**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Bruno Moreira Fernandes**

# Uma Introdução à Teoria de Ideais 2-Absorventes de Anéis Comutativos Unitários

Juiz de Fora
2025

**Bruno Moreira Fernandes**

**Uma Introdução à Teoria de Ideais 2-Absorventes de Anéis Comutativos Unitários**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. **Willian Versolati França**

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moreira Fernandes, Bruno.
Uma Introdução à Teoria de Ideais 2-Absorventes de Anéis Comutativos Unitários / Bruno Moreira Fernandes. – 2025.
57 f.

Orientador: **Willian Versolati França**
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Ideais 2-Absorventes. 2. Anéis Comutativos Unitários. 3. I. Versolati França, Willian, orient. II. Título.

**Bruno Moreira Fernandes**

**Uma Introdução à Teoria de Ideais 2-Absorventes de Anéis Comutativos Unitários**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 01 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Willian Versolati França** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Jorge José Garcés Pérez**

Universidad Politécnica de Madrid

**Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Júnior**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 11/08/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Nelson Dantas Louza Junior**, **Professor(a)**, em 12/08/2025, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jorge Garces Pérez**, **Usuário Externo**, em 12/08/2025, às 12:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2545174** e o código CRC **9007610D**.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus. Agradeço também à minha família e ao meu orientador, Willian Versolati França, por todo o apoio e sugestões dadas para a confecção deste trabalho.

**RESUMO**

Um ideal primo $P$ de um anel comutativo unitário $R$ é um ideal próprio de $R$ com a seguinte propriedade: para todo par $a, b \in R$ tal que $ab \in P$, tem-se $a \in P$ ou $b \in P$. Neste sentido, pode-se dizer que os ideais primos “absorvem elementos”. O objetivo neste trabalho é estudar uma generalização desta propriedade de “absorção de elementos” e explorar algumas outras propriedades que dela derivam.

Palavras-chave: Ideais 2-Absorventes. Anéis Comutativos Unitários.

**ABSTRACT**

A prime ideal $P$ of a unitary associative ring $R$ is a proper ideal of $R$ with the following property: for all $a, b \in R$ such that $ab \in P$, we have $a \in P$ or $b \in P$. In this sense, it can be said that prime ideals “absorb elements”. The objective in this work is to study a generalization of this property of “element absorption" and explore some other properties that derive from it.

Keywords: 2-Absorbing Ideals. Unitary Commutative Rings.

## LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\forall$ | Para todo. |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto dos números inteiros. |
| $\mathbb{N}_k$ | Conjunto dos números naturais a partir do inteiro não negativo $k$ (se $k = 1$, escrevemos $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$). |

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

O nosso foco neste trabalho será o de apresentar o conceito de *ideais 2-absorventes* em anéis comutativos unitários. No que segue, $R$ será um anel comutativo unitário. Neste cenário, A. Badawi [1, p.417] (2007) introduziu o conceito, e também apresentou exemplos de ideais 2-absorventes. De acordo com [1, p.417], um ideal próprio $I$ de $R$ é dito 2-absorvente quando, dados $a, b, c \in R$ arbitrários tais que $abc \in I$, temos necessariamente uma das três possibilidades: $ab \in I$, $ac \in I$ ou $bc \in I$. De acordo com a definição, é claro que todo ideal primo $P$ de $R$ é 2-absorvente. Entretanto em [1], o autor fornece ferramentas necessárias para que possamos concluir que nem todo ideal 2-absorvente de $R$ é necessariamente um ideal primo - fato este que será devidamente ilustrado ao longo do trabalho (veja o Exemplo 3.1.1). Deste modo, vemos que A. Badawi encontrou uma nova classe de ideais próprios de $R$ e, ao que tudo indica, tal classe contém propriamente a classe dos ideais primos, que em um certo sentido, preservam a propriedade de absorção de elementos.

Além de introduzir este novo conceito, A. Badawi também provou em [1] algumas propriedades bem gerais a respeito dos ideais 2-absorventes de um anel comutativo $R$. Ao longo deste trabalho, nós apresentaremos os seguintes resultados de [1]:

(i) Se $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, então $I$ possui, no máximo, dois ideais primos minimais (Teorema 3.2.2). Nestas condições, o radical $\sqrt{I}$ de $I$ só pode ter dois formatos: ou $\sqrt{I} = P$, onde $P$ é o único ideal primo minimal sobre $I$, ou $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$, onde $P_1$ e $P_2$ são os únicos ideais primos minimais sobre $I$, distintos entre si (Teorema 3.2.1).

(ii) Se $I$ é um ideal próprio de $R$ tal que $I \neq \sqrt{I}$, então $I$ é 2-absorvente se somente se para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$, o ideal quociente de $I$ pelo ideal principal $xR$ é primo (Teoremas 3.3.3 e 3.3.4).

(iii) Se $P$ é um ideal primo dividido de $R$ e $I$ é um ideal próprio de $R$ tal que $\sqrt{I} = P$, então $I$ é 2-absorvente se e somente se $I$ é $P$-primário e $P^2 \subseteq I$ (Teorema 3.4.2).

(iv) Se $R$ é um domínio de valorização, então um ideal próprio e não nulo $I$ de $R$ é 2-absorvente se e somente se $I$ é $P$-primário, com $P^2 \subseteq I$, onde $P$ é um ideal primo de $R$. Equivalentemente, $I \trianglelefteq R$ é 2-absorvente se e somente se $I = P$ ou $I = P^2$ (Teorema 3.5.1).

O nosso trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No capítulo preliminar (Capítulo 2), nós estabeleceremos notações e convenções que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Além disso, nós revisaremos os seguintes conceitos - juntamente com alguns resultados clássicos relacionados: Divisibilidade, divisores de zero e unidades; Ideais quocientes, Ideias primos e primários, Condições de cadeia, Dimensão de Krull, Localizações e Domínios de valorização.

- No Capítulo 3, nós focaremos no estudo dos ideais 2-absorventes em anéis comutativos. Mais precisamente, estudaremos tais ideais descrevendo seus ideais primos minimais e os caracterizaremos em termos de ideais quocientes. Além disso, caracterizaremos tais ideais quando os mesmos forem primários, ou quando estiverem contidos em um domínio de valorização.

# 2 PRELIMINARES

Começaremos esta seção com algumas definições básicas.

**Definição 2.0.1.** *Um **anel** é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de duas operações, uma soma $(+) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, e um produto $(\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, onde $(\mathcal{A}, +, 0_{\mathcal{A}})$=$(\mathcal{A}, +, 0)$ é um grupo aditivo e, além disso, para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, temos $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ e $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Denotaremos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$. Além disso, dizemos que $\mathcal{A}$ é um **anel associativo** quando $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **anel comutativo** quando $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Por fim, dizemos que $\mathcal{A}$ é um **anel unitário** quando existe $1 = 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

**Definição 2.0.2.** *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, 0)$ um anel e $S$ um subconjunto de $\mathcal{A}$. Dizemos que $S$ é subanel de $\mathcal{A}$ quando $S = (S, +, \cdot, 0)$ é um anel. No caso que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, 0, \cdot, 1_{\mathcal{A}})$ é um anel unitário, dizemos que $S$ é um subanel unitário quando $S = (S, +, \cdot, 0, 1_{\mathcal{A}})$.*

**Definição 2.0.3.** *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ um anel e $I$ um subanel de $\mathcal{A}$. Dizemos que $I$ é um **ideal à esquerda** de $\mathcal{A}$ quando $xw \in \mathcal{I}$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $w \in \mathcal{I}$. Analogamente, dizemos que $\mathcal{I}$ é um **ideal à direita** de $\mathcal{A}$ quando $wx \in \mathcal{I}$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $w \in \mathcal{I}$. Dizemos que $I$ é um **ideal** de $\mathcal{A}$ quando $I$ é um ideal à esquerda e também um ideal à direita de $\mathcal{A}$, e neste caso escrevemos $I \trianglelefteq \mathcal{A}$. Quando $I \neq \mathcal{A}$ dizemos que $I$ é um **ideal próprio** de $\mathcal{A}$ - notação $I \ntrianglelefteq \mathcal{A}$.*

Ao longo deste trabalho, a letra $R = (R, +, \cdot, 0_R, 1_R)$ representará um anel (associativo) comutativo e unitário. Além disso, salvo menção contrária, todo subanel $S$ de $R$ será da forma $S = (S, +, \cdot, 0, 1_R)$, ou seja, nossos subanéis serão sempre unitários. Em alguns casos, denotaremos o ideal nulo de um subanel $S$ de $R$ por $\mathbf{0}_S$.

**Definição 2.0.4.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal de $R$. Em $R$ definimos a seguinte relação de equivalência:*

$$x \sim y := (x - y) \in I.$$

*Para cada $x \in R$, a classe de equivalência que contém o elemento $x$ será denotada por $\overline{x} = x + I$. O conjunto formado todas estas classes será denotado por $R/I = \{\overline{x} : x \in R\}$. A aplicação $\pi : R \to R/I$ com $x \mapsto \overline{x}$ é dita a **aplicação canônica** (ou aplicação quociente). Em $R/I$ nós podemos definir as seguintes operações:*

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y} \qquad e \qquad \overline{x}\overline{y} := \overline{xy},$$

*onde $\overline{x}, \overline{y}$ são elementos arbitrários do conjunto $R/I$. Com as operações acima definidas, $R/I = (R/I, +, \cdot, \overline{0}, \overline{1})$ torna-se um anel comutativo unitário chamado de anel quociente.*

**Definição 2.0.5.** *Sejam $S$ um subanel de $R$, $x \in S$, e $X$ um subconjunto não vazio de $S$. Definimos os seguintes conjuntos (veja [2, p.251]):*

*(i)* $SX := \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \mid s_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ *:= o* ***ideal à esquerda gerado por*** $X$ ***em*** $S$.

*(ii)* $XS := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \mid s_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ *:= o* ***ideal à direita gerado por*** $X$ ***em*** $S$.

*(iii)* $\langle X \rangle_S = SXS := \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i' x_i s_i \mid s_i', s_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ *:= o* ***ideal bilateral gerado por*** $X$ ***em*** $S$.

*Como $R$ é comutativo, temos $XS = SX = SXS$. Se $S = R$, então $\langle X \rangle_S = \langle X \rangle$. Quando $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ é finito, escrevemos $\langle X \rangle_S = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle_S$. Além disso, se $X = \{x\}$, então*

$$\langle X \rangle_S = \langle x \rangle_S := \left\{ sx = xs \,|\, s \in S \right\}$$

*é o* ***ideal principal*** *gerado por $x$ em $S$.*

**Definição 2.0.6.** *Sejam $S$ um subanel de $R$ e $X$ um subconjunto não vazio de $S$. Definimos o seguinte conjunto:*

$$\mathbb{Z}[X] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot x_{i,1} \cdots x_{i,k_i} \mid z_i \in \mathbb{Z},\ k_i \in \mathbb{N},\ x_{i,k_i} \in X \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Quando $S = \mathbb{Z}[X]$, dizemos que $X$ é um* ***conjunto gerador*** *de $S$ - neste caso dizemos que o subanel $S$ é* ***gerado por*** *$X$. Se, adicionalmente, $X$ é finito, ou seja, se $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, dizemos que $x_1, \ldots, x_n$ são os* ***geradores*** *de $S$ e que $S$ é* ***finitamente gerado****.*

**Observação 2.0.1.** *Sejam $R$ um anel, $S$ um subanel de $R$ e $X \subseteq S$ um conjunto não vazio. Então:*

*(i) $0 \in \mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$ é fechado em relação as operações de soma e produto de $S$. Se, adicionalmente, $1_S = 1 \in \mathbb{Z}[X]$, então $\mathbb{Z}[X]$ é um subanel de $S$.*

*(ii) Se $X$ é um conjunto gerador de $S$, então $\langle X \rangle_S \subseteq S = \mathbb{Z}[X]$, pois $\langle X \rangle_S$ é o ideal gerado por $X$ em $S$. Em outras palavras, $\langle X \rangle_S \trianglelefteq S$. A inclusão contrária é verdadeira, ou seja, $\langle X \rangle_S$ não é um ideal próprio de $S$ quando $X$ é fechado com relação ao produto por elementos de $S$, isto é, $sx, xs \in X$ para todo $x \in X$, e $s \in S$ - em particular $x_1 x_2 \in X$ para todo $x_1, x_2 \in X$, pois $X \subset S$. De fato, como $S$ é unitário vemos que $z = z \cdot 1 \in S$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Portanto, $z(x_1 \cdots x_n) \in X$ sempre que $x_1, \ldots, x_n \in X$. Daí, obtemos $\mathbb{Z}[X] \subseteq \langle X \rangle_S$.*

**Definição 2.0.7.** *Sejam $A, B, A_1, \dots, A_n$ ideais de $R$. Definimos os seguintes ideais de $R$:*

- $A_1 + \cdots + A_n := \{a_1 + \cdots + a_n \,:\, a_i \in A_i,\ i = 1, \dots, n\}$.
- $A_1 \cdots A_n := \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_{1,j} \cdots a_{n,j} \,:\, a_{i,j} \in A_i,\ i = 1, \dots, n,\ k \in \mathbb{N} \right\}$. *Neste caso, temos* $A_1 \cdots A_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. *Se $A_i = A$ para todo $i = 1, \dots, n$, então o conjunto $A_1 \cdots A_n$ será denotado por $A^n$.*

Ainda são válidas as seguintes regras para expoentes:

(i) $A^m A^n = A^{m+n}$ (produtos de potências): De fato, um elemento de $A^m A^n$ é uma soma de produtos (palavras) da forma $(a_1 \cdots a_m)(b_1 \cdots b_n)$, onde $a_i, b_j \in A$, para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Por sua vez, $(a_1 \cdots a_m)(b_1 \cdots b_n)$ é um produto (palavra) de $m + n$ elementos (letras) de $A$ e, portanto, pertence a $A^{m+n}$. Isto mostra que $A^m A^n \subseteq A^{m+n}$. Reciprocamente, qualquer elemento de $A^{m+n}$ é soma de produtos (palavras) da forma $a_1 \cdots a_{m+n}$, onde $a_k \in A$, para todo $k = 1, \dots, m + n$. Por associatividade, $a_1 \cdots a_{m+n}$ pode ser reescrito como a justaposição de uma subpalavra de tamanho $m$ e outra de tamanho $n$, mostrando que qualquer elemento de $A^{m+n}$ pertence a $A^m A^n$.

(ii) $(A^m)^n = A^{mn}$ (potência de potência): Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Notemos que $(A^m)^1 = A^m = A^{m \cdot 1}$. Além disso, pela regra do produto de potências, $(A^m)^2 = A^m A^m = A^{m \cdot 2}$. Agora, seja $n \geq 3$ e suponhamos, por hipótese de indução, que a regra da potência de potência seja verdadeira para todo $1 \leq k \leq n$. Então, novamente pela regra do produto de potências, temos:

$$(A^m)^{n+1} = \underbrace{A^m \cdots A^m}_{(n+1)\text{-vezes}} = \underbrace{A^m \cdots A^m}_{(n)\text{-vezes}} A^m = A^{mn} A^m = A^{nm+m} = A^{m(n+1)}.$$

Logo, por indução sobre $n$, mostramos que $(A^m)^n = A^{mn}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Se os elementos de $A$ e $B$ comutam entre si, então $(AB)^n = A^n B^n$ (a potência do produto é o produto das potências). De fato, o caso $n = 1$ é claro. Para $n = 2$, usamos o fato que $ab = ba$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = A^2 B^2.$$

Agora, suponhamos que o resultado vale para $n$, ou seja, $(AB)^n = A^n B^n$. Assim,

$$(AB)^{n+1} = (AB)^n (AB) = (A^n B^n)(AB).$$

Utilizando novamente a hipótese de que os elementos de $A$ e $B$ comutam entre si, obtemos

$$(AB)^{n+1} = (A^nB^n)(AB) = A^n(B^nA)B = A^n(AB^n)B = A^{n+1}B^{n+1}.$$

Logo, $(AB)^n = A^nB^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sempre que os elementos de $A$ e $B$ comutam entre si.

**Definição 2.0.8.** *Sejam $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto não vazio e $\{(R_k, +, \cdot, 0_{R_k}, 1_{R_k}) : k \in \mathbb{K}\}$ uma família (não necessariamente finita) de anéis. O conjunto*

$$\prod_{k\in\mathbb{K}} R_k := \{\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) = (a_k)_{k\in\mathbb{K}} \,:\, a_k \in R_k \textit{ para todo } k \in \mathbb{K}\}$$

*munido com as operações de soma e multiplicação coordenada a coordenada, isto é,*

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_k)_{k\in\mathbb{K}} + (b_k)_{k\in\mathbb{K}} := (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{K}}\\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_k)_{k\in\mathbb{K}} \cdot (b_k)_{k\in\mathbb{K}} := (a_kb_k)_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

*é um anel que será chamado de* ***produto direto externo****, ou simplesmente,* ***produto direto*** *da família $R_k$. Neste caso, as identidades aditiva e multiplicativa são, respectivamente,*

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (0_{R_k})_{k\in\mathbb{K}} = (0_{R_1}, \ldots, 0_{R_k}, \ldots)\\ \mathbf{1} &= (1_{R_k})_{k\in\mathbb{K}} = (1_{R_1}, \ldots, 1_{R_k}, \ldots).\end{aligned}$$

*No caso que $(R_k, +, \cdot, 0_{R_k}, 1_{R_k}) = (R, +, \cdot, 0_R, 1_R)$ para todo $k \in \mathbb{K}$, então o produto direto da família $\{(R_k, +, \cdot, 0_{R_k}, 1_{R_k}) : k \in \mathbb{K}\}$ será denotado por $R^{(\mathbb{K})}$ (resp. $R^{(n)}$, se $|\mathbb{K}| = n$). Se, para todo $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) = (a_k)_{k\in\mathbb{K}} \in \prod_{k\in\mathbb{K}} R_k$, temos $a_k \neq 0$ somente para um número finito de índices $k \in \mathbb{K}$, então $\prod_{k\in\mathbb{K}} R_k$, munido com as operações acima, é chamado* ***soma direta externa****, ou simplesmente* ***soma direta****, da família $\{R_k, +, \cdot, 0_{R_k}, 1_{R_k} \,:\, k \in \mathbb{K}\}$. Denotamos tal soma direta externa por $\bigoplus_{k\in\mathbb{K}} R_k$. Além disso, quando $\mathbb{K} = \{k_1, \ldots, k_n\}$ é finito, com $R_{k_i} \neq R_{k_j}$ para algum par de elementos $k_i, k_j \in \mathbb{K}$ (distintos), temos*

$$\prod_{k\in\mathbb{K}} R_k = \bigoplus_{j=1}^{n} R_{k_j}.$$

**Definição 2.0.9.** *Seja $I$ um ideal próprio de $R$. Dizemos que $I$ é um ideal* ***maximal*** *de $R$ quando $I$ não está contido propriamente em nenhum outro ideal próprio de $R$. Em outras palavras:*

*(i) Se $I \subsetneq J \trianglelefteq R$, então $J = R$.*

*Dizemos que $R$ é um* ***anel local*** *quando possui apenas um único ideal maximal $M$. Quando necessário, denotaremos um anel local com seu único ideal maximal $M$ pelo par $(R, M)$.*

**Definição 2.0.10.** *Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que dois ideais próprios $I$ e $J$ de $R$ são **comaximais** quando $R = I + J$. De uma maneira geral, dizemos que os ideais próprios $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ de $R$ (dois a dois distintos) são **dois a dois comaximais** se $I_k$ e $I_\ell$ são comaximais, isto é, $R = I_k + I_\ell$ para todo $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ com $k \neq \ell$.*

**Lema 2.0.1.** *Seja $R$ um anel comutativo. Então valem as seguintes afirmações:*

*(i) Sejam $I, J$ dois ideais próprios de $R$. Então $I$ e $J$ de $R$ são comaximais se e somente se existem $x \in I$ e $y \in J$ tais que $1 = x + y$.*

*(ii) Sejam $M$ um ideal maximal de $R$, e $I$ um ideal próprio de $R$ tais que $I \nsubseteq M$. Então $M$ e $I$ são ideais comaximais. Em particular, qualquer família finita de ideais maximais $\{M_i\}_{1 \leq i \leq n}$ (dois a dois distintos) com $n \geq 2$, é um conjunto formado por ideais que são dois a dois comaximais.*

*(iii) Sejam $M_1$ e $M_2$ dois ideais maximais de $R$ distintos entre si. Então $M_1 \cap M_2 = M_1 M_2$.*

*(iv) Se $M_1$ e $M_2$ são dois ideais maximais (distintos) de $R$, então $M_1^2$ e $M_2^2$ são comaximais.*

*(v) Se $\{I_k\}_{1 \leq k \leq n}$ é uma família de ideais de $R$ que são dois a dois comaximais, então*

$$\bigcap_{k=1}^{n} I_k = I_1 \cdots I_n.$$

**Demonstração.** Faremos as demonstrações separadamente.

(i) Esta afirmação segue diretamente da Definição 2.0.10.

(ii) Notemos que $M \subsetneq M + I$. Daí, pela maximalidade de $M$, segue que $M + I = R$.

(iii) Primeiramente, destacamos que a inclusão $M_1 M_2 \subseteq M_1 \cap M_2$ é sempre verdadeira. Suponhamos que $M_1$ e $M_2$ são comaximais, isto é, que $M_1 + M_2 = R$. Seja $x \in M_1 \cap M_2$. Analogamente, como $M_1 + M_2 = R$, podemos escrever $1 = a + b$, onde $a \in M_1$ e $b \in M_2$. Consequentemente $x = x \cdot 1 = x(a + b) = xa + xb$. Como $x \in M_2$, e $a \in M_1$, vemos que o produto $xa$ pertence a $M_2 M_1 = M_1 M_2$. Portanto, $xa \in M_1 M_2$. Analogamente, $xb$ pertence a $M_1 M_2$. Portanto, $x = xa + xb \in M_1 M_2$ para todo $x \in M_1 \cap M_2$.

(iv) Por hipótese, podemos escrever $1 = x + y$, com $x \in M_1$ e $y \in M_2$. Assim,

$$1 = 1^3 = (x + y)^3 = \underbrace{x^2 x + 3x^2 y}_{\in M_1^2} + \underbrace{3xy^2 + y^2 y}_{\in M_2^2}.$$

O resultado agora segue diretamente do item (i).

(v) Primeiramente destacamos que a inclusão $I_1 \cdots I_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} I_k$ é sempre verdadeira pois cada $I_k$ é um ideal de $R$. A inclusão inversa será verificada por indução. O caso $n = 2$ segue diretamente dos argumentos apresentados no item $(iii)$.

Agora, suponhamos por hipótese de indução que a inclusão seja verdadeira para um certo $n \geq 2$ (fixado). Seja $I_1, \ldots, I_{n+1}$ uma família de ideais dois a dois comaximais. Consideremos o seguinte ideal

$$J := I_1 \cdots I_n = \bigcap_{k=1}^{n} I_k.$$

Mostraremos que $J$ e $I_{n+1}$ são comaximais. De fato, sabemos que $I_k + I_{n+1} = R$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existem $x_k \in I_k$, e $y_k \in I_{n+1}$ tais que $x_k + y_k = 1$. Então $x_k = 1 - y_k$. Portanto,

$$(1 - y_1) \cdots (1 - y_k) \cdots (1 - y_n) = x_1 \cdots x_k \cdots x_n \in J.$$

Consequentemente,

$$(1 - y_1) \cdots (1 - y_k) = 1 + z,$$

onde $z \in I_{n+1}$. Daí, obtemos

$$1 = x_1 \cdots x_k \cdots x_n + (-z).$$

Pelo item (i), concluímos que $J$ e $I_{n+1}$ são comaximais. Dessa forma, temos

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} I_k = \left( \bigcap_{k=1}^{n} I_k \right) \cap I_{n+1} = J \cap I_{n+1} = JI_{n+1} = (I_1 \cdots I_n)I_{n+1}.$$

E isto completa a demonstração.

□

**Lema 2.0.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $\{M_k\}_{1 \leq k \leq n}$ uma família finita de ideais maximais (dois a dois distintos com $n \geq 3$). Então para cada $i = 1, \ldots, n$, vale a igualdade*

$$R = M_i + \hat{M}_i,$$

*onde $\hat{M}_i$ representa o produto $M_1 \cdots M_{i-1} M_{i+1} \cdots M_n$.*

**Demonstração.** Fixemos $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por simplicidade escrevemos $J = \hat{M}_i$. É suficiente mostrar que $M_i + J \neq M_i$, pois $M_i \trianglelefteq M_i + J$. Suponhamos, por hipótese de absurdo, que $J \subseteq M_i$. Isto significa $M_1 M_2 \cdots M_{i-1} M_{i+1} \cdots M_n \subseteq M_i$. Pela Observação 2.3.2, $M_i$ é um ideal primo de $R$. Daí, pelo Lema 2.3.1, temos $M_1 \subset M_i$ ou $M_1 \subset M_2 M_3 \cdots M_{i-1} M_{i+1} \cdots M_n$. Repetindo este argumento um número finito de vezes, vemos que podemos garantir que existe algum $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ tal que $M_j \subseteq M_i$.

Pela maximalidade de $M_j$, concluímos que $M_j = M_i$, uma contradição. Logo, $J$ não está contido em $M_i$. Dessa forma, $M_i + J = R$, pois $J$ é um ideal que não está contido em $M_i$. E isto completa a demonstração.

□

**Definição 2.0.11.** *Uma aplicação $f : R_1 \to R_2$ é dita um homomorfismo de anéis quando $f$ é simultaneamente aditiva e multiplicativa. Além disso, assumimos que $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$. Neste contexto, definimos os seguinte conjuntos:*

*(i) $ker(f) = \{r_1 \in R_1 : f(r_1) = 0\} \trianglelefteq R_1$ - o núcleo de $f$. Além disso, $f$ é injetiva se e somente se $ker(f) = \{0\}$.*

*(ii) $Im(f) = f(R_1) = \{f(r_1) : r_1 \in R_1\}$ - a imagem de $f$. Notemos que $Im(f)$ é um subanel de $R_2$.*

*Sob a hipótese adicional de que $f$ é sobrejetora temos o seguinte:*

*(iii) Se $I$ é um ideal de $R_1$, então $f(I)$ é um ideal de $R_2$.*

O conteúdo básico a respeito da `Teoria de Anéis e Ideais` que aqui será utilizado, mas não explicitamente definido, pode ser encontrado em [2, 3, 4, 5, 6, 7].

## 2.1 Divisores, divisores de zero e unidades

**Definição 2.1.1.** *([8, p.97, 98]). Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que um elemento $a \in R$ é um **divisor** do elemento $b \in R$ se existe $x \in R$ tal que $b = ax = xa$. Neste caso, escrevemos $a|b$ para dizer que $a$ é um divisor de $b$.*

**Definição 2.1.2.** *([3, Definição 1.3 p.116]). Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que $a \in R$ é um **divisor de zero** se existe $b \in R$, com $b \neq 0$, tal que $ab = ba = 0$.*

**Definição 2.1.3.** *([6, p.3]). Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que $R$ é um **domínio de integridade** se $R$ não possui divisores de zero.*

*Além disso, quando $R$ é um domínio de integridade, onde todo ideal $I$ de $R$ é da forma $I = \langle x \rangle$, dizemos que $R$ é um **domínio de ideais principais** (ou, alternativamente, um **domínio principal**).*

**Observação 2.1.1.** *Seja $R$ um anel comutativo. A **propriedade do cancelamento** diz o seguinte: se $a$, $b$ e $c$ são elementos arbitrários de $R$ tais que $ab = ac$ (resp. $ba = ca$) então $a = 0$ ou $b = c$. Afirmamos que se $R$ é um domínio de integridade, então $R$ satisfaz tal propriedade. De fato, sejam $a, b, c \in R$ arbitrários tais que $ab = ac$ (resp. $ba = ca$). Então, $ab - ac = 0$ (resp. $ba - ca = 0$), o que implica $a(b - c) = 0$ (resp. $(b - c)a = 0$).*

*Como $R$ não possui divisores de zero, então segue que $a = 0$ ou $b = c$. Verificaremos agora que vale a recíproca. De fato, suponhamos por contradição que $R$ possui um divisor de zero, e seja $a \neq 0$ tal elemento. Assim, existe $b \in R$, $b \neq 0$, tal que $ab = 0$ (respc. $ba = 0$). Como $a0 = 0$ (resp. $0a = 0$), então $ab = a0$ (resp. $ba = 0a$). Como $a \neq 0$ e $R$ satisfaz a propriedade do cancelamento, então obtemos $b = 0$, uma contradição. Logo $R$ é um domínio de integridade.*

**Proposição 2.1.1.** *([9, Teorema 27.15, p.248]). Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. Então $R/I$ é um domínio de integridade se, e somente se, $I$ é um ideal primo de $R$.*

**Definição 2.1.4.** *([3, Definição 1.3 p.116]). Um elemento não nulo $\mu \in R$ é dito ser* ***invertível****, ou uma* ***unidade*** *de $R$, se existe um elemento não nulo $v \in R$ tal que $v\mu = \mu v = 1$. O elemento $v$ é chamado* ***inverso*** *de $\mu$. Dizemos que $R$ é um* ***corpo*** *se todo elemento não nulo de $R$ é invertível.*

**Observação 2.1.2.** *Se $\mu$ é uma unidade de $R$, então existe um único elemento invertível $\mu^{-1} \in R$ tal que $\mu^{-1}\mu = 1 = \mu\mu^{-1}$. De fato, suponhamos que $\mu$ é uma unidade de $R$ e sejam $v, w \in R$, com $v, w \neq 0$, tais que $v\mu = 1 = w\mu = \mu w$. Daí, como $R$ é associativo e unitário, obtemos*

$$v = v1 = v(\mu w) = (v\mu)w = 1w = w.$$

*Assim, tomamos $\mu^{-1} = v = w$ e vemos que $\mu^{-1}$ é um elemento invertível de $R$ com a propriedade desejada. Tal elemento $\mu^{-1}$ será chamado de* ***inverso multiplicativo*** *de $\mu$. Denotaremos por $\mathcal{U}(R)$ o grupo multiplicativo formado por todas as unidades de $R$ (veja [2]).*

**Exemplo 2.1.1.** *Se $R$ é um corpo, então $R$ é um domínio de integridade. De fato, sejam $a, b \in R$ arbitrários tais que $ab = 0$. Suponhamos que $b \neq 0$. Como $R$ é um corpo, então $b$ é uma unidade de $R$. Daí, existe $b^{-1} \in R$ satisfazendo*

$$a = a1 = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0b^{-1} = 0.$$

*Analogamente, mostramos que $b = 0$, se $a \neq 0$.*

**Observação 2.1.3.** *Sejam $R_1$ e $R_2$ anéis comutativos e $f : R_1 \longrightarrow R_2$ um homomorfismo não identicamente nulo. Se $R_2$ é um domínio de integridade, então $f(\mathcal{U}_{R_1}) \subset \mathcal{U}_{R_2}$. De fato,*

$$f(1_{R_1}) = f(1_{R_1} \cdot 1_{R_1}) = f(1_{R_1})^2.$$

*Como $R$ é um domínio de integridade, vemos, pela Observação 2.1.1, que $f(1_{R_1}) = 0_{R_2}$ ou $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$. Se $f(1_{R_1}) = 0_{R_2}$, então $f(y) = f(1_{R_1})f(y) = 0_{R_2}$ para todo $y \in R_2$, contradizendo o fato que $f$ não é identicamente nulo. Desse modo, vemos que $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$. Logo $f(\mathcal{U}_{R_1}) \subset \mathcal{U}_{R_2}$, pois $1_{R_2} = f(1_{R_1}) = f(x)f(x^{-1})$ para todo $x \in \mathcal{U}_{R_1}$.*

## 2.2 Ideais quocientes

**Definição 2.2.1.** *([10, p.8]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ e $J$ ideais arbitrários de $R$. O* ***ideal quociente*** *de $I$* ***por*** *$J$ é definido da seguinte maneira:*

$$(I : J) = (I :_R J) := \{y \in R \, : \, yJ \subseteq I\}.$$

*Notemos que $(I : J)$ é um ideal de $R$ contendo $I$. Além disso, para todo ideal $K$ de $R$, temos*

$$KJ \subseteq I \Leftrightarrow K \subseteq (I : J).$$

**Definição 2.2.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $I \precneqq R$. Para cada $x \in R \setminus I$, definimos o seguinte conjunto:*

$$I_x = (I : xR) := \{y \in R \, : \, yx \in I\}.$$

*Similarmente, para um subconjunto não vazio $S \subseteq R \setminus I$, definimos o seguinte conjunto de ideais de $R$ contendo $I$:*

$$\mathtt{Q}(I, S) := \{I_x \, : \, x \in S\}.$$

**Lema 2.2.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo, $I \precneqq R$, e $x, y \in R \setminus I$. Se $(x + y) \in I$, então $I_x = I_y$.*

**Demonstração.** Sejam $x, y \in R \setminus I$ tais que $(x + y) \in I$. Dado $z \in I_x$, vemos que $zx \in I$. Assim,

$$zy = (zy + zx) - zx = z(x + y) - zx \in I.$$

Logo, obtemos $z \in I_y$ e, portanto, $I_x \subseteq I_y$. Por simetria, $I_y \subseteq I_x$. E isto completa a demonstração. $\square$

## 2.3 Ideais primos e ideais primários

**Definição 2.3.1.** *([6, Proposição 10.2, item (3), p.155]). Sejam $R$ um anel comutativo e $P$ um ideal próprio de $R$. Dizemos que $P$ é um* ***ideal primo*** *quando $P$ satisfaz a seguinte condição:*

*$(i)$ Para cada $a, b \in R$, se $ab \in P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.*

**Lema 2.3.1.** *Seja $P$ um ideal próprio de $R$. Então, $P$ é um ideal primo de $R$ se, e somente se, dados $A$ e $B$ ideais próprios arbitrários de $R$ tais que $AB \subseteq P$, temos $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

**Demonstração.** Suponhamos que $P$ é um ideal primo. Sejam $A$ e $B$ ideais próprios e arbitrários de $R$ tais que $AB \subseteq P$. Suponhamos que $A \not\subseteq P$. Tomamos um elemento $a \in A \setminus P$. Notemos que, para qualquer $b \in B$, temos $ab \in AB \subseteq P$, uma vez que $A$ e $B$

são ideais de $R$. Como $P$ satisfaz a condição $(i)$ da Definição 2.3.1 por ser um ideal primo, então obtemos $b \in P$ para todo $b \in B$. Daí, concluímos que $B \subseteq P$.

Agora, suponhamos que se $AB \subseteq P$, então necessariamente temos $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$ ($A, B$ ideais de $R$). Sejam $a$ e $b$ elementos arbitrários de $R$ tais que $ab \in P$. Como $R$ é comutativo e $P$ é um ideal de $R$, então temos $(ar)(bs) = (ab)(rs) \in P$, para todo $r, s \in R$. Daí, vemos que

$$(aR)(bR) \subseteq P.$$

Daí, por hipótese, obtemos $aR \subseteq P$ ou $bR \subseteq P$. Logo, como $R$ é unitário, obtemos $a \in P$ ou $b \in P$. Portanto, $P$ é um ideal primo de $R$.[1] $\square$

**Proposição 2.3.1.** *([10, Proposição 1.11, item (i) p.8]). Sejam $R$ um anel comutativo, $P_1, \ldots, P_n$ ideais primos de $R$ e $I$ um ideal contido em $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Então, $I \subseteq P_k$, para algum $1 \leq k \leq n$.*

**Proposição 2.3.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $P_1, P_2, P_3 \ldots, P_n$, $n \geq 3$, ideais primos de $R$, todos distintos entre si. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$(i)$ *$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ são dois a dois incomparáveis, isto é, $P_i \nsubseteq P_j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$.*

$(ii)$ *$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ são dois a dois incomparáveis. Além disso,*

$$(P_i \cap P_j) \nsubseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} P_k \text{ para todo } i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \text{ com } i \neq j.$$

*Em particular,*

$$P_i \nsubseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} P_k \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}.$$

**Demonstração.** A implicação $(ii)$ em $(i)$ é direta. Suponhamos a validade de $(i)$. Então $P_i$ e $P_j$ são incomparáveis para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Agora, resta mostrar que

$$(P_i \cap P_j) \nsubseteq P(i, j) = (P_1 \cup \cdots \cup P_{i-1} \cup P_{i+1} \cup \cdots \cup P_{j-1} \cup P_{j+1} \cup \cdots \cup P_n),$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Suponhamos por hipótese de absurdo que $(P_i \cap P_j) \subseteq P(i, j)$. Então, pela Proposição 2.3.1 (aplicada sobre o ideal $(P_i \cap P_j)$), existe um número $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ tal que $P_i \subseteq P_k$ ou $P_j \subseteq P_k$, uma contradição. $\square$

[1] Existem outras caracterizações para ideais primos em termos de absorção por ideais principais, à esquerda e à direita (veja [6, Proposição 10.2, p.155]).

**Definição 2.3.2.** *Seja $R$ um domínio de integridade. Dizemos que $p \in R$ é um* ***elemento primo*** *quando satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $0 \neq p$;

*(ii)* $p \notin \mathcal{U}(R)$.

*(iii)* *Para cada $a, b \in R$, se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

**Exemplo 2.3.1.** *Consideremos o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. O conjunto formado pelos elementos primos de $\mathbb{Z}$ coincide com o conjunto formado pelos números primos do conjunto $\mathbb{Z}$. De fato, seja $p \in \mathbb{Z}$ um elemento primo. Se $d$ é um divisor de $p$ em $\mathbb{Z}$, então $p = dz$ para algum $z \in \mathbb{Z}$. Como $p$ é um elemento primo de $R$, então $p|d$ ou $p|z$. Se $p|z$, então $z = pw$ para algum $w \in \mathbb{Z}$ Assim, obtemos $p = d(pw) = p(dw)$. Com isto, obtemos*

$$p(1 - dw) = 0.$$

*Como $\mathbb{Z}$ não possui divisores de zero (pois $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade) e $p \neq 0$, então obtemos $dw = 1$, e isto implica em $|d| = |w| = 1$. Se $p|d$, então existe $v \in \mathbb{Z}$ tal que $d = pv$. Daí, obtemos $p = (pv)z = p(vz)$. Pelos mesmos argumentos, nós podemos inferir que $|v| = |z| = 1$, e, consequentemente $d = p$. Logo, $p$ é um número primo. Reciprocamente, seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Então, $p \neq 0$ e $p \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $p|ab$. Como $p$ é um número primo, então o Teorema Fundamental da Aritmética[2] nos garante que $p|a$ ou $p|b$. Logo, $p$ é um elemento primo de $R$.*

O resultado a seguir apresenta uma caracterização dos elementos primos em domínios de integridade.

**Proposição 2.3.3.** *Seja $R$ um domínio de integridade e $p \in R$, com $p \neq 0$. Então, $p$ é um elemento primo, se e somente se, o ideal $\langle p \rangle = pR = Rp$ é primo.*

**Demonstração.** Seja $p \in R$, com $p \neq 0$. Suponhamos inicialmente que $p$ é um elemento primo de $R$. Portanto, $p \notin \mathcal{U}(R)$. Daí, vemos que $pR = Rp$ é um ideal próprio de $R$. Agora, sejam $a, b \in R$ tais que $ab \in pR = Rp$. Então, existe $c \in R$ tal que $ab = pc = cp$,. Isso nos diz que $p|ab$, e como $p$ é primo, concluímos que $p|a$ ou $p|b$. Assim, $a \in pR = Rp$ ou $b \in pR = Rp$. Logo, $pR = Rp$ é um ideal primo de $R$.

Reciprocamente, suponhamos que $pR = Rp$ é um ideal primo de $R$. Como todo ideal primo é próprio, vemos que $p \notin \mathcal{U}(R)$. Sejam $a, b \in R$ tais que $p|ab$. Então, existe $f \in R$ tal que $ab = pf = fp$. Isso implica em $ab \in pR = Rp$. Como, por hipótese, $pR = Rp$ é um ideal primo de $R$, inferimos que $a \in pR = Rp$ ou $b \in pR = Rp$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a \in pR = Rp$. Dessa forma, existe $r \in R$ tal que $a = pr = rp$. Daí, vemos que $p|a$. $\square$

[2] Consulte este resultado em [11, Teorema 4, p.15]

Sob a ótica da Proposição 2.3.3, concluímos que a Definição 2.3.2 é equivalente a seguinte definição:

**Definição 2.3.3.** *Seja $R$ um domínio de integridade. Dizemos $p \in R$ é um* ***elemento primo*** *quando satisfaz as seguintes condições (compare com a Definição 2.3.2):*

*(i)* $0 \neq p$.

*(ii)* $p \notin \mathcal{U}(R)$.

*(iii) O ideal* $\langle p \rangle = RpR = pR = Rp$ *é primo.*

**Definição 2.3.4.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $a \in R$. Denotaremos por $\mathtt{ass}(a)$ o conjunto formado pelos elementos de $R$ que são* ***associados*** *ao elemento $a$. Mais precisamente,*

$$\mathtt{ass}(a) := \{\mu a \, : \, \mu \in \mathcal{U}(R)\}.$$

**Observação 2.3.1.** *Sejam $R$ um domínio de integridade, e $p \in R$ um elemento primo. Então todo elemento de $\mathtt{ass}(p)$ é primo. De fato, sejam $\mu \in \mathcal{U}(R)$, e $a, b \in R$ tais que $\mu p | ab$. Portanto, existem $x, y \in R$ tais que $y(\mu p) = ab = (\mu p)x$. Assim, $\mu^{-1}ab = px$ e $ab\mu^{-1} = yp$. Consequentemente, $\mu^{-1}ab\mu^{-1} = p(x\mu^{-1})$ e $\mu^{-1}ab\mu^{-1} = (\mu^{-1}y)p$. Logo, $p|(\mu^{-1}a)(b\mu^{-1})$. Sem perda de generalidade, $p|(\mu^{-1}a)$. Portanto, $\mu p|a$.*

**Definição 2.3.5.** *Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que um elemento não nulo $a \in R$ é* ***irredutível*** *quando satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $a \notin \mathcal{U}(R)$.

*(ii) Se $a = bc$, então ou $b \in \mathcal{U}(R)$ ou $c \in \mathcal{U}(R)$.*

**Proposição 2.3.4.** *Sejam $R$ um domínio de integridade e $p$ um elemento de $R$. Se $p$ é um elemento primo, então $p$ é irredutível.*

**Demonstração.** Sejam $a, b \in R$ tais que $p = ab$. Claramente $a, b \neq 0$, pois $p \neq 0$. Aplicando a Observação 2.1.1, e sabendo que $b \neq 0$, chegamos na igualdade $ab = ba$, pois

$$(ba)b = bab = bp = pb = (ab)b,$$

e $R$ é um domínio de integridade. Por outro lado, como $p$ é um elemento primo, então $p|a$ ou $p|b$. Se $p|a$, então existe $x \in R$ tal que $a = px = xp$. Assim, obtemos $a = px = abx$ e $a = xp = xba$. Como $a \neq 0$ e $R$ é um domínio de integridade, então, novamente pela Observação 2.1.1, obtemos $bx = 1 = xb$, ou seja, $b \in \mathcal{U}(R)$. Portanto, $p$ é irredutível. □

**Definição 2.3.6.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. Dizemos que um ideal primo $P$ de $R$ é* ***minimal sobre*** *$I$ quando satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $I \subset P$.

*(ii)* *Se* $P'$ *é outro ideal primo de* $R$ *satisfazendo* $I \subseteq P' \subseteq P$, *então* $P' = P$.

*Denotaremos por* $\texttt{Min}_R(I) = \texttt{Min}(I)$ *o conjunto formado por todos os ideais primos de* $R$ *que são minimais sobre* $I$. *Um ideal primo minimal sobre* $\mathbf{0}$ *será chamado de* ***ideal primo minimal*** *de* $R$.

**Observação 2.3.2.** *O Lema de Zorn (veja [7, Proposição 2.12, p.42]) nos garante que que todo ideal próprio* $I$ *de* $R$ *está contido em algum ideal maximal* $M$ *de* $R$. *Afirmamos que tal ideal maximal* $M$ *é primo. De fato, sejam* $A, B$ *ideais próprios arbitrários de* $R$ *tais que* $AB \subseteq M$. *Suponhamos que* $A \nsubseteq M$. *Então,* $M \precneqq A + M \trianglelefteq R$. *Pela maximalidade de* $M$, *temos* $A + M = R$. *Daí, obtemos* $B = RB = (A+M)B \subset AB + MB \subseteq M$. *Logo* $B \subset M$. *Portanto* $M$ *é um ideal primo.*

**Observação 2.3.3.** *Sejam* $I$ *um ideal próprio de* $R$ *e* $M$ *um ideal maximal de* $R$ *que contém* $I$. *O resultado [7, Lema 2.15, p. 43] nos garante a existência de um ideal primo* $P_0$ *de* $R$ *tal que* $I \subset P_0 \subset M$, *onde* $P_0$ *é minimal sobre* $I$. *Vale a pena destacar que o resultado [7, Lema 2.15, p. 43] também vale para anéis não comutativos. Abaixo, descrevemos como reproduzir tal demonstração:*

*Se* $M$ *é um ideal minimal sobre* $I$, *então basta tomar* $P_0 = M$. *Caso contrário, consideremos o conjunto*

$$\mathcal{M} := \{P \,:\, I \subseteq P \subsetneq M, \text{ onde } P \text{ é um ideal primo de } R\}.$$

*Notemos que* $\mathcal{M}$ *é não vazio, pois como* $M$ *não é minimal sobre* $I$, *então existe um ideal primo* $P'$ *de* $R$ *tal que* $I \subseteq P' \subsetneq M$. *Consideremos o conjunto parcialmente ordenado* $(\mathcal{M}, \leq)$ *- se* $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$, *então* $P_1 \leq P_2$ *se e somente se* $P_2 \subset P_1$. *Agora, seja* $\mathcal{C} = \{P_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ *uma cadeia arbitrária em* $(\mathcal{M}, \leq)$. *Afirmamos que* $\mathcal{C}$ *tem uma cota superior, a saber,*

$$Q = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda.$$

*Com efeito, claramente* $Q$ *é um ideal de* $R$. *Além disso, como* $I \subset P_\lambda \subsetneq M$ *temos* $I \subseteq Q \subsetneq M$. *Sejam* $A$ *e* $B$ *ideais próprios de* $R$ *tais que* $AB \subseteq Q$. *Então* $AB \subset P_\lambda$ *para todo* $\lambda$. *Portanto, para cada* $\lambda \in \Lambda$, *temos* $A \subset P_\lambda$ *ou* $B \subset P_\lambda$. *Se* $A \subset P_\lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *então* $A \subset Q$. *Suponhamos que existam* $\alpha < \beta$ *tais que* $A \subset P_\alpha$ *e* $B \subset P_\beta$. *Daí,* $B \subset P_\beta \subset P_\alpha$. *Logo,* $A, B \subset P_\alpha$. *Assim, se* $\gamma < \alpha$, *então* $A, B \subset P_\alpha \subset P_\gamma$. *Por outro lado, suponhamos que* $\rho > \gamma > \alpha$ *são tais que* $A \subset P_\rho$, $B \nsubseteq P_\rho$, $B \subset P_\gamma$, *e* $A \nsubseteq P_\gamma$. *Então como* $\rho > \gamma$ *concluímos que* $A \subset P_\rho \subset P_\gamma$, *uma contradição. Dessa forma,* $A, B \subset P_\gamma$ *para todo* $\gamma > \alpha$. *A partir da nossa discussão, vemos que* $A, B \subset Q$. *Em particular,* $Q$ *é de fato um ideal primo de* $R$. *Portanto,* $Q$ *é um ideal primo de* $R$ *tal que* $I \subseteq Q \subsetneq M$, *isto é,* $Q \in \mathcal{M}$. *Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal* $P_0 \in \mathcal{M}$. *Por construção* $P_0$ *é um ideal primo minimal sobre* $I$ *tal que* $I \subset P_0 \subset M$.

**Lema 2.3.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, $I$ um ideal próprio de $R$, e $n \geq 2$. Sejam $P_1, \ldots, P_n$ ideais primos minimais sobre $I$. Então para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_i \in P_i \setminus \left( \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} P_k \right)$.*

**Demonstração.** Se $n = 2$, então pela minimalidade de $P_1$ e $P_2$ sobre $I$, existem $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ e $x_2 \in P_2 \setminus P_1$. Agora verificaremos que o resultado vale para $n = 3$. Pelo caso anterior, existe $y_1 \in P_1 \setminus P_2$. Se $y_1 \notin P_3$, então tomamos $x_1 := y_1$, e vemos que $x_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$. Caso contrário, se $y_1 \in P_3$, então tomamos $y_1' \in (P_1 \cap P_2) \setminus P_3$, onde a existência de tal elemento é garantida pela Proposição 2.3.2, e definimos $x_1 := y_1 + y_1'$. Afirmamos que $x_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$. De fato, se $x_1 \notin P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$, então $x_1 \in P_2$ ou $x_1 \in P_3$. Se $y_1 + y_1' = x_1 \in P_2$, então $y_1 = x_1 - y_1' \in P_2$, uma contradição. Analogamente, se $x_1 \in P_3$, teríamos que $y_1' = x_1 - y_1 \in P_3$, o que não é possível.

Para $n = 4$, sabemos que existe $z_1 \in P_1 \setminus P_2$. Se $z_1 \notin P_3 \cup P_4$, então tomamos $x_1 := z_1$ e vemos que $x_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3 \cup P_4)$. Caso contrário, isto é, se $z_1 \in P_3 \cup P_4$, então tomamos $z_1' \in (P_1 \cap P_2) \setminus (P_3 \cup P_4)$ (usando Proposição 2.3.2), e $x_1 := z_1 + z_1'$. Daí, afirmamos que $x_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3 \cup P_4)$. De fato, se $x_1 \notin P_1 \setminus (P_2 \cup P_3 \cup P_4)$, então $x_1 \in P_2 \cup P_3 \cup P_4$. Se $z_1 + z_1' = x_1 \in P_2$, então $z_1 = x_1 - z_1' \in P_2$, uma contradição. Analogamente, se $x_1 \in P_3$ (resp. $x_1 \in P_4$), teríamos que $z_1' = x_1 - z_1 \in P_3$ (resp. $z_1' \in P_4$) (se $z_1 \in P_3$), uma contradição.

Suponhamos agora a validade do resultado para todo $4 \leq k \leq n$. Sejam $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ ideais primos minimais sobre $I$. Pela hipótese de indução existe $w_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup \cdots \cup P_n)$. Se $w_1 \notin (P_3 \cup P_4 \cup \cdots \cup P_n \cup P_{n+1})$, tomamos $x_1 := w_1$ e vemos que $x_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup \cdots \cup P_n \cup P_{n+1})$. Caso contrário, se $w_1 \in (P_3 \cup P_4 \cup \cdots \cup P_n \cup P_{n+1})$, tomamos $w_1' \in (P_1 \cap P_2) \setminus (P_3 \cup P_4 \cup \cdots \cup P_n \cup P_{n+1})$ (usando a Proposição 2.3.2), e consideramos o elemento $x_1 := w_1 + w_1'$. Se $x_1 \notin P_1 \setminus (P_2 \cup \cdots \cup P_{n+1})$, então $x_1 \in P_2$ ou $x_1 \in (P_3 \cup P_4 \cup \ldots P_n \cup P_{n+1})$. Daí, $w_1 = x_1 - w_1' \in P_2$ ou $w_1' = x_1 - w_1 \in (P_3 \cup P_4 \cup \ldots P_n \cup P_{n+1}))$, o que não é possível. E isto completa a demonstração.

□

**Definição 2.3.7.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. O **radical** de $I$, denotado por $\sqrt{I}$, é o conjunto formado pelos elementos da forma*

$$\sqrt{I} := \{x \in R : x^n \in I \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

*No caso em que $I = \mathbf{0}$, escrevemos $\sqrt{0} = \boldsymbol{nil}(R)$ - o **nilradical** de $R$.*

**Lema 2.3.3.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. Então $\sqrt{I}$ é um ideal próprio de $R$. Em particular, $I \trianglelefteq \sqrt{I}$.*

**Demonstração.** Sejam $a, b \in \sqrt{I}$ arbitrários. Então, existem inteiros positivos $n$ e $m$ tais que $a^n \in I$ e $b^m \in I$. É suficiente provar os seguintes fatos:

(i) $\sqrt{I}$ é fechado para a soma. De fato, pela fórmula binomial, temos

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{(n+m)-k}.$$

Se $k \geq n$, então $a^k = a^n a^{k-n} \in I$, pois $I$ é um ideal. Se $n < k$, então $(n+m)-k > m$ e $b^{(n+m)-k} \in I$. Em qualquer caso, cada termo da soma acima pertence a $I$. Como $I$ é um ideal vemos que $(a+b)^{n+m}$ também pertence a $I$. Logo, $(a+b) \in \sqrt{I}$.

(ii) $\sqrt{I}$ é fechado sob multiplicação por elementos de $R$. De fato, dado $r \in R$, temos a igualdade $(ra)^n = r^n a^n$. Como $a^n \in I$, e $I$ é um ideal, temos $r^n a^n \in I$. Dessa forma, $ra \in \sqrt{I}$.

(iii) $\sqrt{I}$ é um ideal próprio de $R$. Com efeito, como $I$ é um ideal próprio de $R$ vemos que $1 \notin I$. Suponhamos, por hipótese de absurdo, que $\sqrt{I} = R$. Então $1 \in \sqrt{I}$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 = 1^n \in I$, o que não é possível.

A inclusão $I \trianglelefteq \sqrt{I}$ é imediata. E isto completa a demonstração. □

**Definição 2.3.8.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $x \in R$. Dizemos que $x$ é um elemento* ***nilpotente*** *se $x \in \boldsymbol{nil}(R)$, ou seja, se $x^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

**Definição 2.3.9.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$.*

*(i) Dizemos que $I$ é um* **ideal nil** *quando todo elemento de $I$ é nilpotente. Neste caso, $I \trianglelefteq \sqrt{0} = \boldsymbol{nil}(R)$.*

*(ii) Dizemos que $I$ é um* **ideal nilpotente** *quando $I^n = \mathbf{0}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

*(iii) Dizemos que $I$ é um* **ideal radical** *quando $I = \sqrt{I}$. Denotaremos por $\boldsymbol{Rd}(R)$ o conjunto formado por todos os ideais radicais de $R$.*

**Proposição 2.3.5.** *([7, Proposição 2.16 p. 44]). Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. O radical $\sqrt{I}$ pode ser visto como a interseção de todos os ideais primos de $R$ que são minimais sobre $I$. Em outras palavras,*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathit{Min}(I)} P.$$

*Em particular, $\boldsymbol{nil}(R)$ é a interseção de todos os ideais primos minimais de $R$ (isto é, ideais que não contém propriamente nenhum outro ideal primo).*

**Corolário 2.3.1.** *Se $R$ é um anel comutativo, então todo ideal primo de $R$ é um ideal radical.*

**Proposição 2.3.6.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $m, n \in \mathbb{N}$. Se $I, J, I_1, \ldots, I_m$ são ideais de $R$, então as seguintes identidades (ou inclusões) são satisfeitas:*

(*i*) *Se* $I \subseteq J$*, então* $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(*ii*) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ *- Idempotência do radical.*

(*iii*) $\sqrt{I_1 \cdots I_m} = \sqrt{I_1 \cap \cdots \cap I_m} = \sqrt{I_1} \cap \cdots \cap \sqrt{I_m}$.

(*iv*) $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$.

(*v*) $\sqrt{P^n} = P$ *para todo ideal primo* $P$ *de* $R$.

**Demonstração.** As demonstrações das afirmações (*ii*), (*iii*) e (*iv*) seguem diretamente do resultado [3, Teorema 2.7, p.380]. A demonstração da afirmação (*i*) segue diretamente do uso da Definição 2.3.7. A demonstração da afirmação (*v*) segue diretamente da afirmação (*iv*) e do Corolário 2.3.1. □

**Definição 2.3.10.** *Sejam* $R$ *um anel comutativo e* $I$ *um ideal próprio de* $R$*. Dizemos que* $I$ *é um ideal* ***primário*** *de* $R$ *quando satisfaz a seguinte condição:*

(*i*) *Para cada* $a, b \in R$*, se* $ab \in I$ *e* $a \notin I$*, então* $b \in \sqrt{I}$*. Equivalentemente, para cada* $a, b \in R$*, se* $ab \in I$ *e* $a \notin I$*, então* $b^n \in I$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 2.3.2.** *Sejam* $R$ *um anel comutativo e* $I$ *um ideal próprio de* $R$*. Se* $I$ *é primo, então* $I$ *é primário.*

**Observação 2.3.4.** *Sejam* $R$ *um anel comutativo e* $I$ *um ideal primário de* $R$*. Então existe um ideal primo* $P$ *de* $R$ *tal que* $\sqrt{I} = P$ *(veja [5, Observação 4.3 p. 141]).*

Motivados pela observação anterior, apresentamos a seguinte definição:

**Definição 2.3.11.** *Sejam* $R$ *um anel comutativo, e* $P$ *um ideal primo de* $R$*. Dizemos que um ideal próprio* $I$ *de* $R$ *é* $P$*-**primário** quando satisfaz as seguintes condições:*

(*i*) $I$ *é um ideal primário de* $R$.

(*ii*) $\sqrt{I} = P$.

**Lema 2.3.4.** *Sejam* $R$ *um anel comutativo,* $I$ *um ideal próprio de* $R$*, e* $P = \sqrt{I}$*. Então valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *O ideal* $I$ *é um ideal* $P$*-primário de* $R$ *se e somente se todo divisor de zero de* $R/I \neq \mathbf{0}$ *é nilpotente.*

(*ii*) *Se* $P$ *é um ideal maximal de* $R$*, então* $I$ *é* $P$*-primário. Em particular,* $P = \sqrt{I}$ *é o único ideal maximal que contém* $I$*. Além disso,* $R/I$ *é um anel local.*

**Demonstração.** Começaremos provando $(i)$. Suponhamos que $I$ é um ideal $P$-primário de $R$. Tomemos $(x+I)$ um divisor de zero de $R/I$. Então, existe $y \in R$, onde $y \notin I$, tal que $xy + I = (x+I)(y+I) = I$. Assim, $xy \in I$. Como $I$ é $P$-primário e $y \notin I$, vemos que $x^n \in I$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(x+I)^n = x^n + I = I$. Dessa forma, $x+I$ é nilpotente em $R/I$. Reciprocamente, suponhamos que todo divisor de zero de $R/I$ é nilpotente. Sejam $x, y \in R$ tais que $xy \in I$ e $x \notin I$. Se $y \notin I$, então $(x+I)$ e $(y+I)$ são divisores de zero em $R/I$. Assim, $(y+I)$ é nilpotente em $R/I$. Portanto, uma potência de $y$ pertence a $I$. Consequentemente, $y \in \sqrt{I} = P$. Logo $I$ é é $P$-primário.

Prova de $(ii)$. Suponhamos que $P$ é um ideal maximal de $R$. Seja $I \trianglelefteq M$, onde $M$ é um ideal maximal de $R$. A Observação 2.3.3 nos garante a existência de um ideal primo $P_0$ de $R$ tal que $I \subset P_0 \subset M$, onde $P_0$ é minimal sobre $I$. Daí, $\sqrt{I} = P \trianglelefteq P_0 \trianglelefteq M$ (Proposição 2.3.5). Portanto, $P = M$. Logo, $R/I$ possui um único ideal maximal, a saber, $P/I$ - isto significa que $R/I$ é um anel local. Agora, fixemos $(x+I) \in R/I$. Se $(x+I) \in P/I$, então $x^n \in I$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, $(x+I)^n = x^n + I = I$. Portanto $(x+I)$ é nilpotente. Agora, se $(x+I) \notin P/I$, então $(x+I)$ é uma unidade, pois neste caso o ideal $\langle x+I \rangle$ não pode estar contido no único ideal maximal de $R/I$. Em particular, todo divisor de zero de $R/I$ é nilpotente. Logo, $I$ é um ideal $P$-primário de $R$.

$\square$

## 2.4 Condições de Cadeia

**Definição 2.4.1.** *Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que $R$ é um anel* ***noetheriano****, ou que $R$ satisfaz a* ***condição de cadeia ascendente*** *sobre ideais quando toda cadeia ascendente de ideais próprios de $R$ é estacionária. Em outras palavras, para toda cadeia de ideais próprios da forma*

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

*existe um inteiro positivo $m$ tal que $I_k = I_m$ para todo $k \geq m$.*

*Analogamente, dizemos que $R$ é um anel* ***artiniano****, ou que $R$ satisfaz a* ***condição de cadeia descendente*** *sobre ideais quando toda cadeia descendente de ideais próprios de $R$ é estacionária. Em outras palavras, para toda cadeia de ideais próprios da forma*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

*existe um inteiro positivo $m$ tal que $I_k = I_m$ para todo $k \geq m$.*

**Lema 2.4.1.** *Seja $R$ um anel comutativo. Então valem as seguintes afirmações:*

$(i)$ *$R$ é um anel noetheriano se e somente se todo ideal próprio de $R$ é finitamente gerado ([2, Teorema 2 p. 656]).*

*(ii) R é artiniano se e somente se R é isomorfo ao produto direto de um número finito de anéis artinianos locais - isto significa que cada anel é simultaneamente um anel artiniano e um anel local - ([2, Teorema 3 p. 752]).*

## 2.5 Dimensão de Krull

**Definição 2.5.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $\mathcal{P}$ uma cadeia ascendente de $r+1$ ideais primos em $R$ - em particular uma cadeia de ideais próprios. O* ***comprimento*** *de $\mathcal{P}$- denotado por $\texttt{length}(\mathcal{P})$ - é definido como sendo o número máximo de inclusões estritas em $\mathcal{P}$. Em outras palavras, se*

$$\mathcal{P} : P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_r$$

*$\mathcal{P}$ é uma cadeia como acima, então $|A_{\mathcal{P}}| = \texttt{length}(\mathcal{P})$, onde $A_{\mathcal{P}} = \{i : P_i \subsetneq P_{i+1}\}$.*

**Observação 2.5.1.** *Sejam $\mathcal{P}$ e $A_{\mathcal{P}}$ como na Definição 2.5.1.*

*(i) Se $\mathcal{P}$ não possui inclusões estritas, isto é, se $A_{\mathcal{P}} = \emptyset$, então $\texttt{lenght}(\mathcal{P}) = 0$. Neste caso, $\mathcal{P}$ é uma cadeia trivial, consistindo apenas de um único ideal primo $P_0$.*

*(ii) $P_r$ é o elemento maximal (máximo) do conjunto $\{P_0, P_1, \ldots, P_r\}$. Por outro lado, pela Observação 2.3.2, sabemos que existe um ideal maximal $M$ de $R$ tal que $P_r \trianglelefteq M$. Logo, a cadeia $\mathcal{P}$ está contida na cadeia $\mathcal{P}'$, onde*

$$\mathcal{P}' : P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_r \subseteq M.$$

*Dessa forma, se $P_r$ não é um ideal maximal de $R$, então a cadeia $\mathcal{P}$ sempre pode ser estendida não trivialmente a uma cadeia ascendente $\mathcal{P}'$ cujo último termo é um ideal maximal de $R$. Além disso, $\texttt{length}(\mathcal{P}') = \texttt{length}(\mathcal{P}) + 1 > 0$.*

**Definição 2.5.2.** *Seja $R$ um anel comutativo. A* ***dimensão de Krull*** *de $R$, denotada por $\texttt{dim}R$, é definida da seguinte maneira:*

$$\texttt{dim}R := \texttt{sup}\{\texttt{length}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é uma cadeia ascendente finita de ideais primos de } R\}.$$

**Observação 2.5.2.** *Em virtude do item (ii) da Observação 2.5.1, assumimos, sem perda de generalidade, que $\texttt{dim}R$ é tomado sobre as cadeias $\mathcal{P}$ de ideais primos de $R$ cujo o último termo $P_r$ é um ideal maximal de $R$. Em particular, se $(R, M)$ é um anel local, então $\texttt{dim}R$ é o supremo do comprimento de todas as cadeias ascendentes $\mathcal{P}$ de ideais primos de $R$ cujo o último termo é exatamente $P_r = M$.*

**Proposição 2.5.1.** *Se $R$ é um corpo então $\texttt{dim}R = 0$. A recíproca é verdadeira mediante a hipótese adicional de que $R$ é um domínio de integridade.*

**Demonstração.** Suponhamos que $R$ é um corpo. Como $\mathbf{0}$ é o único ideal próprio de $R$ - em particular o único ideal maximal de $R$ - vemos que $\mathtt{dim}\, R = 0$. Reciprocamente, suponhamos que $R$ é um domínio de integridade e que $\mathtt{dim}\, R = 0$. Fixemos $x \in R$, onde $x \neq 0$. Suponhamos que o ideal $\langle x \rangle = xR$ é próprio. Pela Observação 2.3.2, existe um ideal maximal $M$ de $R$ tal que $\mathbf{0} \subsetneq \langle x \rangle \subseteq M$. Em particular $M$ é um ideal primo. Além disso, como $R$ não admite divisores de zero, vemos que $\mathbf{0}$ é um ideal primo de $R$. Assim, obtemos a cadeia de ideais primos $\mathcal{P} : \mathbf{0} = P_0 \subsetneq P_1 = M$. Entretanto, $1 = \mathtt{length}(\mathcal{P}) \leq \mathtt{dim}\, R = 0$, um absurdo. Logo $\langle x \rangle = R$. Em particular, $x$ é invertível. E isto conclui a demonstração.

□

**Proposição 2.5.2.** *([7, Teorema 7.4, p.157]). Seja $R$ um anel comutativo. Então $R$ é artiniano se e somente se $R$ é noetheriano, e $\mathtt{dim} R = 0$.*

## 2.6 Localizações

**Definição 2.6.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $S$ um subconjunto de $R$. Dizemos que $S$ é um **sistema multiplicativo** de $R$ quando satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $1 \in R$.

*(ii) Se $x, y \in S$, então $xy \in S$. Neste caso, dizemos que $S$ é fechado com relação à operação de multiplicação.*

Sejam $R$ um anel comutativo, e $S$ um sistema multiplicativo de $R$. No que segue, apresentamos o processo de obtenção da famosa localização do anel $R$ com respeito ao sistema multiplicativo $S$. Inicialmente, definamos a seguinte relação de equivalência sobre o conjunto $R \times S$ :

$$(x, s) \sim (x', s') \Leftrightarrow v(sx' - s'x) = 0 \text{ para algum } v \in S. \tag{2.1}$$

Seguindo a notação clássica, denotamos por $\dfrac{x}{s}$ a classe de equivalência do par $(x, s)$ e por $S^{-1}R$ o conjunto formado por tais classes de equivalência. No conjunto das classes $S^{-1}R$ é possível definir as seguintes operações de soma e produto:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} := \frac{(tx + sy)}{st} \quad \text{e} \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} := \frac{xy}{st}.$$

Como de praxe, verifiquemos que as operações acimas estão bem definidas. De fato, sejam $x, x', y, y' \in R$ e $s, s', t, t' \in S$ tais que $(x, s) \sim (x', s')$ e $(y, t) \sim (y', t')$. Então, existem $v, w \in S$ tais que $v(s'x - sx') = 0$ e $w(t'y - ty') = 0$.

(i) Por definição, temos

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{(tx + sy)}{st} \quad \text{e} \quad \frac{x'}{s'} + \frac{y'}{t'} = \frac{(t'x' + s'y')}{s't'}.$$

Agora, observemos o seguinte:

$$\begin{aligned}(st)(t'x'+s'y')-(s't')(tx+sy) &= [(tt')(sx')+(ss')(ty')]-[(t't)(s'x)+(s's)(t'y)] \\ &= (tt')(sx'-s'x)+(ss')(ty'-t'y).\end{aligned}$$

Assim, ao tomarmos $z := vw \in S$, chegamos na seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}z[(st)(t'x'+s'y')-(s't')(tx+sy)] &= (vw)[(tt')(sx'-s'x)+(ss')(ty'-t'y)] \\ &= w(tt')[\underbrace{v(sx'-s'x)}_{=0}]+v(ss')[\underbrace{w(ty'-t'y)}_{=0}]=0.\end{aligned}$$

Logo, a soma está bem definida.

(ii) Utilizando a definição do produto, temos:

$$\frac{x}{s}\cdot\frac{y}{t}=\frac{xy}{st} \quad \text{e} \quad \frac{x'}{s'}\cdot\frac{y'}{t'}=\frac{x'y'}{s't'}.$$

Notemos

$$(st)(x'y')-(s't')(xy)=(sx')(ty')-(s'x)(t'y).$$

Definindo, $\theta := vw \in S$ chegamos em:

$$\begin{aligned}\theta[(st)(x'y')-(s't')(xy)] &= vw[(sx')(ty')-(s'x)(t'y)] \\ &= [\underbrace{v(sx'-s'x)}_{=0}]w+[\underbrace{w(ty'-t'y)}_{=0}]v=0.\end{aligned}$$

Logo, o produto está bem definido.

Uma inspeção direta nos revela que $0_{S^{-1}R}=\dfrac{0}{1}$ e $1_{S^{-1}R}=\dfrac{1}{1}$ são, respectivamente, a identidade aditiva e a identidade multiplicativa de $S^{-1}R$. Desta forma,

$$\left\{\frac{r}{s} \,:\, r\in R,\, s\in S\right\}=S^{-1}R=(S^{-1}R,+,\cdot,0_{S^{-1}R},1_{S^{-1}R})$$

é um anel comutativo unitário.

**Definição 2.6.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $S$ um sistema multiplicativo de $R$. O anel $S^{-1}R$ é chamado de* ***localização*** *de $R$ em $S$.*

A seguir, apresentamos alguns exemplos de localizações.

**Exemplo 2.6.1.** *(Complemento de um ideal primo $P$). Sejam $R$ um anel comutativo e $P$ um ideal primo de $R$. É imediato a verificação que o conjunto $S = R\setminus P$ é um sistema multiplicativo de $R$. Neste caso, denotamos a localização de $R$ em $S$ por $R_P$, e dizemos que $R_P$ é a* ***localização de*** *$R$* ***em*** *$P$. Neste contexto, ainda valem:*

*(i)* $\mathcal{U}(R_P) = \left\{\dfrac{x}{s} : x \in R \setminus P\right\}$.

*De fato, para cada* $\dfrac{x}{s} \in \mathcal{U}(R_P)$ *fixado temos as seguintes equivalências:*

$$\begin{aligned}\frac{x}{s} \in \mathcal{U}(R_P) &\Leftrightarrow \textit{Existe } \ \frac{x'}{s'} \in R_P \ \textit{ tal que } \frac{xx'}{ss'} = \frac{1}{1}\\ &\Leftrightarrow \textit{Existe } \ t \in R \setminus P \ \textit{ tal que } t(ss' - xx') = 0\\ &\Leftrightarrow \textit{Existe } \ t \in R \setminus P \ \textit{ tal que } txx' = tss'.\end{aligned}$$

*Notemos que* $t, s, s' \in R \setminus P$. *Consequentemente* $tss' \in R \setminus P$. *Logo, a partir das equivalências acima, podemos concluir que* $x \notin P$.

*(ii)* $PR_P := \left\{\dfrac{x}{s} : x \in P \text{ e } s \in R \setminus P\right\}$ *é o único ideal maximal de* $R_P$ *-* $R_P$ *é um anel local. De fato, é fácil verificar que* $PR_P$ *é um ideal de* $R_P$. *Agora, seja* $M$ *um ideal maximal de* $PR_P$ *tal que* $PR_P \trianglelefteq M$. *Se* $M \neq PR_p$, *então existem* $x, s \in R \setminus P$ *tais que* $\dfrac{x}{s} \in M$. *Pelo item (i) temos que* $\dfrac{x}{s} \in \mathcal{U}(R_P)$. *Logo,* $M = R_P$. *Por outro lado, se* $N$ *é um ideal maximal de* $R_P$, *então* $N \cap \mathcal{U}(R_P) = \emptyset$. *Assim,* $N \subseteq PR_P$. *Pela maximalidade de* $PR_P$, *concluímos que* $N = PR_P$.

*(iii) Se* $(R, M)$ *é um domínio de integridade local, então* $R \simeq R_M$. *De fato, consideremos o homomorfismo natural* $f : R \longrightarrow R_M$ *dado por* $f(r) = \dfrac{r}{1}$ *para todo* $r \in R$. *Notemos*

$$r \in \boldsymbol{ker}(f) \Leftrightarrow f(r) = \frac{r}{1} = 0_{R_M} = \frac{0}{1} \Rightarrow vr = 0 \textit{ para algum } v \in R \setminus P.$$

*Como* $v \neq 0$ *e* $R$ *não possui divisores de zero (pois* $R$ *é um domínio de integridade), vemos que* $r \in \boldsymbol{ker}(f)$ *implica em* $r = 0$, *ou seja,* $f$ *é injetivo. Por outro lado, como* $M$ *é o único ideal maximal de* $R$ *então* $R \setminus M = \mathcal{U}(R)$. *Agora, fixemos* $a \in R$, *e* $s \in R \setminus M$. *Notemos que* $R = \langle s \rangle$. *Daí, existe* $b \in R$ *tal que* $a = sb$. *Portanto,* $1 \cdot (a \cdot 1 - b \cdot s) = 0$. *Consequentemente, para todo* $\dfrac{a}{s} \in R_M$, *existe* $b \in R$ *tal que* $f(b) = \dfrac{b}{1} = \dfrac{a}{s}$. *Logo,* $f$ *é sobrejetor.*

**Exemplo 2.6.2.** *(Corpo de frações). Seja* $R$ *um domínio de integridade. O conjunto* $S = R \setminus \{0\}$ *é um sistema multiplicativo de* $R$. *Neste caso, a localização de* $R$ *sobre* $S$ *é chamada de* ***corpo de frações*** *de* $R$, *e denotada por* $\boldsymbol{Frac}(R)$. *Na verdade,* $\boldsymbol{Frac}(R)$ *é um corpo tendo em vista que* $\left(\dfrac{r}{s}\right)^{-1} = \dfrac{s}{r}$ *para todo* $r, s \in R \setminus \{0\}$. *De fato, como* $1 \in S$ *e* $1 \cdot (rs - rs) = 1 \cdot 0 = 0$ *temos*

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = \frac{rs}{sr} = \frac{rs}{rs} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}.$$

*Um caso particular desta construção é quando temos* $\boldsymbol{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

**Exemplo 2.6.3.** *(Anel de frações total). Sejam* $R$ *um anel comutativo, e* $S$ *o conjunto de todos os elementos de* $R$ *que não são divisores de zero. O* ***anel de frações total*** *de* $R$, *denotado por* $T(R)$, *é a localização de* $R$ *em* $S$. *Um ponto a destacar é que se* $R$ *é um domínio de integridade, então* $T(R) = \boldsymbol{Frac}(R)$.

## 2.7 Domínios de valorização

**Definição 2.7.1.** *([12, p.80]). Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que um ideal primo $P$ de $R$ é um* ***ideal primo dividido*** *quando $P \subsetneq \langle x \rangle$ para cada $x \in R \setminus P$. No caso que $R$ é um domínio de integridade, dizemos que $R$ é um* ***domínio dividido*** *quando todo ideal primo de $R$ é um ideal primo dividido.*

**Observação 2.7.1.** *Seja $P$ um ideal primo de $R$. Então $P$ é um ideal primo dividido de $R$ se e somente se $P$ é comparável a todo ideal de $R$, isto é, $P \subseteq I$ ou $I \subseteq P$ para todo ideal $I$ de $R$. De fato, suponhamos que $P$ é um ideal primo dividido de $R$. Seja $I \trianglelefteq R$ arbitrário, e suponhamos que $I \nsubseteq P$. Então, existe $x \in (I \setminus P) \subseteq (R \setminus P)$. Segue diretamente da hipótese que $P \subsetneq \langle x \rangle \subseteq I$. Reciprocamente, suponhamos que $P$ é comparável a todo ideal de $R$. Assim, dado $x \in R \setminus P$, vemos que $P \subsetneq \langle x \rangle$, pois $\langle x \rangle \nsubseteq P$, uma vez que $x \in \langle x \rangle$.*

Uma classe especial de domínios divididos é a classe dos domínios de valorização.

**Definição 2.7.2.** *([7, Proposição 5.2, p.99]). Seja $R$ um domínio de integridade. Dizemos que $R$ é um* ***domínio de valorização*** *quando quaisquer dois de seus ideais principais são comparáveis. Mais precisamente, $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle$ ou $\langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$ para todo $x, y \in R$. Equivalentemente,*

*(i) Dados $x, y \in R$, então $x|y$ ou $y|x$.*

**Observação 2.7.2.** *As seguintes afirmações a respeito de um domínio de valorização $R$ são verdadeiras:*

*(i) $R$ é um domínio dividido. Com efeito: Sejam $P$ um ideal primo de $R$, e $x \in R \setminus P$. Daí, vemos que $x|y$ para todo $y \in P$, pois $x \notin P$. Consequentemente $P \subsetneq \langle x \rangle$ .*

*(ii) O resultado [7, Proposição 5.4 p. 100] nos diz que o conjunto das não unidades de $R$, ou seja, $R \setminus \mathcal{U}(R)$, é um ideal de $R$.*

*(iii) Se $\mathtt{dim} R = 0$, então pela Proposição 2.5.1, concluímos que $R$ é um corpo.*

**Exemplo 2.7.1.** *Se $R$ é um corpo, então $R$ é um domínio de valorização. Em particular, $R \setminus \mathcal{U}(R) = (0)$ é o único ideal maximal de $R$. Além disso, $R$ é noetheriano.*

A seguir, apresentamos uma caracterização de domínios de valorização noetherianos (compare o resultado abaixo com o Exemplo 2.7.1).

**Proposição 2.7.1.** *([7, Teorema 5.9 p.103]). Seja $R$ um domínio de integridade noetheriano. Se $R$ não é um corpo, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $R$ é um domínio de valorização.*

*(b)* $R \setminus \mathcal{U}(R)$ *é ideal principal e não nulo.*

**Observação 2.7.3.** *Seja $R$ um domínio de valorização noetheriano. Se $R$ não é um corpo, então $R = (R, M)$ é um anel local, onde $M = R \setminus \mathcal{U}(R) = pR$, e $p$ é o único elemento irredutível e primo de $R$ (a menos dos elementos associados a $p$). Com efeito: Seja $M$ um ideal maximal de $R$. Notemos que $M \subseteq R \setminus \mathcal{U}(R)$. Pela Proposição 2.7.1, $R \setminus \mathcal{U}(R) = pR$ para algum $p \in R$. Daí, pela maximalidade de $M$ segue que $M = R \setminus \mathcal{U}(R) = pR$. Por outro lado como $pR = M$ é um ideal primo, temos pela Proposição 2.3.3 que $p$ é um elemento primo. A irredutibilidade de $p$ segue diretamente da Proposição 2.3.4. Finalmente, seja $z$ um elemento primo e irredutível de $R$. Daí, $z \notin \mathcal{U}(R)$. Portanto, $\langle z \rangle \subset M$. Logo, $z = pa$ para algum $a \in R$. Como $z$ é irredutível, concluímos que $a \in \mathcal{U}(R)$. Portanto, $z \in \boldsymbol{ass}(p) = \{\mu p \,:\, \mu \in \mathcal{U}(R)\}$.*

**Definição 2.7.3.** *([2, Teorema 7, p.757]). Seja $R$ um anel comutativo. Dizemos que $R$ é um **domínio de valorização discreto** quando $R$ satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* *$R = (R, M)$ é um domínio de integridade local, onde $M = pR = \langle p \rangle \neq \{0\}$ é um ideal principal.*

*(ii)* *$R$ é noetheriano.*

**Observação 2.7.4.** *Seja $(R, M) = (R, pR)$ um domínio de valorização discreto. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

*(i)* *$R$ não é um corpo.*

*(ii)* *Seguindo os mesmos passos como na Observação 2.7.3, concluímos que o elemento $p$ é primo e irredutível. Em particular, $pR = M = R \setminus \mathcal{U}(R)$. Além disso, todo elemento primo $z$ pertence ao conjunto $\boldsymbol{ass}(p) = \{\mu p \,:\, \mu \in \mathcal{U}(R)\}$.*

*(iii)* *O resultado [2, Corolário 6, p.757] nos garante que todo ideal $\mathbf{0} \neq I \subsetneq (R, M)$ é da forma $I = p^n R$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $R$ é um domínio de ideais principais. Além disso, $I = M^n = p^n R$. De fato, como $M = pR$ e $R$ é comutativo, temos*

$$M^n = (pR)^n = \left\{ \sum_{u=1}^{k} (pr_{u,1}) \cdots (pr_{u,n}) \,|\, r_{u,j} \in R,\ j = 1, \ldots, n,\ k \in \mathbb{N} \right\} = p^n R.$$

*(iv)* *Se $(R, M)$ é um domínio de valorização discreto, então pelas observações anteriores, vemos que $\mathbf{0}$ e $M$ são os únicos ideais primos de $R$. De fato, seja $I = p^n M$ um ideal primo de $R$ ($n \geq 2$). Então como $I$ é um ideal primo, e $p^n = pp^{n-1} \in I$, vemos que $p \in I$ ou $p^{n-1} \in I$. Se $p \in I$, então $I = M$. Suponhamos que $p^{n-1} \in I$. Repetindo o mesmo argumento um número finito de vezes vemos que $p \in I$. Logo $I = M$. Neste caso, temos $\boldsymbol{dim} R = 1$.*

**Proposição 2.7.2.** *Seja $R$ um domínio de integridade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i)* *$R$ é um domínio de valorização discreto.*

*(ii)* *$(R, M)$ é um domínio de ideais principais local. Neste caso, todos os ideais próprios não nulos de $R$ são da forma $M^n = p^n R$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $p$ é o único elemento irredutível (primo) de $R$, isto é, se $z \in R$ é primo, então $z \in \mathtt{ass}(p) = \{\mu p : \mu \in \mathcal{U}(R)\}$.*

**Demonstração.** A implicação de $(i)$ em $(ii)$ segue diretamente da Observação 2.7.4.

Reciprocamente, se a condição $(ii)$ é válida, então pelo Lema 2.4.1, $R$ é noetheriano. Logo, pela validade da condição $(ii)$, concluímos que $R$ é um domínio de integridade noetheriano local, cujo único ideal maximal é não nulo e principal. Assim, $R$ é um domínio de valorização discreto (veja Definição 2.7.3). $\square$

**Exemplo 2.7.2.** *Seja $(R, M)$ um domínio principal local.*

*(i)* *Pelo Lema 2.4.1 temos que $R$ é noetheriano. Daí, se $R$ não é um corpo, então é imediato que $R$ atende as condições da Definição 2.7.3, ou seja, $R$ é um domínio de valorização discreto.*

*(ii)* *A localização $(R_M, MR_M)$, onde $MR_M = \left\{\frac{x}{s} : x \in M \text{ e } s \in R \setminus M\right\}$, é um domínio de valorização discreto, pois $R \simeq R_M$ de acordo com o item (iii) do Exemplo 2.6.1.*

*(iii)* *Consideremos $R' = \mathbb{Z}$, e $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Seja $M = \langle p \rangle$. Neste caso, a localização $(R'_M, MR'_M) = (\mathbb{Z}_M, M\mathbb{Z}_M) = (\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}, \langle p \rangle \mathbb{Z}_{\langle p \rangle})$ é um domínio de valorização discreto, pois é um domínio de ideais principais local (veja item (ii) do Exemplo 2.6.1).*

# 3 IDEAIS 2-ABSORVENTES DE ANÉIS COMUTATIVOS

## 3.1 Primeiras definições e propriedades

**Definição 3.1.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal próprio de $R$. Dizemos que $I$ é um ideal 2-absorvente quando satisfaz a seguinte condição:*

*(i) Se $x_1x_2x_3 \in I$, então existem $u, v \in \{1, 2, 3\}$, distintos, tais que $x_ux_v \in I$.*

**Observação 3.1.1.** *Seja $R$ um anel comutativo.*

*(i) Todo ideal primo de $R$ é 2-absorvente. Consequentemente, a classe formada pelos ideais 2-absorventes de $R$ contém a classe formada pelos ideais primos de $R$. Além disso, pela Observação 2.3.2, inferimos que a classe formada pelos ideais 2-absorventes é não vazia.*

O exemplo a seguir mostra que existem anéis comutativos, onde nem todo ideal 2-absorvente de $R$ é de fato primo.

**Exemplo 3.1.1.** *Consideremos $R = \mathbb{Z}$. O ideal próprio $I = \langle 15\rangle = \langle 3\rangle \cap \langle 5\rangle$ de $\mathbb{Z}$ é 2-absorvente, mas não é um ideal primo. De fato, sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ tais que $x_1x_2x_3 \in I$. Assim, $3|x_1x_2x_3$, e $5|x_1x_2x_3$. Como 3 e 5 são números primos, concluímos que existem $u, v \in \{1, 2, 3\}$ tais que $3|x_u$ e $5|x_v$. Daí, vemos que $3 \cdot 5|x_ux_v$. Portanto $x_ux_v \in I$. Logo, $I$ é um ideal 2-absorvente. Por outro lado, $I$ não é um ideal primo, pois $3 \cdot 5 = 15 \in I$, mas $3 \notin I$ e $5 \notin I$.*

O teorema a seguir apresenta uma caracterização de ideais 2-absorventes em termos de absorção por ideais.

**Teorema 3.1.1.** *([1, Teorema 2.13, p. 423]). Sejam $R$ um anel comutativo e $I$ um ideal próprio de $R$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

*(ii) Sejam $I_1, I_2, I_3$ ideais de $R$. Se $I_1I_2I_3 \subset I$, então existem $u, v \in \{1, 2, 3\}$, distintos, tais que $I_uI_v \subset I$.*

Os resultados que apresentaremos a seguir serão utilizados como ferramentas para produzir exemplos de ideais 2-absorventes.

**Proposição 3.1.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $P$ e $Q$ ideais primos de $R$. Então, $P \cap Q$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Em particular, se $P$ e $Q$ são comaximais, então $PQ$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

**Demonstração.** Sejam $x_1, x_2, x_3 \in R$ tais que $x_1x_2x_3 \in P \cap Q$. Então, $x_1x_2x_3 \in P$ e $x_1x_2x_3 \in Q$. Como $P$ e $Q$ são ideais primos de $R$, então existem $u, v \in \{1, 2, 3\}$ tais que $x_u \in P$, e $x_v \in Q$. Se $u \neq v$, então $x_ux_v \in PQ \subseteq P \cap Q$ como queríamos. Se $u = v$, tomamos $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{u\}$. Assim, $x_ux_k \in P \cap Q$, pois $x_u \in P \cap Q$.

A afirmação particular segue diretamente do item $(v)$ do Lema 2.0.1, onde temos $PQ = P \cap Q$. $\square$

**Exemplo 3.1.2.** *Seja $R = \mathbb{Z}_6$. Notemos que $\mathbf{0}_{\mathbb{Z}_6}$ não é um ideal primo de $\mathbb{Z}_6$, uma vez que $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} \in \mathbf{0}_{\mathbb{Z}_6}$, mas $\overline{2}, \overline{3} \notin \mathbf{0}_{\mathbb{Z}_6}$. Por outro lado, $\langle\overline{2}\rangle$ e $\langle\overline{3}\rangle$ são ideais primos de $\mathbb{Z}_6$. De fato, sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_6$ tais que $\overline{x} \cdot \overline{y} \in \langle\overline{2}\rangle$. Então $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} \in \langle\overline{2}\rangle$ e, consequentemente, $xy - 2 \in \langle 6\rangle_{\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$. Isso implica na existência de um elemento $z \in \mathbb{Z}$ tal que $xy = 2 + 6z$, ou seja, $xy = 2(1 + 3z)$. Isso nos diz que $2|xy$ em $\mathbb{Z}$. Como $2$ é um número primo, então $2|x$ ou $2|y$. Daí, obtemos $x = 2u$ para algum $u \in \mathbb{Z}$ ou $y = 2v$, para algum $v \in \mathbb{Z}$. Assim, $\overline{x} = \overline{2u} = \overline{2} \in \langle\overline{2}\rangle$ ou $\overline{y} = \overline{2v} = \overline{2} \in \langle\overline{2}\rangle$. Logo, $\langle\overline{2}\rangle$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}_6$. Analogamente, mostra-se que $\langle\overline{3}\rangle$ também é um ideal primo de $\mathbb{Z}_6$. Daí, pela Proposição 3.1.1, concluímos que $\mathbf{0}_{\mathbb{Z}_6} = \left\langle\overline{2}\right\rangle \cap \left\langle\overline{3}\right\rangle$ é um ideal $2$-absorvente de $\mathbb{Z}_6$.*

O próximo resultado nos garante que certos ideais 2-absorventes de um anel comutativo $R$ são preservados por homomorfismo sobrejetores.

**Teorema 3.1.2.** *Sejam $R$, e $T$ dois anéis comutativos. Sejam $f : R \longrightarrow T$ um homomorfismo sobrejetor, e $I$ um ideal próprio de $R$ que contém $ker(f)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $I$ é um ideal $2$-absorvente de $R$.*

*(ii) $f(I)$ é um ideal $2$-absorvente de $T$.*

**Demonstração.** Seja $I$ um ideal próprio de $R$ contendo $ker(f)$. Como $f$ é sobrejetora, temos que $f(I)$ é um ideal de $T$. Agora, suponhamos que $f(I)$ é um ideal 2-absorvente de $T$. Sejam $x_1, x_2, x_3 \in R$ tais que $x_1x_2x_3 \in I$. Então $f(x_1)f(x_2)f(x_3) = f(x_1x_2x_3) \in f(I)$. Como $f(I)$ é um ideal 2-absorvente de $T$, podemos encontrar $u, v \in \{1, 2, 3\}$ (distintos) tais que $f(x_ux_v) = f(x_u)f(x_v) \in f(I)$. Portanto, existe $i \in I$ tal que $f(x_ux_v) = f(i)$. Portanto, $x_ux_v - i \in ker(f) \subseteq I$. Logo, $x_ux_v \in I$. Assim, vemos que $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$.

Reciprocamente, suponhamos que $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Sejam $y_1, y_2, y_3 \in T$ tais que $y_1y_2y_3 \in f(I)$. Tomemos $i \in I$ tal que $y_1y_2y_3 = f(i)$. Por outro lado, como $f$ é sobrejetor, encontramos $x_1, x_2, x_3 \in R$ tais que $y_u = f(x_u)$ para cada $u = 1, 2, 3$. Daí, $f(x_1x_2x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3) = y_1y_2y_3 = f(i)$. Consequentemente, $x_1x_2x_3 - i \in ker(f) \subseteq I$. Portanto, $x_1x_2x_3 \in I$. Como $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, então existem índices distintos $u, v \in \{1, 2, 3\}$ tais que $x_ux_v \in I$. Logo, $y_uy_v = f(x_u)f(x_v) = f(x_ux_v) \in f(I)$. Assim, $f(I)$ é um ideal 2-absorvente de $T$.

□

O resultado a seguir é demonstrado de maneira inteiramente análoga a prova do Teorema 3.1.2. Para isso, consideramos ideais primos em lugar de ideais 2-absorventes, e produtos de dois elementos em lugar de produtos de três elementos.

**Corolário 3.1.1.** *Sejam $R$, e $T$ dois anéis comutativos. Sejam $f : R \longrightarrow T$ um homomorfismo sobrejetor, e $I$ um ideal próprio de $R$ que contém $ker(f)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $I$ é um ideal primo de $R$.*

*(ii) $f(I)$ é um ideal primo de $T$.*

**Definição 3.1.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, $S$ um subanel de $R$, e $I$ um ideal de $R$. O ideal $J = I \cap S$ de $S$ é chamado de **contração** de $I$ a $S$.*

A seguir, destacamos o fato de que os ideais 2-absorventes de um anel $R$ são preservados por contrações.

**Proposição 3.1.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo, e $S$ um subanel de $R$. Se $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, então a contração de $I$ a $S$ é um ideal 2-absorvente de $S$.*

**Demonstração.** Sejam $x_1, x_2, x_3 \in S$ tais que $x_1x_2x_3 \in J = I \cap S$. Então $x_1x_2x_3 \in I$. Como $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, existem índices distintos $u, v \in \{1, 2, 3\}$ tais que $x_ux_v \in I$. Como $S$ é um subanel de $R$, e $x_u, x_v \in S$, temos que $x_ux_v \in I \cap S = J$. Logo, $J$ é um ideal 2-absorvente de $S$.

□

**Proposição 3.1.3.** *Sejam $R$ um domínio de integridade, e $p$ um elemento primo de $R$. Então $p^2R = \langle p^2 \rangle$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

**Demonstração.** Sejam $a, b, c \in R$ tais que $abc \in p^2R$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $abc \neq 0$ - se $abc = 0$, então pelo menos um dos elementos do terno $abc$ tem de ser nulo, pois $R$ não possui divisores de zero e, dessa forma, um produto do elemento nulo com qualquer outro elemento deste trio resultará em $0 \in p^2R$.

Pela Proposição 2.3.3, sabemos que $pR$ é um ideal primo de $R$. Utilizando o fato que $abc \in p^2R \subset pR$, assumimos que $a \in pR$. Assim, existe $y \in R$ satisfazendo a igualdade

$$a = py. \tag{3.1}$$

Por outro lado, como $abc \in p^2R$, existe $w \in R$, onde

$$abc = p^2w. \tag{3.2}$$

Substituindo (3.1) em (3.2), obtemos

$$(py)bc{=}p^2w. \tag{3.3}$$

Como $R$ é um domínio de integridade e $p \neq 0$, vemos que a igualdade (3.3) nos fornece a seguinte relação (veja Observação 2.1.1):

$$ybc{=}pw \in pR. \tag{3.4}$$

Portanto, $y \in pR$ ou $bc \in pR$, pois $pR$ é um ideal primo de $R$. Se $y \in pR$, então $a = py \in p^2R$. Portanto, $ab, ac \in p^2R$. Se $bc \in pR$, então, pela primalidade de $pR$, $b \in pR$ ou $c \in pR$. Assim, $ab \in p^2R$ ou $ac \in p^2R$. Logo, $p^2R$ é um ideal 2-absorvente de $R$. □

**Exemplo 3.1.3.** *Em $R = \mathbb{Z}$, todo ideal da forma $I = \langle p^2 \rangle = p^2\mathbb{Z}$, onde $p$ é um número primo, é um ideal 2-absorvente de $\mathbb{Z}$.*

**Proposição 3.1.4.** *([1, Lema 3.13, p. 427]). Seja $R$ um anel comutativo. Sejam $I$ um ideal 2-absorvente de $R$, e $S$ um sistema multiplicativo de $R$. Se o ideal*

$$IS^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} \, : \, r \in I, \; s \in S \right\}$$

*é não nulo, então $IS^{-1}R$ é um ideal 2-absorvente de $S^{-1}R$.*

**Exemplo 3.1.4.** *Sejam $R$ um anel comutativo e $S$ o conjunto de todos os elementos de $R$ que não são divisores de zero. Vimos, no Exemplo 2.6.3, que o anel de frações total $T(R)$ é a localização de $R$ em $S$, ou seja, $T(R) = S^{-1}R$. Se $I$ é um ideal próprio de $R$, então $IS^{-1}R = IT(R) = 0_{T(R)}$ se, e somente se, $I = 0_R$. De fato, se a igualdade $IS^{-1}R = IT(R) = 0_{T(R)}$ é satisfeita, então $\frac{x}{s} = \frac{0}{1}$ para todo $x \in I$, e $s \in S$. Daí, para todo $x \in I$, existe $v(x, s) = v \in S$ tal que $v(1 \cdot 0 - 1 \cdot x) = 0$ - tomando $s = 1$, $x' = 0$ e $s' = 1$ em (2.1). Assim, obtemos $vx = 0$. Como $v \neq 0$ não é um divisor de zero, pois $v \in S$, concluímos que $x = 0$. Logo, $I = 0_R$. Reciprocamente, se $I = 0_R$, então*

$$IT(R) = IS^{-1}R = \left\{ \frac{x}{s} \, : \, x \in I, \; s \in S \right\} = \left\{ \frac{0}{s} \, : s \in S \right\}.$$

*Como $\frac{0}{s} = \frac{0}{1}$ para todo $s \in S$, pois $1(s \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0$ para todo $s \in S$ - tomando $v = 1$, $x' = 0 = x$ e $s' = 1$ em (2.1) - vemos que $IT(R) = IS^{-1}R = 0_{S^{-1}R}$.*

*Finalmente, se $R$ não é um corpo, então $R$ possui um ideal maximal (em particular, $R$ possui um ideal primo) não nulo $I \neq 0_R$. Neste caso, a classe formada pelos ideais 2-absorventes de $R$ contém ideais não-nulos. Assim, pela Proposição 3.1.4, e pelo parágrafo acima, se $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$ não nulo, então $IT(R)$ é um ideal 2-absorvente de $T(R)$.*

## 3.2 Ideais primos minimais sobre ideais 2-absorventes de anéis comutativos

O resultado abaixo nos mostra que o ideal radical de um ideal 2-absorvente também é um ideal 2-absorvente.

**Teorema 3.2.1.** *([1, Teorema 2.1, p.419]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal 2-absorvente de $R$. Então $\sqrt{I}$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Além disso, $x^2 \in I$ para todo $x \in \sqrt{I}$.*

**Demonstração.** Comecemos provando a segunda parte do resultado. Seja $x \in \sqrt{I}$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in I$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $n > 2$ e que $x \notin I$. Se $n = 3$, então $x^3 \in I$, e como $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, vemos que $x^2 \in I$. Suponhamos por hipótese de indução que, para um certo $n \geq 3$, é válida a seguinte implicação:

$$\text{Se } x \in \sqrt{I} \text{ e } x^n \in I, \text{ então } x^2 \in I.$$

Mostremos que a seguinte implicação é verdadeira:

$$\text{Se } x \in \sqrt{I} \text{ e } x^{n+1} \in I, \text{ então } x^2 \in I.$$

Agora, suponhamos que $x^{n+1} \in I$. Assim, $(x)(x)(x^{n-1}) \in I$. Como $I$ é um ideal 2-absorvente, concluímos que $x^2 = xx \in I$ ou $xx^{n-1} = x^n \in I$. Se $x^n \in I$, então aplicamos a hipótese de indução e concluímos que $x^2 \in I$. Isto completa a demonstração da segunda parte.

Agora, mostremos que $\sqrt{I}$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Sejam $x, y, z \in R$ tais que $xyz \in \sqrt{I}$. Pelo parágrafo anterior, $(xyz)^2 = x^2y^2z^2 \in I$. Como $I$ é 2-absorvente, assumimos, sem perda de generalidade, que $(xy)^2 = x^2y^2 \in I$. Logo, $xy \in \sqrt{I}$.

□

O Teorema 3.2.2 a seguir nos garante que qualquer ideal 2-absorvente de um anel comutativo $R$ possui, no máximo, 2 (dois) ideais primos minimais. Entretanto, para apresentarmos tal demonstração, precisamos do seguinte lema.

**Lema 3.2.1.** *([13], Teorema 2.1, p.2). Seja $R$ um anel comutativo. Sejam $I, P \trianglelefteq R$, onde $I \subseteq P$, com $P$ primo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $P$ é minimal sobre $I$.*

*(ii) Para cada $x \in P$, existem $y \in R \setminus P$, e um inteiro positivo $n$ tais que $yx^n \in I$.*

**Demonstração.** Comecemos pela prova da implicação de $(i)$ em $(ii)$. Neste caso, $P \in$ $\mathtt{Min}(I)$. Suponhamos que a condição $(ii)$ não é válida. Dessa forma, existe $x \in P$ tal que para todo $y \in R \setminus P$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $yx^n \notin I$. Agora, definimos o seguinte conjunto não vazio:

$$S := \{yx^n \,:\, y \in R \setminus P,\ n \in \mathbb{N}\} \cup (R \setminus P).$$

O conjunto $S$ possui as seguintes propriedades:

(i) $S$ é um sistema multiplicativo de $R$. De fato, $1 \in S$, pois $1 \in R \setminus P$. Agora, sejam $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $y_1, y_2 \in R \setminus P$. Notemos que $y_1y_2 \in R \setminus P$, pois $P$ é primo. Assim, $y_1y_2 \in S$. Além disso, $(y_1x^{n_1})(y_2x^{n_2}) = (y_1y_2)x^{n_1+n_2}, (y_1x^n)y_2 = (y_1y_2)x^n \in S$.

(ii) $I \cap S = \emptyset$. Com efeito: Se $I \cap S \neq \emptyset$, então $yx^n \in I$ para algum $y \in R \setminus P$ e $n \in \mathbb{N}$, o que não é possível.

Utilizando o fato que $S$ é um sistema multiplicativo disjunto do ideal $I$, concluímos, pelo resultado [3, Teorema 2.2, p.378], que o conjunto

$$\mathcal{J} := \{J \trianglelefteq R \,:\, J \supseteq I,\ J \cap S = \emptyset\}$$

é não vazio, e possui um elemento maximal $Q$, onde $Q$ é um ideal primo de $R$ contendo $I$. Como $Q \cap S = \emptyset$, então $yx^n \notin Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in R \setminus P$. Consequentemente, $1x^n = x^n \notin Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \notin Q$, pois $Q$ é primo. Além disso, como $Q \cap (R \setminus P) = \emptyset$, vemos que $I \subseteq Q \subseteq P$. Por outro lado, por hipótese, $P \in \mathtt{Min}(I)$, e assim concluímos que $Q = P$. A última igualdade nos leva a uma contradição, pois $x \in P$. Logo, concluímos que $(i)$ implica em $(ii)$.

Reciprocamente, suponhamos válida a condição $(ii)$. Seja $Q$ um ideal primo de $R$ tal que $I \subseteq Q \subseteq P$. Por hipótese, dado $x \in P$, existem $y \in R \setminus P$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $yx^n \in I \subseteq Q$. Como $Q$ é um ideal primo e $y \in R \setminus P$, então temos $x \in Q$. Portanto, $Q = P$. Logo $P$ é um ideal primo minimal sobre $I$. $\square$

**Teorema 3.2.2.** *([1, Teorema 2.3, p.419]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal 2-absorvente de $R$. Então, existem no máximo dois ideais primos de $R$ que são minimais sobre $I$. Em outras palavras $|\mathtt{Min}(I)| \leq 2$.*

**Demonstração.** Suponhamos, por hipótese de absurdo, que $|\mathtt{Min}(I)| \geq 3$. Sejam $P_1, P_2 \in \mathtt{Min}(I)$, onde $P_1 \neq P_2$. Pela minimalidade de $P_1$ e $P_2$ sobre $I$, encontramos $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ e $x_2 \in P_2 \setminus P_1$. Agora, mostremos que $x_1x_2 \in I$. De fato, pelo Lema 3.2.1, existem $c_2 \in R \setminus P_1$, $c_1 \in R \setminus P_2$, $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $c_2x_1^n \in I$, e $c_1x_2^m \in I$. Claramente $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$. Daí, pela Proposição 2.3.5, temos que $x_1, x_2 \notin \sqrt{I}$. Como $(c_2)(x_1)(x_1^{n-1}) \in I$, então $c_2x_1 \in I$ ou $c_2x_1^{n-1} \in I$, pois $x_1^n \notin I$, e o ideal $I$ é 2-absorvente. Repetindo o argumento um número finito de vezes, concluímos que $c_2x_1, c_1x_2 \in I \subseteq P_1 \cap P_2$. Daí, como $P_1$ e $P_2$ são ideais primos de $R$, obtemos $c_2 \in P_2$, e $c_1 \in P_1$. Consequentemente, $c_2 \in P_2 \setminus P_1$, e $c_1 \in P_1 \setminus P_2$. Portanto, $c_1, c_2 \notin P_1 \cap P_2$. A partir daí, vemos que $c_1 + c_2 \notin P_1$, $c_1 + c_2 \notin P_2$. E isso nos diz que $(c_1+c_2)x_1 \notin P_2$ e $(c_1+c_2)x_2 \notin P_1$. Em particular, $(c_1+c_2)x_1, (c_1+c_2)x_2 \notin I$. Por último, como $c_2x_1, c_1x_2 \in I$, então $(c_1+c_2)x_1x_2 = c_1x_2x_1 + c_2x_1x_2 \in I$. Logo, como $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, concluímos que $x_1x_2 \in I$.

Finalmente, seja $P_3 \in \mathtt{Min}(I) \setminus \{P_1, P_2\}$. Pelo Lema 2.3.2, existem $y_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$ e $y_2 \in P_2 \setminus (P_1 \cup P_3)$. Por um argumento análogo ao anterior, podemos concluir que $y_1y_2 \in I$. Como $I \subseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3$ e $y_1y_2 \in I$, então $y_1 \in P_3$ ou $y_2 \in P_3$, uma contradição. Logo $|\mathtt{Min}(I)| \leq 2$. $\square$

Os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 combinados nos fornecerão uma descrição completa do radical $\sqrt{I}$ em termos dos ideais primos minimais sobre $I$, quando $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$ (compare o resultado abaixo com o Teorema 3.4.1).

**Teorema 3.2.3.** *([1, Teorema 2.4, p.419]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal 2-absorvente de $R$. Então, uma, e somente uma, das seguintes condições é satisfeita:*

(i) *$\mathtt{Min}(I) = \{P\}$. Além disso, $\sqrt{I} = P$ é um ideal primo de $R$ tal que $P^2 \subseteq I$.*

(ii) *$\mathtt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$. Além disso, $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$, $P_1P_2 \subseteq I$ e $\sqrt{I}^2 \subseteq I$.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 3.2.2, ou $\mathtt{Min}(I) = \{P\}$ ou $\mathtt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$. Daí, pela Proposição 2.3.5, podemos inferir que, ou $\sqrt{I} = P$ é um ideal primo, ou $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Suponhamos, inicialmente, que $\sqrt{I} = P$. Sejam $x, y \in P$. Assim, pelo Teorema 3.2.1, temos $x^2, y^2 \in I$. Por outro lado, temos $x(x+y)y = x^2y + xy^2 \in I$. Sendo $I$ um ideal 2-absorvente de $R$, temos $x(x+y) = x^2 + xy \in I$, ou $(x+y)y = xy + y^2 \in I$ ou $xy \in I$. Em qualquer um dos cenários, concluímos que $xy \in I$. Portanto, $P^2 \subseteq I$.

Agora, suponhamos que $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Pelo mesmo argumento utilizado no parágrafo acima, temos $\sqrt{I}^2 \subseteq I$. Resta-nos mostrar $P_1P_2 \subseteq I$. Notemos o seguinte:

(i) Para todo $w \in P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$ temos, pelo Teorema 3.2.1, $w^2 \in I$. Portanto $(w_1+w_2)^2 = w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 \in I$ para todo $w_1, w_2 \in \sqrt{I}$. Logo $w_1w_2 \in I$ para todo $w_1, w_2 \in \sqrt{I}$.

(ii) Sejam $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ e $x_2 \in P_2 \setminus P_1$. Baseando-se na prova do Teorema 3.2.2, vemos que $x_1x_2 \in I$.

(iii) Sejam $z_1 \in P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$, e $z_2 \in P_2 \setminus P_1$. Tomemos $y_1 \in P_1 \setminus P_2$. Novamente pela prova do Teorema 3.2.2, temos $y_1z_2 \in I$. Como $z_1 + y_1 \in P_1 \setminus P_2$ temos, outra vez pela prova do Teorema 3.2.2, $z_1z_2 + y_1z_2 = (z_1+y_1)z_2 \in I$. Logo, $z_1z_2 \in I$. Mostramos, por argumento análogo, que se $z_1 \in P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$ e $z_2 \in P_1 \setminus P_2$, então $z_1z_2 \in I$.

Pelo exposto acima, concluímos que $P_1P_2 \subseteq I$. $\square$

## 3.3 Ideais quocientes e ideais 2-absorventes de anéis comutativos

Os dois próximos resultados desta seção nos garantem que, quando $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, o ideal quociente $(I : xR) = I_x = \{y \in R : yx \in I\}$ é de fato um ideal primo de $R$ contendo $\sqrt{I}$ (onde $\sqrt{I} \neq I$), para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$. Além disso, eles também nos garantem que o conjunto de ideais

$$\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$$

é totalmente ordenado. Mais precisamente, $I_x \subseteq I_y$ ou $I_y \subseteq I_x$ para todo $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$.

Lembre-se que o Teorema 3.2.3 nos garante que ou $\mathtt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$, ou $\mathtt{Min}(I) = \{P\}$. No primeiro caso, $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$, enquanto no segundo $\sqrt{I} = P$ - um ponto a destacar é que a condição $I \neq \sqrt{I}$ é equivalente a dizer que $I$ não é um ideal radical (veja Definição 2.3.8).

**Teorema 3.3.1.** *([1, Teorema 2.5, p.420]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal 2-absorvente de $R$ tal que $\sqrt{I} = P$, onde $\mathtt{Min}(I) = \{P\}$. Suponhamos que $I \neq P = \sqrt{I}$. Então, temos o seguinte (lembre-se que $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$):*

*(i) Para cada $x \in \sqrt{I} \setminus I$, o ideal $I_x$ é primo, e contém $P = \sqrt{I}$. Além disso, $I_y \subseteq I_x$ ou $I_x \subseteq I_y$, para todo $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$.*

**Demonstração.** Fixemos $x \in P \setminus I$, onde $P = \sqrt{I}$. Pelo Teorema 3.2.3, temos $P^2 \subseteq I$. Consequentemente, $P\langle x \rangle \subseteq P^2 \subseteq I$. Portanto, $P \subseteq I_x$. Se $I_x = P$, então $I_x$ é um ideal primo de $R$, como queríamos. Suponhamos que $I_x \neq P$. Sejam $y, z \in R$ tais que $yz \in I_x$. Mostremos que $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. De fato, como $P \subsetneq I_x$, assumimos, sem perda de generalidade, que $y, z \notin P$. Em particular $yz \notin I$, pois $P = \sqrt{I} \supsetneq I$. Por outro lado, como $yz \in I_x$, temos $yzx \in I$. Sendo $I$ um ideal 2-absorvente de $R$, e sabendo que $yz \notin I$, inferimos que $yx \in I$ ou $zx \in I$. Por conseguinte, $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. Logo, $I_x$ é um ideal primo de $R$ contendo $P = \sqrt{I}$.

Agora, sejam $x, y \in P \setminus I$, onde $P = \sqrt{I}$, e suponhamos que $I_x \not\subseteq I_y$. Mostremos que $I_y \subsetneq I_x$. Com efeito: Tomemos $z \in I_x \setminus I_y$, e $w \in I_y$. Pela primeira parte, sabemos que $P \subseteq I_y$. Portanto, $z \in I_x \setminus P$. Similarmente, assumimos, sem perda de generalidade, que $w \in I_y \setminus P$, pois $P \subseteq I_x$. Como $z, w \notin P$ temos $zw \notin I$, uma vez que $P$ é um ideal primo contendo $I$. Além disso, $zy \notin I$, pois $z \in I_x \setminus I_y$. Observamos ainda o seguinte:

$$z(x + y)w = wzx + zwy \in I,$$

pois $zx \in I$, $wy \in I$ e $I \subsetneq R$. Por outro lado,

$$z(x + y) = zx + zy \notin I,$$

tendo em vista que $zx \in I$, e $zy \notin I$. Combinando as duas igualdade acima com o fato que $zw \notin I$, inferimos que $(x + y)w \in I$, pois $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Desse modo, obtemos $wx \in I$, uma vez que $wx + wy = (x + y)w \in I$ e $wy \in I$. Portanto, $w \in I_x$ para todo $w \in I_y$. Logo, $I_y \subsetneq I_x$. E isto completa a demonstração. $\square$

**Teorema 3.3.2.** *([1, Teorema 2.6, p.420]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal 2-absorvente de $R$ tal que $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$, onde $\mathtt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$. Suponhamos que $I \neq \sqrt{I}$. Então, temos o seguinte (lembre-se que $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$):*

*(i) Para cada $x \in \sqrt{I} \setminus I$, o ideal $I_x$ é primo, e contém os ideais $P_1$ e $P_2$. Além disso, $I_y \subseteq I_x$ ou $I_x \subseteq I_y$ para todo $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$.*

**Demonstração.** Fixemos $x \in \sqrt{I} \setminus I$, onde $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Pelo Teorema 3.2.3, temos $P_1P_2 \subseteq I$. Consequentemente, $P_u\langle x\rangle \subseteq I$ para cada $u \in \{1, 2\}$. Portanto, $P_1, P_2 \subseteq I_x$. Sejam $y, z \in R$ tais que $yz \in I_x$. Mostremos que $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. De fato, como $P_1, P_2 \subsetneq I_x$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $y, z \notin P_u$ para $u = 1, 2$. Em particular $yz \notin I$, pois $P_1 \cap P_2 = \sqrt{I} \supsetneq I$. Por outro lado, como $yz \in I_x$, temos $yzx \in I$. Sendo $I$ um ideal 2-absorvente de $R$, e sabendo que $yz \notin I$, inferimos que $yx \in I$ ou $zx \in I$. Por conseguinte, $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. Logo, $I_x$ é um ideal primo de $R$ contendo $P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$.

A segunda parte segue por um argumento análogo ao apresentado no Teorema 3.3.1. $\square$

Agora nós apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que um ideal $I$ de $R$, onde $I$ não é um ideal radical, isto é, $I \neq \sqrt{I}$, seja um ideal 2-absorvente. A presente caracterização se dará em termos dos ideais pertencentes ao conjunto $\mathtt{Q}(I, S)$ (Teoremas 3.3.3 e 3.3.4).

**Teorema 3.3.3.** *([1, Teorema 2.8, p.421]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal próprio de $R$. Suponhamos que $I \neq \sqrt{I}$, onde $\sqrt{I}$ é um ideal primo de $R$. Então as seguintes afirmações são equivalentes (lembre-se que $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$):*

*(i) $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

*(ii) Todo ideal em $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I)$ é um ideal primo de $R$.*

**Demonstração.** Seja $I$ um ideal próprio de $R$ tal que $I \neq \sqrt{I} = P$, onde $P$ é um ideal primo de $R$.

Se $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, então pelos Teoremas 3.2.3, 3.3.1, 3.3.2 temos que todo ideal em $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I)$ é primo. Reciprocamente, suponhamos que todo ideal em $\mathtt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I)$ é primo. Sejam $x, y, z \in R$ tais que $xyz \in I$. Como $\sqrt{I}$ é um ideal primo de $R$ e $I \subsetneq \sqrt{I}$, supomos, sem perda de generalidade, que $x \in \sqrt{I}$. Se $x \in I$, então $xy \in I$. Agora, suponhamos que $x \in \sqrt{I} \setminus I$. Como $yz \in I_x$ e, por hipótese, $I_x$ é um ideal primo de $R$, concluímos que $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. Logo, $yx \in I$ ou $zx \in I$. Isso mostra que $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. $\square$

Abaixo, nós aplicaremos o Teorema 3.3.3 para obter um exemplo de um ideal próprio que não é 2-absorvente.

**Exemplo 3.3.1.** *Consideremos o anel*

$$R = \mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x] = \{z + 6x \cdot r(x)\ :\ z \in \mathbb{Z},\ r(x) \in \mathbb{Z}[x]\},$$

*que é um domínio de integridade, já que é um subanel de $\mathbb{Z}[x]$, e o ideal $P = (6x)\mathbb{Z}[x]$. Pela Proposição 2.1.1, vemos que $P$ é um ideal primo de $R$, pois $R/P \simeq \mathbb{Z}$ é um domínio de integridade. De fato, consideremos o homomorfismo sobrejetor $f : \mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definido por*

$$f(z + (6x)r(x)) = z.$$

*Notemos que $\mathbf{ker}(f) = (6x)\mathbb{Z}[x] = P$. Logo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, vemos que $R/P \simeq \mathbb{Z}$, que é um domínio de integridade.*

*Agora, como $P^2 = (36x^2)\mathbb{Z}[x]$, tomemos $6x^2 \in P \setminus P^2$. Notemos que*

$$I_{6x^2} = \{p(x) \in R \,|\, 6x^2 p(x) \in P^2\} = 6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x].$$

*De fato, se $p(x) \in I_{6x^2}$, então $6x^2 p(x) \in P^2 = (36x^2)\mathbb{Z}[x]$. Isso implica que*

$$6x^2 p(x) = (36x^2) r(x),$$

*com $r(x) = z_0 + z_1 x + \cdots + z_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$. Daí, obtemos*

$$6x^2(p(x) - 6r(x)) = 0.$$

*Como $6x^2 \neq 0$ e $R = \mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x]$ não possui divisores de zero (pois é um domínio de integridade), então obtemos*

$$p(x) = 6r(x) = 6z_0 + 6z_1 x + \cdots + 6z_k x^k = 6z_0 + 6x(z_1 + z_2 x + \cdots + z_k x^{k-1}) \in 6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x].$$

*Logo, $I_{6x^2} \subseteq 6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x]$. Reciprocamente, se $p(x) \in 6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x]$, então $p(x) = 6z + (6x)s(x)$, onde $z \in \mathbb{Z}$ e $s(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Daí, obtemos*

$$6x^2 p(x) = 6x^2(6z + (6x)s(x)) = 36x^2(z + xs(x)) \in (36x^2)\mathbb{Z}[x] = P^2.$$

*Isso implica que $p(x) \in I_{6x^2}$ e, consequentemente, $6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x] \subseteq I_{6x^2}$. Como temos as duas inclusões, segue que $I_{6x^2} = 6\mathbb{Z} + (6x)\mathbb{Z}[x]$. Notemos também que $I_{6x^2}$ não é um ideal primo de $R$, pois $2 \cdot 3 = 6 \in I_{6x^2}$, mas $2 \notin I_{6x^2}$ e $3 \notin I_{6x^2}$. Por conseguinte, pelo Teorema 3.3.3, vemos que $P^2$ não é um ideal 2-absorvente de $R$.*

**Teorema 3.3.4.** *([1, Teorema 2.8, p.421]). Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal próprio de $R$. Suponhamos que existam $P_1, P_2 \in \texttt{Min}(I)$, distintos, tais que $I \neq \sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Em particular, $\texttt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$.*

*(ii) $P_1P_2 \subseteq I$. Além disso, todo ideal em $\texttt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$ é um ideal primo de $R$.*

*(iii) Todo ideal em $\texttt{Q}(I, (P_1 \cup P_2) \setminus I) = \{I_x : x \in (P_1 \cup P_2) \setminus I\}$ é um ideal primo de $R$.*

**Demonstração.** Seja $I$ como no enunciado.

A implicação de $(i)$ em $(ii)$ segue diretamente dos Teoremas 3.2.3 e 3.3.2.

Suponhamos válida a afirmação $(ii)$. Em outras palavras, $P_1P_2 \subset I$, e todo ideal em

$$\texttt{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I) = \{I_x : x \in \sqrt{I} \setminus I\}$$

é um ideal primo de $R$. Agora, seja $x \in P_1 \setminus P_2$. Verifiquemos que $yx \in I$ se, e somente se, $y \in P_2$. De fato, se $yx \in I$, então $yx \in P_2$, pois $I \subsetneq \sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Como $P_2$ é um ideal primo de $R$ e $x \in P_1 \setminus P_2$, temos $y \in P_2$. Reciprocamente, se $y \in P_2$, então $yx = xy \in P_1P_2 \subseteq I$. E isto completa a demonstração da afirmação. Esta última equivalência nos diz que $I_x = P_2$ e, portanto, $I_x$ é um ideal primo de $R$. Por último, como $I_d$ é um ideal primo de $R$ para todo $d \in (P_1 \cap P_2) \setminus I$, temos a condição $(iii)$.

Finalmente, suponhamos que todo ideal em

$$\texttt{Q}(I, (P_1 \cup P_2) \setminus I) = \{I_x : x \in (P_1 \cup P_2) \setminus I\}$$

é um ideal primo de $R$. Sejam $x, y, z \in R$ tais que $xyz \in I \subset \sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $x \in P_1 \cup P_2$, pois $P_1, P_2$ são primos e $xyz \in P_1 \cap P_2$. Se $x \in I$, então $xy \in I$. Assim, assumimos que $x \in (P_1 \cup P_2) \setminus I$. Agora, como $yz \in I_x$, e $I_x$ é um ideal primo de $R$, vemos que $y \in I_x$ ou $z \in I_x$. Portanto, $xy = yx \in I$ ou $xz = zx \in I$. Logo, $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, como queríamos demonstrar. □

Com o auxílio do Teorema 3.3.4, nós obteremos exemplos de ideais 2-absorventes no anel $\mathbb{Z}[x, y]$.

**Exemplo 3.3.2.** *Seja*

$$R = \mathbb{Z}[x, y] := \left\{ \sum_{i=0}^{k} z_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} \ : \ z_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0,\ i = 0, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

*o anel de polinômios nas indeterminadas $x$ e $y$ com coeficientes inteiros. Sejam $P_1 = \langle 2, x \rangle$, $P_2 = \langle 2, y \rangle$ e $I = P_1P_2 = \langle 4, 2x, 2y, xy \rangle$. Observemos que* *(i)* $P_1$ *e* $P_2$ *são ideais primos de* $R$*. De fato, notemos que* $R = \mathbb{Z}[x,y] = \langle 1, x, y\rangle$*, pois o conjunto* $X = \{1, x, y\}$ *é um conjunto gerador de* $R = \mathbb{Z}[x,y]$ *(veja a Definição 2.0.6). Assim, consideremos os homomorfismos sobrejetores* $f : \mathbb{Z}[x,y] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[y]$*, definido por*

$$f\left(\sum_{i=0}^{k} z_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}\right) = f\left(\sum_{j=0}^{m} z_{i_j} x^{\alpha_{i_j}} y^{\beta_{i_j}} + \sum_{s=1}^{n} z_{i_s} y^{\beta_{i_s}}\right) := \sum_{s=1}^{n} \overline{z_{i_s}} y^{\beta_{i_s}},$$

*e* $g : \mathbb{Z}[x,y] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]$*, definido por*

$$g\left(\sum_{i=0}^{k} z_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}\right) = f\left(\sum_{j=0}^{m} z_{i_j} x^{\alpha_{i_j}} y^{\beta_{i_j}} + \sum_{s=1}^{n} z_{i_s} x^{\alpha_{i_s}}\right) := \sum_{s=1}^{n} \overline{z_{i_s}} x^{\alpha_{i_s}},$$

*Como* $\mathbf{ker}(f) = \langle 2, x\rangle = P_1$ *e* $\mathbf{ker}(g) = \langle 2, y\rangle = P_2$ *então, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, vemos que* $R/P_1 \simeq \mathbb{Z}_2[y]$ *e* $R/P_2 \simeq \mathbb{Z}_2[x]$*, que são domínios de integridade. Daí, pela Proposição 2.1.1, vemos que* $P_1$ *e* $P_2$ *são ideais primos de* $R$*;*

*(ii)* $I$ *não é um ideal primo de* $R$*, pois* $2^2 = 4 \in I$*, mas* $2 \notin I$*;*

*(iii)* $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2 = \langle 2, xy\rangle$*. De fato, pela Proposição 2.3.6, sabemos que* $\sqrt{I} = \sqrt{P_1P_2} = \sqrt{P_1} \cap \sqrt{P_2} = P_1 \cap P_2$*. Agora, como* $2, x \in \langle 2, x\rangle = P_1$ *e* $2, y \in \langle 2, y\rangle = P_2$*, então* $2, xy \in P_1 \cap P_2$ *e, consequentemente,* $\langle 2, xy\rangle \subseteq P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$*, pois* $P_1$ *e* $P_2$ *são ideais de* $R$*. Reciprocamente, se* $p(x,y) \in P_1 \cap P_2 = \sqrt{I}$*, então exitem* $r(x,y), s(x,y), t(x,y), w(x,y) \in R$ *tais que*

$$2r(x,y) + xs(x,y) = p(x,y) = 2t(x,y) + yw(x,y).$$

*Suponhamos, por contradição, que* $p(x,y) \notin \langle 2, xy\rangle$*. Como* $2r(x,y), 2t(x,y) \in \langle 2, xy\rangle$*, então*

$$xs(x,y) = p(x,y) - 2r(x,y) \notin \langle 2, xy\rangle \ \text{ e } yw(x,y) = p(x,y) - 2t(x,y) \notin \langle 2, xy\rangle\,.$$

*Isso implica que* $s(x,y) \notin \langle 2, y\rangle = P_2$ *e* $t(x,y) \notin \langle 2, x\rangle = P_1$*. Mas, como* $2r(x,y), 2t(x,y) \in \langle 2, xy\rangle \subseteq \langle 2, x\rangle \cap \langle 2, y\rangle = P_1 \cap P_2$*, então*

$$xs(x,y) = p(x,y) - 2r(x,y) \in \langle 2, y\rangle = P_2 \quad yt(x,y) = p(x,y) - 2w(x,y) \in \langle 2, x\rangle = P_1.$$

*Como* $P_1$ *e* $P_2$ *são ideais primos de* $R$*,* $y \notin P_1$ *e* $x \notin P_2$*, então obtemos* $s(x,y) \in P_2$ *e* $t(x,y) \in P_1$*, o que nos leva a duas contradições. Logo,* $p(x,y) \in \langle 2, xy\rangle$ *e, portanto,* $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2 = \langle 2, xy\rangle$*.*

*(iv)* $I_2 = \langle 2, x, y\rangle$*. Além disso,* $I_2$ *é maximal (primo). De fato, recordemo-nos que*

$$I_2 = \{p(x,y) \in R = \mathbb{Z}[x,y] \,:\, 2p(x,y) \in I = \langle 4, 2x, 2y, xy\rangle\}.$$

*Seja* $p(x,y) \in I_2$*. Então,* $2p(x,y) \in I = \langle 4, 2x, 2y, xy\rangle$*. Isso implica que existem* $r(x,y), s(x,y), t(x,y), w(x,y) \in R$ *tais que*

$$2p(x,y) = 4r(x,y) + 2xs(x,y) + 2yt(x,y) + xyw(x,y).$$

*Daí, obtemos*

$$xyw(x,y) = 2(p(x,y) - 2r(x,y) - xs(x,y) - yt(x,y)) \in 2R = 2\mathbb{Z}[x,y]$$

*Notemos que* $2R = 2\mathbb{Z}[x,y]$ *é um ideal primo de* $R$*. De fato, consideremos o homomorfismo sobrejetor* $h : \mathbb{Z}[x,y] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x,y]$ *definido por*

$$h\left(\sum_{i=0}^{k} z_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}\right) := \sum_{i=0}^{k} \overline{z_i} x^{\alpha_i} y^{\beta_i}.$$

*Como* $\mathbf{ker}(h) = 2\mathbb{Z}[x,y] = 2R$ *então, aplicando o Primeiro Teorema do Isomorfismo, obtemos* $R/2R = \mathbb{Z}[x,y]/2\mathbb{Z}[x,y] \simeq \mathbb{Z}_2[x,y]$*, que é um domínio de integridade. Consequentemente, pela Proposição 2.1.1, vemos que que* $2R = 2\mathbb{Z}[x,y]$ *é um ideal primo de* $R$*. Como* $xy \notin 2R = 2\mathbb{Z}[x,y]$*, então vemos que* $w(x,y) \in 2R = 2\mathbb{Z}[x,y]$*. Assim, existe* $w'(x,y) \in R$ *tal que* $w(x,y) = 2w'(x,y)$*. Consequentemente, obtemos*

$$2p(x,y) = 2(2r(x,y) + xs(x,y) + yt(x,y) + xyw'(x,y)).$$

*Como* $R = \mathbb{Z}[x,y]$ *é um domínio de integridade e como* $2 \neq 0$*, então pela Observação 2.1.1, vemos que*

$$p(x,y) = 2r(x,y) + xs(x,y) + yt(x,y) + xyw'(x,y) \in \langle 2, x, y\rangle.$$

*Como* $p(x,y)$ *foi tomado arbitrariamente, concluímos que* $I_2 \subseteq \langle 2, x, y\rangle$*.*

*Reciprocamente,*

$$p(x,y) \in \langle 2, x, y\rangle \Rightarrow p(x,y) = 2r(x,y) + xs(x,y) + yt(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p(x,y) = 4r(x,y) + 2xs(x,y) + 2yt(x,y) \in \langle 4, 2x, 2y, xy\rangle = I,$$

*onde* $r(x,y), s(x,y), t(x,y) \in R$*. Logo,* $\langle 2, x, y\rangle \subseteq I_2$*. Como* $I_2 \subseteq \langle 2, x, y\rangle$*, concluímos que* $I_2 = \langle 2, x, y\rangle$*. Além disso, consideremos o homomorfismo sobrejetor* $\omega : \mathbb{Z}[x,y] \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ *definido por*

$$\omega\left(\sum_{i=0}^{k} z_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}\right) := \sum_{i=0}^{k} \overline{z_i}.$$

*Notemos que* $\mathbf{ker}(\omega) = \langle 2, x, y\rangle$*. Por conseguinte, o Primeiro Teorema do Isomorfismo nos garante que* $R/I_2 = (\mathbb{Z}[x,y]/\langle 2, x, y\rangle) \simeq \mathbb{Z}_2$*, que é um corpo. Daí, pelo resultado [9, Teorema 27.9, p.247], vemos que* $I_2$ *é um ideal maximal (primo) de* $R$*.*

*(v)* $I_2 = I_{p(x,y)}$, *para todo* $p(x,y) \in \sqrt{I} \setminus I$. *De fato, dado* $p(x,y) \in \sqrt{I} \setminus I$, *vemos que* $p(x,y) \in (P_1 \cap P_2) \setminus P_1P_2 = \langle 2, xy \rangle \setminus \langle 4, 2x, 2y, xy \rangle$. *Assim, existem* $r(x,y), s(x,y) \in R$ *tais que* $p(x,y) = 2r(x,y) + xys(x,y)$. *Como* $2p(x,y), xp(x,y), yp(x,y) \in \langle 4, 2x, 2y, xy \rangle = I$, *então* $2, x, y \in I_{p(x,y)}$. *Daí, vemos que* $\langle 2, x, y \rangle \subseteq I_{p(x,y)}$. *Como* $I_2$ *é maximal (pelo item (iv)) e* $I_{p(x,y)} \neq R$ *(pois* $1 \notin I_{p(x,y)}$*), concluímos que* $I_{p(x,y)} = I_2$. *Portanto,* $I_{p(x,y)}$ *é maximal (primo), para todo* $p(x,y) \in \sqrt{I} \setminus I$.

*Daí, vemos que todo ideal em* $\mathcal{Q}(I, \sqrt{I} \setminus I)$ *é primo. Portanto, pelo Teorema 3.3.4, concluímos que* $I$ *é um ideal* 2*-absorvente de* $R$.

## 3.4 Ideais primários e ideais 2-absorventes de anéis comutativos

Comecemos esta seção com o seguinte resultado (compare com o Teorema 3.2.3):

**Teorema 3.4.1.** *([1, Teorema* 3.1*, p.423]). Sejam* $R$ *um anel comutativo, e* $I$ *um ideal* $P$*-primário de* $R$ *(*$\sqrt{I} = P$*, onde* $P$ *é um ideal primo de* $R$*). Então* $I$ *é um ideal* 2*-absorvente se, e somente se,* $P^2 = (\sqrt{I})^2 \subset I$. *Em particular, se* $M$ *é um ideal maximal de* $R$*, então* $M^2$ *é um ideal* 2*-absorvente de* $R$.

**Demonstração.** Seja $I$ um ideal $P$-primário de $R$. Se $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$, então, pelo item $(i)$ do Teorema 3.2.3 temos $P^2 \subseteq I$. Reciprocamente, assumimos que $P^2 \subseteq I$. Sejam $x, y, z \in R$ tais que $xyz = (xy)z = (xz)y = x(yz) \in I$. Se $xy, xz \notin I$, então $z \in P$ e $y \in P$, pois $(xy)z = (xz)y \in I \subset P$ e $I$ é um ideal $P$-primário de $R$. Daí, $yz = zy \in P^2 \subseteq I$. Logo $I$ é um ideal 2-absorvente como queríamos.

Por último, seja $J$ um ideal de $R$. Sabemos que $\sqrt{J^n} = \sqrt{J}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $M$ é maximal, então $\sqrt{M^2} = \sqrt{M} = M$, pois $M$ é um ideal primo, e todo ideal primo é um ideal radical (Corolário 2.3.1). Assim, pelo Lema 2.3.4 (item $(ii)$), vemos que $M^2$ é $M$-primário

$\square$

Sejam $R$ um anel comutativo, e $I$ um ideal próprio de $R$. Suponhamos que $P$ é um ideal primo de $R$ tal que $\sqrt{I} = P$. Nessas condições, surge uma pergunta natural: Existe alguma condição suficiente sobre $P$ para garantir que o ideal $I$ seja $P$-primário? O próximo resultado nos apresenta uma condição para a obtenção de uma resposta positiva para tal pergunta.

**Teorema 3.4.2.** *([1, Teorema 3.6, p.426]) Sejam* $R$ *um anel comutativo,* $P$ *um ideal primo dividido de* $R$*, e* $I$ *um ideal próprio de* $R$ *tal que* $\sqrt{I} = P$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i)* $I$ *é um ideal* 2*-absorvente.*

*(ii) $I$ é um ideal $P$-primário, e $P^2 = (\sqrt{I})^2 \subseteq I$.*

**Demonstração.** Suponhamos que $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Como $\sqrt{I} = P$ é um ideal primo de $R$, temos, pelo Teorema 3.2.3, $P^2 \subseteq I$. Agora, sejam $x, y \in R$ tais que $xy \in I$. Suponhamos que $y \notin P = \sqrt{I}$. Como $I \subseteq P = \sqrt{I}$, e $P$ é um ideal primo, podemos concluir que $x \in P$. Por outro lado, sendo $P$ um ideal primo dividido, temos $P \subsetneq \langle y \rangle$. Assim, $x = yz$ para algum $z \in R$. Desse modo, temos $xy = y^2 z \in I$. Como $y^2 \notin I$ (pois $y \notin P$), e $I$ é um ideal 2-absorvente, então $x = yz \in I$. Logo, $I$ é um ideal $P$-primário. A recíproca segue diretamente do Teorema 3.4.1. $\square$

Seja $I$ um ideal próprio de $R$ tal que $\sqrt{I} = P$, onde $P$ é um ideal primo de $R$. O exemplo a seguir nos mostra um caso onde $P$ não é um ideal primo dividido e $I$ é 2-absorvente, mas $I$ não é $P$-primário. Isto mostra que, em geral, a condição de $I$ ser $P$-primário não é necessária para que $I$ seja 2-absorvente.

**Exemplo 3.4.1.** *Consideremos o anel*

$$R = \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x] := \{z + (3x)r(x) \,:\, z \in \mathbb{Z},\ r(x) \in \mathbb{Z}[x]\},$$

*que é um domínio de integridade, pois é um subanel de $\mathbb{Z}[x]$. Consideremos também o ideal $P = (3x)\mathbb{Z}[x]$. Então:*

*(i) Pela Proposição 2.1.1, $P$ é um ideal primo de $R$, pois $R/P \simeq \mathbb{Z}$ é um domínio de integridade (obtemos o isomorfismo $R/P \simeq \mathbb{Z}$ de maneira inteiramente análoga ao que fizemos no Exemplo 3.3.1). Por outro lado, $P$ não é um ideal primo dividido de $R = \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}$, pois $2 \in R \setminus P$ e $2$ não divide $3x \in P$ em $R$. De fato, $2 \in \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x] = R$, mas $2 \notin P = (3x)\mathbb{Z}[x]$, pois o grau de todo polinômio em $P$ é maior ou igual a $1$. Além disso, se tivéssemos que $2|(3x)$ (em $R = \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x]$), então teríamos $3x = 2(z + (3x)r(x))$, com $z \in \mathbb{Z}$ e $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Tal igualdade é equivalente a*

$$3x = 2z + (5x)r(x).$$

*Ora, mas se esta última igualdade fosse verdadeira, deveríamos ter $z = 0$ e $r(x) = r \in \mathbb{Z}$, já que, neste caso, os graus dos polinômios $3x$ e $2z + (5x)r(x)$ devem ser iguais. Daí, obteríamos uma nova igualdade:*

$$3x = (5x)r = (5r)x,$$

*ou ainda,*

$$x(5r - 3) = 0.$$

*Como $x \neq 0$ e $R = \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade, então obteríamos desta última igualdade que $3 = 5r$ - isto é, $5\,|_{\mathbb{Z}}\,3$, o que é um absurdo. Logo, $2$ não divide $3x \in P$ em $R$.*

*(ii)* $P^2 = (9x^2)\mathbb{Z}[x]$ *não é* $P$*-primário, pois* $(3x^2) \cdot 3 = 9x^2 \in P^2$*, mas* $3x^2 \notin P^2$ *e* $3 \notin P$.

*(iii)* *Dado* $p(x) \in P \setminus P^2$*, existem* $k \in \mathbb{N}$*,* $z_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ *tais que*

$$p(x) = (3x)(z_0 + z_1 x + \cdots + z_k x^k).$$

*Afirmamos que ou* $P^2_{p(x)} = (3x)\mathbb{Z}[x] = P$*, ou* $P^2_{p(x)} = 3\mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x] = 3\mathbb{Z} + P$*. De fato, dado* $q(x) \in R = \mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x]$*, existem* $\ell \in \mathbb{N}$ *e* $w_0, w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$q(x) = w_0 + (3x)(w_0 + w_1 x \cdots + w_\ell x^\ell).$$

*Assim, podemos expressar o produto* $q(x)p(x)$ *como*

$$q(x)p(x) = 3x(w_0 z_0 + w_0 z_1 x + \cdots + w_0 z_k x^k) + (9x^2)r(x)$$

*onde* $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$*. Isso implica que* $q(x)p(x) \in P^2$ *se, e somente se,*

$$3x(w_0 z_0 + w_0 z_1 x + \cdots + w_0 z_k x^k) \in (9x^2)\mathbb{Z}[x] = P^2$$

*Mas, como* $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$*, então*

$$3x(w_0 z_1 x + \cdots + w_0 z_k x^k) \in (9x^2)\mathbb{Z}[x] = P^2$$

*se, e somente se,* $w_0 \in 3\mathbb{Z}$*. Isso implica que*

$$3x(w_0 z_0 + w_0 z_1 x + \cdots + w_0 z_k x^k) \in (9x^2)\mathbb{Z}[x] = P^2$$

*se, e somente se,* $z_0 = 0$ *e* $w_0 \in 3\mathbb{Z}$*. Daí, vemos que* $q(x)p(x) \in P^2$ *se, e somente se,* $p(x) = 3z_1 x^2 + \cdots + 3z_k x^k$*, com* $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$*, e* $q(x) \in 3\mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x] = 3\mathbb{Z} + P$*. Portanto, ou* $P^2_{p(x)} = (3x)\mathbb{Z}[x] = P$ *(se* $w_0 = 0$*), ou* $P^2_{p(x)} = 3\mathbb{Z} + (3x)\mathbb{Z}[x] = 3\mathbb{Z} + P$ *(se* $w_0 \neq 0$*). Como* $P$ *é um ideal primo de* $R$ *e* $3\mathbb{Z} + P$ *também é primo de* $R$ *(pois* $3\mathbb{Z}$ *é um ideal primo de* $\mathbb{Z}$*), então vemos que todo ideal em* $\mathtt{Q}(P^2, P \setminus P^2)$ *é um ideal primo de* $R$*. Logo, pelo Teorema 3.3.3, concluímos que* $P^2$ *é um ideal* 2*-absorvente de* $R$*.*

**Teorema 3.4.3.** *([1, Teorema 3.7, p.426]). Sejam* $R$ *um anel comutativo, e* $P$ *um ideal próprio de* $R$ *tal que* $P \neq \mathtt{nil}(R)$*. Se* $\mathtt{nil}(R)$ *e* $P$ *são ideais primos divididos de* $R$*, então* $P^2$ *é um ideal* 2*-absorvente de* $R$*.*

**Demonstração.** Comecemos afirmando que $\mathtt{nil}(R) \subsetneq P^2$. De fato, como $\mathtt{nil}(R)$ é um ideal primo dividido de $R$, então $\mathtt{nil}(R)$ é comparável a todo ideal de $R$ (veja Observação 2.7.1). Em particular, $\mathtt{nil}(R)$ é comparável a $P^2$. Por hipótese $P \neq \mathtt{nil}(R)$. Assim, $\mathtt{nil}(R) \subsetneq P$, pois sabemos, pela Proposição 2.3.5, que $\mathtt{nil}(\mathrm{R})$ é a interseção de todos os ideais primos minimais sobre $\mathbf{0}$, ou seja, $\mathtt{nil}(R)$ é a interseção de todos os ideais primos de $R$. Pela última inclusão, vemos que existe $x \in P \setminus \mathtt{nil}(R)$. Se $P^2 \subseteq \mathtt{nil}(R)$, então

$x^2 \in \texttt{nil}(R)$. Como $\texttt{nil}(R)$ é um ideal primo, temos $x \in \texttt{nil}(R)$, uma contradição. Portanto, $\texttt{nil}(R) \subsetneq P^2$ como afirmamos. Pelo Teorema 3.4.2 é suficiente mostrarmos que $P^2$ é $P$-primário, isto é, $P^2$ é primário e $\sqrt{P^2} = P$. Agora, notemos que como $P$ é um ideal primo de $R$, temos $\sqrt{P^2} = \sqrt{P} = P$. Daí, só precisamos provar que $P^2$ é um ideal primário. Para tal fim, sejam $x, y \in R$ tais que $xy = p_1q_1 + \cdots + p_nq_n \in P^2$, onde os $p_i, q_i \in P$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Suponhamos que $y \notin P = \sqrt{P^2}$. Portanto, $P^2 \subseteq P \subsetneq \langle y \rangle$, onde a última inclusão é devida ao fato de $P$ ser um ideal primo divido de $R$. Assim, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $c_i \in R$ tal que $p_i = c_iy$. Como $p_i = c_iy \in P$, e $P$ é um ideal primo de $R$, vemos que $c_i \in P$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, pois $y \notin P$. Consequentemente,

$$xy = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i = y(\sum_{i=1}^{n} c_iq_i).$$

Equivalentemente,

$$y(x - \sum_{i=1}^{n} c_iq_i) = 0 \in \texttt{nil}(R).$$

Por outro lado, $y \notin \texttt{nil}(R)$, pois $y \notin P$, e $\texttt{nil}(R) \subsetneq P$. Dessa forma, como $\texttt{nil}(R)$ é um ideal primo de $R$, concluímos o seguinte:

$$(x - \sum_{i=1}^{n} c_iq_i) \in \texttt{nil}(R) \subsetneq P^2.$$

Logo, $x \in P^2$, uma vez que $\sum_{i=1}^{n} c_iq_i \in P^2$. Portanto, $P^2$ é um ideal $P$-primário. E isto conclui a demonstração. □

**Corolário 3.4.1.** *Sejam $R$ um domínio de integridade, e $P$ um ideal primo não nulo e dividido de $R$. Então, $P^2$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

**Demonstração.** Se $R$ é um domínio de integridade, então $\texttt{nil}(R) = \mathbf{0}$ é um ideal primo dividido de $R$. Logo, se $P$ é um ideal primo não nulo e dividido de $R$, segue, diretamente do Teorema 3.4.3, que $P^2$ é um ideal 2-absorvente de $R$, pois $P \neq \texttt{nil}(R) = \mathbf{0}$. □

## 3.5 Ideais 2-absorventes de domínios de valorização

A seguir, apresentamos uma caracterização dos ideais 2-absorventes e não nulos em domínios de valorização.

**Teorema 3.5.1.** *Sejam $R$ um domínio de valorização, e $I$ um ideal próprio e não nulo de $R$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$.*

*(ii) $I$ é um ideal $P$-primário de $R$ tal que $P^2 \subseteq I$.*

*(iii) $I = P$ ou $I = P^2$, onde $P = \sqrt{I}$ é um ideal primo de $R$.*

**Demonstração.** Verificaremos que a condição $(i)$ implica em $(ii)$. Suponhamos que $I$ é um ideal 2-absorvente de $R$. Pelo Teorema 3.2.3, ou $\texttt{Min}(I) = \{P\}$ e $\sqrt{I} = P$, ou $\texttt{Min}(I) = \{P_1, P_2\}$ e $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Se, $\sqrt{I} \neq P$, então teríamos $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$. Como $P_1 \neq P_2$, encontramos $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ e $x_2 \in P_2 \setminus P_1$. Daí, como $R$ é um domínio de valorização, teríamos $x_1 \in \langle x_2 \rangle \subseteq P_2$ ou $x_2 \in \langle x_1 \rangle \subseteq P_1$, contradizendo as escolhas de $x_1$ e $x_2$. Logo, $\sqrt{I} = P$, onde $P$ é um ideal primo de $R$ tal que $P^2 \subseteq I$ - outra aplicação do Teorema 3.2.3. Por último, sendo $R$ um domínio dividido, segue, pelo Teorema 3.4.2, que $I$ é um ideal $P$-primário tal que $P^2 \subseteq I$. E isto fornece $(ii)$.

Seja $I$ um ideal $P$-primário de $R$ tal que $P^2 \subseteq I$, isto é, $I$ é um ideal satisfazendo $(ii)$. Suponhamos que $I \subsetneq P = \sqrt{I}$. Então, existe $x \in P \setminus I$. Tomemos $y \in I \setminus \{0\}$. Como $R$ é um domínio de valorização, e $y \in I \subsetneq P$, temos $\langle y \rangle \subsetneq \langle x \rangle$. Daí, $y = xz$ para algum $z \in R \setminus \{0\}$. Utilizando o fato que $I$ é $P$-primário, e $x \notin I$, vemos que $z \in P = \sqrt{I}$. Consequentemente, $y = xz \in P^2$ para todo $y \in I$. Logo $I \subset P^2$. Por outro lado, lembre-se que $P^2 \subset I$ (por hipótese). Assim, $I = P^2$, e isto nos fornece $(iii)$.

Finalmente seja $I \neq \{0\}$ um ideal de $R$, onde $\sqrt{I} = P$ é um ideal primo de $R$. Se $I = P$, então $I$ é primo, e em particular, um ideal 2-absorvente. Agora suponhamos que $I = P^2$. Como $R$ é um domínio de valorização segue que $R$ é um domínio dividido (Observação 2.7.2). Portanto, $P$ é um ideal primo dividido. Uma aplicação do Corolário 3.4.1 nos diz que $I = P^2$ é um ideal 2-absorvente de $R$.

□

**Exemplo 3.5.1.** *(i) A localização $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, onde $p$ é um número primo, é um domínio de valorização discreto. De fato, $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ satisfaz a as condições da Definição 2.7.1, pois $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ é um anel local, cujo único ideal maximal é $\langle p \rangle \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ e, além disso, $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ é noetheriano e também um domínio de integridade, pois $\mathbb{Z}$ também é noetheriano (pois é um domínio principal) e um domínio de integridade (pois não admite divisores de* 0*). O Exemplo 2.3.1 e a Proposição 2.3.3 nos garantem que todo ideal primo de $\mathbb{Z}$ é da forma $\langle p \rangle$, onde $p$ é um número primo. Por conseguinte, o Teorema 3.5.1 nos garante que todo ideal* 2*-absorvente e não nulo de $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ é da forma $\langle p \rangle \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ou $\langle p^2 \rangle \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$.*

*(ii) O Anel de Séries de Potências Formais $F[[x]]$, onde $F$ é um corpo, é um domínio de valorização discreto, cujo único ideal maximal é $\langle x \rangle_{F[[x]]}$ (veja a seção 4.1 no Apêndice). Além disso, pela Observação 2.7.4 (item (iv)), $\langle x \rangle_{F[[x]]}$ é o único ideal primo e não nulo de $F[[x]]$ (a menos de elementos associados a $x$).*

*Assim, o Teorema 3.5.1 nos garante que os únicos ideais* 2*-absorventes e não nulo de $F[[x]]$ são $\langle x \rangle_{F[[x]]}$ e $\langle x^2 \rangle_{F[[x]]}$.*

# REFERÊNCIAS


[1] Ayman Badawi. "On 2-absorbing ideals of commutative rings". Em: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 75.3 (2007), pp. 417–429. DOI: 10.1017/S0004972700039344. URL: https://www.cambridge.org/core/journals/bulletin-of-the-australian-mathematical-society/article/on-2absorbing-ideals-of-commutative-rings/CB302F38931ECC0F26C66D0103965B90.

[2] David Steven Dummit e Richard M Foote. *Abstract algebra*. Vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.

[3] Thomas W Hungerford. *Algebra*. Vol. 73. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Irving Kaplansky. "Commutative rings". Em: *Conference on Commutative Algebra: Lawrence, Kansas 1972*. Springer. 2006, pp. 153–166.

[5] Ernst Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 1985.

[6] TY Lam. "A first course in noncommutative rings". Em: *Graduate Texts in Mathematics/Springer Verlag* 131 (1991).

[7] Ernst August Behrens e Clive Reis. *Multiplicative theory of ideals*. Academic press, 1971.

[8] Nicolas Bourbaki. *Algebra I: Chapters 1-3*. Springer-Verlag, 1989.

[9] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.

[10] Michael Atiyah. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.

[11] Trygve Nagell. *Introduction to number theory*. Vol. 163. American Mathematical Soc., 2021.

[12] Gabriel Picavet. "Ideals and overrings of divided domains". Em: *International Electronic Journal of Algebra* 8.8 (2009), pp. 80–113. URL: https://dergipark.org.tr/en/pub/ieja/issue/25212/266431.

[13] JA Huckaba. "Commutative rings with zero divisors". Em: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics/Marcel Dekker, Inc* 117 (1988).

# 4 Apêndice

## 4.1 Anel de Séries de Potências Formais $F[[x]]$

Seja $F$ um corpo. O **Anel de Séries de Potências Formais**[1] sobre $F$ é o conjunto:

$$F[[x]] = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \,:\, a_i \neq 0_F, \text{ para no máximo um número finito de índices } i\}$$

munido com as seguintes operações de soma e multiplicação:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \text{ e } (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} := (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, \text{ onde } c_i := \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j},$$

$0_{F[[x]]} = (0_F, 0_F, 0_F, \ldots)$ e $1_{F[[x]]} = (1_F, 0_F, 0_F, \ldots)$.

Definamos:

- $x^0 := (1_F, 0_F, 0_F, \ldots) = 1_{F[[x]]}$,
- $x = x^1 := (0_F, 1_F, 0_F, \ldots)$.
- Mais geralmente, para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$x^n := (0_F, \ldots, 0_F, \underset{coordenada\,(n+1)}{1_F}, 0_F, \ldots).$$

- $ax^n := (0_F, \ldots, 0_F, \underset{coordenada\,(n+1)}{a}, 0_F, \ldots)$, para todo $a \in F$.
- $x^n x^m = x^{m+n}$.

Com isto, todo elemento $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in F[[x]]$ pode ser expresso como uma soma formal do tipo

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_i \in F$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Assim, passamos a chamar os elementos de $F[[x]]$ de “polinômios”.

O resultado [3, Teorema 5.2, item (iii), p.149] nos garante que todo polinômio não nulo $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F[[x]]$ é unicamente determinado pelos seus coeficientes no seguinte sentido: se $f = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, então $m \geq n$, com $b_i = a_i$, para todo

[1] Veja a definição em [3, Proposição 5.8, p.154]. Tal construção pode ser feita sobre qualquer anel comutativo e unitário $R$.

$i = 0, \ldots, n$ e $b_i = 0_F$ para todo $n < i \leq m$. Também podem ser expressos como uma série de potências formais em $x$. Com isto:

$$F[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ : \ a_i \in F, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

O resultado [3, Proposição 5.8, item (iii), p.154] nos garante que $F[[x]]$ é um domínio de integridade[2]. Já o resultado [3, Corolário 5.10, p.155] nos garante que $\langle x \rangle_{F[[x]]}$ é o único ideal maximal de $F[[X]]$, isto é, $F[[x]] = (F[[x]], \langle x \rangle_{F[[x]]})$ é um domínio de integridade local. Além disso, [3, Corolário 5.10, p.155] nos garante que $\langle x \rangle_{F[[x]]} = F[[x]] \setminus \mathcal{U}(F[[x]])$[3]. Neste ponto, vale destacar que o polinômio $f = x$ é irredutível em $F[[x]]$. De fato, notemos que como $\mathbf{0}_{F[[x]]} \neq \langle x \rangle_{F[[x]]}$ é um ideal primo (pois é maximal), então $x$ é um elemento primo de $F[[x]]$. Como $F[[x]]$ é um domínio de integridade, então pela Proposição 2.3.4, segue que $f = x$ é irredutível em $F[[x]]$.

Agora, seja $\mathbf{0}_{F[[x]]} \neq I \subsetneq R$. Como $\langle x \rangle_{F[[x]]}$ é o único ideal maximal de $F[[x]]$, então temos $I \subseteq \langle x \rangle_{F[[x]]}$ (veja a Observação 2.3.2). Seja $n$ o menor inteiro positivo para o qual $I$ possui um polinômio $p$ da seguinte forma

$$p = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots, \text{ onde } a_n \neq 0_F.$$

Podemos fatorar $p$ como:

$$p = x^n (a_n + a_{n+1} x + \cdots).$$

Seja $f := a_n + a_{n+1} x + \cdots$. Como $a_n \neq 0_F$ é uma unidade de $F$ (já que $F$ é um corpo), então o resultado [3, Proposição 5.9, item(i), p. 155] nos garante que $f$ é uma unidade de $F[[x]]$, isto é, $f \in \mathcal{U}(F[[x]])$[4]. Daí, podemos escrever $p = x^n f$, com $f \in \mathcal{U}(F[[x]])$. Mas, como $x^n = pf^{-1} \in I$, pois $p \in I$, $f^{-1} \in F[[x]]$ e $I \subsetneq F[[x]]$, então $\langle x^n \rangle_{F[[x]]} \subseteq I$. Por outro lado, seja $q = b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \cdots$ um elemento qualquer de $I$, com $b_k \neq 0$. Pela minimalidade de $n$, devemos ter $k \geq n$. Por um argumento análogo ao que fizemos para o polinômio $p$, podemos fatorar $q$ como $q = x^k g$, onde $g \in \mathcal{U}(F[[x]])$. Alternativamente, podemos fatorar $q$ como $q = x^n (x^{k-n} g)$, já que $k \geq n$. Como $x^{k-n} g \in F[[x]]$, isto nos mostra que $q \in \langle x^n \rangle_{F[[x]]}$. Como $q$ foi tomado arbitrariamente, então mostramos que $I \subseteq \langle x^n \rangle_{F[[x]]}$. Como já havíamos mostrado que $\langle x^n \rangle_{F[[x]]} \subseteq I$, então segue que $I = \langle x^n \rangle_{F[[x]]}$. Isto mostra que todo ideal próprio de $F[[x]]$ é finitamente gerado.

2 Mais geralmente, [3, Proposição 5.8, item (iii), p.154] nos garante que se $R$ é um domínio de integridade, então $R[[x]]$ também o é.

3 O resultado [3, Corolário 5.10, p.155] afirma, de forma mais geral, que se $R$ é um anel de divisão, então as unidades de $R[[x]]$ são precisamente os polinômios com termo constante não nulo. Além disso, o ideal $\langle x \rangle_{R[[x]]}$ é exatamente o conjunto das não unidades de $R$ e, simultaneamente, o único ideal maximal de $R[[x]]$.

4 O resultado [3, Proposição 5.9, item(i), p. 155] afirma, de forma mais geral, que se $R$ é um anel comutativo unitário, então $f \in R[[x]]$ é uma unidade de $R[[x]]$ se, e somente se, o termo constante de $f$ é uma unidade de $R$.

Finalmente, agora que sabemos que todo ideal próprio de $F[[x]]$ é finitamente gerado, então pelo Lema 2.4.1 (item (i)), segue que $F[[x]]$ é noetheriano. Portanto, sabendo que $F[[x]] = (F[[x]], \langle x \rangle_{F[[x]]})$ é um domínio de integridade local noetheriano, segue da Definição 2.7.3 que $F[[x]]$ é um domínio de valorização discreto.