

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Homomorfismos complexos em álgebras de Banach não comutativas

Juiz de Fora

2025

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Homomorfismos complexos em álgebras de Banach não comutativas

Orientador: Prof. Dr. Willian Versolatti França

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Veronezi, Anna Júlia.

Homomorfismos complexos em álgebras de Banach não comutativas /
Anna Júlia Gonçalves Veronezi. – 2025.
77 f.

Orientador: Willian Versolatti França

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Álgebra de Banach não Comutativa. 2. Homomorfismo Complexo . 3.
Ideal Maximal . I. Versolatti França, Willian, orient. II. Título.

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Homomorfismos complexos em álgebras de Banach não-comutativas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 20 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Willian Versolati França - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Elói Medina Galego

Universidade de São Paulo

Prof^a Dr^a Cristiane de Andrade Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **Willian Versolati Franca, Professor(a)**, em 20/02/2025, às 20:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elói Medina Galego, Usuário Externo**, em 21/02/2025, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cristiane de Andrade Mendes, Professor(a)**, em 21/02/2025, às 15:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uff (www2.uff.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2259128** e o código CRC **A09CCA17**.

Aos meus pais, Aline e Lenilson, por todo apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por mais esta etapa concluída, cuja realização foi possível com o apoio de tantas pessoas especiais.

Agradeço aos meus pais, Aline e Lenilson, por acreditarem em mim e me incentivarem durante toda a minha vida. À minha irmã, Anna Elize, meu alívio cômico nos momentos áridos e uma fonte constante de alegria.

Agradeço ao meu noivo, Pedro, meu companheiro de vida e profissão. Obrigada por ser meu porto seguro e por me mostrar o lado matemático da força, sempre com paciência e amor.

Agradeço ao meu orientador, Willian, pela gentileza, pelo incentivo e pelas preciosas dicas ao longo deste percurso. Seu projeto me motivou e me fez florescer como matemática.

Agradeço à Cristiane e ao Elói, por dedicarem tempo e paciência à leitura deste trabalho. Obrigada por estarem sempre presentes e por acreditarem no meu potencial.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, seja direta ou indiretamente, tornando esta etapa mais significativa e especial.

“Home is behind, the world ahead,
and there are many paths to tread
through shadows to the edge of night,
until the stars are all alight.”
(J.R.R. Tolkien)

RESUMO

Na presente dissertação, exploraremos a relação existente entre o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos não nulos (o espectro), e o conjunto dos ideais maximais em álgebras de Banach com unidade. Dada uma álgebra de Banach comutativa e com unidade $\mathcal{A}$, construiremos a teoria necessária para demonstrar que existe uma bijeção entre o espectro e o conjunto dos ideais maximais de $\mathcal{A}$. Além disso, apresentaremos um exemplo de uma álgebra de Banach com unidade não comutativa, onde não há tal bijeção - na verdade provaremos que seu espectro é de fato vazio. Por outro lado, verificaremos que a álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_m(\mathcal{A})$ (com entradas em $\mathcal{A}$) possui a propriedade da bijeção mesmo sendo uma álgebra de Banach com unidade não comutativa.

Palavras-chave: Álgebra de Banach não Comutativa. Homomorfismo Complexo. Espectro. Ideal Maximal.

ABSTRACT

In the present dissertation we will explore the relationship between the set of non-zero multiplicative linear functionals (the spectrum), and the set of maximal ideals in a unital Banach algebra. For a given commutative unital Banach algebra $\mathcal{A}$, we will construct the basic foundation in order to demonstrate that there is a bijection between the spectrum and the set of all maximal ideals of $\mathcal{A}$. Furthermore, we will present an example of a unital non-commutative Banach algebra, where such bijection does not exist - in fact we will prove that its spectrum is actually empty. On the other hand, we will show that the algebra of all upper triangular matrices $UT_m(\mathcal{A})$ (with entries in $\mathcal{A}$) possesses the bijection property even though it is a non-commutative Banach algebra.

Keywords: Non-commutative Banach Algebra. Complex Homomorphism. Spectrum. Maximal Ideal.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	Álgebras Normadas	12
2.2	Inversas	21
2.3	Quasi-Inversas	31
2.4	O espectro de um elemento de uma álgebra normada complexa .	36
2.5	Ideais e Módulos	45
2.6	Funcionais Lineares Multiplicativos	57
3	ÁLGEBRAS UNITÁRIAS E COMUTATIVAS	60
4	ÁLGEBRAS UNITÁRIAS E NÃO COMUTATIVAS COM ESPECTRO VAZIO	64
5	ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULAR SUPERIO- RES	68
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Uma álgebra associativa é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ dotado de um produto associativo. Ao adicionar a essa estrutura uma norma que induz uma métrica completa neste espaço, obtemos uma álgebra de Banach sempre que tal norma satisfaz a desigualdade $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$ - condição esta que nos garante a continuidade do produto.

O termo álgebra de Banach foi introduzido por Ambrose em 1945, inspirado pelas contribuições de Banach no estudo de espaços métricos completos. Banach nunca chegou a estudar essa estrutura. Sua influência é justificada, visto que, após sua tese (1920), matemáticos como von Neumann (1929), Nagumo e Yosida (1936), começaram a adicionar certas estruturas algébricas aos espaços normados, métricos e métricos completos, respectivamente. Esses trabalhos não desenvolveram uma teoria geral. Entretanto, Gelfand, em sua tese de 1938, criou a teoria moderna de álgebras de Banach comutativas. Para mais informações históricas sobre a área de Análise Funcional, em particular na área de Álgebra de Banach, recomendamos o livro (1).

As álgebras de Banach aparecem naturalmente dentro da análise funcional. Por exemplo, dado um espaço de Banach B , podemos citar como exemplos de álgebra de Banach o espaço dos operadores lineares contínuos em B e o espaço dos operadores lineares compactos em B . Assim, as álgebras de Banach estabelecem-se como uma área que relaciona conceitos algébricos e analíticos, proporcionando um novo ponto de vista sobre objetos já bem conhecidos.

Nesta dissertação, não assumiremos que o leitor tenha um conhecimento muito profundo dentro da teoria da análise funcional ou da teoria de álgebra. No entanto, alguns conceitos se tornam mais claros quando há uma maior familiaridade com essas áreas, tendo em vista que ao longo deste trabalho exploraremos espaços vetoriais munidos com diferentes normas, juntamente com uma estrutura algébrica de anel. O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No segundo capítulo, construiremos a teoria necessária das Álgebra de Banach para estabelecer um dos resultados principais deste trabalho. Este capítulo será dividido em seções que correspondem às seções 1, 2, 3, 5, 9, 16, 24 e 25 do

livro (2). Não desenvolveremos todo material ali presente, apenas o necessário. Portanto, indicamos a fonte para eventuais esclarecimentos ou aprofundamentos (para uma versão mais explicativa ver também (3)). Um dos principais resultados desse trabalho encontra-se abaixo (Teorema 3.4) e este resultado será o ponto de partida para a discussão que virá em seguida no terceiro capítulo:

"Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa comutativa e com unidade. Então, existe uma bijeção entre o conjunto formado pelos ideais maximais de $\mathcal{A}$ e o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos (não nulos) de $\mathcal{A}$."

Este deriva de maneira bastante natural do Teorema de Gelfand-Mazur, embora Gelfand não o tenha enunciado, aparecem resultados relacionados em seu trabalho(ver (1) p.141).

Uma pergunta natural que surge a partir desse resultado é se essa bijeção ainda existe quando retiramos a hipótese de comutatividade da álgebra. Veremos, no terceiro capítulo que, em geral, não podemos garantir tal propriedade. Nele, será demonstrado que existem álgebras de Banach cujo conjunto dos funcionais lineares multiplicativos (não nulos) é vazio (segue do Teorema 2.5.11 de (4)). Daí, combinando com a observação de que, em álgebras de Banach com unidade, o conjunto dos ideais maximais é não vazio, podemos ver que não existirá tal bijeção.

No quarto e último capítulo, exploraremos o artigo (5). Veremos que existe uma álgebra de Banach não comutativa que possui a propriedade da bijeção supracitada.

2 PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo estabelecer a base teórica necessária para a demonstração e compreensão do seguinte resultado fundamental (Teorema 3.4).

"Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa e com unidade. Então, existe uma bijeção entre os ideais maximais de $\mathcal{A}$ e os funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$."

A partir desse resultado surge, de uma forma bem natural, a seguinte questão: **Será que existe uma bijeção análoga quando consideramos uma álgebra de Banach com unidade, mas não necessariamente comutativa?** Esse problema será investigado nos capítulos seguintes, onde exploraremos as implicações dessa relação no contexto de álgebras de Banach não comutativas, analisando os casos em que a propriedade de bijeção é preservada ou falha.

Para atingir o objetivo deste capítulo, o mesmo será dividido em seis seções principais:

1. **Conceitos básicos:** Introduziremos os conceitos fundamentais de álgebra, destacando como ela une as estruturas de espaço vetorial e anel. Também discutiremos a adaptação de conceitos bem estabelecidos, como norma e homomorfismo, ao contexto das álgebras.
2. **Propriedades do produto:** Examinaremos as características do produto em uma álgebra, como a existência de um elemento unidade. Também definiremos o que significa um elemento ser invertível, preparação essencial para introduzir o espectro de um elemento na Seção 4.
3. **Unitização de álgebras:** Como álgebras com unidade possuem propriedades bastante úteis, apresentaremos um método para unitizar álgebras que originalmente não possuem elemento unidade.
4. **O espectro de um elemento:** Exploraremos a definição e as propriedades do espectro de um elemento em uma álgebra de Banach.

5. **Ideais e álgebra quociente:** Definiremos o conceito de ideais e apresentaremos a construção de álgebras quociente.
6. **Funcionais lineares multiplicativos e demonstração do Teorema 3.4:** Finalizaremos o capítulo definindo funcionais lineares multiplicativos e apresentando a demonstração do Teorema 3.4, concluindo assim o objetivo proposto.

Essa organização visa não apenas facilitar a compreensão do resultado principal, mas também fornecer uma visão estruturada dos conceitos fundamentais que sustentam as álgebras de Banach, preparando o terreno para as discussões mais aprofundadas dos capítulos subsequentes.

2.1 Álgebras Normadas

Iniciaremos esta seção com a definição de álgebras e suas propriedades fundamentais, destacando como essa estrutura combina elementos de espaços vetoriais e anéis. Em seguida, abordaremos a extensão do conceito de norma para álgebras, ajustando a definição usual para contemplar o produto algébrico. Além disso, introduziremos a definição de homomorfismos entre álgebras, conceito este que une a linearidade característica de espaços vetoriais ao conceito algébrico de homomorfismo de anéis, preservando o produto. Para facilitar a compreensão, apresentaremos exemplos concretos dessas estruturas, ilustrando as definições e reforçando os conceitos discutidos.

Neste texto, quando não especificado, $\mathbb{F}$ será o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

Definição 2.1. Uma **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ (ou simplesmente uma $\mathbb{F}$ -álgebra) é um espaço vetorial $(\mathcal{A}, +, 0)$ munido com uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

satisfazendo para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ as seguintes condições:

1. Associatividade: $x(yz) = (xy)z$;
2. Compatibilidade dos produtos: $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$. Equivalentemente $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$.

Neste caso, escrevemos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$, onde $xy = x \cdot y = M(x, y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Chamamos a aplicação M definida acima de **produto** da álgebra $\mathcal{A}$. Além disso, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra **comutativa** quando temos satisfeita a condição

3. $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Caso contrário dizemos que $\mathcal{A}$ é não comutativa.

Uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{R}$ é dita uma **álgebra real** e, sobre o corpo $\mathbb{C}$, uma **álgebra complexa**.

Notação 2.2. Seja θ o vetor nulo de uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{F}$ e 0 o elemento nulo de $\mathbb{F}$. Por $0x = \theta$, temos que dado $x \in \mathcal{A}$,

$$x\theta = x(0\theta) = 0(x\theta) = \theta.$$

Analogamente, $\theta x = \theta$. Assim, denotaremos ambos, o vetor nulo e o zero, por 0.

Definição 2.3. Sejam X um conjunto, V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, α um elemento de $\mathbb{F}$ e f, g aplicações de X em V . Existe uma definição natural da soma $(f + g)$ e do produto por escalar αf como aplicações de X em V dadas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

para qualquer $x \in X$. Essas aplicações são chamadas de **adição pontual** e **multiplicação por escalar pontual**, respectivamente. Além disso, se V é uma $\mathbb{F}$ -álgebra podemos definir o **produto pontual** $(fg)(x)$ da seguinte maneira:

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

A seguir apresentaremos alguns exemplos de álgebras. Em particular, veremos que o conjunto das matrizes $m \times m$ com entradas em uma álgebra $\mathcal{A}$ também é uma álgebra (esta última será mais explorada no terceiro capítulo deste trabalho).

Exemplo 2.4. Sejam U, V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Denotaremos por $L(U, V)$ o conjunto de todas as aplicações lineares de U em V , com a adição e multiplicação por escalar pontuais. Pela Definição 2.3, vemos que $L(U, V)$ é um espaço vetorial. Em particular, $L(U, V)$ é uma álgebra com o produto pontual sempre que V for uma álgebra.

Exemplo 2.5. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Então $\mathcal{A}^m$ (a soma direta de m cópias de $\mathcal{A}$) é uma $\mathbb{F}$ -álgebra quando equipada com a soma, multiplicação por escalar, e produto coordenada a coordenada. Mais precisamente, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ e $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{A}^m$, temos

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (a_1, \dots, a_m) &= (\alpha a_1, \dots, \alpha a_m); \\ (a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_m) &= (a_1 \cdot b_1, \dots, a_m \cdot b_m); \\ (a_1, \dots, a_m) + (b_1, \dots, b_m) &= (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m).\end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Vimos que $L(V, V)$ com as operações pontuais de soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial. Afirmamos que $L(V, V)$, com o produto definido pela composição de funções, é uma álgebra, que será denotada por $L(V)$. De fato, só precisamos provar que a composição $\circ$ é um produto em $L(V)$. Sejam f, g, h aplicações em $L(V)$. Lembre-se que a composição é definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todo $x \in V$. Notemos para todo $f, g, h \in L(V)$:

1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, pois a composição de funções é associativa.
2. $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$, pois para todo $x \in V$ temos

$$\begin{aligned}[f \circ (g + h)](x) &= f[(g + h)(x)] = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= [(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)] = [(f \circ g) + (f \circ h)](x).\end{aligned}$$

Na terceira igualdade acima, usamos que f é linear, provando o afirmado.

3. $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, uma vez que

$$\begin{aligned}[(f + g) \circ h](x) &= (f + g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) = [(f \circ h) + (g \circ h)](x), \quad \forall x \in V.\end{aligned}$$

4. Dado $\alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g)$, pois valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} [(\alpha f) \circ g](x) &= (\alpha f)(g(x)) = \alpha[f(g(x))] = \alpha[(f \circ g)(x)] = [\alpha(f \circ g)](x), \\ [(\alpha f) \circ g](x) &= (\alpha f)(g(x)) = \alpha[f(g(x))] = f(\alpha g(x)) = [f \circ (\alpha g)](x), \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

Exemplo 2.7. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Verificaremos que é possível tornar o conjunto das matrizes $m \times m$ com entradas em $\mathcal{A}$ em uma álgebra e denotaremos tal álgebra por $M_m(\mathcal{A})$. De fato, dados $\alpha \in \mathbb{F}$ e $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_m(\mathcal{A})$, definimos as seguintes operações em $M_m(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} (A + B) &= (a_{ij} + b_{ij}), \\ \alpha A &= (\alpha a_{ij}) \quad e \\ AB &= (x_{ij}), \quad \text{onde} \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}. \end{aligned}$$

É imediato verificar que $M_m(\mathcal{A})$ é uma álgebra com as operações acima - compare com o Exemplo 2.40.

Lembremos que uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais é uma aplicação que preserva as operações de adição e multiplicação por escalar. De modo análogo, um homomorfismo de anéis preserva também as duas operações deste objeto, a adição e o produto. Já em uma álgebra, contamos com as operações de adição, multiplicação por escalar e o produto da álgebra. Por esta razão, estamos interessados em definir aplicações que preservam tais operações. Segue então a seguinte definição:

Definição 2.8. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas $\mathbb{F}$ -álgebras. Um **homomorfismo** $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação linear tal que para todo $x, y \in \mathcal{A}$, temos $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Um **isomorfismo** de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é um homomorfismo bijetivo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Quando existe tal isomorfismo, dizemos que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são **isomorfas**.

Agora definiremos o conceito de subálgebra e verificaremos que a imagem de um homomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é de fato uma subálgebra.

Definição 2.9. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Um **subsemigrupo** de $\mathcal{A}$ é um subconjunto $S \subset \mathcal{A}$ tal que se $x, y \in S$ então $xy \in S$. Uma **subálgebra** de $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ que também é um subsemigrupo de $\mathcal{A}$.

Observação 2.10. Uma subálgebra $\mathcal{B}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é ela mesma uma álgebra sobre o mesmo corpo e com o produto sendo a restrição à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ do produto em $\mathcal{A}$.

Proposição 2.11. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas $\mathbb{F}$ -álgebras e $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de álgebras. Então, $\phi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$.

Demonstração. Sabemos que a imagem de uma aplicação linear é um subespaço vetorial do contradomínio. Além disso, temos que dados $y_1, y_2 \in \phi(\mathcal{A})$ quaisquer, existem $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ tais que $\phi(x_1) = y_1$ e $\phi(x_2) = y_2$. Logo

$$y_1 \cdot y_2 = \phi(x_1)\phi(x_2) = \phi(x_1 \cdot x_2) \in \phi(\mathcal{A}),$$

pois ϕ é multiplicativo. Com isso, concluímos que $\phi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$. $\square$

Quando estudamos espaços vetoriais, um importante conceito é o de norma. Em um espaço vetorial normado podemos introduzir uma métrica (Veja Observação 2.15 para um melhor entendimento em como definir tal métrica - note que a definição apresentada funciona para qualquer espaço vetorial normado). A topologia induzida por esta métrica fornece algumas propriedades interessantes, tais como a continuidade das operações de soma e multiplicação por escalar, propriedades estas que são chaves na obtenção de alguns resultados. Veremos a seguir como podemos expandir o conceito de norma para álgebras de forma a garantir que o produto da álgebra seja uma operação contínua.

Definição 2.12. Sejam V um espaço vetorial, $\mathcal{A}$ uma álgebra (ambos sobre $\mathbb{F}$). Uma **seminorma** em V é uma aplicação $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos:

- $p(x) \geq 0$;
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Uma **norma** em V é uma semi-norma p em V que satisfaz a seguinte condição:

- Se $p(x) = 0$ então $x = 0$.

Uma **norma-álgebra** (respectivamente, **álgebra semi-norma**) em $\mathcal{A}$ é uma norma (respectivamente, **semi-norma**) p em $\mathcal{A}$ tal que, para todo $x, y \in \mathcal{A}$ temos:

- $p(xy) \leq p(x)p(y)$.

Agora, estamos em posição de definir o que é uma álgebra normada completa. Para isso adotaremos a definição de completude utilizada em espaços normados.

Definição 2.13. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Uma **álgebra normada** é um par $(\mathcal{A}, p)$ onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra e p é uma norma-álgebra em $\mathcal{A}$. Uma álgebra normada completa (ou **álgebra de Banach**) é uma álgebra normada $(\mathcal{A}, p)$ tal que o espaço vetorial normado $\mathcal{A}$ com a norma p é completo, isto é, $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach.

Notação 2.14. Denotaremos a norma p por $\|\cdot\|$ e a álgebra normada $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ por $\mathcal{A}$.

Observação 2.15. Uma álgebra normada $\mathcal{A}$ torna-se um espaço métrico com a função $d(x, y) = \|x - y\|$ como métrica ($x, y \in \mathcal{A}$). Em particular, $\mathcal{A}$ é um espaço topológico, onde a topologia é induzida pela métrica d . Munido desta métrica e, sendo $\|\cdot\|$ uma norma álgebra, temos a continuidade das três operações básicas da álgebra: Soma vetorial, multiplicação por escalar e o produto da álgebra (Veja Proposição 2.34) em termos mais precisos $\mathcal{A}$ é uma álgebra topológica. Portanto, além do conceito de isometria para espaços vetoriais normados, também podemos trabalhar com os conceitos de isomorfismo topológico ao lidar com álgebras normadas. No que segue sempre entendemos que a topologia de uma certa álgebra normada $\mathcal{A}$ será a topologia induzida pela métrica d acima - vale a pena destacar que o mesmo entendimento vale para o corpo de escalares $\mathbb{F}$ uma vez que $\mathbb{F}$ é uma álgebra normada sobre si mesma. Para mais detalhes sobre a topologia induzida por uma métrica veja (6, p. 119). Nesta referência também encontramos mais sobre a teoria de espaços métricos e espaços topológicos.

Definição 2.16. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras normadas e $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um isomorfismo de álgebras. Dizemos que T é um **isomorfismo topológico** quando T é um homeomorfismo do espaço topológico $\mathcal{A}$ no espaço topológico $\mathcal{B}$. Analogamente, dizemos que T é um **isomorfismo isométrico** quando T é uma aplicação isométrica do espaço métrico $\mathcal{A}$ no espaço métrico $\mathcal{B}$, isto é, dados $x, y \in \mathcal{A}$, temos a igualdade $\|T(x) - T(y)\| = \|(x - y)\|$ (pela linearidade de T , esta última identidade é equivalente a $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$). Notemos que todo isomorfismo isométrico é um isomorfismo topológico. Para mais informações sobre isomorfismos topológicos veja (6, p.105).

Notação 2.17. Sejam U, V espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Denotamos por $B(U, V)$ o subespaço vetorial de $L(U, V)$ (Veja exemplo 2.4) formado pelas aplicações lineares e limitadas (portanto contínuas) de U em V . Lembremos que uma aplicação linear $T : U \rightarrow V$ é limitada quando $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in U, \|x\| \leq 1\} < \infty$ (veja (7, p.97)).

Agora, vejamos alguns exemplos de álgebras de Banach.

Exemplo 2.18. Seja V um espaço vetorial normado. Mostraremos que $B(V) = B(V, V)$ com a soma e multiplicação por escalar pontuais e com a composição de funções como produto, é uma álgebra normada, onde a norma (norma de operador) em $B(V)$ é dada por

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in V, \|x\| \leq 1\} \quad \text{para cada } T \in B(V).$$

Os elementos de $B(V)$ são chamados de operadores lineares limitados em V . No caso que V é completo temos que $B(V)$ é uma álgebra de Banach, pois $B(V)$ é completo (veja (7, p.118)).

Claramente, $(T + S), \alpha T, (T \circ S) \in B(V)$ para todo $T, S \in B(V)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. Daí, vemos que $B(V)$ é uma subálgebra de $L(V)$ (Veja Exemplo 2.6). Agora mostraremos que $\|(T \circ S)\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ para todo $T, S \in B(V)$. Usando a continuidade de T, S , temos para cada $x \in V$, o seguinte

$$\|(T \circ S)(x)\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\| \cdot \|S(x)\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|.$$

Daí, para $x \in V$ tal que $\|x\| \leq 1$ vale

$$\|(T \circ S)(x)\| \leq \|T\| \cdot \|S\|.$$

Portanto,

$$\|T \circ S\| = \sup\{\|(T \circ S)(x)\| : x \in V, \|x\| \leq 1\} \leq \|T\| \cdot \|S\|.$$

Concluimos que $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.

Por último, é bem conhecido o fato que se V é completo, então $B(V)$ é completo. Logo, se V é completo, então $B(V)$ é uma álgebra de Banach.

Exemplo 2.19. Sejam $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ álgebras sobre o corpo $\mathbb{F}$. O produto cartesiano $\mathcal{P} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ é uma álgebra quando equipado com as operações

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \\ (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n) \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \end{aligned}$$

onde $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ (compare com o Exemplo 2.5).

No que segue, assumiremos que cada $\mathcal{A}_i$ é uma álgebra normada e por simplicidade de notação, a norma de cada álgebra $\mathcal{A}_i$ com o mesmo símbolo $\|\cdot\|$. Seja $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}$. Sabemos que o produto cartesiano $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se, e somente se, cada $(\mathcal{A}_i, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Agora, suponhamos que cada $(\mathcal{A}_i, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach. Mostraremos que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$ é uma norma-álgebra, portanto $\mathcal{P}$ será uma álgebra de Banach. De fato,

$$\|(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)\|_\infty = \|(x_1 y_1, \dots, x_n y_n)\|_\infty = \max\{\|x_1 y_1\|, \dots, \|x_n y_n\|\}.$$

Como cada $\mathcal{A}_i$ é uma álgebra de Banach com a norma $\|\cdot\|$, temos que $\|x_i y_i\| \leq \|x_i\| \cdot \|y_i\|$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1 y_1\|, \dots, \|x_n y_n\|\} \leq \\ &\leq \max\{\|x_1\| \cdot \|y_1\|, \dots, \|x_n\| \cdot \|y_n\|\} \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \max\{\|y_1\|, \dots, \|y_n\|\} = \\ &= \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \cdot \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

Observação 2.20. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Daí, o produto cartesiano $(V^n = V \times \cdots \times V, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial completo. Portanto, pelo Exemplo 2.18, temos que $B(V^n)$ é uma álgebra de Banach.

Antes de apresentarmos o próximo exemplo que será importante para a demonstração da Proposição 2.56, precisamos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.21. Sejam X um conjunto não vazio e V um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F}$. Uma aplicação f de X em V é dita **aplicação limitada** quando $\{\|f(x)\| : x \in X\}$ é um conjunto de números reais limitado. Denotaremos por $l^\infty(X, V)$ o espaço vetorial normado formado por todas as aplicações limitadas de X em V com a adição pontual, a multiplicação por escalar pontual e a norma uniforme.

Dada $f \in l^\infty(X, V)$, a norma uniforme $\|f\|_\infty$ é definida da seguinte maneira:

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}.$$

Exemplo 2.22. Sejam X um conjunto não vazio e V um espaço vetorial normado. Mostraremos agora que se V é um espaço de Banach, então $l^\infty(X, V)$ também é um espaço de Banach. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $l^\infty(X, V)$. Daí, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m > n(\varepsilon)$ temos a seguinte estimativa (para todo $x \in X$)

$$\|(f_n - f_m)(x)\| \leq \sup\{\|(f_n - f_m)(x)\| : x \in X\} = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Portanto, $(f_n(x))_n$ é uma sequência de Cauchy em V para cada $x \in X$ fixado. Por V ser completo, existe $v_x \in V$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = v_x$. Definamos $f : X \rightarrow V$ onde $f(x) = v_x$. Verificaremos que $f \in l^\infty(X, V)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. De fato, pela desigualdade 2.1, ao fixar $m > n(\varepsilon)$ e fazer $n \rightarrow \infty$, temos para todo $x \in X$ e $m > n(\varepsilon)$

$$\|f(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Como f_m é limitada, segue que f também será pois $\|f(x)\| \leq \varepsilon + \|f_m(x)\|$. Além disso, segue que

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup\{\|f(x) - f_m(x)\| : x \in X\} \leq \varepsilon,$$

concluindo a convergência $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

Agora, suponhamos que V seja uma álgebra normada. Afirmamos que $l^\infty(X, V)$ se torna uma álgebra normada com o produto pontual. De fato, como

$$\|fg(x)\| = \|f(x)g(x)\| \leq \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty,$$

temos

$$\|fg\|_\infty = \sup\{\|fg(x)\| : x \in X\} \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Exemplo 2.23. Seja X um conjunto aberto e não vazio contido em $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos). Denotaremos por $P(X)$ a álgebra de todas as funções polinomiais complexas em X , isto é, funções definidas em X da forma $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, onde $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in 1, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}$. Além disso, denotaremos por $R(X)$ a álgebra das funções racionais em X sem pólos em X

$$R(X) = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in P(X) \text{ e } q(a) \neq 0 \text{ para todo } a \in X \right\}.$$

2.2 Inversas

Nesta seção, dada uma $\mathbb{F}$ -álgebra $\mathcal{A}$, definiremos o conceito de unidade com relação ao produto de $\mathcal{A}$ e, em seguida, exploraremos as propriedades que decorrem a partir de sua existência no caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada. Mostraremos que o conjunto dos elementos invertíveis desta álgebra formam um grupo (topológico). Em seguida, introduziremos o conceito de raio espectral de um elemento da álgebra e demonstraremos que, se o raio espectral de um elemento for menor que 1, então esse elemento é invertível. Concluiremos a seção mostrando que, se $\mathcal{A}$ for uma álgebra de Banach com unidade, a álgebra de matrizes $M_m(\mathcal{A})$ pode ser interpretada como uma subálgebra (Banach) com unidade de $B(\mathcal{A}^m)$.

Definição 2.24. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Dizemos que um elemento $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ é uma identidade (ou **unidade**) de $\mathcal{A}$ quando $1_{\mathcal{A}} \neq 0$ e $1_{\mathcal{A}}x = x1_{\mathcal{A}} = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **$\mathbb{F}$ -álgebra com unidade** ou uma **$\mathbb{F}$ -álgebra unitária**. Além disso, se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ contendo $1_{\mathcal{A}}$ dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **subálgebra unitária**.

Observação 2.25. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária.

- $\mathcal{A}$ tem no máximo uma unidade. De fato, se $1_{\mathcal{A}}$ e $I_{\mathcal{A}}$ são unidades de $\mathcal{A}$, então $1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}}$.
- Se $\alpha \in \mathbb{F}$, podemos fazer a seguinte identificação: $\alpha(1_{\mathcal{A}}) = \alpha$ como um elemento de $\mathcal{A}$. Em particular, $1(1_{\mathcal{A}}) = 1$.
- Seja $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada unitária. Podemos munir $\mathcal{A}$ com uma norma álgebra $\|\cdot\|_*$ que é equivalente a $\|\cdot\|$ e que satisfaz a condição $\|1_{\mathcal{A}}\|_* = 1$. Por esta razão, convencionaremos que $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$ (veja (2, p. 19) Corolário 4).

Definição 2.26. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária e $x \in \mathcal{A}$. Um **inverso à esquerda** de x é um elemento $y \in \mathcal{A}$ tal que $y \cdot x = 1_{\mathcal{A}}$. Analogamente, um **inverso à direita** de x é um elemento $z \in \mathcal{A}$ tal que $x \cdot z = 1_{\mathcal{A}}$. Um **inverso** de x é um elemento $w = x^{-1}$ que é simultaneamente um inverso à direita e à esquerda de x . No caso que x possui um inverso, dizemos que x é um elemento **invertível** (ou regular). Os elementos que não são invertíveis são chamados **singulares**. O conjunto formado pelos elementos invertíveis de $\mathcal{A}$ será denotado por $\text{Inv}(\mathcal{A})$, enquanto o conjunto formado pelos elementos singulares de $\mathcal{A}$ será representado por $\text{Sing}(\mathcal{A})$.

Observação 2.27. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária.

- O conjunto $(\text{Inv}(\mathcal{A}), \cdot)$ é um grupo com respeito ao produto de $\mathcal{A}$.
- Agora, suponhamos que $x \in \mathcal{A}$ seja um elemento que possui uma inversa à direita z e uma inversa à esquerda y . Então $y = z$ e portanto x é invertível. De fato,

$$y = y \cdot 1_{\mathcal{A}} = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = 1_{\mathcal{A}} \cdot z = z$$

De maneira análoga, podemos mostrar que o inverso é único.

- Um ponto a se notar é que inversas laterais não são necessariamente únicas.
- Convencionaremos que dado $0 \neq x \in \mathcal{A}$, temos $x^0 = 1_{\mathcal{A}}$.

Observação 2.28. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária e $x \in \mathcal{A}$. Se $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ então $\alpha x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ para todo $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Em particular, se $x \in \text{Sing}(\mathcal{A})$ então $\alpha x \in \text{Sing}(\mathcal{A})$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

A seguir apresentaremos uma maneira de obter subálgebras comutativas em uma álgebra não comutativa.

Definição 2.29. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e X um subconjunto de $\mathcal{A}$. O **comutante** de X é o subconjunto X^C de $\mathcal{A}$ dado por

$$X^C = \{y \in \mathcal{A} : yx = xy, \text{ para todo } x \in X\}.$$

O conjunto $(X^C)^C$ será indicado por X^{CC} e é conhecido como o **segundo comutante** de X .

Observação 2.30. Sejam $\mathcal{A}$ e X como na definição anterior. Afirmamos que o conjunto X^C é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Inicialmente, mostraremos que X^C é um subespaço vetorial. Dados $x, y \in X^C$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos para cada $z \in X$:

$$(x + \alpha y)z = xz + (\alpha y)z = zx + \alpha(yz) = zx + \alpha(zx) = zx + z(\alpha y) = z(x + \alpha y).$$

Portanto, $(x + \alpha y) \in X^C$. Logo, X^C é um subespaço vetorial. Agora basta verificar que X^C é fechado com relação ao produto. Notemos que:

$$(xy)z = x(yz) = x(zx) = (xz)y = (zx)y = z(xy).$$

Daí, $xy \in X^C$.

Em particular, para cada $x \in \mathcal{A}$, o conjunto $\{x\}^{CC}$ é uma subálgebra comutativa contendo x . O fato de ser subálgebra segue do parágrafo anterior. Verifiquemos então a comutatividade de $\{x\}^{CC}$. De fato, claramente $x \in \{x\}^{CC}$. Agora, sejam, $y, z \in \{x\}^{CC}$. Como $x \in \{x\}^C$, temos $yx = xy$. Logo $y \in \{x\}^C$. Além disso, como $z \in \{x\}^{CC}$, temos $yz = zy$ como queríamos demonstrar.

Dessa maneira, uma $\mathbb{F}$ -álgebra não comutativa $\mathcal{A}$ contém subálgebras comutativas que são dadas por $\{x\}^{CC}$, onde $x \in \mathcal{A}$.

Proposição 2.31. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária e $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Então $x^{-1} \in \{x\}^{CC}$.

Demonstração. Seja $y \in \{x\}^C$. Por definição $xy = yx$. Multiplicando por x^{-1} os dois lados da igualdade anterior, chegamos na seguinte relação

$$x^{-1}(xy)x^{-1} = x^{-1}(yx)x^{-1}.$$

Equivalentemente,

$$yx^{-1} = x^{-1}y.$$

Logo $x^{-1} \in \{x\}^{CC}$. □

Na sequência, mostraremos que o conjunto dos elementos invertíveis de uma $\mathbb{F}$ -álgebra normada unitária $(\text{Inv}(\mathcal{A}))$ é um grupo topológico.

Definição 2.32. Um **grupo topológico** $G = (G, \cdot, \tau)$ é um espaço topológico (G, τ) onde a aplicação produto $: G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$ e aplicação inversa $: G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas. Neste caso, $G \times G$ está munido com a topologia produto (Veja (6, p. 86) para mais detalhes sobre a topologia produto).

Observação 2.33. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Vimos no Exemplo 2.19 que $(\mathcal{A} \times \mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$, é uma álgebra normada, onde

$$\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

No restante deste trabalho, sempre assumiremos que $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ está equipado com esta norma e é bem conhecido que a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_\infty$ coincide com a topologia produto. No caso que $\mathcal{A}$ é unitária, consideraremos $\text{Inv}(\mathcal{A})$ com a topologia induzida pela norma de $\mathcal{A}$.

Proposição 2.34. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. O produto em uma álgebra normada $\mathcal{A}$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ está munido com a topologia produto.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(z, w) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que para (x, y) em $\mathcal{A}$ com $\|(x, y) - (z, w)\| < \delta$, temos $\|xy - zw\| < \varepsilon$. Notemos

$$\begin{aligned} \|xy - zw\| &= \|(x - z)(y - w) + z(y - w) + (x - z)w\| \\ &\leq \|x - z\| \cdot \|y - w\| + \|z\| \cdot \|y - w\| + \|x - z\| \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

A partir da desigualdade acima, vemos que podemos assumir sem perda de generalidade que $z, w \neq 0$. Tomemos $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3\|z\|}, \frac{\varepsilon}{3\|w\|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\}$. Se $\|(x, y) - (z, w)\| < \delta$, então $\|x - z\| < \delta$ e $\|y - w\| < \delta$. Assim

$$\|x - z\| \cdot \|y - w\| < \delta^2 \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\begin{aligned} \|y - w\| \cdot \|z\| &< \delta \cdot \|z\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ \|x - z\| \cdot \|w\| &< \delta \cdot \|w\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|xy - zw\| < \varepsilon,$$

concluindo a continuidade do produto no ponto $(z, w) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Como (z, w) foi tomado arbitrariamente, isto conclui a demonstração. $\square$

A seguir apresentaremos um lema que nos ajudará a provar o próximo resultado.

Lema 2.35. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada unitária. Sejam $x, y \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, onde $\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Então*

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|x - y\|.$$

Demonstração. Para x, y como no enunciado, temos:

$$\begin{aligned} \|y^{-1}\| - \|x^{-1}\| &\leq \|y^{-1} - x^{-1}\| = \|y^{-1}(x - y)x^{-1}\| \leq \|y^{-1}\| \cdot \|x - y\| \cdot \|x^{-1}\| \leq \\ &\leq \|y^{-1}\| \cdot \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1} \cdot \|x^{-1}\| = \frac{1}{2}\|y^{-1}\|. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|y^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|.$$

Por outro lado,

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| = \|y^{-1}\| \cdot \|x - y\| \cdot \|x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\| \cdot \|x - y\| \cdot \|x^{-1}\| = 2\|x^{-1}\|^2 \cdot \|x - y\|.$$

E isto conclui a demonstração. $\square$

Proposição 2.36. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada com unidade. Então, a aplicação $\phi : \text{Inv}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Inv}(\mathcal{A})$, $x \mapsto x^{-1} = \phi(x)$ é um homeomorfismo topológico. Em particular, $\text{Inv}(\mathcal{A})$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Lembremos que um homeomorfismo topológico é uma aplicação entre espaços topológicos que é bijetora, contínua e com inversa contínua. O nosso objetivo agora é mostrar que a aplicação $\phi : \text{Inv}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Inv}(\mathcal{A})$ possui as propriedades desejadas.

A bijetividade da função ϕ segue da igualdade $(x^{-1})^{-1} = x$ para todo $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ e pela unicidade do inverso de um elemento - na verdade $\phi = \phi^{-1}$. Agora, fixemos $\varepsilon > 0$ e $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Em seguida, tomemos

$$\delta = \min \left\{ 2\|x^{-1}\|^{-1}, \frac{\varepsilon}{2\|x^{-1}\|^2} \right\}$$

. Daí, se $y \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ satisfaz $\|y - x\| < \delta$, então, pelo Lema 2.35, temos (estamos usando que $\|y - x\| < \delta \leq 2\|x^{-1}\|^{-1}$)

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|y - x\| < 2\|x^{-1}\|^2\delta \leq 2\|x^{-1}\|^2 \frac{\varepsilon}{2\|x^{-1}\|^2} = \varepsilon.$$

Dessa forma, concluímos então a continuidade da aplicação ϕ .

Por último, sabemos que $\text{Inv}(\mathcal{A})$ é um grupo (Veja Observação 2.27) e, pela Proposição 2.34, temos a continuidade da aplicação produto $(\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Em particular, a restrição do produto a $\text{Inv}(\mathcal{A}) \times \text{Inv}(\mathcal{A})$ será contínua. Assim, junto com a continuidade da aplicação ϕ , temos que $\text{Inv}(\mathcal{A})$ é um grupo topológico. □

Na sequência, dada uma álgebra normada $\mathcal{A}$, definiremos o que é o raio espectral de um elemento desta álgebra. Utilizando esse conceito, seremos capazes de apresentar um método para encontrar elementos invertíveis na álgebra (sendo esta unitária).

Definição 2.37. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e $x \in \mathcal{A}$. O **raio espectral** de x , denotado por $r(x)$, é definido da seguinte maneira:

$$r(x) = \inf \{ \|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n = 1, 2, \dots \}$$

Algumas vezes será mais interessante utilizar a seguinte caracterização do raio espectral:

Proposição 2.38. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e $x \in \mathcal{A}$. Então:*

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Pela definição de ínfimo de um conjunto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k(\varepsilon) = k \in \{1, 2, \dots\}$ tal que $\|x_k\|^{\frac{1}{k}} < r(x) + \varepsilon$.

Agora, fixemos k (como acima) e lembremos que qualquer inteiro positivo n pode ser escrito unicamente na forma $n = p(n)k + q(n)$, onde $p(n), q(n)$ são inteiros não negativos e $q(n) \leq k - 1$. Como $q(n)$ é limitado para todo n , temos que $\frac{q(n)}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, da relação

$$1 = \frac{p(n)k}{n} + \frac{q(n)}{n},$$

temos $\frac{p(n)k}{n} \rightarrow 1$ (ou equivalentemente $\frac{p(n)}{n} \rightarrow 1/k$) quando $n \rightarrow \infty$.

Por um lado,

$$r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{p(n)k+q(n)}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^k\|^{\frac{p(n)}{n}} \|x\|^{\frac{q(n)}{n}}.$$

Por outro lado, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\|x^k\|^{\frac{p(n)}{n}} \|x\|^{\frac{q(n)}{n}} \rightarrow \|x^k\|^{\frac{1}{k}} < r(x) + \varepsilon.$$

Consequentemente, $r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < r(x) + \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. □

Por fim, temos o seguinte resultado que correlaciona o raio espectral com o conceito de invertibilidade.

Teorema 2.39. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach unitária e $x \in \mathcal{A}$. Se $r(x) < 1$, então o elemento $(1 - x) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Além disso,*

$$(1 - x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n.$$

Demonstração. Escolha $\eta > 0$ tal que $r(x) < \eta < 1$. Sabemos, pela proposição anterior, que vale a seguinte igualdade

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \eta$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|$ converge, pois $\sum_{n \in \mathbb{N}} \eta^n$ é uma série geométrica com razão $\eta < 1$. Lembremos que em um espaço de Banach, toda da série absolutamente convergente, de fato, converge. Daí, podemos escrever $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = s \in \mathcal{A}$.

Agora, considere as somas parciais $s_n = 1 + x + \cdots + x^n$. Temos que $s_n \rightarrow s$ e $\|x^n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, temos $(1 - x)s_n = s_n(1 - x)$. Mais precisamente,

$$(1 - x)s_n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^n) = (1 - x^{n+1}).$$

Finalmente, pela continuidade do produto (Proposição 2.34), obtemos

$$(1 - x)s = 1 = s(1 - x).$$

Logo, $(1 - x)$ é invertível e sua inversa é dada por $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$. □

A seguir, apresentaremos um dos principais exemplos de álgebras de Banach desta dissertação.

Exemplo 2.40. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Podemos identificar uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathcal{A})$ com um operador em $L(\mathcal{A}^m)$ da seguinte maneira: Definimos $T_A : \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}^m$ como (no que segue $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{A}^m$)

$$T_A((x_1, \dots, x_m)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m \end{pmatrix}.$$

É imediato verificar a linearidade de T_A , ou seja, $T_A \in L(\mathcal{A}^m)$. Agora, mostraremos que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach unitária, então $M_m(\mathcal{A})$ pode ser vista como uma subálgebra fechada e unitária de $B(\mathcal{A}^m)$ - isto significa que $M_m(\mathcal{A})$ possui a mesma unidade de $L(\mathcal{A}^m)$.

Fixemos $A \in M_m(\mathcal{A})$. Começaremos provando que T_A é um operador limitado. Vimos, no Exemplo 2.19, que a norma adotada em $\mathcal{A}^n$ é a norma $\|\cdot\|_\infty$, mas também sabemos que esta norma é equivalente à norma

$$\|x\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$$

(entretanto $\|\cdot\|_1$ não é uma norma álgebra). Portanto, podemos demonstrar a limitação de T_A usando a norma $\|\cdot\|_1$. Notemos que:

$$\|T_A(x)\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^m a_{1k}x_k \right\| + \cdots + \left\| \sum_{k=1}^m a_{mk}x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|a_{1k}\| \cdot \|x_k\| + \cdots + \sum_{k=1}^m \|a_{mk}\| \cdot \|x_k\|.$$

Seja $x \in \mathcal{A}^m$ tal que $1 = \|x\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_m\|$. Assim, temos $\|x_i\| \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, m$. Logo,

$$\|T_A(x)\|_1 \leq \sum_{k=1}^m \|a_{1k}\| + \cdots + \sum_{k=1}^m \|a_{mk}\| = \sum_{i,j=1}^m \|a_{ij}\| = C,$$

onde C é uma constante que depende apenas da matriz A .

Neste ponto, vemos que a aplicação $\psi : M_m(\mathcal{A}) \rightarrow B(\mathcal{A}^m)$ tal que $\psi(A) = T_A$ está bem definida. Esta aplicação é um homomorfismo de álgebras. De fato, dados $A, B \in M_m(\mathcal{A})$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ temos:

- Linearidade: $\psi(A + \alpha B) = T_{A+\alpha B} = T_A + \alpha T_B = \psi(A) + \alpha \psi(B)$;
- Multiplicatividade: $\psi(AB) = T_{AB} = T_A \circ T_B = \psi(A) \circ \psi(B)$, pois se $AB = (c_{ij})$ onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$ temos

$$\begin{aligned} T_{AB}((x_1, \dots, x_m)) &= \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^m c_{1p}x_p \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^m c_{mp}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^m (\sum_{k=1}^m a_{1k}b_{kp})x_p \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^m (\sum_{k=1}^m a_{mk}b_{kp})x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} \left(\sum_{p=1}^m b_{kp}x_p \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{mk} \left(\sum_{p=1}^m b_{kp}x_p \right) \end{pmatrix} = T_A(T_B((x_1, \dots, x_m))). \end{aligned}$$

Como $\psi : M_m(\mathcal{A}) \rightarrow B(\mathcal{A}^m)$ é um homomorfismo, podemos inferir a partir da Proposição 2.11 que $\psi(M_m(\mathcal{A}))$ é uma subálgebra de $B(\mathcal{A}^m)$.

No restante deste exemplo, faremos uso do fato que a álgebra $\mathcal{A}$ é unitária. Afirmamos que ψ é injetora. Suponhamos que $T_A = T_B$. Calculando as imagens do vetor $(1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{A}^m$ com respeito as aplicações T_A e T_B , temos

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}) = T_A((1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0)) = T_B((1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0)) = (b_{11}, \dots, b_{m1}).$$

Consequentemente, $a_{i1} = b_{i1}$ para todo $i = 1, \dots, m$. Repetindo o processo com os vetores $((0, 1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0)), \dots, (0, \dots, 0, 1_{\mathcal{A}})$, chegamos a conclusão que $A = B$. Dessa maneira podemos fazer uma identificação, denotando $A = T_A$ para cada $A \in M_m(\mathcal{A})$. Assim, podemos ver $M_m(\mathcal{A})$ como uma subálgebra normada de $B(\mathcal{A}^m)$ com a norma

$$\|A\| = \|\psi(A)\| = \|T_A\| = \sup\{\|T_A(x)\|_{\infty} : x \in \mathcal{A}^m, \|x\|_{\infty} = 1\}.$$

Em particular, podemos identificar a unidade (operador identidade) I de $B(\mathcal{A}^m)$ com a matriz $I = (c_{ij})$, onde $c_{ii} = 1_{\mathcal{A}}$ ($i = 1, \dots, m$) e $c_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Para finalizar o exemplo, observe que a álgebra $M_m(\mathcal{A})$ é completa na norma estabelecida. Seja $(A_n) = (a_{ij}^{(n)})$ uma sequência de Cauchy em $M_m(\mathcal{A})$. Mostraremos que existe $A \in M_m(\mathcal{A})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Como (A_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n, p \geq n(\varepsilon)$ vale

$$\|T_{A_n - A_p}\| = \|A_n - A_p\| < \varepsilon.$$

Tomando $x = (1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0)$, temos $\|x\|_{\infty} = \|1_{\mathcal{A}}\| = 1$. Então, pela desigualdade anterior,

$$\|(T_{A_n} - T_{A_p})(x)\|_{\infty} = \|T_{A_n - A_p}(x)\|_{\infty} \leq \|T_{A_n - A_p}\| \cdot \|x\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$(T_{A_n} - T_{A_p})(x) = (a_{11}^{(n)} - a_{11}^{(p)}, \dots, a_{m1}^{(n)} - a_{m1}^{(p)}).$$

Daí, pela desigualdade acima, temos, para todo $i = 1, \dots, m$

$$\|a_{i1}^{(n)} - a_{i1}^{(p)}\| \leq \|(T_{A_n} - T_{A_p})(x)\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Podemos repetir o processo com os vetores $(0, 1_{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1_{\mathcal{A}})$, obtendo assim o seguinte (para todo $i, j = 1, \dots, m$, e $n, p \geq n(\varepsilon)$)

$$\|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(p)}\| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Em outras palavras, mostramos que as sequências $(a_{ij}^{(n)})$ são de Cauchy em $\mathcal{A}^m$. Como $\mathcal{A}^m$ é um espaço de Banach, existe $a_{ij} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}.$$

Finalmente, seja $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathcal{A})$. Mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, concluindo assim a completude da álgebra. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que $\|x\|_\infty = 1$. Observemos que:

$$\begin{aligned} \|T_{A-A_n}(x)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\| \sum_{j=1}^m (a_{ij} - a_{ij}^{(n)}) x_j \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|a_{ij} - a_{ij}^{(n)}\| \cdot \|x_j\| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|a_{ij} - a_{ij}^{(n)}\|. \end{aligned}$$

Fixando $n \geq n(\varepsilon)$ e fazendo $p \rightarrow \infty$ na desigualdade (2.2) chegamos em

$$\|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}\| \leq \varepsilon.$$

Donde,

$$\|T_{A-A_n}(x)\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \|a_{ij} - a_{ij}^{(n)}\| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \varepsilon = m\varepsilon.$$

E isto conclui a demonstração.

Observação 2.41. Com um processo análogo ao do exemplo anterior, podemos mostrar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach unitária, então o conjunto $UT_m(\mathcal{A})$ formado pelas matrizes triangulares superiores $m \times m$ com entradas em $\mathcal{A}$ pode ser visto como uma subálgebra (fechada e unitária) de $B(\mathcal{A}^m)$.

2.3 Quasi-Inversas

Vimos na última seção algumas propriedades a respeito das álgebras normadas unitárias. Nesta seção, veremos que dada uma álgebra normada sem unidade $\mathcal{A}$, existe uma álgebra $\tilde{\mathcal{A}}$, denominada a unitização de $\mathcal{A}$, de forma que a álgebra $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a uma subálgebra (fechada) de $\tilde{\mathcal{A}}$. Utilizando tal unitização, poderemos definir de uma forma natural conceitos semelhantes aos vistos para as álgebras unitárias para as álgebras sem unidade de forma que também possuam propriedades e resultados de um certo ponto de vista semelhantes aos do caso unitário.

Definição 2.42. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. A **unitização** de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{F}$, denotada por $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathbb{F}$, é uma álgebra normada consistindo do conjunto $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$ munido das seguintes operações:

1. Soma vetorial: $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$ para todo $(x, \alpha), (y, \beta) \in \tilde{\mathcal{A}}$.
2. Multiplicação por escalar $\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta \alpha)$ para todo $(x, \alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}$ e $\beta \in \mathbb{F}$.
3. $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)$ para todo $(x, \alpha), (y, \beta) \in \tilde{\mathcal{A}}$.
4. Norma: $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$ para todo $(x, \alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}$, onde $|\alpha|$ representa o valor absoluto no número complexo α .

Sabemos que o produto cartesiano de espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo é um espaço vetorial normado. A norma deste produto cartesiano pode ser tomada como a norma da soma como acima (ou a norma do supremo ou a norma Euclidiana visto que são todas equivalentes). Assim, $\tilde{\mathcal{A}}$ é um espaço vetorial normado com as operações de soma e multiplicação por escalar e a norma acima definidos. Verificaremos agora que a terceira operação é de fato um produto e que a norma definida acima é uma norma-álgebra (ambos em $\tilde{\mathcal{A}}$). De fato, fixemos $(x, \alpha), (y, \beta), (z, \theta)$ em $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\gamma \in \mathbb{F}$. Temos:

- O produto é associativo:

$$\begin{aligned}
 [(x, \alpha)(y, \beta)](z, \theta) &= (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)(z, \theta) \\
 &= ((xy + \alpha y + \beta x)z + (\alpha \beta)z + \theta(xy + \alpha y + \beta x), (\alpha \beta)\theta) \\
 &= ((xy)z + (\alpha y)z + (\beta x)z + \alpha(\beta z) + \theta(xy) + \theta(\alpha y) + \theta(\beta x), \alpha(\beta \theta)) \\
 &= (x(yz + \beta z + \theta y) + \alpha(yz + \beta z + \theta y) + (\beta \theta)x, \alpha(\beta \theta)) \\
 &= (x, \alpha)[(yz + \beta z + \theta y, \beta \theta)] = (x, \alpha)[(y, \beta)(z, \theta)].
 \end{aligned}$$

- O produto é distributivo:

$$\begin{aligned}
 (x, \alpha)[(y, \beta) + (z, \theta)] &= (x, \alpha)[(y + z, \beta + \theta)] \\
 &= (x(y + z) + (\beta + \theta)x + \alpha(y + z), \alpha(\beta + \theta)) \\
 &= (xy + xz + \beta x + \theta x + \alpha y + \alpha z, \alpha \beta + \alpha \theta) \\
 &= (xy + \beta x + \alpha y, \alpha \beta) + (xz + \theta x + \alpha z, \alpha \theta) \\
 &= (x, \alpha)(y, \beta) + (x, \alpha)(z, \theta).
 \end{aligned}$$

A distributividade pela direita é análoga.

- Compatibilidade dos produtos:

$$\begin{aligned} [\gamma(x, \alpha)](y, \beta) &= (\gamma x, \gamma \alpha)(y, \beta) = ((\gamma x)y + \beta(\gamma x) + (\gamma \alpha)y, (\gamma \alpha)\beta) \\ &= (\gamma(xy) + \gamma(\beta x) + \gamma(\alpha y), \gamma(\alpha\beta)) = (\gamma(xy + \beta x + \alpha y), \gamma(\alpha\beta)) \\ &= \gamma(xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta) = \gamma[(x, \alpha)(y, \beta)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\gamma(x, \alpha)](y, \beta) &= (\gamma x, \gamma \alpha)(y, \beta) = ((\gamma x)y + \beta(\gamma x) + (\gamma \alpha)y, (\gamma \alpha)\beta) \\ &= (x(\gamma y) + (\gamma \beta)x + \alpha(\gamma y), \alpha(\gamma \beta)) \\ &= (x, \alpha)[(\gamma y, \gamma \beta)] = (x, \alpha)[\gamma(y, \beta)]. \end{aligned}$$

- $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$ é uma norma álgebra em $\tilde{\mathcal{A}}$.

$$\begin{aligned} \|(x, \alpha)(y, \beta)\| &= \|(xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)\| = \|xy + \alpha y + \beta x\| + |\alpha\beta| \leq \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\| + |\alpha| \cdot \|y\| + |\beta| \cdot \|x\| + |\alpha| \cdot |\beta| \\ &= (\|x\| + |\alpha|)(\|y\| + |\beta|) \\ &= \|(x, \alpha)\| \cdot \|(y, \beta)\|. \end{aligned}$$

O próximo resultado fará jus ao termo unitização.

Proposição 2.43. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra normada e $\tilde{\mathcal{A}}$ sua unitização. Então $\tilde{\mathcal{A}}$ possui unidade $(0, 1)$, onde $\|(0, 1)\| = 1$. Além disso, a aplicação $T : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ definida por $T(x) = (x, 0)$ é um homomorfismo isométrico de álgebras.*

Demonstração. Fixemos $(x, \alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Claramente $\|(0, 1)\| = \|0\| + |1| = 1$ e temos

$$(0, 1)(x, \alpha) = (0x + 0\alpha + 1x, 1\alpha) = (x, \alpha) = (x, \alpha)(0, 1).$$

Agora, consideremos a aplicação $T : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $T(x) = (x, 0)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. A injetividade da função T segue diretamente da igualdade de elementos em produtos cartesianos. A aplicação é linear, pois dados $x, y \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos $T(x + \alpha y) = (x + \alpha y, 0) = (x, 0) + \alpha(y, 0) = T(x) + \alpha T(y)$. Analogamente, vemos que T é um homomorfismo pois $T(xy) = (xy, 0) = (x, 0)(y, 0) = T(x)T(y)$. Assim, pela Proposição 2.11, temos que $T(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\tilde{\mathcal{A}}$. Finalmente,

$$\|T(x)\| = \|(x, 0)\| = \|x\| + |0| = \|x\|,$$

de onde concluímos que T é uma isometria. □

Observação 2.44. Este processo de unitização pode ser aplicado em qualquer $\mathbb{F}$ -álgebra $\mathcal{A}$ (abrindo-se mão de uma norma).

A seguir, veremos uma maneira de induzir uma noção de invertibilidade em uma álgebra sem unidade através da sua unitização. Essas definições ficarão mais claras sob a ótica da Proposição 2.48.

Definição 2.45. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. O **quasi-produto** $\circ$ de dois elementos $x, y \in \mathcal{A}$ é definido como $x \circ y = x + y - xy$. Neste caso, temos $x \circ 0 = 0 \circ x = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Além disso, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Definição 2.46. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e $x \in \mathcal{A}$. Dizemos que um elemento y (respectivamente $z \in \mathcal{A}$) de $\mathcal{A}$ é um **quasi-inverso** à direita (respectivamente à esquerda) de x quando $x \circ y = 0$ (respectivamente $z \circ x = 0$). Um elemento $w = x^\circ \in \mathcal{A}$ é um **quasi-inverso** do elemento x quando w é simultaneamente um quasi-inverso à direita e à esquerda de x . No caso que x possui um quasi-inverso, dizemos que x é um elemento **quasi-invertível** (ou quasi-regular). Os elementos que não são quasi-invertíveis são chamados **quasi-singulares**. O conjunto formado pelos elementos quasi-invertíveis de $\mathcal{A}$ será denotado por $\text{q-Inv}(\mathcal{A})$, enquanto o conjunto formado pelos elementos quasi-singulares de $\mathcal{A}$ será representado por $\text{q-Sing}(\mathcal{A})$.

Observação 2.47. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Agora, suponhamos que $x \in \mathcal{A}$ seja um elemento que possui uma quasi-inversa à direita z e uma quasi-inversa à esquerda y . Então $x^\circ = y = z$ e, portanto, x é quasi-invertível. Em particular, x° é único. De fato, temos que $y \circ x = 0 = x \circ z$. Assim, $(y \circ x) \circ z = z$, e $y \circ (x \circ z) = y$. Logo, pela associatividade do quasi-produto temos $z = (y \circ x) \circ z = y \circ (x \circ z) = y$.

A seguir, veremos a relação intrínseca entre os elementos quasi-invertíveis de uma $\mathbb{F}$ -álgebra $\mathcal{A}$ com os elementos invertíveis de sua unitização $\tilde{\mathcal{A}}$. Além disso, veremos como o quasi-produto se comporta em uma álgebra com unidade.

Proposição 2.48. *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e $x \in \mathcal{A}$. Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) Suponhamos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária. Então $x \in \mathfrak{q} - \text{Inv}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $(1 - x)$ tem inverso $(1 - x^\circ)$.
- (ii) $x \in \mathfrak{q} - \text{Inv}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $(0, 1) - (x, 0)$ tem inverso $(0, 1) - (x^\circ, 0)$ em $\tilde{\mathcal{A}}$.

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja unitária. Observemos (para cada $z \in \mathcal{A}$):

$$(1 - x)(1 - z) = 1 - x - z + xz = 1 - (x \circ z).$$

Agora, se assumimos que x tem quasi-inverso x° , então $(1 - x)(1 - x^\circ) = 1$ donde $(1 - x)$ tem inverso $(1 - x^\circ)$. Reciprocamente, se $(1 - x)$ tem inverso $(1 - y)$, temos $x \circ y = 0$, isto é, x tem quasi-inverso y .

Prova de (ii). Como $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma álgebra com unidade $(0, 1)$, temos (pela parte (i)) que $(0, 1) - (x, 0)$ tem inverso $(0, 1) - (y, 0)$ se, e somente se, $(x, 0)$ tem quasi-inverso $(y, 0)$. Com esta informação em mãos, chegamos na seguinte igualdade

$$(0, 0) = (x, 0) \circ (y, 0) = (x, 0) + (y, 0) - (x, 0)(y, 0) = (x + y - xy, 0) = (x \circ y, 0).$$

Logo $(x, 0)$ tem quasi-inverso $(y, 0)$ se, e somente se, x tem quasi-inverso y em $\mathcal{A}$. □

Podemos então demonstrar um resultado análogo ao Teorema 2.39 para quasi-invertibilidade:

Teorema 2.49. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e $x \in \mathcal{A}$, onde $r(x) < 1$. Então x é quasi-invertível. Além disso,*

$$x^\circ = - \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que $r(x, 0) < 1$, pois

$$r(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x, 0)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x^n, 0)\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x) < 1.$$

Pelo Teorema 2.39, temos que $(0, 1) - (x, 0)$ tem inverso

$$(0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (x, 0)^n = (0, 1) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n, 0 \right).$$

Pela proposição anterior, x tem quasi-inverso x° pois $(0, 1) - (x, 0)$ tem inverso $(0, 1) - (x^\circ, 0)$, onde $x^\circ = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. $\square$

2.4 O espectro de um elemento de uma álgebra normada complexa

Nesta seção, apresentaremos um conceito bastante importante dentro da teoria das álgebras de Banach e teoria de Operadores: o conceito de espectro de um elemento de uma álgebra normada $\mathcal{A}$, o espectro de um elemento será utilizado como ferramenta para a obtenção de alguns resultados como, por exemplo, o famoso Teorema de Gelfand-Mazur (Teorema 2.58)

Ao longo desta seção $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definição 2.50. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra e $x \in \mathcal{A}$. O **espectro** do elemento x (denotado por $\text{Sp}(x) = \text{Sp}(\mathcal{A}, x)$) é definido da seguinte maneira:

- Se $\mathcal{A}$ é unitária, então $\text{Sp}(\mathcal{A}, x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - x) \in \text{Sing}(\mathcal{A})\}$;
- Se $\mathcal{A}$ não tem unidade, então $\text{Sp}(\mathcal{A}, x) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{\lambda}x \in \mathfrak{q} - \text{Sing}(\mathcal{A})\}$.

Usaremos apenas $\text{Sp}(x)$ quando não houver dúvida sobre a álgebra $\mathcal{A}$ em questão.

No lema a seguir, mostraremos a relação entre $\text{Sp}(\mathcal{A}, x)$ e $\text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, x)$ para cada $x \in \mathcal{A}$.

Lema 2.51. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra sem unidade e $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathbb{C}$ sua unitização. Então, $\text{Sp}(\mathcal{A}, x) = \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0))$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Mostraremos as seguintes equivalências (para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

$$\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{A}, x) \Leftrightarrow 1 \in \text{Sp}\left(\mathcal{A}, \frac{x}{\lambda}\right) \Leftrightarrow 1 \in \text{Sp}\left(\tilde{\mathcal{A}}, \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right)\right) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0)).$$

Para verificar a primeira equivalência, aplicamos diretamente a definição de espectro para álgebras sem unidade. Daí,

$$\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{A}, x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\lambda}x}{1} = \frac{1}{\lambda}x \in \mathfrak{q} - \text{Sing}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow 1 \in \text{Sp}\left(\mathcal{A}, \frac{x}{\lambda}\right).$$

Para provar a segunda equivalência, utilizaremos a definição de espectro para álgebras unitárias. Assim, $1 \in \text{Sp}\left(\tilde{\mathcal{A}}, \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right)\right)$ se, e somente se, $1 - \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$. Pela Proposição 2.48 segue que $1 - \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$ se, e somente se, $\frac{x}{\lambda} \in \mathfrak{q} - \text{Sing}(\mathcal{A})$. E pelo observado acima, $\frac{x}{\lambda} \in \mathfrak{q} - \text{Sing}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $1 \in \text{Sp}\left(\mathcal{A}, \frac{x}{\lambda}\right)$.

Agora, mostraremos a terceira e última equivalência. Por definição, $\lambda \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0))$ se, e somente se, $\lambda - (x, 0) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$. Por outro lado, pela Observação 2.28, podemos concluir que $\lambda - (x, 0) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$ se, e somente se $1 - \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right) = \frac{1}{\lambda}(\lambda - (x, 0)) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$. A última parte ocorre se, e somente se, $1 \in \text{Sp}\left(\tilde{\mathcal{A}}, \left(\frac{x}{\lambda}, 0\right)\right)$.

Finalmente, consideremos o caso $\lambda = 0$. Por definição, $0 \in \text{Sp}(x, \mathcal{A})$. Além disso, $(x, 0) \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{A}})$, caso contrário existiria (y, α) tal que $(xy + \alpha x, 0) = (x, 0)(y, \alpha) = (0, 1)$, chegando a uma contradição. Assim, $0 \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0))$. Logo, podemos concluir que $\text{Sp}(\mathcal{A}, x) = \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0))$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

□

Observação 2.52. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra unitária, $x \in \mathcal{A}$ e D um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{C}$. Dado p em $P(D)$ (a álgebra de todas as funções polinomiais complexas em D , veja Exemplo 2.23), denotaremos por $p(x)$ o elemento de $\mathcal{A}$ definido da seguinte forma:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n,$$

onde $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ para todo $z \in D$.

Notemos que esta função está bem definida, pois cada elemento de $P(D)$ é caracterizado por um conjunto único de coeficientes. De fato, se tivéssemos $p(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ para todo $z \in D$, teríamos a igualdade

$$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)z + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)z^n = 0.$$

Como um polinômio de grau n tem no máximo n raízes e todos os infinitos pontos de D seriam raízes do polinômio acima, precisaríamos que $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Assim, além de bem definida, a aplicação $\phi : P(D) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\phi(p) = p(x)$ é um homomorfismo. Neste ponto, desejamos estender esse homomorfismo à um

homomorfismo de $R(D)$ em $\mathcal{A}$. Agora, veremos que uma condição necessária para que esta extensão exista é dada pela seguinte inclusão: $\text{Sp}(x) \subset D$. De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D$ e $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ para cada $z \in D$. Claramente $f \in R(D)$. Além disso,

$$f(z)(\lambda - z) = (\lambda - z)f(z) = 1.$$

Daí, se $\tilde{\phi}$ é a extensão de ϕ à $R(D)$ e aplicando esta extensão à equação anterior, obtemos:

$$f(x)(\lambda - x) = (\lambda - x)f(x) = 1_{\mathcal{A}}.$$

Logo $(\lambda - x) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Em particular, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x)$. Portanto $\text{Sp}(x) \subset D$ (Veja Proposição 2.55 para uma resposta completa sobre a existência de tal extensão).

O próximo resultado fornecerá uma relação entre $\text{Sp}(p(x))$ e $\text{Sp}(x)$, onde $p \in P(D)$ e D é uma vizinhança aberta e não vazia de $\text{Sp}(x)$.

Proposição 2.53. *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra unitária, $x \in \mathcal{A}$ e D uma vizinhança aberta não vazia de $\text{Sp}(x)$. Se $p \in P(D)$ é não constante, então*

$$\text{Sp}(p(x)) = \{p(z) : z \in \text{Sp}(x)\}.$$

Demonstração. Sejam D e p como no enunciado. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda - p(z)$ é um polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$. Assim, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda - p(z) = \beta(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \cdots (\alpha_n - z) \quad \text{para cada } z \in D.$$

Usando o homomorfismo de $P(D)$ em $\mathcal{A}$, temos

$$\lambda - p(x) = \beta(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \cdots (\alpha_n - x).$$

Por hipótese, p não é constante, então $\beta \neq 0$. Assim, $\lambda - p(x)$ é singular se, e somente se, $(\alpha_k - x)$ é singular para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Em outras palavras, $\lambda \in \text{Sp}(p(x))$ se, e somente se, $\alpha_k \in \text{Sp}(x)$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo $\lambda \in \text{Sp}(p(x))$ se, e somente se, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda = p(\alpha_k)$ com $\alpha_k \in \text{Sp}(x)$.

□

Observação 2.54. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra unitária, $x \in \mathcal{A}$, D uma vizinhança aberta e não vazia de $\text{Sp}(x)$ e $f \in R(D)$. Denotaremos $f = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in P(D)$ com $q(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Pela Proposição 2.53 $0 \notin \text{Sp}(q(x))$. Consequentemente, $(0 - q(x)) = -q(x) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Agora podemos definir $f(x)$ de uma forma bastante natural (veja Observação 2.52 para efeito de comparações):

$$f(x) = p(x)q(x)^{-1} = \phi(p)\phi(q)^{-1}.$$

Neste ponto, vamos verificar que a definição de $f(x)$ independe da escolhas dos polinômios $p, q \in P(D)$. De fato, se $f = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, temos $q_2 p_1 = p_2 q_1$. Aplicando o homomorfismo de $\phi : P(D) \rightarrow \mathcal{A}$ chegamos na igualdade

$$q_2(x)p_1(x) = p_2(x)q_1(x).$$

Como $q_1(x)$ e $q_2(x)$ são invertíveis, obtemos:

$$p_1(x)q_1(x)^{-1} = q_2(x)^{-1}p_2(x).$$

Para concluir, lembremos que $p(x)q(x) = q(x)p(x)$ para $p, q \in P(D)$ quaisquer. Portanto, $p(x) \in \{q(x)\}^C$. Por outro lado, como $q(x) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, temos, pela Proposição 2.31, que $q(x)^{-1} \in \{q(x)\}^{CC}$, que garante que $q(x)^{-1}$ e $p(x)$ comutarão. Logo,

$$p_1(x)q_1(x)^{-1} = p_2(x)q_2(x)^{-1},$$

como queríamos.

As ideias apresentadas acima podem ser organizadas da seguinte forma:

Proposição 2.55. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra unitária, $x \in \mathcal{A}$ e D uma vizinhança aberta não vazia de $\text{Sp}(x)$. A aplicação $\psi : R(D) \rightarrow \mathcal{A}$ com

$$\psi(f) = \psi(p/q) = f(x) = p(x)q(x)^{-1} = \phi(p)\phi(q)^{-1}$$

é um homomorfismo de $R(D)$ em $\mathcal{A}$ que estende o homomorfismo de $\phi : P(D) \rightarrow \mathcal{A}$. Além disso,

$$\text{Sp}(f(x)) = \{f(z) \mid z \in \text{Sp}(x)\}$$

para $f \in R(D)$ não constante.

Demonstração. Pela observação anterior, sabemos que a aplicação $\Psi : R(D) \rightarrow \mathcal{A}$ está bem definida (além disso esta aplicação estende o homomorfismo de $P(D)$ em $\mathcal{A}$). Agora, mostraremos que ψ é de fato um homomorfismo. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P(D)$, onde $q_1(z), q_2(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Consideremos

$$f = \frac{p_1}{q_1}, g = \frac{p_2}{q_2} \in R(D).$$

- Linearidade:

$$\begin{aligned} \psi(f + \alpha g) &= \psi\left(\frac{p_1}{q_1} + \alpha \frac{p_2}{q_2}\right) = \psi\left(\frac{p_1 q_2 + \alpha p_2 q_1}{q_1 q_2}\right) \\ &= \phi(p_1 q_2 + \alpha p_2 q_1) \phi(q_1 q_2)^{-1} \\ &= [\phi(p_1) \phi(q_2) + \alpha \phi(p_2) \phi(q_1)] [\phi(q_1) \phi(q_2)]^{-1} \\ &= \phi(p_1) \phi(q_1)^{-1} + \alpha \phi(p_2) \phi(q_2)^{-1} \\ &= \psi(f) + \alpha \psi(g). \end{aligned}$$

- Multiplicatividade:

$$\begin{aligned} \psi(fg) &= \psi\left(\frac{p_1}{q_1} \frac{p_2}{q_2}\right) = \phi(p_1 p_2) \phi(q_1 q_2)^{-1} = \phi(p_1) \phi(p_2) [\phi(q_1) \phi(q_2)]^{-1} = \\ &= p_1(x) q_1(x)^{-1} p_2(x) q_2(x)^{-1} = \psi(f) \psi(g). \end{aligned}$$

A aplicação ψ é uma extensão de ϕ , pois tomando $f \in P(D)$ temos

$$\psi(f) = \psi\left(\frac{f}{1_{\mathcal{A}}}\right) = f(x) 1_{\mathcal{A}}^{-1} = f(x) = \phi(f).$$

Finalmente, provaremos que

$$\text{Sp}(f(x)) = \{f(z) : z \in \text{Sp}(x)\},$$

para $f = p/q \in R(D)$ não constante. De fato, notemos que:

$$\lambda - f(z) = \lambda - \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\lambda q(z) - p(z)}{q(z)}.$$

Como $\lambda q(z) - p(z)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ de grau maior ou igual a 1, existem $0 \neq \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\lambda q(z) - p(z) = \beta(\alpha_1 - z) \cdots (\alpha_n - z).$$

Assim,

$$\lambda - f(z) = \frac{\beta(\alpha_1 - z) \cdots (\alpha_n - z)}{q(z)}.$$

Aplicando o homomorfismo $\psi : R(D) \rightarrow \mathcal{A}$, obtemos:

$$\lambda - f(x) = \beta(\alpha_1 - x) \cdots (\alpha_n - x) q(x)^{-1}.$$

A conclusão agora segue os mesmos passos como no final da demonstração da Proposição 2.53.

□

A seguir veremos que o espectro de um elemento (contido em uma álgebra normada) nunca é vazio e, na verdade, existe uma relação entre o espectro deste elemento e o seu raio espectral.

Teorema 2.56. *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada, $x \in \mathcal{A}$. Então, existe um número complexo $\lambda \in \text{Sp}(x)$ tal que $|\lambda| \geq r(x)$.*

Demonstração. Inicialmente, lembremos que se $\mathcal{A}$ não é unitária, temos, pelo Lema 2.51 que $\text{Sp}(\mathcal{A}, x) = \text{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}, (x, 0))$ onde $\tilde{\mathcal{A}}$ é a unitização de $\mathcal{A}$. Além disso, como a aplicação $T : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, definida por $T(y) = (y, 0)$, é um isomorfismo isométrico, temos a igualdade $r(x) = r(x, 0)$ (Proposição 2.38). Por essa razão, podemos assumir sem perda de generalidade que a álgebra $\mathcal{A}$ é unitária. A demonstração será dividida em dois casos:

Caso 1: $r(x) = 0$.

Mostraremos que $0 \in \text{Sp}(x)$. De fato, suponhamos que $0 \notin \text{Sp}(x)$. Neste caso, $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, na verdade $x^n \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x^n (x^{-1})^n = 1_{\mathcal{A}}.$$

Logo

$$\|x^n\| \cdot \|x^{-1}\|^n \geq \|1_{\mathcal{A}}\| = 1 > 0.$$

Assim,

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \|x^{-1}\|^{-1} > 0.$$

Daí,

$$r(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^*\} \geq \|x^{-1}\|^{-1} > 0.$$

Dessa forma, $r(x) > 0$, um absurdo. Consequentemente, concluímos que $0 \in \text{Sp}(x)$ sempre que $r(x) = 0$.

Caso 2: $r(x) > 0$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $r(x) = 1$. De fato, se $r(x) > 0$, podemos definir $y = r(x)^{-1}x$. Mais uma vez pela Proposição 2.38, temos:

$$r(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(r(x)^{-1}x)^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x)^{-1}r(x) = 1.$$

Agora, se temos a validade do resultado para $r(y) = 1$, sabemos que existe $\lambda \in \text{Sp}(y)$ com $|\lambda| \geq 1 = r(y)$. Como $\lambda \in \text{Sp}(y)$, temos que $\lambda - y \in \text{Sing}(\mathcal{A})$ e, dessa forma, temos $\lambda - y = \lambda - r(x)^{-1}x \in \text{Sing}(\mathcal{A})$. Por outro lado, sabemos, pela Observação 2.28, que $\lambda r(x) - x \in \text{Sing}(\mathcal{A})$. Daí concluímos que $\lambda r(x) \in \text{Sp}(x)$ e

$$|\lambda r(x)| = |\lambda| \cdot |r(x)| \geq r(x).$$

Pelo exposto acima, podemos assumir que $r(x) = 1$. Suponhamos, por absurdo, que existe $\eta > 1$ tal que

$$(E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq \eta\}) \cap \text{Sp}(x) = \emptyset.$$

Dado $z \in E$, temos que $z \notin \text{Sp}(x)$ e, portanto, $z - x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Mostraremos que a aplicação $E \rightarrow \mathcal{A}$, $z \mapsto z(z - x)^{-1} = z1_{\mathcal{A}}(z1_{\mathcal{A}} - x)^{-1}$, é contínua. De fato, sabemos que $z \cdot 1_{\mathcal{A}}$ é invertível, pois $(z \cdot 1_{\mathcal{A}})(z^{-1} \cdot 1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}$. Assim, pela Proposição 2.36 (que garante a continuidade da aplicação inversa), e pela continuidade das demais operações da álgebra $\mathcal{A}$, podemos inferir que a aplicação $z \cdot 1_{\mathcal{A}} \mapsto z \cdot 1_{\mathcal{A}}(z \cdot 1_{\mathcal{A}} - x)^{-1}$ é contínua e sua imagem está contida em $\text{Inv}(\mathcal{A})$. Além disso, pela propriedade de Heine-Borel E é compacto em $\mathbb{C}$ donde temos a continuidade uniforme da aplicação $z \mapsto z(z - x)^{-1}$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\beta, \mu \in E$ satisfazem $|\beta - \mu| < \delta$, então

$$\|\beta(\beta - x)^{-1} - \mu(\mu - x)^{-1}\| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Agora, sejam n um inteiro positivo e $w_1, \dots, w_n$ os zeros do polinômio $z^n - 1$. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$, temos a seguinte identidade elementar:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - w_k^{-1}z} = \frac{1}{1 - z^n}.$$

Fixemos $\beta \in E$. Tomando $\beta^{-1}z$ no lugar de z na identidade anterior, obtemos

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - w_k^{-1} \beta^{-1} z} = \frac{1}{1 - \beta^{-n} z^n}. \quad (2.4)$$

Em seguida, consideremos o conjunto aberto $D = \mathbb{C} \setminus E$. Da condição $E \cap \text{Sp}(x) = \emptyset$, vemos que $\text{Sp}(x) \subset D$. Em particular, D é uma vizinhança aberta não vazia de $\text{Sp}(x)$. Notemos ainda que os polos das funções racionais que aparecem na Equação 2.4 não estão em D , pois se $z = w_k \beta$, então

$$1 \leq |\beta w_k| = |\beta| \cdot |w_k| = |\beta| \leq \eta,$$

ou seja, $\beta w_k \in E$. Dessa maneira, tomando $z \in D$, temos que a Equação 2.4 é composta por funções racionais (em $R(D)$). Assim, estamos nas hipóteses da Proposição 2.55, portanto podemos aplicar o homomorfismo $f \mapsto f(x)$ de $R(D)$ em $\mathcal{A}$ em cada lado da equação (2.4). Daí, concluímos que, para qualquer $\beta \in E$, vale a seguinte relação:

$$C_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - w_k^{-1} \beta^{-1} x} = \frac{1}{1 - \beta^{-n} x^n}. \quad (2.5)$$

Reescrevendo a expressão de $C_n(\beta)$

$$\begin{aligned} C_n(\beta) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - w_k^{-1} \beta^{-1} x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - w_k^{-1} \beta^{-1} x)^{-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{w_k \beta}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \beta (w_k \beta - x)^{-1}. \end{aligned}$$

Dados $\beta, \mu \in E$, vimos que $\beta w_k, \mu w_k \in E$. Além disso, se $|\beta - \mu| < \delta$, então

$$|\beta w_k - \mu w_k| = |\beta - \mu| \cdot |w_k| = |\beta - \mu| < \delta.$$

Portanto, pela Desigualdade 2.3, temos:

$$||\beta w_k (\beta w_k - x)^{-1} - \mu w_k (\mu w_k - x)^{-1}|| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned} ||C_n(\beta) - C_n(\mu)|| &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \beta (w_k \beta - x)^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \mu (w_k \mu - x)^{-1} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \beta (w_k \beta - x)^{-1} - w_k \mu (w_k \mu - x)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ||w_k \beta (w_k \beta - x)^{-1} - w_k \mu (w_k \mu - x)^{-1}|| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto é, dados $\varepsilon > 0$ e $\beta, \mu \in E$ com $|\beta - \mu| < \delta$, obtemos:

$$||C_n(\beta) - C_n(\mu)|| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Afirmamos que se $|\beta| > 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta^{-n} x^n) = 1.$$

De fato, como $r(x) = 1$, temos:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n(\varepsilon)$, temos:

$$||x^n||^{\frac{1}{n}} - 1 \leq | ||x^n||^{\frac{1}{n}} - 1 | < \varepsilon.$$

Logo, $||x^n||^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + 1$ para $n > n(\varepsilon)$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $1 < \varepsilon + 1 < |\beta|$, obtemos

$$0 \leq \left| \frac{x^n}{\beta^n} \right| < \frac{(\varepsilon + 1)^n}{|\beta|^n}.$$

A partir do fato de que $\frac{\varepsilon + 1}{|\beta|} < 1$, temos que $\frac{(\varepsilon + 1)^n}{|\beta|^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente, podemos concluir que $\beta^{-n} x^n \rightarrow 0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta^{-n} x^n) = 1.$$

Por outro lado, vimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $\beta \in E$, temos a boa definição das inversas $(1 - \beta^{-n} x^n)^{-1}$ (veja Equação 2.5). Dessa maneira, podemos usar a continuidade da aplicação inversa $x \mapsto x^{-1}$, garantida pela Proposição 2.36 e a equação 2.5, para concluir que para $|\beta| > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta^{-n} x^n)^{-1} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta^{-n} x^n) \right]^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Agora, vejamos o que ocorre para $\mu = 1$. Vimos em (2.6) que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\beta, \mu \in E$ com $|\beta - \mu| < \delta$ temos $||C_n(\beta) - C_n(\mu)|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $\beta \in E$ com $|\beta| > 1$ e $|\beta - 1| < \delta$. Assim $||C_n(\beta) - C_n(1)|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo

parágrafo anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(\beta) = 1$. Portanto, existe $n(\varepsilon) > 0$ tal que, para $n > n(\varepsilon)$, temos:

$$\begin{aligned} \|1 - C_n(1)\| &= \|1 - C_n(\beta) + C_n(\beta) - C_n(1)\| \leq \\ &\leq \|1 - C_n(\beta)\| + \|C_n(\beta) - C_n(1)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n)^{-1}.$$

Aplicando novamente a continuidade da aplicação $x \mapsto x^{-1}$, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - x^n)^{-1}]^{-1} = [\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n)^{-1}]^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Dessa maneira, teríamos $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, o que contradiria a hipótese de que $r(x) = 1$ uma vez que $\|x^n\| \geq r(x)^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa contradição mostra que, para todo $\eta > 1$, temos que $E \cap \text{Sp}(x) \neq \emptyset$. Isto é, existe $\lambda \in E \cap \text{Sp}(x)$, ou seja, existe $\lambda \in \text{Sp}(x)$ tal que $|\lambda| > 1 = r(x)$, concluindo o resultado. $\square$

Para que possamos enunciar e provar o famoso Teorema de Gelfand-Mazur, precisaremos apresentar mais uma definição.

Definição 2.57. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada unitária. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra normada com divisão** quando $\text{Inv}\mathcal{A} = \mathcal{A} \setminus \{0\}$.

Teorema 2.58 (Gelfand-Mazur). *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada unitária com divisão. Então $\mathcal{A} = 1_{\mathcal{A}} \cdot \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.56, existe $\lambda \in \text{Sp}(x)$. Portanto, $\lambda - x \in \text{Sing}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Desta forma, $1_{\mathcal{A}} \cdot \lambda = x$. $\square$

2.5 Ideais e Módulos

Nesta seção, avançaremos com a teoria dos ideais, explorando algumas de suas propriedades. Também apresentaremos o conceito de álgebras quocientes.

Notação 2.59. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra com ou sem unidade. Dados $z \in \mathcal{A}$, $X, Y \subset \mathcal{A}$, apresentamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} XY &:= \{xy : x \in X, y \in Y\}; \\ X(1 - z) &:= \{x - xz : x \in X\}; \\ (1 - z)X &:= \{x - zx : x \in X\}. \end{aligned}$$

As escritas $X(1 - z)$ e $(1 - z)X$ são de fato um abuso de notação, pois não sabemos se $\mathcal{A}$ possui de fato uma unidade. Entretanto, essa convenção será bastante útil ao longo desta seção.

Definição 2.60. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Um **ideal à esquerda** de $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial J de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}J \subset J$.

Definição 2.61. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Um elemento u de $\mathcal{A}$ é uma **unidade modular à direita** para um subespaço vetorial V de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}(1 - u) \subset V$. Neste contexto, se J é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, dizemos que J é um **ideal modular à esquerda** quando existir uma unidade modular à direita para J .

Definição 2.62. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e J um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$. Dizemos que J é um ideal à esquerda **próprio** quando $J \neq \mathcal{A}$. Além disso, dizemos que J é um ideal **maximal à esquerda** quando J é um ideal à esquerda próprio que não está contido (propriamente) em qualquer outro ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Analogamente, J é um ideal **maximal modular à esquerda** quando J um ideal à esquerda próprio, modular e que não está contido (propriamente) em qualquer outro ideal modular à esquerda próprio.

Lema 2.63. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Se $u \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}(1 - u)$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ com unidade modular à direita u .*

Demonstração. É suficiente verificar os três passos abaixo:

- $\mathcal{A}(1 - u)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{A}$: Dados $(x - xu), (y - yu) \in \mathcal{A}(1 - u)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, podemos concluir que:

$$\alpha(x - xu) + (y - yu) = (\alpha x + y) - (\alpha x + y)u \in \mathcal{A}(1 - u).$$

- $\mathcal{A}(\mathcal{A}(1-u)) \subset \mathcal{A}(1-u)$, pois dados $x, y \in \mathcal{A}$, temos $x(y-yu) = (xy) - (xy)u \in \mathcal{A}(1-u)$.
- Para cada $x \in \mathcal{A}$, temos

$$(x - xu) \in \mathcal{A}(1 - u).$$

Logo, u é uma unidade modular à direita de $\mathcal{A}(1 - u)$.

□

Observação 2.64. As definições de ideal à direita e unidade modular à esquerda são análogas. Além disso, todos os resultados que serão apresentados nesta seção possuem as suas versões equivalentes ao substituírmos os advérbios "à esquerda" por "à direita" e vice-versa.

Definição 2.65. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Um **ideal** de $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial J de $\mathcal{A}$ tal que J é simultaneamente um ideal à esquerda e à direita de $\mathcal{A}$. Analogamente, J é um ideal **modular** de $\mathcal{A}$ quando J é simultaneamente um ideal modular à esquerda e à direita de $\mathcal{A}$.

Definição 2.66. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e J um ideal de $\mathcal{A}$. Dizemos que J é um ideal **próprio** quando $J \neq \mathcal{A}$. Além disso, dizemos que J é um ideal **maximal** quando J é um ideal próprio que não está contido (propriamente) em qualquer outro ideal próprio de $\mathcal{A}$. Analogamente, J é um ideal **maximal modular** quando J é um ideal próprio, modular e que não está contido (propriamente) em qualquer outro ideal modular próprio.

Notação 2.67. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Denotaremos o conjunto dos ideais maximais de $\mathcal{A}$ por $\Delta(\mathcal{A})$.

Definição 2.68. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Dizemos que $\mathcal{A}$ é **simples** quando os únicos ideais de $\mathcal{A}$ são os ideais triviais, isto é, os únicos ideais de $\mathcal{A}$ são $\{0\}$ e $\mathcal{A}$.

Quando $\mathcal{A}$ é simples temos que $\{0\}$ é um ideal maximal.

Observação 2.69. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e I um ideal modular de $\mathcal{A}$. Se u é uma unidade modular à direita de I e v é uma unidade modular à esquerda de I , então u é uma unidade modular à esquerda de I .

De fato, sejam u, v como no enunciado. Por definição $(v - vu), (u - vu) \in I$. Daí, $(u - v) \in I$. Portanto, $x - ux = x - vx - (u - v)x \in I$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Logo u é uma unidade modular à esquerda de I .

O nosso objetivo a seguir é o de exibir algumas propriedades a respeito de ideais. Entretanto, por questões técnicas, enunciaremos o famoso Lema de Zorn, tendo em vista que este resultado será utilizado na sequência. Por conveniência, relembremos algumas definições conectadas com o Lema de Zorn.

Definição 2.70. Seja P um conjunto não vazio. Uma **ordem parcial** no conjunto P é uma relação $\leq$ em P que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Reflexividade: $x \leq x$ para todo $x \in P$;
2. Antissimetria: Se $x, y \in P$ com $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
3. Transitividade: Se $x, y, z \in P$ com $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Neste caso dizemos que $P = (P, \leq)$ é um **conjunto parcialmente ordenado**. Além disso, dizemos que $P = (P, \leq)$ é um **conjunto totalmente ordenado** quando a relação $\leq$ satisfaz a seguinte condição adicional:

4. Se $x, y \in P$, então $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Todo subconjunto não vazio Q de P é $(Q, \leq)$ parcialmente ordenado. Em alguns casos podemos ter $(Q, \leq)$ totalmente ordenado independente de $(P, \leq)$ não ser totalmente ordenado.

Definição 2.71. Sejam $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e Q um subconjunto não vazio de P . Dizemos que um elemento $p \in P$ é uma **cota superior** do conjunto Q quando $q \leq p$ para todo $q \in Q$. Um elemento $m \in P$ é dito um elemento **maximal** de P quando não existe $n \in P$, $n \neq m$, tal que $m \leq n$.

Lema 2.72 (Lema de Zorn). *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado Q de P possui uma cota superior em P , então P possui um elemento maximal.*

Proposição 2.73. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se J é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, então J é uma subálgebra de $\mathcal{A}$;*
2. *Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ é unitária, então $1_{\mathcal{A}}$ é uma unidade modular à direita para todo subespaço vetorial E de $\mathcal{A}$;*
3. *Se u é uma unidade modular à direita para um subespaço vetorial V de $\mathcal{A}$, então u é uma unidade modular à direita para qualquer subespaço vetorial U de $\mathcal{A}$ contendo V ;*
4. *Seja J um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Se u é uma unidade modular à direita de J , então $u \notin J$;*
5. *Seja $u \in \mathcal{A}$. O elemento u é quasi-regular à esquerda se, e somente se, $\mathcal{A}(1 - u) = \mathcal{A}$;*
6. *Seja J um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Então J está contido em um ideal maximal à esquerda;*
7. *Seja I um ideal maximal modular à esquerda de $\mathcal{A}$. Então I é um ideal maximal à esquerda;*
8. *Se $\mathcal{A}$ é unitária, então todo ideal próprio à esquerda de $\mathcal{A}$ está contido em um ideal maximal à esquerda de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. (1) A conclusão é imediata.

(2) Suponhamos que $\mathcal{A}$ tenha unidade $1_{\mathcal{A}}$. Seja E um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Mostraremos que $1_{\mathcal{A}}$ é uma unidade modular à direita de E . Dado $a \in \mathcal{A}$, temos $a - a1_{\mathcal{A}} = a - a = 0$. Daí, concluímos que $1_{\mathcal{A}}$ é uma unidade modular à direita de $\mathcal{A}$, pois

$$\mathcal{A}(1 - 1_{\mathcal{A}}) = \{a - a1_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A}\} = \{0\} \subset E.$$

(3) Sejam u uma unidade modular à direita para um subespaço vetorial V de $\mathcal{A}$ e U um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ contendo V . Mostraremos que u é uma unidade modular à direita de U . Por u ser uma unidade modular à direita de V , temos $\mathcal{A}(1 - u) \subset V \subset U$, donde concluímos que u será uma unidade modular à direita de U .

(4) Seja u uma unidade modular à direita para o ideal à esquerda próprio J de $\mathcal{A}$. Mostraremos que $u \notin J$. Suponhamos que $u \in J$. Dado $x \in \mathcal{A}$ temos que $xu \in J$, pois J é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$. Por outro lado, $(x - xu) \in J$ pois u é uma unidade modular à direita de J . Logo $x = (x - xu) + xu \in J$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Consequentemente, $\mathcal{A} \subset J$, o que contradiz a hipótese de J ser um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$.

(5) Seja $u \in \mathcal{A}$. Pelo Lema 2.63 $\mathcal{A}(1 - u)$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ com unidade modular à direita u . Se u é quasi-regular à esquerda, então existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $x \circ u = 0$, ou seja, $x + u - xu = 0$. Daí, $(-x) - (-x)u = u$. Como $-x \in \mathcal{A}$, vemos que $u \in \mathcal{A}(1 - u)$. Por u ser uma unidade modular à direita para o ideal à esquerda $\mathcal{A}(1 - u)$ e pelo fato que $u \in \mathcal{A}(1 - u)$, podemos concluir a partir de (4) que $\mathcal{A}(1 - u)$ não pode ser um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A}(1 - u) = \mathcal{A}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A}(1 - u) = \mathcal{A}$. Como $-u \in \mathcal{A}$, podemos encontrar $x \in \mathcal{A}$ tal que $-u = x - xu$. Daí, $x + u - xu = 0$, isto é, $x \circ u = 0$. Dessa forma vemos que u é um elemento quasi-regular à esquerda.

(6) Seja J um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$ - com unidade modular à direita $u \in \mathcal{A}$. Mostraremos que J está contido em um ideal maximal à esquerda de $\mathcal{A}$. Definimos Γ como sendo o conjunto formado por todos os ideais à esquerda próprios de $\mathcal{A}$ que contém J . Claramente Γ é não vazio, pois $J \in \Gamma$. Por (3), u é uma unidade modular à direita para cada $K \in \Gamma$. Por outro lado, (4) garante que $u \notin K$ para todo $K \in \Gamma$. O conjunto $\Gamma = (\Gamma, \leq) = (\Gamma, \subset)$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Agora mostraremos que toda cadeia $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em Γ possui cota superior em Γ . De fato, defina $K = \cup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$. Como $K_\alpha \subset K$ para qualquer $\alpha \in \Lambda$, é suficiente provar que $K \in \Gamma$ - isto é, provar que K é um ideal à esquerda próprio que contém J . Sabemos que a união de subespaços vetoriais encaixados é um espaço vetorial em $\mathcal{A}$. Portanto K é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Por outro lado, dados $x \in \mathcal{A}$ e $k \in K$, podemos encontrar $\alpha \in \Lambda$ tal que $k \in K_\alpha$. Logo,

$xk \in K_\alpha \subset K$. Daí, vemos que K é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ que contém J . Além disso, K é próprio pois $u \notin K$, uma vez que $u \notin K_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Em particular, K é um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$ - com unidade modular à direita u . Logo, $K \in \Gamma$. Além disso, $K_\alpha \subset K$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Pelo Lema de Zorn, Γ possui um elemento maximal I . Afirmamos que I contém J . De fato, se L é um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$ tal que $I \subset L$, então $L \in \Gamma$, pois $J \subset I$. Concluimos que $L = I$. Consequentemente I é um ideal maximal à esquerda que contém J .

(7) Seja I um ideal maximal modular à esquerda de $\mathcal{A}$ com unidade modular à direita $u \in \mathcal{A}$. Mostraremos que I é um ideal maximal à esquerda de $\mathcal{A}$. Suponhamos que I não seja um ideal maximal à esquerda de $\mathcal{A}$. Neste caso, existe J , um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$, tal que $I \subsetneq J$. Por (3), u é uma unidade modular à direita para J . Daí, concluimos que J seria um ideal modular à esquerda. E isto contradiz a hipótese de que I é um ideal maximal modular à esquerda.

(8) Suponhamos que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ é unitária. Seja I um ideal à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Verificaremos que I está contido em um ideal maximal à esquerda de $\mathcal{A}$. Por (2), $1_{\mathcal{A}}$ é uma unidade modular à direita para todo subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Então I é um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Aplicando (6), vemos que I está contido em um ideal maximal à esquerda.

□

Observação 2.74. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra unitária. Neste caso $\Delta(\mathcal{A})$ (=conjunto formado pelos ideais maximais de $\mathcal{A}$) é não vazio. De fato, na prova dos itens (6) e (8) da Proposição 2.73, podemos substituir o ideal modular próprio à esquerda por um ideal modular próprio e concluir que se $\mathcal{A}$ é unitária então todo ideal próprio está contido em um ideal maximal. Como $\{0\}$ é um ideal próprio, existe um ideal maximal em $\mathcal{A}$, contendo $\{0\}$.

Teorema 2.75. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e J um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$ com unidade modular à direita $u \in \mathcal{A}$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\|u - x\| \geq 1$ para todo $x \in J$;

2. O fecho de J é um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$.

Demonstração. (1) Suponhamos que J contenha um elemento x , onde $\|u - x\| < 1$. Pela definição de raio espectral segue o seguinte:

$$r(u - x) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|(u - x)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|u - x\| < 1$$

Daí, pelo Teorema 2.49, $(u - x)$ é quasi-invertível. Denotaremos $x^0 = y$ o quasi-inverso de $(u - x)$. Assim,

$$0 = y \circ (u - x) = y + (u - x) - y(u - x).$$

Portanto, temos

$$u = x - y + y(u - x) = x - yx - (y - yu).$$

Por outro lado, como J é um ideal à esquerda, temos que $yx \in J$. Além disso, $\mathcal{A}(1 - u) \subset J$, pois u é uma unidade modular à direita de J . Então, podemos concluir que $(y - yu) \in J$. Logo, $u \in J$ e isto contradiz o item (4) da proposição anterior.

(2) Agora, mostraremos que o fecho de J , a saber $\bar{J}$, é um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. É bem conhecido que o fecho de um subespaço vetorial também é um subespaço vetorial. Dessa forma, $\bar{J}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Dados $y \in \mathcal{A}$ e $x \in \bar{J}$, existe uma sequência (x_n) em J tal que $x_n \rightarrow x$. Daí, como J é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, vemos que $yx_n \in J$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade do produto em uma álgebra normada, temos que $yx_n \rightarrow yx$. Logo $yx \in \bar{J}$, isto é, $\bar{J}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$. Usando o fato que u é uma unidade modular à direita de J , concluímos que $(x - xu) \in J \subset \bar{J}$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Logo u é uma unidade modular à direita de $\bar{J}$. Finalmente, $\bar{J}$ é um ideal modular à esquerda próprio, uma vez que por (1), $\|u - x\| \geq 1$ para todo $x \in J$. Logo, não existe uma sequência contida em J que convirja para u . Então $u \notin \bar{J}$.

□

Corolário 2.76. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e J um ideal maximal modular à esquerda de $\mathcal{A}$. Então, J é fechado.*

Demonstração. Seja J como no enunciado. Pelo teorema anterior, $\bar{J}$ é um ideal modular à esquerda próprio de $\mathcal{A}$. Como $J \subset \bar{J}$ e J é maximal, concluímos que $\bar{J} = J$, isto é, J é fechado.

□

A seguir, relembremos o conceito de espaço vetorial quociente e estabeleceremos algumas notações.

Definição 2.77. Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e V um subespaço vetorial de U . Em U , definimos a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y := (x - y) \in V.$$

Para cada $x \in U$, a classe de equivalência que contém o elemento x é dita a **V-coclasse** de x e será denotada por x' . O conjunto de todas as V-coclasses é um espaço vetorial com adição e multiplicação por escalar definidas da seguinte maneira:

$$z'_1 + z'_2 = (x_1 + x_2)' \quad e \quad \alpha z'_1 = (\alpha x_1)',$$

onde x_1, x_2 são elementos arbitrários das coclasses z'_1, z'_2 , respectivamente, e $\alpha \in \mathbb{F}$. Esse espaço vetorial é chamado de **espaço quociente** de U módulo V e o denotaremos por $U - V$.

A aplicação $\pi : U \rightarrow U - V$ com $x \mapsto x'$ é dita a **aplicação canônica** (ou aplicação quociente). No caso em que $U = (U, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado e V é um subespaço vetorial fechado de U , então $U - V$ é um espaço vetorial normado, onde a norma é definida da seguinte maneira:

$$\|z'\| = \inf\{\|x\| : x \in z'\}, \text{ onde } z' \in U - V.$$

A norma acima é conhecida como a **norma canônica** em $U - V$.

Lembremos que X é dito um conjunto completo de U quando toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X .

Proposição 2.78. Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F}$ e V um subespaço vetorial fechado de U . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. A aplicação canônica $\pi : U \rightarrow U - V$ é uma aplicação linear limitada. Além disso, $\|\pi\| = 1$ quando $V \neq U$ e zero caso contrário;
2. Seja X um subconjunto completo de U tal que $X + V = X$. Então a imagem canônica $\pi(X) = X' = \{\pi(f) = f' : f \in X\}$ é um subconjunto completo de $U - V$;
3. Se U é completo então $U - V$ é completo.

Demonstração. (1) Primeiramente, notemos que π é linear. De fato, dados $x, y \in U$, e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos $\pi(\alpha x + y) = (\alpha x + y)' = (\alpha x)' + y' = \alpha x' + y' = \alpha \pi(x) + \pi(y)$. Além disso, a aplicação π é limitada, uma vez que:

$$\|\pi\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|x'\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|x\| \leq 1,$$

pois $\|x'\| = \inf\{\|y\| : y \in x'\} \leq \|x\|$. Agora mostraremos que a norma da aplicação canônica é 1, quando V é um subespaço vetorial próprio de U . Suponhamos que $\|\pi\| < 1$. Neste caso, podemos escolher r tal que $\|\pi\| < r < 1$. Para cada $x \in U$, temos:

$$\inf\{\|y\| : y \in x'\} = \|x'\| = \|\pi(x)\| \leq \|\pi\| \cdot \|x\| < r\|x\|.$$

Portanto, existe $x_1 \in x'$ tal que $\|x_1\| < r\|x\|$. Aplicando o mesmo raciocínio para x_1 , existe $x_2 \in x'_1$ tal que $\|x_2\| < r\|x_1\| < r^2\|x\|$. Repetindo o processo, obtemos uma sequência (x_n) em x' tal que $\|x_n\| < r^n\|x\|$. Como $r < 1$, temos que $r^n\|x\|$ converge a zero. Daí, $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $x \in V$ pois

$$x' = x'_n = \pi(x_n) \rightarrow \pi(0) = 0' = V,$$

daí $U \subset V$, o que é uma contradição.

(2) Seja X um subconjunto completo de U tal que $X + V = X$. Mostraremos que a imagem canônica

$$\pi(X) = X' = \{\pi(f) = f' : f \in X\}$$

é um subconjunto completo de $U - V$. Seja (y_n) uma sequência de Cauchy em X' . Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|y_{n+1} - y_n\| < 2^{-n}$. Provaremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

existe $f_n \in X$ tal que $f'_n = y_n$ e $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. De fato, como (y_n) é uma sequência em X' , para cada n , existe $g_n \in X$ tal que $g'_n = y_n$. Tomemos $f_1 = g_1$. Como $\inf\{\|x\| : x \in (y_2 - y_1)\} = \|y_2 - y_1\| < 2^{-1}$, existe $v_2 \in (y_2 - y_1)$ com $\|v_2\| < 2^{-1}$. Usando que $g_2 \in y_2$ e $f_1 \in y_1$, $(g_2 - f_1) \in y_2 - y_1$, concluímos que $v_2 \in y_2 - y_1 = (g_2 - f_1)'$, isto é, $v_2 - (g_2 - f_1) \in V$. Portanto, existe $l \in V$ tal que $l = v_2 + f_1 - g_2$. Daí $v_2 + f_1 = l + g_2 \in V + X = X$. Agora definimos $f_2 = v_2 + f_1$. Notemos que

$$f'_2 = v'_2 + f'_1 = (y_2 - y_1) + y_1 = y_2$$

e

$$\|f_2 - f_1\| = \|v_2\| < 2^{-1}.$$

Repetindo o processo, obtemos a sequência $(f_n) \subset X$ com as propriedades desejadas.

A sequência (f_n) é uma sequência de Cauchy em X . De fato ($m < n$),

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \|f_n - f_{n-1} + f_{n-1} - f_{n-2} + f_{n-2} + \cdots - f_m\| < \\ &< 2^{-(n-1)} + 2^{-(n-2)} + \cdots + 2^{-m} = \sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i}. \end{aligned}$$

Como a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}$ converge, então a sequência (S_n) , formada pelas suas somas parciais, converge. Em particular, (S_n) é uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n(\varepsilon)$ temos

$$\left\| \sum_{i=m}^n 2^{-i} \right\| = \|S_n - S_m\| < \varepsilon.$$

Logo (f_n) é uma sequência de Cauchy em X . Por ser uma sequência de Cauchy em um subconjunto completo, temos que (f_n) converge para um elemento $f \in X$. Aplicando a continuidade da aplicação canônica, temos que $y_n = f'_n \rightarrow f'$. Lembremos que uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência também converge. Em resumo, dada uma sequência de Cauchy em X' , essa sequência deverá convergir para um elemento em X' . Logo X' é completo sob as condições do enunciado.

(3) Suponhamos que U seja completo. Tomemos $X = U$. Agora é só aplicar o item (2). □

A seguir, veremos como estender o conceito de espaço vetorial quociente para uma álgebra quociente.

Definição 2.79. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra, J um ideal de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} - J$ o espaço quociente de $\mathcal{A}$ módulo J . Definimos o seguinte produto em $\mathcal{A} - J$:

$$z'_1 \cdot z'_2 = (x_1 \cdot x_2)',$$

onde x_1, x_2 são elementos arbitrários das coclasses z'_1, z'_2 , respectivamente. Com esse produto, $\mathcal{A} - J$ torna-se uma álgebra que será chamada de **álgebra quociente** de $\mathcal{A}$ módulo J . Denotaremos esta álgebra por $\mathcal{A}/J$.

Para facilitar a vida de um leitor com menos experiência, provaremos que o produto acima está bem definido e que, de fato, $\mathcal{A}/J$ é uma álgebra com esse produto. Fixemos $z'_1, z'_2, z'_3 \in \mathcal{A}/J$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ e tomemos $x_1 \in z'_1$, $x_2 \in z'_2$ e $x_3 \in z'_3$. Por definição, $(x_1 - z_1), (x_2 - z_2), (x_3 - z_3) \in J$. Portanto, $z_1 = j_1 + x_1$, $z_2 = j_2 + x_2$, $z_3 = j_3 + x_3$, com $j_1, j_2, j_3 \in J$. Observemos que:

$$z_1 z_2 - x_1 x_2 = (x_1 + j_1)(x_2 + j_2) - x_1 x_2 = x_1 j_2 + j_1 x_2 + j_1 j_2 \in J.$$

Então $z_1 z_2 \sim x_1 x_2$. Em outras palavras, $z'_1 z'_2 = (z_1 z_2)' = (x_1 x_2)'$ para todo $x_1 \in z'_1$, $x_2 \in z'_2$. Agora, verificaremos que de fato a operação é um produto em $\mathcal{A}/J$.

- Associatividade:

$$\begin{aligned} (z'_1 z'_2) z'_3 &= (x_1 x_2)' z'_3 = ((x_1 x_2) x_3)' = (x_1 (x_2 x_3))' \\ &= x'_1 (x_2 x_3)' = z'_1 (x_2 x_3)' = z'_1 (z'_2 z'_3). \end{aligned}$$

- Distributividade:

$$\begin{aligned} (z'_1 + z'_2) z'_3 &= (x_1 + x_2)' z'_3 = ((x_1 + x_2) x_3)' = (x_1 x_3 + x_2 x_3)' \\ &= (x_1 x_3)' + (x_2 x_3)' = z'_1 z'_3 + z'_2 z'_3. \end{aligned}$$

Analogamente temos $z'_1 (z'_2 + z'_3) = z'_1 z'_2 + z'_1 z'_3$.

- Compatibilidade dos produtos:

$$\begin{aligned} (\alpha z'_1) z'_2 &= (\alpha x_1)' z'_2 = ((\alpha x_1) x_2)' \\ &= (\alpha (x_1 x_2))' = \alpha (x_1 x_2)' = \alpha z'_1 z'_2 \\ &= (x_1 (\alpha x_2))' = z'_1 (\alpha x_2)' = z'_1 (\alpha z'_2). \end{aligned}$$

Lembremos que se $D, E \subset \mathbb{R}_+$, então $\inf(DE) = \inf(D) \cdot \inf(E)$, onde $DE = \{de : d \in D, e \in E\}$ e $D, E \neq \emptyset$. Utilizando esta propriedade, podemos provar o seguinte resultado.

Observação 2.80. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra normada e J um ideal fechado de $\mathcal{A}$. Então, a norma canônica é uma norma-álgebra em $\mathcal{A}/J$. Além disso, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach, então $\mathcal{A}/J$ é uma álgebra de Banach.

De fato, já sabemos que a norma canônica é uma norma em $\mathcal{A}/J$. Então basta provar que $\|z'_1 z'_2\| \leq \|z'_1\| \cdot \|z'_2\|$ para todo $z'_1, z'_2 \in \mathcal{A}/J$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|z'_1 z'_2\| &= \inf\{\|x_1 x_2\| : x_1 \in z'_1, x_2 \in z'_2\} \leq \inf\{\|x_1\| \cdot \|x_2\| : x_1 \in z'_1, x_2 \in z'_2\} \\ &= \inf\{\|x_1\| : x_1 \in z'_1\} \cdot \inf\{\|x_2\| : x_2 \in z'_2\} = \|z'_1\| \cdot \|z'_2\|. \end{aligned}$$

Notemos ainda que, pela Proposição 2.78, temos então que se $\mathcal{A}$ é completa então $\mathcal{A}/J$ é completa.

Observação 2.81. Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra e J um ideal de $\mathcal{A}$. Então, a aplicação canônica $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$, $x \mapsto \pi(x) = x'$, é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/J$. Em particular, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada, então π é um homomorfismo contínuo.

De fato, já vimos que π é linear. Agora notemos que $\pi(xy) = (xy)' = x'y' = \pi(x)\pi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Portanto π é multiplicativa. Por último, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada, então pela Proposição 2.78, a aplicação canônica é contínua.

2.6 Funcionais Lineares Multiplicativos

Dedicaremos esta última parte do capítulo ao estudo dos funcionais lineares multiplicativos, que constituem parte essencial deste trabalho. Veremos que a continuidade segue automaticamente para esse tipo de funcional.

Definição 2.82. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa. Um **funcional linear multiplicativo** em $\mathcal{A}$ é um funcional linear não nulo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{A}$ temos:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Mais precisamente, ϕ é um homomorfismo não nulo de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$.

Definição 2.83. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa. O conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$ é chamado de **espectro** de $\mathcal{A}$ e será denotado por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Uma das propriedades mais interessantes a respeito de funcionais lineares multiplicativos é a sua continuidade automática, como provaremos a seguir.

Proposição 2.84. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa e $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Então ϕ é contínuo e $\|\phi\| \leq 1$. Além disso, se $\mathcal{A}$ é unitária, então $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$.*

Demonstração. Provaremos que $\|\phi\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(x)| \leq 1$. Suponhamos que $\|\phi\| > 1$. Então existe $x \in \mathcal{A}$, onde $\|x\| = 1$ e $|\phi(x)| > 1$. Tomando $y = \frac{x}{\phi(x)} \in \mathcal{A}$, temos $\|y\| < 1$ e $\phi(y) = 1$. Mostraremos na sequência que a existência desse elemento y gera uma contradição.

Seja $z = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Notemos que z está bem definido pois $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ converge. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y\|^n$$

e a segunda série converge pois é uma série geométrica de razão $\|y\| < 1$. Daí, a primeira série converge pelo Teste de Comparação. Como a convergência absoluta de uma série implica na convergência da série - em espaços de Banach - temos a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Agora, notemos que

$$y + zy = y + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)y = y + \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+1} = z.$$

Então

$$\phi(z) = \phi(y + zy) = \phi(y) + \phi(z)\phi(y) = 1 + \phi(z),$$

que é um absurdo. Logo, podemos concluir que $\|\phi\| \leq 1$ provando também a continuidade de ϕ .

Neste ponto, assumiremos que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ é unitária. Notemos

$$\phi(1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}} \cdot 1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}})\phi(1_{\mathcal{A}}).$$

Se $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 0$, então teríamos, para todo $x \in \mathcal{A}$ o seguinte:

$$\phi(x) = \phi(1_{\mathcal{A}} \cdot x) = \phi(1_{\mathcal{A}})\phi(x) = 0.$$

Isto é, $\phi \equiv 0$ uma contradição. Logo, $\phi(1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}})\phi(1_{\mathcal{A}})^{-1} = 1$.

□

3 ÁLGEBRAS UNITÁRIAS E COMUTATIVAS

Neste capítulo provaremos um dos resultados centrais desta dissertação: a existência de uma bijeção entre o conjunto dos ideais maximais e o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos em uma álgebra de Banach complexa comutativa e com unidade.

Para isso, recordemos que um subespaço de um espaço vetorial V tem codimensão 1 quando $\mathcal{A} = V \oplus W$, onde $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$.

Proposição 3.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa e J um ideal maximal modular de codimensão 1. Então, existe $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, onde $\ker(\phi) = \{x \in \mathcal{A} : \phi(x) = 0\} = J$. A recíproca deste fato também é verdadeira.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $\ker(\phi)$ é um ideal maximal modular de codimensão 1 para todo $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. De fato, fixemos $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Como ϕ é não nulo, existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(y) \neq 0$, isto é, $y \notin \ker \phi$. Claramente, $\ker \phi$ e $\langle y \rangle = \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{F}\}$ são subespaços vetoriais de $\mathcal{A}$. A interseção $(\ker \phi \cap \langle y \rangle) = \{0\}$, pois se tivéssemos $0 \neq x \in (\ker \phi \cap \langle y \rangle)$, teríamos que $x = \alpha y$ com $\alpha \neq 0$ e $0 = \phi(x) = \phi(\alpha y) = \alpha \phi(y)$ e, portanto, concluiríamos que $\phi(y) = 0$, e isto levaria a uma contradição. Por fim, dado $x \in \mathcal{A}$ temos que $x - \frac{\phi(x)}{\phi(y)}y \in \ker \phi$. Assim, podemos escrever $x - \frac{\phi(x)}{\phi(y)}y = k \in \ker \phi$. Logo $x = k + \frac{\phi(x)}{\phi(y)}y$, concluindo a decomposição $\mathcal{A} = \ker(\phi) \oplus \langle y \rangle$.

Agora, resta provar que $\ker(\phi)$ é um ideal maximal modular. Dados $x \in \ker \phi$ e $z \in \mathcal{A}$ temos

$$\phi(zx) = \phi(z)\phi(x) = \phi(x)\phi(z) = \phi(xz).$$

Como $\phi(x) = 0$, concluímos que $\phi(xz) = \phi(zx) = 0$, ou seja, $xz, zx \in \ker \phi$ para todo $x \in \ker(\phi)$ e $z \in \mathcal{A}$. Logo, $\ker(\phi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$. A maximalidade de $\ker(\phi)$ segue direto do fato que sua codimensão é 1. Agora tomamos $u = \phi(y)^{-1}y \in \mathcal{A}$ ($\phi(u) = 1$). Se $z \in \mathcal{A}$, temos $\phi(z - zu) = \phi(z) - \phi(z)\phi(u) = 0$. Desta forma, $z - zu \in \ker \phi$. Analogamente, podemos concluir que $z - uz \in \ker \phi$. Portanto, $\ker \phi$ tem unidade modular u .

Reciprocamente, seja J um ideal maximal modular de $\mathcal{A}$ com codimensão 1 (com unidade modular u , veja Lema 2.69). Mostraremos que existe um elemento

$\phi \in \mathcal{M}(A)$, onde $\ker \phi = J$. Afirmamos que $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}u'$, onde $u' = \pi(u)$. De fato, como u é unidade modular de J temos, pela Proposição 2.73 (4), que $u \notin J$. Além disso, como a codimensão de J é 1, podemos escrever $\mathcal{A} = J \oplus \langle u \rangle$. Daí, dado $x \in \mathcal{A}$ qualquer, podemos escrever de forma única $x = j + \alpha u$ onde $j \in J$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Assim, $x - \alpha u = j \in J$, isto é, $x' = \alpha u'$. Portanto, temos $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}u'$. Além disso, como u é uma unidade modular de J , dado $x \in \mathcal{A}$, temos que $x - xu, x - ux \in J$. Logo, $x' = (xu)' = x'u'$ e $x' = (ux)' = u'x'$, assim u' é a unidade de $\mathcal{A}/J$.

Agora podemos definir nosso funcional linear multiplicativo. Definimos a função $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \phi(x)$, onde $\phi(x)$ é tal que $x' = \phi(x)u'$. Fixemos $x, y \in \mathcal{A}$, e $\alpha \in \mathbb{C}$.

- ϕ é linear:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x + y)u' &= (\alpha x + y)' = \alpha x' + y' = \alpha \phi(x)u' + \phi(y)u' \\ &= (\alpha \phi(x) + \phi(y))u'; \end{aligned}$$

- ϕ é multiplicativo: $\phi(xy)u' = (xy)' = x'y' = \phi(x)u'\phi(y)u' = \phi(x)\phi(y)u'$.

Por último, verificaremos que $\ker \phi = J$. Isso segue diretamente da igualdade abaixo:

$$\ker \phi = \{x \in \mathcal{A} : \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{A} : x' = 0'\} = \{x \in \mathcal{A} : x = x - 0 \in J\} = J.$$

E isto completa a demonstração. $\square$

Observação 3.2. Na proposição anterior, mostramos que se o espectro de uma álgebra de Banach complexa $\mathcal{A}$ é não vazio, isto é, se existe $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, então $\ker(\phi)$ é um ideal maximal de $\mathcal{A}$, isto segue do fato que $\ker(\phi)$ tem codimensão 1. Portanto, $\Delta(\mathcal{A})$ é não vazio.

Teorema 3.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa comutativa e J um ideal maximal modular de $\mathcal{A}$. Então existe $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, onde $\ker(\phi) = J$.*

Demonstração. Seja J como no enunciado. Pela proposição anterior, é suficiente provar que J tem codimensão 1. Pelo Corolário 2.76, temos que J é fechado e, portanto, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J$ é uma álgebra de Banach complexa (Lema 2.80). Notemos que

os únicos ideais de $\mathcal{B}$ são $\{0\}$ e $\mathcal{B}$, pois todos os ideais de $\mathcal{B}$ são da forma T/J , onde T é um ideal de $\mathcal{A}$ tal que $J \subset T$. Notemos que T é um ideal modular, pois $J \subset T$ (Veja item (3) da Proposição 2.73).

Assim, como na demonstração anterior, seja u uma unidade modular de J . Vimos também que u' é a unidade de $\mathcal{B}$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ é uma álgebra normada complexa com divisão. De fato, seja y' um elemento singular em $\mathcal{B}$. Consideremos o conjunto $I = \{y'x' : x \in \mathcal{A}\}$. Dados $z' \in \mathcal{B}$ e $y'x' \in I$, temos $z'(y'x') = (yz)'x' \in I$ e

$$(y'x')z' = (yxz)' = (yzx)' = (yz)'x' \in I,$$

onde usamos a comutatividade de $\mathcal{A}$. Logo I é um ideal de $\mathcal{B}$. Por outro lado, se $u' \in I$, então poderíamos escrever $u' = y'x'$. Daí, y' não seria singular. Portanto, $u' \notin I$ e isto diz que I é um ideal próprio de $\mathcal{B}$. Assim, $I = \{0\}$. Como $y'x' = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$, temos que $y' = y'u' = 0$. Logo $\mathcal{B}$ é uma álgebra normada complexa com divisão. Daí, pelo Teorema 2.58, temos $\mathcal{B} = \mathbb{C}u'$.

Como u é uma unidade modular do ideal próprio J , pelo item (4) da Proposição 2.73 temos que $u \notin J$. Assim, $J \cap \langle u \rangle = \{0\}$. Por fim, dado $x \in \mathcal{A}$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $x' = \alpha u'$, isto é, $m = x - \alpha u \in J$. Logo, $x = m + \alpha u$, provando que $\mathcal{A} = J \oplus \langle u \rangle$. $\square$

Finalmente podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach complexa comutativa e unitária. Então existe uma bijeção entre os ideais maximais de $\mathcal{A}$ e os funcionais lineares multiplicativos não nulos de $\mathcal{A}$. Mais precisamente, a aplicação $\Theta : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \Delta(\mathcal{A})$, $\phi \mapsto \ker(\phi)$ é uma bijeção entre os conjuntos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $\Delta(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Inicialmente notemos que como $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ é unitária, temos que $\Delta(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Além disso, $\Delta(\mathcal{A})$ coincide com o conjunto formado por todos os ideais maximais modulares de $\mathcal{A}$, pois $1_{\mathcal{A}}$ é uma unidade modular para todo ideal de $\mathcal{A}$ (Veja item (2) Proposição 2.73). Dado $J \in \Delta(\mathcal{A})$, a aplicação canônica $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$, definida por $x \mapsto x' = \pi(x)$, corresponde a um elemento de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Isso ocorre porque, pelo Teorema de Gelfand-Mazur, toda álgebra de Banach que é um corpo é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$. Além disso, $\mathcal{A}/J$ é

uma álgebra de Banach complexa que constitui um corpo, uma vez que J é um ideal maximal. Em particular, $\Theta(\pi) = \ker(\pi) = J$, em outras palavras, Θ é sobrejetora. Agora, provaremos a injetividade da aplicação Θ . Sejam ϕ e ψ funcionais lineares multiplicativos em $\mathcal{A}$, tais que $\ker \phi = \ker \psi$. Pela Proposição 3.1, temos $\mathcal{A} = \ker(\phi) \oplus \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \ker(\psi) \oplus \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$. E como $\phi(1_{\mathcal{A}}) = \psi(1_{\mathcal{A}})$ temos que $\phi = \psi$.

□

Motivados pelo último resultado, desenvolveremos os próximos capítulos. Veremos no próximo capítulo que, ao retirar a hipótese da comutatividade da álgebra de Banach complexa $\mathcal{A}$, não podemos garantir a existência da bijeção entre os ideais maximais e o espectro, como visto acima. Mais ainda, em muitos casos podemos ter $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \emptyset$ e $\Delta(A) \neq \emptyset$. Entretanto, veremos no último capítulo que, para a álgebra de Banach $UT_m(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa e unitária, podemos obter uma versão análoga do caso comutativo (Teorema 5.10).

4 ÁLGEBRAS UNITÁRIAS E NÃO COMUTATIVAS COM ESPECTRO VAZIO

Veremos, neste capítulo, um exemplo de álgebra de Banach com unidade e não comutativa que não possui a propriedade da bijeção.

Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Seja E um espaço de Banach que é linearmente isomorfo à $E \oplus E$. Então, a álgebra $B(E)$ dos operadores lineares contínuos em E tem espectro vazio.*

Demonstração. Denotaremos por $\phi : E \rightarrow E \oplus E$ o isomorfismo linear entre E e $E \oplus E$. Para cada $(x, y) \in E \oplus E$, definimos, $\tilde{P} : E \oplus E \rightarrow E \oplus E$ e $\tilde{Q} : E \oplus E \rightarrow E \oplus E$ como segue

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x, y) &= (x, 0) \quad e \\ \tilde{Q}(x, y) &= (0, y).\end{aligned}$$

Essas aplicações são lineares e contínuas. Assim, ao definirmos as aplicações $P : E \rightarrow E$ e $Q : E \rightarrow E$ tais que

$$\begin{aligned}P &= \phi^{-1} \tilde{P} \phi \quad e \\ Q &= \phi^{-1} \tilde{Q} \phi,\end{aligned}$$

vemos que $P, Q \in B(E)$.

No que segue, denotaremos a unidade de $B(E \oplus E)$ por I (respectivamente $I_{B(E)}$ a unidade de $B(E)$). Temos ainda que $\tilde{P}\tilde{Q} = 0$ e $\tilde{P} + \tilde{Q} = I$. De fato, para todo $(x, y) \in E \oplus E$ temos

$$\tilde{P}\tilde{Q}(x, y) = \tilde{P}(\tilde{Q}(x, y)) = \tilde{P}(0, y) = (0, 0) \quad e$$

$$(\tilde{P} + \tilde{Q})(x, y) = \tilde{P}(x, y) + \tilde{Q}(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, y) = I(x, y).$$

Analogamente, podemos afirmar que $PQ = 0$ e $P + Q = I_{B(E)}$. De fato,

$$PQ = \phi^{-1} \tilde{P} \phi \phi^{-1} \tilde{Q} \phi = \phi^{-1} \tilde{P} \tilde{Q} \phi = \phi^{-1} 0 \phi = 0 \quad e$$

$$P + Q = \phi^{-1} \tilde{P} \phi + \phi^{-1} \tilde{Q} \phi = \phi^{-1} (\tilde{P} + \tilde{Q}) \phi = \phi^{-1} I \phi = \phi^{-1} \phi = I_{B(E)}.$$

Por último, definimos a aplicação $\tilde{U} : E \oplus E \rightarrow E \oplus E$ como segue

$$\tilde{U}(x, y) = (y, x) \text{ para todo } (x, y) \in E \oplus E.$$

Claramente, $\tilde{U}$ é uma aplicação linear e contínua. Assim, a aplicação $U : E \rightarrow E$ definida por $U = \phi^{-1}\tilde{U}\phi$ também será linear e contínua, isto é, $U \in B(E)$. Agora observemos que $\tilde{P} = \tilde{U}\tilde{Q}\tilde{U}$ e $\tilde{Q} = \tilde{U}\tilde{P}\tilde{U}$, pois dados $(x, y) \in E \oplus E$, temos

$$\tilde{U}\tilde{Q}\tilde{U}(x, y) = \tilde{U}\tilde{Q}(y, x) = \tilde{U}(0, x) = (x, 0) = \tilde{P}(x, y).$$

A prova de que $\tilde{Q} = \tilde{U}\tilde{P}\tilde{U}$ é análoga. Neste contexto também temos as igualdades $P = UQU$ e $Q = UPU$, pois

$$UQU = \phi^{-1}\tilde{U}\phi\phi^{-1}\tilde{Q}\phi\phi^{-1}\tilde{U}\phi = \phi^{-1}\tilde{U}\tilde{Q}\tilde{U}\phi = \phi^{-1}\tilde{P}\phi = P.$$

Prova-se que $Q = UPU$ analogamente.

Finalmente, suponhamos que exista $\psi \in \mathcal{M}(B(E))$. Como $PQ = 0$, temos

$$0 = \psi(0) = \psi(PQ) = \psi(P)\psi(Q).$$

Assim $\psi(P) = 0$ ou $\psi(Q) = 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\psi(P) = 0$. Como $Q = UPU$ temos

$$\psi(Q) = \psi(UPU) = \psi(U)\psi(P)\psi(U) = 0.$$

Para finalizar, como $P + Q = I_{B(E)}$, temos

$$1 = \psi(I_{B(E)}) = \psi(P + Q) = \psi(P) + \psi(Q) = 0$$

uma contradição. Concluimos que o espectro de $B(E)$ deve ser vazio.

□

Exemplo 4.2. Sejam $E = c_0$ ou $E = l_p$, os espaços de Banach clássicos, com $1 \leq p \leq \infty$. Esses espaços são exemplos de espaços de Banach linearmente homeomorfos a $E \oplus E$. Mostraremos a existência de um homeomorfismo linear entre $E := c_0$ e $E \oplus E$. Seja $\phi : E \rightarrow E \oplus E$ uma aplicação definida por

$$\phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = ((x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}).$$

A aplicação está bem definida pois subsequências de sequências que convergem para zero, em espaços normados, também convergem para zero. Afirmamos que ϕ é um isomorfismo. De fato,

- Linearidade: Dados $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}} + \alpha(y_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \phi((x_n + \alpha y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \\
 &= (x_{2n} + \alpha y_{2n}, x_{2n-1} + \alpha y_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = \\
 &= (x_{2n}, x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} + \alpha(y_{2n}, y_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = \\
 &= \phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) + \alpha \phi((y_n)_{n \in \mathbb{N}}).
 \end{aligned}$$

- Continuidade: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em c_0 com norma $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1$. Daí:

$$\begin{aligned}
 \|\phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\| &= \|((x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}})\| = \\
 &= \max\{\|(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}\|, \|(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}\|\} \leq \\
 &\leq \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1,
 \end{aligned}$$

uma vez que $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_n |x_n| \geq \sup_n |x_{2n-1}| = \|(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}\|$ e, analogamente, $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \geq \|(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}\|$. Logo ϕ é limitada.

- Injetividade: Se as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ são tais que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Supondo, sem perda de generalidade, que i é par, temos $(x_i, x_{i-1}) \neq (y_i, y_{i-1})$. Portanto $\phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \phi((y_n)_{n \in \mathbb{N}})$.
- Sobrejetividade: Dada $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \oplus E$, podemos estabelecer uma sequência $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots)$ que está em c_0 pois a subsequência dos índices pares e a subsequência dos índices ímpares convergem para zero. Isto é, dado $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \oplus E$ existe $x \in c_0$ tal que $\phi(x) = (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Continuidade da inversa: Como E e $E \oplus E$ são espaços de Banach, pelo Teorema da Aplicação Aberta ϕ tem inversa contínua, pois ϕ é linear, limitada e bijetora entre espaços de Banach.

Analogamente podemos mostrar que, para $E = l_p$ com $1 \leq p \leq \infty$, E é isomorfo a $E \oplus E$.

Do exemplo acima, segue que, para $E = c_0$ e $E = l_p$ com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das aplicações limitadas em E , $B(E)$, tem espectro vazio. Já vimos que o conjunto dos ideais maximais em uma álgebra de Banach unitária é não vazio.

Entretanto, não existe $\phi \in \mathcal{M}(B(E))$, e portanto não existe bijeção entre $\Delta(B(E))$ e $\mathcal{M}(B(E))$.

Concluimos, dessa forma, que não podemos garantir (sempre) a existência de uma bijeção entre o conjunto dos ideais maximais e o espectro, em uma álgebra de Banach unitária e não comutativa. Entretanto, veremos no próximo capítulo que existe uma classe de álgebras de Banach com unidade e não comutativas que possuem a propriedade da bijeção. E, com este resultado em mãos, seremos capazes de exibir outros exemplos de álgebras de Banach com unidade e não comutativas cujo espectro é vazio.

5 ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULAR SUPERIORES

Neste capítulo, usaremos a letra $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ para denotar uma álgebra de Banach complexa comutativa e com unidade, e m representará um número natural maior ou igual a 2. Vimos no Exemplo 2.40, que o conjunto formado pelas matrizes $m \times m$ com entradas em $\mathcal{A}$, que denotamos por $M_m(\mathcal{A})$ e o conjunto das matrizes triangulares superiores $m \times m$ com entradas em $\mathcal{A}$, que denotamos por $UT_m(\mathcal{A})$, podem ser vistos como subálgebras fechadas e unitárias da álgebra de Banach $B(\mathcal{A}^m)$, a álgebra de Banach formada por todos os operadores lineares e contínuos em $\mathcal{A}^m$. Embora $M_m(\mathcal{A})$ e $UT_m(\mathcal{A})$ sejam álgebras de Banach unitárias, elas não são comutativas quando $m \geq 2$. Nosso objetivo principal neste capítulo é descrever o espectro de $UT_m(\mathcal{A})$, ou seja, descrever $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, para a partir daí, provarmos a existência da bijeção entre $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$ e o conjunto dos ideais maximais de $UT_m(\mathcal{A})$ ($\Delta(UT_m(\mathcal{A}))$).

Para facilitar o entendimento deste capítulo, fixaremos algumas notações e convenções adicionais. Seja $xE_{ij} = (a_{rs})$, onde $a_{ij} = x$ e $a_{rs} = 0$ caso contrário. Quando $x = 1_{\mathcal{A}}$ simplesmente escreveremos $1_{\mathcal{A}}E_{ij} = E_{ij}$. No que segue $\Omega = \{1, \dots, m\}$. Neste caso, temos a seguinte representação:

$$M_m(\mathcal{A}) = \left\{ A = (a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}E_{ij} \mid a_{ij} \in \mathcal{A} \quad \forall i, j \in \Omega \right\},$$

$$UT_m(\mathcal{A}) = \{ A = (a_{ij}) \in M_m(\mathcal{A}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i, j \in \Omega \text{ e } j < i \}.$$

Para simplificar a nossa escrita, de agora em diante, escreveremos $(i, j) \in \Omega$ quando tivermos $i, j \in \Omega$ tais que $j \geq i$. Dessa forma, dada uma matriz $A \in UT_m(\mathcal{A})$, temos:

$$A = \sum_{i,j=1, i \leq j}^m a_{ij}E_{ij} = \sum_{(i,j) \in \Omega} a_{ij}E_{ij}.$$

A seguinte propriedade será usada livremente ao longo deste capítulo: para todo $A \in M_n(\mathcal{A})$, dados $i, j, p, q \in \Omega$, temos

$$E_{ij}AE_{pq} = a_{jp}E_{iq}.$$

Se $A = I = \sum_{i=1}^m E_{ii}$, a matriz identidade de $M_m(\mathcal{A})$, a equação acima fornece o seguinte:

$$E_{ij}IE_{pq} = E_{ij}E_{pq} = \begin{cases} 0, & j \neq p \\ E_{iq}, & j = p \end{cases} \quad (5.1)$$

Neste ponto, exibiremos uma família de funcionais lineares multiplicativos não nulos em $UT_m(\mathcal{A})$. Posteriormente, mostraremos que de fato todo elemento de $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$ pertence a esta família (Teorema 5.4). Neste momento, é bastante oportuno lembrarmos que, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra complexa comutativa e unitária, sabemos da existência da bijeção entre os conjuntos não vazios $\Delta(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (Teorema 3.4). Agora, vejamos como construir a família supracitada. Fixemos $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $p \in \Omega := \{1, \dots, m\}$. Definamos $\phi_p : UT_m(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ por $\phi_p(A) = a_{pp}$ para todo $A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$. Abaixo, mostraremos que a função $\phi_{gp} = g \circ \phi_p$ é um funcional linear multiplicativo não nulo em $UT_m(\mathcal{A})$ com $g \in \mu(\mathcal{A})$. Portanto, a família $\mathcal{F} = \{\phi_{gp} | (p, g) \in \Omega \times \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$, de fato satisfaz a condição

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A})).$$

Em particular, $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$ é não vazio.

Proposição 5.1. *Sejam $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $p \in \Omega$. Então a função definida por*

$$\phi_{gp} = g \circ \phi_p \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A})).$$

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

- $\phi_{gp} \not\equiv 0$: Como $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e g é não nulo, podemos encontrar $x \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq 0$. Tomando a matrix $xE_{pp} \in UT_m(\mathcal{A})$ temos

$$\phi_{gp}(xE_{pp}) = g \circ \phi_p(xE_{pp}) = g(x) \neq 0.$$

Logo ϕ_{gp} é não nulo.

- Linearidade:

$$\begin{aligned} \phi_{gp}(A + \alpha B) &= \phi_{gp}((a_{ij} + \alpha b_{ij})) = g \circ \phi_p((a_{ij} + \alpha b_{ij})) = g(a_{pp} + \alpha b_{pp}) = \\ &= g(a_{pp}) + \alpha g(b_{pp}) = g \circ \phi_p(A) + \alpha g \circ \phi_p(B) = \\ &= \phi_{gp}(A) + \alpha \phi_{gp}(B). \end{aligned}$$

- Multiplicatividade:

Escrevemos $AB = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$. Logo $c_{pp} = \sum_{k=1}^m a_{pk}b_{kp}$. Levando-se em consideração que $A, B \in UT_m(\mathcal{A})$ temos, para $i > j$, que $a_{ij}, b_{ij} = 0$. Daí, se $k < p$ então $a_{pk} = 0$, e no caso que $k > p$ temos $b_{kp} = 0$. Dessa forma, resta apenas o caso $k = p$. Portanto, $c_{pp} = a_{pp}b_{pp}$. Como $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, obtemos:

$$\begin{aligned}\phi_{gp}(AB) &= g \circ \phi_p(AB) = g \circ \phi_p((c_{ij})) = g(c_{pp}) = g(a_{pp}b_{pp}) = g(a_{pp})g(b_{pp}) = \\ &= g \circ \phi_p(A)g \circ \phi_p(B) = \phi_{gp}(A)\phi_{gp}(B).\end{aligned}$$

□

Antes de provarmos o Teorema 5.4, que garantirá a igualdade $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A})) = \mathcal{F}$, precisaremos de um resultado técnico que será bastante útil.

Proposição 5.2. *Seja $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\phi(A) = 1$ ou $\phi(A) = 0$ sempre que $A^2 = A$. Em particular, $\phi(E_{ii}) = 1$ ou $\phi(E_{ii}) = 0$ para todo $i \in \Omega$. Além disso, existe um único $p \in \Omega$ tal que $\phi(E_{pp}) = 1$ e, conseqüentemente, $\phi(xE_{ii}) = 0$ para todo $i \in \Omega \setminus \{p\}$ e $x \in \mathcal{A}$.
2. $\phi(xE_{ij}) = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $i, j \in \Omega$, onde $i < j$.

Demonstração. Seja $A \in UT_m(\mathcal{A})$ tal que $A^2 = A$. Usando a multiplicatividade de ϕ , temos que $\phi(A) = \phi(A^2) = \phi(A)\phi(A)$. Sabemos que $\phi(A)$ é um elemento de $\mathbb{C}$. Logo se $\phi(A) \neq 0$ temos que $\phi(A)$ é invertível. Daí, obtemos que $\phi(A) = 1$, após multiplicar a equação acima por $\phi(A)^{-1}$. Em resumo, se A é um elemento idempotente de $UT_m(\mathcal{A})$, temos que $\phi(A) = 0$ ou $\phi(A) = 1$. Em particular, como E_{ii} é idempotente temos que $\phi(E_{ii})$ é zero ou 1.

Pela Proposição 2.84, ou pelo parágrafo anterior, sabemos que $\phi(I) = 1$, onde I é a unidade (matriz identidade) de $UT_m(\mathcal{A})$. Partindo disso, temos

$$1 = \phi(I) = \phi\left(\sum_{i=1}^m E_{ii}\right).$$

Pelo primeiro parágrafo, vemos que deve existir um único $p \in \Omega$ tal que $\phi(E_{pp}) = 1$, sendo os demais $\phi(E_{ii}) = 0$ (para $i \in \Omega \setminus \{p\}$). Notemos ainda que, dado $x \in \mathcal{A}$ qualquer,

$$\phi(xE_{ii}) = \phi(xE_{ii}^2) = \phi(xE_{ii})\phi(E_{ii}),$$

e conseqüentemente para $i \in \Omega \setminus \{p\}$, $\phi(xE_{ii}) = 0$. Assim concluímos o primeiro item desta proposição.

Agora, fixemos $x \in \mathcal{A}$, $i, j \in \Omega$ com $i < j$ e seja $p \in \Omega$ como em no item 1. Para finalizar a prova, utilizaremos a propriedade $xE_{ij} = E_{ii}(xE_{ij})E_{jj}$. Assim,

$$\phi(xE_{ij}) = \phi(E_{ii}(xE_{ij})E_{jj}) = \phi(E_{ii})\phi(xE_{ij})\phi(E_{jj}).$$

Como $i \neq j$ temos que $i \neq p$ ou $j \neq p$. Portanto $\phi(E_{ii}) = 0$ ou $\phi(E_{jj}) = 0$. Logo, $\phi(xE_{ij}) = 0$ para $i, j \in \Omega$ tal que $i < j$.

□

Observação 5.3. Pela proposição anterior, dado um funcional $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, existe um único $p \in \Omega$ tal que

$$\phi(A) = \sum_{(i,j) \in \Omega} \phi(a_{ij}E_{ij}) = \phi(a_{pp}E_{pp}),$$

onde $A = \sum_{(i,j) \in \Omega} a_{ij}E_{ij}$.

Agora estamos prontos para apresentar uma caracterização do conjunto $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$.

Teorema 5.4. *Seja $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$. Então existe um único $p \in \Omega$ e um único $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, tais que $\phi(A) = g \circ \phi_p(A)$, onde $\phi_p(A) = a_{pp}$ para todo $A \in UT_m(\mathcal{A})$. Em outras palavras, $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A})) = \{\phi_{gp} \mid (p, g) \in \Omega \times \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$. Tomemos $p \in \Omega$ que foi obtido de forma única na proposição anterior. Agora, consideremos a função $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(x) = \phi(xE_{pp})$. Mostraremos que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. De fato, como

$$g(1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}}E_{pp}) = \phi(E_{pp}) = 1,$$

podemos concluir que g é não nula. Fixemos $x, y \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. Temos:

- Linearidade:

$$\begin{aligned} g(x + \alpha y) &= \phi((x + \alpha y)E_{pp}) = \phi(xE_{pp} + \alpha yE_{pp}) = \\ &= \phi(xE_{pp}) + \alpha\phi(yE_{pp}) = g(x) + \alpha g(y). \end{aligned}$$

- Multiplicatividade:

$$g(xy) = \phi((xy)E_{pp}) = \phi((xE_{pp})(yE_{pp})) = \phi(xE_{pp})\phi(yE_{pp}) = g(x)g(y).$$

Portanto, $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Assim, dado $A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$, podemos inferir que $\phi(A) = g \circ \phi_p(A)$. De fato,

$$\phi(A) = \phi\left(\sum_{(i,j) \in \Omega} a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{(i,j) \in \Omega} \phi(a_{ij}E_{ij}).$$

Pela proposição anterior, $\phi(xE_{ij}) = 0$ para $(i, j) \neq (p, p)$. Logo

$$\phi(A) = \phi(a_{pp}E_{pp}) = g(a_{pp}) = g(\phi_p(A)) = g \circ \phi_p(A).$$

Para finalizar, precisamos verificar que a função $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ é única. Suponhamos que exista $h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $\phi(A) = h \circ \phi_p(A)$ para toda $A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$. Assim, para todo $x \in \mathcal{A}$, podemos tomar $A_x = xE_{pp}$ e temos:

$$g(x) = g \circ \phi_p(A_x) = \phi(A_x) = h \circ \phi_p(A_x) = h(x).$$

Isto é, $h = g$. □

Corolário 5.5. *Sejam $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, e $p \in \Omega$ satisfazendo as condições do Teorema 5.4. O conjunto*

$$\{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker(g)\}$$

é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$.

Demonstração. Notemos que

$$\ker(g \circ \phi_p) = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker(g)\}$$

pois

$$A \in \ker(g \circ \phi_p) \Leftrightarrow g(a_{pp}) = g \circ \phi_p(A) = 0 \Leftrightarrow a_{pp} \in \ker(g).$$

Logo, como $g \circ \phi_p \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, pela Observação 3.2,

$$\ker(g \circ \phi_p) = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker(g)\}$$

é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$. □

Uma consequência imediata é a seguinte:

Corolário 5.6. *Existe uma bijeção $\delta : \Omega \times \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$ que é definida por $\delta(p, g)(A) = g(a_{pp})$ para todo $A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$.*

Agora, concentraremos os nossos esforços em busca de uma descrição dos ideais maximais da álgebra $UT_m(\mathcal{A})$, uma vez já obtida uma caracterização para os funcionais lineares multiplicativos não nulos de $UT_m(\mathcal{A})$. Começemos com o seguinte lema:

Lema 5.7. *Seja Q um ideal próprio de $\mathcal{A}$. Então $Q(i) = \{A \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{ii} \in Q\}$ é um ideal próprio de $UT_m(\mathcal{A})$ para todo $i \in \Omega$. Além disso, $Q(i)$ é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$ se, e somente se, Q é um ideal maximal de $\mathcal{A}$. Em particular, $UT_m(\mathcal{A})$ não é uma álgebra simples.*

Demonstração. Sejam Q um ideal próprio de $\mathcal{A}$, e $i \in \Omega$. Inicialmente mostraremos que $Q(i)$ é um ideal próprio de $UT_m(\mathcal{A})$.

- $Q(i)$ é um subespaço vetorial de $UT_m(\mathcal{A})$, pois dados $A, B \in Q(i)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ e tomando-se $C = (c_{ij}) = A + \alpha B$ temos $c_{ii} = a_{ii} + \alpha b_{ii} \in Q$ uma vez que $a_{ii}, b_{ii} \in Q$ que é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Logo, $A + \alpha B \in Q(i)$.
- Dado $A = (a_{ij}) \in Q(i)$ e $X = (x_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$, então $(b_{ij}) = AX$ e $(c_{ij}) = XA \in Q(i)$. A demonstração se encontra a seguir. Estamos interessados apenas na posição (i, i) da matriz resultante, logo analisaremos somente b_{ii} e c_{ii} . Notemos que

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^m a_{ik}x_{ki} = a_{ii}x_{ii},$$

pois para $i > k$ temos $a_{ik} = 0$ e para $k < i$ temos $x_{ki} = 0$. Analogamente,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^m x_{ik} a_{ki} = x_{ii} a_{ii}.$$

Assim, como $a_{ii} \in Q$ e Q é um ideal, temos que $a_{ii}x_{ii}, x_{ii}a_{ii} \in Q$. Daí $AX, XA \in Q(i)$. Portanto, $Q(i)$ é um ideal - estamos usando o fato que $Q(i)$ é um subespaço vetorial de $UT_m(\mathcal{A})$.

- $Q(i)$ é um ideal próprio, pois como Q é um ideal próprio de $\mathcal{A}$, existe $x \in \mathcal{A} \setminus Q$. Assim, tomando matriz $A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A})$ tal que $a_{ii} = x$, temos que $A \notin Q(i)$.

Para concluir, mostraremos a equivalência $Q(i)$ é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$ se, e somente se, Q é um ideal maximal de $\mathcal{A}$. Suponhamos que $Q(i)$ seja um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$. Seja J um ideal próprio de $\mathcal{A}$ tal que $Q \subset J$. Isso implicaria que $Q(i)$ é subconjunto do ideal próprio $J(i)$. Portanto $J(i) = Q(i)$. Logo $Q = J$. Assim Q é um ideal maximal de $\mathcal{A}$.

Reciprocamente, suponhamos que Q seja um ideal maximal de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach complexa comutativa e unitária, pelo Teorema 3.3, existe um funcional g em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $Q = \ker g$. Notemos que $Q(i) = \ker g \circ \phi_i$. De fato, temos que a matriz $A = (a_{ij})$ de $UT_m(\mathcal{A})$ está em $Q(i)$ se, e somente se, $a_{ii} \in Q = \ker g$, isto é, se, e somente se, $g(a_{ii}) = g(\phi_i(A)) = 0$, se, e somente se, $A \in \ker g \circ \phi_i$. Portanto, como $g \circ \phi_i \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, temos que $Q(i) = \ker g \circ \phi_i$ é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$, pelo observado em 3.2.

□

Observação 5.8. O ideal $\{0\}$ não é um ideal maximal em $UT_m(\mathcal{A})$. De fato, pelo Lema acima, existe um ideal $Q(i)$ em $UT_m(\mathcal{A})$ tal que $\{0\} \subsetneq Q(i) \subsetneq UT_m(\mathcal{A})$.

Agora mostraremos que todo ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$ é o núcleo de um certo funcional $\phi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$.

Teorema 5.9. *Seja J um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$. Então existem um ideal maximal M de $\mathcal{A}$ e $p \in \Omega$ tais que*

$$J = M(p) = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in M\}.$$

Em particular, existe $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que

$$J = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker g\} = \ker g \circ \phi_p.$$

Demonstração. Seja J um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$. Pela Observação 5.8, $J \neq \{0\}$. Para cada par $(i, j) \in \Omega$, definimos o conjunto $J_{ij} = \{a_{ij} \mid A = (a_{pq}) \in J\}$ - o conjunto de todas as (i, j) -ésimas entradas de matrizes em J . Afirmamos que J_{ij} é um ideal em $\mathcal{A}$. De fato, dados $x, y \in \mathcal{A}$ e $a \in J_{ij}$, existe uma matriz $A = (a_{pq}) \in J$ tal que $a_{ij} = a$. Daí, como J é um ideal de $UT_m(\mathcal{A})$, temos que $(xE_{ii})A(yE_{jj}) \in J$, com

$$(xE_{ii})A(yE_{jj}) = (xa_{ij}y)E_{ij} = (xay)E_{ij} \in J.$$

Portanto $xay \in J_{ij}$. Assim, concluímos que J_{ij} é um ideal de $\mathcal{A}$, pois claramente J_{ij} é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$.

Agora, fixemos o par $(i, j) \in \Omega$. Para k tal que $(i, k), (k, j) \in \Omega$, isto é, $i \leq k \leq j$, temos a inclusão $J_{ik} \subset J_{ij}$. De fato, dado $x \in J_{ik}$, existe $X = (x_{pq}) \in J$ tal que $x_{ik} = x$. Como J é um ideal de $UT_m(\mathcal{A})$, temos que $x_{ik}E_{ij} = E_{ii}XE_{kj} \in J$, assim $x = x_{ik} \in J_{ij}$. Notemos que existe $(p, p) \in \Omega$ tal que $J_{pp} \neq \mathcal{A}$. Se $J_{pp} = \mathcal{A}$ para todo $p \in \{1, \dots, m\}$, teríamos $J_{pj} = \mathcal{A}$ sempre que $(p, j) \in \Omega$, pois vimos que $\mathcal{A} = J_{pp} \subset J_{pj}$ para $(p, j) \in \Omega$. Daí, teríamos $J = UT_m(\mathcal{A})$, o que é uma contradição com a hipótese de maximalidade de J .

Tomemos $p \in \Omega$, onde $M = J_{pp} \neq \mathcal{A}$. Pelo Lema 5.7, $M(p)$ é um ideal próprio de $UT_m(\mathcal{A})$. Além disso, $J \subset M(p) = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in J_{pp}\}$, vez que todas as matrizes de J têm a (p, p) -ésima entrada em J_{pp} , logo estão em $M(p)$. Pela maximalidade de J , concluímos que $J = M(p)$. Novamente, pelo Lema 5.7, como $M(p)$ é um ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$, então M deve ser um ideal maximal de $\mathcal{A}$. Em particular, existe único $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $\ker g = M$, e daí

$$J = \{A = (a_{ij}) \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker g\} = \ker g \circ \phi_p.$$

□

Finalmente, a partir dos Teoremas 5.4 e 5.9, podemos enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.10. A função $\Theta : \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A})) \rightarrow \Delta(UT_m(\mathcal{A}))$, $\phi \mapsto \ker(\phi)$, é uma bijeção.

Demonstração. Sejam $\phi, \psi \in \mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$, onde $\phi \neq \psi$. Pelo Teorema 5.4, existem únicos $g, h \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, e $p, q \in \Omega$ tais que $\phi = g \circ \phi_p$ e $\psi = h \circ \phi_q$. Se $p \neq q$, então $\ker(\phi) = \{A \in UT_m(\mathcal{A}) \mid a_{pp} \in \ker(g)\} \neq \ker(\psi) = \{B \in UT_m(\mathcal{A}) \mid b_{qq} \in \ker(h)\}$. Se $p = q$, então $g \neq h$. Daí, $\ker(\phi) \neq \ker(\psi)$. Logo a aplicação Θ é injetiva. Por outro lado, pelo Teorema 5.9, essa função é sobrejetora pois todo ideal maximal de $UT_m(\mathcal{A})$ é núcleo de um funcional linear multiplicativo em $\mathcal{M}(UT_m(\mathcal{A}))$. □

A partir da Proposição 5.2 podemos inferir que $\mathcal{M}(M_m(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{M}(B(\mathcal{A}^m))$ são ambos vazios.

Exemplo 5.11. O espectro da álgebra das matrizes $M_m(\mathcal{A})$ é vazio. Suponhamos que exista $\phi \in \mathcal{M}(M_m(\mathcal{A}))$. O mesmo argumento usado na prova da Proposição 5.2 mostra a existência de um único $p \in \Omega$ tal que $\phi(E_{pp}) = 1$ e $\phi(E_{ij}) = 0$ para todo par $(i, j) \in \Omega \times \Omega$ tal que $(i, j) \neq (p, p)$. Tomemos $A = E_{pp} + E_{ip} + E_{pi}$ onde $i \in \Omega \setminus \{p\}$. Usando a equação (5.1), podemos mostrar

$$A^2 = 2E_{pp} + E_{ip} + E_{pi} + E_{ii}.$$

Portanto,

$$\phi(A^2) = 2\phi(E_{pp}) = 2.$$

Por outro lado,

$$\phi(A^2) = (\phi(A))^2 = (\phi(E_{pp}))^2 = 1,$$

gerando uma contradição.

Exemplo 5.12. O espectro da álgebra das aplicações lineares limitadas $B(\mathcal{A}^m)$ é vazio. Suponhamos que o espectro seja não vazio e tomemos $\phi \in \mathcal{M}(B(\mathcal{A}^m))$. Podemos enxergar $M_m(\mathcal{A})$ como uma subálgebra de $B(\mathcal{A}^m)$ (veja Exemplo 2.40). A restrição de ϕ a $M_m(\mathcal{A})$ será contínua, linear e multiplicativa em $M_m(\mathcal{A})$. Dessa forma, pelo exemplo anterior, podemos concluir que $\phi|_{M_m(\mathcal{A})} \equiv 0$. Entretanto, notemos que a identidade $I \in M_m(\mathcal{A})$. Assim, $0 = \phi|_{M_m(\mathcal{A})}(I) = \phi(I)$. Portanto, $\phi \equiv 0$ contradizendo o fato desta aplicação estar no espectro de $B(\mathcal{A}^m)$.

REFERÊNCIAS

- 1 A. Pietsch, *History of Banach Spaces and linear operators*. Birkhäuser, 2007.
- 2 F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*. Springer, 1973.
- 3 P. de Oliveira Emerick, *Uma Introdução às Álgebras de Banach e o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2022.
- 4 H. G. Dales, *Banach Algebra and Automatic Continuity*. Clarendon Press, Oxford, 2nd ed., 2000.
- 5 W. Franca and L. Moraes, “On the spectrum of a class of non-commutative Banach algebras,” *Archiv der Mathematik*, vol. 118, pp. 529–537, 03 2022.
- 6 J. R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2nd ed., 2000.
- 7 E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. Wiley, 1978.