat{H}_{\mathrm{gh}}$ é o operador na ação dos fantasmas

$$\hat{H}_{\mathrm{gh}} = \Box - M_v^2. \tag{2.47}$$

A parte divergente da ação efetiva de *one-loop* é dada pela expressão [18, 19]

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\ {\rm tr}\left\{\frac{\hat{1}}{120}C^2 - \frac{\hat{1}}{360}E_4 + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{12}\hat{S}^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\,\Box\,\hat{P} + \frac{\hat{1}}{180}\,\Box\,R\right\}, \tag{2.48}$$

onde $C^2 = C^{\mu\nu\alpha\beta}C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o quadrado do tensor de Weyl, E_4 é o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet[2], $\epsilon = (4\pi)^2\,(n-4)$ e μ é o parâmetro de renormalização. Na expressão (2.48), as definições são

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}\,R - \nabla_\alpha\hat{h} - \hat{h}_\alpha\hat{h}^\alpha, \tag{2.49}$$

$$\hat{S}_{\alpha\beta} = \hat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} + \nabla_\beta\hat{h}_\alpha - \nabla_\alpha\hat{h}_\beta + \hat{h}_\beta\hat{h}_\alpha - \hat{h}_\alpha\hat{h}_\beta, \tag{2.50}$$

onde o comutador das derivadas covariantes geométricas é $\hat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = {\rm diag}\left(0,\,0,\,0,\,-R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}\right)$.

A contribuição da ação fantasma tem a forma padrão [21]

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div,\,gh} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{120}C^2 - \frac{1}{360}E_4 + \frac{1}{30}\,\Box\,R + \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{6}M_v^2R + \frac{1}{2}M_v^4\right\}. \tag{2.51}$$

Usando a relação geral (2.48), após algumas manipulações algébricas (as fórmulas intermediárias podem ser encontradas no Apêndice C), a parte divergente da ação efetiva de *one-loop* é encontrada na forma

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} \;=\; & -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{8}C^2 - \frac{13}{72}E_4 + \left[\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{72}\right]R^2 - \frac{1}{3}\xi\,\Box\,R\right.\\
& - \left[\frac{1}{6}M_v^2 + 2m^2\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\right]R + \left[2\left(e^2-4\lambda\right)\left(\xi-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}e^2\right]R\Phi^*\Phi\\
& + \left(20\lambda^2 - 4e^2\lambda + 4e^4\right)(\Phi^*\Phi)^2 - 2\left[\left(e^2-4\lambda\right)m^2 - 3e^2M_v^2\right]\Phi^*\Phi\\
& \left. + \frac{2}{3}\left(e^2+2\lambda\right)\Box\,(\Phi^*\Phi) - 4e^2\,(D_\mu\Phi^*)\,(D^\mu\Phi) - \frac{e^2}{6}F_{\mu\nu}^2 + \frac{3}{2}M_v^4 + m^4\right\}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Observamos que as divergências formam três grupos de termos. Em primeiro lugar, há termos que reproduzem aqueles da ação clássica (2.1). Além disso, existem termos de derivadas totais e, finalmente, os termos de vácuo que dependem apenas da métrica externa. Esta forma de divergências confirma que a violação da invariância de calibre é causada apenas pela massa do campo vetorial abeliano, ou seja, a teoria apresenta apenas quebra de simetria suave,

[2] As relações são $R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = 2C^2 - E_4 + \frac{1}{3}R^2$ e $R^2_{\mu\nu} = \frac{1}{2}C^2 - \frac{1}{2}E_4 + \frac{1}{3}R^2$.

e essa característica é mantida no nível quântico. Podemos concluir que a propriedade de renormalizabilidade é exatamente como na eletrodinâmica massiva de espinores, explorada em [16]. As considerações gerais deste trabalho podem ser mapeadas para a teoria vetorial escalar-massiva, e portanto espera-se que a mesma estrutura de renormalização seja esperada em ordens superiores de *loops*, até os novos termos não-mínimos no setor vetorial.

Vale a pena comparar a teoria em discussão não apenas com a teoria não Abeliana [16], mas também com a teoria Abeliana do campo vetorial axial [49], que representa a torção antissimétrica. Neste caso, a simetria de calibre é violada pela massa do espinor e, como resultado, a massa do vetor axial é uma condição necessária para a renormalizabilidade, incluindo no contexto efetivo [51]. Como consequência, o modo longitudinal do vetor axial propaga-se a partir das correções de segunda ordem nos *loops*, e há um conflito entre renormalizabilidade e unitariedade. Nada disso ocorre no presente caso.

Por último, mas não menos importante, é necessário ter cuidado especial com a possível dependência de calibre. A razão é que, na abordagem baseada no truque de Stückelberg, apenas em um calibre especial a teoria invariante reduz-se à original (2.1). No modelo de campo vetorial puramente massivo, mesmo em um espaço-tempo curvo, a questão é trivial [21]. Contudo, no presente caso, a história é mais complicada. O que sabemos é que (veja, por exemplo, [14, 52, 57] para provas formais):

i) A parte divergente da ação efetiva é um funcional local covariante;

ii) Os argumentos de *power counting* continuam válidos em teorias com quebra suave de simetria [16, 49];

iii) A diferença entre as divergências de *one-loop* estimadas em diferentes calibres é proporcional às equações clássicas de movimento [53].

Juntando esses argumentos, isso significa que pode-se esperar adições locais covariantes dependentes de calibre em (2.52), sendo proporcionais às Eqs. (2.7), ou seja, podem existir termos adicionais da forma

$$\Delta\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} = \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^n x\sqrt{-g}\left\{\frac{f_\Phi}{2}\left(\mathscr{E}\Phi^* + \mathscr{E}^*\Phi\right) + f_\theta\,\mathscr{E}_\theta\,\theta + f_A\,\mathscr{E}^\nu A_\nu\right\}, \tag{2.53}$$

onde f_Φ, f_θ e f_A são funções reais arbitrárias (dependentes da condição de fixação de calibre). Esses parâmetros são completamente análogos às constantes α_1, α_2, e α_3 na Eq. (2.8). A análise da Eq. (2.53) mostra que ela não pode produzir mudanças drásticas nas divergências, por exemplo, gerar um modo longitudinal do campo vetorial ou o termo do tipo $(A_\mu A^\mu)^2$, como ocorre na teoria do vetor axial [49]. Isso significa que há boas chances de que a teoria (2.1) possa ser renormalizável além da ordem de *one-loop*, se os termos adequados de

completude ultravioleta forem introduzidos.

Substituindo as equações de movimento (2.7) em (2.53), após alguma álgebra, chegamos à diferença entre as divergências de *one-loop* correspondentes a duas escolhas de fixação de calibre na fase simétrica (de Stückelberg)

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} &= \bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div}(\chi) - \bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div}(\chi_0) = \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^nx\sqrt{-g}\,\Big\{f_\Phi\Big[(D^\mu\Phi)^*(D_\mu\Phi) \\ &- \Big(m^2-\xi R\Big)\Phi^*\Phi - 2\lambda(\Phi^*\Phi)^2\Big] + f_\theta\Big[(\nabla_\mu\theta)^2 + M_v\theta\,\nabla_\mu A^\mu\Big] \\ &+ f_A\Big[\frac{1}{2}F^2_{\mu\nu} + M_v^2\Big(A^2_\nu - \frac{1}{M_v}A_\nu\nabla^\nu\theta\Big) - A_\nu J^\nu\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Nesta expressão, χ corresponde a um termo de fixação de calibre arbitrário, enquanto χ_0 representa uma condição de calibre específica de nossa escolha. A divergência de *one-loop* para arbitrariedade da escolha do termo de fixação de calibre é dada pela soma das equações (2.52) e (2.54). Note-se que o requisito de invariância de calibre impõe a condição $f_\theta = f_A = 0$, enquanto f_Φ permanece não restringido.

2.4 Equações do grupo de renormalização em *one-loop*

Considere o processo de renormalização aplicado à teoria descrita em (2.1). Como os cálculos foram realizados para uma teoria diferente (2.5), que surge após o truque de Stückelberg, as relações de renormalização estão sujeitas a ambiguidades, que foram parametrizadas em (2.54).

A ação clássica renormalizada é definida como $S_R = S + \Delta S$, onde ΔS é o contratermo necessário para cancelar as divergências. Podemos simplesmente definir $\Delta S = -\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div}$. Para os campos escalar e vetorial, as relações de renormalização serão

$$\Phi_0 = \mu^{\frac{n-4}{2}}\Big(1 - \frac{4e^2+f_\Phi}{2\epsilon}\Big)\Phi \qquad \text{e} \qquad A^0_\alpha = \mu^{\frac{n-4}{2}}\Big(1+\frac{e^2}{3\epsilon}\Big)A_\alpha\,, \tag{2.55}$$

no qual Φ_0 é explicitamente ambígua, devido ao fator f_Φ. Para as duas massas, teremos

$$m_0^2 = m^2 + \frac{2}{\epsilon}\Big[m^2\Big(3e^2-4\lambda\Big) - 3e^2M_v^2\Big] \tag{2.56}$$

e

$$M^2_{0,v} = M_v^2\Big(1-\frac{2e^2}{3\epsilon}\Big)\,. \tag{2.57}$$

As relações para as constantes de acoplamento têm a forma

$$\begin{aligned} e_0 &= \mu^{\frac{4-n}{2}}\left(1-\frac{e^2}{3\epsilon}\right)e\,, \\ \lambda_0 &= \mu^{4-n}\Big[\lambda-\frac{1}{\epsilon}\left(20\lambda^2-12e^2\lambda+4e^4\right)\Big]\,, \end{aligned} \tag{2.58}$$

e para o parâmetro não mínimo temos

$$\xi_0 = \xi+\frac{2}{\epsilon}\Big[3e^2\left(\xi-\frac{1}{9}\right)-4\lambda\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\Big]. \tag{2.59}$$

É notável que a contribuição do vetor massivo nesta relação **não** é proporcional a $\xi-1/6$, embora não haja dependência de massa nesta fórmula. A razão é que, antes de tomarmos o limite estritamente sem massa, existe um grau de liberdade extra (equivalente ao campo de Stückelberg), que é não conforme. A situação é análoga à descontinuidade descrita para o setor de vácuo da teoria de campo vetorial massivo em espaço-tempo curvo [21].

As funções beta e gamma podem ser obtidas usando as relações

$$\beta_P = \lim_{n\to 4}\mu\frac{dP}{d\mu} \qquad \text{e} \qquad \gamma_\Phi H = \lim_{n\to 4}\mu\frac{dH}{d\mu}, \tag{2.60}$$

onde $P=(m,M_v,\xi,\lambda,e)$ são parâmetros renormalizados e $H=(\Phi^*,\Phi,A_\mu)$ são campos renormalizados. Usando as relações de renormalização, obtemos

$$\begin{aligned} \beta_e &= \frac{e^3}{3\,(4\pi)^2}, \\ \beta_\lambda &= \frac{1}{(4\pi)^2}\left(20\lambda^2-12e^2\lambda+4e^4\right), \\ \beta_\xi &= \frac{2}{(4\pi)^2}\Big[4\lambda\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)-3e^2\Big(\xi-\frac{1}{9}\Big)\Big], \\ \beta_{m^2} &= -\frac{2}{(4\pi)^2}\left[3e^2\left(m^2-M_v^2\right)-4m^2\lambda\right], \\ \beta_{M_v^2} &= \frac{2e^2}{3\,(4\pi)^2}M_v^2. \end{aligned} \tag{2.61}$$

As funções gamma terão a forma

$$\gamma_\Phi = \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \quad \text{e} \quad \gamma_{A_\mu} = -\frac{e^2}{3\,(4\pi)^2}. \tag{2.62}$$

Note-se que γ_{A_μ} e β_e são exatamente as mesmas da QED usual. Como explicado na Sec. 2.2,

espera-se que esta característica se mantenha apenas na ordem de *one-loop*. Por outro lado, γ_Φ pode ser objeto de ambiguidade produzida pelo procedimento de Stückelberg nas ordens de *loops* superiores.

O potencial efetivo para a ação (2.1) pode ser obtido utilizando a técnica do grupo de renormalização (RG) [58] adaptada para o espaço-tempo curvo [59] (veja também [60]). A equação do grupo de renormalização para o potencial efetivo tem a forma

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta_P\frac{\partial}{\partial P}+\gamma_\Phi\left(\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}+\Phi^*\frac{\partial}{\partial\Phi^*}\right)\right\}V_{\text{eff}}\left(g_{\alpha\beta},\Phi^*,\Phi,P,\mu\right)\;=\;0, \tag{2.63}$$

onde μ é o parâmetro de renormalização. A equação anterior permite que o potencial efetivo seja reescrito em termos das funções beta e gama. No nosso caso, é essencial considerar o efeito do acoplamento entre o campo escalar e o campo de calibre, pois ele resulta em correções adicionais ao potencial. O procedimento é análogo ao descrito em [60], portanto apenas formulamos o resultado para o potencial efetivo,

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}=V\;&+\;\frac{1}{2}\Big(\beta_m+2m^2\gamma_\Phi\Big)|\Phi|^2\Big[\ln\left(\frac{|\Phi|^2}{\mu^2}\right)-C_1\Big]\\&+\;\frac{1}{2}\Big(\beta_\xi+2\xi\gamma_\Phi\Big)R|\Phi|^2\Big[\ln\left(\frac{|\Phi|^2}{\mu^2}\right)-C_2\Big]\\&+\;\frac{1}{2}\Big(\beta_\lambda+4\lambda\gamma_\Phi\Big)|\Phi|^4\Big[\ln\left(\frac{|\Phi|^2}{\mu^2}\right)-C_3\Big].\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde $|\Phi|^2=\Phi^*\Phi$, e as constantes C_1, C_2 e C_3 dependem das condições de renormalização. Por exemplo, no caso sem massa e nas condições utilizadas em [58–60], os valores são $C_1=0$, $C_2=-3$ e $C_3=-25/6$.

3

Traço anômalo e ação efetiva induzida por anomalia

Este capítulo é baseado no trabalho publicado [61][1].

> *"O significado das crises consiste exatamente no fato de que indicam que é chegada a ocasião para renovar os instrumentos".*
> -Thomas Kuhn.

Neste capítulo, analisamos a ação efetiva resultante da anomalia conforme, em um contexto onde o fundo inclui tanto campos métricos quanto escalares. Nossas considerações abrangem os critérios de consistência dessa abordagem baseada em anomalias, incluindo discussões sobre as ambiguidades presentes na anomalia conforme e na ação induzida. Além disso, abordamos em detalhes o cálculo das contribuições da ação induzida por anomalia no regime de baixas energias.

Em resumo, apresentamos a formulação da ação efetiva induzida por anomalia para sistemas que envolvem campos métricos e escalares. Investigamos o comportamento da ação induzida em baixas energias, destacando suas relações com o grupo de renormalização e o potencial efetivo dos campos escalares. Por fim, discutimos as ambiguidades associadas à anomalia, ampliando os resultados de estudos prévios [63, 64].

[1] Este capítulo apresenta uma estrutura semelhante aos capítulos 1 e 3 da recente tese [62], visto que o seu autor possui coautoria em [61].

3.1 Anomalia conforme com campos escalares

Considere o seguinte *toy model* com N cópias de campos de Dirac, Ψ_k, e um único campo escalar real Φ, no contexto de um espaço-tempo curvo

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\sum_{k=1}^{N}\bar{\Psi}_k(i\gamma^\mu\nabla_\mu - h\Phi)\Psi_k + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\Phi)^2 + \frac{1}{2}\xi R\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \tau\Box\Phi^2\right\}, \tag{3.1}$$

onde o parâmetro de acoplamento não-mínimo é denotado por $\xi = \frac{1}{6}$. As constantes de auto-interação escalar e de acoplamento de Yukawa são representadas por λ e h, respectivamente. A interação de Yukawa $\bar{\Psi}_k h\Phi\Psi_k$ nesta teoria é necessário para renormalizar o termo cinético do campo escalar no nível de *one-loop*. O mesmo podemos dizer à respeito do termo de derivada total $\Box\Phi^2$, com o parâmetro arbitrário τ, uma vez que a sua inclusão igualmente indispensável para garantir a renormalização, mais adiante será discutido a relevância desse termo na teoria. Desta forma, podemos afirmar que o modelo conforme (3.1) destaca-se por sua simplicidade e generalidade[2].

Além da covariância geral, este modelo também é invariante sob a transformação chamada simetria conforme local

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma}\,\bar{g}_{\mu\nu}, \quad \Phi = e^{-\sigma}\,\bar{\Phi}, \quad \Psi = e^{-\frac{3}{2}\sigma}\,\Psi_*, \quad \bar{\Psi} = e^{-\frac{3}{2}\sigma}\,\bar{\Psi}_* \quad \text{com} \quad \sigma = \sigma(x). \tag{3.2}$$

Para uma teoria renormalizável no campo de fundo curvo (veja, por exemplo, [14, 60] para uma introdução) requer o seguinte termo de vácuo conforme

$$S_{\rm cv} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{a_1C^2 + a_2E_4 + a_3\Box R\right\}, \tag{3.3}$$

Embora os termos de superfície $\Box\Phi^2$, E_4 e $\Box R$ não sejam invariantes sob transformações conformes, a simetria é preservada na identidade de Noether associada a (3.2)

$$\mathscr{T} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\frac{\delta S(g_{\mu\nu},\Phi)}{\delta g_{\mu\nu}} - \frac{d_\Phi}{\sqrt{-g}}\,\Phi\frac{\delta S(g_{\mu\nu},\Phi)}{\delta\Phi} = 0\,, \tag{3.4}$$

onde $d_\Phi = -1$ representa o peso conforme do campo escalar de fundo. Ao incluir férmions e vetores, os pesos conformes correspondentes são $d_\Psi = -\frac{3}{2}$ e $d_A = 0$.

Conforme demonstrado pela prova geral existente [57] (veja também [60] para uma versão simplificada), a divergência de *one-loop* na ação (3.1) é invariante sob transformações con-

[2] Não é complicado realizar uma generalização desse modelo para uma teoria multiescalar conforme, com campos espinoriais, vetoriais e um grupo de calibre arbitrário.

formes. Isso implica que, ao utilizar a regularização dimensional, a divergência de *one-loop* pode ser expressa como

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} = -\frac{1}{\varepsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\;\Delta\mathscr{L}_{\rm c}, \tag{3.5}$$

onde $\varepsilon \equiv (4\pi)^2(n-4)$, e o funcional local $\int d^4x\sqrt{-g}\;\Delta\mathscr{L}_c$ é invariante conforme, ou seja, satisfaz a identidade de Noether (3.4).

No entanto, a ação efetiva renormalizada de *one-loop*

$$\Gamma^{(1)}_{\rm ren} = S + S_{\rm cv} + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S^{(1)}, \tag{3.6}$$

viola a identidade de Noether. Neste contexto, a correção quântica $\bar{\Gamma}^{(1)} = \bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} + \bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm fin}$ representa a contribuição de *one-loop* não renormalizada, enquanto $\Delta S^{(1)}$ inclui os contratermos locais adicionados para cancelar as divergências ultravioleta. Essa violação da simetria induzida pelas correções quânticas é o fenômeno conhecido como anomalia conforme [65–67].

Usando a técnica de Schwinger-DeWitt [18,19], a expressão para divergência em *one-loop* de (3.1) (veja [14,60] para teorias semelhantes) será dado por

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} \;=\; -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon}\int d^nx\,\sqrt{-g}\Bigg\{&\frac{1+6N}{120}\,C^2 - \frac{1+11N}{360}E_4 + 2Nh^2\Big[(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}\,R\Phi^2\Big]\\ &+\frac{1+6N}{180}\,\Box R + \Big(\frac{\lambda^2}{8} - 2Nh^4\Big)\Phi^4 + \Big(\frac{\lambda}{12} - \frac{4Nh^2}{3}\Big)\,\Box\,\Phi^2\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.7}$$

com $(\nabla\Phi)^2 = g^{\mu\nu}\,(\partial_\mu\Phi)\,(\partial_\nu\Phi)$. No limite $n \to 4$, a integral na expressão acima satisfaz a identidade (3.4).

Podemos generalizar a divergência em *one-loop* ao considerar campos escalares, espinoriais e vetoriais na teoria. Dessa forma, a invariância conforme em *one-loop* implica que

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm div} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^nx\,\sqrt{-g}\Bigg\{&wC^2 + bE_4 + c\,\Box\,R - \gamma_\Phi\Big[(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2\Big]\\ &+\frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda\Phi^4 \;+\; \beta_\tau\Box\Phi^2\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.8}$$

sendo $\widetilde{\beta}_\lambda = \beta_\lambda + 4\lambda\gamma_\Phi$. A função gamma γ_Φ e as funções betas w, b, c, β_λ e β_τ depende do conteúdo de partículas da teoria.

Os coeficientes w, b e c são as funcões betas (*β-functions*) em *one-loop* no setor de vácuo. Uma característica interessante desse setor, é que eles dependem somente dos números de

campos de diferentes spins [14, 60],

$$w = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{120} + \frac{N_{1/2}}{20} + \frac{N_1}{10}\right), \tag{3.9}$$

$$b = -\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{360} + \frac{11\,N_{1/2}}{360} + \frac{31\,N_1}{180}\right), \tag{3.10}$$

$$c = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{180} + \frac{N_{1/2}}{30} - \frac{N_1}{10}\right). \tag{3.11}$$

No caso particular de (3.7), $N_0 = 1$, $N_{1/2} = N$ e $N_1 = 0$. No setor escalar, β_λ, γ_Φ e β_τ dependem do grupo de calibre, constante de acoplamento e outros detalhes do modelo. Para (3.7) considerado anteriormente,

$$\gamma_\Phi = -\frac{1}{(4\pi)^2}\,2Nh^2, \quad \widetilde{\beta}_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(3\lambda^2 - 48h^4N\right), \quad \beta_\tau = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{\lambda}{12} - \frac{4Nh^2}{3}\right). \tag{3.12}$$

A anomalia não pode ser completamente derivada usando a identidade (3.4) devido a problemas com os termos de superfície [68, 69]. No entanto, seguindo o esquema de [31, 63], é possível obter a anomalia tomando a derivada variacional em relação ao fator conforme,

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{T} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}e^{-4\sigma}\frac{\delta\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm ren}}{\delta\sigma}\bigg| = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}e^{-4\sigma}\frac{\delta\Delta S^{(1)}}{\delta\sigma}\bigg| \\ &= -wC^2 - bE_4 - c\Box R - \frac{1}{4!}\widetilde{\beta}_\lambda\Phi^4 - \beta_\tau\Box\Phi^2 + \gamma_\Phi\left[(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Aqui, o símbolo $|$ significa o procedimento de substituição $\bar{g}_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$, $\bar{\Phi} \to \Phi$, e $\sigma \to 0$.

É notável que a forma geral das divergências no setor escalar permanece qualitativamente a mesma (3.7) em qualquer outro modelo conforme com um ou mais campos escalares. Assim, a estrutura geral da anomalia (3.13) é preservada. A principal modificação envolve as funções do grupo de renormalização correspondentes. Em particular, não há mudanças significativas se o escalar for complexo ou de múltiplos componentes. Para o Higgs do Modelo Padrão mínimo (MSM), devemos fazer as seguintes substituições tanto nas divergências quanto na anomalia

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 \to g^{\mu\nu}\mathscr{D}_\mu H^\dagger \mathscr{D}_\nu H, \qquad \frac{1}{12}R\Phi^2 \to \frac{1}{6}RH^\dagger H, \\ &\frac{1}{4!}\Phi^4 \to \frac{1}{8}(H^\dagger H)^2, \qquad \Box\Phi^2 \to \Box(H^\dagger H).\end{aligned} \tag{3.14}$$

E o restante permanece o mesmo. A derivada covariante $\mathscr{D}_\mu$ é definida abaixo.

Como outro exemplo, considere o modelo SU(2) [70]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + i\bar{\Psi}^a\Big(\gamma^\mu\mathscr{D}^{ab}_\mu - h\varepsilon^{acb}\Phi^c\Big)\Psi^b \\ + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\mathscr{D}_\mu\Phi)^a(\mathscr{D}_\nu\Phi)^a + \frac{1}{12}R\Phi^a\Phi^a - \frac{1}{4!}\lambda(\Phi^a\Phi^a)^2 + \tau\Box(\Phi^a\Phi^a)\Big\}, \tag{3.15}$$

onde os escalares e espinores estão na representação adjunta do grupo de calibre, $G^a_{\mu\nu} = \nabla_\mu A^a_\nu - \nabla_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$, e $(\mathscr{D}_\mu\Phi)^a = \delta^{ab}\nabla_\mu\Phi^b + ig\varepsilon^{acb}A^c_\mu\Phi^b$ é a derivada covariante dos escalares (ou o mesmo para espinores)[3].

Os coeficientes no setor escalar desta teoria são [60]

$$\gamma_\Phi = -\frac{4}{(4\pi)^2}(h^2 - g^2), \tag{3.16}$$

$$\widetilde{\beta}_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}\lambda^2 - 8\lambda g^2 + 72g^4 - 96h^4\right), \tag{3.17}$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{5}{36}\lambda + \frac{2}{3}g^2 - \frac{8}{3}h^2\right). \tag{3.18}$$

É importante ressaltar que os coeficientes também podem ser determinados para outros contextos, como na *Grand Unified Theory* (GUT) [71] e no Modelo Padrão Minimal (MSM) [72]. Como mencionado, a estrutura geral da anomalia (3.13) permanece inalterada, sendo os coeficientes os únicos elementos modificados.

Neste ponto, é possível realizar uma classificação das estruturas dependentes do campo escalar presentes na anomalia (3.13), de maneira análoga às classificações de [66] e [73] no caso puramente métrico:

i) **Termos conformes reais**, como C^2, Φ^4 e $(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2$. É conveniente introduzir uma notação especial para as estruturas conformes generalizadas na anomalia

$$X_c = (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2, \\ Y(g_{\mu\nu},\Phi) = wC^2 - \gamma_\Phi X_c + \frac{1}{4!}\widetilde{\beta}_\lambda\Phi^4; \tag{3.19}$$

ii) **Termo topológico único**, E_4, independente dos campos extras como escalares;

iii) **Derivadas totais**, exemplificadas por $\Box R$ e $\Box\Phi^2$. Mais adiante, veremos que esses termos são gerados por termos locais na ação induzida. Se esses termos podem ou não ser considerados irrelevantes depende do modelo, como discutiremos a seguir.

[3] A transformação conforme do campo vetorial é dado por $A = \bar{A}$.

Vale mencionar que o termo topológico permanece único em dimensões pares mais altas [74]. Contudo, ainda não há prova geral de que as derivadas totais na anomalia sejam sempre geradas por ações locais. Apesar disso, este cenário se confirma na dimensão seis e, de modo geral, em todos os exemplos disponíveis na literatura.

3.2 Integração da anomalia com um campo escalar

A ação efetiva induzida pela anomalia para os campos de fundo métrico e escalar é encontrado por meio da solução da equação

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\,\frac{\delta\Gamma_{\rm ind}}{\delta g_{\mu\nu}}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\Phi\,\frac{\delta\Gamma_{\rm ind}}{\delta\Phi}=-\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\,e^{-4\sigma}\,\frac{\delta\Gamma_{\rm ind}}{\delta\sigma}\bigg|=\langle\mathscr{T}\rangle. \tag{3.20}$$

Soluções da equação anterior para outras teorias já foram encontradas. Destaca-se, por exemplo, a solução para o caso puramente gravitacional, obtida em [28, 29], que representa uma generalização em quatro dimensões da ação de Polyakov [75] em duas dimensões. Além disso, há generalizações que incluem torção [76, 77] e termos que violam a paridade [78]. Por fim, a solução geral para dimensões pares arbitrárias foi apresentada em [74].

Uma primeira observação importante que podemos fazer é que os termos de derivadas totais presentes na anomalia $\langle\mathscr{T}\rangle$ podem ser deduzidos utilizando as seguintes relações

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}\,R^2=12\Box R, \tag{3.21}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\Phi\frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\int d^4x\sqrt{-g}\,R\Phi^2=6\Box\Phi^2. \tag{3.22}$$

Os termos que são invariantes conformes, como Φ^4 ou X_c, podem ser agrupados juntamente com C^2, conforme mostrado na Eq. (3.19), o que simplifica consideravelmente a derivação da ação induzida pela anomalia. Além disso, utilizaremos a relação fundamental

$$\sqrt{-g}\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)=\sqrt{-\bar{g}}\left(\bar{E}_4-\frac{2}{3}\bar{\Box}\bar{R}+4\bar{\Delta}_4\sigma\right), \tag{3.23}$$

sendo Δ_4 conhecido como operador de Paneitz, e é dado por [29, 41]

$$\Delta_4=\Box^2+2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu-\frac{2}{3}R\Box+\frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu, \tag{3.24}$$

este operador satisfaz a relação $\sqrt{-g}\Delta_4=\sqrt{-\bar{g}}\bar{\Delta}_4$.

A relação fundamental (3.23) desempenha um papel central na integração da anomalia,

pois fornece a fórmula

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\int_x A\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)\Big|=4\sqrt{-g}\Delta_4 A, \tag{3.25}$$

válida para qualquer funcional conforme arbitrário $A[g_{\mu\nu},\Phi]=A[\bar{g}_{\mu\nu},\bar{\Phi}]$.

A solução mais simples pode ser obtida diretamente de (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23), na forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{ind}=S_c[\bar{g}_{\mu\nu},\bar{\Phi}]-\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{2b+3c}{36}R^2+\frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\right\}\\ +\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\sigma Y(\bar{g}_{\mu\nu},\bar{\Phi})+b\sigma\left(\bar{E}-\frac{2}{3}\bar{\Box}\bar{R}\right)+2b\sigma\bar{\Delta}_4\sigma\right\},\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde temos as seguintes transformações conformes

$$\sqrt{-g}=\sqrt{-\bar{g}}e^{4\sigma}\quad\text{e}\quad R=e^{-2\sigma}\left[\bar{R}-6(\bar{\nabla}\sigma)^2-6\bar{\Box}\sigma\right]. \tag{3.27}$$

Em (3.26), $S_c[\bar{g}_{\mu\nu},\bar{\Phi}]=S_c[g_{\mu\nu},\Phi]$ é uma "constante de integração" para a equação (3.26), ou seja, o funcional conforme que não pode ser obtido da anomalia e, portanto, não possui relação direta com as divergências no ultravioleta (UV).

Uma solução alternativa covariante e não local de (3.20) requer a introdução da função de Green para o operador de Paneitz,

$$(\sqrt{-g}\Delta_4)_x G(x,y)=\delta(x,y). \tag{3.28}$$

Utilizando (3.25) e o esquema geral [74], obtemos (veja, por exemplo, [14] para mais detalhes)

$$\begin{aligned}\Gamma_{ind}=S_c+\frac{b}{8}\int_x\int_y\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_x G(x,y)\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_y\\ +\frac{1}{4}\int_x\int_y Y(x)G(x,y)\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_y-\int_x\left\{\frac{2b+3c}{36}R^2+\frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Reescrevendo (3.29) em uma forma simétrica, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{ind}=S_c-\int_x\left\{\frac{2b+3c}{36}R^2+\frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\right\}-\frac{1}{8b}\int_x\int_y Y(x)G(x,y)Y(y)\\ +\frac{b}{8}\int_x\int_y\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R+\frac{1}{b}Y\right)_x G(x,y)\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R+\frac{1}{b}Y\right)_y.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Por fim, reescrevemos o resultado (3.30) na representação local introduzindo dois campos

auxiliares φ e ψ [79] (veja também [78, 80] para uma apresentação alternativa). O resultado é

$$\Gamma_{ind} = S_c[g_{\mu\nu}, \Phi] - \int_x \left\{ \frac{2b+3c}{36} R^2 + \frac{\beta_\tau}{6} R\Phi^2 \right\} + \int_x \left\{ \frac{1}{2}\varphi\Delta_4\varphi - \frac{1}{2}\psi\Delta_4\psi + \frac{\sqrt{-b}}{2}\varphi\left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R + \frac{1}{b}Y\right) + \frac{1}{2\sqrt{-b}}\psi Y \right\}. \tag{3.31}$$

Observemos que a expressão covariante não local (3.29) é um caso particular da fórmula apresentada no trabalho recente [81] (também há exemplos particulares para outros campos, como por exemplo, [78, 82]). Como já mencionamos anteriormente, essa estrutura é bastante geral e de fato se aplica em qualquer espaço-tempo de dimensão par [74].

Uma característica notável das soluções (3.29) e (3.31) é que a ação efetiva induzida, conforme descrito nessas fórmulas, é invariante sob transformações conformes globais (3.2), ou seja, com $\sigma = \text{const}$. No entanto, essa invariância não contradiz o fato de que a simetria conforme global da teoria é anômala.

As formas (3.26), (3.29) e (3.31) são equivalentes, independentemente das aplicações não-cosmológicas (veja, [31] e referências citadas). A equação (3.31) é mais útil devido à covariância e localidade. A generalização fenomenológica para campos quânticos massivos leves tem sido construída em [83, 84] para a forma mais simples (3.26).

Com relação à cosmologia de ordem zero, ou seja, para a dinâmica do fator conforme da métrica, notamos que há uma diferença significativa entre o fundo puramente métrico e a solução com campo escalar, tal como (3.31). No caso métrico, o funcional S_c é irrelevante porque a métrica é definida por (3.2) com $e^\sigma = a(\eta)$, onde η é o tempo conforme. Como resultado, S_c não depende de $a(\eta)$, e a ação efetiva induzida pela anomalia parece uma forma exata de correções quânticas no nível de *one-loop*. Além disso, assumindo que a estrutura geral da anomalia não muda em ordens superiores de *loop*, o único detalhe que pode mudar além da ordem de *one-loop* diz respeito às funções beta. No caso escalar, a anomalia inclui termos extras (3.13) e, por outro lado, o funcional S_c depende dos campos escalares Φ. Assim, a solução (3.31) não pode mais ser considerada exata. O status dessa solução é semelhante ao de um fundo puramente métrico no caso de solução de buraco negro ou outras situações semelhantes [31].

Outra questão importante é se a forma da anomalia pode ser a mesma em ordens de *loops* superiores, se a teoria quântica inicial incluir campos escalares. Para abordar essa questão, precisamos explorar em detalhe a ação efetiva do campo escalar em *one-loop*, incluindo as ambiguidades correspondentes. Este será o assunto de seções posteriores.

O último ponto importante a notar é que as expressões (3.26), (3.29) e (3.31) são válidas

somente para campos conformes sem massa. No caso de campos de Higgs massivos ou outros campos massivos que contribuem para $\widetilde{\beta}_\lambda$, γ_Φ, w, b, c e β_τ, esses resultados podem ser considerados uma aproximação no regime de altas energias (UV). No caso de $\widetilde{\beta}_\lambda$, γ_Φ, w e c, esse fato pode ser confirmado por uma análise direta dos fatores de forma não-locais [85,86].

3.3 Ação efetiva induzida por anomalia em baixas energias

Nesta seção, investigaremos a ação induzida por anomalia no regime de baixas energias, em outras palavras, no regime infravermelho (IR). O esquema empregado é parcialmente semelhante ao apresentado em [82, 87] para o fundo eletromagnético e métrico. Conforme veremos adiante, o caso escalar revela novidades interessantes e conexões inesperadas com outras abordagens.

Para nossos propósitos, a versão mais conveniente da ação efetiva não é (3.31), mas sim sua forma não local (3.29). Para isso, consideramos as seguintes aproximações:

i) Todos os campos de matéria são, ao menos aproximadamente, sem massa, e os acoplamentos ξ_i satisfazem $\xi_i \approx \frac{1}{6}$, garantindo que a simetria conforme do modelo seja preservada no nível clássico. Nessas condições, a ação induzida por anomalia constitui uma boa aproximação;

ii) Os termos escalares Φ^4 e X_c dominam sobre os termos de curvatura, portanto, $\left|\Phi^2\right| \gg \left|R_{...}\right|$ e $\left|(\nabla\Phi)^2\right| \gg \left|R^2_{...}\right|$ para todos os componentes do tensor de curvatura $R_{...}$;

iii) Como de costume na relatividade geral, o limite IR implica que o campo gravitacional é fraco.[4] Sob essa condição, as quantidades dependentes da métrica que dominam são aquelas que não se anulam na ordem linear nas perturbações métricas $h_{\mu\nu}$ em relação ao fundo plano. Em particular, isso implica que $|\Box R| \gg |R^2_{...}|$ para todas as contrações de curvatura. Assim, os termos dependentes do campo escalar e os termos de $\Box R$ constituem a parte mais relevante da ação efetiva induzida por anomalia. De modo geral, a anomalia no setor de vácuo é subdominante nessa aproximação e serve como elemento auxiliar para obter as contribuições dependentes do campo escalar.

As estruturas não-locais na ação induzida se reduzem a uma forma mais simples

$$G = \Delta_4^{-1} = \left(\Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\Box + \frac{1}{3}\left(\nabla^\mu R\right)\nabla_\mu\right)^{-1} \approx \frac{1}{\Box^2}\,. \tag{3.32}$$

[4] Na relatividade geral, isso significa que a aproximação de baixa energia corresponde, na prática, a um limite de curvatura fraca.

Os termos principais na expressão (3.19) são aqueles com o campo escalar Φ e $\Box R$, portanto

$$E_4 - \frac{2}{3}\Box R + \frac{1}{b}Y \;\approx\; -\frac{2}{3}\Box R \,-\, \frac{1}{b}\Big(\gamma_\Phi X_c - \frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda \Phi^4\Big), \tag{3.33}$$

onde Y é divido em duas partes de acordo com a equação (3.19).

Após uma pequena álgebra, a parte não local da expressão (3.29) reduz-se[5] para se tornar

$$\begin{aligned}\Gamma_{ind,nonloc} \;&\approx\; \frac{b}{18}\int_x R^2 \;-\; \frac{1}{6}\int_x\int_y \Big(\frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda\Phi^4 - \gamma_\Phi X_c\Big)_x \Big(\frac{1}{\Box^2}\Big)_{x,y}\Big(\Box R\Big)_y \\ &=\; \frac{b}{18}\int_x R^2 \;-\; \frac{1}{6}\int_x\int_y \Big(\frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda\Phi^4 - \gamma_\Phi X_c\Big)_x \Big(\frac{1}{\Box}\Big)_{x,y}\Big(R\Big)_y .\end{aligned} \tag{3.34}$$

A última fórmula é interessante e merece algumas observações:

i) A primeira integral nesta expressão demonstra que há um coeficiente modificado do termo local R^2 no regime de baixas energias. É importante observar que essa modificação é uma consequência direta do fato de que o termo R^2 estava escondido na primeira linha da Eq. (3.29) sob o limite do espaço-tempo plano. À visto disso, recuperamos apenas o termo b na ação de anomalia induzida nesse limite. De acordo com (3.10), a adição ao coeficiente de R^2 tem valor o $b/18$, consequentemente possuindo valor negativo e com magnitude de aproximadamente $(0.01-1)$. Este efeito é insuficiente para explicar o enorme coeficiente (cerca de 5×10^8) do termo R^2 no modelo de Starobinsky [88, 89], permanecendo o desafio de derivar este coeficiente, como discutido recentemente em [90].

Nota-se que o termo clássico R^2 necessário para explicar as observações no modelo inflacionário [88, 89] leva ao modo escalar propagante da métrica no limite de espaço-tempo plano, exatamente como ocorre na gravidade de Einstein corrigida pela anomalia [81]. De qualquer modo, é bastante interessante, do ponto de vista teórico, que os efeitos quânticos possam ampliar o espectro das ondas gravitacionais na teoria inicialmente conforme, no qual o modo escalar está ausente.

ii) No regime de quebra de simetria, temos $\Phi \approx v$, ou seja, o campo escalar é aproximadamente constante. Então, o segundo integral em (3.34) toma a forma

$$-\frac{1}{6}\int_x\int_y \Big(\frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda v^4 \,-\, \frac{1}{6}\,\gamma_\Phi R v^2\Big)_x \Big(\frac{1}{\Box}\Big)_{x,y} R(y)\,. \tag{3.35}$$

No ultimo termo da equação acima, surge o termo de primeira ordem $R\,\Box^{-1}R$, pertencente à expressão não local bem conhecida [91]. Fisicamente, isso pode ser o caso para o campo

[5] Além disso, há uma parte local usual, ou seja, $-\int_x \Big(\frac{2b+3c}{36}R^2 + \frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\Big)$.

escalar de Higgs do Modelo Padrão, nas escalas de energias energia superiores ao valor típico $v = 246$ GeV. Nessa faixa de energia, a anomalia oferece uma aproximação apropriada. Além disso, em comparação com a energia de Planck ou a escala GUT, essa região pode ser considerada uma faixa de baixas energias no regime infravermelho (IR).

Observe que os termos $R\,\Box^{-1}R$, $R\,(\Box^{-1}R)^2$, etc., compartilham a mesma escala global que o termo usual R. Por esse motivo, a inclusão desses termos com coeficientes apropriados pode introduzir um pequeno desvio na relatividade geral em contextos cosmológicos. Em particular, tais termos podem atuar como uma substituição para uma pequena constante cosmológica na descrição fenomenológica da aceleração do Universo. É importante destacar que esses termos podem ser obtidos a partir da anomalia conforme, aplicando a aproximação de baixa energia discutida anteriormente.

É notável que, mesmo nas próximas ordens de aproximação no regime de energia infravermelha (IR), não surgem termos da ordem $\mathscr{O}(Y^2)$, uma vez que essas estruturas não estão presentes na ação induzida em (3.29). Como consequência, a ação induzida por anomalia não gera termos do tipo $R\,\Box^{-2}\,R$. É sabido que esses termos também não podem ser obtidos a partir da quebra espontânea de simetria por meio da expansão em curvatura [58].O interesse em derivar tal estrutura reside no fato de que ela é empregada para a descrição fenomenológica da expansão acelerada do Universo [92] (veja também as referências citadas). Contudo, não é fácil obtê-lo a partir de considerações quânticas, pelo menos na ordem de *one-loop*.

iii) Retornamos à equação (3.34) e consideramos a transformação correspondente $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}e^{2\sigma}$ e $\Phi = \bar{\Phi}e^{-\sigma}$. Supondo um campo gravitacional fraco, ou seja, na aproximação linear em σ, obtemos

$$\frac{1}{\Box} \;=\; e^{2\sigma}\frac{1}{\bar{\Box}}, \qquad R \;=\; e^{-2\sigma}\Big[\bar{R} - 6\bar{\Box}\sigma + O(\sigma^2)\Big], \tag{3.36}$$

no qual $\bar{\Box} = \bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Posteriormente, após integrar com a função delta, chegamos a

$$\Gamma_2 \;=\; \int_x \Big(\frac{1}{4!}\,\widetilde{\beta}_\lambda\bar{\Phi}^4 \;-\; \gamma_\Phi\bar{X}_c\Big)\sigma, \tag{3.37}$$

com uma expressão local no integrando. Este resultado é ao mesmo tempo natural e interessante, pois confirma explicitamente que a ação induzida por anomalia é, de fato, uma versão local da ação clássica corrigida pelo grupo de renormalização. O parâmetro usual de escala constante no espaço-tempo curvo [57,60] é substituído pela função local σ, tornando o grupo de renormalização do espaço-tempo curvo mais próximo das aplicações [31].

Considerando (3.37) como uma correção de *loop* à ação clássica do campo escalar, a ação efetiva correspondente pode ser obtida por meio das substituições

$$X_c \longrightarrow \bar{X}_c(1+\gamma_\Phi\sigma), \qquad \lambda\Phi^4 \longrightarrow \bar{\Phi}^4(\lambda+\widetilde{\beta}_\lambda\sigma), \tag{3.38}$$

como deveria ser sob a correção baseada no grupo de renormalização. Em particular, essa abordagem permite recuperar o potencial efetivo de *one-loop*, desde que sigamos o procedimento

$$\bar{\Phi} \longrightarrow \Phi, \qquad \sigma \longrightarrow \ln\frac{\Phi}{\Phi_0}, \tag{3.39}$$

que é coerente com a parte escalar de (3.2). Finalmente, substituímos $\bar{\Phi}$ por Φ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$, como nas seções anteriores.

Assim, para o potencial efetivo de *one-loop*, obtemos

$$V^{(1)}_{eff} \;=\; \frac{1}{4!}\left(\lambda \,+\, \frac{1}{2}\,\widetilde{\beta}_\lambda \ln\frac{\Phi^2}{\mu^2}\right)\Phi^4 \;-\; \frac{1}{12}\left(1 \,+\, \gamma_\Phi \ln\frac{\Phi^2}{\mu^2}\right)R\Phi^2, \tag{3.40}$$

no qual $\widetilde{\beta}_\lambda = \beta_\lambda + 4\lambda\gamma_\Phi$. A fórmula (3.40) torna-se a expressão padrão para a teoria conforme sem massa em espaço-tempo curvo [60] ao aplicarmos as condições de renormalização apropriadas. Essa formulação representa uma extensão direta do potencial de Coleman e Weinberg [58].

Além disso, o termo X_c pode ser incluído juntamente com $R\Phi^2$, resultando no primeiro termo da expansão em derivadas da ação efetiva. Esse procedimento é completamente equivalente ao método baseado no grupo de renormalização [60, 93] e sua equivalência também pode ser observada no espalhamento de perturbações gravitacionais em fundos planos, como recentemente discutido em [81]. A relação entre a ação induzida por anomalia e o potencial efetivo (3.40) demonstra que essa equivalência pode ser estendida para outras aplicações.

O procedimento de derivar o potencial efetivo e outros termos na ação efetiva a partir da anomalia é esperado funcionar apenas para aqueles termos que têm divergências logarítmicas no setor ultravioleta (UV) e não estão relacionados às massas dos campos quânticos. Como a anomalia captura o setor UV das correções quânticas, não é surpreendente que, com o devido cuidado, seja possível recuperar os termos correspondentes, como os presentes no potencial.

3.4 Ambiguidades nos termos de derivadas totais

Discutiremos a existência de ambiguidades nas funções beta dos termos de superfície c e β_τ da equação (3.13). Sabemos por meio de (3.21) e (3.22) que esses termos produzem $\int d^4x\sqrt{-g}R^2$ e $\int d^4x\sqrt{-g}R\Phi^2$ como contribuições finitas na ação induzida.

O termo $c\Box R$ tem sido amplamente debatido na literatura, sendo considerado um problema não resolvido, proveniente da escolha de regularização. Nesse contexto, destacam-se as discussões apresentadas no livro [69] e no artigo de revisão [68]. De forma mais conclusiva, o problema foi considerado em [63] para o exemplo particular de um campo escalar real. . Por sua vez, a ambiguidade no coeficiente β_τ foi investigada em [64] para dois exemplos específicos: o modelo escalar com auto-interação e o modelo de Yukawa, este último considerando um campo escalar puramente de fundo e os efeitos quânticos de um férmion.

Em [63], foi analisada a influência de diferentes esquemas de regularização, revelando que existe uma ambiguidade associada à escolha do contratermo de C^2. Essa ambiguidade está ligada à possibilidade de adotar o contratermo $C^2(d)$, onde $d = n + \gamma(n-4)$, com γ sendo uma constante multiplicativa e n a dimensão do espaço-tempo, em vez de $C^2(4)$ [67] ou uma forma mais simples $C^2(n)$. Foi demonstrado que essa ambiguidade é equivalente à liberdade de incluir um termo finito, $\int d^4x\sqrt{-g}R^2$, na ação de vácuo clássica (3.3). Como tal termo resulta em uma contribuição de $\Box R$ na identidade de Noether (3.4), a presença de $\Box R$ na anomalia é modificado e parece adquirir um caráter ambíguo.

Outro exemplo de uma ambiguidade, qualitativamente semelhante, mas independente da escolha de $C^2(d)$, ocorre na regularização de Pauli-Villars. Nesse caso, a função beta associada ao termo c também apresenta uma ambiguidade [64].

Uma diferença crucial entre c e β_τ é que a introdução de um termo R^2 no lagrangiano de vácuo não compromete a simetria para os campos quânticos, podendo ser considerada um procedimento "legítimo". Em contraste, a situação para o termo Φ^2 é bastante diferente. Alterar o coeficiente deste termo no lagrangiano clássico de $\frac{1}{6}$ para qualquer $\xi \neq \frac{1}{6}$ quebra a simetria conforme no setor dos campos quânticos. Como consequência, as divergências de *one-loop*deixam de ser invariantes conforme, ou seja, não possuem a estrutura especial de (3.8). Nesse cenário, torna-se necessária uma renormalização independente de ξ na ação (3.1), e, portanto, o valor conforme $\xi = \frac{1}{6}$ não pode ser um ponto fixo do fluxo do grupo de renormalização. Estritamente falando, sem simetria conforme, não faz sentido discutir anomalia. Assim, a ambiguidade do tipo $\Box\Phi^2$ é uma questão crítica para a quantização de qualquer teoria quântica com campos escalares.

Na regularização dimensional não há ambiguidade para o termo $\Box\,\Phi^2$. No entanto, am-

pliamos a análise para o método de Pauli-Villars [63, 64] para modelos arbitrários contendo campos escalares, férmions e vetores. Como veremos, essa extensão não é completamente trivial. Como antes, assumimos que há apenas um único campo escalar real Φ, mas sem impor restrições às funções gama e beta nas divergências (3.8).

A regularização de Pauli-Villars exige a introdução de um conjunto de campos escalares ou espinoriais (reguladores) [94, 95] com massas m_i especialmente escolhidas e com paridade de Grassmann indefinida. Para conduzir a análise, necessitamos das contribuições de *one-loop* de um regulador escalar individual φ_i com a massa m_i no fundo externo do campo escalar Φ e da métrica,

$$S^{(i)}_{reg} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_i\partial_\nu\varphi_i + \frac{\xi_i}{2}R\varphi_i^2 - \frac{m_i^2}{2}\varphi_i^2 - \frac{\kappa}{2}\Phi^2\varphi_i^2\right\}, \tag{3.41}$$

onde κ é um acoplamento artificial que será útil posteriormente, enquanto m_i e ξ_i são as massas e os parâmetros não mínimos para os reguladores escalares.

A contribuição do regulador pode entrar com sinal positivo ou negativo, dependendo da estatística de φ_i. Em ambos os casos, podemos utilizar a expressão para a ação efetiva, calculada previamente com o método de heat kernel [96, 97] em [85, 98], incluindo para o fundo métrico-escalar [86] (um cálculo independente equivalente foi reportado em [99]). Além disso, resultados similares foram obtidos por meio de diagramas de Feynman [14, 85, 100]. O resultado, para estatística bosônica, tem a forma

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm scal} = \frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}\Bigg\{& m_i^4\left(\frac{1}{2\epsilon}+\frac{3}{4}\right) + \widetilde{\xi}_i m_i^2 R\left(\frac{1}{\epsilon}+1\right) + C_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\frac{1}{120\epsilon}+\frac{1}{2}k_W(\tau_i)\right]C^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &+R\left[\frac{1}{2\epsilon}\widetilde{\xi}_i^2 + k_R(\tau_i)\right]R - \frac{\kappa}{2\epsilon}m_i^2\Phi^2 + \Phi^2\left[\frac{\kappa^2}{8\epsilon}+k_\kappa(\tau_i)\right]\Phi^2 + \Phi^2\left[-\frac{\kappa}{2\epsilon}\widetilde{\xi}_i + k_\xi(\tau_i)\right]R\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde $\tau_i = \Box/m_i^2$ e adotamos as notações compactas

$$\widetilde{\xi}_i = \left(\xi_i - \frac{1}{6}\right) \qquad \text{e} \quad \frac{1}{\epsilon} \equiv \frac{2}{4-n} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \gamma \tag{3.43}$$

com $\gamma \approx 0.577$, sendo a constante de Euler-Mascheroni. As expressões para os fatores de forma não-locais k_W, k_R, k_κ e k_ξ podem ser encontradas em [86]. Para os objetivos aqui, é importante lembrar:

i) Os fatores logarítmicos ultravioletas (UV) são sempre proporcionais a $\ln\mu^2$, conforme mostrado abaixo;

ii) No limite infravermelho (IR), $m_i \to \infty$, todos esses fatores de forma desaparecem

como $\mathscr{O}(\tau_i)$.

No limite conforme, $m_i \to 0$ e $\widetilde{\xi}_i \to 0$, a parte finita em (3.42) reduz-se a:

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{UV} = -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{120}\,C_{\mu\nu\alpha\beta}\ln\Big(-\frac{\Box}{4\pi\mu^2}\Big)C^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{\kappa^2}{8}\,\Phi^2\ln\Big(-\frac{\Box}{4\pi\mu^2}\Big)\Phi^2 + \frac{1}{1080}\,R^2 + \frac{\kappa}{36}\,\Phi^2 R\right\}. \tag{3.44}$$

Todos os termos aqui violam a simetria conforme local. Os dois primeiros termos no integrando são não locais e correspondem às divergências de *one-loop* nos termos Weyl-quadrado e Φ^4, respectivamente. Os dois últimos termos são locais e correspondem à derivada total, $\Box R$ e $\Box\,\Phi^2$ nos termos da anomalia via (3.21) e (3.22). Pode-se dizer que (3.44) é uma alternativa à forma (3.30) da ação efetiva responsável pela anomalia [101], mas utilizaremos essa expressão como um instrumento para explorar a ambiguidade.

O procedimento de regularização de Pauli-Villars começa a partir da expressão (3.42) e requer o conjunto de campos auxiliares (reguladores) (3.41) com $i = 1, \ldots, N$. Para explorar possíveis ambiguidades, esses campos são assumidos com parâmetros $\widetilde{\xi}_i$ gerais. Cada campo possui uma degenerescência s_i, que é multiplicada por $+1$ no caso de estatísticas bosônicas, ou -2 no caso de estatísticas fermiônicas. Começando pelo caso mais simples, considerando um único campo escalar Φ, este rotulado como φ_0, com os parâmetros definidos como $\widetilde{\xi}_0 = 0$ e $s_0 = 1$.

A ação efetiva regularizada segundo o método de Pauli-Villars pode ser definida como

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{\rm reg} = \sum_{i=0}^{N} s_i \bar{\Gamma}^{(1)}_i(m_i,\, \widetilde{\xi}_i,\, n). \tag{3.45}$$

O termo $i = 0$ é dado por (3.44) mais a parte divergente $\mathscr{O}(1/\epsilon)$. Considere $m_i = \mu_i M$, onde M é o parâmetro dimensional da regularização e μ_i são coeficientes adimensionais a serem definidos. Os valores de μ_i podem ser escolhidos de modo a cancelar os termos divergentes $\mathscr{O}(1/\epsilon)$ em (3.45), tornando a regularização dimensional auxiliar irrelevante. De fato, alternativamente, o procedimento pode ser substituído por um *cut-off* covariante no integral de *heat-kernel*, conforme discutido em [63, 64].

As condições de Pauli-Villars para eliminação das divergências $\mathscr{O}(1/\epsilon)$ e (no caso de *cut-off* covariante) também as divergências quadráticas e quárticas, são as seguintes:

1) Cancelamento de divergências quárticas e os termos $\mathscr{O}\,(1/\epsilon)$ quadráticos no tensor de

Weyl:

$$\sum_{i=1}^{N} s_i = -s_0 = -1; \tag{3.46}$$

2) Eliminação das divergências quadráticas:

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \mu_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} s_i \widetilde{\xi}_i = 0; \tag{3.47}$$

3) Cancelamento das divergências logarítmicas (ou seja, $\mathscr{O}(1/\epsilon)$) associadas à constante cosmológica e R^2:

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \mu_i^4 = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} s_i \widetilde{\xi}_i^2 = 0. \tag{3.48}$$

Essas condições permitem ajustar os parâmetros dos campos reguladores de modo que as divergências indesejadas sejam eliminadas, garantindo a consistência da ação efetiva regularizada. Em particular, a condição (3.46) aborda tanto as divergências quarticas quanto os termos quadráticos em $\mathscr{O}(1/\epsilon)$ associados ao tensor de Weyl, enquanto as condições (3.47) e (3.48) tratam, respectivamente, das divergências quadráticas e logarítmicas restantes.

Uma solução possível para essas condições corresponde a $N = 5$ e

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 4, \qquad s_3 = s_4 = s_5 = -2; \tag{3.49}$$

$$\mu_1^2 = \mu_5^2 = 4, \qquad \mu_2^2 = \mu_4^2 = 3, \qquad \mu_3^2 = 1; \tag{3.50}$$

$$\widetilde{\xi}_i = \mu_i^2. \tag{3.51}$$

Essa solução também satisfaz combinações das condições em (3.47) e (3.48), como,

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \mu_i^2 \widetilde{\xi}_i = 0, \tag{3.52}$$

necessárias para a divergência do tipo $R\Phi^2$. Utilizando a abordagem (3.45), chega-se à seguinte expressão para a anomalia conforme na regularização covariante de Pauli-Villars para um único campo escalar,

$$\langle \mathscr{T} \rangle = -\frac{\beta_\lambda}{4!}\Phi^4 + \gamma_\Phi X_c - wC^2 - bE_4 - (c - 6\delta)\Box R - (\beta_\tau + 3\rho)\Box\Phi^2, \tag{3.53}$$

onde $\gamma_\Phi = 0$ e com as seguintes definições

$$\rho \;=\; \frac{1}{2(4\pi)^2}\sum_{i=1}^{N} s_i\,\widetilde{\xi}_i \ln\mu_i^2 \quad \text{e} \quad \delta \;=\; \frac{1}{2(4\pi)^2}\sum_{i=1}^{N} s_i\,\widetilde{\xi}_i^2 \ln\mu_i^2. \tag{3.54}$$

Como discutido em estudos anteriores [64], os coeficientes dos termos de derivada total $\Box\Phi^2$ e $\Box R$ possuem uma dependência com os parâmetros de Pauli-Villars.

Vale destacar que existe uma ambiguidade em ambos os termos $\Box\,\Phi^2$ e $\Box\,R$, relacionada à escolha de ξ_i nos reguladores escalares. A questão é que podemos escolher $\widetilde{\xi}_i = \mu_i^2$, como feito na relação (3.51), ou, alternativamente, tomar $\widetilde{\xi}_i \equiv 0$, o que também resolve o sistema de equações (3.46), (3.47) e (3.48). Neste último caso, recuperamos o valor padrão para aqueles termos da anomalia que são comuns a todas as regularizações que não quebram explicitamente a invariância conforme.

A questão remanescente se é possível remover todas as divergências presentes em (3.8) na teoria geral utilizando os reguladores de Pauli-Villars. Isso não pode ser alcançado apenas com reguladores escalares, pois estes não cancelam o termo X_c, que não aparece na fórmula correspondente (3.42). Portanto, é necessário incluir reguladores de outro tipo, capazes de produzir o contratermo cinético escalar.

Para lidar com esse problema, introduziremos reguladores espinoriais com paridade de Grassmann indefinida, conforme sugerido em [64]. O operador bilinear usado nesse caso é dado por

$$\mathscr{O}_j \;=\; \hat{H}_j\hat{H}_j^*, \qquad \hat{H}_j = \gamma^\mu\nabla_\mu - i\varphi_j, \qquad \hat{H}_j^* = \gamma^\nu\nabla_\nu + i\varphi_j, \tag{3.55}$$

onde $\varphi_j = \tilde{m}_j + h\Phi$, sendo $\tilde{m}_j = \nu_j M$ a massa do regulador, e Φ o campo escalar de fundo (com generalizações para o caso multiescalar descritas na Sec. (3.1). A forma explícita do operador resulta em

$$\mathscr{O}_j \;=\; \Box + i\gamma^\alpha\varphi_{j,\alpha} - \frac{1}{4}\,R + \varphi_j^2\,. \tag{3.56}$$

O análogo de (3.42) no caso fermiônico descrito tem a forma [64, 86]

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_j^{(1)} \;=\; \frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\,\sqrt{g}\,\Big\{ &-\tilde{m}_j^4\Big(\frac{1}{\epsilon}+\frac{3}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{6}\,R - 2h^2\Phi^2\Big)\tilde{m}_j^2\Big(\frac{1}{\epsilon}+1\Big)\\ &+\frac{1}{4}\,C_{\mu\nu\alpha\beta}\Big[\frac{1}{10\,\epsilon}+k_W^f(a)\Big]C^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}h^2\left(\nabla_\alpha\Phi\right)\Big(\frac{2}{\epsilon}+4A\Big)\left(\nabla^\alpha\Phi\right)\\ &+\frac{1}{2}\,h^2\Phi^2\Big(\frac{1}{3\epsilon}+\frac{2}{9}+\frac{8A}{3a^2}\Big)R - \frac{1}{2}\,h^4\Phi^2\Big(\frac{2}{\epsilon}+4A\Big)\Phi^2 \;+\; \frac{1}{2}\,R\,k_R^f(a)\,R\Big\}\,.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Os fatores de forma não-locais finitos k_W^f e k_R^f podem ser encontrados na referência [85], e utilizamos as notações

$$A = 1 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+a/2}{1-a/2}\right), \qquad a^2 = \frac{4\Box}{\Box - 4m^2}. \tag{3.58}$$

Para anular a parte dependente do número de férmions $N_{1/2}$ do vácuo em (3.8), utilizamos reguladores (3.56) e a seguinte expressão da ação

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{reg,f} = \sum_{j=0}^{N_f} t_j \bar{\Gamma}^{(1)}_j(\tilde{m}_j), \tag{3.59}$$

onde $j = 0$ corresponde a cada um dos férmions físicos. Isso significa que precisamos de $N_{1/2}$ cópias de cada um desses reguladores, assim como precisamos de N_0 cópias no caso escalar. As condições para os coeficientes t_j e ν_j são completamente semelhantes às de (3.46), (3.47) e (3.48). Assumindo $N_f = 5$ e substituindo $s_i \to t_j$ e $\mu_i \to \nu_j$, com $\widetilde{\xi}_j \equiv 0$, a solução é dada por (3.49) e (3.50) com as mesmas substituições.

Podemos fazer duas observações relevantes neste ponto. A primeira é que a anulação dos termos dependentes de Φ em (3.8) pode ser garantida pelo ajuste dos acoplamentos artificiais κ e h nas ações reguladoras (3.45) e (3.59). Esse ajuste pode ser realizado para qualquer conteúdo escalar e, correspondentemente, para quaisquer β_λ e γ_Φ, independentemente de uma possível ambiguidade do fixador de calibre nesta última quantidade. Portanto, não precisamos nos preocupar com a dependência no escalar Φ no restante de nossa consideração.

A segunda observação diz respeito às expressões (3.9), (3.10) e (3.11). Fica evidente que a anulação das divergências para um conjunto geral $N_{0,\,1/2,\,1}$ não pode ser realizada apenas com reguladores escalares e fermiônicos. Dessa forma, é necessário introduzir reguladores vetoriais para lidar com a parte dependente de N_1. Contudo, devido à primeira observação, esses reguladores vetoriais não precisam depender de Φ. Neste ponto, surge um problema aparente: o regulador deve ser massivo, e o limite sem massa nos fatores de forma gravitacionais é conhecido por manifestar descontinuidades [21]. Contudo, a solução para esse problema é bem conhecido [94, 95]. Os campos reguladores são não-físicos e não precisam satisfazer as mesmas condições de consistência que os campos físicos, tais como a correspondência entre spin e estatística ou a ausência de modos não-físicos. Assim, podemos definir os reguladores para a parte vetorial na seguinte forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{reg,v} = \sum_{k=0}^{N_v} r_k \bar{\Gamma}^{(1)}_k(\check{m}_k), \tag{3.60}$$

onde

$$\bar{\Gamma}_k^{(1)}(\check{m}_k) \;=\; \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\;\mathrm{Ln}\left(\delta^\alpha_\beta\,\Box - R^\alpha_\beta + \check{m}_k^2\delta^\alpha_\beta\right) \;-\; i\,\mathrm{Tr}\;\mathrm{Ln}\left(\Box + \check{m}_k^2\right) \tag{3.61}$$

e $\check{m}_k^2 = \rho_k M$ é a massa do regulador.

É importante notar que, na equação (3.61), observamos uma contribuição dupla do modo escalar, como nos casos de fantasmas de Faddeev-Popov sem massa. Isso contrasta com a contribuição única no caso de um vetor massivo [19, 21]. Essa característica garante o cancelamento das divergências na parte de vácuo N_1 de (3.8) desde que sejam satisfeitas condições semelhantes às de (3.46), (3.47), e (3.48) para os coeficientes r_k e ρ_k. Para isso, assumirmos $N_v = 5$ e fazemos as substituições $s_i \to r_k$ e $\mu_i \to \rho_k$, naturalmente com $\widetilde{\xi}_k \equiv 0$, como no caso fermiônico.

A solução é fornecida por (3.49) e (3.50) com as substituições apropriadas. A forma explícita de (3.61), incluindo o conjunto completo de fatores de forma não-locais, pode ser encontrada em [85] ou extraída facilmente de [21].

Com isso, demonstramos que o cancelamento das divergências é possível para qualquer conteúdo de partículas e funções beta associadas ao modelo subjacente. No entanto, a ambiguidade permanece e é descrita por (3.53).

Ressaltamos que, embora os termos locais satisfazerem a contagem de potência na teoria, a ambiguidade mencionada acima não pode ser corrigida pela mudança do parâmetro de renormalização μ. Isso ocorre porque os termos correspondentes não estão presentes na ação clássica inicial e, portanto, não estão sujeitos à renormalização UV.

Esse aspecto da teoria foi discutido anteriormente no artigo clássico [102] e, mais recentemente, em [64]. A correção da ambiguidade nos termos locais só é possível pela introdução desses termos não conformes desde o início, com coeficientes arbitrários. Esses coeficientes, por sua vez, podem ser determinados experimentalmente, e não por meio de um esquema particular de regularização.

4

A influência da torção na quebra espontânea de simetria no modelo NJL

Este capítulo é baseado no trabalho publicado [103].

"Nada é tão maravilhoso que não possa existir,
se admitido pelas leis da Natureza".
-Michael Faraday.

O modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) [104] é um modelo fenomenológico descrito por uma lagrangiana de férmions interagentes que alega invariância com relação a algumas transformações de simetria satisfeitas pela QCD, teoria que constitui as interações fortes. A importância de modelos tipo NJL, que apresentam interações quárticas entre férmions, é que eles nos permite o estudo de algumas propriedades da QCD no regime de pequenos momentos, e tem sido estudado tanto na linguagem pura de férmions assim como também através de métodos de bosonização.

O modelo tem sido amplamente estudado no contexto do espaço-tempo curvo, sendo inicialmente investigado em [105]. Ele tem sido explorado em diversos contextos, como estudos de inflação [106], transições de fase [37, 107, 108], e também na presença de uma torção externa, com foco em análises de grupo de renormalização [109].

Em resumo, podemos afirmar que o modelo de NJL é um "modelo protótipo", que permite investigações em diferentes cenários. Isso ocorre porque ele se baseia em uma interação quadri-fermiônica simples, e as suas análises no contexto da teoria quântica de campos, especialmente ao incluir correções na ordem de *one-loop*, não apresentam desafios técnicos significativos, para mais detalhes, veja, por exemplo, [58, 110, 111].

Atualmente, o estudo sobre torção está em ascensão, devido ao seu potencial papel na formação da matéria escura [112, 113], como discutido no capítulo A. Além disso, estudos recentes demonstraram a possibilidade de quebra espontânea de simetria no setor de torção em uma ação fermiônica [36]. Inspirados por [107], onde foi realizado um estudo detalhado sobre a transição de fase no modelo de NJL em um campo gravitacional fraco, buscamos compreender como o mecanismo de quebra espontânea de simetria ocorre no modelo de NJL sob a influência da torção.

Neste capítulo, realizamos uma revisão do modelo de NJL, começando pela obtenção da equação de gap por meio do procedimento de bosonização no contexto do espaço-tempo plano. A equação de gap é uma ferramenta fundamental na descrição da quebra espontânea de simetria, permitindo explorar a relação entre os parâmetros do modelo e os estados resultantes. Além disso, apresentamos brevemente o cálculo da anomalia conforme no caso fermiônico com a presença de um campo escalar. A anomalia conforme [65–68] é utilizada para obter a parte não local da ação induzida por anomalia [28, 29], conforme discutido no capítulo anterior.

Com a forma não local da ação induzida em mãos, descrevemos a ação efetiva no regime de baixas energias para teorias que incluem métrica e torção como campos de fundo. Finalmente, calculamos e analisamos o potencial efetivo, juntamente com a equação de gap do modelo de NJL no setor escalar-torção. Este estudo fornece uma visão aprofundada do comportamento do modelo sob essas condições específicas.

4.1 O modelo de Nambu-Jona-Lasínio

A princípio foi um modelo concedido para descrever interações entre núcleons, posteriormente foi reinterpretado como uma teoria com graus de liberdade de quarks. Sendo uma teoria de férmions que contém propriedades fundamentais da QCD, que nos direciona para relações simétricas [110, 111]. O modelo de NJL especialmente descreve com sucesso a invariância quiral, que é quebrada espontaneamente no estado fundamental da teoria, acarretando no surgimento de bósons de Goldstone. A implementação da simetria quiral advém da condensação de pares de quarks, e permite o aparecimento de excitações coletivas com as características de partículas físicas. Entretanto, como é um modelo, terá limitações, as quais passamos a mencionar:

i) A teoria não é renormalizável devido a dimensão canônica da constante de acoplamento Λ, que é -2. Portanto, não é apenas a densidade de lagrangiana que irá caracterizar o modelo NJL, mas também o esquema de regularização empregado nos cálculos das amplitudes;

ii) O confinamento dos quarks retratado pela QCD não é implementada pelo modelo de NJL, um problema vinculado à unitariedade da matriz S. Tal problema possibilita a ocorrência de processos não físicos, por exemplo o decaimento de mésons pesados em pares quark-antiquark, provocando surgimento de quarks livres. Felizmente para o contexto de baixas energias, o confinamento não parece ter grande importância em relação às simetrias que este modelo tão bem descreve;

iii) Por ser uma teoria efetiva não há existência dos graus de liberdade relativos aos glúons. Isto pode ocasionar em problemas se desejarmos utilizar no contexto de altas energias.

Ainda assim, o modelo é uma ferramenta poderosa no estudo de fenômenos relacionados à simetria e à transição de fase quirais. No modelo de NJL, o mecanismo provido para quebra explícita de simetria é a introdução de uma pequena massa de quarks introduzida na parte cinética da lagrangiana. Além do mais, podemos introduzir no modelo todas as simetrias globais da QCD, e proporcionar um mecanismo simples para estudar à quebra de simetria quiral, que ocasiona na geração dinâmica da massa dos férmions, e no aparecimento do condensado de quarks e do bóson de Goldstone [114].

Como nosso interesse está no mecanismo de quebra espontânea de simetria, utilizamos a versão "original" modelo de NJL em um campo gravitacional fraco com torção na expansão $1/N$ (ver, e.g., [115, 116] para revisão e [117] em modelos de interações quadri-fermiônicos), descrita pela seguinte ação

$$S_{\mathrm{NJL}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\mu} - i\eta\gamma_5 S_{\mu}\right)\psi + \frac{\lambda}{2N}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}i\gamma_5\psi\right)^2\right]\right\}, \tag{4.1}$$

a primeira parte da lagrangiana corresponde à lagrangiana livre de Dirac, onde Ψ representa os campos de férmions. Na parte de interação, a constante de acoplamento λ, com dimensões de inverso ao quadrado da massa, é assumida como positiva, garantindo que as interações entre férmions sejam sempre atrativas, o que possibilita a formação de estados ligados no modelo. A constante de acoplamento λ, representando a interação forte, é determinada pelas equações de gap, que geram a massa constituinte dos férmions, como será discutido adiante. Por fim, N denota o número de férmions.

4.2 Inclusão de campos auxilares

Devido às interações quárticas entre os férmions, é necessário linearizar essas interações na ação para encontrar o potencial efetivo do modelo de NJL. Para isso, utilizamos o procedimento de bosonização, que substitui os graus de liberdade fermiônicos por graus de liberdade bosônicos.

A bosonização de uma teoria fermiônica consiste em transformar as interações entre férmions em uma teoria equivalente dependente apenas de campos bosônicos. Esse processo envolve a introdução de campos bosônicos auxiliares na ação. No entanto, esses campos não devem alterar a dinâmica do modelo, ou seja, sua inclusão não pode modificar as equações de movimento de Euler-Lagrange, sendo, portanto, considerados campos sem dinâmica [110].

Os campos auxiliares sem dinâmicas a serem introduzidos na ação de NJL, serão os campos escalar e pseudo-escalar, ρ e π. Sendo assim, adicionaremos os campos bosônicos na ação original da seguinte forma

$$S_{\text{NJL}} \to S_{\text{NJL}} - \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{N}{2\lambda}\Big[\rho + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi\Big]^2 + \frac{N}{2\lambda}\Big[\pi + \frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi\Big]^2\right\}. \tag{4.2}$$

A ação clássica equivalente a (4.1) tem a forma

$$S_{\text{NJL}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\nabla_\mu - i\eta\gamma_5 S_\mu\right)\psi - \frac{N}{2\lambda}\Big(\rho^2+\pi^2\Big) - \bar{\psi}\Big(\rho + i\gamma_5\pi\Big)\psi\right\}. \tag{4.3}$$

As equações de Euler-Lagrange para os campos auxiliares da equação anterior possuem a seguinte forma

$$\rho = -\frac{\lambda}{N}\bar{\psi}\psi \quad \text{e} \quad \pi = -\frac{\lambda}{N}\bar{\psi}i\gamma_5\psi\,,$$

que quando substituídas em (4.3), obtemos (4.1).

Nosso objetivo é encontrar a ação efetiva aplicando a técnica de quantização via integral de caminho. Comecemos pelo funcional gerador das funções de Green para o campo fermiônico[1]

$$Z\left[\theta,\bar{\theta}\right] = \int D\psi D\bar{\psi}D\rho D\pi\exp\left(iS + i\theta\bar{\psi} + i\psi\bar{\theta}\right), \tag{4.4}$$

onde θ e $\bar{\theta}$ são fontes grassmannianas. Ao integrar sobre os campos fermiônicos e realizar os cálculos necessários, chegamos ao seguinte funcional gerador (para detalhes dos cálculos intermediários, consulte [110])

$$Z = \int D\rho D\pi\exp\left\{iNS_{\text{eff}} + \int d^4x\sqrt{-g}\,\bar{\theta}\left[\frac{1}{i\gamma^\mu\left(\nabla_\mu - i\eta\gamma_5 S_\mu\right) - s}\right]\theta\right\}. \tag{4.5}$$

[1] Também é possível integrar sobre o campo de torção (ver [118,119]), mas isso requer promover a torção a uma variável dinâmica e pode levar a inconsistências na teoria efetiva [21].

A ação efetiva semiclássica é dada por

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2\lambda}\left(\rho^2+\pi^2\right)\right] - i\text{Tr}\ln\left[i\gamma^\mu\left(\nabla_\mu - i\eta\gamma_5 S_\mu\right) - s\right], \tag{4.6}$$

onde $s = \rho + i\gamma_5\pi$.

Sabemos que na ordem principal da expansão $1/N$, a ação efetiva $\Gamma[\rho,\pi]$ é simplesmente igual a S_{eff}. Como pode ser visto pela equação abaixo,

$$\Gamma[\rho,\pi] = S_{\text{eff}}[\rho,\pi] + \mathscr{O}(1/N). \tag{4.7}$$

A ação efetiva pode ser expressa como uma expansão em derivadas, sendo o potencial efetivo o termo de ordem zero dessa expansão, ou seja, aquele que não envolve derivadas dos campos,

$$\Gamma[\rho,\pi] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-V_{\text{eff}} + \frac{1}{2}Z(\rho)\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\rho\,\partial_\nu\rho + \frac{1}{2}Z(\pi)\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\pi\,\partial_\nu\pi + \ldots\right]. \tag{4.8}$$

Obviamente, podemos encontrar o potencial efetivo na equação (4.8), que pode ser escrito como

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{flat}} + V_R + V_{S^2}. \tag{4.9}$$

Aqui, o potencial efetivo é naturalmente separado em três partes distintas, a saber, o potencial em espaço-tempo plano V_{flat}, o potencial em espaço-tempo curvo sem torção V_R e a contribuição do termo de torção V_{S^2}. Nota-se que os termos V_{flat} e V_R já são conhecidos e foram discutidos em [37, 106, 107]. Nosso objetivo é encontrar a contribuição da torção no potencial efetivo. Felizmente, é possível determinar V_{S^2} por meio de uma técnica eficiente e relativamente simples, baseada na parte não local da ação-induzida por anomalia, conforme já demonstrado em uma teoria análoga em [36, 61].

4.3 Ação efetiva induzida por anomalia

Aqui, seguimos a abordagem da ação efetiva induzida por anomalia, por ser um caminho mais econômico e fornecer os mesmos resultados obtidos por outros métodos, como discutido no capítulo anterior. Resumidamente, nesta seção, utilizaremos a anomalia conforme para encontrar a solução covariante e não local da ação induzida por anomalia. Posteriormente, na próxima seção, extrairemos dessa solução o potencial efetivo.

Consideremos um modelo que inclua espinores de Dirac e campo escalar que também seja

invariante sob transformações conformes locais[2]

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}e^{2\sigma}, \quad S^2 = \bar{S}^2e^{-2\sigma}, \quad S^2_{\mu\nu} = \bar{S}^2_{\mu\nu}e^{-4\sigma} \quad \text{e} \quad \rho = \bar{\rho}e^{-\sigma}, \tag{4.10}$$

cuja a sua forma bilinear é dada por

$$\hat{H} = i\gamma^\mu\left(\nabla_\mu - i\eta\gamma^5 S_\mu\right) - \rho. \tag{4.11}$$

Para determinar as correções em *one-loop*, $\bar{\Gamma}^{(1)} = -i\,\mathrm{Tr}\,\ln\hat{H}$, utilizamos a técnica de Schwinger-DeWitt [18,19] para encontrar as divergências e, posteriormente, a expressão para a anomalia conforme, isto é, o traço anômalo. No caso particular de torção antissimétrica e escalar real, a anomalia tem a forma

$$\langle T\rangle = -\left\{wC^2 + bE_4 + c\Box R - \beta_1\rho^2S^2 - \frac{1}{4}\beta_2S^2_{\mu\nu}\right\} + \text{termos de superfície}, \tag{4.12}$$

onde $S_{\mu\nu} = \nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu$. Comparado à expressão similar em [36], removemos termos de superfície irrelevantes, bem como os termos puramente escalares, e adicionamos contribuições do setor escalar-torção. Independentemente dessas mudanças, as considerações posteriores são essencialmente inalteradas.

As funções beta em *one-loop* w, b e c no setor de vácuo podem ser encontradas em [14, 36, 47, 69, 120], e os coeficientes $\beta_{1,2}$ são dados por

$$\beta_1 = -\frac{8}{(4\pi)^2}N\eta^2 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{8}{3\,(4\pi)^2}N\eta^2, \tag{4.13}$$

onde N é o número de cópias dos férmions.

A ação induzida por anomalia pode ser determinada por meio da solução da equação

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\rho\frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\rho} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}e^{-4\sigma}\left.\frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\sigma}\right| = \langle T\rangle\,,$$

[2] A transformação conforme da componente axial-vetor da torção não obedece a mesma regra de transformação conforme aplicada à métrica e à torção na teoria ECT. Nesta teoria específica, observa-se uma relação de proporcionalidade entre S_μ e a corrente fermiônica axial, o que possibilita a seguinte transformação conforme

$$S^\mu = e^{-4\sigma}\bar{S}^\mu \quad \text{e} \quad S_\nu = e^{-2\sigma}\bar{S}_\nu.$$

Contudo, essa não é uma regra universal. A ação da torção, no nosso caso, contém termos adicionais e a conexão é mais complicada. De fato, temos a liberdade de escolher a transformação conforme de acordo com nossa conveniência, de modo que a ação clássica possua invariância conforme. Isso nos permite utilizar a anomalia de traço para encontrar as correções quânticas para o potencial do campo escalar e torção. Para mais detalhes, veja [47, 120].

onde o símbolo | indica a substituição $(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\rho}, \bar{S}_\mu) \to (g_{\mu\nu}, \rho, S_\mu)$ e $\sigma \to 0$. A solução geral covariante para a ação induzida por anomalia é composta pela soma de uma parte não local, uma parte local e um funcional arbitrário invariante conforme, que desempenha o papel de uma constante de integração [14]. Seguindo [36, 61], sabemos que a parte não local da ação induzida por anomalia pode fornecer o potencial efetivo da teoria no regime de baixas energias. Considere a solução covariante não local da equação acima

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ind, nonloc}} = \frac{b}{8}\int_x\int_y \left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R\right)_x G(x,y)\left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R\right)_y \\ + \frac{1}{4}\int_x\int_y X(x)\, G(x,y)\left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R\right)_y ,\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde utilizamos a expressão importante definida como

$$X = wC^2 + \beta_1\rho^2 S^2 - \frac{1}{4}\beta_2 S_{\mu\nu}^2 , \tag{4.15}$$

pois tal termo é invariante conforme. Observe que a diferença em relação à equação análoga em [36] está no termo torção-escalar $\beta_1\rho^2 S^2$, mas essa diferença não afeta o formalismo geral para derivação do potencial efetivo a partir da ação induzida por anomalia.

4.4 Ação efetiva no limite IR no setor escalar-torção

Como já sabemos, a forma não local da ação efetiva foi recentemente mostrada como uma descrição no limite IR, devemos seguir o procedimento apresentado em [36, 61]. Nesse sentido, definimos algumas suposições:

i) Assumindo um campo gravitacional relativamente fraco no Universo primitivo, os termos de torção em (4.15) dominam sobre o quadrado do tensor de Weyl. Consequentemente, temos a seguinte hierarquia: $|\rho^2 S^2| \gg |C^2|$ e $\left|S_{\mu\nu}^2\right| \gg |C^2|$;

ii) Na relatividade geral, o limite IR implica um campo gravitacional fraco. Portanto, podemos descrever a gravidade fraca através de uma pequena perturbação métrica, ou seja, $|\Box R| \gg |R_{\dots}^2|$ para todo tensor de curvatura. E consequentemente, a função de Green na ação induzida se reduz a (3.32). Após uma pequena álgebra, a parte não local da ação efetiva, equação (4.14), torna-se

$$\Gamma_{\text{ind, nonloc}}^{\text{IR}} = \frac{1}{6}\int_x\int_y \left(\beta_1\rho^2 S^2 + \frac{1}{4}\beta_2 S_{\mu\nu}^2\right)_x \left(\frac{1}{\Box}\right)_{x,y} R(y) . \tag{4.16}$$

Aqui, nosso objetivo é encontrar a ação efetiva de baixas energias pertencente ao setor escalar-torção mencionado na equação (4.16). Para isso, precisamos isolar o fator conforme da

métrica. Posteriormente, fazemos uma analogia com a derivação da ação efetiva baseada no grupo de renormalização [60]. Portanto, em um *loop*, consideramos transformações conformes envolvendo (4.10) junto com (3.36), e posteriormente, assumimos uma aproximação linear nos termos de σ na equação anterior. Após a integração com a função delta, a ação efetiva do setor escalar-torção no regime IR se torna

$$\Gamma^{\mathrm{IR}}_{\mathrm{ind,\ nonloc}} = -\int_x \left(\beta_1 \bar{\rho}^2 \bar{S}^2 + \frac{1}{4}\beta_2 \bar{S}^2_{\mu\nu}\right) \sigma\left(x\right). \tag{4.17}$$

Neste ponto, forneceremos uma visão geral concisa de nossa ação clássica de torção, encontrada em [60, 120], e definida como

$$S_{\mathrm{tor}} = -\int d^4x\sqrt{-g}\left\{a_1\rho^2 S^2 + \frac{a_2}{4}S^2_{\mu\nu}\right\} + \text{termos de superfície}, \tag{4.18}$$

onde consideramos os parâmetros a_1 e a_2 como variáveis arbitrárias. Impomos a condição $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$ para garantir que a energia seja positiva para o propagador da torção, e para evitar a inclusão de táquions em nossa teoria, devido à possível instabilidade.

Voltaremos à equação (4.17), que está relacionada à correção de *loop* para a ação clássica de torção, e que nos permitirá obter a ação efetiva por meio do processo de substituição denotado como

$$a_1 \to a_1 + \beta_1\sigma\left(x\right), \quad a_2 \to a_2 + \beta_2\sigma\left(x\right), \tag{4.19}$$

de acordo com o grupo de renormalização [14, 31, 57], onde o parâmetro de escala constante usual em espaço-tempo curvo é substituído pela função local σ.

Agora, essa abordagem pode ser empregada para derivar o potencial efetivo de *one-loop*. Para isso, fazemos a identificação

$$\sigma \to \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\rho^2 + \eta^2 S^2}{\mu^2}\right), \tag{4.20}$$

que é consistente com as partes escalar e de torção de (4.10). Aqui, μ representa o parâmetro de renormalização da dimensão de massa, e o argumento do logaritmo deve permanecer adimensional. Consequentemente, a quantidade $\rho^2 + \eta^2 S^2$ possui uma dimensão de massa igual a dois.

Usando (4.19) e (4.20) na ação clássica (4.18), podemos facilmente obter a ação efetiva

de torção

$$\Gamma_{\text{tors}} = -\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\left[a_1 + \frac{\beta_1}{2}\ln\left(\frac{\rho^2+\eta^2S^2}{\mu^2}\right)\right]\rho^2S^2 + \frac{1}{4}\left[a_2 + \frac{\beta_2}{2}\ln\left(\frac{\rho^2+\eta^2S^2}{\mu^2}\right)\right]S_{\mu\nu}^2 + \ldots\right\}, \tag{4.21}$$

onde os termos de superfície foram negligenciados. A parte do potencial efetivo é definida como um termo de ordem zero na expansão em derivadas da ação efetiva, reveja a equação (4.8). Obviamente

$$V_{S^2} = \left[a_1 + \frac{\beta_1}{2}\ln\left(\frac{\rho^2+\eta^2S^2}{\mu^2}\right)\right]\rho^2S^2. \tag{4.22}$$

O potencial de torção descrito acima é similar ao encontrado em [36], e ambos diferem do potencial de Coleman-Weinberg [58]. Consequentemente, concluímos que a quebra espontânea de simetria não ocorre nesta teoria. No entanto, essa conclusão não se estende ao potencial efetivo do modelo de NJL, onde as contribuições dos potenciais em espaço-tempo plano e curvo devem ser consideradas, conforme será discutido na seção seguinte.

4.5 Potencial Efetivo e Equação de Gap

O cálculo do potencial efetivo do modelo de NJL em um fundo gravitacional fracamente variável (que foi obtido em termos da expansão da coordenada normal de Riemann) com o campo pseudoscalar definido como $\pi = 0$, pode ser visto em [37, 106–108] (veja também o apêndice D). O potencial efetivo no espaço-tempo plano resulta em

$$V_{\text{flat}} = V_0 + \frac{1}{2\lambda}\rho^2 - \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\rho^2\Lambda^2 + \Lambda^4\ln\left(1+\frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right) - \rho^4\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right)\right], \tag{4.23}$$

e a contribuição do termo de curvatura para o potencial efetivo tem a forma

$$V_R = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{R}{6}\left[-\rho^2\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right) + \frac{\Lambda^2\rho^2}{\Lambda^2+\rho^2}\right], \tag{4.24}$$

onde $V_0 = V\,|_{\rho=0}$ e Λ é a escala de corte. No entanto, estamos interessados na expressão do potencial efetivo em espaço-tempo curvo com torção externa. Então, vamos considerar (4.23) e (4.24) juntamente com o potencial (4.22), onde tomamos a identificação que $\mu^2 \to \Lambda^2$, e consideramos $N = 1$ em (4.13) para garantir que o potencial efetivo da torção esteja de fato relacionado ao modelo de NJL, já que o potencial da torção foi derivado para N férmions.

Portanto, a expressão para o potencial efetivo em espaço-tempo curvo com torção é dada por

$$V_{\text{eff}} = V_0 + \frac{1}{2\lambda}\rho^2 - \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\rho^2\Lambda^2 + \Lambda^4 \ln\left(1+\frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right) - \rho^4 \ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right)\right] - \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{R}{6}\left[-\rho^2 \ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right) + \frac{\Lambda^2\rho^2}{\Lambda^2+\rho^2}\right] + \left[a_1 + \frac{\beta_1}{2}\ln\left(\frac{\rho^2+\eta^2S^2}{\Lambda^2}\right)\right]\rho^2S^2. \quad (4.25)$$

Para facilitar o estudo das características qualitativas do potencial anterior, por generalidade e simplificação em nossos cálculos, introduzimos o parâmetro $a_1 = -\eta^2/(4\pi)^2$ e tomamos $\eta^2 S^2 \to S^2$.

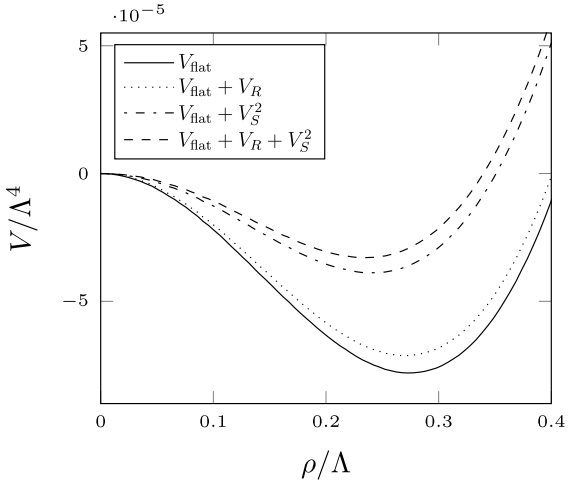

Figura 4.1: *O comportamento de diferentes potências efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$, curvatura $R/\Lambda^2 = 0.05$ e torção $S^2/\Lambda^2 = 0.01$.*

A Fig. 4.1 ilustra o comportamento do potencial efetivo V_{eff} para diferentes configurações estruturais, incluindo o potencial efetivo do modelo de NJL em espaço-tempo plano, sua implementação com curvatura (veja [37,107,108] para mais detalhes), contribuição da torção e, finalmente, o potencial efetivo com curvatura e torção. Vale a pena mencionar que a quebra espontânea de simetria no modelo de NJL em espaço-tempo plano ocorre quando a constante de acoplamento λ é $\lambda > \lambda_0 = 4\pi^2/\Lambda^2$ (veja o apêndice D).

A quebra espontânea de simetria no potencial efetivo do modelo de NJL difere da apresentada em (4.22) devido à presença de contribuições tanto do espaço-tempo plano quanto da curvatura. Neste ponto, podemos observar que, na presença de torção e curvatura, o mínimo local do potencial efetivo se torna menos pronunciado, como é evidente no gráfico do potencial do modelo na Fig. 4.1.

O comportamento do potencial efetivo do modelo de NJL em função de diferentes valores do termo de torção pode ser observado no gráfico qualitativo mostrado na Fig. 4.2. Notavel-

mente, o potencial efetivo não apresenta um mínimo local quando o valor atinge $S^2/\Lambda^2 \geq 0.03$, demonstrando que a possibilidade de quebra de simetria dinâmica não é alcançada para esses valores do quadrado da torção.

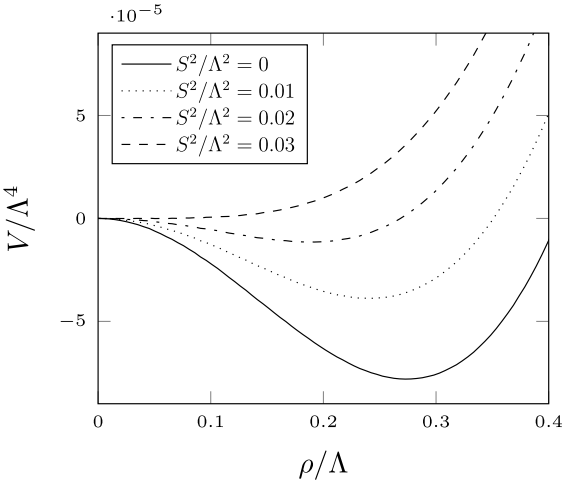

Figura 4.2: *O comportamento do potencial efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$ em função de diferentes valores de torção*

Para observar explicitamente a quebra espontânea de simetria no modelo de NJL, começamos examinando a equação de gap relacionada ao potencial efetivo (4.25). Esta equação é o valor esperado do vácuo, fornecendo-nos a massa dinâmica do férmion. No nosso caso, ρ_0 desempenha o papel de massa dinâmica do férmion, ou seja, $\rho_0 = M$. Para mais informações sobre a equação de gap em espaço-tempo plano, veja, por exemplo, [110, 111], e [37, 107, 108] no contexto do espaço-tempo curvo,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial V(\rho,0)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} &= \frac{\rho_0}{\lambda} - \frac{\rho_0}{4\pi^2}\left[\Lambda^2 - \rho_0^2 \ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho_0^2}\right)\right] \\ &\quad - \frac{\rho_0}{48\pi^2}R\left[-\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\rho_0^2}\right) + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\rho_0^2} + \frac{\Lambda^4}{\left(\Lambda^2+\rho_0^2\right)^2}\right] \\ &\quad + 2\left[a_1 + \frac{\beta_1}{2}\ln\left(\frac{\rho_0^2+\eta^2S^2}{\Lambda^2}\right)\right]\rho_0 S^2 + \frac{\beta_1\rho_0^3S^2}{\eta^2S^2+\rho_0^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

A relação entre a massa dinâmica do férmion e a constante de acoplamento para $R = 0$ pode ser observada na Fig. 4.3 para diferentes valores de torção. Neste gráfico, nota-se que a constante de acoplamento varia em relação ao termo de torção, onde λ aumenta juntamente com S^2/Λ^2. Assim, podemos concluir que o setor escalar-torção influência a geração de massa dos férmions. Uma análise detalhada do campo de torção em função da constante de acoplamento torna-se evidente na Fig. 4.4.

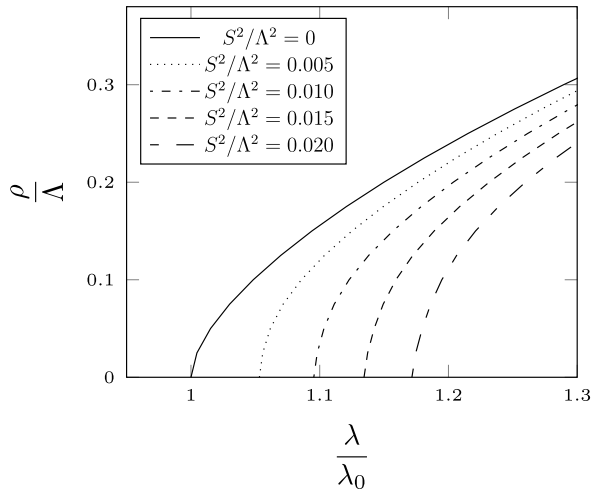

Figura 4.3: *O gráfico da massa dinâmica em função de diferentes valores de torção.*

O gráfico na Fig. 4.4 consiste em duas regiões, uma com uma fase simétrica e outra com uma fase quebrada. A curva crítica mostrada no gráfico é uma função da torção com relação à constante de acoplamento. Através da Fig. 4.4, podemos fazer algumas observações. Primeiramente, apenas a parte inferior, linha contínua, tem relevância física, correspondendo a $\lambda_0/\lambda \leq 0.8$. Para o restante, linha tracejada, o potencial não possui fase quebrada, uma vez que, para valores de torção com $S^2/\Lambda^2 \geq 0.03$, não há um mínimo local no potencial efetivo.

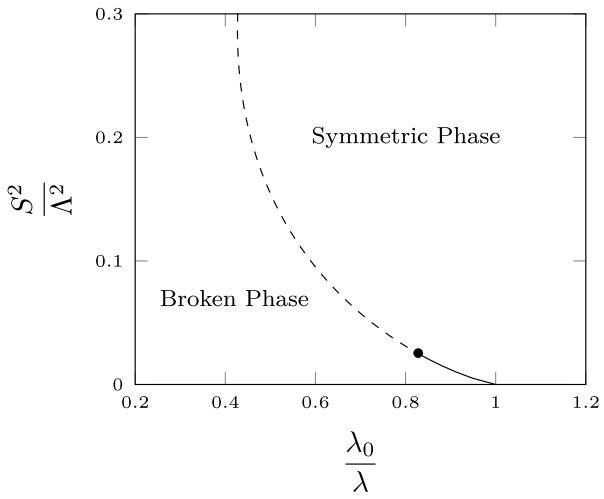

Figura 4.4: *A torção é representada em função da constante de acoplamento que demarca a fronteira entre a região de fase simétrica e fase quebrada.*

Além disso, mesmo quando λ permanece dentro da região da fase quebrada no modelo de NJL em espaço-tempo plano, a simetria quiral pode ser restaurada para valores positivos de

S^2/Λ^2 acima da curva crítica.

Finalmente, investigamos a influência do parâmetro a_1 no potencial efetivo. Para isso, reescrevemos a_1 como $n\,a_1$ na equação (4.25), onde n pertence ao conjunto dos números reais. Isso nos permite gerar o gráfico da Fig. 4.5. Nesse gráfico, observamos que a contribuição de $n\,a_1$ para $n > 1$ no setor de torção favorece o mínimo local do potencial efetivo, o que se torna mais pronunciado, beneficiando a ocorrência de quebra espontânea de simetria no modelo.

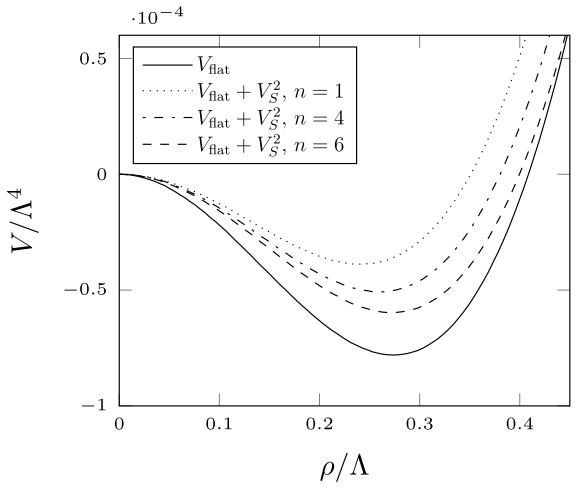

Figura 4.5: *O potencial efetivo V com $\lambda/\lambda_0 = 1.25$ e torção $S^2/\Lambda^2 = 0.01$ para diferentes valores de n.*

5

Operadores Conformes: Generalização do operador Hamada

Este capítulo é baseado no trabalho publicado [121].

> *"A ciência humana de maneira nenhuma nega a existência de Deus. Quando considero quantas e quão maravilhosas coisas o homem compreende, pesquisa e consegue realizar, então reconheço claramente que o espírito humano é obra de Deus, e a mais notável".*
> -Galileu Galilei.

Neste capítulo, generalizamos essa construção para dimensões arbitrárias d, incorporando novos termos cúbicos em curvaturas gravitacionais e ajustando os coeficientes de expansão nos diversos termos de curvatura. Derivamos as consequências da invariância global de escala e das transformações conformes locais infinitesimais para a forma deste operador generalizado. O sistema de equações lineares que determina os coeficientes é resolvido, permitindo a obtenção explícita do operador Hamada [44, 45] conformal em qualquer dimensão d. Observamos também algumas singularidades na construção para as dimensões $d = 2$ e $d = 4$. Além disso, provamos um teorema geral que afirma que um operador escalar conformal com n derivadas em dimensões $d = n - 2$ é impossível de ser construído. Por fim, comparamos nossa construção explícita com a abordagem que utiliza derivadas covariantes conformes e tensores de curvatura conformes, apresentando novos resultados para operadores construídos com diferentes ordens de derivadas covariantes conformes.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: nas primeiras seções, apresentamos os operadores conformes de duas e quatro derivadas, discutindo suas características. O operador Hamada [44, 45] é abordado em um capítulo exclusivo, onde, ao final, demonstramos como obter sua forma generalizada. Também provamos o Teorema sobre a sua inexistência. Por fim, discutimos operador Hamada [44,45] utilizando a notação de derivada covariante conforme de Wünsch. Este capítulo é o mais longo da tese, e, por isso, foi necessário incluir os apêndices E e F como material complementar.

5.1 Operadores conformes e ações conformes

Observamos que operadores conformes Δ, quando são covariantes conforme e atuam sobre campos escalares conformemente covariantes ϕ com pesos devidamente atribuídos, geram outros escalares $\Delta\phi$, que para conformidade também devem se transformar como objetos conformemente covariantes. Aqui, o ponto crucial é que o peso w' para o novo objeto composto $\Delta\phi$ será quase sempre necessariamente diferente do peso original w do campo escalar ϕ. Portanto, a ação geral de um operador diferencial covariante conforme sobre alguns escalares conformes é caracterizada e ajustada pela especificação de dois números constantes: w e w' para qualquer tipo de operador diferencial covariante conforme. Pode-se dizer que apenas no raro caso, quando $w' = w$, podemos afirmar que o operador diferencial é invariante conforme, pois, assim, ele não adiciona nada ao peso do campo escalar sobre o qual ele atua à direita. Em geral, o peso do operador diferencial w_Δ pode ser definido (seguindo [122, 123]) como a diferença

$$w_\Delta = w' - w. \tag{5.1}$$

Neste trabalho, focaremos em descrever operadores conformes pertencentes a uma ação escalar covariante e invariante conforme, tal ação pode ser esquematizada na seguinte estrutura

$$S = \int d^d x \sqrt{-g}\phi\Delta\phi \tag{5.2}$$

O fato de o operador Δ ser conformemente covariante e de ele gerar a ação (5.2) implica que ele também possui muitas características interessantes (nesta seção, por questão de conveniência, usaremos a variável d para representar a dimensão do espaço-tempo curvo). Podemos já mencionar uma delas aqui, pois este operador automaticamente deve ser auto-adjunto com relação à conjugação e à operação de integração por partes no integral do volume do espaço-tempo em (5.2). Isso também significa que sua ação sobre o campo escalar à direita, ϕ (canonicamente), deve gerar os mesmos resultados que sua ação conjugada sobre o campo

escalar à esquerda, ϕ, em (5.2) para o caso de campos escalares, quando a conjugação se reduz a nenhuma operação. Este operador Δ surge também de forma natural como a segunda derivada variacional da ação S em (5.2) em relação aos campos escalares ϕ, aqui sem a necessidade de um procedimento adicional de auto-adjunção (tal operação é necessária para operadores ordinários que não são conformemente covariantes, por exemplo). Somente a propriedade de auto-adjunção em tal forma nos permite ter tanto o operador conformemente covariante Δ quanto a ação invariantes conforme S, quadrática nos campos escalares ϕ e com o mesmo operador Δ nela (como em (5.2)), ao mesmo tempo.

Em uma teoria consistentemente com simetria conforme acoplada ao campo gravitacional de fundo, é possível ter apenas um número único e par de derivadas no termo cinético sobre o fundo plano do espaço-tempo, por exemplo, para o campo escalar, ao mesmo tempo. Portanto, é proibido ter simultaneamente, em um modelo, os operadores de Ørsted [40] e Paneitz [41] para um e o mesmo campo escalar ϕ. Isso ocorre devido à exigência de invariância de escala, fundamentada nas dimensões de energia associadas aos campos escalares. A mesma restrição aplica-se às não-linearidades, limitando-se, essencialmente, àquelas que envolvem um número de derivadas inferior ao presente no termo cinético principal. Não se permitem aqui casos com derivadas covariantes de potências negativas ou racionais/fracionárias, nem casos das mesmas patologias de expoentes para campos escalares — isso se deve à exigência de localidade da Lagrangiana[1].

Os exemplos de operadores escalares cinéticos conformemente covariantes, quando acoplados à geometria externa, fornecem resultados explícitos para o procedimento de acoplamento conforme à geometria de fundo. Esse tipo de acoplamento não é gravitacionalmente mínimo e, portanto, pode não existir para todos os operadores considerados no contexto de teorias formuladas no espaço-tempo plano, onde a gravidade não está presente.

Após discutir as questões gerais relacionadas à construção de operadores escalares conformemente covariantes, especificamente na forma de operadores cinéticos que acoplam campos escalares de maneira conforme à geometria de fundo, estamos prontos para entender a construção dos operadores de Ørsted [40], Paneitz [41] (Esses detalhes são apresentados no apêndice E) e Hamada [44, 45], onde este último operador é o cerne deste capítulo.

Neste trabalho, utilizamos a notação em que o operador com n derivadas no termo cinético principal que, em um espaço-tempo plano, é livre de curvaturas gravitacionais é representado pelo símbolo Δ_n.

[1] Talvez seja possível adicionar alguns termos de interação não lineares com derivadas, mas ainda não verificamos essa opção.

5.2 Operador Hamada em $d = 6$

O operador com seis derivadas Δ_6 foi encontrado primeiramente por Hamada [44, 45] no número crítico de dimensões, ou seja, para o campo escalar adimensional em $d = 6$ com peso conforme nulo $w = 0$. Nota-se, que termos com dimensões de energia E^6 em quantidades de fundo não são necessários para sua construção, veremos a respeito dessa característica mais adiante. Ainda assim, a estrutura do operador contém 20 termos (na base escolhida abaixo). Sua forma é

$$\begin{aligned}
\Delta_6 &= \Box^3 + 4R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Box - R\Box^2 + 4(\nabla_\rho R_{\mu\nu})\nabla^\rho\nabla^\mu\nabla^\nu + 4\Box R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu - \frac{3}{5}(\Box R)\Box \\
&+ \zeta_1 R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}\nabla_\mu\nabla_\nu + \zeta_2 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\Box + \zeta_1 R_{\rho\sigma}R_\mu{}^{\rho\sigma}{}_\nu\nabla^\mu\nabla^\nu + \left(6 - \frac{3}{4}\zeta_1\right) R_{\mu\rho}R_\nu{}^\rho\nabla^\mu\nabla^\nu \\
&+ \left(-1 + \frac{1}{8}\zeta_1 - \zeta_2\right) R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\Box + \left(-2 + \frac{1}{4}\zeta_1\right) RR_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu + \left(\frac{9}{25} - \frac{1}{40}\zeta_1 + \frac{1}{10}\zeta_2\right) R^2\Box \\
&+ \frac{2}{5}(\nabla_\mu\Box R)\nabla^\mu + (\zeta_1 + 4\zeta_2)\, R_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla^\sigma R^{\mu\nu\rho}{}_\tau)\nabla^\tau - \zeta_1 R_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla^\mu R^{\nu\rho})\nabla^\sigma \\
&+ \left(6 + \frac{1}{4}\zeta_1\right) R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^\nu{}_\rho)\nabla^\rho - \left(2 + \frac{3}{4}\zeta_1 + 2\zeta_2\right) R_{\mu\nu}(\nabla_\rho R^{\mu\nu})\nabla^\rho + \left(1 - \frac{1}{8}\zeta_1\right) R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R)\nabla^\nu \\
&- \left(\frac{7}{25} - \frac{3}{40}\zeta_1 - \frac{1}{5}\zeta_2\right) R(\nabla_\mu R)\nabla^\mu. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Observa-se que o operador Δ_6 não é único em $d = 6$, pois depende de dois parâmetros reais arbitrários ζ_1 e ζ_2, que podem assumir valores que, em alguns casos especiais, simplificam a forma do operador. Essa família de operadores conformes com dois parâmetros é uma característica comum, já que em dimensões superiores temos mais formas de construir invariantes gravitacionais conformes (temos mais maneiras de contrair vários tensores de Weyl)[2] Em dimensões $d = 6$, temos três maneiras independentes de construir invariantes gravitacionais conformes [124]. No setor de tensores de Weyl não diferenciados, esses invariantes reduzem-se a duas contrações diferentes do cubo do tensor de Weyl, a saber, $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\rho\sigma}{}_{\kappa\lambda}C^{\kappa\lambda\mu\nu}$ e $C_{\mu\rho\sigma\nu}C^{\rho\kappa\lambda\sigma}C_{\kappa\mu\nu\lambda}$ (as outras possíveis contrações novamente se reduzem às duas acima devido à exploração da ciclicidade). Somente em dimensões inferiores, como em $d = 4$, existe uma identidade relacionando $C_{\mu\rho\sigma\nu}C^{\rho\kappa\lambda\sigma}C_{\kappa\mu\nu\lambda}$ e $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\rho\sigma}{}_{\kappa\lambda}C^{\kappa\lambda\mu\nu}$. Certamente, o número de parâmetros livres na construção do operador Δ_6 está relacionado ao número de invariantes que podem ser construídos por contrações de três tensores de Weyl.

[2] Por exemplo, em $d = 4$, há apenas uma maneira de contrair dois tensores de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$. Usando a identidade $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{1}{2}C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ devido às propriedades de ciclicidade do tensor de Weyl, a segunda possível contração $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\rho\nu\sigma}$ é eliminada.

5.2.1 Termos na generalização do Operador Hamada

A generalização do operador Hamada [44, 45] para dimensões arbitrárias d não era conhecida anteriormente. Primeiro, é necessário completar a base de invariantes, conforme apresentada acima, na expansão do operador Δ_6 na dimensão crítica $d = 6$. Dois termos adicionais são possíveis contendo derivadas livres atuando no campo escalar

$$(\nabla_\mu R)\nabla^\mu\Box \quad \text{e} \quad (\nabla_\mu\nabla_\nu R)\nabla^\mu\nabla^\nu. \tag{5.4}$$

A base de um total de 22 termos contendo derivadas está agora completa. Os outros possíveis termos que se poderia pensar em adicionar são reduzidos pelas seguintes identidades

$$R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla_\mu R^{\nu\sigma\rho\tau})\nabla^\mu\phi = \frac{1}{2}R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla_\mu R^{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu\phi, \tag{5.5}$$

$$R_{\rho\sigma\tau\mu}(\nabla^\mu R^{\rho\tau\sigma}{}_\nu)\nabla^\nu\phi = \frac{1}{2}R_{\rho\sigma\tau\mu}(\nabla^\mu R^{\rho\sigma\tau}{}_\nu)\nabla^\nu\phi, \tag{5.6}$$

$$R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla_\mu R^{\nu\sigma\rho\tau})\nabla^\mu\phi = \frac{1}{2}R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla_\mu R^{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu\phi, \tag{5.7}$$

que surgem do uso da ciclicidade do tensor de Riemann ($R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$) e

$$R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla_\mu R^{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu\phi = 2R_{\rho\sigma\tau\mu}(\nabla^\mu R^{\rho\sigma\tau}{}_\nu)\nabla^\nu\phi, \tag{5.8}$$

$$R_{\nu\rho\sigma\tau}(\nabla^\rho R^{\mu\nu\sigma\tau}) = -\frac{1}{2}R_{\nu\rho\sigma\tau}\nabla^\mu R^{\nu\rho\sigma\tau}, \tag{5.9}$$

que surgem do uso da identidade de Bianchi ($\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\sigma\tau} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\tau} = 0$) satisfeita pelo tensor de Riemann.

Portanto, seguindo Hamada [44, 45], a base que escolhemos para escrever a expansão completa da parte de derivadas do operador Δ_6 é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_{6,\,\mathrm{der}} &= \Box^3 + z_1 R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Box + z_2 R\Box^2 + z_3\nabla_\rho R_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\mu\nabla^\nu + z_4(\nabla_\mu R)\nabla^\mu\Box \\ &+ z_5(\nabla_\mu\nabla_\nu R)\nabla^\mu\nabla^\nu + z_6(\Box R_{\mu\nu})\nabla^\mu\nabla^\nu + z_7(\Box R)\Box + z_8 R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}\nabla_\mu\nabla_\nu + z_9 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\Box \\ &+ z_{10}R_{\rho\sigma}R_\mu{}^{\rho\sigma}{}_\nu\nabla^\mu\nabla^\nu + z_{11}R_{\mu\rho}R_\nu{}^\rho\nabla^\mu\nabla^\nu + z_{12}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\Box + z_{13}RR_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu + z_{14}R^2\Box \\ &+ z_{15}(\nabla_\mu\Box R)\nabla^\mu + z_{16}R_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla^\sigma R^{\mu\nu\rho}{}_\tau)\nabla^\tau + z_{17}R_{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla^\mu R^{\nu\rho})\nabla^\sigma + z_{18}R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^\nu{}_\rho)\nabla^\rho \\ &+ z_{19}R_{\mu\nu}(\nabla_\rho R^{\mu\nu})\nabla^\rho + z_{20}R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R)\nabla^\nu + z_{21}R(\nabla_\mu R)\nabla^\mu,\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde já definimos o coeficiente do termo que lidera o número de derivadas, ou seja, o termo $\Box^3$. Nota-se que a escolha da base feita por Hamada [44, 45] com dois parâmetros arbitrários

ζ_1 e ζ_2, equivale a permitir coeficientes completamente arbitrários nos termos correspondentes

$$R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}{}^{\rho\sigma\tau}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\Box, \tag{5.11}$$

esses dois termos podem ser trocados por outros dois contendo apenas contrações dos tensores de Weyl, e nenhuma derivada covariante ordinária atuando sobre os tensores, embora ainda atuem sobre o campo escalar ϕ à direita. Na verdade, a mudança para uma base dominada pelos tensores de Weyl também é possível aqui. Contudo, para cálculos posteriores, devemos nos ater a uma única base. Naturalmente, os resultados sobre a existência do operador, não dependem da escolha dessa base. E aqui adotamos a mesma escolha de Hamada [44,45]. Nota-se, a posteriori, que os dois novos elementos (5.4) da base (5.10) são gerados em dimensão geral $d \neq 6$.

No entanto, em d dimensão, também se esperam termos em Δ_6 que não possuem nenhuma derivada atuando sobre o escalar (portanto, são endomorfismos). A construção da base para esses termos é outra tarefa árdua, que foi resolvida em Gilkey. Antes de listarmos todos os termos presentes nesta parte adicional do operador Δ_6 sem derivadas, discutiremos a questão relacionada à construção geral da ação para escalares, que se supõe ser invariante conforme. A ação que consideramos é quadrática nos campos escalares ϕ e, portanto, tem a forma geral

$$S = \int d^dx\sqrt{|g|}\phi\Delta_6\phi, \tag{5.12}$$

em uma dimensão geral d. Podemos decompor o operador Δ_6 da seguinte forma

$$\Delta_6 = \Delta_{6,\,\mathrm{der}} + \Delta_6'. \tag{5.13}$$

Naturalmente, todos os termos em $\Delta_{6,\,\mathrm{der}}$ contêm derivadas (de uma a seis) atuando no campo escalar à direita. Para tais termos, não podemos realizar integração por partes das derivadas covariantes, se quisermos preservar a estrutura da ação geral (5.12), ou seja, que o campo escalar à esquerda não seja diferenciado de forma alguma. Isso fixa a forma possível do operador $\Delta_{6,\,\mathrm{der}}$.

No entanto, em Δ_6' não há derivadas, e pode-se pensar que uma base completa de termos consiste em todos os invariantes gravitacionais de seis dimensões, que podem dar origem a uma ação gravitacional invariante conforme em $d = 6$ dimensões. Sabe-se que existem precisamente 10 desses termos independentes. No entanto, a base para o operador Δ_6' deve ser estendida pela inclusão de 7 novos termos, que no nível da ação gravitacional em $d = 6$ seriam derivadas totais (ou relacionados a elas, subtraindo termos da base original com 10

elementos). No nível da ação escalar (conformemente acoplada à gravitação) em (5.12), esses termos não são derivadas totais devido à presença de dois campos escalares. Novamente, se exigirmos a conservação da estrutura como em (5.12), não podemos permitir a realização de integração por partes, e essa base de 10 elementos deve ser estendida para a base geral de 17 elementos. Podemos chamar essa última base de base de Gilkey.

Tendo discutido essa questão, apresentamos abaixo a forma explícita dos termos nessa base

$$\begin{aligned}\Delta_6' = {} & x_1 R\Box R + x_2 R_{\mu\nu}\Box R^{\mu\nu} + x_3 R^3 + x_4 R R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + x_5 R R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + x_6 R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu\rho} \\ & + x_7 R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + x_8 R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}R^{\nu\rho\sigma\tau} + x_9 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\tau\sigma}R^{\tau\sigma\mu\nu} + x_{10} R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\tau\rho\sigma}R^{\nu}{}_{\tau}{}^{\sigma}{}_{\sigma} \\ & + x_{11}(\nabla_\mu\nabla_\nu R)R^{\mu\nu} + x_{12}(\nabla_\mu R)\nabla^\mu R + x_{13}(\nabla_\mu R_{\nu\rho})\nabla^\mu R^{\nu\rho} + x_{14}\Box^2 R + x_{15}(\nabla_\mu R_{\nu\rho})\nabla^\nu R^{\mu\rho} \\ & + x_{16}(\nabla_\mu\nabla_\nu R_{\rho\sigma})R^{\mu\rho\nu\sigma} + x_{17}(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\rho\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Os outros possíveis termos que poderiam ser considerados

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu\rho\sigma}\Box R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\sigma\rho\tau}, \quad (\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\nu R^{\mu\rho\sigma\tau}, \\ & (\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\nu R^{\mu\sigma\rho\tau} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}R^{\nu\sigma\rho\tau}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

são reduzidos ao realizar a comutação de derivadas covariantes, usando a ciclicidade ou identidades de Bianchi (às vezes também em formas contraídas) do tensor de Riemann. Explicitamente, usamos as seguintes fórmulas que são válidas em qualquer ponto do espaço-tempo, onde não precisamos permitir integração por partes

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma}\Box R^{\mu\nu\rho\sigma} = {} & 2R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}R^{\nu\rho\sigma\tau} + 4R^{\mu\rho\nu\sigma}\nabla_\mu\nabla_\nu R_{\rho\sigma} - R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\tau\sigma}R^{\tau\sigma\mu\nu} \\ & - 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\tau\rho\sigma}R^{\nu}{}_{\tau}{}^{\sigma}{}_{\sigma}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\sigma\rho\tau} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\rho\sigma\tau}, \tag{5.17}$$

$$(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\nu R^{\mu\rho\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\rho\sigma\tau}, \tag{5.18}$$

$$(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\nu R^{\mu\sigma\rho\tau} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\nu R^{\mu\rho\sigma\tau} = \frac{1}{4}(\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\tau})\nabla^\mu R^{\nu\rho\sigma\tau}, \tag{5.19}$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}R^{\nu\sigma\rho\tau} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}R^{\nu\rho\sigma\tau}. \tag{5.20}$$

5.3 Método de derivação de Δ_6 em d geral

Agora que selecionamos e descrevemos a base dos termos que estarão presentes na forma generalizada do operador Hamada [44,45] em uma dimensão arbitrária d, podemos descrever brevemente nosso método de derivação do operador escalar conforme Δ_6. O operador será determinado, até possíveis ambiguidades, como nos dois parâmetros ζ_1 e ζ_2 em (5.3), completamente pela especificação dos valores de todos os coeficientes $z_1, \ldots, z_{21}$ e $x_1, \ldots, x_{17}$, onde a normalização é mantida fixando o coeficiente em frente a $\Box^3$ como unidade na expansão do operador Δ_6. Resolveremos o sistema de equações lineares necessário para determinar os $21 + 17 = 38$ coeficientes $z_1, \ldots, z_{21}$ e $x_1, \ldots, x_{17}$ ou as relações entre eles, caso haja alguns parâmetros livres.

A condição de invariância conforme da ação (5.12) implica que

$$\delta_c \bar{S} = \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} \delta_c \bar{g}_{\mu\nu} + \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{\phi}} \delta_c \bar{\phi} = 0. \tag{5.21}$$

Essa condição, que é válida para teorias invariantes sob transformações conformes, é também conhecida como a identidade de Noether para simetria conforme local. Lembrando que, sob transformações conformes locais infinitesimais, temos

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu} = \left[1 + 2\sigma + \mathscr{O}(\sigma^2)\right] \bar{g}_{\mu\nu} \xrightarrow{\text{linearizando}} \delta_c \bar{g}_{\mu\nu} = 2\sigma \bar{g}_{\mu\nu}, \tag{5.22}$$

onde $\delta_c \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}$, e de maneira análoga,

$$\delta_c \bar{\phi} = w\sigma\bar{\phi}. \tag{5.23}$$

A condição de invariância conforme pode ser reescrita como

$$0 = \delta_c \bar{S} = 2\frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} \sigma \bar{g}_{\mu\nu} + \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{\phi}} w\sigma\bar{\phi}. \tag{5.24}$$

Definindo o traço do tensor energia-momento do sistema e a equação de movimento (EOM) como

$$\bar{T}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} \quad \text{e} \quad \bar{E} = \frac{\delta \bar{S}}{\delta \bar{\phi}}, \tag{5.25}$$

a condição de invariância conforme pode ser expressa na forma

$$0 = \delta_c \bar{S} = \sigma \left(\sqrt{-\bar{g}} \bar{T} + \bar{E} w \bar{\phi} \right). \tag{5.26}$$

Verifica-se explicitamente que o traço do tensor energia-momento (EMT) associado à ação de matéria definida em (5.12) não é nulo, sendo equilibrado por um termo proporcional à equação clássica de movimento do campo escalar. No caso em que $w = 0$, que corresponde à situação de dimensões críticas do espaço-tempo $d = n$, o traço T do EMT do sistema escalar deve anular-se identicamente. Fora da dimensão crítica, o traço T é nulo apenas on-shell, ou seja, quando a equação de movimento (EOM) do setor de matéria é satisfeita. Em uma situação off-shell geral, obtém-se a seguinte expressão

$$\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{T} = w\bar{E}\bar{\phi}\,. \tag{5.27}$$

No entanto, em nossa derivação do sistema algébrico de equações, optamos por não utilizar integração por partes após aplicar as transformações conformes aos termos da ação. Essa escolha implica que a equação (5.21) possui um significado meramente formal, uma vez que as variações conformes da métrica e dos campos escalares permanecem sob as derivadas na variação da ação $\delta_c\bar{S}$. Vale ressaltar que, em abordagens convencionais, a integração por partes no integral de volume da ação do modelo é frequentemente empregada para derivar as expressões do EMT e das EOM da matéria, conforme discutido anteriormente.

5.3.1 Consequências da invariância de escala global

Primeiramente, é instrutivo analisar a situação para a invariância de escala global, ou seja, o caso em que σ, sendo o parâmetro das transformações conformes infinitesimais, é constante, e, portanto, todas as derivadas atuando sobre ele se anulam identicamente. Neste caso, a invariância conforme está de acordo com os resultados da análise dimensional, sendo apenas uma restrição algébrica sobre o possível valor do peso conforme w do campo escalar. Aqui, podemos analisar a situação para o primeiro termo principal $\Box^{\frac{n}{2}}$ do operador Δ_n em d dimensões. Esta parte da ação agora é escrita como

$$\int d^dx\sqrt{-g}\phi\Box^{\frac{n}{2}}\phi. \tag{5.28}$$

Exigindo que isso seja uma quantidade adimensional, encontramos a dimensão de energia do campo escalar

$$[\phi] = E^{\frac{d-n}{2}}, \tag{5.29}$$

ou em termos do peso conforme

$$w = -\frac{d-n}{2} = \frac{n-d}{2}. \tag{5.30}$$

Essa contagem de dimensões de energia concorda precisamente com a contagem dos coeficientes na frente de σ para as transformações infinitesimais. De maneira similar, para a invariância conforme, queremos que $\delta_c S \propto \sigma$ com o coeficiente de proporcionalidade igual a zero. Para isso, é necessário recordar que para uma transformação conforme infinitesimal global

$$\delta_c\left(d^dx\sqrt{-\bar{g}}\right) = d\sigma d^dx\sqrt{-\bar{g}}, \tag{5.31}$$

$$\delta_c\left(\bar{\Box}\right) = \delta_c\left(\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\right) = -2\sigma\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu = -2\sigma\bar{\Box} \tag{5.32}$$

e

$$\delta_c\bar{\phi} = w\sigma\bar{\phi} \tag{5.33}$$

em uma analogia precisa (o sinal de menos é a única diferença) com as atribuições de dimensão de energia para os mesmos elementos da ação, a saber

$$\left[d^dx\sqrt{-g}\right] = E^{-d}, \quad [\Box] = [g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu] = [\nabla]^2 = E^2 \quad \text{e} \qquad [\phi] = E^{\frac{d-n}{2}}. \tag{5.34}$$

O peso conforme $w = \frac{n-d}{2}$ do campo escalar ϕ derivado desta maneira deve ser uniformemente válido para todos os termos no operador Δ_n; portanto, este já é um primeiro resultado para a questão da determinação de Δ_6 em dimensões gerais d. Isso está, é claro, em concordância com a metodologia geral da nossa construção dos operadores escalares conformes Δ_n em um espaço-tempo de dimensionalidade d. Primeiro, precisamos atribuir o peso conforme w ao campo escalar ϕ, e somente após isso podemos buscar os coeficientes de todos os termos na expansão do operador Δ_n. Conforme enfatizado acima, a primeira tarefa é facilmente resolvida explorando a invariância de escala global (ou análise dimensional).

5.3.2 Transformações conformes infinitesimais linearizadas

Para outros termos da variação conforme $\delta_c\bar{S}$, com derivadas atuando sobre o parâmetro conforme local $\sigma = \sigma(x)$, é suficiente recorrer à consideração da invariância da ação sob transformações infinitesimais, ou seja, ao nível linear em σ. Transformações conformes finitas podem ser obtidas por exponenciação das transformações infinitesimais, e não se espera problemas com a invariância da ação em relação a elas, desde que a invariância sob transformações infinitesimais esteja garantida e que não existam obstáculos topológicos que impeçam a realização de transformações conformes finitas.

Como vimos brevemente, após realizar a transformação conforme, precisamos ordenar os termos resultantes da variação e manter apenas aqueles lineares em σ. Para isso, podemos

manter apenas os termos lineares nas derivadas do escalar σ. A parte global foi analisada acima com os resultados apenas para w. Em seguida, precisamos usar as identidades de Bianchi, a propriedade de ciclicidade do tensor de Riemann e a comutação de derivadas para reduzir os termos e encontrar apenas a combinação linearmente independente deles no resultado final para $\delta_c\bar{S}$, escrita em uma base irredutível. Essa etapa é muito importante para obter uma solução correta para os coeficientes desconhecidos $z_1, \ldots, z_{21}$ e $x_1, \ldots, x_{17}$. Observamos que o número de equações que obtemos geralmente é maior do que $21+17 = 38$, porque o número de termos independentes nos resultados para $\delta_c S$ é maior do que o número total de invariantes em (5.10) e em (5.14). Por exemplo, em $\delta_c S$ temos escalares com derivadas em σ, que não estão presentes na base em (5.10), nem em (5.14). Portanto, a base de todos os termos possíveis em $\delta_c S$ é completamente diferente e não relacionada àquelas em (5.10), (5.14).

Somente para o caso global, encontramos em $\delta_c\bar{S}$ os mesmos termos que em Δ_6 apenas multiplicados por σ. Portanto, devemos ter precisamente $22+17 = 39$ termos nos resultados para $\delta_c\bar{S}$ com $\sigma = \text{const}$[3]. Todas as condições para o desaparecimento desses termos são satisfeitas quando $w = \frac{n-d}{2}$ é inserido.

Para os termos com derivadas de σ, encontramos em $\delta_c\bar{S}$ precisamente $37 + 22 = 59$ termos independentes (essa decomposição será explicada abaixo). Assim, obtemos um sistema de 59 equações para 38 coeficientes desconhecidos. A verificação de que este não é um sistema contraditório é um passo de verificação muito importante para nosso método de cálculo (existem 21 equações excedentes). No final, descobrimos que esse sistema ainda tem alguns parâmetros livres (como ζ_1 e ζ_2 no caso do operador Hamada [44, 45] original). Não escreveremos explicitamente os termos independentes na base desses 59 elementos da expansão de $\delta_c\bar{S}$, pois isso seria bastante extenso e, além disso, essa base não será mais utilizada por nós. Precisaremos dela apenas para especificar o sistema de equações lineares para os 38 coeficientes.

Na realidade, aqui podemos facilmente determinar e distinguir a forma dos termos em $\delta_c\bar{S}$ que vêm da variação conforme da parte Δ_6' do operador Δ_6. Esses termos, é claro, carregarão consigo a dependência linear dos coeficientes $x_1, \ldots, x_{17}$. É claro, por sua natureza, que resultarão exclusivamente em termos proporcionais a ϕ^2, de modo que nenhuma derivada atuará sobre o campo escalar, embora possam atuar sobre σ ou sobre outras curvaturas gravitacionais. Podemos destacar esses termos base que são proporcionais a ϕ^2. Encontramos precisamente 22 deles. Os outros 39 termos são construídos com derivadas atuando sobre

[3] Um termo adicional sem um coeficiente numérico z associado na base (5.10) é simplesmente $\Box^3$.

um dos campos escalares e sobre σ. Encontramos a ordenação desses termos pelo número de derivadas atuando nos escalares bastante útil. Para lidar com esses termos e com os grandes sistemas de equações lineares, obtemos ajuda de pacotes especiais do Mathematica [125].

De fato, vê-se que o sistema de coeficientes $x_1, \ldots, x_{17}$ pode ser resolvido (ou relações entre eles encontradas) com base nas 22 equações mencionadas acima, que surgem dos 22 termos independentes em $\delta_c \bar{S}$ proporcionais a ϕ^2. Por outro lado, para os coeficientes $z_1, \ldots, z_{21}$, precisamos resolver ou reduzir o sistema maior de 37 equações. No final, os dois sistemas de equações estão acoplados, de modo que as soluções para $x_1, \ldots, x_{17}$ dependem também das soluções encontradas para $z_1, \ldots, z_{21}$. As soluções dos coeficientes acima podem ser encontrados no apêndice F.1.

Aqui devemos realizar algumas observações relacionados aos novos resultados encontrados em F.1, pertencente a ação (5.13). Primeiro, ao resolver o sistema de $z_1, \ldots, z_{21}$, encontramos novamente uma liberdade de dois parâmetros. Escolhemos z_9 e z_{10} como parâmetros livres seguindo a escolha feita por Hamada [44, 45], motivada primeiramente em dimensões $d = 6$. Todas as soluções para os coeficientes z: de z_1 a z_8 e de z_{11} a z_{21} dependem apenas desses dois parâmetros e da dimensão do espaço-tempo d. O sistema é resolvido para 19 coeficientes em termos de 2 parâmetros z_9, z_{10} e da dimensão d.

Para o sistema de 17 coeficientes a priori desconhecidos $x_1, \ldots, x_{17}$, encontramos que fomos capazes de encontrar 14 deles em termos de 3 parâmetros livres do conjunto $x_1, \ldots, x_{17}$, com a adição de z_9 e z_{10} do conjunto anterior e da dimensão do espaço-tempo d. Como parâmetros livres aqui decidimos escolher x_9, x_{10} e x_{17}. A razão para tal escolha será explicada posteriormente. Portanto, resolvemos os coeficientes x de x_1 a x_8 e de x_{11} a x_{16}.

Agora, discutiremos a dependência dimensional nos resultados apresentados acima. Em primeiro lugar, observa-se que alguns coeficientes divergem nas dimensõess $d = 4$, $d = 2$ e $d = 1$ devido à presença de denominadores que se anulam nessas dimensões. Esses denominadores correspondem a polinômios redutíveis (ou decomponíveis) que dependem explicitamente da dimensão d. As duas primeiras dimensões problemáticas são dimensões pares menores que a dimensão crítica. Observa-se que, em geral, não se pode definir o operador conforme nas dimensões $d = 2$ e $d = 4$. Abaixo, podemos provar como um teorema que, para dimensões menores em dois do que a crítica para um dado operador, isso é impossível, e não se pode ter o operador Δ_n em dimensões $d = n - 2$ obtido usando este método. Nos numeradores das expressões acima, encontramos polinômios de d e dos parâmetros z_9 e z_{10} (e também de x_9, x_{10} e x_{17} para os coeficientes x resolvidos). O grau na variável d desses polinômios é de até quinto para os coeficientes z resolvidos (e até sétimo para os coeficientes x), enquanto nas

outras variáveis z_9 e z_{10} (e também x_9, x_{10} e x_{17}), os polinômios são lineares.

5.4 O Operador Hamada em $d = 6$ reconsiderado

Vamos considerar a situação limite na dimensão crítica $d = 6$, que é especial para o operador Δ_6, neste limite os coeficientes assumirão a seguinte forma

$$z_1 = 4, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 0, \quad z_6 = 4, \quad z_7 = -\frac{3}{5},$$

$$z_8 = \zeta_1, \;\; z_9 = \zeta_2, \;\; z_{10} = z_8, \;\; z_{11} = -\frac{3}{4}\left(z_8 - 8\right), \;\; z_{12} = \frac{1}{8}\left(z_8 - 8z_9 - 8\right), \;\; z_{13} = \frac{1}{4}\left(z_8 - 8\right),$$

$$z_{14} = -\frac{1}{200}\left(5z_8 - 20z_9 - 72\right), \quad z_{15} = \frac{2}{5}, \quad z_{16} = z_8 + 4z_9, \quad z_{17} = -z_8, \quad z_{18} = \frac{1}{4}\left(z_8 + 24\right),$$

$$z_{19} = -\frac{1}{4}\left(3z_8 + 8z_9 + 8\right), \quad z_{20} = -\frac{1}{8}\left(z_8 - 8\right) \quad \text{e} \quad z_{21} = \frac{1}{200}\left(15z_8 + 40z_9 - 56\right). \tag{5.35}$$

Observa-se que os coeficientes z_4 e z_5 se anulam em $d = 6$, já que suas expressões em dimensão geral são ambas proporcionais ao fator $(d - 6)$. Além disso, quase todos os coeficientes após z_{10} (exceto z_{15}) apresentam alguma dependência nos coeficientes z_8 e z_9, então, quando os definimos ambos como zero, alguns coeficientes após z_{10} desaparecem. Por fim, nota-se ainda que a combinação particular $(z_8 - 8)$ aparece frequentemente acima, então, novamente, para a escolha especial $z_8 = 8$, mais coeficientes desaparecem.

Ao analisar a situação com os coeficientes $x_1, \ldots, x_{17}$ novamente no limite $d = 6$, descobre-se que alguns termos desaparecem (nomeadamente x_{11}, x_{12} e x_{14}), resultando em

$$x_1 = \frac{x_{17}}{5}, \quad x_2 = -2x_{17}, \quad x_3 = \frac{36x_9 - 19x_{10} - 112x_{17}}{800}, \quad x_4 = \frac{-108x_9 + 57x_{10} + 304x_{17}}{160},$$
$$x_5 = \frac{12x_9 - 3x_{10} - 16x_{17}}{40}, \quad x_6 = \frac{20x_9 - 7x_{10} - 16x_{17}}{16}, \quad x_7 = \frac{3\left(4x_9 - 3x_{10} - 16x_{17}\right)}{8},$$
$$x_8 = \frac{-12x_9 + 3x_{10} + 16x_{17}}{4}, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = x_{17}, \quad x_{14} = 0, \quad x_{15} = -2x_{17},$$
$$\text{e} \quad x_{16} = 8x_{17}. \tag{5.36}$$

Enquanto os demais são funções lineares apenas dos coeficientes do conjunto x, ou seja, de x_9, x_{10} e x_{17}. Os termos constantes no numerador (independentes das três variáveis acima) não aparecem e não há qualquer dependência nos dois parâmetros livres z_8 e z_9. Isso prova que é consistente definir todos os três x_9, x_{10} e x_{17} como zero e obter o operador Hamada [44, 45] como um operador escalar conforme com seis derivadas em $d = 6$, sem necessidade de incluir termos em Δ_6'. Aqui, em vez disso, fornecemos a generalização do operador Hamada [44, 45]

ainda em $d = 6$, quando incluímos uma família de termos de endomorfismo adicionais de três parâmetros, atuando sobre o escalar ϕ e descritos pelos coeficientes livres x_9, x_{10} e x_{17}. Mostraremos abaixo que, ao mudar a base, esta extensão do operador Hamada [44,45] possui uma interpretação natural. Em certo sentido, o tamanho dessa liberdade está relacionado ao número de co-ciclos de Weyl que podem ser criados com cubos dos tensores de Weyl [126,127].

Embora o sistema de equações analisado anteriormente tenha sido derivado a partir da invariância sob transformações conformes infinitesimais, também verificamos que operador Hamada generalizado é invariante sob transformações finitas. Portanto, isso prova que não há qualquer obstáculo topológico no espaço do grupo do grupo conforme completo, e podemos estender facilmente os resultados obtidos na vizinhança da identidade (ou origem na álgebra conforme) para o grupo completo.

5.5 Teorema sobre a inexistência de Δ_n em $d = n - 2$

Para provar este teorema, deve-se relembrar um pequeno número de fatos sobre a construção do operador Δ_n em dimensão geral d. Primeiro, o termo dominante (em derivadas) deste operador deve ter a forma $\Box^{\frac{n}{2}}$. Além disso, seguindo a listagem de termos escrita por Hamada [44, 45], sabemos que o seguinte termo com exatamente duas derivadas atuando sobre o campo escalar ϕ pode estar presente

$$z_*(\Box^{\frac{n-4}{2}} R_{\mu\nu})\nabla^\mu\nabla^\nu\phi, \tag{5.37}$$

é claro, entre muitos outros. Mas, para a prova, é necessário concentrar-se nesses dois termos em Δ_n. Em seguida, relembra-se as leis de transformação conforme infinitesimal para o campo escalar ϕ e para o tensor métrico covariante do espaço-tempo, que são $\delta_c\phi = w\sigma\phi$, e $\delta_c g_{\mu\nu} = 2\sigma g_{\mu\nu}$ (por conveniência e estética, iremos ocultar as barras sobre as variáveis transformados, por exemplo, $\bar{\phi} \to \phi$). A ideia principal da prova concentra-se no seguinte termo

$$X = (\Box^{\frac{n-4}{2}} R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi, \tag{5.38}$$

na longa expressão para a variação conforme local infinitesimal da ação do operador sobre o campo escalar, ou seja, na quantidade $\delta_c\left(\Delta_n\phi\right)$. Não escreveremos outros termos em $\delta_c\left(\Delta_n\phi\right)$, pois eles são irrelevantes e, obviamente, à medida que n aumenta, o número desses termos cresce muito rapidamente.

A primeira observação pertinente é que apenas dois termos na expansão geral do operador Δ_n contribuem para o termo X em $\delta_c\left(\Delta_n\phi\right)$. Eles são precisamente: o termo dominante (com

coeficiente geral fixo) $\Box^{\frac{n}{2}}\phi$ e a expressão (5.37).

Pode-se facilmente verificar que todos os outros possíveis termos em $\Delta_n\phi$ não contribuem para X pao analisar a estrutura do fundo desse termo. A escolha de $\Box^{\frac{n-4}{2}}R_{\mu\nu}$ como a quantidade de fundo em X é muito peculiar, pois representa a máxima quantidade possível de derivadas atuando sobre o tensor de Ricci, considerando que o termo X deve conter derivadas do parâmetro conforme, torna-se extremamente difícil obter esse termo como resultado da variação conforme de outros elementos em Δ_6.

Podemos agora apresentar os resultados finais. Encontramos que a variação conforme do termo líder $\Box^{\frac{n}{2}}\phi$ contém

$$\delta_c\left(\Box^{\frac{n}{2}}\phi\right) = \delta_c\left(\Box^{\frac{n}{2}-2}\Box^2\phi\right) \supset \Box^{\frac{n}{2}-2}\left(\delta_c\left(\Box^2\phi\right)\right) \supset 2(2w+d-2)(\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi, \quad (5.39)$$

onde o símbolo de inclusão $\supset$ denota que, obviamente, há também outros termos na variação conforme, mas que não nos interessam aqui. Para obter esta fórmula, utilizamos primeiro a fórmula geral para a variação conforme do box escalar atuando sobre um campo escalar Y

$$\delta_c\left(\Box Y\right) = \Box\delta_c Y - 2\sigma(\Box Y) + (d-2)(\nabla_a\sigma)\nabla_a Y, \quad (5.40)$$

onde Y é um escalar do ponto de vista da relatividade geral, mas não precisa necessariamente ter um peso conforme atribuído[4].

É claro que, quando $Y = \phi$, sabemos que um peso conforme pode ser atribuído, e então $w(Y) = w(\phi)$, mas, por exemplo, tal peso não pode ser definido quando $Y = \Box\phi$, pois este último não se transforma de maneira co-covariante. Aqui tratamos o operador $\Box^{\frac{n}{2}-2}$ como um espectador atuando sobre a variação de $\Box^2\phi$ e, por isso, nada no coeficiente do resultado depende de n. Ordenamos os termos com derivadas nesta variação conforme e usamos as regras de comutação

$$\left[\Box, \nabla_\mu\right]\phi = R_{\mu\nu}\nabla^\nu\phi \quad \text{e} \quad \left[\Box, \nabla_\mu\right]\sigma = R_{\mu\nu}\nabla^\nu\sigma. \quad (5.41)$$

De maneira similar, encontramos que

$$\delta_c\left(\Box^{\frac{n-4}{2}}R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right) \supset \Box^{\frac{n-4}{2}}R_{\mu\nu}\delta_c\left(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right) \supset 2(w-1)(\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi. \quad (5.42)$$

Na segunda expressão, vemos que o resultado final não depende completamente de n, pois $\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu}$, é também, tratado aqui como um espectador nesta derivação. Da mesma forma,

[4] Somente importa tudo o que está codificado na transformação $\delta_c Y$.

não há dependência na dimensão d do espaço-tempo, pois a dimensão não é necessária na variação conforme linearizada

$$\delta_c\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right) = \nabla_\mu\nabla_\nu\delta_c\phi - 2\left[\nabla_{(\mu}\sigma\right]\nabla_{\nu)}\phi + g_{\mu\nu}(\nabla_\rho\sigma)\nabla^\rho\phi. \tag{5.43}$$

Agora, o ponto chave para a demonstração é que o peso conforme do campo escalar ϕ em $d = n-2$ é precisamente $w = 1$. Então, isso implica que a contribuição do termo dominante é não nula em $\delta_c\left(\Delta_n\phi\right)$

$$\delta_c\left(\Box^{\frac{n}{2}}\phi\right) \supset 2d(\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi, \tag{5.44}$$

enquanto que do outro termo obtemos

$$\delta_c\left(\Box^{\frac{n-4}{2}}R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right) \supset 2\left.(w-1)\right|_{w=1}(\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi = 0. \tag{5.45}$$

Assim, não há contribuição do segundo termo! Portanto, é impossível, manipulando o coeficiente z_* (do segundo termo), cancelar a contribuição

$$2d(\Box^{\frac{n}{2}-2}R_{\mu\nu})(\nabla^\mu\sigma)\nabla^\nu\phi, \tag{5.46}$$

do termo dominante para a variação conforme $\delta_c\left(\Delta\phi\right)$ em um fundo geral não Ricci-plano. Os outros possíveis termos em Δ_n também não podem auxiliar na anulação dessa contribuição. Portanto, para qualquer escolha dos coeficientes arbitrários (como z_*) na expansão do operador Δ_n, somos incapazes de fazer toda a variação conforme local se anular. Em conclusão, tal operador conforme Δ_n atuando sobre o escalar ϕ não existe em $d = n-2$ (ou seja, dois abaixo da dimensão crítica $d = n$, onde o campo escalar é adimensional). Isso completa a demonstração da inexistência do operador cinético conforme $\Delta_n\phi$ para escalares em um espaço-tempo de dimensionalidade $d = n-2$. Provavelmente, o operador também não existe para qualquer outra dimensão par $d < n-2$. Assim, podemos conjecturar que para dimensionalidades pares $d < n$ menores que a crítica $d_{\text{crit}} = n$, o operador Δ_n não pode ser construído dessa forma.

Os exemplos particulares de aplicação deste teorema com $n = 6$ (em $d = 4$) e com $n = 4$ (em $d = 2$) foram vistos nas formas explícitas dos operadores generalizados de Paneitz [41] e Hamada [44, 45], respectivamente.

Também comentamos que um teorema ligeiramente mais geral sobre a inexistência de operadores conformemente covariantes foi apresentado em [128], onde, no entanto, foram

utilizados argumentos mais complexos envolvendo curvatura Q, cálculo de tratores e holonomia conforme. Acreditamos que nossa prova simples, usando apenas métodos de variações conformes infinitesimais, é mais acessível.

5.6 Derivadas Conformes Covariantes de Wünsch

Nesta seção, demonstramos uma outra forma de obter o operador geral Hamada [44, 45]. Nesse sentido, faremos uso de bases distintas das empregadas nas seções anteriores.

Primeiramente, comentamos brevemente sobre a definição de derivada conforme covariante e os resultados obtidos por Wünsch em [129,130]. O elemento principal de sua construção é o uso da derivada conforme covariante especialmente construída, denotada por $\overset{c}{\nabla}_\mu$, e dos operadores diferenciais construídos com ela. Para introduzir a descrição matemática dessa nova derivada covariante, precisamos de alguns detalhes técnicos adicionais. Definimos o tensor de Schouten $P_{\mu\nu}$ por

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{d-2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(d-1)} g_{\mu\nu} R\right). \tag{5.47}$$

A expressão é válida em qualquer dimensão $d \neq 1, 2$. Uma propriedade importante do tensor de Schouten é o seu traço, dado por $P = R/2(d-1)$ para qualquer dimensão $d \neq 1$. Vale destacar que essa fórmula também se aplica ao caso $d = 2$, embora a expressão em (5.47) pareça singular nessa dimensão.

Em $d = 2$, o tensor de Ricci não é independente, pois pode ser completamente expresso em termos do escalar de Ricci pela relação $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$. O mesmo ocorre para outros tensores de curvatura simétricos com dois índices, de modo que $P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P$ também é válido nessa dimensão.

Uma outra propriedade importante do tensor de Schouten é que, sob uma transformação conforme infinitesimal, sua variação assume uma forma bastante simples, a saber, $\delta_c P_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \nabla_\nu \sigma$, onde σ é o parâmetro da transformação.

A seguir, apresentaremos a construção geral da derivada covariante conforme para uma sequência de N derivadas consecutivas atuando sobre um campo escalar (consulte [129, 130] e [121]). Essa construção é baseada indutivamente no conhecimento das $N-1$ derivadas conformes anteriores e no fato de que essas $N-1$ derivadas conformes se transformam, sob transformações conformes, com dependência de no máximo a primeira derivada do parâmetro conforme. Definimos que

$$\overset{c}{\nabla}_{\rho_1} \overset{c}{\nabla}_{\rho_2} \cdots \overset{c}{\nabla}_{\rho_N} \phi = \nabla_{\rho_1} \overset{c}{\nabla}_{\rho_2} \cdots \overset{c}{\nabla}_{\rho_N} \phi + P_{\rho_1 \gamma} X^{\gamma}{}_{\rho_2 \ldots \rho_N}{}^{\beta_1 \ldots \beta_{N-2}} \overset{c}{\nabla}_{\beta_1} \cdots \overset{c}{\nabla}_{\beta_{N-2}} \phi, \tag{5.48}$$

esta definição de uma sequência de N derivadas covariantes conformes funciona para $N \geqslant 2$, enquanto para apenas uma derivada covariante conforme, temos a seguinte definição $\overset{c}{\nabla}_\mu \phi = \nabla_\mu \phi$. A expressão geral para o tensor X, aqui com um total de $2(N-1)$ índices, metade deles covariantes e a outra metade contravariantes, é dada por

$$X^{\gamma}{}_{\rho_2 \ldots \rho_N}{}^{\beta_1 \ldots \beta_{N-2}} = \sum_{k=1}^{N-1} (w - N + k + 1)\, \delta^{\gamma}_{\rho_{k+1}} \delta^{\beta_1}_{\rho_2} \cdots \delta^{\beta_{k-1}}_{\rho_k} \delta^{\beta_k}_{\rho_{k+2}} \cdots \delta^{\beta_{N-2}}_{\rho_N} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} \left(g_{\rho_{k+1}\rho_{l+1}} g^{\gamma\beta_{k-1}} - \delta^{\gamma}_{\rho_{k+1}} \delta^{\beta_{k-1}}_{\rho_{l+1}} \right) \delta^{\beta_1}_{\rho_2} \cdots \delta^{\beta_{l-1}}_{\rho_l} \delta^{\beta_l}_{\rho_{l+2}} \cdots \delta^{\beta_{k-2}}_{\rho_k} \delta^{\beta_k}_{\rho_{k+2}} \cdots \delta^{\beta_{N-2}}_{\rho_N} . \tag{5.49}$$

Aqui, o tensor X possui $2(N-1)$ índices agrupados em três conjuntos. Ele é contraído com a derivada conforme de ordem $(N-2)$ aplicada ao mesmo campo escalar ϕ. O primeiro índice especial no tensor X é γ, que deve ser contraído precisamente com a primeira derivada de σ na lei de transformação conforme. O segundo grupo de índices, de ρ_2 a ρ_N, corresponde aos $(N-1)$ índices restantes no tensor da derivada conforme de ordem N. No grupo final, encontramos $(N-1)$ índices β_1 a β_{N-1}, que estão todos contraídos com os índices da derivada conforme de ordem $(N-1)$ situada mais à direita em (5.48).

Ainda formalmente, podemos definir as potências do operador $\overset{c}{\Box}$ atuando no campo escalar ϕ como

$$\overset{c}{\Box}{}^N \underset{\text{df}}{=} g^{\rho_1\rho_2} \cdots g^{\rho_{2N-1}\rho_{2N}} \overset{c}{\nabla}_{\rho_1} \overset{c}{\nabla}_{\rho_2} \cdots \overset{c}{\nabla}_{\rho_{2N}} \phi, \tag{5.50}$$

onde a ordem das contrações aqui importa muito, pois, em geral, as derivadas covariantes conformes não comutam (o mesmo ocorre com as derivadas covariantes da GR ordinária). Aqui, pode-se notar imediatamente que a lei de transformação do operador $\overset{c}{\Box}{}^N$ é determinada a partir de algum traço (parcial) do tensor X correspondente. Ou seja, temos

$$\begin{aligned} \delta_c \left(\overset{c}{\Box}{}^N \phi \right) &= \left(\delta_c \left(\overset{c}{\Box}{}^N \phi \right) \right)\Big|_{\sigma} + \left(\delta_c \left(\overset{c}{\Box}{}^N \phi \right) \right)\Big|_{\nabla\sigma} \\ &= (w - 2N)\, \sigma \overset{c}{\Box}{}^N \phi + (\nabla_\gamma \sigma) X^{\gamma\beta_1 \ldots \beta_{2N-1}} \overset{c}{\nabla}_{\beta_1} \overset{c}{\nabla}_{\beta_2} \cdots \overset{c}{\nabla}_{\beta_{2N-1}} \phi, \end{aligned} \tag{5.51}$$

no qual usamos a nova definição do tensor X dado anteriormente, parcialmente contraído com algumas métricas, com a intenção de alterar o índices covariantes em contravariantes, após algumas álgebras (veja [121, 129, 130] para mais detalhes), chegamos em

$$\delta_c \left(\overset{c}{\Box}{}^N \phi \right) = (w - 2N)\, \sigma \overset{c}{\Box}{}^N \phi + \sum_{k=1}^{N} (2w + 4k - 2 - 4N + d)\, (\nabla_\gamma \sigma) \overset{c}{\Box}{}^{k-1} \overset{c}{\nabla}{}^{\gamma} \overset{c}{\Box}{}^{N-k} \phi. \tag{5.52}$$

No entanto, na fórmula anterior, não podemos realizar mais simplificações, pois, em geral, a derivada conforme covariante não comuta com o operador conforme $\overset{c}{\Box}$. Essa questão aqui é ainda mais complicada do que no caso do operador $\Box$ covariante da relatividade geral, porque o peso conforme do resultado é diferente do original do campo escalar ϕ. (Na relatividade geral, temos que o resultado de $\Box^N$ em qualquer representação tensorial do grupo de difeomorfismos permanece na mesma representação.) Além disso, também temos outros vários termos na regra de comutação para duas derivadas conformes de Wünsch, que estão relacionados à forma do tensor X. Para definição e fórmulas exatas sobre esse assunto, podemos remeter o leitor interessado à literatura original [129].

É fácil perceber que, para $N = 1$, o operador $\overset{c}{\Box}\phi$ reproduz exatamente o operador de Ørsted-Penrose [38–40] apresentado anteriormente. Do ponto de vista técnico, por meio da equação abaixo, pode-se considerar a condição para o desaparecimento do segundo coeficiente em (5.52), ou seja,

$$2w + 4k - 2 - 4N + d = 0, \tag{5.53}$$

para $N, k = 1$ encontramos o seguinte valor para o peso $w = \frac{2-d}{2}$, o mesmo resultado que anteriormente. A expansão de $\overset{c}{\Box}\phi$ usando (5.47), (5.48) e (5.50) produz exatamente o operador em uma forma explícita da GR,

$$\overset{c}{\Box}\phi = \left(\Box - \frac{d-2}{4(d-1)}R\right)\phi. \tag{5.54}$$

Isso também prova que este é o único operador conformemente covariante possível neste contexto com duas derivadas, ou seja,

$$\left(\delta_c\left(\overset{c}{\Box}\phi\right)\right)\Big|_{\nabla\sigma} = 0 \quad \text{e também} \quad \left(\delta_c\left(\overset{c}{\Box}\phi\right)\right)\Big|_{\sigma} = -\frac{d+2}{2}\sigma\overset{c}{\Box}\phi.$$

Além disso, como é bem conhecido, em $d = 2$ o operador conforme coincide com o operador $\Box$ covariante da relatividade geral padrão, ou seja, $\overset{c}{\Box}\phi\Big|_{d=2} = \Box\phi$. Isso também pode ser entendido pelo fato de que, em $d = 2$, não há singularidades evidentes em (5.54), e o traço do tensor de Schouten em (5.47) não apresenta divergências, pois a contração do interior dos parênteses em (5.47) com a métrica contravariante $g^{\mu\nu}$ faz com que ele desapareça. Assim, tanto o tensor de Schouten quanto seu traço permanecem regulares.

Essa conclusão está de acordo com a discussão anterior sobre a forma do tensor de Schouten no caso bidimensional. Em uma expansão explícita da fórmula (5.54), após (5.48) com $N = 2$, observa-se que o traço do tensor de Schouten, que não é nulo em $d = 2$, aparece

multiplicado pelo fator $(d-2)$. Isso explica por que, nessa dimensão, o escalar de Ricci não contribui para a construção do operador $\Box$ conformemente covariante. Em $d=2$, o tensor de Schouten e seu traço são regulares, mas não há contribuição proporcional a R, pois o peso conforme w deve desaparecer nessa dimensão, já que $d=2$ é uma dimensão crítica para uma teoria escalar com duas derivadas.

Para o caso $N=2$, começamos a ver a vantagem de usar a fórmula com derivadas covariantes conformes. Derivamos que o quadrado do operador conforme $\overset{c}{\Box}{}^2\phi$ se comporta corretamente sob transformações conformes. Para este caso, a lei de transformação será

$$\delta_c\left(\overset{c}{\Box}{}^2\phi\right) = (w-4)\,\sigma\overset{c}{\Box}{}^N\phi + (4w+2d-8)\,\nabla_\gamma\sigma\overset{c}{\nabla}{}^\gamma\overset{c}{\Box}\phi, \tag{5.55}$$

onde fizemos uso da seguinte relação de comutação $\left[\overset{c}{\Box}, \overset{c}{\nabla}{}^\gamma\right]\phi = 0$.

Então, a condição para covariância conforme novamente determina o peso neste caso. Descobrimos que $4w+2d-8=0$ implica que $w=\frac{4-d}{2}$. Se o peso conforme for atribuído, então temos obviamente que o operador tem

$$\delta_c\left(\overset{c}{\Box}{}^2\phi\right) = -\frac{d+4}{2}\sigma\overset{c}{\Box}{}^2\phi, \tag{5.56}$$

então esta é uma expressão que se transforma conformemente de maneira covariante. Um exercício um pouco mais longo e tedioso mostra que o operador $\overset{c}{\Box}{}^2$ em campos escalares com o peso $w=\frac{4-d}{2}$ reproduz completamente o operador de Paneitz [41]. Neste caso, o operador não é completamente único, pois também temos uma ambiguidade ao adicionar um endomorfismo escalar conformemente covariante. Como explicado anteriormente, podemos adicionar aqui o termo $C^2\phi$ com um coeficiente frontal arbitrário. Isso é consistente porque o peso da expressão C^2 é igual a -4, o mesmo que na expressão geral para $\overset{c}{\Box}{}^2$ (devido a dois tensores métricos contravariantes $g^{\mu\nu}$ usados em sua construção). Portanto, o operador linear mais geral atuando em um campo escalar ϕ com peso conforme $w=\frac{4-d}{2}$, contendo até 4 derivadas no termo principal, assume a forma

$$\overset{c}{\Box}{}^2 + \alpha C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{5.57}$$

sendo α uma constante numérica real e adimensional arbitrária. Nesse caso, reconhecemos o fato de que há uma liberdade de um parâmetro na definição do operador conforme. Pode-se ver que a singularidade $(d-2)$ no denominador na definição do tensor de Schouten em (5.47), é aqui responsável pelo fato de que o operador de Paneitz [41] $\overset{c}{\Box}{}^2$ não pode ser definido

no limite $d \to 2$, como observado anteriormente. Além disso, aqui não podemos construir nenhum operador diferencial com quatro derivadas, onde todos os índices nessas derivadas conformes não são contraídos consigo mesmos, então devemos considerar apenas operadores escalares atuando em escalares. Devido às regras de comutação das derivadas covariantes conformes mencionadas acima, temos que, ao atuar em um campo escalar,

$$\overset{c}{\nabla}_\gamma \overset{c}{\nabla}^\gamma \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}^\beta \phi = \overset{c}{\nabla}_\gamma \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}^\gamma \overset{c}{\nabla}^\beta \phi = \overset{c}{\nabla}_\gamma \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}^\beta \overset{c}{\nabla}^\gamma \phi = \overset{c}{\Box}^2 \phi, \tag{5.58}$$

portanto, há apenas uma ordem única de derivadas conformes aqui. Para os casos de $N = 1$ e $N = 2$, vemos que a situação é bastante simples e óbvia. Devido às propriedades algébricas, não temos nenhuma outra possibilidade de construir o operador conforme e, na lei de transformação (5.52), os operadores mais simples construídos já devem ter boas leis de transformação conformes (sem derivadas do parâmetro σ). Isso é causado pelo pequeno tamanho do espaço algébrico de termos independentes que poderíamos escrever aqui, como em (5.52) para $N = 2$ (onde há apenas um termo independente $\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^\gamma\phi$ dentro dos dois últimos termos) e em (5.58). Como veremos, para N maiores, os espaços são maiores, há mais liberdade e, portanto, a construção de operadores conformemente covariantes também é mais complicada.

Começando com $N = 3$, a construção torna-se mais intrincada e o tamanho dos espaços algébricos de termos cresce. Descobrimos que o operador $\overset{c}{\Box}^3$ atuando no campo escalar ϕ com o peso conforme adequado w não é conformemente covariante. Ele se transforma com termos não nulos até a primeira derivada do parâmetro σ. De acordo com a fórmula geral em (5.52), para o caso de $N = 3$, após algumas álgebras, encontramos

$$\delta_c \left(\overset{c}{\Box}^3 \phi \right) = (w-6)\, \sigma \overset{c}{\Box}^3 \phi - 4 \nabla_\gamma \sigma \left[\overset{c}{\nabla}^\gamma, \overset{c}{\Box} \right] \overset{c}{\Box} \phi. \tag{5.59}$$

Aqui, não podemos comutar as derivadas e o operador *box* conforme livremente, porque todos eles atuam em $\phi' = \overset{c}{\Box}\phi$, que não tem uma lei de transformação sem a derivada do parâmetro conforme para o valor de $w = (6-d)/2$. Esse valor não coincide com $\frac{2-d}{4}$ necessário para a invariância de $\overset{c}{\Box}\phi$. Isso significa que o operador $\overset{c}{\Box}^3$ não é conformemente covariante e requer modificações para um operador diferencial conforme de seis derivadas.

Seguindo Wünsch, podemos manter $\overset{c}{\Box}^3$ como a parte principal do operador,com seis derivadas conformes, e adicionar termos subordinados. Esses termos devem conter potências das curvaturas gravitacionais conformes ou suas derivadas. Para o formalismo conforme aqui, podemos usar o tensor de Weyl (ou tensor de Bach)e não outros tensores da GR. Isso é

necessário, mas não suficiente, pois os termos com derivadas de σ devem se cancelar. A forma semelhante para este operador mínimo também apareceu em trabalhos de Branson [131–137]. Wünsch propôs o seguinte operador conforme mínimo de seis derivadas

$$D^{\min}_{(6)}\phi = \left(\overset{c}{\Box}{}^3 + \frac{16}{(d-3)(d-4)} B^{\mu\nu} \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu\right)\phi, \tag{5.60}$$

onde o tensor de Bach $B^{\mu\nu}$ é definido como

$$B_{\mu\nu} = \overset{c}{\nabla}{}^\rho \overset{c}{\nabla}{}^\sigma C_{\rho\mu\nu\sigma}. \tag{5.61}$$

O tensor de Bach é simétrico em seus índices. No entanto, ele é um tensor conformemente covariante apenas em $d = 4$ dimensões espaciais. Aqui, usamos ele apenas como um bloco de construção para a construção do operador $D^{\min}_{(6)}$ e o mais importante é apenas sua lei de transformação conforme infinitesimal, que é

$$\delta_c\left(B_{\mu\nu}\right) = -2\sigma B_{\mu\nu} + 2(d-4)(\nabla^\gamma\sigma)\nabla^\rho C_{\rho\mu\nu\gamma}. \tag{5.62}$$

Percebe-se que, em dimensão ímpar $d = 3$, temos simplesmente $D^{\min}_{(6)} = \overset{c}{\Box}{}^3$, pois o tensor de Weyl e o tensor de Bach desaparecem explicitamente. O cálculo explícito em $d = 3$, baseado em (5.52) e com o peso $w = \frac{2N-3}{2}$, mostra que os termos gerais da forma $(\nabla_\gamma\sigma)\overset{c}{\nabla}{}^\gamma\overset{c}{\Box}{}^{N-1}\phi$ em (5.52) realmente se cancelam consistentemente, dando-nos o resultado de que $\overset{c}{\Box}{}^N$ é um operador conforme.

Em geral, o operador $D^{\min}_{(6)}$ tem o termo principal em derivadas, na expansão em torno do espaço-tempo plano, quando podemos negligenciar todas as curvaturas gravitacionais, como $\Box^3$, ou seja, com exatamente seis derivadas. Em um *framework* geral, temos as seguintes transformações desse operador sob mudanças conformes infinitesimais

$$\delta_c D^{\min}_{(6)}\phi = (w-6)\,\sigma D^{\min}_{(6)}\phi = -\frac{d+6}{2}\sigma D^{\min}_{(6)}\phi \tag{5.63}$$

com $w = \frac{6-d}{2}$ — o peso conforme do campo escalar básico ϕ aqui.

Nota-se que a expressão para o operador conforme mínimo de seis derivadas de acordo com Wünsch em (5.60) é singular nos casos das dimensões $d = 3$ e $d = 4$. Portanto, aqui também, temos uma outra confirmação do teorema de Graham [138, 139] de que em $d = 4$ não podemos construir um operador diferencial conformemente covariante. Além disso, o mesmo se aplica às dimensões $d = 2$, desta vez devido a problemas com o limite $d \to 2$ na definição do tensor de Schouten. Pode-se aqui colocar uma conjectura (seguindo Branson e

Wünsch [129, 132]) de que o operador com $2N$ derivadas não pode ser construído em todas as dimensões pares do espaço-tempo menores que $2N$.

Podemos comentar aqui sobre a estrutura geral das singularidades na definição dos operadores, como operador Hamada [44, 45] generalizado. Seguindo os argumentos da seção anterior e os resultados do formalismo de tractor [140, 141], sabemos que esses operadores são indefinidos na primeira dimensão subcrítica par, ou seja, para $d = 2N - 2$.

Na construção desses operadores, utilizamos $\overset{c}{\Box}{}^N$ complementado por termos envolvendo tensores de Weyl, tensores de Bach e derivadas conformemente covariantes. Na definição desses objetos e também do tensor de Schouten, vemos que nunca há um lugar onde poderíamos gerar singularidades, como $\frac{1}{d-4}$ para Hamada, ou $\frac{1}{d-6}$ para o operador com 8 derivadas, etc., já que apenas contraímos métricas, o que produz potências positivas das dimensões d nos numeradores. Ainda assim, na construção dos operadores conformes, devemos ver a singularidade nessas primeiras dimensões subcríticas pares, porque os operadores não são construíveis nessas situações. Essa singularidade devem aparecer em algumas funções racionais da dimensão d do espaço-tempo. Devido à natureza das operações algébricas descritas abaixo, essas só podem ser funções racionais. A única razão pela qual a singularidade pode aparecer aqui é devido à solução de algum sistema linear algébrico de equações para os coeficientes na frente dos termos adicionais que devem ser adicionados a $\overset{c}{\Box}{}^N$ para construir um operador conformemente covariante mínimo com $2N \geqslant 6$ derivadas na forma $D^{\min}_{(2N)} = \overset{c}{\Box}{}^N + \ldots$. Em outras palavras, para operadores com $2N \geqslant 6$ derivadas, precisamos de termos além do $\overset{c}{\Box}{}^N$, e todos esses termos são construídos de maneira conforme de Wünsch e, em sua construção, não vemos nenhuma singularidade para a dimensão $d = 2N - 2$. No entanto, todos esses termos adicionais devem vir com coeficientes definidos para construir um operador mínimo $D^{\min}_{(2N)}$.

Esses coeficientes são determinados a partir da condição de que $\left(\delta_c \left(D^{\min}_{(2N)}\right)\right)\Big|_{\nabla\sigma} = 0$ que leva a um sistema algébrico de equações para coeficientes a priori desconhecidos. Ao resolver tal sistema algébrico, determinamos os coeficientes iniciais e, nesse procedimento, podemos explorar funções inversas, onde a dimensão d aparece apenas nos numeradores, portanto, podemos acabar com coeficientes sendo funções racionais da dimensão d. Essas funções racionais finalmente podem conter singularidades como $\frac{1}{d-4}$ ou $\frac{1}{d-6}$, etc. Isso explica o motivo pelo qual as singularidades como $\frac{1}{d-4}$ devem aparecer nas dimensões subcríticas e qual é a origem algébrica delas. Tais coeficientes singulares para a definição dos operadores mínimos $D^{\min}_{(2N)}$ são inevitáveis para $N \geqslant 3$. Além disso, a necessidade de resolver um sistema de equações sugere que não há um procedimento alternativo que permita definir diretamente

$D^{\min}_{(2N)}$ em essa etapa algébrica.

Seguindo Wünsch, podemos agora discutir a adição de outros operadores à forma mínima do operador $D^{\min}_{(6)}$ em dimensão arbitrária. Esses devem ser termos com número subordinado de derivadas, mas ainda a dimensão total de energia do termo deve concordar com 6, como é a dimensão de $\Box^3$. Esses termos podem possivelmente conter ainda 4, 3, 2 ou uma derivada conforme covariante atuando no campo escalar, e também permitimos termos endomórficos. Devido à dimensão de energia fixa dos termos em tal combinação, podemos usar termos com uma, duas ou três potências das curvaturas e possivelmente também com as derivadas atuando sobre ela. Para o formalismo conformemente covariante, usaremos apenas derivadas conformemente covariantes e apenas o tensor de Weyl como curvaturas. Podemos usar o tensor de Bach (5.61), embora ele seja um tensor totalmente conforme apenas em $d = 4$ devido à lei de transformação em (5.62). Portanto, poderíamos tratar o tensor de Bach como outra expressão que se transforma, em geral, até as primeiras derivadas de σ. Consideramos os seguintes termos

$$D_1\phi = \overset{c}{\nabla}_\mu\left[\left(C^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}C^{\nu\rho\sigma\kappa} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}C^2\right)\overset{c}{\nabla}_\nu\phi\right] + \frac{(d-4)(d-6)}{4(d-3)^2}\left(\overset{c}{\nabla}_\mu C^{\mu\rho\sigma\kappa}\right)\left(\overset{c}{\nabla}_\nu C^\nu{}_{\rho\sigma\kappa}\right)\phi \quad (5.64)$$

e

$$D_2\phi = 2(d-10)\overset{c}{\nabla}_\mu\left(C^2\,\overset{c}{\nabla}{}^\mu\phi\right) + (d-6)\overset{c}{\Box}\left(C^{\rho\sigma\kappa\lambda}C_{\rho\sigma\kappa\lambda}\right)\phi. \quad (5.65)$$

Cada um desses termos é separadamente conformemente covariante, desde que $w = \frac{6-d}{2}$ e $d \geqslant 4$, e além disso, o peso conforme total dessas duas expressões é o mesmo e igual a $w = -\frac{6+d}{2}$. Portanto, podemos considerar a seguinte combinação "não mínima" como um operador diferencial generalizado

$$D = D^{\min}_{(6)} + \alpha D_1 + \beta D_2 \quad (5.66)$$

com coeficientes reais arbitrários α e β. E através de um cálculo tedioso, descobrimos que

$$\delta_c\left(D\phi\right) = -\frac{6+d}{2}\sigma D\phi, \quad (5.67)$$

onde é importante que todos os termos lineares na primeira derivada de σ se cancelem separadamente em $D^{\min}_{(6)}$, D_1 e D_2. Nota-se que em ambas as fórmulas (5.64) e (5.65) os últimos termos no lado direito desaparecem na dimensão $d = 6$. Ao olhar para as fórmulas (5.64) e (5.65), pode-se facilmente entender que temos em cada combinação, após a expansão de Leibniz, termos com duas, uma ou nenhuma derivada conforme no campo escalar ϕ. É fácil

entender por que termos com quatro e três derivadas no campo escalar ϕ não podem ser construídos. Nesse caso, a parte da curvatura do termo teria que ser o tensor de Weyl ou a primeira derivada do tensor de Weyl. Mas, devido à antissimetria dos índices no tensor de Weyl, temos que a presença de quatro ou três derivadas atuando em sequência no campo escalar é supérflua. Isso ocorre porque os índices nessas derivadas devem ser contraídos com o tensor de Weyl para formar um escalar do ponto de vista da GR, e a antissimetria implica que devemos formar um comutador dessas derivadas. Finalmente, isso leva à geração de um ou mais tensores de curvatura de Weyl e, consequentemente, o número de derivadas é reduzido para 2, 1 ou 0 na ação sobre o campo escalar.

Finalmente, podemos adicionar aqui alguns termos puramente endomórficos. No entanto, as derivadas podem estar em ação nos tensores de Weyl. Encontramos, em dimensão geral d, três desses termos, que podemos escrever na seguinte combinação

$$D_{\text{end}} = \gamma_1 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\rho\sigma}{}_{\kappa\lambda} C^{\kappa\lambda\mu\nu} + \gamma_2 C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\kappa\lambda\sigma} C_{\nu}{}^{\kappa\lambda}{}_{\rho} + \gamma_3 T. \tag{5.68}$$

O escalar T é definido como

$$T = \frac{10-d}{2}\left[\left(\overset{c}{\nabla}_{\mu} C_{\nu\rho\sigma\kappa}\right)^2 - \frac{4(d-2)}{(d-3)^2}\left(\overset{c}{\nabla}_{\mu} C^{\mu\rho\sigma\kappa}\right)\left(\overset{c}{\nabla}_{\nu} C^{\nu}{}_{\rho\sigma\kappa}\right)\right] - 2\overset{c}{\Box}\left(C^2\right). \tag{5.69}$$

Enquanto os dois primeiros termos em (5.68) obviamente têm leis de transformação conformes muito bem definidas, provar que o último escalar T também se transforma covariantemente requer uma análise mais detalhada. Mas, no final das contas, descobre-se como em (5.68) que o peso será $w = -6$ e, para o escalar T, a lei de transformação conforme infinitesimal será $\delta_c T = -6\sigma T$. Isso significa que, para a expressão $D_{\text{end}}\phi$, encontramos a lei de transformação: $\delta_c \left(D_{\text{end}}\phi\right) = -\frac{6+d}{2}\sigma D_{\text{end}}\phi$ para valores reais arbitrários dos parâmetros γ_1, γ_2 e γ_3. Portanto, a combinação mais geral que dará uma expressão linear no campo escalar ϕ é

$$D_{\text{gen}}\phi = D\phi + D_{\text{end}}\phi, \tag{5.70}$$

com constantes reais arbitrárias α, β, γ_1, γ_2 e γ_3.

5.7 Nova construção do operador Hamada generalizado

Nesta última seção principal da tese, apresentaremos uma nova derivação equivalente para o operador Hamada [44, 45]. Sabemos que apenas o operador $\overset{c}{\Box}^3$ não é conformemente covariante e, anteriormente, introduzimos termos de curvatura corretivos para lidar com esse

problema. No entanto, existe uma abordagem alternativa: como as derivadas conformemente covariantes não comutam em geral, podemos construir operadores com seis derivadas organizadas em diferentes ordens.

A expectativa é que, em uma combinação adequada desses termos, os termos com as primeiras derivadas do fator conforme se cancelem, permitindo-nos expressar todos os termos não endomórficos na estrutura geral de um operador de seis derivadas.

Como é sabido, termos de curvatura surgem da comutação de derivadas covariantes, e o nosso objetivo aqui é inverter esse processo, explorando se o operador Hamada [44, 45] pode ser reescrito sem termos de curvatura, mas sim como uma combinação de diferentes ordens de derivadas conformemente covariantes. Além disso, investigaremos em quais condições essa reformulação é possível.

Para começar a explicação dessa maneira de derivar os termos, devemos lembrar ao leitor que o cubo do operador de caixa escalar conformemente covariante $\overset{c}{\Box}^3$ é visto como uma ordem particular de seis derivadas conformemente covariantes. Ou seja, temos

$$\overset{c}{\Box}^3 = g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\kappa\lambda}\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\nabla}_\rho\overset{c}{\nabla}_\sigma\overset{c}{\nabla}_\kappa\overset{c}{\nabla}_\lambda = \overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\nabla}^\nu\overset{c}{\nabla}_\rho\overset{c}{\nabla}^\rho. \tag{5.71}$$

Para a definição de nossas soluções, podemos manter o coeficiente desse termo principal $\overset{c}{\Box}^3$ com a ordem padrão das derivadas conformes $\overset{c}{\nabla}_\mu$ definida como um em nosso procedimento.

Como temos, em geral, seis índices em seis derivadas conformes, o número de contrações métricas completamente arbitrárias inicialmente é $(6-1)!! = 5!! = 15$. Esse número de combinações é muito grande, pois não leva em consideração as simetrias que existem entre vários termos, quando não precisamos comutar derivadas, já que, por exemplo, os índices nelas são simetrizados pelo uso do tensor métrico contravariante, como na fórmula acima. Para isso, fazemos uso das seguintes propriedades das derivadas conformes de Wünch, as suas leis de comutação serão dado por

$$\left[\overset{c}{\nabla}_\mu,\overset{c}{\nabla}_\nu\right]\phi = \left[\overset{c}{\nabla}_\mu,\overset{c}{\nabla}_\nu\right]\overset{c}{\nabla}^\mu\phi = \left[\overset{c}{\nabla}_\mu,\overset{c}{\nabla}_\nu\right]\overset{c}{\nabla}^\nu\phi = \left[\overset{c}{\nabla}_\mu,\overset{c}{\nabla}_\nu\right]\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}^\nu\phi = \left[\overset{c}{\Box},\overset{c}{\nabla}_\sigma\right] = 0. \tag{5.72}$$

Usando várias simetrias e olhando cuidadosamente para a lei de comutação acima, chega-se a uma base irredutível de termos com seis derivadas, que tem precisamente 6 termos. Portanto, todos os termos nas combinações que estamos procurando podem ser apresentados como

$$\mathscr{O} = C^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6}\overset{c}{\nabla}_{\rho_1}\overset{c}{\nabla}_{\rho_2}\overset{c}{\nabla}_{\rho_3}\overset{c}{\nabla}_{\rho_4}\overset{c}{\nabla}_{\rho_5}\overset{c}{\nabla}_{\rho_6}, \tag{5.73}$$

onde o tensor C é

$$C^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6} = \alpha_1 g^{\rho_1\rho_2}g^{\rho_3\rho_4}g^{\rho_5\rho_6} + \alpha_2 g^{\rho_1\rho_3}g^{\rho_2\rho_4}g^{\rho_5\rho_6} + \alpha_3 g^{\rho_1\rho_4}g^{\rho_2\rho_3}g^{\rho_5\rho_6} + \alpha_4 g^{\rho_1\rho_4}g^{\rho_2\rho_5}g^{\rho_3\rho_6} +$$

$$+\alpha_5 g^{\rho_1\rho_5}g^{\rho_2\rho_4}g^{\rho_3\rho_6} + \alpha_6 g^{\rho_1\rho_5}g^{\rho_2\rho_6}g^{\rho_3\rho_4}, \tag{5.74}$$

e ele define todos os 6 elementos da base. Em outras palavras, nossa combinação para o operador diferencial conforme com seis derivadas será

$$\mathscr{O} = \alpha_1 \overset{c}{\Box}^3 + \alpha_2 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\Box} + \alpha_3 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\Box} \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\Box} + \alpha_4 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}_\rho \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\nabla}^\rho$$

$$+\alpha_5 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}_\rho \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\rho + \alpha_6 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\Box} \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu, \tag{5.75}$$

aqui podemos tomar $\alpha_1 = 1$, pois isso apenas altera a normalização geral do operador.

Em linha com o que foi extensivamente mencionado na seção anterior, na construção dos operadores conformemente covariantes usando o formalismo de Wünsch, deve-se finalmente verificar se os termos com precisamente a primeira derivada do parâmetro σ se cancelam na combinação Para verificar isso, utilizamos a seguinte equação

$$(\delta_c \mathscr{O})|_{\nabla\sigma} = (\nabla_\gamma \sigma) X^\gamma{}_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6}{}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5} C^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6} \overset{c}{\nabla}_{\beta_1} \overset{c}{\nabla}_{\beta_2} \overset{c}{\nabla}_{\beta_3} \overset{c}{\nabla}_{\beta_4} \overset{c}{\nabla}_{\beta_5}. \tag{5.76}$$

Para garantir o cancelamento, basta impor que a contração do tensor C com o tensor X desapareça explicitamente. Para isso, utilizamos a fórmula de X (5.49) com $N = 7$ resultando em uma expressão com índices livres $\gamma, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$. Como essa expressão é contraída com uma sequência de $N-2 = 5$ derivadas conformes à direita, o tensor herda a simetria na troca dos índices β. Além disso, devido às propriedades das derivadas conformemente covariantes e suas relações de comutação, surgem identidades entre vários termos ao expandirmos o resultado na base de todas as ordens possíveis de cinco derivadas conformes.

A contração do tensor X com C além de fatores numéricos, é construída apenas com o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$. Assim, o número de combinações possíveis para seis índices é dado por $(6-1)!! = 5!! = 15$, antes de considerarmos as simetrias das cinco derivadas conformes. Como no caso anterior, encontramos exatamente nove identidades, reduzindo a base independente desses termos para seis elementos.

Isso não é coincidência: o sistema de seis coeficientes desconhecidos α_i para $i = 1, \ldots, 6$ deve ser determinado por seis equações, garantindo que não haja degeneração ou inconsistências algébricas. As identidades utilizadas para reduzir os operadores estão no Apêndice F.2.

A escolha das bases em (5.75) assim como em (F.3) é bastante arbitrária. Fizemos essa escolha porque precisávamos usar um conjunto irredutível de elementos base para resolver o sistema de equações algébricas para seis coeficientes α_1 a α_6 de forma inequívoca. A base definida em (5.75) não é especial e, obviamente, outras também podem ser usadas aqui. Não encontramos razão para considerar essa base como preferencial; é apenas uma base. Logo apresentaremos alguns resultados e características interessantes independentes da escolha da base.

Requerendo que a contração de X com o tensor C se anule quando expandido na base (F.3), obtemos (usamos o fato de que aqui $w = \frac{6-d}{2}$)

$$\frac{1}{2}\left(-8\alpha_1 - (d+2)\left(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6\right)\right) = 0, \tag{5.77}$$

$$\frac{1}{2}\left(-4\alpha_2 - 4\alpha_3 - d\left(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6\right)\right) = 0, \tag{5.78}$$

$$4\alpha_1 + \frac{d-2}{2}\alpha_2 + \frac{d-2}{2}\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 0, \tag{5.79}$$

$$0 = 0, \tag{5.80}$$

$$4\alpha_2 + (d-1)\alpha_4 + \frac{d-2}{2}\alpha_5 + 2\alpha_6 = 0, \tag{5.81}$$

$$4\alpha_3 + \alpha_4 + \frac{d+2}{2}\alpha_5 + (d-2)\alpha_6 = 0,, \tag{5.82}$$

onde que a contração XC não produz um termo proporcional a $\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}{}^{\gamma}\overset{c}{\Box}$ (a quarta equação do sistema acima). Isso obviamente não é um problema, pois queremos uma solução nula para todas as equações aqui. Isso já significa que nosso sistema de equações homogêneas terá certa liberdade e nem todos os coeficientes α_1 a α_6 serão determinados unicamente.

Decidimos resolver o sistema para três coeficientes desconhecidos α_3, α_5 e α_6 (deixando $\alpha_1 = 1$ e mantendo indeterminados α_2 e α_4 como parâmetros reais). As soluções explícitas são

$$\alpha_3 = \frac{8d}{(d-4)(d+2)} + \alpha_2, \tag{5.83}$$

$$\alpha_5 = -\frac{128}{(d-6)(d-4)(d+2)} - \frac{8}{d-6}\alpha_2 - \frac{2(d-3)}{d-6}\alpha_4, \tag{5.84}$$

$$\alpha_6 = \frac{32(d-2)}{(d-6)(d-4)(d+2)} + \frac{8}{d-6}\alpha_2 + \frac{d}{d-6}\alpha_4. \tag{5.85}$$

Vemos que essas soluções não são definidas nas dimensões $d = 4$ e $d = 6$ também. Essa primeira singularidade em todos os coeficientes determinados α_3, α_5 e α_6 para $d = 4$ é óbvia e consistente com o teorema mencionado anteriormente de Graham, segundo o qual

um operador com termo principal de seis derivadas não existe em dimensões $d = 4$.

Em $d = 6$ a situação se torna mais interessante, pois a singularidade é apenas aparente. No entanto, ainda pode haver algum problema ou defeito no operador, como discutiremos a seguir. Para mostrar que essa singularidade resulta da escolha dos coeficientes na resolução do sistema, basta adotar um conjunto diferente, como α_3, α_4 e α_5. Com isso, o sistema em $d = 6$ pode ser escrito explicitamente como

$$\begin{aligned}
4\left(-\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)\right) &= 0,\\
-2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\left(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6\right) &= 0,\\
4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 0,\\
0 &= 0,\\
4\alpha_2 + 5\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 &= 0,\\
4\alpha_3 + \alpha_4 + 4\alpha_5 + 4\alpha_6 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.86}$$

onde as soluções para α_3, α_4 e α_5 são

$$\alpha_3 = -3 - \alpha_2, \tag{5.87}$$

$$\alpha_4 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\alpha_2, \tag{5.88}$$

$$\alpha_5 = \frac{10}{3} + \frac{4}{3}\alpha_2 - \alpha_6. \tag{5.89}$$

No sistema de soluções de (5.87) a (5.89), vemos que não há singularidade em $d = 6$, apenas temos que escolher um bom conjunto para resolver. A singularidade ou seu desaparecimento dependem do conjunto final de parâmetros aqui. No entanto, surge outro problema ao calcular a soma de todos os coeficientes: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ para o operador não singular construído em $d = 6$, essa soma se anula, implicando que o operador $\mathscr{O}$ não possui um termo líder $\Box^3$ no espaço-tempo plano. Como em espaços planos a ordem das derivadas conformes não afeta o resultado, o operador deveria reduzir-se ao operador $\Box^3$ covariante de GR com todas as derivadas covariantes de GR e com o coeficiente frontal que é a soma de α_i para $i = 1$ até $i = 6$. No entanto, em espaço-tempo curvo, o operador contém termos adicionais, e embora esses termos incluam derivadas conformes ordenáveis, eles desaparecem em espaços conformemente planos.

Esse é um defeito intrínseco do operador $\mathscr{O}$ em $d = 6$ independente da escolha dos três coeficientes usados para resolver o sistema ou da forma como escrevemos o operador na base

de termos com seis derivadas covariantes, como em (5.75). De fato, isso já é evidente na primeira equação do sistema (5.86) para $d = 6$, que impõe a condição $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 0$. Esse problema ocorre exclusivamente na dimensão crítica para seis derivadas. Em dimensões superiores, isso não acontece, pois pode-se demonstrar que, independentemente da escolha dos três coeficientes para resolver o sistema, a soma $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i$, assume uma forma geral válida para qualquer base de termos. Utilizando apenas a primeira equação (5.77), obtemos

$$\frac{d-6}{2}\alpha_1 = \frac{d+2}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6\right), \tag{5.90}$$

assim

$$\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = \frac{d-6}{d+2}\alpha_1 \tag{5.91}$$

e, para a normalização $\alpha_1 \neq 0$, temos que a soma é não nula em toda dimensão $d \neq 6$. Isso confirma que o problema persiste apenas na dimensão crítica $d = 6$ e que é independente da base na qual escrevemos o operador em (5.75).

Pode-se também analisar o sistema de equações (5.77) a (5.82) em dimensões $d = 4$. O sistema terá a forma

$$\begin{aligned}
-4\alpha_1 - 3\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6\right) &= 0,\\
-2\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6\right) &= 0,\\
4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 0,\\
0 &= 0,\\
4\alpha_2 + 3\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 &= 0,\\
4\alpha_3 + \alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Ao analisar a primeira e a segunda equação do sistema, conclui-se que $\alpha_1 = 0$, o que impede a normalização do operador $\mathscr{O}$ definindo o coeficiente de $\overset{c}{\Box}{}^3$ como um. Como isso acontece, permanecemos com o mesmo problema de que $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 0$, pois na fórmula (5.91) é necessário considerar $\alpha_1 = 0$.

Ao usar um conjunto diferente de coeficientes para resolver (diferente de α_3, α_5 e α_6), uma singularidade em $d = 4$ não é mais observada. Em vez disso, temos como soluções

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}\left(-3\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6\right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}\left(-\alpha_4 - 3\alpha_5 - 2\alpha_6\right), \tag{5.93}$$

com os valores de α_4, α_5 e α_6 reais e arbitrários, ainda temos uma liberdade de três parâmetros.

Seguindo [129], observamos que, em $d = 4$, um operador de seis derivadas com termo líder $\Box^3$ em fundo plano não pode ser construído. No entanto, existe um operador conforme nesta dimensão, cuja expansão inicia com termos lineares na curvatura e derivadas conformemente covariantes. Esse operador é único e equivale a $D_{\text{Bach}}\phi = B^{\mu\nu}\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\phi$,. O coeficiente geral dependente da dimensão pode ser ignorado em (5.60).

Na dimensão $d = 4$, o tensor de Bach é conformemente covariante com peso $w(B_{\mu\nu}) = -2$, conforme (5.62). A ação de $B^{\mu\nu}\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu$ sobre um campo escalar de peso $w = 1$ resulta em outra expressão conformemente covariante, $D_{\text{Bach}}\phi$, cujo coeficiente pode ser arbitrário. O peso conforme resultante é $w(B^{\mu\nu}\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\phi) = -5$.

Em geral, em $d = 4$, é possível construir uma expressão geral com peso $w = -5$, omo uma combinação linear arbitrária dos operadores D_{Bach}, com os operadores D_1 e D_2 cujas definições em $d = 4$, odem ser encontradas em (5.64) e (5.65). Essa liberdade corresponde exatamente à escolha arbitrária dos três parâmetros α_4, α_5 e α_6 na combinação de diferentes ordens de derivadas no operador $\mathscr{O}$ em (5.75). A forma explícita desse operador $\mathscr{O}$, parametrizado por α_4, α_5 e α_6, pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\mathscr{O} = {}& \frac{1}{4}\left(-3\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6\right)\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}^\nu\overset{c}{\Box} + \frac{1}{4}\left(-\alpha_4 - 3\alpha_5 - 2\alpha_6\right)\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\Box} \\ & + \alpha_4\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\nabla}_\rho\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}^\nu\overset{c}{\nabla}^\rho + \alpha_5\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\nabla}_\rho\overset{c}{\nabla}^\nu\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}^\rho + \alpha_6\overset{c}{\nabla}_\mu\overset{c}{\nabla}_\nu\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^\mu\overset{c}{\nabla}^\nu. \end{aligned} \tag{5.94}$$

Aqui podemos expressá-lo de diferentes formas, seja como diferentes ordens de derivadas conformes, ou por uma expressão explicitamente com curvaturas conformes e derivadas conformes sobre elas. Devemos apenas lembrar que em $d = 4$ é impossível ter o operador com o termo principal $\overset{c}{\Box}^3$ e todos os nossos operadores, em qualquer forma de escrevê-los, começam com termos lineares em curvaturas conformes.

Finalmente, comentamos que em dimensão $d = 2$ o operador $\mathscr{O}$ não pode ser definido devido aos problemas conhecidos e previamente discutidos com a definição do tensor de Schouten nesta dimensão. Assim, em todas as dimensões pares $d = 2$ e $d = 4$, menores que a crítica, temos a impossibilidade de construir tais operadores com seis derivadas, de acordo com uma conjectura de que tais construções são impossíveis em todas as dimensões pares. Na dimensão crítica, por sua vez, vemos o problema com o limite do espaço-tempo conformemente plano do operador construído apenas como uma combinação de diferentes ordens de derivadas conformes. Para todas as dimensões — tanto ímpares quanto pares acima da crítica — não vemos nenhum problema com essa construção da generalização do operador Hamada [44, 45].

Agora voltamos à discussão da situação dentro da dimensão crítica $d = 6$ para operador Hamada generalizado. A partir de nossa discussão anterior, entendemos agora que o operador mínimo $D^{\min}_{(6)}$, conforme proposto por Wünsch, não pode ser reproduzido como resultados da comutação de diferentes ordens de derivadas conformes, a partir de uma forma geral do operador $\mathscr{O}$ em (5.75). Vemos que também neste caso podemos apenas reproduzir uma combinação linear de D_1 e D_2 atuando sobre um campo escalar conformemente inerte ϕ (com o peso zero, uma vez que esta é uma situação na dimensão crítica). Portanto, o operador $\mathscr{O}$ dado explicitamente por (onde $\alpha_2, \alpha_6 \in \mathbb{R}$)

$$\mathscr{O} = \overset{c}{\Box}^3 + \alpha_2 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\Box} + (-3 - \alpha_2) \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\Box} \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\Box} + \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\alpha_2\right) \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}_\rho \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\nabla}^\rho +$$

$$+ \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\alpha_2 - \alpha_6\right) \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\nabla}_\rho \overset{c}{\nabla}^\nu \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\rho + \alpha_6 \overset{c}{\nabla}_\mu \overset{c}{\nabla}_\nu \overset{c}{\Box} \overset{c}{\nabla}^\mu \overset{c}{\nabla}^\nu, \tag{5.95}$$

corresponde a uma liberdade de dois parâmetros para definir o operador como uma combinação linear de D_1 e D_2.

6

Conclusão

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre".
-Paulo Freire.

Nesta tese, foram obtidos os seguintes resultados originais:

$i-$ Mostramos que a teoria renormalizável em espaço curvo de um campo vetorial massivo acoplado a um escalar pode ser baseada na ação mínima (2.1), sem a inclusão de termos não mínimos (2.31) no setor do campo vetorial, incluindo aqueles proporcionais ao tensor de Ricci. Nesse aspecto, o campo vetorial massivo é crucialmente diferente do campo escalar, onde a interação não mínima com o escalar de Ricci é uma condição necessária para a renormalizabilidade. A diferença é que os termos não mínimos do vetor são protegidos pela simetria de calibre, mesmo que essa simetria seja quebrada suavemente na formulação original da teoria. A afirmação sobre a renormalizabilidade foi confirmada por um cálculo direto de *one-loop*.

A avaliação das divergências de *one-loop* é uma parte importante da QFT, pois fornece informações sobre a estrutura de renormalização da teoria, possibilitando construir uma teoria renormalizável. Relatamos a derivação das divergências em *one-loop* na teoria da eletrodinâmica escalar com massa vetorial. Esse modelo mostrou-se renormalizável se o campo vetorial for Abeliano e se não for um vetor axial. A teoria vetorial não-Abeliana ou

o vetor axial não são renormalizáveis, como discutido em [16] e comprovado por cálculos diretos em [49].

As funções beta (2.61) e o potencial efetivo (2.64) foram derivados na formulação simétrica (2.5). Os argumentos gerais sobre a classificação dos parâmetros em um espaço-tempo curvo [14] implicam que as expressões (2.61) não mudam sob uma escolha arbitrária de fixação de calibre, portanto, essas expressões podem ser aplicadas à teoria original (2.1).

Em síntese, modelos com campos vetoriais massivos apresentam condições de renormalizabilidade peculiares, influenciadas pelas simetrias de calibre subjacentes contidas na teoria. Isso levanta questões importantes sobre a generalização desses resultados para teorias fermiônicas com campos vetoriais massivos ou para modelos mais complexos, como aqueles com acoplamentos de Yukawa. Investigações futuras nessa direção poderão esclarecer o papel das simetrias de calibre em cenários mais amplos, aprofundando nossa compreensão da renormalização em teorias do tipo Proca e suas extensões.

ii – A ação efetiva induzida por anomalia em um espaço-tempo curvo com escalares de fundo adicionais foi formulada. O resultado é apresentado tanto na forma covariante não local (3.26) quanto na forma local (3.31), utilizando dois campos escalares auxiliares.

Nossa análise do limite de baixa energia na ação induzida por anomalia foi realizada de maneira considerada padrão na relatividade geral. Essa abordagem nos levou à forma reduzida (3.34) da ação. Essa expressão manifestou algumas propriedades qualitativamente novas. Em primeiro lugar, encontramos uma nova contribuição para o termo local R^2 no infravermelho (IR). Em segundo lugar, no IR, podemos reproduzir, a partir da ação induzida, a estrutura não local $R\,\Box^{-1}\,R$ introduzida anteriormente na literatura [85], especialmente usada em cosmologia com base puramente fenomenológica *ad hoc* [91]. Em terceiro lugar, confirmamos que a ação induzida por anomalia representa uma versão local útil do grupo de renormalização em um espaço-tempo curvo. Em particular, tornou-se possível recuperar o potencial efetivo do campo escalar conforme a partir da ação induzida.

iii – A ação efetiva do modelo de Nambu-Jona-Lasinio em um campo gravitacional externo com torção na expansão em $1/N$ foi obtida introduzindo-se os campos auxiliares. O potencial efetivo da torção foi calculado usando uma nova técnica baseada na parte não local da ação induzida por anomalia, que foi recentemente descoberta como capaz de produzir o potencial efetivo no limite de baixa energia.

Além disso, conseguimos identificar um potencial de Coleman-Weinberg para o modelo NJL com alguns valores específicos para o campo de torção externo, veja Fig. 4.2 e para certos valores de a_1 na equação (4.25), veja Fig. 4.5. Ademais, concluímos que o setor

escalar-torção tem uma influência mais significativa do que a curvatura no poço do potencial efetivo, como pode ser observado na Fig. 4.1. Posteriormente, calculamos a equação de gap (4.26) com a intenção de observar explicitamente a quebra espontânea de simetria.

Concluímos que a transição de fase de primeira ordem ocorre quando o valor da torção é alterado, isto é, a constante de acoplamento tem seu valor modificado em função da torção, como pode ser visto na Fig. 4.3. Analisando o gráfico da Fig. 4.4, concluímos que apenas a parte inferior, linha contínua, possui relevância física. Nossa decisão baseia-se na observação de que valores mais altos de torção impedem que o potencial efetivo do modelo NJL apresente um comportamento semelhante ao potencial de Coleman-Weinberg. Adicionalmente, percebe-se que a simetria pode ser restaurada mesmo que a constante de acoplamento seja mantida na região da fase quebrada, mas apenas para valores de torção acima da curva crítica contida na Fig. 4.4.

No artigo recente [142], a quebra de simetria foi investigada independentemente na versão bosonizada do modelo de Nambu-Jona-Lasinio em um fundo de Riemann-Cartan. Em princípio, ambos os estudos podem concordar sobre a influência do campo de torção no potencial efetivo do modelo NJL ao considerar $n > 1$, como mostrado na Fig. 4.5. Vale destacar que o potencial efetivo do setor escalar-torção (4.22) pode não ser adequado para descrever a quebra dinâmica de simetria. Essa característica é atribuída ao valor negativo de β_1, como demonstrado em [36] para uma teoria similar. Por outro lado, como sugerido em [36], torna-se crucial investigar o comportamento de β_1 em ordens superiores de perturbação (*higher-loop corrections*), pois uma possível inversão de sinal nesta função poderia reconciliar integralmente os resultados de ambos os trabalhos. Tal análise poderá esclarecer definitivamente o papel da torção no mecanismo de quebra de simetria nestes modelos.

iv – Mostramos que é possível generalizar operador Hamada [44,45] para dimensões pares arbitrárias, desde que sejam maiores que a dimensão crítica $d_{\text{crit}} = 6$. Fornecemos a forma explícita de seus coeficientes de expansão na base de escalares da GR.

Provamos um teorema geral de que um operador escalar conforme com n derivadas em $d = n - 2$ dimensões é impossível de ser construído. Observa-se que a dimensão crítica do operador é igual ao número de derivadas presentes no termo principal $\Box^n$ da expansão em termos de curvatura. Os operadores em questão podem ser construídos apenas em dimensões $d \geqslant d_{\text{crit}}$, quando o peso conforme do campo escalar básico w também deve ser não positivo.

Nas últimas seções desta tese, começamos a explicar brevemente e aplicar o formalismo das derivadas covariantes conformes, conforme construído por Wünsch. Com essa ferramenta teórica, mostramos que a construção pode ser um pouco simplificada para o caso do operador

de seis derivadas, enquanto foi completamente clara para os casos dos operadores de Ørsted-Penrose [38–40] e Paneitz [41]. Nos dois últimos casos simplificados, o uso das derivadas covariantes conformes e do operador de caixa conforme fornece diretamente respostas para os operadores conformes contendo explicitamente 2 ou 4 derivadas em seu termo principal, respectivamente. No entanto, para o caso do operador de seis derivadas (e todos os superiores), essa construção não é totalmente bem-sucedida, pois mesmo os operadores mínimos também devem conter termos de correção que são de ordem superior em curvaturas conformes (tensores de Weyl ou Bach).

Finalmente, mostramos que, usando uma combinação de diferentes ordens de seis derivadas conformes covariantes, reproduzimos os mesmos resultados anteriores para a generalização do operador conforme de Hamada. No entanto, essa última construção não é completamente bem-sucedida na dimensão crítica ($d_{\text{crit}} = 6$, mas funciona em qualquer dimensão $d \neq 2, 4, 6$. Portanto, fornecemos alguns resultados novos escritos de uma maneira nova e distinta.

Por fim, podemos discutir as possíveis aplicações futuras da forma encontrada para os operadores Hamada em qualquer dimensão d. Em geral, tais operadores conformes escalares com seis derivadas constituem uma base para álgebras de CFT (Teoria de Campo Conforme) de operadores escalares primários acoplados a geometrias externas (ou seja, em espaços-tempo de fundo não triviais) e, portanto, darão origem a novas CFTs acopladas à gravidade. Esses operadores podem ter aplicações abrangentes, desde estudos de anomalias conformais (como a integração de termos não locais, conforme explorado em [74, 143, 144]) até aplicações de campos escalares em cosmologia.

Além disso, aplicações evidentes podem ser encontradas na física da matéria condensada, como em sistemas com escalares fundamentais, por exemplo, em excitações de folhas curvas de grafeno variantes no tempo (caso $d = 3$) [145–147].

A

Do Espaço curvo à torção: Uma breve revisão de gravitação

Neste apêndice, apresentamos uma revisão concisa da relatividade geral e sua formulação por meio da ação de Einstein-Hilbert. Em seguida, exploramos a teoria de Einstein-Cartan, destacando sua equivalência com a formulação padrão da relatividade geral quando suplementada por termos adicionais. Demonstramos que a teoria de Einstein-Cartan, com um termo de Holst e uma ação de Dirac acoplada à torção, pode ser reescrita como a ação de Einstein-Hilbert acompanhada de uma ação de Dirac sem torção, e uma interação quadrifermiônica emergente.

Este apêndice está organizado da seguinte forma: inicialmente, apresentamos as convenções e notações utilizadas no decorrer desta tese e, posteriormente, os princípios fundamentais da relatividade geral e a ação de Einstein-Hilbert são brevemente discutidos. Em seguida, na última seção, demonstramos como a parte axial da torção se acopla com a matéria fermiônica.

A.1 Convenções, notações e demais utensílios

A primeira definição se diz a respeito ao sistema de unidades naturais,

$$\hbar = c = 1\,,$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividido por 2π e "c" é a velocidade da luz no vácuo. Por meio destas constantes é possível demonstrar que massa e momento possuem dimensão de energia e a carga elementar se torna adimensional. Portanto,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1} \tag{A.1}$$

As coordenadas do espaço-tempo são denotadas por um quadrivetor contravariante

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \,, \tag{A.2}$$

e o quadrivetor covariante é apresentado como

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x}) \,, \tag{A.3}$$

podemos permutar os quadrivetores (covariantes e contravariantes) utilizando a seguinte equação[1]

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu} \;\text{ ou }\; x^{\mu} = \eta^{\mu\nu} x_{\nu} \,, \tag{A.4}$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ a métrica no espaço de Minkowski, que é definida pela seguinte matriz

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad (\mu, \nu) = 0, 1, 2, 3 \,. \tag{A.5}$$

Frequentemente utilizamos derivadas e principalmente para escrever as lagrangianas. A derivada ∂_{μ} é definida por

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0; \nabla) \;, \tag{A.6}$$

e consequentemente,

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\partial^0; -\nabla \right) \;. \tag{A.7}$$

[1] Está implícita a convenção de Einstein - índices repetidos são sempre somados.

A derivada covariante de um tensor de ordem (m, n) é definido por

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} = &\partial_\alpha T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} + \Gamma^{\mu_2}_{\lambda\alpha} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} + \ldots \\ &- \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_n} - \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} T^{\lambda\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_n} - \ldots,\end{aligned} \tag{A.8}$$

a equação acima satisfaz a conexão de metricidade, isso significa que a derivada covariante aplicada na métrica é nula, expressa pela relação $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Além disso, é importante ressaltar que a conexão utilizada nessa definição é simétrica, sendo dado pela seguinte estrutura

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} \left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\mu\nu}\right). \tag{A.9}$$

O tensor de Riemann, que caracteriza a curvatura do espaço-tempo, é dado por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\beta\mu}, \tag{A.10}$$

a partir desse tensor, podemos obter o tensor de Ricci por meio da contração dos índices apropriados $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$. Analogamente, o mesmo pode ser feito para obtenção do escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Por fim, agora temos condições de apresentar duas quantidades importantes. A primeira é o tensor de Weyl, cujo o seu quadrado no espaço-tempo de quatro dimensões é expresso por

$$C^2 = C^{\mu\nu\alpha\beta} C_{\mu\nu\alpha\beta} = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2, \tag{A.11}$$

enquanto a segunda quantidade é o termo topológico de Gauss-Bonnet, definido por

$$E_4 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2. \tag{A.12}$$

Aqui, adotamos as notações $R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ e $R^2_{\mu\nu} = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ para simplificação das expressões.

A.2 Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral (GR), formulada por Albert Einstein, é verdadeiramente única. Sendo a teoria gravitacional clássica mais amplamente aceita pela comunidade científica, seu sucesso se deve, em grande parte, à notável concordância com diversos testes observacionais e experimentais [148].

Devido a essa peculiaridade, espera-se que as teorias gravitacionais quânticas coincidam com a GR no domínio de baixas energias, isto é, no que chamamos de regime infravermelho (IR).

Claro que há outras teorias gravitacionais clássicas, como a teoria gravitacional de Weyl, e também a teoria gravitacional de Einstein-Cartan. Essa última teoria será brevemente discutida no mais tardar desta seção.

A relatividade geral é fundamentada em alguns princípios, sendo eles, o da covariância geral e o da equivalência. O princípio da equivalência estabelece que não é possível distinguir se a aceleração de um corpo é causada pela gravidade ou por uma força externa. Já o princípio da covariância geral, afirma que as leis físicas devem ser formuladas de maneira independente do sistema de coordenadas utilizado.

Dessa forma, a interação gravitacional se fundamenta na ideia de que todos os referenciais são equivalentes. Essa característica é a razão pela qual a teoria recebe o nome de relatividade geral, pois implica que não há como diferenciar se a força sentida por uma massa é resultado de um campo gravitacional ou da escolha de um referencial acelerado.

A ação da gravidade e matéria possui a forma

$$S_{\text{total}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{m}}, \tag{A.13}$$

onde

$$S_{\text{EH}} = -\frac{1}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R + 2\Lambda)\,, \tag{A.14}$$

é conhecida como ação de Einstein-Hilbert, e S_m é denominada ação da matéria, responsável por descrever a matéria no espaço-tempo curvo (podendo ser escalar, espinorial e/ou vetorial). Aqui R representa o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, g é o determinante da métrica do espaço-tempo curvo $g_{\mu\nu}$, e $\kappa^2 = 16\pi G$, sendo G a constante gravitacional de Newton.

Vale destacar que existem outras teorias gravitacionais clássicas, como por exemplo, a teoria de Einstein-Cartan (ECT), a qual discutiremos adiante.

A.3 ECT com termo de Holst e ação de Dirac

Nesta seção, seguimos de perto os artigos [112, 113, 120, 149], para obter todas as informações necessárias para considerações futuras, principalmente no capitulo 4. As notações utilizadas são do artigo de revisão [120]. Uma motivação para explorar a ECT acoplada a

férmions com o termo de Holst reside no surgimento do termo de interação quadrifermiônicos na ação após resolver a torção[2], como podemos mostrar abaixo por meio da seguinte ação

$$S = \frac{1}{\kappa^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-\tilde{R} + \frac{1}{2\beta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\right] + \frac{i}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\tilde{\nabla}_\mu\psi - \tilde{\nabla}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right], \quad \text{(A.15)}$$

onde $\tilde{R}$ é a curvatura escalar com torção, que é dada por

$$\tilde{R} = R - 2\nabla_\alpha T^\alpha - \frac{2}{3}T_\alpha T^\alpha + \frac{1}{24}S_\alpha S^\alpha + \frac{1}{2}q_{\alpha\beta\gamma}q^{\alpha\beta\gamma}, \quad \text{(A.16)}$$

com R sendo o escalar de Ricci na GR, e a torção sendo dividida em três componentes irredutíveis, que são o vetor traço $T_\beta = T^\alpha{}_{\beta\alpha}$ que é antissimétrico nos últimos dois índices, o vetor axial (ou pseudotraço) $S^\nu = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}T_{\alpha\beta\mu}$, e o tensor $q^\alpha{}_{\beta\gamma}$ que satisfaz duas condições $q^\alpha{}_{\beta\alpha} = 0$ e $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}q_{\alpha\beta\mu} = 0$.

O segundo termo do lado direito (*r.h.s.*) da equação (A.15) é o termo de Holst

$$\frac{1}{2\beta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2\beta}\left[-\nabla_\mu S^\mu - \frac{2}{3}T^\mu S_\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}q^{\lambda\alpha\beta}q_\lambda{}^{\mu\nu}\right], \quad \text{(A.17)}$$

sendo $\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}$ o tensor de curvatura no espaço-tempo com torção, β o parâmetro de Barbero-Immirzi e $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ o símbolo de Levi-Civita.

A ação de Dirac com torção é o último termo do *r.h.s.* da equação (A.15), onde o termo $\gamma^\mu = e_a{}^\mu\gamma^a$ é a matriz de Dirac no espaço-tempo curvo, as quantidades $e_a{}^\mu$ são o campo de tétradas, e a derivada covariante no espaço-tempo curvo com torção do campo fermiônico é escrita como segue

$$\tilde{\nabla}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\psi \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla}_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\,\tilde{\omega}_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\,, \quad \text{(A.18)}$$

onde $\sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a)$. A conexão espinorial com torção é dada por

$$\tilde{\omega}_\mu{}^{ab} = \omega_\mu{}^{ab} + \frac{1}{4}K^\alpha{}_{\lambda\mu}\left(e^{\lambda a}e^b{}_\alpha - e^{\lambda b}e^a{}_\alpha\right) \quad \text{com} \quad K^\alpha{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(T^\alpha{}_{\lambda\mu} - T_\lambda{}^\alpha{}_\mu + T_\mu{}^\alpha{}_\lambda\right), \quad \text{(A.19)}$$

onde $\omega_\mu{}^{ab}$ é a conexão espinorial sem torção. A segunda equação em (A.19) é o tensor de contorção que é antissimétrico nos dois primeiros índices. É importante destacar que os índices $a, b, c, \ldots = 0, 1, 2, 3$ são índices internos de Lorentz enquanto os índices gregos $\mu, \nu, \alpha, \ldots = 0, 1, 2, 3$ são índices do espaço-tempo.

[2] A torção é definida pela diferença entre duas conexões afins que não são assumidas simétricas $T^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$.

Substituindo as equações anteriores (A.16), (A.17) e (A.18) em (A.15), e subsequentemente após alguns cálculos, podemos reescrever a equação (A.15) na forma

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{\kappa^2}\int d^4x\left[-R+\frac{2}{3}T_\alpha T^\alpha-\frac{1}{24}S_\alpha S^\alpha-\frac{1}{3\beta}T_\alpha S^\alpha\right] \\ &+\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}S_\alpha J^\alpha+\frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right], \end{aligned} \tag{A.20}$$

onde $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ representa a corrente axial fermiônica. Neste ponto, podemos fazer algumas observações. O primeiro termo do *r.h.s.* da equação acima está relacionado à ECT com o termo de Holst, ou seja, à primeira integral do *r.h.s.* da equação (A.15). Em contraste, as duas últimas integrais na equação anterior, por sua vez, correspondem à ação espinorial, equivalente à segunda integral do *r.h.s.* da equação (A.15).

Ao considerar apenas a ação espinorial em (A.20), observamos que apenas a componente axial da torção acopla-se aos férmions, enquanto as outras componentes se desacoplam. No entanto, ao analisar a equação (A.20) em sua totalidade, podemos determinar o vetor axial S^α e o vetor traço T^α através de suas respectivas equações de movimento, que são $S^\alpha = 16\kappa^2\xi J^\alpha$ e $T^\alpha = (1/4\beta)\, S^\alpha$, com ξ sendo uma espécie de constante de acoplamento definida por

$$\xi = \frac{3}{32}\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right).$$

Substituindo as equações de movimento em (A.20), obtemos

$$S = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]+\frac{1}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-R+\xi\kappa^4 J_\mu J^\mu\right]. \tag{A.21}$$

Nesta expressão, a ação contém o termo de EH e o setor cinético fermiônico, com o último termo do *r.h.s.* descrevendo a interação de quatro-férmions por torção antissimétrica, veja, por exemplo, [120,149] para detalhes. Vale mencionar que em [112,113], foi demonstrado que a corrente fermionica gerada pela torção na ECT, ou seja, a interação de quadrifermiônica na equação (A.21), poderia ser um possível candidato para matéria escura.

B

Usando a abordagem do operador auxiliar

Neste apêndice, apresentamos a derivação do operador bilinear necessário para o cálculo das divergências em *one-loop*, utilizando a introdução de um operador auxiliar. Esse operador é baseado na construção apresentada em [19], que chamaremos de operador de Barvinsky-Vilkovisky. Este apêndice complementa a discussão dos problemas tratados na Seção 2.

B.1 Operador de Barvinsky-Vilkovisky para SQED com massa vetorial

Vamos considerar uma abordagem alternativa para derivar a ação efetiva de *one-loop*, que foi aplicada com sucesso à teoria pura do campo vetorial massivo [19] e provou ser equivalente à abordagem baseada no procedimento de Stückelberg. Aqui, usaremos um método semelhante na teoria de um vetor massivo acoplado ao campo escalar.

Primeiro, precisamos determinar a forma bilinear da ação (2.1) sem restaurar a simetria de calibre. Usando o método de campo de fundo, decompomos os campos em suas contrapartes clássicas e quânticas como

$$\Phi^* \to \Phi^* = \Phi^* + \varphi^*, \quad \Phi \to \Phi = \Phi + \varphi, \quad A_\mu \to A_\mu = A_\mu + B_\mu \tag{B.1}$$

e escrevemos a parte bilinear nos campos quânticos da ação na forma

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\begin{pmatrix}\varphi^* & \varphi & B^\mu\end{pmatrix}\hat{H}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi^*\\ B_\nu\end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

onde

$$\hat{H} = \begin{pmatrix}\hat{H}_{\varphi^*\varphi} & \hat{H}_{\varphi^*\varphi^*} & \hat{H}_{\varphi^* B_\nu}\\ \hat{H}_{\varphi\,\varphi} & \hat{H}_{\varphi\,\varphi^*} & \hat{H}_{\varphi\, B_\nu}\\ \hat{H}_{B^\mu\varphi} & \hat{H}_{B^\mu\varphi^*} & \hat{H}_{B^\mu B_\nu}\end{pmatrix},$$

e os elementos da matriz são

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\varphi^*\varphi} &= -\Box - m^2 - 4\lambda\Phi^*\Phi + \xi R + 2ieA_\mu\nabla^\mu + ie\left(\nabla_\mu A^\mu\right) + e^2A_\mu^2,\\
\hat{H}_{\varphi\,\varphi^*} &= -\Box - m^2 - 4\lambda\Phi^*\Phi + \xi R - 2ieA_\mu\nabla^\mu - ie\left(\nabla_\mu A^\mu\right) + e^2A_\mu^2,\\
\hat{H}_{B^\mu B_\nu} &= \delta^\nu_\mu\Box - \nabla_\mu\nabla^\nu - R_\mu{}^\nu_{\cdot} - \delta^\nu_\mu M_v^2 + 2\delta^\nu_\mu e^2\Phi^*\Phi,\\
\hat{H}_{\varphi^* B_\nu} &= ie\Phi\nabla^\nu + 2ie\left(\nabla^\nu\Phi\right) + 2e^2A^\nu\Phi,\\
\hat{H}_{B^\mu\,\varphi} &= ie\Phi^*\nabla_\mu - ie\left(\nabla_\mu\Phi^*\right) + 2e^2A_\mu\Phi^*,\\
\hat{H}_{\varphi\, B_\nu} &= -ie\Phi^*\nabla^\nu - 2ie\left(\nabla^\nu\Phi^*\right) + 2e^2A^\nu\Phi^*,\\
\hat{H}_{B^\mu\varphi^*} &= -ie\Phi\nabla_\mu + ie\left(\nabla_\mu\Phi\right) + 2e^2A_\mu\Phi,\\
\hat{H}_{\varphi^*\varphi^*} &= -2\lambda\Phi\Phi, \qquad \hat{H}_{\varphi\,\varphi} = -2\lambda\Phi^*\Phi^*.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

O próximo passo é introduzir o operador auxiliar

$$\hat{K} = K^\alpha_\nu = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\nabla_\nu\nabla^\alpha + \delta^\alpha_\nu M_v^2\end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

O operador no canto desta matriz é o operador auxiliar introduzido em [19]. No entanto, no caso presente, a forma do produto é muito mais complicada,

$$\hat{H}^* = \hat{H}\hat{K} = \begin{pmatrix}\hat{H}^*_{\varphi^*\varphi} & \hat{H}^*_{\varphi^*\varphi^*} & \hat{H}^*_{\varphi^* B_\alpha}\\ \hat{H}^*_{\varphi\,\varphi} & \hat{H}^*_{\varphi\,\varphi^*} & \hat{H}^*_{\varphi\, B_\alpha}\\ \hat{H}^*_{B^\mu\varphi} & \hat{H}^*_{B^\mu\varphi^*} & \hat{H}^*_{B^\mu B_\alpha}\end{pmatrix}, \tag{B.5}$$

com os elementos

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^*_{\varphi^*\varphi} &= \Box + m^2 + 4\lambda\Phi^*\Phi - \xi R - 2ieA_\nu\nabla^\nu - ie\left(\nabla_\nu A^\nu\right) - e^2A_\nu^2,\\
\hat{H}^*_{\varphi\,\varphi^*} &= \Box + m^2 + 4\lambda\Phi^*\Phi - \xi R + 2ieA_\nu\nabla^\nu + ie\left(\nabla_\nu A^\nu\right) - e^2A_\nu^2,\\
\hat{H}^*_{B^\mu B_\alpha} &= M_v^2\left(\delta^\alpha_\mu\Box - R_{\mu\cdot}{}^{\alpha} - \delta^\alpha_\mu M_v^2\right) - 2e^2\left(\Phi^*\Phi\right)\left(\nabla_\mu\nabla^\alpha - \delta^\alpha_\mu M_v^2\right),\\
\hat{H}^*_{\varphi^* B_\alpha} &= -ie\Phi\left(\Box - M_v^2\right)\nabla^\alpha - 2ie\left(D^\nu\Phi\right)\left(\nabla_\nu\nabla^\alpha - \delta^\alpha_\nu M_v^2\right),\\
\hat{H}^*_{B^\mu\,\varphi} &= -ie\Phi^*\nabla_\mu + ie\left(\nabla_\mu\Phi^*\right) - 2e^2A_\mu\Phi^*,\\
\hat{H}^*_{\varphi\,B_\alpha} &= ie\Phi^*\left(\Box - M_v^2\right)\nabla^\alpha + 2ie\left(D^\nu\Phi\right)^*\left(\nabla_\nu\nabla^\alpha - \delta^\alpha_\nu M_v^2\right),\\
\hat{H}^*_{B^\mu\varphi^*} &= ie\Phi\nabla_\mu - ie\left(\nabla_\mu\Phi\right) - 2e^2A_\mu\Phi,\\
\hat{H}^*_{\varphi^*\varphi^*} &= 2\lambda\Phi\Phi,\\
\hat{H}^*_{\varphi\,\varphi} &= 2\lambda\Phi^*\Phi^*.
\end{aligned}
$$

A forma do operador $\hat{H}^*$ na Eq. (B.5) é bastante incomum, pois alguns dos elementos não diagonais da matriz possuem operadores que são operadores diferenciais de terceira ordem. A derivação de $\mathrm{Tr}\log\hat{H}^*$ neste caso é um problema não trivial, que seria difícil de lidar mesmo usando a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt de [19]. Como temos outra abordagem, muito mais simples, descrita na Sec. 2.2, não descrevemos como obter o traço funcional da hessiana (B.5). Este Apêndice foi incluído apenas para ilustrar que os dois métodos podem não ser equivalentes nos modelos mais sofisticados com quebra de simetria suave.

C

Expressões intermediárias para divergências de *one-loop*

Neste apêndice, apresentamos as expressões intermediárias utilizadas no cálculo das divergências em *one-loop* associadas ao problema discutido na seção 2. Estas etapas são incluídas para fins de referência e para tornar o procedimento mais transparente.

C.1 Expressões intermediárias do método de Schwinger-DeWitt

Apresentamos, a seguir, as fórmulas intermediárias utilizadas na derivação das divergências discutidas na Seção 2.2. De acordo com as equações (2.49) e (2.50), obtemos

$$\hat{P} = (P)^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{\varphi^*\varphi} & \hat{P}_{\varphi^*\varphi^*} & \hat{P}_{\varphi^*\vartheta} & \hat{P}_{\varphi^* B_\nu} \\ \hat{P}_{\varphi\,\varphi} & \hat{P}_{\varphi\,\varphi^*} & \hat{P}_{\varphi\,\vartheta} & \hat{P}_{\varphi\, B_\nu} \\ \hat{P}_{\vartheta\,\varphi} & \hat{P}_{\vartheta\,\varphi^*} & \hat{P}_{\vartheta\,\vartheta} & \hat{P}_{\vartheta\, B_\nu} \\ \hat{P}_{B^\mu\varphi} & \hat{P}_{B^\mu\varphi^*} & \hat{P}_{B^\mu\vartheta} & \hat{P}_{B^\mu B_\nu} \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

com os seguintes elementos não nulos

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{\varphi\,\varphi^*} &= \hat{P}_{\varphi^*\varphi} = m^2 + \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R - \left(\frac{1}{4}\delta^\nu_\mu e^2 - 4\lambda\right) \Phi^*\Phi, \\
\hat{P}_{\vartheta\,\vartheta} &= -\left(M_v^2 - \frac{1}{6}R\right), \quad \hat{P}_{B^\mu B_\nu} = -R_\mu{}^\nu + \delta^\nu_\mu \left(M_v^2 + \frac{1}{6}R + \frac{3}{2}e^2\Phi^*\Phi\right), \\
\hat{P}_{\varphi^*\varphi^*} &= \frac{1}{4}\left(\delta^\nu_\mu e^2 + 8\lambda\right)\Phi\Phi, \qquad \hat{P}_{\varphi\,\varphi} = \frac{1}{4}\left(\delta^\nu_\mu e^2 + 8\lambda\right)\Phi^*\Phi^*, \\
\hat{P}_{\varphi^* B_\nu} &= -\frac{3}{2}ie\left(D^\nu\Phi\right), \qquad \hat{P}_{B^\mu\varphi} = -\frac{3}{2}ie\left(D_\mu\Phi\right)^*, \\
\hat{P}_{\varphi\, B_\nu} &= \frac{3}{2}ie\left(D^\nu\Phi\right)^*, \qquad \hat{P}_{B^\mu\varphi^*} = \frac{3}{2}ie\left(D_\mu\Phi\right).
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Similarmente, a matriz $\hat{S}^{\alpha\beta}$ é dada por

$$\hat{S}^{\alpha\beta} = \left(S^{\alpha\beta}\right)^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \hat{S}_{\varphi^*\varphi} & \hat{S}_{\varphi^*\varphi^*} & \hat{S}_{\varphi^*\vartheta} & \hat{S}_{\varphi^* B_\nu} \\ \hat{S}_{\varphi\,\varphi} & \hat{S}_{\varphi\,\varphi^*} & \hat{S}_{\varphi\,\vartheta} & \hat{S}_{\varphi\, B_\nu} \\ \hat{S}_{\vartheta\,\varphi} & \hat{S}_{\vartheta\,\varphi^*} & \hat{S}_{\vartheta\,\vartheta} & \hat{S}_{\vartheta\, B_\nu} \\ \hat{S}_{B^\mu\varphi} & \hat{S}_{B^\mu\varphi^*} & \hat{S}_{B^\mu\vartheta} & \hat{S}_{B^\mu B_\nu} \end{pmatrix}, \tag{C.3}$$

onde os elementos não nulos serão

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\varphi^*\varphi} &= \frac{1}{4}e^2\left(\delta^\alpha_\mu g^{\beta\nu} - \delta^\beta_\mu g^{\alpha\nu}\right)\Phi^*\Phi + ie\left(\nabla^\alpha A^\beta - \nabla^\beta A^\alpha\right), \\
\hat{S}_{\varphi\,\varphi^*} &= \frac{1}{4}e^2\left(\delta^\alpha_\mu g^{\beta\nu} - \delta^\beta_\mu g^{\alpha\nu}\right)\Phi^*\Phi - ie\left(\nabla^\alpha A^\beta - \nabla^\beta A^\alpha\right), \\
\hat{S}_{B^\mu B_\nu} &= R_\mu{}^{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}e^2\left(\delta^\beta_\mu g^{\alpha\nu} - \delta^\alpha_\mu g^{\beta\nu}\right)\Phi^*\Phi, \\
\hat{S}_{\varphi^* B_\nu} &= \frac{1}{2}ie\left[g^{\beta\nu}\left(D^\alpha\Phi\right) - g^{\alpha\nu}\left(D^\beta\Phi\right)\right], \\
\hat{S}_{B^\mu\varphi} &= -\frac{1}{2}ie\left[\delta^\beta_\mu\left(D^\alpha\Phi^*\right) - \delta^\alpha_\mu\left(D^\beta\Phi^*\right)\right], \\
\hat{S}_{\varphi\, B_\nu} &= -\frac{1}{2}ie\left[g^{\beta\nu}\left(D^\alpha\Phi^*\right) - g^{\alpha\nu}\left(D^\beta\Phi^*\right)\right], \\
\hat{S}_{B^\mu\varphi^*} &= \frac{1}{2}ie\left[\delta^\beta_\mu\left(D^\alpha\Phi\right) - \delta^\alpha_\mu\left(D^\beta\Phi\right)\right], \\
\hat{S}_{\varphi^*\varphi^*} &= \frac{1}{4}e^2\left(\delta^\beta_\mu g^{\alpha\nu} - \delta^\alpha_\mu g^{\beta\nu}\right)\Phi\Phi, \\
\hat{S}_{\varphi\,\varphi} &= \frac{1}{4}e^2\left(\delta^\beta_\mu g^{\alpha\nu} - \delta^\alpha_\mu g^{\beta\nu}\right)\Phi^*\Phi^*.
\end{aligned}$$

Usando esses operadores, os traços particulares serão

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}\,\Box\,\hat{P} \;=\; \frac{2}{3}\left(e^2+2\lambda\right)\Box\,(\Phi^*\Phi)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}-\xi\right)\Box\,R, \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\hat{P}^2 \;=\; &\frac{1}{2}R_{\mu\nu}^2-\left[\frac{5}{72}-\left(\xi-\frac{1}{3}\right)\xi\right]R^2+\left[\frac{M_v^2}{2}+2m^2\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\right]R+\frac{5}{2}M_v^4+m^4\\ &+\left[2\left(e^2-4\lambda\right)\left(\xi-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}e^2\right]R\,(\Phi^*\Phi)+\left(20\lambda^2-4e^2\lambda+5e^4\right)(\Phi^*\Phi)^2\\ &-2\left[m^2\left(e^2-4\lambda\right)-3e^2M_v^2\right](\Phi^*\Phi)-\frac{9}{2}e^2\,(D^\mu\Phi)^*\,(D_\mu\Phi)\end{aligned} \tag{C.5}$$

e

$$\frac{1}{12}\,\mathrm{tr}\,\hat{S}_{\alpha\beta}^2 \;=\; -\frac{1}{12}R_{\mu\nu\alpha\beta}^2+\frac{e^2}{6}R\,(\Phi^*\Phi)-e^4\,(\Phi^*\Phi)^2+\frac{e^2}{2}\,(D^\mu\Phi)^*\,(D_\mu\Phi)-\frac{e^2}{6}F_{\mu\nu}^2. \tag{C.6}$$

D

Cálculos pormenores do potencial efetivo de NJL

Este apêndice foi desenvolvido com o intuito de servir como um material complementar aos conteúdos apresentados no capítulo 4.

D.1 Obtenção do Potencial efetivo

Nesta seção, apresentaremos brevemente como encontrar as contribuições do espaço-templo plano e da curvatura para o potencial do modelo de NJL, com os detalhes disponíveis em [37]. Da mesma forma que foi realizado no capítulo 4, podemos escrever o potencial efetivo do modelo sem torção na forma

$$V\left[\rho,\pi\right]=\frac{1}{2\lambda}\left(\rho^{2}+\pi^{2}\right)+i\,\mathrm{Tr}\,\ln\left(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-s\right) \tag{D.1}$$

com $s=\rho+i\gamma_{5}\pi$.

Para que possamos calcular o potencial efetivo dado pela equação (D.1), é necessário realizar algumas manipulações algébricas no segundo termo do lado direito. Primeiramente, temos que o logaritmo pode ser reescrito como

$$\ln\left(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-s\right)=\ln\left(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\right)+\ln\left(\frac{i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-s}{i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}}\right), \tag{D.2}$$

onde o primeiro termo do lado direito não depende do campo bosônico. Por essa razão, ele pode ser incorporado na constante de normalização do funcional gerador. Além disso, o logaritmo presente no segundo termo pode ser reescrito utilizando a seguinte relação

$$\ln\left(\frac{A-s}{A}\right) = -\int_0^s dr \frac{1}{A-r}\,.$$

Dessa forma, obteremos

$$V\left[\rho,\pi\right] = \frac{1}{2\lambda}\left(\rho^2+\pi^2\right) - i\,\mathrm{Tr}\int_0^s dr S\left(x,x';r\right)\,. \tag{D.3}$$

A função de Green é definida por

$$S\left(x,x';r\right) = \left\langle x\left|\left(i\gamma^\mu\nabla_\mu - r\right)^{-1}\right|x'\right\rangle\,, \tag{D.4}$$

e é a solução da equação

$$\left(i\gamma^\mu\nabla_\mu - r\right)S\left(x,x';r\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^4\left(x-x'\right). \tag{D.5}$$

Para encontrar a função de Green anterior, fazemos uso da técnica da expansão coordenadas normal de Riemann, veja [150,151] para mais detalhes. Aqui, consideramos apenas os termos independentes da curvatura e os termos lineares, logo

$$\begin{aligned} S\left(x,x;r\right) = \int\frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}\Bigg[&\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{k^2-r^2} - \frac{1}{12}R\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^2} \\ &+\frac{2}{3}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^3} - \frac{1}{2}\gamma^a\mathscr{J}^{cd}R_{cda\mu}k^\mu\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^2}\,, \end{aligned} \tag{D.6}$$

onde

$$\mathscr{J}^{ab} = \frac{1}{4}\left[\gamma^a,\gamma^b\right].$$

Observa-se, pelas equações (D.1) e (D.6), que os campos ρ e π são simétricos. Isso permite investigar o potencial do modelo de NJL considerando $\pi = 0$, em vez de tratar a equação em sua totalidade. Assim, substituindo (D.6) em (D.3), teremos

$$\begin{aligned} V\left(\rho,0\right) = \frac{1}{2\lambda}\rho^2 - i\,\mathrm{Tr}\int_0^\rho dr\int\frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}\Bigg[&\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{k^2-r^2} - \frac{1}{12}R\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^2} \\ &+\frac{2}{3}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\left(\gamma^a k_a + r\right)\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^3} - \frac{1}{2}\gamma^a\mathscr{J}^{cd}R_{cda\mu}k^\mu\frac{1}{\left(k^2-r^2\right)^2}\Bigg]\,, \end{aligned} \tag{D.7}$$

a solução do potencial apresentado é dada pela equação (4.25). Na próxima seção, discutiremos brevemente a equação de gap no contexto do espaço-tempo plano.

D.2 Equação de Gap no espaço-tempo plano

O fator causador pela quebra da simetria quiral é o não anulamento do valor médio do campo escalar, resultando na origem da massa dos quarks e consequentemente aos bósons de Goldstone. A equação de gap para o modelo de NJL no espaço templo-plano é dado por

$$\frac{M}{\lambda} - \frac{M}{4\pi^2}\left[\Lambda^2 - M^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)\right] = 0\,. \tag{D.8}$$

Apresentaremos a solução da equação de gap sucintamente e apontaremos o valor crítico do acoplamento a partir do qual a simetria quiral é quebrada. A equação acima possui duas soluções, uma sendo trivial, quando $M = 0$, que convém com a preservação da simetria quiral. E a segunda solução, quando $M \neq 0$, onde há a quebra de simetria quiral ocasionando no aparecimento dos bósons de Goldstone. Reescrevendo a equação anterior, teremos

$$\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) = \frac{\Lambda^2}{M^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda M^2}\,, \tag{D.9}$$

que é uma quantidade positiva, se o termo Λ/M^2 pertencer aos conjuntos dos números reais (como é o caso). Logo, tem-se

$$\frac{\Lambda^2}{M^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda M^2} > 0 \Rightarrow \lambda^2 > \frac{4\pi^2}{\Lambda^2}\,. \tag{D.10}$$

Para constante de acoplamento λ maior que a constante de acoplamento critico λ_{crt}, o vácuo do modelo apresenta valor esperado não nulo, em outras palavras

$$\left\langle \bar{\psi} \middle| \psi \right\rangle \neq 0\,.$$

Por fim, o condensado de férmions pode ser tomado como parâmetro de ordem associado à massa dinâmica, peculiarizando uma transição de uma fase quiral para outra onde não há simetria. Adotando um valor de cut-off para os momentos, fica estipulado o acoplamento crítico a partir do qual a simetria é quebrada espontaneamente, com férmions ganhando massa.

E

Sobre os operadores de Ørsted e Paneitz

Neste apêndice, apresentamos um breve resumo das principais características dos operadores conformes generalizados de Ørsted e Paneitz em dimensões arbitrárias, cuja compreensão dessas características são essenciais para a obtenção da forma generalizada do operador de Hamada. Além disso, estes operadores voltam a ser mencionados à partir da seção 5.6, onde os operadores de Ørsted e Paneitz podem ser construídos a partir das derivadas covariantes conformes de Wünsch.

E.1 Operador de Ørsted

O operador conforme escalar de duas derivadas[1] Δ_2

$$\Delta_2 = \Box - \frac{d-2}{4(d-1)}R, \tag{E.1}$$

foi primeiramente estudado por Penrose [38, 39] em $d = 4$ e por Ørsted em dimensões gerais d, e fornece a ação escalar

$$S = \int d^d x \sqrt{-g}\phi\Delta_2\phi, \tag{E.2}$$

[1] Note que este operador é um operador cinético de Klein-Gordon de duas derivadas (atuando no campo escalar) acoplado de forma não mínima a um escalar de Ricci R, e sem a massa, pois um termo de massa constante geralmente quebraria a simetria conforme. (Mas, na verdade, aqui pode-se tratar efetivamente o escalar de Ricci R como um termo de massa possivelmente dependente do espaço-tempo para o campo escalar ϕ). Este constitui o caso de acoplamento conforme padrão de um campo escalar ao campo gravitacional de fundo.

invariante conforme, se o peso conforme do campo escalar for dado por

$$w = \frac{2-d}{2}. \tag{E.3}$$

Tal operador de duas derivadas em (E.1) pode ser definido em qualquer dimensão de espaço-tempo $d > 1$. Pode-se facilmente verificar aqui que $w_{\Delta_2} = -2$, então no resultado $w' = -\frac{d+2}{2}$, que é o peso do escalar $\Delta_2\phi$. A ação em (E.2) é invariante conforme (tem efetivamente $w = 0$) devido ao peso conforme total compensatório da densidade métrica $\sqrt{-g}$ como em (3.27). A ação em (E.2) descreve apenas um campo escalar padrão livre sem auto-interações e acoplado apenas de forma conforme à geometria de fundo. Esta ação consiste apenas no termo cinético de duas derivadas para escalares, que é o termo líder em número de derivadas. Além disso, somente este termo sobrevive em um caso limite de fundos de espaço-tempo plano, resultando em um propagador escalar padrão de espaço plano com duas derivadas no espaço de momento.

A ação apresentada em (E.2), no contexto de um espaço-tempo com dimensão $d = 4$, inclui o acoplamento não-minimal $\xi R\phi^2$. Em quatro dimensões, esse acoplamento permite a formulação de uma teoria quântica renormalizável para matéria escalar acoplada à gravidade quântica. Esse tipo de acoplamento surge naturalmente ao se inserir matéria escalar sem massa, originalmente definida em um espaço-tempo plano, em uma configuração gravitacional não trivial.

Em $d = 4$, há um valor especial para o coeficiente, dado por $\xi_{d=4} = -\frac{1}{6}$. Para valores distintos de ξ, ou seja, $\xi \neq -\frac{1}{6}$, a teoria deixa de ser invariante conforme. Entretanto, para esses valores não conformes de ξ, a teoria permanece invariante de escala, tanto sob transformações globais de Weyl quanto sob transformações conformes restritas que satisfazem $\Box\sigma(x) = 0$.

O acoplamento da forma $\xi R\phi^2$ é o mais geral que pode ser adicionado à teoria escalar com operador cinético de duas derivadas, mantendo a consistência no nível quântico e preservando a renormalizabilidade da teoria acoplada. Já outros tipos de acoplamentos mais complexos envolvendo o campo escalar ϕ, como aqueles que dependem de diferentes tensores de curvatura gravitacional ou de potências superiores de R, necessariamente introduzem derivadas de ordem mais alta. Isso traz tanto os benefícios quanto as limitações característicos dos modelos gravitacionais baseados em derivadas superiores.

Para $d = 2$, observa-se que o termo proporcional à curvatura escalar de Ricci em (E.1) desaparece. Essa é uma característica especial das dimensões $d = 2$, associada a uma extensão única da simetria conforme no plano complexo bidimensional. Essa particularidade está relacionada à natureza especial da gravidade quântica em duas dimensões, baseada em uma ação

de Einstein-Hilbert com duas derivadas, bem como à construção de espaços-tempos bidimensionais de folha de mundo Minkowskianos conformes, amplamente utilizados em teorias de cordas.

Outra característica interessante é que, para a ação do operador de Ørsted em (E.1) sobre um campo escalar ϕ, o peso conforme w do campo escalar, em dimensões fisicamente relevantes e sensatas, ou seja, para $d \geqslant 2$, é fixado e inteiramente determinado pela dimensionalidade do espaço-tempo. Esse peso conforme é sempre não positivo, atingindo zero apenas no caso particular de $d = 2$. Uma particularidade adicional do caso $d = 2$, o campo escalar se torna adimensional. Consequentemente, o peso conforme do campo também se anula, tornando-se um caso especial de um campo escalar invariante conforme.

E.2 Operador de Paneitz

O operador escalar conforme com quatro derivadas, Δ_4, foi originalmente descoberto de forma independente, primeiro por Fradkin e Tseytlin [42], e mais tarde, por Paneitz [41]. Em sua forma em $d = 4$ o operador é descrito na forma

$$\Delta_4 = \Box^2 + \frac{1}{3}\left(\nabla_\mu R\right)\nabla^\mu + 2R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu - \frac{2}{3}R\Box.$$

Primeiramente, observamos que, em $d = 4$, termos quadráticos nas curvaturas não aparecem na construção deste operador. Além disso, o peso conforme do campo escalar deve ser escolhido como $w = 0$. Isso coincide com o fato, conhecido a partir de uma análise dimensional simples, de que o campo escalar em $d = 4$ dimensões, com um termo cinético de quatro derivadas, deve ser adimensional (em unidades de energia), quando analisado, por exemplo, no espaço-tempo plano.

O operador de Paneitz [41] foi posteriormente generalizado por Paneitz para um número arbitrário de dimensões do espaço-tempo d (exceto no caso $d = 2$, onde a generalização descrita abaixo não funciona). Sua forma é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_4 = \Box^2 - \frac{d-6}{2(d-1)}(\nabla_\mu R)\nabla^\mu + \frac{4}{d-2}R_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu - \frac{(d-2)^2+4}{2(d-1)(d-2)}R\Box + \\ + \frac{(d-4)\left(d^3-4d^2+16d-16\right)}{16(d-1)^2(d-2)^2}R^2 - \frac{d-4}{(d-2)^2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{d-4}{4(d-1)}\left(\Box R\right).\end{aligned} \tag{E.4}$$

O peso conforme do campo escalar deve ser dado por

$$w = \frac{4-d}{2}, \tag{E.5}$$

que é negativo para $d > 4$ e positivo para $d < 4$. Observa-se imediatamente que termos quadráticos nas curvaturas gravitacionais ou que contenham quatro dimensões de energia (como R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $\Box R$) vêm com coeficientes proporcionais ao fator $(d-4)$. Isso confirma que em $d = 4$ eles não são necessários na construção do operador Δ_4. Nota-se também que vários coeficientes em termos distintos contêm a singularidade $1/(d-2)$, o que implica que não podem ser definidos como um limite simples em dimensões de espaço-tempo $d = 2$. Voltaremos a essa questão mais adiante. Alguns coeficientes divergem, o que significa que o operador de Paneitz [41] não pode ser construído dessa forma em $d = 2$. Isso ocorre quando a dimensão d do espaço-tempo (sendo um número inteiro par) é inferior à dimensão crítica dada pelo índice no operador Δ. Por exemplo, $\Delta_{n=4} = \Delta_4$ é um operador de Paneitz [41], $\Delta_{n=2} = \Delta_2$ é um operador conforme com duas derivadas, etc. Isso também está relacionado à negatividade do peso conforme w do campo escalar, e o peso nulo ocorre precisamente na dimensão crítica. Como veremos a seguir, no caso em que o peso seja positivo e igual a um, podemos provar a inexistência de uma generalização dimensional de Δ_n para $d = n-2$ como um teorema matemático.

Pode-se, naturalmente, alterar livremente a base para escrever os termos quadráticos na curvatura no operador de Paneitz [41]. Por exemplo, quadrados do tensor de Riemann também são permitidos, como $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Entretanto, notamos um fato peculiar: em dimensões $d > 3$, é possível adicionar livremente, com um coeficiente arbitrário, um operador invariante conforme cuja estrutura torna evidentes suas propriedades conformes. Esse operador é o quadrado do tensor de Weyl, C^2, que atua como endomorfismo sobre o campo escalar (sem derivadas).

Por isso, na forma de escrever o operador Δ_4, usamos apenas dois invariantes quadráticos na curvatura em $d \neq 4$ (e os escolhemos como R^2 e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$). Note que, em dimensões críticas, os termos sem derivadas que atuam no escalar ϕ (ou seja, com duas curvaturas gravitacionais) nunca são necessários para a construção do operador mínimo Δ_4, mas o termo adicional $\alpha_1 C^2\phi$ pode ser adicionado livremente, com valor arbitrário para o coeficiente α_1. Chamamos o operador Δ_4 sem essa adição de $\alpha_1 C^2\phi$ de minimo, em oposição ao caso não-minimo. Essa adição pode ser realizada em qualquer dimensão $d \geqslant 4$.

Note que o operador geral de Paneitz [41] em (E.4) é um operador cinético de quatro derivadas acoplado não minimamente a várias curvaturas gravitacionais e sem massa[2]. Percebe-se que o acoplamento não mínimo à geometria é realizado por mais de um termo. Além disso, termos com um número menor de derivadas que 4 ainda atuando não endomorficamente no

[2] Na verdade, pode-se tratar efetivamente os termos de curvatura, como R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $\Box R$, como possíveis termos de massa dependentes do espaço-tempo para o campo escalar ϕ.

campo escalar estão presentes em (E.4). Eles são geralmente possíveis e contêm duas ou uma derivada covariante de fundo ainda atuando no campo escalar ϕ à direita. Os termos com três derivadas não podem ser construídos aqui devido ao requisito de simetria geral covariante da forma do operador em (E.4), já que não podemos construir termos locais covariantes pela relatividade geral que não sejam derivadas com exatamente uma unidade de dimensão de energia. O mesmo tipo de argumento excluiu termos com uma derivada covariante ainda atuando no campo escalar.

Em $d = 4$, a ação do operador de Paneitz [41] ainda contém vários termos que expressam acoplamentos não triviais e não mínimos à geometria de fundo. Esses acoplamentos ainda dão origem a uma teoria quântica renormalizável da matéria escalar acoplada à gravidade quântica, desde que o campo escalar seja considerado adimensional. Observa-se também, que para a dimensão crítica, todos os termos endomórficos, ou seja, aqueles que não contêm derivadas ao atuarem sobre o campo escalar, desaparecem.

Outra observação é que, para a ação do operador de Paneitz [41] sobre um campo escalar, o peso conforme w do campo escalar em dimensões interessantes e fisicamente sensíveis, ou seja, para $d \geqslant 4$, é fixado e completamente determinado pela dimensão do espaço-tempo, sendo também sempre não positivo, atingindo zero apenas no caso especial de $d = 4$.

F

Soluções para dedução do Operador Hamada em diferente bases

Neste apêndice está contido soluções e cálculos importantes para compreensão de resultados contidos no capítulo 5

F.1 Soluções para os coeficientes presentes em Δ_6

O sistema dos coeficientes $z_1, \ldots, z_{21}$ possui as seguintes soluções:

$$z_1 = \frac{16}{d-2},$$

$$z_2 = -\frac{3d^2 - 12d + 44}{4(d-1)(d-2)} = -\frac{3(d-6)^2 + 24(d-6) + 80}{4(d-1)(d-2)},$$

$$z_3 = \frac{16}{d-2},$$

$$z_4 = -\frac{(d-6)(3d-10)}{2(d-1)(d-2)} = -\frac{(d-6)[3(d-6)+8]}{2(d-1)(d-2)},$$

$$z_5 = -\frac{(d-6)(d-8)}{(d-1)(d-4)} = -\frac{(d-6)[(d-6)-2]}{(d-1)(d-4)},$$

$$z_6 = \frac{8}{d-4},$$

$$z_7 = -\frac{3d^2 - 26d + 72}{4(d-1)(d-4)} = -\frac{3(d-6)^2 + 10(d-6) + 24}{4(d-1)(d-4)},$$

$$z_{10} = \frac{4\left[(z_8+4)\,d - 4\,(z_8+6)\right]}{(d-2)(d-4)} = \frac{4\left[(z_8+4)\,(d-6) + 2z_8\right]}{(d-2)(d-4)},$$

$$z_{11} = -\frac{2\,(z_8-8)\,d}{(d-2)^2} = -\frac{2\,(z_8-8)\left[(d-6)+6\right]}{(d-2)^2},$$

$$\begin{aligned} z_{12} &= -\frac{2\left[2\,(z_9+1)\,d^2 - (z_8+12z_9+16)\,d + 4\,(z_8+4z_9+10)\right]}{(d-2)^2(d-4)} \\ &= -\frac{2\left[2\,(z_9+1)\,(d-6)^2 + (-z_8+12z_9+8)\,(d-6) - 2\,(z_8-8z_9-8)\right]}{(d-2)^2(d-4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{13} &= -\frac{4\left[d^3 - (z_8+8)\,d^2 + (5z_8+36)\,d - 4\,(z_8+16)\right]}{(d-1)(d-2)^2(d-4)} \\ &= -\frac{4\left[(d-6)^3 - (z_8-10)\,(d-6)^2 + (-7z_8+48)\,(d-6) - 10\,(z_8-8)\right]}{(d-1)(d-2)^2(d-4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{14} &= \frac{1}{16(d-1)^2(d-2)^2(d-4)}\left\{3d^5 - 36d^4 + 8\,(4z_9+29)\,d^3 - 32\,(z_8+7z_9+30)\,d^2\right. \\ &\quad \left. + 16\,(10z_8+28z_9+155)\,d - 64\,(2z_8+4z_9+39)\right\} \\ &= \frac{1}{16(d-1)^2(d-2)^2(d-4)}\left\{3(d-6)^5 + 54(d-6)^4 + 32\,(z_9+14)\,(d-6)^3\right. \\ &\quad \left. - 32\,(z_8-11z_9-60)\,(d-6)^2 - 32\,(7z_8-38z_9-136)\,(d-6) - 64\,(5z_8-20z_9-72)\right\}, \end{aligned}$$

$$z_{15} = -\frac{d-8}{d-1} = -\frac{(d-6)-2}{d-1},$$

$$z_{16} = z_8 + 4z_9,$$

$$z_{17} = -\frac{2(d-4)z_8}{d-2} = -\frac{2[(d-6)+2]z_8}{d-2},$$

$$z_{18} = \frac{2\left[(z_8+8)\,d - 4z_8\right]}{(d-2)^2} = \frac{2\left[(z_8+8)\,(d-6) + 2\,(z_8+24)\right]}{(d-2)^2},$$

$$z_{19} = -\frac{4\left[(z_8+2z_9+4)\,d - 3z_8 - 4z_9 - 16\right]}{(d-2)^2} = -\frac{4\left[(z_8+2z_9+4)\,(d-6) + 3z_8 + 8z_9 + 8\right]}{(d-2)^2},$$

$$z_{20} = -\frac{d^3 + (z_8 - 10)\, d^2 + (-5z_8 + 4)\, d + 4\,(z_8 + 10)}{(d-1)(d-2)^2}$$
$$= -\frac{(d-6)^3 + (z_8 + 8)\,(d-6)^2 + (7z_8 - 8)\,(d-6) + 10\,(z_8 - 8)}{(d-1)(d-2)^2},$$

$$z_{21} = \frac{3d^4 - 40d^3 + 8\,(2z_8 + 4z_9 + 27)\, d^2 - 32\,(2z_8 + 3z_9 + 25)\, d + 16\,(3z_8 + 4z_9 + 55)}{8(d-1)^2(d-2)^2}$$
$$= \frac{3(d-6)^4 + 32(d-6)^3 + 16\,(z_8 + 2z_9 + 9)\,(d-6)^2 + 32\,(4z_8 + 9z_9 + 2)\,(d-6)}{8(d-1)^2(d-2)^2}$$
$$+ \frac{16\,(15z_8 + 40z_9 - 56)}{8(d-1)^2(d-2)^2}, \tag{F.1}$$

enquanto o sistema de soluções para $x_1, \ldots, x_{17}$ é

$$x_1 = \frac{1}{16(d-1)^2(d-2)^2(d-4)}\Big\{3d^5 - 44d^4 + 8\,(z_8 + 4z_9 + 37)\, d^3 - 8\,(11z_8 + 44z_9 - 32x_{17} + 152)d^2$$
$$+16\,(17z_8 + 68z_9 - 80x_{17} + 163)\, d - 64\,(3z_8 + 12z_9 - 16x_{17} + 33)\}$$
$$= \frac{1}{16(d-1)^2(d-2)^2(d-4)}\Big\{3(d-6)^5 + 46(d-6)^4 + 8\,(z_8 + 4z_9 + 40)\,(d-6)^3$$
$$+ 8\,(7z_8 + 28z_9 + 32x_{17} + 136)\,(d-6)^2 + 16\,(5z_8 + 20z_9 + 112z_{17} + 88)\,(d-6) + 2560x_{17}\Big\},$$

$$x_2 = \frac{-\,(z_8 + 4z_9 + 4)\, d^2 + 2\,(5z_8 + 20z_9 - 16x_{17} + 16)\, d - 8\,(3z_8 + 12z_9 - 16x_{17} + 6)}{(d-2)^2(d-4)}$$
$$= -\frac{(z_8 + 4z_9 + 4)\,(d-6)^2 + 2\,(z_8 + 4z_9 + 16x_{17} + 6)\,(d-6) + 64x_{17}}{(d-2)^2(d-4)},$$

$$x_3 = -\frac{1}{64(d-1)^3(d-2)^3(d-4)}\Big\{d^7 - 16d^6 + 4\,(8z_9 + 35)\, d^5 - 16\,(6z_9 - 4x_{10} + 53)\, d^4$$
$$- 16\,(132z_9 + 64x_9 + 16x_{10} - 192x_{17} - 231)\, d^3 + 64\,(190z_9 + 104x_9 - 5x_{10} - 304x_{17} - 186)\, d^2$$
$$-64\,(300z_9 + 184x_9 - 24x_{10} - 512x_{17} - 309)\, d + 256\,(36z_9 + 24x_9 - 4x_{10} - 64x_{17} - 45)\}$$
$$= -\frac{1}{64(d-1)^3(d-2)^3(d-4)}\Big\{(d-6)^7 + 26(d-6)^6 + 32\,(z_9 + 10)\,(d-6)^5$$
$$+ 32\,(27z_9 + 2x_{10} + 71)\,(d-6)^4 + 64\,(111z_9 - 16x_9 + 20x_{10} + 48x_{17} + 156)\,(d-6)^3$$
$$+ 64\,(352z_9 - 184x_9 + 139x_{10} + 560x_{17} + 408)\,(d-6)^2$$
$$+256\,(90z_9 - 166x_9 + 99x_{10} + 512x_{17} + 120)\,(d-6) - 1280\,(36x_9 - 19x_{10} - 112x_{17})\Big\},$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{1}{(d-1)(d-2)^3(d-4)} \left\{ (z_9+1)\, d^4 + (2z_9 + 3x_{10} - 12)\, d^3 \right. \\
&\quad + (-112z_9 - 48x_9 - 9x_{10} + 128x_{17} + 72)\, d^2 + 8\,(56z_9 + 33x_9 - 3x_{10} - 84x_{17} - 34)\, d \\
&\quad \left. +16\,(-24z_9 - 18x_9 + 3x_{10} + 40x_{17} + 21) \right\} \\
&= \frac{1}{(d-1)(d-2)^3(d-4)} \left\{ (z_9+1)\,(d-6)^4 + (26z_9 + 3x_{10} + 12)\,(d-6)^3 \right. \\
&\quad + (140z_9 - 48x_9 + 45x_{10} + 128x_{17} + 72)\,(d-6)^2 \\
&\quad \left. +8\,(23z_9 - 39x_9 + 24x_{10} + 108x_{17} + 20)\,(d-6) + 4\,(-108x_9 + 57x_{10} + 304x_{17}) \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= -\frac{z_9 d(d-4) - 12z_9 - 24x_9 + 6x_{10} + 32x_{17}}{4(d-1)(d-2)} \\
&= -\frac{z_9(d-6)^2 + 8z_9(d-6) + 2\,(-12x_9 + 3x_{10} + 16x_{17})}{4(d-1)(d-2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_6 &= \frac{z_8 d^2 + 2\,(-4z_8 - 4z_9 + 8x_9 - 3x_{10})\, d + 4\,(3z_8 + 12z_9 - 4x_9 + 2x_{10} - 16x_{17})}{(d-2)^3} \\
&= \frac{z_8(d-6)^2 + 2\,(2z_8 - 4z_9 + 8x_9 - 3x_{10})\,(d-6) + 4\,(20x_9 - 7x_{10} - 16x_{17})}{(d-2)^3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_7 &= -\frac{1}{(d-2)^2(d-4)} \left\{ (z_8 + 12z_9 + 3x_{10})\, d^2 - 2\,(5z_8 + 60z_9 + 12x_9 + 6x_{10} - 48x_{17} - 8)\, d \right. \\
&\quad \left. +24\,(z_8 + 12z_9 + 4x_9 - 16x_{17} - 4) \right\} \\
&= -\frac{1}{(d-2)^2(d-4)} \left\{ (z_8 + 12z_9 + 3x_{10})\,(d-6)^2 \right. \\
&\quad \left. -2\,(-z_8 - 12z_9 + 12x_9 - 12x_{10} - 48x_{17} - 8)\,(d-6) - 12\,(4x_9 - 3x_{10} - 16x_{17}) \right\},
\end{aligned}
$$

$$
x_8 = \frac{2z_9(d-6) - 12x_9 + 3x_{10} + 16x_{17}}{d-2} = \frac{2z_9(d-6) - 12x_9 + 3x_{10} + 16x_{17}}{d-2},
$$

$$
x_{11} = -\frac{2(d-6)^2}{(d-1)(d-2)(d-4)},
$$

$$x_{12} = \frac{(d-6)\left(d^3-(z_8+10)\,d^2+(z_8-16z_9+32x_{17}+52)\,d+8\,(2z_9-4x_{17}-7)\right)}{8(d-1)^2(d-2)^2}$$
$$= \frac{(d-6)}{8(d-1)^2(d-2)^2}\left\{(d-6)^3+(-z_8+8)\,(d-6)^2\right.$$
$$\left.+\,(-11z_8-16z_9+32x_{17}+40)\,(d-6)+2\,(-15z_8-40z_9+80x_{17}+56)\right\},$$

$$x_{13} = \frac{z_8d^2-2\,(3z_8-8z_9+12x_{17}+4)\,d-16\,(6z_9-11x_{17}-3)}{2(d-2)^2}$$
$$= \frac{z_8(d-6)^2+2\,(3z_8+8z_9-4-12x_{17})\,(d-6)+32x_{17}}{2(d-2)^2},$$

$$x_{14} = -\frac{d-6}{4(d-1)},$$

$$x_{15} = -\frac{z_8d^2-2\,(3z_8-8z_9+8x_{17})\,d-32\,(3z_9-5x_{17})}{2(d-2)^2}$$
$$= -\frac{z_8(d-6)^2+2\,(3z_8+8z_9-8x_{17})\,(d-6)+64x_{17}}{2(d-2)^2},$$

$$x_{16} = \frac{(z_8+4z_9)\,d-2\,(3z_8-12z_9+16x_{17})}{d-2} = \frac{(z_8+4z_9)\,(d-6)+32x_{17}}{d-2}. \tag{F.2}$$

F.2 Identidades algébricas das derivadas de Wünch

Essas identidades são resumidas abaixo

1) $g^{\gamma\beta_1}g^{\beta_2\beta_4}g^{\beta_3\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \to g^{\gamma\beta_1}g^{\beta_2\beta_3}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5}$,

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\nu} \to \overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\Box}^2.$$

2) $g^{\gamma\beta_1}g^{\beta_2\beta_5}g^{\beta_3\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \to g^{\gamma\beta_1}g^{\beta_2\beta_3}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5}$,

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\mu} = \overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu} \to \overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\Box}^2.$$

3) $g^{\gamma\beta_2}g^{\beta_1\beta_4}g^{\beta_3\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \to g^{\gamma\beta_2}g^{\beta_1\beta_3}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5}$,

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\nu} \rightarrow \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\Box}.$$

4) $$g^{\gamma\beta_2}g^{\beta_1\beta_5}g^{\beta_3\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_2}g^{\beta_1\beta_3}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\mu} = \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu} \rightarrow \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\Box}.$$

5) $$g^{\gamma\beta_3}g^{\beta_1\beta_5}g^{\beta_2\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_3}g^{\beta_1\beta_4}g^{\beta_2\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu} \rightarrow \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}.$$

6) $$g^{\gamma\beta_4}g^{\beta_1\beta_2}g^{\beta_3\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_3}g^{\beta_1\beta_2}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\nu} = \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\nu} \rightarrow \overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\Box}.$$

7) $$g^{\gamma\beta_5}g^{\beta_1\beta_2}g^{\beta_3\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_3}g^{\beta_1\beta_2}g^{\beta_4\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\Box}^2\overset{c}{\nabla}^{\gamma} = \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma} \rightarrow \overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\Box}.$$

8) $$g^{\gamma\beta_5}g^{\beta_1\beta_3}g^{\beta_2\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_4}g^{\beta_1\beta_3}g^{\beta_2\beta_5}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma} \rightarrow \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\nu}.$$

9) $$g^{\gamma\beta_5}g^{\beta_1\beta_4}g^{\beta_2\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5} \rightarrow g^{\gamma\beta_4}g^{\beta_1\beta_5}g^{\beta_2\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_1}\overset{c}{\nabla}_{\beta_2}\overset{c}{\nabla}_{\beta_3}\overset{c}{\nabla}_{\beta_4}\overset{c}{\nabla}_{\beta_5},$$

equivalente a

$$\overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma} = \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\nabla}_{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\nu}\overset{c}{\nabla}^{\mu}\overset{c}{\nabla}^{\gamma} \rightarrow \overset{c}{\nabla}_{\mu}\overset{c}{\Box}\overset{c}{\nabla}^{\gamma}\overset{c}{\nabla}^{\mu}. \tag{F.3}$$

Referências Bibliográficas

[1] L.H. Ford, *Inflation driven by a vector field*, Phys. Rev. **D40** (1989) 967.

[2] S. Kanno, M. Kimura, J. Soda and S. Yokoyama, *Anisotropic inflation from vector impurity*, JCAP **08** (2008) 034, arXiv:0806.2422.

[3] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, *Vector inflation*, JCAP **06** (2008) 009, arXiv:0802.2068.

[4] R. Emami, S. Mukohyama, R. Namba, and Y. Zhang, *Stable solutions of inflation driven by vector fields*, JCAP **03** (2017) 058, arXiv:1612.09581.

[5] L. Heisenberg, *Generalization of the Proca action*, JCAP **05** (2014) 015, 1402.7026.

[6] J.B. Jiménez and L. Heisenberg. *Derivative self-interactions for a massive vector field*, Phys. Lett. **B757** (2016) 405, arXiv:1602.03410;
L. Heisenberg, R. Kase and S. Tsujikawa, *Beyond generalized Proca theories*, Phys. Lett. **B760** (2016) 617, arXiv:1605.05565.

[7] E. Allys, P. Peter and Y. Rodríguez, *Generalized Proca action for an Abelian vector field*, JCAP **02** (2016) 004, arXiv:1511.03101;
E. Allys, J.P. Beltran Almeida, P. Peter and Y. Rodríguez, *On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field*, JCAP **09** (2016) 026.

[8] M. Novello and J.M. Salim, *Nonlinear photons in the universe*, Phys. Rev. **D20** (1979) 377.

[9] P.C.W. Davies and D.J. Toms, *Boundary effects and the massless limit of the photon*, Phys. Rev. **D31** (1985) 1363.

[10] K. Dimopoulos and M. Karčiauskas, *Non-minimally coupled vector curvaton*, JHEP **07** (2008) 119, arXiv:0803.3041.

[11] D.J. Toms, *Quantization of the minimal and non-minimal vector field in curved space,* arXiv:1509.05989.

[12] I.L. Buchbinder, T. de Paula Netto, and I.L. Shapiro, *Massive vector field on curved background: non-minimal coupling, quantization and divergences.* Phys. Rev. **D95** (2017) 085009, arXiv:1703.00526.

[13] M.S. Ruf and C.F. Steinwachs, *Quantum effective action for degenerate vector field theories,* Phys. Rev. **D98** (2018) 085014, arXiv:1809.04601.

[14] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with applications to Quantum Gravity* (Oxford University Press, 2021).

[15] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, (Interscience Publishers Ltd., London, 1959).

[16] D.G. Boulware, *Renormalizeability of massive non-abelian gauge fields - a functional integral approach,* Annals Phys. **56** (1970) 140.

[17] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, *The Stueckelberg field*, Int. J. Mod. Phys. **A19** (2004) 3265.

[18] B.S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields*, (Gordon and Breach, NY, 1965).

[19] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity,* Phys. Repts. **119** (1985) 1.

[20] D.V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User's manual,* Phys. Repts. **388** (2003) 279.

[21] I.L. Buchbinder, G. de Berredo-Peixoto, and I.L. Shapiro, *Quantum effects in softly broken gauge theories in curved spacetimes.* Phys. Lett. **B649** (2007) 454.

[22] H. Weyl, *The theory of gravitation*, Annalen Phys. **54** (1917) 117.

[23] H. Weyl, *A New Extension of Relativity Theory*, Annalen Phys. **59** (1919) 101.

[24] D. M. Capper, M. J. Duff and L. Halpern, *Photon corrections to the graviton propagator,* Phys. Rev. **D10** (1974) 461; D. M. Capper and M. J. Duff, *Neutrino corrections to the graviton propagator,* Nucl. Phys. **B82** (1974) 147.

[25] M.J. Duff, *Observations On Conformal Anomalies,* Nucl.Phys. **B125** (1977) 334.

[26] S. Deser, M.J. Duff and C. Isham, *Nonlocal conformal anomalies*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.

[27] M.J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly,* Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387, hep-th/9308075.

[28] R.J. Riegert, *A non-local action for the trace anomaly*, Phys. Lett. **B134** (1984) 56.

[29] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories,* Phys. Lett. **B134** (1984) 187.

[30] I. Antoniadis and E. Mottola, $4-D$ *quantum gravity in the conformal sector*, Phys. Rev. **D45** (1992) 2013.

[31] I.L. Shapiro, *Effective action of vacuum: semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001, arXiv:0801.0216.

[32] I.T. Drummond and G.M. Shore, *Conformal anomalies for interacting scalar fields in curved spacetime,* Phys. Rev. **D19** (1979) 1134.

[33] S.J. Hathrell, *Trace anomalies and* $\lambda\varphi^4$ *theory in curved space,* Annals of Phys. **139** (1982) 136.

[34] M.A. Valle and M.A. Goni, *Conformal transformation of the one-loop effective action for* $\lambda\varphi^4$ *theory,* Phys. Rev. **D36** (1987) 615.

[35] M.S. Alves and J. Barcelos-Neto, *Path Integrals and the Trace Anomaly in a Self-Interacting Scalar Theory,* Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 115.

[36] G.H.S. Camargo and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced vacuum effective action torsion: Covariant solution and ambiguities*, Phys. Rev. **D106** (2022) 045004.

[37] T. Inagaki, T. Muta and S.D. Odintsov, *Nambu-Jona-Lasinio in curved space-time*, Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 2117.

[38] R. Penrose, *A Spinor Approach to General Relativity*, Ann. Phys. **10** (1960) 171.

[39] R. Penrose, *Zero rest mass fields including gravitation: Asymptotic behavior*, Proc.Roy.Soc.Lond. **A284** (1965) 159.

[40] B. Ørsted, *Conformally invariant differential equations and projective geometry,* J. Funct. Anal. **44** (1981) 1.

[41] S. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo Riemannian manifolds,* MIT preprint - 1983; SIGMA **4** (2008) 036.

[42] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Asymptotic freedom in extended conformal supergravities,* Phys. Lett. B **110** (1982) 117.

[43] J.A. de Barros and I.L. Shapiro, *Renormalization group study of the higher derivative conformal scalar model,* Phys. Lett. B **412** (1997) 242, arXiv:hep-th/9706123.

[44] K. Hamada, *Integrability and scheme independence of even-dimensional quantum geometry effective action*, Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 673;
K. Hamada, *Resummation and higher order renormalization in 4D quantum gravity*, Prog. Theor. Phys. **108** (2002) 399.

[45] K. Hamada and S. Horata, *Conformal Algebra and Physical States in a Non-Critical 3-Brane on R ×S3*, Prog. Theor. Phys. **110** (2004) 1169.

[46] I.L Buchbinder, P.R.B.R do Vale, G.Y. Oyadomari and I.L. Shapiro, *Renormalization of massive vector field theory coupled to scalar in curved spacetime*, Phys. Rev. **D110** (2024) 125015.

[47] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization of the models of quantum field theory in an external gravitational field with torsion,* Phys. Lett. **B151** (1985) 263.

[48] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *On the renormalization of CPT/Lorentz violating QED in curved space,* Phys. Lett **B642** (2006) 153, hep-th/0607109.

[49] G. de Berredo-Peixoto, J.A. Helayel-Neto and I.L. Shapiro, *On the consistency of a fermion-torsion effective theory,* JHEP **02** (2000) 003, hep-th/9910168.

[50] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge fields: An introduction to Quantum Theory,* (Translation from Russian. CRC Press; 2nd edition, 1993).

[51] A.S. Belyaev and I.L. Shapiro, *The action for the (propagating) torsion and the limits on the torsion parameters from present experimental data,* Phys. Lett. **B425** (1998) 246, hep-ph/9712503; *Torsion action and its possible observables,* Nucl. Phys. **B543** (1999) 20, hep-ph/9806313.

[52] P.M. Lavrov and I.L. Shapiro, *On the renormalization of gauge theories in curved spacetime,* Phys. Rev. **D81** 044026 (2010), arXiv:0911.4579.

[53] I.Ya. Arefeva, A.A. Slavnov and L.D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*, Theor. Math. Phys.**21** (1975) 1165 [Version in Russian: Teor. Mat. Fiz. **21** (1974) 311].

[54] B.L. Voronov, P.M. Lavrov and I.V. Tyutin, *Canonical transformations and the gauge dependence in general gauge theories,* Yad. Fiz. **36** (1982) 498;
I.A. Batalin, P.M. Lavrov, and I.V. Tyutin, *Gauge dependence and multiplicative renormalization of Yang-Mills theory with matter fields*, Eur. Phys. J. **C79** (2019) 628, arXiv:1902.09532.

[55] G. Costa and M. Tonin, *Renormalization of Nonabelian Local Gauge Theories*, Rivista Nuovo Cim. **5** (1975) 29.

[56] W. Kummer, *On the gauge independence of the S matrix,* Eur. Phys. J. **C21** (2001) 175, hep-th/0104123.

[57] I.L. Buchbinder, *On Renormalization group equations in curved spacetime,* Theor. Math. Phys. **61** (1984) 1215.

[58] S.R. Coleman and E.J. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,* Phys. Rev. **D7** (1973) 1888.

[59] I.L. Buchbinder and S.D. Odintsov, *Effective potential in a curved spacetime*, Sov. Phys. J. **27** (1984) 554.

[60] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing Bristol, 1992).

[61] M. Asorey, W.C. e Silva, I.L. Shapiro and P.R.B. do Vale, *Trace anomaly and induced action for a metric-scalar background*, Eur. Phys. J. **C83** (2023) 157.

[62] W.C. e Silva, *Abordagem efetiva em gravitação quântica com aplicação em cosmologia primordial* (Tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2024).

[63] M. Asorey, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 163.

[64] M. Asorey, G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Renormalization ambiguities and conformal anomaly in metric-scalar backgrounds,* Phys. Rev. **D74** (2006) 124011, arXiv:hep-th/0609138.

[65] D.M. Capper, M.J. Duff and L. Halpern, *Photon corrections to the graviton propagator*, Phys.Rev. **D10** (1974) 461;
D.M. Capper and M.J. Duff, *The one-loop neutrino contribution to the graviton propagator*, Nucl. Phys. **B82** (1974) 147.

[66] S. Deser, M.J. Duff and C. Isham, *Nonlocal conformal anomalies*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.

[67] M.J. Duff, *Observations On Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B125** (1977) 334.

[68] M.J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387.

[69] N.D. Birrel and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[70] B.L. Voronov and I.V. Tyutin, *Models of asymptotically free massive fields*, Yad. Fiz. **23** (1976) 664.

[71] I.L. Buchbinder, I.L. Shapiro and E.G. Yagunov, *The asymptotically free and asymptotically conformal invariant Grand Unification theories in curved space-time*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1599.

[72] I.L. Buchbinder, I.L. Shapiro and E.G. Yagunov, *Asymptotic conformal invariance of SU(2) and standard models in curved space-time*, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 2903.

[73] S. Deser and A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, Phys. Lett. **B309** (1993) 279.

[74] F.M. Ferreira and I.L. Shapiro, *Integration of trace anomaly in 6D*, Phys. Lett. **B772** (2017) 174.

[75] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings,* Phys. Lett. **B207** (1981) 211.

[76] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Nonsingular cosmological model with torsion induced by vacuum quantum effects,* Phys. Lett. **B162** (1985) 92.

[77] J.A. Helayel-Neto, A. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *Conformal symmetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion,* Phys. Lett. **B479** (2000) 411.

[78] S. Mauro and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action and Chern-Simons modification of general relativity,* Phys. Lett. **B746** (2015) 372.

[79] I.L. Shapiro and A.G. Jacksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem,* Phys. Lett. **B324** (1994) 286.

[80] P.O. Mazur and E. Mottola, *Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies,* Phys. Rev. **D64** (2001) 104022.

[81] E. Mottola, *Scalar gravitational waves in the effective theory of gravity,* JHEP **07** (2017) 043; Erratum: JHEP **09** (2017) 107.

[82] M. Giannotti and E. Mottola, *Trace anomaly and massless scalar degrees of freedom in gravity,* Phys. Rev. **D79** (2009) 045014.

[83] I.L. Shapiro and Joan Solà, *Massive fields temper anomaly-induced inflation: the clue to graceful exit?,* Phys. Lett. **B530** (2002) 10.

[84] A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and F.I. Takakura, *On the stability of the anomaly-induced inflation,* Nucl. Phys. **B648** (2003) 417.

[85] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP **02** (2003) 021, hep-ph/0210388; *Renormalization group and decoupling in curved space, II. The standard model and beyond*, JHEP **02** (2003) 021.

[86] G. de Berredo-Peixoto, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space,* Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281.

[87] E. Mottola and R. Vaulin, *Macroscopic effects of the quantum trace anomaly,* Phys. Rev. **D74** (2006) 064004, gr-qc/0604051.

[88] A.A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. **B91** (1980) 99.

[89] A.A. Starobinsky, *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially de-Sitter cosmology and the microwave background anisotropy,* Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.

[90] T.d.P. Netto, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation,* Eur. Phys. J. **C76** (2016) 544, arXiv:1509.08882.

[91] S. Deser and R.P. Woodard, *Nonlocal Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 111301, astro-ph/0706.2151.

[92] M. Maggiore, L. Hollenstein, M. Jaccard and E. Mitsou, *Early dark energy from zero-point quantum fluctuations.* Phys. Lett. **B704** (2011) 102, arXiv:1104.3797.

[93] I.L. Buchbinder and J.J. Wolfengaut, *Renormalization group equations and effective action in curved space-time,* Class. Quant. Grav. **5** (1988) 1127.

[94] A.A. Slavnov, *The Pauli-Villars regularization for nonabelian gauge theories,* Theor. Math. Phys. **33** (1977) 210;
T.D. Bakeyev and A.A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited,* Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 1539, hep-th/9601092.

[95] M. Asorey and F. Falceto, *Geometric regularization of gauge theories,* Nucl.Phys. **B327**(1989)427.

[96] I.G. Avramidi, *Covariant methods of study on the nonlocal structure of effective action,* Yad. Fiz. (Sov. Journ. Nucl. Phys.) **49** (1989) 1185.

[97] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms,* Nucl. Phys. **B333** (1990) 471.

[98] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro and O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity,* Phys. Lett. **B790** (2019) 229, arXiv:1812.00460.

[99] K.A. Meissner and H. Nicolai, *Effective action, conformal anomaly and the issue of quadratic divergences,* Phys. Lett. **B660** (2008) 260, hep-th/0710.2840.

[100] A. Codello and O. Zanusso, *On the non-local heat kernel expansion,* J. Math. Phys. **54** (2013) 013513, arXiv:1203.2034.

[101] A.O. Barvinsky, Y.V. Gusev, G.A. Vilkovisky and V.V. Zhytnikov, *The one loop effective action and trace anomaly in four-dimensions,* Nucl. Phys. **B439** (1995) 561, hep-th/9404187;
A.O. Barvinsky, A.G. Mirzabekian and V.V. Zhytnikov, *Conformal decomposition of the effective action and covariant curvature expansion,* gr-qc/9510037.

[102] L.S. Brown and J.C. Collins, *Dimensional renormalization of scalar field theory in curved space-time,* Ann. Phys. **130** (1980) 215.

[103] P.R.B.R. do Vale, *Possibility of spontaneous symmetry breaking in the Nambu-Jona-Lasinio model with torsion*, Eur. Phys. J. Plus **139** (2024) 1051.

[104] Y. Nambu and G. Jona-Lasínio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I*, Phys. Rev. **122** (1961) 345;
Y. Nambu and G. Jona-Lasínio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II,* Phys. Rev. **124** (1961) 246.

[105] C. Hill and D.S. Salopek, *Calculable nonminimal coupling of composite scalar bosons to gravity*, Ann. Phys. **213** (1992) 21.

[106] A. Addazi, P. Chen and A. Marcianò, *Emergent inflation from a Nambu-Jona-Lasinio mechanism in gravity with non-dynamical torsion*, Eur. Phys. J. **C79** (2019) 297.

[107] E. Elizalde, S. Leseduarte and S.D. Odintsov, *Chiral symmetry breaking in the Nambu-Jona-Lasínio model in curved spacetime with a nontrivial topology*, Phys. Rev. **D49** (1994) 5551.

[108] T. Inagaki, T. Muta and S.D. Odintsov, *Dynamical Symmetry Breaking in Curved Spacetime*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **127** (1997) 93.

[109] I.L. Shapiro, *The interaction of quantized matter fields with torsion and metric: NJL model*, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 729.

[110] S.P. Klevansky, *The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chrodynamics* , Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649.

[111] M. Buballa, *NJL-model analysis of dense quark matter*, Phys. Rept **407** (2005) 205.

[112] M. Shaposhnikov, A. Shkerin, I. Timiryasov and S. Zell, *Einstein-Cartan gravity, matter, and scale-invariant generalization*, JHEP **10** (2020) **177**; Erratum: ibid, JHEP **08** (2021) 162.

[113] M. Shaposhnikov, A. Shkerin, I. Timiryasov and S. Zell, *Einstein-Cartan Portal to Dark Matter,* Phys. Rev. Lett **126** (2021) 161301; Erratum: ibid, **127** (2021) 169901.

[114] J. Goldstone, *Field theories with ≪Superconductor≫ solutions*, IL Nuovo Cim. **19** (1961) 154.

[115] E. Witten, *Baryons in the 1/N expansion*, Nucl. Phys. **B160** (1979) 57.

[116] H. Sazdjian, *The 1/N expansion method in quantum field theory*, arXiv:1512.06784.

[117] B. Rosenstein, B.J. Warr and S.H. Park, *Dynamical symmetry breaking in four-fermion interaction models*, Phys. Rept. **205** (1991) 59.

[118] R. Martini, G. Paci and D. Sauro, *Radiative corrections to the Starobinsky Lagrangian from Torsion fluctuations*, arXiv:2312.16681v1.

[119] R. Martini, G. Paci and D. Sauro, *Covariant spin-parity decomposition of the Torsion and Path Integrals*, Class. Quant. Grav. **40** (2023) 195005.

[120] I.L. Shapiro, *Physical aspect of the space-time torsion*, Phys. Rept. **357** (2002) 113, hep-th/0103093.

[121] L. Rachwał and P.R.B.R. do Vale, *Generalization of conformal Hamada operators*, Eur. Phys. J. **C84** (2024) 948.

[122] J. Erdmenger and H. Osborn, *Conserved currents and the energy momentum tensor in conformally invariant theories for general dimensions*, Nucl. Phys. **B483** (1997) 431-474, arXiv:hep-th/9605009.

[123] J. Erdmenger and H. Osborn, *Conformally covariant differential operators: Symmetric tensor fields*, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 273, arXiv:gr-qc/9708040.

[124] F. Bastianelli, S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Conformal anomaly of (2,0) tensor multiplet in six-dimensions and AdS / CFT correspondence*, JHEP **02** (2000) 013, arXiv:hep-th/0001041.

[125] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, (Version 12.0, Champaign, IL, 2019).

[126] L. Bonora, P. Pasti and M. Bregola, *WEYL COCYCLES*, Class. Quant. Grav. **3**, (1986) 635.

[127] T. Arakelian, D. R. Karakhanian, R. P. Manvelyan and R. L. Mkrtchian, *Trace anomalies and cocycles of the Weyl group*, Phys. Lett. B **353**, (1995) 52.

[128] A. Rod Gover and K. Hirachi, *Conformally invariant powers of the Laplacian – A complete non-existence theorem*, J. Am. Math. Soc. **17**. (2004) 389, arXiv:math/0304082.

[129] V. Wunsch , *Some New Conformal Covariants*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **19** (2000) 339.

[130] V. Wunsch, *On conformally invariant differential operators*, Math. Nachr. **129** (1986) 269.

[131] T.P. Branson and B. Ørsted, *Explicit functional determinants in four dimensions*, in Proc. of the Amer. Math. Soc. **113** (1991) 669.

[132] T.P. Branson, *Differential operators canonically associated to a conformal structure*, Math. Scand. **57** (1985), 293–345.

[133] T.P. Branson, P. Gilkey, and J. Pohjanpelto, *Invariants of locally conformally flat manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 939.

[134] T.P. Branson and B. Ørsted, *Conformal indices of Riemannian manifolds*, Comp. Math. **60** (1986) 261.

[135] T.P. Branson and B. Ørsted, *Conformal geometry and global invariants*, Diff. Geom. Appl. **1** (1991) 279.

[136] T.P. Branson, *Conformally covariant equations on differential forms*, Comm. Part. Diff, Equations **7** (1982), 393.

[137] H.D. Fegan, *Conformally invariant first order differential operators*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **27** (1976) 371.

[138] C.R. Graham, R. Jenne, L.J. Mason, and G.A.J. Sparling, *Conformally invariant powers of the Laplacian, I: Existence*, J. London Math. Soc. **46** (1992) 557.

[139] C.R. Graham, *Conformally Invariant Powers of the Laplacian, II: Nonexistence*. Jour. of the London Math. Soc. **46** (1992) 566.

[140] A.R. Gover and L.J. Peterson, *Conformally Invariant Powers of the Laplacian, Q-Curvature, and Tractor Calculus*, Comm. Math. Phys. **235** (2003) 339-378.

[141] S. Curry and A. R. Gover, *An introduction to conformal geometry and tractor calculus, with a view to applications in general relativity*, arXiv:1412.7559.

[142] G.P. de Brito, A.D. Pereira and A.F. Vieira, *Fate of chiral symmetry in Riemann-Cartan geometry*, Phys. Rev. **D108** (2023) 045012.

[143] F.M. Ferreira, I.L. Shapiro and P.M. Teixeira, *On the conformal properties of topological terms in even dimensions*, Eur. Phys. J. Plus **131** (2016) 164, arXiv:1507.03620.

[144] F.M. Ferreira and I.L. Shapiro, *Basis of surface curvature-dependent terms in 6D*, Phys. Rev **D99** (2019) 064032, arXiv:1812.01140.

[145] A. Iorio, *Weyl-Gauge Symmetry of Graphene*, Annals Phys. **326** (2011) 1334, arXiv:1007.5012.

[146] A. Iorio, *Using Weyl symmetry to make Graphene a real lab for fundamental physics*, Eur. Phys. J. Plus **127** (2012) 156, arXiv:1207.6929.

[147] A. Iorio and G. Lambiase, *Quantum field theory in curved graphene spacetimes, Lobachevsky geometry, Weyl symmetry, Hawking effect, and all that*, Phys. Rev. **D90** (2014) 025006, arXiv:1308.0265.

[148] C.M. Will, *Theory and experiment in gravitacional physics*, (Cambrigd University Press, 1993) 333.

[149] A. Perez and C. Rovelli, *Physical effects of the Immirzi parameter in loop quantum gravity*, Phys. Rev. **D73** (2006) 044013.

[150] L. Parker and D.J. Toms, *Renormalization-group analysis of grand unified theories in curved spacetime*, Phys. Rev. **D29** (1984) 1584.

[151] L. Parker and D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, (Cambridge University Press, 2009).