

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)  
Instituto de Ciências Exatas (ICE)  
Pós-Graduação em Educação Matemática.  
Mestrado em Educação Matemática

Guilherme Luiz de Toledo Calderano

**A Geometria Projetiva como proposta de intervenção:  
um olhar a partir dos Teoremas de Menelau e Ceva**

Orientador:  
Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora, Dezembro de 2012.

**Guilherme Luiz de Toledo Calderano**

**A Geometria Projetiva como proposta de intervenção:  
um olhar a partir dos Teoremas de Menelau e Ceva**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**Comissão Examinadora**

---

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni (UFJF) – Orientador:

---

Prof. Dr. Heitor Antônio Gonçalves (UFSJ)

---

Profa. Dra Regina Coeli Moraes Kopke (UFJF)

Juiz de Fora, 17 de Dezembro de 2012

Calderano, Guilherme Luiz de Toledo.

A geometria projetiva como proposta de intervenção: um olhar a partir dos Teoremas de Menelau e Ceva / Guilherme Luiz de Toledo Calderano. – 2012.

100 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)–  
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria projetiva. I. Título.

CDU 51:37.02

**Dedicatória:**

A todos aqueles que me ensinaram e ensinam Geometria.

Aos meus pais e irmãos.

Aos meus alunos de ontem, hoje e amanhã.

À Camila Fonseca de Oliveira.

**AGRADECIMENTOS:**

A Deus, promotor da vida, do espaço e do tempo.

Às pessoas, agentes do espaço e administradores do tempo.

**Em especial:**

Ao professor Adlai Detoni, recém amigo e também amante da Geometria. Com ele, aprendi a filosofar a Geometria e ir além. Agradeço pelas inúmeras conversas e ponderações durante todo este tempo de pesquisa.

À professora e coordenadora Maria Cristina, que, com maestria, soube inspirar-me nos momentos de cansaço desta jornada.

Aos professores Heitor Antônio Golçalves, Regina Kopke e Rosa Monteiro, que, com dedicação, puderam sugerir e ponderar, de modo a fazer com que o meu trabalho ficasse cada vez melhor.

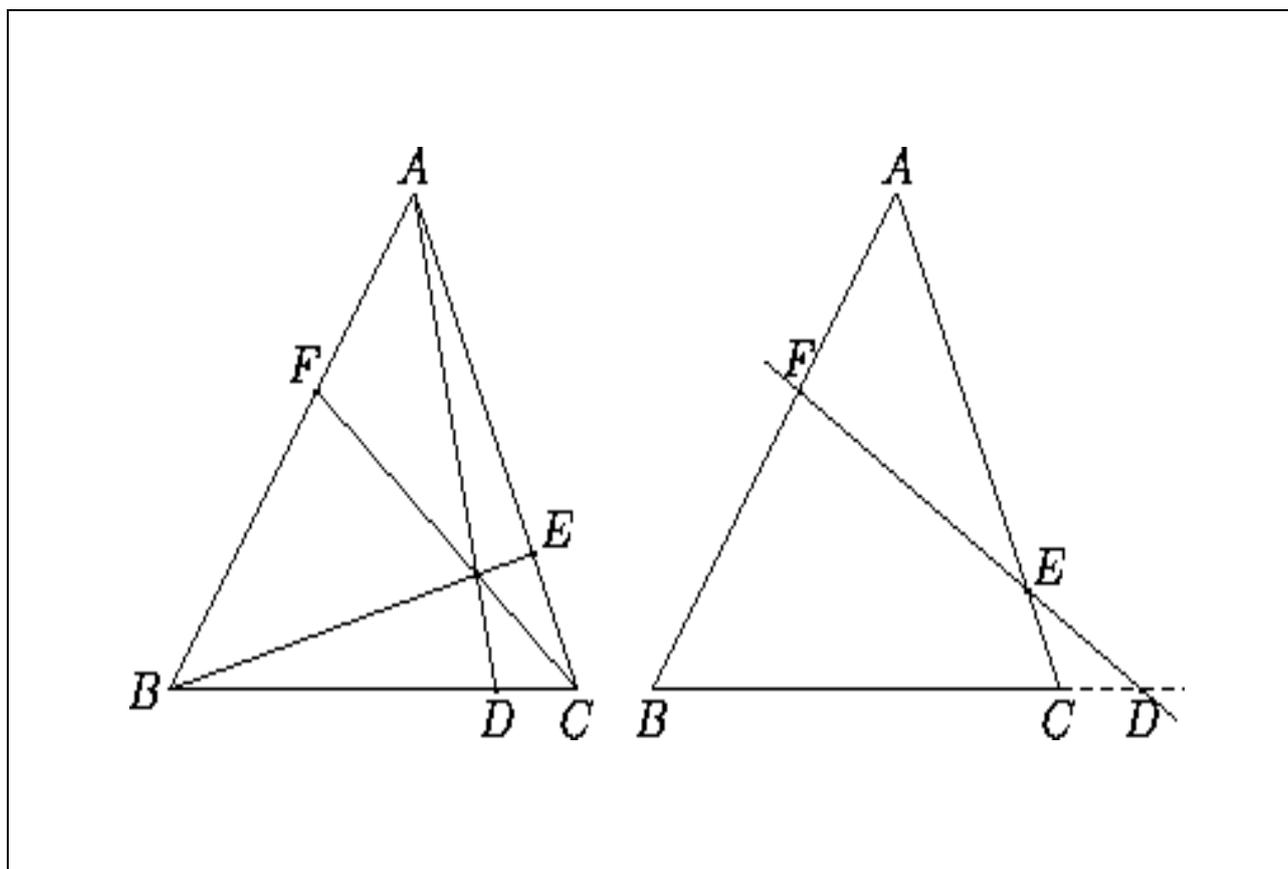
À minha amada e sagrada família, Luiz, Enilda, Bernardo, Tiago e Maria Angélica. Berço do amor, acolhida e unidade.

Aos meus tantos amigos verdadeiros, de longa ou breve data, que me deram força e incentivo para completar esse trabalho.

Ao Colégio Apogeu de Juiz de Fora. Meus colegas de trabalho, diretores, coordenadores e professores, que também incentivaram e propiciaram a completude desta dissertação.

Aos meus alunos, em especial aos membros do NAM e da turma 1º E, que, com solicitude, puderam contribuir e engrandecer a minha pesquisa.

À minha Camila Fonseca de Oliveira, dona de todos os sorrisos que se transformaram em combustível para essa longa jornada de trabalho.



Ceva e Menelau

## RESUMO

Este texto é parte de uma pesquisa acerca da Geometria Projetiva como instrumento de intervenção pedagógica no Ensino Médio. Ela se remete a estudos dentro do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Damos tratamento teórico e operacional aos temas mais básicos da Geometria Projetiva a partir dos teoremas de Menelau e Ceva, cujos pressupostos estão enraizados nos conceitos de *colinearidade* e *concorrência*. Sugere-se uma reflexão a partir do que se percebe no ensino de Geometria no Brasil, principalmente em torno do estudo de triângulos e do que a eles se agregam. Faz-se um resgate histórico dos teoremas mencionados e propõem-se algumas atividades norteadoras, de modo a levar o aluno (sujeito) a se defrontar com novas possibilidades de resolução de problemas. Apresenta-se um início de proposta de tratamento metodológico sobre dados de pesquisa de campo projetada.

**PALAVRAS-CHAVE:** Investigação, Geometria Projetiva, Menelau e Ceva, Currículo.

## ABSTRACT

This work is part of a research about Projective Geometry as pedagogic tool in High School. The research itself is part of studies developed during the Professional Master Degree in Mathematics and Education at Federal University of Juiz de Fora. We try to give a theoretical and operational approach to basic themes of Projective Geometry from the theorems of Menelau and Ceva, which assumptions are rooted in the concepts of *collinearity* and *concurrency*. It is suggested, then, a mature reflection of what we perceive in the teaching of Geometry in Brazil, mainly about the study of triangles and its relations. A historical survey of the theorems mentioned above is made and we propose some activities to take the student (subject) to face new possibilities to solve problems. It is presented the start of a proposal of methodological approach to data of a projective field research.

**KEY WORDS:** Investigation, Projective Geometry, Menelau and Ceva, Curriculum.

## Sumário

Introdução .....	10
1) Uma revisão do estudo de triângulos: Como o Euclidianismo é estruturado. .....	13
2) A Revisão da Literatura: o trabalhar do ensino da Geometria.....	17
3) Indo além de Euclides .....	24
3.1) A projetividade como pressuposto de intervenção .....	24
3.2) Investigando Menelau e Ceva .....	26
3.3) Uma proposta de intervenção curricular e pedagógica.....	29
4) Metodologia de Pesquisa, produção de dados e interpretações .....	34
4.1) Concepções que se tornam modos e procedimentos.....	34
4.2) Pesquisa de campo I .....	37
4.2.1) As atividades da Pesquisa I .....	39
4.2.2) Expectativas.....	43
4.2.3) O ambiente da Pesquisa I .....	47
4.2.4) Quadros ideográficos da Pesquisa I .....	48
4.3) Pesquisa de Campo II .....	68
4.3.1) As atividades da Pesquisa II .....	68
4.3.2) O ambiente da Pesquisa II.....	73
4.3.3) Quadros ideográficos da Pesquisa II .....	74
5) Análise Nomotética .....	81
5.1) Sobre o Ensino de Geometria .....	81
5.2) Sobre a Geometria como Ciência.....	82
5.3) Os Teoremas de Menelau e Ceva como ferramentas, como redimensões curriculares e metodológicas. ....	83
5.4) Concorrências curriculares .....	84
5.5) Régua e compasso.....	85
5.6) Sobre o infinito.....	85
6) Considerações Finais.....	87
Referências Bibliográficas .....	90
Anexos .....	92

## Introdução

*“Um dos meus anseios de chegar ao infinito  
é a esperança de que, ao menos lá, as  
paralelas se encontrem!”  
(Dom Hélder Câmara)*

Este trabalho é parte de uma pesquisa maior acerca da Geometria Projetiva enquanto instrumento de intervenção pedagógica no Ensino Médio. O tema que aqui proponho é o que vislumbro desde meu ingresso no programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Senti-me motivado a pesquisar e adentrar no universo da Geometria escolar pelo fato de estar inserido como professor da educação básica, lecionando Geometria, e com as angústias naturais de um professor que está buscando compreender os processos de aprendizagem dos seus alunos.

Tenho me questionado, ao longo desses anos, enquanto professor de Matemática em escolas públicas e particulares, sobre a questão da abordagem e aplicação da Geometria convencional curricular em sala de aula como pressuposto da percepção do espaço, tal como a *arte* de medir, como propõem os PCNs quando se trata de Medidas e Formas. Assim, medir o tamanho de um segmento, medir o perímetro de certo polígono, áreas ou volumes de sólidos geométricos, são, dentre outras práticas, vistas e entendidas como prioridades de abordagens no estudo da Geometria – principalmente no Ensino Médio.

A partir de 2005, tive a oportunidade de trabalhar com grupos específicos de alunos cujo propósito era investir em carreiras militares em universidades de excelência. Ali, encontrei outra Geometria; mais aberta e ampla que a dos moldes euclidianos. Tive de estudar outros tantos teoremas<sup>1</sup>, que nunca tinham sido apresentados a mim, como graduando ou já professor. Neste momento, cheguei a perceber o possível panorama que envolve o

---

<sup>1</sup> Hiparco; Ptolomeu; Pappus; Euler; Menelau; Ceva

estudo da Geometria no Brasil a partir de duas compreensões: a Geometria teoricamente estabelecida em conceitos, abordagens e resultados (axiomas e teoremas) é muito maior do que eu pensava que era; e, o que eu sabia (conhecimento acumulado na graduação e especialização) acerca da Geometria era ínfimo perto dessa nova realidade.

O que traduzo aqui é o então dilema da não apresentação de alguns resultados – que, logo intuí, poderiam ser vistos como corriqueiros – na sala de aula.

Dentre os “novos” teoremas aprendidos por mim, o de Menelau e o de Ceva foram esclarecedores e norteadores para uma nova abertura no estudo da Geometria, principalmente quando se fala dos triângulos, sobre o que se dará ênfase no capítulo 1 desse trabalho.

Quando ingressei no programa de mestrado em Educação Matemática, percebemos, eu e meu orientador, que a Geometria Projetiva – vista como além da Euclidiana – pode ser compreendida como tendo suas bases articuladas com o que propõe Menelau e posteriormente Ceva. Começamos, portanto, a vislumbrar a *genética* da projetividade e suas nuances à luz da Educação Matemática, com o foco na intervenção curricular, uma vez acordado que a inserção dos teoremas mencionados poderia levar o estudo da Geometria convencional a uma interpretação mais abrangente. Hans Freudenthal, em sua didática fenomenológica, mesmo não sendo a sua intenção direta, mostra-nos como os limites entre geometrias podem ser tênues ou transigentes; Felix Klein, em seu “Programa de Erlanger”, indica fortes possibilidades de um Ensino de Geometria bem distinto do que temos, usualmente, no Brasil.

A proposta desta dissertação é, em suma, dar tratamento teórico e operacional ao tema da Geometria Projetiva a partir dos teoremas de Menelau e Ceva, cujos pressupostos estão enraizados nos conceitos de colinearidade e concorrência. Para isto, percebe-se a necessidade de uma revisão do que é considerado pertinente ao aluno do Ensino Médio atual à luz da Geometria Euclidiana convencional.

No entanto, não sugerimos nenhuma adequação radical da Geometria a partir de Menelau em detrimento à de Euclides, com os seus Axiomas e Teoremas. E nem seria possível, visto que já é consolidado um tratado de

organização dos conceitos geométricos clássicos (independentes da axiomatização). Sugerimos, porém, com esse trabalho, uma reflexão madura a partir do que se percebe no ensino de Geometria no Brasil, principalmente em torno do estudo de triângulos e do que a eles se agregam.

Além da proposta alternativa de intervenção, é interessante que se faça um resgate histórico dos teoremas mencionados, tal como suas aplicações e confluências na Geometria de Euclides, de modo a se estruturar uma proposta de intervenção que vise a levar o estudante de Geometria a se defrontar com novas possibilidades de resolução de problemas, mesmo as realizadas por métodos puramente tradicionais.

Devemos pensar que a resposta dos alunos, tornados sujeitos numa necessária pesquisa de campo, organizadas em categorias, serão tomadas em seguida para aperfeiçoamento do material que se constituir inicialmente para intervenção. Todo esse movimento de reconfiguração será tematizado e relatado na dissertação, mostrando como os pesquisadores construíram uma proposta final.

Nós, pesquisadores, carregamos nossas inquietações e temos nossas convicções. Porém, essa dissertação deverá relatar um movimento nosso de suspender, até onde possamos, alguns prejulgamentos, para que, verdadeiramente, nossos sujeitos sejam ouvidos, no modo com o qual eles experienciam e nos mostrem como estruturam uma reglobalização de seu conhecimento geométrico após a vivência de novos saberes.

Por fim, os teoremas de Menelau e Ceva, que mencionaremos em todo o trabalho de pesquisa, serão vistos e citados como *novos*, não pela sua recente história ou aceitação frente à comunidade científica, mas visando a implementação metodológica frente á uma possível intervenção e complementação curricular.

## **1) Uma revisão do estudo de triângulos: Como o Euclidianismo é estruturado.**

Este primeiro capítulo está reservado em nosso trabalho para objetivar o processo de apresentação de uma nova Geometria. Uma Geometria que também pode ser vista estruturada a partir de Tales de Mileto, mas que vai além dos pressupostos balizados por Euclides e além da tradição euclidiana, quase ritual em nossas salas de aula. Para isso, o solo duma proposta precisa está bem organizado e sedimentado curricularmente. Nossa proposta é confrontar historicamente e curricularmente a abordagem dos triângulos na Geometria a qual vamos chamar aqui de convencional.

Dentre os assuntos na abordagem da Geometria Plana nas escolas de educação básica, destacamos o Triângulo e suas propriedades como elemento primordial para o entendimento e aplicação da Geometria em outras bases de conhecimento. Se acompanharmos como a Geometria escolar, especialmente seus livros didáticos, se desenvolve, vemos que o triângulo, mais do que ele em si, é ponto culminante de um pensamento geométrico que visa uma estrutura que premia as relações de invariância euclidiana, ou seja, as baseadas na congruência. Mesmo quando essa Geometria trata do paralelismo, não é para explorar a sua potencialidade matemática e tampouco, filosófica. Se trouxermos Freudenthal e Klein, podemos, com eles, dizer que a geometria convencional não se condiciona a um estilo e um fazer afim, da Geometria Afim. O *paralelismo* aparece quando ele ratifica e esparge as invariâncias euclidianas. Uma passagem além das congruências, quando se trata de Tales e semelhanças, é logo abreviada, quando esse tratamento é carregado para gerar relações métricas.

É sabido que a geometria triangular, com bases em Euclides, se mantém nos currículos criando a necessidade da interpretação e visualização da forma triangular. O aluno se defronta com o triângulo como a figura plana poligonal de três lados, três vértices, ângulos internos e externos, além de condições de existência e métricas, suas propriedades intrínsecas. Ou seja, depois de certo tempo, o aluno passa a caracterizar e diferenciar os triângulos das demais

figuras geométricas planas e, infelizmente, pouco se credita aos conceitos das invariâncias do movimento. Os atributos de Tales nos permitiria ir bem mais além do simples fato de medir. Tales nos premia com a realidade das variações, com as não-congruências. A semelhança de triângulos, geralmente apresentada nas séries finais do Ensino Fundamental, e posteriormente ao longo do Ensino Médio – aqui vista como ferramenta de trabalho – se perde nos conceitos métricos.

Entendemos, porém, que medir lados e ângulos de um triângulo, aos poucos, se torna uma prática decisiva para a interpretação dos outros polígonos, gerando amarrações conceituais. Concordamos que a genética da geometria poligonal se baseia nos moldes triangulares, mas acreditamos que sobre o triângulo, existem relações bem mais abrangentes a serem descobertos e vislumbrados pelos alunos.

O que responder aos alunos quando estes questionam sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo? Certa vez, um grupo de alunos fez essa consideração numa sala de 9º ano. Eles perguntaram se sempre e para qualquer triângulo esse resultado era verdadeiro. Independente da escolha do professor em seguir uma direção de resposta, neste caso de comentar ou não sobre a as geometrias não-euclidianas, é notório a inquietação dos alunos sobre as possibilidades de variações dos conceitos. As amarrações conceituais e demonstrativas da geometria convencional travam uma Geometria além de Euclides. Sabemos que a demonstração da Lei angular de Tales pode ser feita usando o tratado das paralelas, visto que os ângulos DAB e ABC são iguais, assim como EAC e ACB. (ver figura).

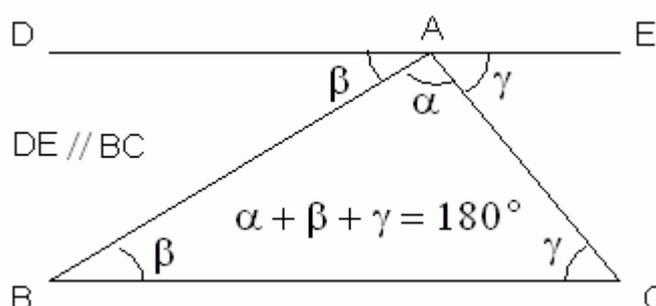


Figura 01: Lei angular de Tales

Com isso, temos de entender que  $180^\circ$  é resultado legítimo para a soma dos ângulos internos de um triângulo construído em uma superfície absolutamente plana, em que as retas DE e BC, possam ser entendidas como paralelas, verdadeiramente. É interessante notar que o postulado das paralelas de Euclides, especialmente a ruptura dele, fez com que outros olhares pudessem ser direcionados para a geometria triangular.

É fato conhecido que a crítica ao absolutismo do seguir, pensar e fazer euclidianos passa pela quebra do quinto postulado de Euclides, e que muito se construiu a partir daí, principalmente no que diz respeito às variações da superfície plana para as superfícies *esféricas* e *hiperbólicas*. (Ver figura a seguir)<sup>2</sup>. Esse modo de encaminhar essa crítica já aparece com certa frequência em nossas escolas.

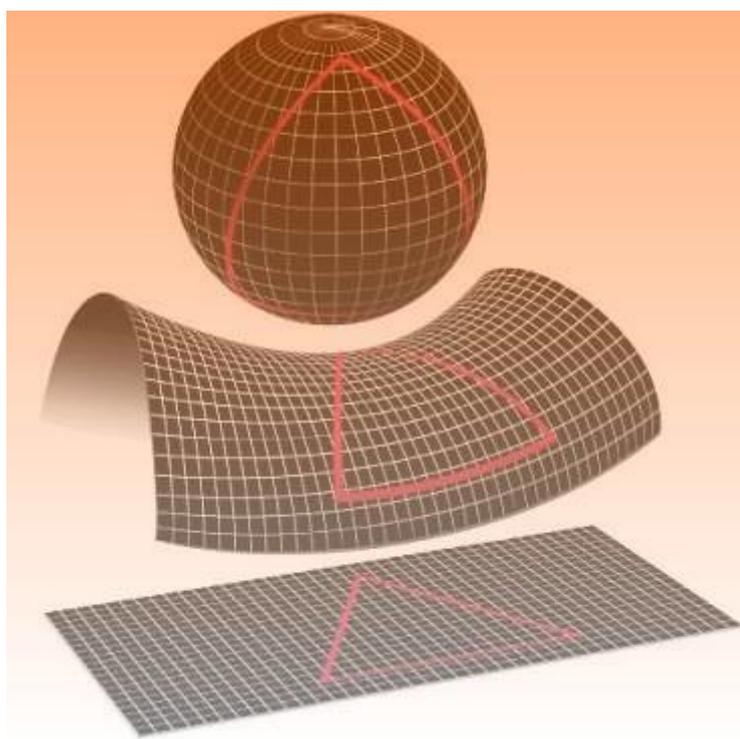


Figura 02: Superfícies esféricas e hiperbólicas.

Mas, pouco se nota o vislumbre de a tradição escolar euclidiana ser questionada por outros caminhos. A *projetividade*, vista como alicerce de uma possível interpretação geométrica, sugerida nessa dissertação, articula novos

---

<sup>2</sup> Reirado em: <http://www.portalescolar.net/2011/03/googol-googolplex-grau-geometria-nao.html>

conceitos, que vão além do estático, e sugere diferentes caminhos críticos. Seccionar um triângulo por uma reta (paralela ou não a um de seus lados), pode gerar discussões relevantes acerca das novas possibilidades de construções e suas investigações.

A descrição do atual panorama curricular da geometria triangular convencional não é o nosso propósito nesse capítulo nem na dissertação. Sabemos que uma análise crítica do currículo levaria muito mais tempo e, mesmo assim, poderíamos chegar em posições conflitantes e partidárias. A possibilidade de inserção de novos conceitos, proposta nesse trabalho, vai ao encontro de uma leitura mais completa da Geometria, enquanto estudo do espaço e o que nele se sustenta.

## 2) A Revisão da Literatura: o trabalhar do ensino da Geometria

Pesquisar sobre as tendências e metodologias do *ensino* e da *aprendizagem* em Matemática no nosso país tem sido uma tarefa importante e, pensamos, se põe para todo educador matemático. Pesquisas podem enveredar por vários caminhos, tais como o da Investigação, da Resolução de Problemas, da Modelagem, entre outros, sempre tendo como norte a aprendizagem e a facilitação desta. A Geometria é um dos principais focos fomentadores das discussões diversas entre os professores de Matemática na escola básica.

A principal discussão, na maioria das vezes, gira em torno do *que se deve ensinar* em Geometria, visto a ampla rede de possibilidades de trabalho nesta área, conforme se lê do documento do International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) de 1993. Concordamos que a maioria dos professores tem, com prontidão, uma (ou a) resposta para tal pergunta, em geral coadunando com o que o livro texto adotado propõe. Nesta dissertação pretendemos confrontar e estimular a revisão de algumas concepções. Outra preocupação é *para quem se deve ensinar e como ensinar*. A geometria escolar, vista como objeto profissional de professores de Ensino Fundamental e Médio, sugere outra e necessária discussão: onde se quer chegar com aquilo que é ensinado? Que rumo devemos (professores e alunos) tomar?

Acreditamos, porém, que as últimas perguntas, mesmo para os professores mais experientes, se mostram cada vez mais complicadas de serem respondidas; talvez pelo fato de haver a preocupação constante e árida de se ensinar apenas aquilo que é passível de aplicação ou contextualização, dentro do usualmente aceito como devido. Mas, se o mundo em que vivemos está em plena mudança – trato aqui também de instituição de valores, costumes e ideologias – o contexto também tenderá a mudanças correlatas, ou não. O que é passível de aplicação hoje talvez não o foi há 30 anos e, provavelmente, não será daqui a outros 30. Assim, nunca teríamos uma sistematização adequada para se ensinar tendo em vista o contexto.

Há, por exemplo, uma discussão se o que ensinar em Geometria deve atender apenas a contextos reais. Tem-se, também, criticado muito, nas pesquisas em Educação Matemática, se realmente a Matemática da escola tem ligação direta com o que um estudante vive na rua. Tomo como exemplo o notável Teorema de Pitágoras, geralmente apresentado no Ensino Fundamental.

O fato do Teorema de Pitágoras ser apresentado já nas etapas iniciais da escola convencional e, por conseguinte, conduzido pelo Ensino Médio e Superior como ferramenta de trabalho para demais atribuições em Geometria, é porque ele é carregado de propriedades conceituais ou porque existem diversas formas de tê-lo como aplicação? Qualquer que seja a resposta, a escola acolhe o Teorema de Pitágoras e, naturalmente, vocaciona uma série de situações em que ele é requerido. É um simples fato de ensinar Pitágoras porque quase tudo ao nosso redor (principalmente arquitetonicamente) tem ângulos de  $90^\circ$ . Usa-se, em situações escolares, Pitágoras para calcular alturas de prédios, larguras de rios com margens paralelas, no auxílio da construção do telhado colonial de uma casa, etc.

Enfim, desenvolvem-se curricularmente os objetos, segundo escolhas. O próprio Teorema de Pitágoras poderia ser visto como equivalência de áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo em questão, o que é deixado em segundo plano. E se a ortogonalidade das retas e planos fosse apenas um caso específico e meramente posicional, teórico? E se nenhuma casa do mundo tivesse suas paredes no prumo ou no esquadro? Qual seria a validade do Teorema de Pitágoras como pressuposto de aplicação e de contextualização? O que se faria se o ângulo reto entrasse em desuso?

Coeso com a nossa investida crítica, a partir de uma intervenção em prol de mudanças de paradigmas – presos nas ideias simples do contexto pronto e justificado –, nos diz Fiorentini (1995, p.29):

O processo de construção de um ideário pedagógico, tanto individual como coletivo, é sempre dinâmico e dialético. De fato, se estamos permanentemente refletindo sobre nossa prática pedagógica, se discutimos com nossos pares, se pesquisamos e buscamos continuamente novas fontes teóricas e novas alternativas de ação em

sala de aula (...) então, é de se esperar que nosso ideário também esteja em permanente mutação (FIORENTINI, 1995, p.29).

Ensinar Matemática apenas pelo vislumbre de um contexto pode não ser o que se espera acerca do construto conceitual desta ou daquela frente, aqui vista como parte da matemática, curricularmente estabelecida. Assim, continua Fiorentini (1995):

Embora, nesse processo de mutação, algumas concepções/crenças permaneçam inalteradas, no geral, o ideário pedagógico de uma pessoa ou grupo é sempre efêmero, pois representa apenas ideias que foram dominantes num determinado momento histórico. Se isso for verdadeiro, então nenhum quadro classificatório, por melhor que seja, dará conta da multiplicidade de pensamentos e ideias presentes na práxis do ensino da Matemática (FIORENTINI, 1995, p.30).

Do que podemos nos nutrir em relação à contribuição de Fiorentini é que também a Geometria Escolar, ou principalmente a, vem se esvaindo dessa *mutação* necessária do pensar e construir Geometria.

Embora não seja um fim, com a nossa posição acerca da contextualização da Geometria, esta ainda vista com o cenário tradicional-euclidiano, é de se esperar em nossa pesquisa uma investida na apresentação dos Teoremas de Menelau e Ceva como alternativas de encaminhamento curricular, sem, necessariamente, fazê-lo em nome de um *contextualizar*, mas de um *investigar* e de um novo *enxergar*. Aliado com esse nosso pensamento, Meira (1993) *apud* Fiorentini (1995) questiona essa forma de encaminhamento frequentemente dado à prática pedagógica:

(...) com a crença generalizada sobre o esvaziamento de significado no ensino tradicional de matemática, é tentador atribuir uma riqueza de significados à experiência matemática do “dia-a-dia” fora da escola que existe dentro dela. Como consequência, esses educadores matemáticos correm o risco de realizar intervenções instrucionais no sentido de “importar” ou transferir atividades tipicamente extra-escolares para a escola. O “mundo real” e o “dia a dia” tornam-se, assim, fetiches da atividade de sala de aula, reorganizados na forma de tarefas onde espera-se que o aluno possa construir significados

congruentes àqueles supostamente presentes na “mesma” atividade realizada fora da escola (MEIRA, 1993, p.27)

Ao se embrenhar no campo de pesquisa sobre o ensino de Geometria no Brasil, depara-se com um cenário comum apontado por vários estudiosos, que vem a ser o conjunto problemático de aspectos que envolvem o desprezo por esse ensino, pois ainda vige a prática de se deixar a Geometria para o fim do ano letivo; o círculo vicioso da formação do professor, que não teve oportunidade de estudar e se formar bem em Geometria; a falta de compreensão do que ensinar e do como ensinar. visto que o papel e a densidade de se demonstrar, como exemplo, é sempre uma dúvida presente; entre outros aspectos.

Vários estudiosos apontam o momento de implantação da Matemática Moderna no Brasil do século passado – na verdade, a incompreensão de como fazê-la e do que ela representaria – como marco maior da problemática. Até mesmo pessoas de outras áreas, que não da Educação Matemática, publicam contribuições, como Geraldo Ávila (2010, p. 3-8), o qual, apesar do olhar para a Matemática Pura, defende que a intuição e a investigação de métodos geométricos alternativos e criativos devem conviver com práticas curriculares, notadamente convencionais.

Miguel, Miorim e Fiorentini (1992) já argumentavam a necessidade de se indagar, repensando o papel da Geometria no currículo escolar, especialmente sugerindo que pesquisas se envolvam nessa direção, a fim de possibilitar discussões para contribuir como novas propostas didáticas e pedagógicas. Desde lá percebemos, numa pesquisa bibliográfica, que a literatura acerca disso não tem trazido, frontalmente, sugestões tão contundentes, quando se observa o retorno de pesquisas ao grande mundo da nossa escola básica. Os maiores resultados ou são postados ainda na constatação crítica do estado em que se encontra o ensino de Geometria, ou são contribuições desviadas do foco principal, como as ligadas à Informática na Educação Matemática ou à Etnomatemática, como exemplos.

Em suma, queremos argumentar aqui, justificando uma possível importância para a área da Educação Matemática, que alternativas como a que pretendemos pesquisar, são demandas reais e sugeridas nessa comunidade

científica. Insinuamos que os objetos geométricos concernentes às ideias pertinentes aos teoremas de Menelau e de Ceva, especialmente os que dizem respeito a invariantes projetivos ligados à concorrência e à colinearidade, podem e devem fazer parte do conhecimento geométrico de nossos alunos. No entanto, somos cientes de que uma pesquisa não pode resultar em uma proposta tão diferenciada que não seja compatível com o estado atual da prática curricular na qual nos inserimos, o que nos põem em um desafio maior, o de pesquisar o novo, em compatibilidade com o que já se tem.

A escolha que se faz, e que, na prática profissional no Brasil, torna-se socializada a partir da adesão ao que propõem os livros-textos das principais editoras, revela uma *grife* historicamente constituída. A pesquisa que propomos já procura sua perspectiva fora desse movimento. Queremos questionar se outras possibilidades – de objetos, de tratamento – não poderiam, e até deveriam, ser trazidos para o trabalho em sala de aula.

O aparecimento de possíveis novos teoremas e suas deduções, poderia ainda causar certo desconforto acerca do então “para quê” estudar essas novidades, visto que os paradigmas impostos por muitos sistemas ainda sucedem da necessidade do contexto e da “utilidade”.

Neste foco, caminhamos juntos com Santos (2012):

Percebe-se uma busca por justificar o conhecimento geométrico pela sua utilidade. Mas essa “utilidade” já solicita a análise de diversos aspectos que dêem conta de questões como: para quê; para quem; por quê. Se considerarmos que a Geometria axiomatizada está presente na realidade escolar, e seus objetos e relações estão no mundo-vida dos que se envolvem com eles e buscam compreendê-los (...) (SANTOS, 2012, p 8).

Os Teoremas de Menelau e Ceva, e o entorno que eles criam, abraçados por esta pesquisa, vão se revelando, a nós, capazes de conviver na proposta em Geometria usual para as escolas, e, além disso, capazes de dar outra dinâmica – de abertura e operacionalização – ao fazer da sala de aula.

Ficamos confiantes que a nossa provocação vai ao encontro de outras muitas indagações e suas possíveis respostas vão além do que queremos propor neste trabalho.

Até por propor essa linha que requer novos enfrentamentos, otimizamos questões sugerindo uma abordagem da Geometria a partir da Investigação em sala de aula. De acordo com Grandó, Nacarato e Gonçalves (2008):

As pesquisas e produções brasileiras revelam que a Geometria vem assumindo um caráter mais exploratório e investigativo, buscando subsídios teóricos em outras áreas do conhecimento (...). Emergem, assim, novas formas de conceber e produzir conhecimentos geométricos em sala de aula, principalmente com dinâmicas de maior dialogicidade entre professor e aluno, numa perspectiva de negociação e produção de significados. Nesse contexto, buscam-se ressignificações para os processos de validação e verdade em Matemática (GRANDÓ, NACARATO E GONÇALVES, 2008, p. 42-43).

Creemos que o aluno dos ensinos Fundamental e Médio pode ser levado a refletir criticamente sobre demais objetos geométricos alternativos aos usuais, como os organizados à luz da projetividade. Podemos possibilitá-lo ao confronto crítico e metodológico de uma nova Geometria.

Essas possibilidades estão descritas, em abertura, nos PCNs. Eles, inclusive para o Ensino Médio, sugerem “novas informações”, “novos tratamentos”. Nesses, a Geometria é tratada como um tema cujo papel estruturante pode levar o aluno do Ensino Médio a olhar para além da janela de Euclides, ou seja, a poder desenvolver habilidades relativas a medidas e grandezas, permitindo-o avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático para além do euclidiano, ideias defendidas por KALEFF (2010).

A Geometria Projetiva é capaz de fornecer métodos e objetos, para não falar de um raciocínio peculiar, que vão ao encontro das propostas dos PCNs em geral, especialmente as que se referem a uma nova relação com o mundo tecnológico. Na verdade, nossa proposta é implementar e transformar, gerando possibilidades de experiências, alicerçadas em conceitos que processam metodologicamente; não substituir “isso por aquilo”.

Interpretando os PCNs em uma de suas diretrizes, antes de mais nada, consideramos que, ao se apresentar uma *segunda* Geometria, estamos

contribuindo para a formação do senso crítico dos alunos. De todo modo, diferentes geometrias não são tão incompatíveis e podem conviver no espaço intelectual da Escola. Freudenthal (1985) nos oferece uma inventiva situação – que aqui adaptamos - na qual expõe essas possibilidades de convivência, ao mesmo tempo em que mostra a sutileza das diferenças: ele coloca a situação de uma cerca com seus mourões e seus estrados formados por ripas horizontais que vão formando retângulos. O piso é plano, horizontal e liso, e o sol da tarde batendo a  $45^\circ$  e com seu eixo de rotação perpendicular ao plano da cerca, com todas essas particularidades, gera sombras iguais aos retângulos: uma invariância euclidiana. Mas, logo o sol muda de posição, e as sombras não mais são retangulares, ainda que formando paralelogramos: uma invariância afim. O sol vai embora, e a luz de um poste próximo produz sombras que agora são quadriláteros sem nenhum paralelismo entre seus lados: uma invariância projetiva. Finalmente, chove, e a lisura do terreno é corrompida, ficando ele rugoso; desaparecem os quadriláteros, ficando as sombras figuras sem nenhuma propriedade que não a de ser ainda uma figura fechada: uma invariância topológica. Numa extensão quase poética, entendemos que *toda* uma Geometria pode se passar num dia escolar.

### 3) Indo além de Euclides

#### 3.1) A projetividade como pressuposto de intervenção

É possível que a maioria dos alunos e professores de Matemática, dando ênfase a Geometria, não conheçam com profundidade os Teoremas de Menelau e Ceva. Creio que este dado seja resultado do fluxo de *prioridades* ditado pelos currículos anteriormente estabelecidos. Na verdade, Menelau e Ceva (podendo também citar Desargues e Pappus) são, infelizmente, apenas apresentados em contextos cujo objetivo é a preparação para situações específicas, tais como os vestibulares com foco em carreiras militares.

Propor Menelau e Ceva como conteúdo em Geometria escolar, intuímos, vai chocar com uma opinião bastante difundida entre professores de que tal proposta é tanto uma “tarefa a mais”, quanto uma “tarefa de mais dificuldade”,

Nossos estudos e pesquisa pretendem mostrar que é um equívoco partir dessas pré-concepções, notadamente a de que se tratam de temas de complexidade acima do suportável pela escola básica.

Por outro lado, somos afins com a expectativa de que o novo pode incomodar e que a discussão sobre o que é ideal – conceitualmente – e mais prático pode ser, por muitos, vista como um entrave metodológico. Assim, consideramos a fala de Santos (2012):

(...) sabemos que não é simples discutir a questão do ensino de Geometria, considerando-se as dificuldades e problemas enfrentados tanto por quem aprende como por quem ensina. O trabalho escolar cotidiano parece revelar que há um salto entre o conhecimento geométrico prático e teorizado, entre o raciocínio intuitivo e dedutivo (...) (SANTOS, 2012, p. 9).

Se neste ponto pudéssemos caracterizar o *mosaico* que se estabelece junto ao ensino de Geometria, teríamos em evidência, principalmente, os resultados de Tales de Mileto. Com ele, emergem as primeiras considerações plausíveis e dedutíveis da proporcionalidade entre segmentos de reta estabelecidos por secções (Teorema das paralelas de Tales).

Em seu livro intitulado *Outras Geometrias*, Veloso (2000) nos alerta sobre a necessidade de uma pausa, de uma reflexão sobre o currículo envolvendo a Geometria e suas ações pragmáticas enquanto ciência e objeto a ser aprendido e vivenciado. Recortamos um fragmento introdutório do seu capítulo VI, onde ele justifica sua preocupação:

Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com “outros pontos”, “outras rectas”, “outros triângulos”, “outras distâncias”. Numa palavra, devem tomar contato com outras geometrias [...] que ao longo dos últimos dois séculos [...] foram tomando o seu lugar ao lado da geometria euclidiana. [...] não estamos a propor que todos os alunos, no futuro, experimentem trabalhar em todos esses tópicos. Mas que alguma vez, na sua vida escolar, tenham saído dos limites hoje estreitos da geometria euclidiana, por pouco tempo que seja. (VELOSO, 2000, p. 311)

É muitíssimo provável que Menelau (séc. I d.c) usou das atribuições de Tales para desenvolver o seu teorema e Giovanni Ceva, por conseguinte, fez o mesmo em relação à Menelau. A proporcionalidade dada por Tales e posteriormente visualizada e conjugada na semelhança entre triângulos é o principal viés demonstrativo para Menelau. Logo, a presença de Tales é favorável e necessária para o que queremos pesquisar, sendo, a partir dela, possível mostrar a presença despercebida de Menelau nas escolas.

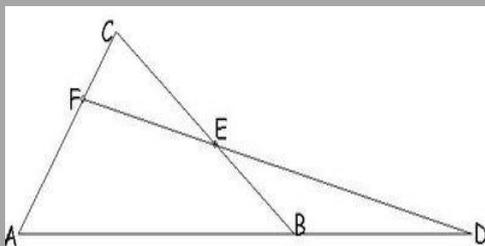
Entendemos, porém, que a fundamentação menelaica é mais ampla. Ela se dá com a abordagem de razões entre segmentos em um triângulo a partir de uma transversal que corta os seus lados ou o prolongamento destes. Tal transversal (reta de Menelau), quando intersecta os lados do triângulo gera 3 pontos que, por estarem na reta, são assim, colineares. Daí, a *colinearidade*, assim como a *concorrência*, que surge como sustentáculo da Geometria Projetiva, passa a ser um pressuposto da aplicação em Menelau. O teorema se verifica quando os pontos, colocados nos lados do triângulo, estão sobre uma mesma reta, o que abre, no campo das recíprocas, uma interessante interseção de relações métricas com lineares e vice-versa.

### 3.2) Investigando Menelau e Ceva

#### O Teorema de Menelau: (Menelau de Alexandria – Séc I d.c.)

Apesar de situar-se no esteio das formulações gregas típicas do euclidianismo, de requerer e usar a verdade de Tales da semelhança de triângulos para erigir seu famoso teorema, Menelau, com outros olhos, pode ser visto como um inovador. Basta que enfoquemos os resultados em Tales (que compreende a razão entre 4 termos) e em Menelau (que compreende a razão entre 6 termos) para que comecemos a olhar diferenciadamente para a sua descoberta. Apresentamos, abaixo, o teorema, num texto que consideramos mais didático e suficientemente conciso.

*Toda transversal que corta os três lados de um triângulo determina seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade comum, é igual o produto dos outros três.*



$$\frac{CE}{FC} \cdot \frac{FA}{AD} \cdot \frac{BD}{EB} = 1$$

*Demonstração:*

*Tomemos as alturas  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , dos triângulos  $BED$ ,  $CEF$  e  $FAD$ , respectivamente, sendo  $h_1$ , relativa ao lado  $ED$ ,  $h_2$ , relativa ao lado  $FE$  e  $h_3$ , relativa ao lado  $FD$ .*

*Assim, por semelhança:  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{EB}{EC}$  (I)  $\frac{h_2}{h_3} = \frac{FC}{FA}$  (II)  $\frac{h_3}{h_1} = \frac{AD}{BD}$  (III). Multiplicando*

*(I), (II) e (III), vem:  $EB \cdot FC \cdot AD = EC \cdot FA \cdot BD$ . ■*

*Reciprocamente:* *Se três pontos determinam sobre os lados de um triângulo seis segmentos tais que o produto de três segmentos não consecutivos seja igual ao produto dos outros três, os três pontos estão em linha reta.*

Lendo o texto anterior, claramente nos preocupamos em como levá-lo ao nosso aluno. Vemos que, curiosamente, se a transversal em ABC fosse paralela ao lado AB, forçadamente o segmento FE também se tornaria paralelo a um dos lados do triângulo. Assim, sustenta-se a relação fundamental da semelhança entre os triângulos CFE e CAB, notando-se que:  $\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{FE}{AB}$

ou  $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$  (Teorema de Tales). Isto é, podemos usar a familiaridade que o aluno já tem com Tales, ajudando a aceitar melhor a novidade de Menelau.

Algumas oportunidades de discussões geométricas se fazem interessantes, como se perguntar onde está localizado o ponto D quando FE se tornou paralelo a AB?

A decorrente *impropriedade* do ponto D, no caso acima, traduz-se quando o mesmo é levado (intuitivamente) ao infinito, fazendo com que BD e AD tenham, praticamente, o mesmo tamanho. Com efeito, a partir de Menelau:

$\frac{CE}{FC} \cdot \frac{FA}{AD} \cdot \frac{BD}{EB} = 1$  e tomando  $BD = AD$ , vem que  $\frac{CE}{FC} \cdot \frac{FA}{EB} = 1$ , ou

$\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$  (Tales). Isto é, há uma oportunidade de se trabalhar uma *análise*,

além do que, esta situação pode ser levada por meio do uso de softwares gráficos, com aproximações dinâmicas.

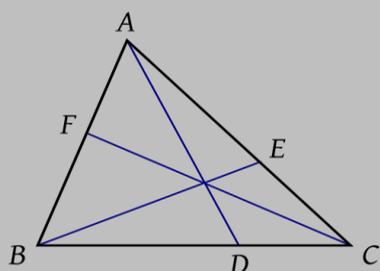
Creemos, no entanto, que a *formalização* e o rigor matemático-geométrico não interfere na dinâmica operacional e de abertura de novos teoremas com os alunos. Com esse olhar, ao propor atividades aos sujeitos de nossa pesquisa, na apresentação dos teoremas, pretendemos fazer uso das demonstrações mais didáticas e reflexivas, para justificar o modo de pensar e agir frente à uma situação problema. Menelau deriva de Tales e Tales pode ser percebido por Menelau.

Não se trata de privilegiar o método dedutivo, mas possibilitar aberturas de horizontes para que esse conteúdo seja tratado com diferentes níveis de rigor, mostrando-se em seus diferentes perfis e estilos. (SANTOS, 2012)

### O Teorema de Ceva: (Giovanni Ceva – 1678)

O Teorema de Ceva é uma extensão do de Menelau. Aliás, se considerarmos Menelau como sendo uma articulação mais ampla de Tales, Ceva é isto em um nível ainda maior de especificidade de aplicação.

*As retas que unem os vértices de um triângulo a um mesmo ponto, determinam sobre os lados, seis segmentos tais que o produto de três desses lados, não tendo extremidades comum, é igual ao produto dos outros três.*



$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

*Demonstração:*

*Seja P, o ponto de cruzamento das cevianas AD, BE e FC. Tomando os triângulos ABD e a transversal FC, usando o Teorema de Menelau:*

$$AP \cdot FB \cdot CD = AF \cdot BC \cdot PD \quad (I).$$

*Tomando agora o triângulo DAC e a transversal EB, usando o Teorema de Menelau:*

$$AP \cdot EC \cdot BD = PD \cdot AE \cdot BC \quad (II).$$

*Multiplicando (I) e (II), membro a membro e suprimindo os fatores comuns, vem: FB . CD . AE = EC . BD . AF    ■*

Reciprocamente: *Se os pontos D, E e F das cevianas internas AD, BE e CF de um triângulo ABC fazem valer a relação: FB.CD.AE = EC.BD.AF, então tais cevianas concorrem a um mesmo ponto.*

Mais uma vez, optamos por um texto didático que consideramos ser a maneira melhor e mais concisa dessa apresentação geométrica.

O fato de três cevianas concorrerem a um mesmo ponto em um triângulo (tecendo o conceito da concorrência de segmentos) é o que se tem de mais comum quando se fala de alturas, bissetrizes internas ou medianas – que são objetos corriqueiros para os alunos de Geometria. Por isso, um teorema que trata frontalmente desse objeto geométrico (concorrência), podemos considerar, deve ser mesmo disponibilizado como conteúdo curricular. Isso nos leva a um interessante questionamento. Será que todos os alunos entendem o porquê dessas cevianas se cruzarem em um ponto? É mais comum aos olhos da investigação matemática na escola básica procurar pistas para casos particulares que para casos gerais. Os teoremas de nosso foco têm essa peculiaridade de proposição. Como, além das cevianas notáveis, existem outras tantas cevianas que podem concorrer, esses teoremas afirmam sua característica de maior abrangência de casos.

### **3.3) Uma proposta de intervenção curricular e pedagógica**

Sentimos, como pesquisadores, que a Geometria, institucionalizada como membro de um corpo curricular, precisa, necessariamente, acompanhar as mudanças ideológicas que norteiam um novo olhar. O currículo que contemplamos, mesmo em escolas autônomas e rigorosas com seus métodos articulados para os vários programas de concursos e ou avaliações externas, não se posicionam para algo inovador acerca do estudo da geometria. Cremos que ainda as escolas argumentam com a comodidade metodológica frente à novos “modelos” de geometria. Neste aspecto, Henriques (2010) nos adianta:

A existência e a aceitação desta “pluralidade dos modelos geométricos” parecem influenciar as perspectivas de ensino e de aprendizagem da geometria, em diversos países, de tal sorte a estimular uma constante reestruturação curricular, pela revalorização da geometria no âmbito da escola básica. (HENRIQUES, 2010, p. 32)

Esta hipótese é corroborada por um documento de orientação curricular do Ministério da Educação de Portugal, no qual Abrantes, Serrazinha e Oliveira (1999) afirmaram:

O lugar da geometria nos currículos tem sido alvo de grande controvérsia, um pouco por todo o mundo. Nos últimos anos, observa-se uma tendência geral no sentido da revalorização da geometria nos programas de Matemática. No entanto, quer os conteúdos a incluir, quer as metodologias a utilizar, continuam a ser questionados. (ABRANTES, SERRAZINHA e OLIVEIRA, 1999, p.57)

Nossa pesquisa tem se direcionado com os demais estudos de pesquisadores nacionais e internacionais acerca da valorização curricular das geometrias não-euclidianas como pressuposto de reflexão e aplicação em sala de aula. É uma direção que segue pistas deixadas desde a quebra do Quinto Postulado de Euclides, através das múltiplas tentativas de demonstração, feitas por diversos matemáticos do século XIX, como Gauss em 1824, Lobachevsky em 1829, Bolay em 1832, Riemann em 1854 e posteriormente Poincaré e Klein; eles motivam uma nova abordagem da Geometria, assim como nos diz KALEFF (2007, p.12)

Foram esses estudiosos que nos permitem, nos dias de hoje, olhar para além da janela aberta pelos conhecimentos e paradigmas propostos por Euclides, pois a negação do Quinto Postulado teve como conseqüência a descoberta da *geometria hiperbólica* (em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta) e a *geometria elíptica* (na qual não existem retas paralelas), e o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao euclidiano, conhecidos como *geometrias não euclidianas* (KALEFF, 2007, p. 12).

Em torno da Geometria Projetiva, queremos pesquisar como os teoremas de Menelau e Ceva, assim como Tales e Pitágoras, podem vir a ser acessíveis à prática convencional da Geometria. Notamos que o *euclidianismo* <sup>(3)</sup> enraizado nos paradigmas educacionais acerca da geometria escolar e, portanto, curriculares, não serão obstáculos para o trabalho à luz de Menelau.

---

<sup>3</sup> Como euclidianismo, neste texto, queremos considerar mais o horizonte da prática escolar usual, que se apoia numa certa orientação e escolha de objetos desde o sábio de Alexandria; Menelau e Ceva têm interseções com o euclidianismo, mas consideramos interessante frisar as não interseções.

É importante que o professor tenha consciência e lucidez, e troque experiências com os alunos, de modo que a solução de um certo problema por via de Menelau não seja estranha ao modo mais usual de solução desse tipo de situação, podendo ser vista como uma generalização, justamente aí se consolidando como um teorema. Afinal, Menelau desenvolve seu teorema também a partir de semelhança de triângulos. Em nossa proposta de pesquisa de campo, devemos cuidar que essas relações sejam vividas nas atividades de investigação.

Mas, a intenção de apresentação de Menelau, e a correlata intenção desta pesquisa, não é resultar de o aluno pensar que passará a ter dois modos de enfrentar tal situação. É necessário que se comunique uma novidade, que vêm a ser novos objetos com os quais o aluno, usualmente, não lida e que advêm do ferramental projetivo implícito e explícito nas ideias de Menelau. Essa compreensão vai tornando a potencialidade do que se propõe inaugurar como um trabalho geométrico alternativo.

Em resumo, nos contribui KALLEF (2007):

(...) é desejável que na educação básica o aluno seja confrontado com uma quebra de paradigmas para além da pura memorização, por meio do reconhecimento da importância das figuras, bem como o entendimento de outras linguagens gráficas e de uma introdução ao raciocínio lógico dedutivo não-euclidiano. Essa intenção vem valorizar a diversidade no tratamento do conhecimento geométrico na escola e abrir portas para a inclusão de modelos introdutórios às geometrias não-euclidianas, indo-se para além do vislumbrado através da janela de Euclides (KALEFF, 2007, p. 13).

O modo projetivo de se pensar a Geometria, que se conjuga com os métodos e procedimentos, assim ditos euclidianos, em vista de que os alunos, usualmente, não têm acesso nos currículos escolares, não necessita, no entanto, de ser apresentado de forma prontamente estruturada e completa. A geometria projetiva, se for colocada como tal, requereria espaço curricular muito amplo, acabando por pesar o conjunto de conhecimentos propostos aos alunos. Seus principais vetores conceituais, a colinearidade e concorrência, podem ir sendo trabalhados num crescendo, participando de soluções

geométricas aos poucos, desde Menelau e Ceva, ganhando compreensão do conjunto e de aplicabilidade com teoremas, escólios e aplicações consequentes.

Mas, não se esquivava de pensar a introdução da Geometria Projetiva propriamente dita nas práticas curriculares, e isto também se aponta como objetivo desta pesquisa. De qualquer modo, entre outros aspectos problemáticos, devemos nos lembrar que ela, quando se configura seus objetos e conceitos, transita entre o espaço bidimensional e tridimensional com mais ubiquidade que o euclidianismo, enquanto disposto para estruturar uma Geometria Plana e uma Geometria Espacial.

Tais possibilidades vislumbram ideais de construção de um novo olhar, já proposto por Félix Klein em 1872, com um efeito de observação e abrangência geométrica via transformações, imprimindo o conceito das invariâncias. Assim, podemos verificar essa investida através de Silva, Bongiovanni e Valente (2011):

Em 1872 Félix Klein apresentou um trabalho intitulado “considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas” que ficou conhecido como Programa de Erlanger. Nesse trabalho, Klein relaciona a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas a partir das transformações geométricas e por meio das teorias dos grupos. Para caracterizar essas geometrias Klein adota um ponto de vista algébrico. No seu livro de geometria “ Matemática elementar sob um ponto de vista superior” publicado em 1908, Klein amplia essas ideias e apresenta fórmulas para as transformações geométricas no plano e no espaço (VALENTE, 2011. p.45).

Toda essa possibilidade de trabalho com novos objetos geométricos nós transformamos em uma dúvida que queremos tratar metodologicamente. Começamos a pôr em suspensão todas as nossas certezas e intuições, quando o *fato* de termos teoremas geométricos ganha o estatuto de *fenômeno* em aberto ao se disponibilizarem a estudantes. Assim, esboçamos interrogar **como os teoremas de Menelau e de Ceva são recebidos por estudantes, confrontados com seus conhecimentos euclidianos, e contribuem no empreendimento básico de um novo olhar e proceder geométrico, o**

**projetivo.** Esta interrogação passa a nos guiar como horizonte de compreensão, nos sentidos que sujeitos pesquisados vão estruturar ao irmos ao campo de suas manifestações vivenciadas.

## **4) Metodologia de Pesquisa, produção de dados e interpretações.**

### **4.1) Concepções que se tornam modos e procedimentos**

Pelas características do estudo que propomos e no qual nos empenhamos, percebemos que o campo de pesquisa tinha de responder qualitativamente, para que, efetivamente, nossa necessidade de conhecer a realidade que nos diz respeito fale-nos e aponte-nos desvelamentos. Ao propor uma novidade curricular, não há o que medirmos, por meio de sujeitos alunos. O modo com que compreendem e manifestam suas compreensões acerca de um novo objeto é o que nos parece significativo considerar.

Levamos atividades que apresentaram novos objetos matemáticos, mas, não estávamos apenas propondo um conjunto de conceitos para que os alunos avaliassem, para nós, graus e pertinências. Esses alunos não são um grupo-controle para nós, desejosos de retorno para avaliação de um material didático a ser publicado, como é comum acontecer. As respostas dos alunos foram fundamentos para pensarmos pertinências curriculares, e as atividades preparadas podem até não vir a ser o modo de trabalhar ingerências curriculares, como vimos estudando.

Do ponto de vista de tipicidade, os alunos de nosso campo são excêntricos em relação à normalidade social: são querentes de novidades e se revelam afetivamente próximos à Matemática. Certamente vão aderir à proposta de considerar mais objetos matemáticos a conhecer. Partimos disso para, com suas respostas livres, constituir nossa compreensão de como eles aderem e consideram esse campo possível de produção geométrica, que é o do projetivo.

Discutir os alicerces epistemológicos e filosóficos da fenomenologia como metodologia de pesquisa, *a priori*, não é a nossa intenção neste momento de apresentação das atividades propostas. No entanto, a escolha desse confronto (sujeito-pesquisador) a partir da ideia da fenomenologia trás em nós o desejo da descoberta do sujeito como elemento de percepção do

problema. O fenômeno, neste caso, é vislumbrado individualmente e coletivamente pelo sujeito, dando espaço para nossas interpretações.

No entanto, o fenômeno aqui lançado foi visto como pressuposto para análises e, por conseguinte, interferências dos pesquisadores. Nossas tarefas foram ao encontro de uma ideia de enxergar e vislumbrar a Geometria Euclidiana convencional segundo novos objetos, dando tratamento de construção e projeção. Com isso, se fez necessária a estruturação de uma abertura fenomenológica em todas as etapas da pesquisa, gerando um conflito no que é o fenômeno percebido. Alinhada com essa perspectiva, nos diz Bicudo (1993)

A Fenomenologia Estrutural visa a estrutura do fenômeno percebido. A interrogação que move a investigação é *o que é isto, o fenômeno?* Portanto, está direcionada aos aspectos ontológicos disso que se mostra (BICUDO, 1993. p. 43)

Creemos que a apresentação das tarefas aos alunos irá fomentar discussões no âmbito estrutural do fenômeno produzido ou requerido. Essencialmente, o fenômeno é aquilo que é percebido a partir da experiência, do deixar-se perceber, sentir. Sobre a importância desta percepção, contribui Bicudo (1993):

Fenômeno significa o que se mostra para quem olha intencionalmente, interrogando-o. Não se trata de um ente em si, objetivamente dado e passível de ser apreendido em sua totalidade, manipulado em seus aspectos físicos e pragmáticos. Ele não se deixa aprisionar em categorias previamente estabelecidas que o definam e expliquem, uma vez que se mostra em perfis alinhados, conforme as perspectivas de onde é visado. (...)

A pesquisa do fenômeno situado se dedica ao estudo disso que se mostra quando perguntamos pelo *o que é isso que se mostra?* Mas aquilo que se mostra, não se mostra, nem poderia, conforme a concepção fenomenológica já explicitada, em si, mas se revela na experiência vivida. (BICUDO, 1993. p. 43-44)

Nesta concepção, sentimo-nos impelidos a interrogar e fazermos-nos interrogar diante do processo de pesquisa e apresentação das tarefas aos alunos. Sabemos, no entanto, da importância do desprendimento de pré-conceitos e ideias já formadas, estruturadas e articuladas com o que queremos verificar. Na concepção fenomenológica, ainda como exemplo, fala-se em interrogar o fenômeno, em *epoché*, em redução. O cuidado, o rigor, a sistematicidade estão presentes já no modo de interrogar o fenômeno, de colocá-lo em suspensão, de descrevê-lo, de buscar as invariâncias, de buscar chegar à essência, de refletir sobre ela, buscando seu significado, à luz da região de inquérito e à luz da compreensão do pesquisador, para quem a interrogação fez sentido (BICUDO, 1993).

A redução fenomenológica não significa ir retirando partes da realidade por escolhas que visariam a uma abstração que nos levaria a uma essência. De outra maneira, ela indica um caminhar do pesquisador que tem sua interrogação em foco e que se debruça sobre o empírico pesquisado, buscando todas as ideias manifestadas que ele vê como estruturantes do fenômeno que interroga. Ela é, assim, um movimento do pesquisador. Esse movimento será praticado aqui naquilo que chamamos de **análise ideográfica**, que será construída em quadros cujas colunas sequenciais vão ser passos desse movimento.

Conforme também indicado na literatura de metodologia fenomenológica de pesquisa em Educação, um segundo movimento deve ocorrer para o pesquisador quando ele vai articular convergências percebidas a partir das ideias desta primeira análise. As convergências vão ganhar nomes inteligíveis pela comunidade científica afim, e sedimentam a estruturação do fenômeno, segundo o que percebeu o pesquisador e sua atitude de inquérito. A esse segundo movimento, damos nome de **análise nomotética**.

Pretendemos tratar os dados produzidos a partir do entendimento que temos verdadeiramente uma questão, sobre a qual não sabemos aquilo que ainda não sabemos. A isto, entendemos, corresponde um respeito fundamental à fala de nossos sujeitos, de modo que qualquer estrutura que compreendermos acerca da implementação de objetos básicos da Geometria Projetiva no currículo do Ensino Médio seja constituída a partir do que eles nos apontam, instigados por nós.

Nosso campo de pesquisa, inicialmente, é bem simples. Pensamos em dividir nossa abordagem de pesquisa em dois momentos diferentes, mas processuais. Numa primeira incidência, chamada aqui **Pesquisa I**, projeta-se trabalhar com alunos recém ingressos no Ensino Médio. Para eles seriam oferecidas atividades que premiassem a oportunidade de se manifestarem quanto à passagem do trabalho com o euclidiano – que lhes é conhecido, como escolares – para extensões deste no que interessa na pesquisa.

No que chamaremos de **Pesquisa II**, projeta-se o campo de sujeitos-alunos até no 3º ano do Ensino Médio e participantes de um núcleo sistemático de estudos, portanto, com visão global mais formada. Apresentaremos, em seguida, cada uma dessas pesquisas, cada uma apresentada com a sua análise ideográfica.

#### **4.2) Pesquisa de campo I**

As atividades que foram propostas aos alunos sujeitos deveriam, na tentativa nossa de um pressuposto, provocar o espírito de descoberta e o de investigação. Apresentamos situações corriqueiras de construção de retas, identificação de possíveis semelhanças e proporcionalidades. Desejou-se que o aluno realizasse algo em torno de enlace destes objetos clássicos do euclidianismo usual com os alicerces da projetividade, a saber, a colinearidade e a concorrência.

Escolhemos sete situações (problemas) que oportunizariam aos alunos irem um pouco mais além do que é construído como padrão para a Geometria da sala de aula. Todos os problemas propostos estão relacionados com triângulos previamente estabelecidos por desenhos ou ideias livres. No entanto, pensou-se as atividades como não se acabando em si. Provavelmente pelo fato de todos conhecerem um triângulo e seus principais elementos (vértices, lados, ângulos, cevianas), esperava-se que o retorno fosse significativo e dinâmico, com os alunos habitando os horizontes fenomênicos de interesse da investigação dos pesquisadores.

Em suma, a proposta real é a percepção do que está por vir, do fenômeno manifestado na descoberta e no *confrontamento*<sup>4</sup> do novo aos olhos dos sujeitos, formados nos currículos usuais em Geometria.

Espera-se que o aluno *suje* a sua mão com tal descoberta, mesmo que esta descoberta não o mobilize para outros fins, mas garanta a abertura de uma discussão acerca de novos moldes e implementações da Geometria, que aqui estamos considerando como aquela que vai além de Euclides.

Temos a consciência que a preparação do ambiente de pesquisa, tal como a preleção aos candidatos para tal, deve ser feita criteriosamente neutra e sem perspectivas prontas, principalmente nesse momento primeiro, cujo propósito ainda está no envolvimento da apresentação do novo, gerando protagonismos e atitudes de um novo pensar e agir frente à Geometria. Para esse fim, buscamos na fenomenologia fundamentos para se pensar na produção e organização de um ambiente que privilegiasse não apenas apontamentos de um e outro sujeito, mas uma *cena*, que fosse um conjunto de manifestações de vários *personagens* envolvidos, atinentes a um sentido comum em construção.

Ao encontro dessas ideias, concorrem as falas de Detoni e Paulo (2011):

Nas atividades de nossas pesquisas, realizadas na linha fenomenológica e aqui consideradas, as falas dos sujeitos articulam significados nunca pontuais e estritamente subjetivos. Se agem como comunicação de compreendido, acompanham-se de gestos e olhares que só se completam nos outros. Se expressam um momento de reflexão vivida no experienciado, atualizam todos os sentidos que contribuíram para que aquela fala falasse. Se não bastasse esse passado-presente, parece que toda a fala cabe dentro de um todo de possibilidades que corre junto, como fundo estruturado e estruturante dos significados, para quem fala e para quem ouve. (DETONI E PAULO, 2011. p.103-104).

Os problemas foram impressos em uma folha e organizados tradicionalmente como um caderno de questões, para que os alunos pudessem

---

<sup>4</sup> Confrontar no sentido de estar de frente a um problema, heurísticamente. Sentir-se responsável e capaz de fazê-lo. Perceber e sugerir situações de resolução, dando abertura para o novo.

ter o critério de ordem (do primeiro para o último) que, neste caso, trazia relevância para o que se esperava. Pretendíamos confrontar as respostas escritas nesse caderno com as falas dos sujeitos, na concepção de que a descoberta do novo e a percepção do fenômeno se fazem, de forma mais explícita, concorrendo olhares e gestos. Para tanto, procedeu-se a gravação audiovisual das ações dos alunos-sujeitos.

Os alunos voluntários para a o exercício desta pesquisa de campo são alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola central de Juiz de Fora. Trata-se de uma turma com não mais de 23 alunos, em que todos quiseram participar da abordagem proposta. Tal turma é composta por alunos considerados, na escola, dinâmicos e autônomos no que diz respeito ao ato de estudar. Vislumbram possibilidades de aprendizado além do trivial e curricular.

A escolha de uma turma de 1º ano em nossa pesquisa é intencional, pois é no cenário curricular desta série que a Geometria Elementar Euclidiana se compõe a partir dos seus pressupostos, principalmente no que se refere à geometria triangular. Mesmo sendo iniciada no Ensino Fundamental, a Geometria, de fato, acaba se consolidando no ensino médio – aqui vista como ferramenta e parte integrante de um programa necessário para vestibulares e afins. É basicamente no primeiro ano, que os pilares do euclidianismo *Tales – Semelhança* se mostram caracterizados e articulados com o estudo do triângulo em geral.

#### **4.2.1) As atividades da Pesquisa I**

A seguir, mostraremos a primeira abordagem aos alunos do que se propõe nessa atividade de pesquisa de campo. As sete questões já mencionadas servirão de elementos norteadores para alinhamentos de conceitos, descobertas e significados. É possível perceber nuances de projetividade em todas as questões inerentes. Caberá aos pesquisadores envolverem, nestas questões, as idéias de possibilidades de vislumbre de construtos além dos pilares sustentados por Euclides, com a sua Geometria.

É possível perceber uma lenta entrada dos Teoremas de Menelau e Ceva neste primeiro contato com os alunos. O objetivo é fazer-se construir a

ideia de Menelau a partir de etapas, que se inicia em Tales, e que simplesmente não termina (assim o desejamos enquanto pesquisa).

**- Pesquisa de Campo -  
Parte I**

**Investigações e aplicações dos Teoremas de Menelau e Ceva em sala de aula.**

**Pesquisadores:  
Guilherme Calderano (Mestrando) e Adlai Detoni (Orientador)**

Juiz de Fora, Maio de 2012

Atividade 1:

Desenhe um triângulo qualquer ABC. Logo em seguida, trace uma reta (s) que corte os lados AC em E e BC em D. (Use régua se quiser).  
(ESPAÇO EM BRANCO)

Atividade 2:

De acordo com o desenho anterior, se o segmento ED não for paralelo ao lado AB, a reta (s) cortará o prolongamento de AB em algum lugar (ponto F).  
Você concorda com isso? (Explique se achar necessário)

---



---

E se o segmento ED for paralelo ao lado AB? Onde ficaria o tal ponto F?  
(Explique)

---



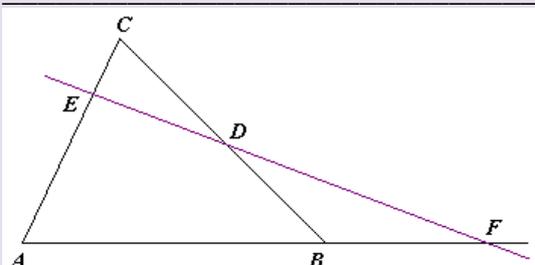
---

Atividade 3:

Dois triângulos são ditos semelhantes quando seus ângulos correspondentes são iguais. Assim, seus lados homólogos são proporcionais. A identificação da

semelhança é tão importante quanto à resolução do exercício propriamente dito.

Na figura abaixo, podemos identificar algum par de triângulos semelhantes? Quais?

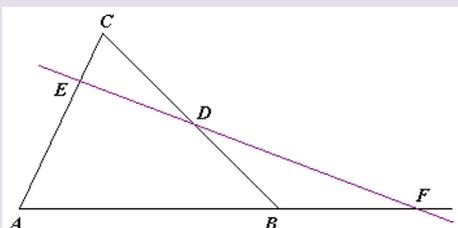


#### Atividade 4:

No desenho anterior, se  $ED \parallel AB$ , seria válido escrever que  $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB}$  ou  $CE \cdot DB = CD \cdot EA$  (Teorema de Tales). Neste caso, o que aconteceria com as medidas dos segmentos AF e BF?

#### Atividade 5:

Existe um teorema muito antigo chamado **Teorema de Menelau**. (Menelau de Alexandria – séc I dc). Tal Teorema diz que se uma reta intercepta os três lados de um triângulo ABC nos pontos E, D e F, conforme a figura, a igualdade  $DB \cdot CE \cdot AF = CD \cdot EA \cdot BF$  é sempre válida.



Usando o Teorema de Menelau, calcule o tamanho de CD, sabendo que  $CB = 12\text{cm}$ ,  $CA = 10\text{cm}$ ,  $AB = 14\text{cm}$ ,  $BF = 6\text{cm}$  e  $EC = 4\text{cm}$

(ESPAÇO EM BRANCO)

Atividade 6:

a) Construa um triângulo ABC qualquer. Agora escolha um ponto D em BC, um ponto E em AC e outro ponto F em AB. Com o auxílio de uma régua, construa as cevianas AD, BE e CF.

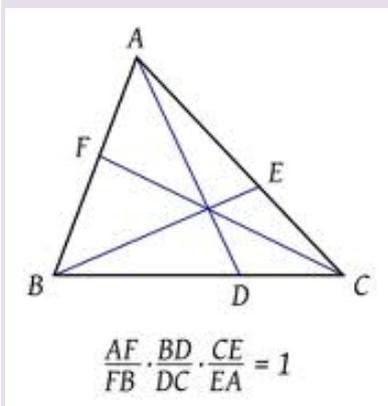
(ESPAÇO EM BRANCO)

b) Você usou alguma técnica especial para traçar os segmentos AD, BE e CF? Olhando para a sua construção acima, você considera possível, tais segmentos se cruzarem em apenas um ponto?

(ESPAÇO EM BRANCO)

c) A representação abaixo é sobre outro teorema chamado **Teorema de Ceva**. Tal resultado se dá quando as cevianas traçadas se cruzam em apenas um ponto (ponto de concorrência). O Teorema de Ceva pode ser demonstrado usando o Teorema de Menelau. Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4$

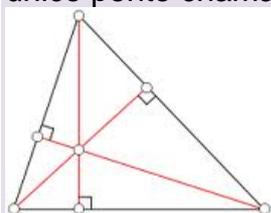
(ESPAÇO EM BRANCO)



Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4\text{cm}$  e  $AC = 8\text{cm}$ . Calcule o tamanho de DC.

Atividade 7:

Na figura abaixo, tem-se um triângulo acutângulo (todos os ângulos internos agudos) com suas alturas traçadas. Note que essas alturas se cruzam em um único ponto chamado ORTOCENTRO.



a) Justifique com as suas palavras o porquê das alturas se cruzarem em apenas um ponto.

b) Qual seria o método geométrico adequado para provarmos que as alturas de um triângulo se cruzam em apenas um ponto? Como fazer?

c) Você conhece outras cevianas no triângulo que também se cruzam em apenas um ponto? Quais? Quais as características de cada uma delas?

#### 4.2.2) Expectativas

Enquanto pesquisadores, procuramos elaborar atividades que pudessem conduzir, didaticamente, o entorno de nossa pesquisa de campo. Mesmo sabendo da importância da neutralidade de posições, mantemo-nos atentos aos nossos objetivos de verificação. A ideia, no ato da pesquisa, foi levar nossos pressupostos e inquietações, de modo a gerar um ambiente dotado de criticidade.

Em suma, além dos elementos pontuais, trazidos em cada atividade proposta nesta pesquisa, podemos dizer que a expectativa natural e necessária neste construto de significados gira em torno da abertura e aceitação de um novo olhar da Geometria, tais como suas aplicações e abordagens.

Cada atividade, a seguir, foi criada com um objetivo próprio, que agrega em nossa primeira pesquisa um ambiente de *construção* e *descoberta*. De um modo geral, buscou-se uma sequência cada vez de mais forte envolvimento com elementos projetivos e vinculados aos teoremas de Menelau e Ceva na expectativa – descrita abaixo - que os sujeitos caminhassem junto a esta sequência.

**Atividade 1:**

Aqui, esperamos nada mais que a inauguração de um propósito de construção e imaginação. Deixar o sujeito livre para construir o triângulo que melhor lhe convém a partir do que ele já precede. A ideia de traçar uma reta que corta (intercepta) os dois lados de um triângulo é, na verdade, uma porta aberta para a relação TALES-MENELAU, principalmente se o segmento recém construído ED não for considerado pelo aluno como um segmento paralelo ao lado AB. Partimos de que muito poderá ser agregado a esta questão, quando se observar a possibilidade de escolha do triângulo a ser inventado pelo aluno.

**Atividade 2:**

É possível considerarmos que o que se propõem nesta atividade seja o elemento inaugural de nossa pesquisa frente aos sujeitos envolvidos e, por que não, ao objeto estudado por nós nesses últimos anos. Trata-se de deixar-se permitir para uma nova realidade – que permeia o que está imposto, *a priori*, na geometria convencional. A segunda pergunta do problema nos leva a duas situações claras: a ideia cristalizada de paralelismo de retas com os atributos euclidianos e a relação ou co-relação desta com o conceito (intuitivo) de infinito. Além disso, é possível esperar, nesta questão, a inquietude dos alunos interpelados sobre a ideia de concorrência entre duas retas, sendo estas depositadas ou enxergadas em superfícies não planas.

**Atividade 3:**

Aqui, a ideia é fazer com que os alunos percebam que a semelhança pode ser construída a partir dos conceitos primitivos. Na figura, aparentemente, não existe semelhança entre dois triângulos, o que se sugere uma construção. A partir daí, um novo cenário conceitual surge defronte ao indicado pela reta que contem E, D e F. Como construir mais retas, fazê-las paralelas a quem, ou quais? É importante que o aluno envolvido nessa pesquisa de campo se envolva, devagar e progressivamente, com o novo, sem perder as suas bases conceituais, amarradas ainda no euclidianismo. Logo, semelhança de triângulos e o Teorema de Tales continuarão sendo, pelo menos nesse processo inicial, o cenário necessário e transitório para a nossa proposta de intervenção. Além do mais, como é dito no enunciado da atividade, perceber a

semelhança entre dois triângulos talvez seja mais importante, aos olhos da Geometria Euclidiana, que executa-la propriamente dita.

#### **Atividade 4:**

É crível percebermos que, em todo o nosso trabalho, a visão *histórico-euclidiana* é necessariamente preservada e indicada como elemento norteador para outros vieses teóricos e metodológicos. O Teorema de Tales sustenta as bases Menelaicas e o Teorema de Menelau faz o mesmo com Tales (pois que este acaba podendo ser visto como caso particular daquele). No caso desta atividade, esse relacionamento é vital, mesmo que o aluno envolvido na pesquisa de campo não tenha ainda a sensibilidade epistemológica para proceder a intuitividade que envolve o conceito prévio de limite, de aproximação, de equivalência, etc.. Espera-se, no entanto, que o aluno desloque-se, mais uma vez, em relação à quebra dos paradigmas euclidianos, mesmo que de maneira tempestiva e inquieta. Tais sentimentos, possivelmente gerados por perguntas cercadas por condicionais primitivas, ou seja, se isso ou aquilo acontecer, implica em o quê lá na frente? “O que acontece com os segmentos AF e BF se ED e AB forem paralelos?” Mostra-se ainda, como expectativa para esta questão, o fato do sujeito, ao *levar* o ponto F para o infinito, condição de manter o paralelismo entre ED e AB, perceba, em caráter intuitivo, que os segmentos AF e BF teriam praticamente o mesmo tamanho.

#### **Atividade 5:**

Na atividade 5, é apresentado o Teorema de Menelau como ferramenta para resolver um problema de triângulo. De maneira proposital, utilizamos o mesmo desenho em todas as atividades até então, justamente para dar uma implementação processual e linhagem epistemológica. Cremos que só agora Menelau poderia ser mencionado como um organismo de regras e implicações geométricas. Não é, aqui, intenção primeira desta atividade, mostrar uma apresentação rigorosa do teorema e sua reciprocidade, tampouco sua demonstração. A ideia inicial é suggestionar e familiarizar o teorema para, instantaneamente, servir de ferramenta de trabalho. É possível, no entanto, que o aluno, por hora, possa identificar e articular os significados empregados nas figuras e enunciados das questões anteriores.

**Atividade 6:**

Este exercício na pesquisa foi dividido em três perguntas bem norteadoras:

Na letra (a), propomos, assim como na atividade (1), a aleatoriedade a partir da construção de um triângulo qualquer e três cevianas distintas, saindo dos vértices diferentes.

Na letra (b) propõe-se o questionamento que envolve as conjecturas iniciais acerca da concorrência das cevianas. Insistimos na ideia de que é mais comum, quando se trata da aleatoriedade, as três cevianas do triângulo, construídas em questão, não se encontrarem em um único ponto. Torna-se, por conseguinte, a concorrência das cevianas, algo a se observar com mais afinco e atenção. É notório, na questão proposta, que não existe a intenção primeira de perguntar o porquê da concorrência, mas se é possível, empiricamente, que tais cevianas, mesmo sendo diversas, se cruzem em apenas um ponto.

Finalmente, na letra (c), o Teorema de Ceva é apresentado tal como Menelau foi apresentado na questão anterior. Deixar-se apresentar de uma maneira útil e necessária para a resolução de um problema relativamente simples – ou consideravelmente simples por conta da apresentação de Ceva. Espera-se também, no limiar da questão 06, considerações diversas sobre o surgimento do Teorema, geometricamente estruturado. Faz-se necessário o entendimento da prática do Teorema de Ceva como uma nova maneira de posicionar os conceitos já estruturados até então, principalmente no que diz respeito às cevianas de triângulo.

**Atividade 7:**

Findamos o material distribuído com uma questão um pouco mais sugestionada e conflitante. Também dividida em três perguntas, propomos uma realidade processual e de amarrações conceituais. Saberíamos, um aluno de Ensino Médio convencional, o porquê das alturas de um triângulo se cruzarem em apenas um ponto? Não esperamos, porém, explicações notórias e bem arrumadas sobre o assunto, pois, mesmo com o Teorema de Ceva, recém inaugurado no campo conceitual dos alunos envolvidos na pesquisa, ainda teríamos o *como fazer*? Como usar Ceva para provar a existência do ortocentro

– que mesmo corriqueiro no currículo básico de Geometria Plana, ainda, é apresentado, assim como o Incentro e Baricentro, como pontos notáveis, frutos do cruzamento de cevianas especiais –, sem adentrar no fato demonstrativo? Cremos que o Teorema de Ceva poderá ser o norteador para tais respostas. As questões (b) e (c) exercitam a praticidade e a correlação do Teorema de Ceva com o que já é falado e instruído na escola básica, tendo em vista, mais uma vez, o estudo do triângulo e suas cevianas notáveis.

### **4.2.3) O ambiente da Pesquisa I**

A primeira Pesquisa de Campo foi realizada em uma sala de aula convencional, com uma estrutura adequada e convidativa para o que queríamos propor. Procuramos, no entanto, trazer à tona a ideia do confronto visual e corporal, posicionando os alunos em círculo, deixando-os a vontade para conversar e discutir sobre as atividades. Como foi dito anteriormente, trata-se de alunos do 1º ano do Ensino Médio, motivados e entusiasmados para o novo, que foram convidados pelos pesquisadores, anteriormente.

A preparação da sala foi feita por mim, antes da chegada dos alunos, de modo que toda e qualquer organização dos demais recursos pedagógicos – aqui destaco a câmera de filmagem, extensões, etc. – pudessem ser empregados com antecedência, antes dos alunos entrarem.

Tivemos a ajuda de um colega professor, que, com muita disponibilidade, prontificou-se para filmar a experiência com os alunos. O que foi acordado entre nós e o cinegrafista foi que as expressões, gestos e falas dos alunos envolvidos pudessem ser gravadas mediante a naturalidade e espontaneidade de cada ação provocada.

Inicialmente, já com os alunos sentados, pude explicar por alguns minutos o que aconteceria nos próximos minutos, tal como a metodologia escolhida. Todas as sete atividades foram impressas e entregues a cada um dos alunos para o início da abordagem de campo.

Após a leitura feita por mim da primeira atividade, sugeri que eles se defrontassem com o exposto, deixando-os à vontade para perguntar e indagar

possíveis questões. Percebi que a timidez e insegurança, no início, fizeram-se em evidência, por conta das instrumentações e movimentações dos pesquisadores.

No início, as filmagens foram direcionadas ao grupo, numa posição frontal, distante do “centro” da roda. A ideia aqui era manter um clima de espontaneidade e tranquilidade, pautado na não interferência e na espontaneidade. A cada pergunta, questionamento ou rumor entre os alunos, a câmera era direcionada a fim de retratar a fala, tal como ela foi, articulada com a movimentação e expressão de cada sujeito.

Todas as atividades foram lidas por mim e a partir da terceira eles já não mais se preocuparam com os recursos de filmagem, fazendo fluir os comentários e intervenções. Procurou-se, no entanto, apenas mediar as discussões, levando até eles subsídios e ferramentas de discussões sobre alguns porquês naturais.

#### **4.2.4) Quadros ideográficos da Pesquisa I**

A apresentação dos dados da pesquisa de campo I, isto é, as respostas dos sujeitos e o tratamento metodológico delas, vai ser posta no esquema abaixo, repetido sete vezes, um para cada atividade. Um Preâmbulo trará uma descrição primeira do ambiente e do movimento das pessoas envolvidas em cada atividade. A 1ª coluna trará, escaneado ou transcrito, o resultado escrito pelos alunos em folha de atividades distribuída. Na 2ª coluna, serão transpostas falas e movimentos correlatos gravados em vídeo que o pesquisador considera significativos. Conforme percepção teórica já posta aqui anteriormente, as unidades de significados que foram fazendo sentido ao pesquisador serão assim entendidas num conjunto de falas, pertinentes ao diálogo instaurado, que foram entendidas formando *cenas*.

A 3ª coluna é uma descrição das duas anteriores, já como articulação percebida pelo pesquisador, sobre os registros escritos e gravados em audiovisual. A 4ª e última coluna mostra uma articulação final do pesquisador, na qual ele desenha concisamente ideias que interpretou sobre o manifesto pelos sujeitos alunos.

Esquema de apresentação de dados e interpretações:

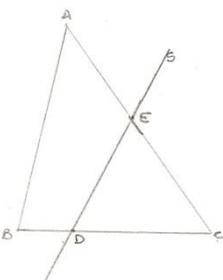
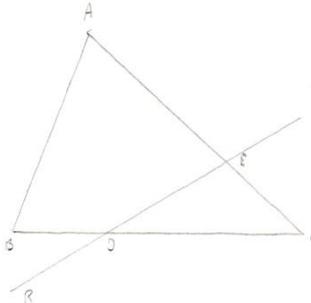
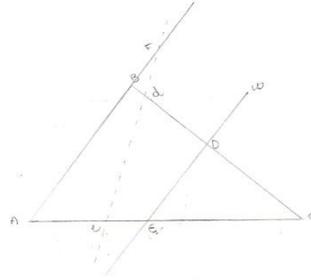
PREÂMBULO: ...		
1ª coluna	...	
2ª coluna: transcrições	3ª: DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS e Ações	4ª: interpretações
...	...	...

### ATIVIDADE 1

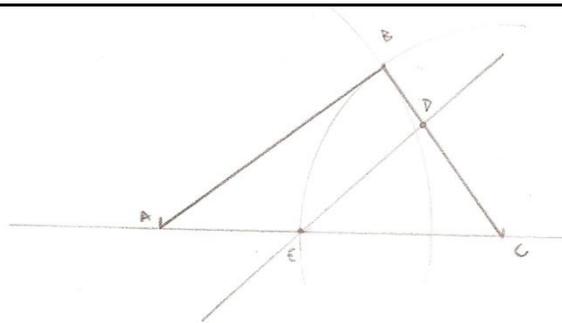
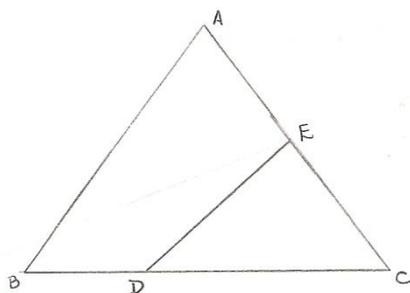
#### PREÂMBULO:

*O pesquisador inaugura as ações comentando rapidamente o que vem estudando, em torno de geometrias não euclidianas, seu papel na pesquisa e o que as atividades a serem trabalhadas representariam. Diz que “a palavra de ordem é espontaneidade”. Ele chama os alunos para juntos construírem olhares alternativos para a Geometria. Tendo distribuído as folhas com atividades, solicita que os alunos leiam. Diz ainda que tem como objetivo mostrar para a comunidade científica que existem outras possibilidades de enxergar a geometria(...) inclusive a geometria convencional*

**Enunciado: Desenhe um triângulo qualquer ABC. Logo em seguida, trace uma reta(s) que corte os lados AC em E e BC em D. (Use régua se quiser)**

1ª coluna		
(VI)	Sujeito (I)	Sujeito (II)
		
		Sujeito
		
		Outros Exemplos

2ª coluna: transcrições	3ª: DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS e ações	4ª: interpretações
<p data-bbox="225 674 579 927"><i>Os alunos leem atentamente e dão mostras de que não estão tendo dificuldades em compreender a situação e o que dela se pede.</i></p> <p data-bbox="225 969 536 1070">Pesq: Se não tiverem régua não tem problema.</p> <p data-bbox="225 1115 568 1182">Pesq: Perguntem o que quiserem.</p>	<p data-bbox="608 674 932 813">A familiaridade da situação proposta não causa maiores estranhamentos.</p> <p data-bbox="608 857 967 1518">Os desenhos representados deixam claro a disposição do “elementar” acerca da construção de uma reta secante. Ênfase aos desenhos dos sujeitos I e II, que fogem do padrão – paralelamente estabelecido pelos segmentos gerados. Assim, nas demais representações, deixou-se livre o aluno, na intenção dele manifestar suas preferências de manifestações geométricas.</p>	<p data-bbox="994 674 1345 1294">A espontânea escolha da representação do segmento DE como paralelo ao lado AB da maioria dos sujeitos vai ser interpretada por nós como uma adesão ao espírito euclidiano trazido pelas possibilidades do paralelismo, confirmando um confinamento direcional dos alunos em geral a buscar relações de proporcionalidade por semelhanças.</p>
<p data-bbox="225 1559 544 1738"><i>Depois de um breve período, vendo os alunos demonstrarem que já deram conta, o pesquisador finaliza:</i></p> <p data-bbox="225 1783 416 1850">Pesq: “e aí, tranqüilizo?”</p>		<p data-bbox="994 1559 1313 1659">Os alunos lidam bem, com segurança, num ambiente euclidiano.</p>



## ATIVIDADE 2

### PREÂMBULO:

*Mais uma vez, o silêncio ainda é muito evidente. A fala do pesquisador insiste tanger à espontaneidade e liberdade nas perguntas, ações e posturas. Após alguns instantes – por conta da rápida administração da questão 1, os meninos, ainda timidamente, se colocam disponíveis para a segunda investida nesta atividade.*

**Enunciado: De acordo com o desenho anterior, se o segmento ED não for paralelo ao lado AB, a reta (s) cortará o prolongamento de AB em algum lugar (ponto F). Você concorda com isso? (Explique se achar necessário). E se o segmento ED for paralelo ao lado AB? Onde ficaria o tal ponto F? (Explique)**

1ª coluna		
<p>Algumas respostas relevantes:</p> <p><b>“Se o segmento ED for paralelo ao lado AB, não existirá ponto F, tendo em vista que retas paralelas nunca se cruzam no Plano “(L.A)</b></p> <p><b>“ Se fossem paralelas, as retas nunca iriam se cruzar...iriam se prolongar infinitamente sem haver um ponto em comum” (L.R)</b></p> <p><b>“Duas retas paralelas se tocam no infinito” (B.F)</b></p>		
2ª coluna: transcrições	3ª: DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS	4ª: interpretações
<p>Item (a):</p> <p>L.I: Eu posso usar os conceitos que eu conheço para fazer a questão?</p> <p>Pesq: Claro! Você deve usar o que você já conhece.</p> <p>L.I: E como eu escrevo sobre isso?</p> <p>Pesq: Bom, você pode escrever assim: já que estou perguntando se você concorda ou não com este fato, você pode dizer que: de acordo com o que conhecemos até então, o que é estabelecido como verdade (...) isso é bem importante(...)</p> <p>Pesq: Fiquem à vontade.</p>	<p>O que está visível nas falas destacadas acima são, de pronto, o vislumbre daquilo que já está posto, como reduto conceitual e “seguro”, mesmo sendo o infinito mencionado em algumas falas significativas tais como a de Bruno. Há, porém, uma divergência na fala de Bruno em relação às demais. Enxergar localmente o infinito, mesmo não tendo muita noção desta quantificação – ou intuição, distingue tal fala das demais, que</p>	<p>O proposto permite alguns movimentos dos alunos em torno do como articular. A proposição, gráfica, abre espaços para discussões conceituais. A tarefa de terminar expressando em palavras parece ser um bom incômodo, estendendo o como pensar geométrico. A maioria dos textos escritos segue um padrão, mas, é relevante o modo com que alguns articulam, buscando sentidos aquém dos matemáticos. Aceitando, ou não, o infinito habita</p>

	afirmam que retas paralelas não vão se cruzar.	o pensar e escrever dos alunos.
<p>Item (b):  <i>Após leitura, houve um burburinho e comentários... “eu li isso em algum lugar” (Os alunos se motivam em discutir o proposto)</i></p> <p>B.F: retas paralelas se cruzam no infinito!</p> <p>R.C: Podem dizer gente... Dirceu, diga primeiro você!</p> <p>D.J: retas paralelas se cruzam no infinito?</p> <p>Cony: O que você acha? <i>(mais falação...)</i></p> <p>A.O: Ele ta dizendo que retas paralelas se cruzam no infinito. Não tem como retas paralelas se encontrar...</p> <p>Pesq: Aqui, nós estamos provocando a seguinte idéia...e se por acaso o tal segmento for paralelo? O Ponto F que consideramos no item anterior...onde ele estaria?</p> <p>A.T: Ele não existiria! Pois retas paralelas não se encontram</p> <p>A.O: Concordo com a Andressa.</p> <p>Pesq: Alguém acredita que algo diferente acontece?</p> <p><i>(risos – todo mundo olha para o B.F)</i></p> <p>B.F: Eu acho que duas retas se tocam no infinito!</p> <p>Pesq: Bruninho, onde é o infinito</p> <p>B.F: Sei lá. (risos de todos)</p> <p>B.F: Eu li isso em algum lugar.</p> <p>Pesq: Gente, presta</p>		<p>A cultura euclidiana formada no sujeito deixa lastro em respostas seguras; a abertura a uma possibilidade projetiva, no entanto, se manifesta.</p> <p>O tema do infinito, entrando espontaneamente como desafio, permite reabrir o espírito de pesquisar e aprender nos alunos, fora do convencional.</p>

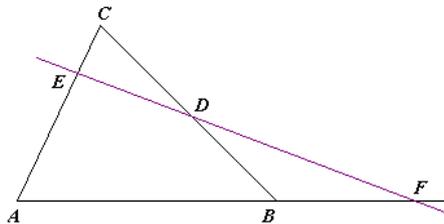
<p>atenção...a intenção não é dizer se você está errado...Depois podemos até conversar um pouco mais sobre... mas eu achei legal a discussão até então... Alguém tem uma terceira opinião? Então, virem a página.</p>		
---	--	--

### ATIVIDADE 3:

#### PREÂMBULO:

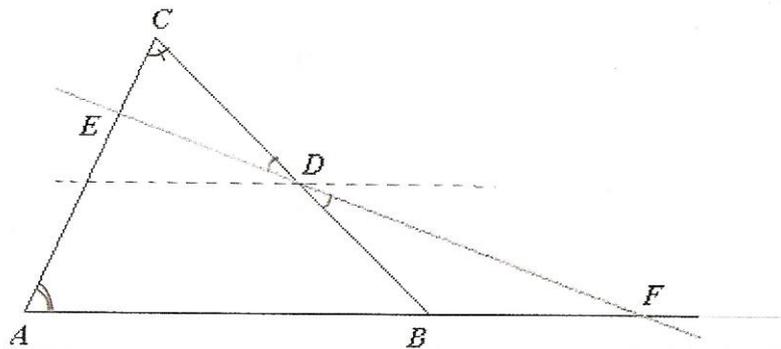
*O pesquisador lê a proposição da atividade e dá uma rodada de primeiras impressões. Busca qualquer informação além do compasso teórico e conceitual, puramente. Busca tranquilizar os alunos e, em seguida, sugerir a leitura da questão próxima.*

**Enunciado:** Dois triângulos são ditos semelhantes quando seus ângulos correspondentes são iguais. Assim, seus lados homólogos são proporcionais. A identificação da semelhança é tão importante quanto à resolução do exercício propriamente dito. Na figura abaixo, podemos identificar algum par de triângulos semelhantes?

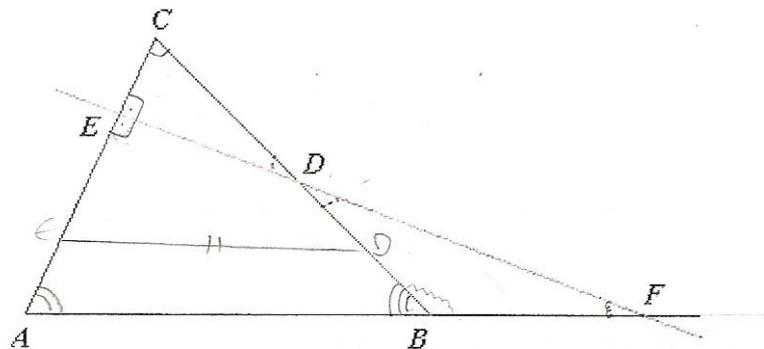


1ª coluna		
-----------	--	--

Sujeito (V)



Sujeito (VI)



2ª coluna: transcrições:

*Durante a leitura, muitos alunos se perguntando... dialogando sobre a questão... É feito a leitura*

3ª: DESCRIÇÃO DAS ações e RESPOSTAS

*Como um todo, os alunos trocam impressões e tentam interlocuções de apoio às suas ideias. Especulam propriedades geométricas afins com a busca de triângulos semelhantes; parecem desconcertados ao retrocederem.*

*Um aluno clama:*

*- depois você vai dizer a resposta, Calderano?*

*Uma aluna expõe uma situação esboçada, mostrando com as mãos o que percebia:*

Pesq: Pessoal, a resposta pode ser sim ou não. A.T,

Nas folhas individuais, a grande maioria responde “não” (não há triângulos semelhantes), mas,parecendo querer que houvesse em suas reações (e mesmo em algumas respostas por escrito).  
A aluna, efetivamente, transforma os dados para que o paralelismo ocorresse.

4ª: interpretações

O querer cultural sobre a Geometria Escolar é o de poder usar os teoremas mais usuais, como o de Tales, e ele se vê revelado no desejo de que alguma situação de paralelismo estivesse ocorrendo na figura.

<p>você acha que não?</p> <p>A.T: Não, claro que não!</p> <p>Pesq: Mais alguém acha que não tem?</p> <p>(uns acham que tem, outros não, especulam propriedades que seriam evidentes na figura.)</p> <p>Pesq: Campolina, o que você acha?</p> <p>(dúvida complexa – que justificariam a semelhança)</p> <p>A.C: Acho que não</p> <p>J.O: Depois você vai dizer a resposta, Calderano?</p> <p>Pesq: Vou. Na verdade, a intenção não é ter um gabaritinho dessa atividade pendurado na parede... mas a gente pode discutir sobre isso depois, claro!</p> <p>E.C: Calderano, os triângulos CAB e CED para serem semelhantes, teriam de ser paralelos aos segmentos ED e AF.</p> <p>Pesq: Bom comentário da Duda, pessoal!</p>		
---	--	--

#### ATIVIDADE 4:

##### PREÂMBULO:

*Tendo os alunos mais a vontade, despertos e já acólitos ao tratamento das atividades propostas, o pesquisador percebe que tal atividade é crucial para uma análise mais segura sobre a intervenção da intuição frente ao conceito de infinito, de proporção e etc. A investida epistemológica aqui é dar ênfase à ligação entre Menelau e Tales, cerne desta pesquisa.*

**Enunciado: No desenho anterior, se ED//AB, seria válido escrever que  $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB}$  ou  $CE \cdot DB = CD \cdot EA$  (Teorema de Tales). Neste caso, o que aconteceria com as medidas dos segmentos AF e BF?**

1ª coluna		
-----------	--	--

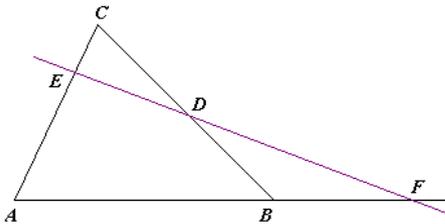
<p>Algumas respostas relevantes:</p> <p><b>“Seriam proporcionais “(B.F)</b></p> <p><b>“ Se as retas fossem paralelas, o ponto F não existiria, visto que a reta paralela a AB não se encontraria nessa. Portanto, as retas AF e BF não existiriam.” (L.R)</b></p> <p><b>“ Se ED//AB, o ponto F não existirá. Logo a medida BF desapareceria e o segmento AF reduzir-se-ia a AB” (L.A)</b></p>		
<p>2ª coluna: transcrições:</p> <p><i>Depois da leitura silenciosa, os alunos comentam a questão em grupos de três – todos participam e discutem.</i></p>	<p>3ª: DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS</p>	<p>4ª: interpretações</p>
<p><i>Alguns alunos seguram a folha em pé e deslizam o lápis, segundo a reta desenhada imaginariamente para fora da folha. Todos empenham seus corpos para buscar significados.</i></p> <p>L.C: e se inclinar apenas 0,5º? O ponto F estaria muito longe.</p> <p>B.F: Mas, aí você vai criar um ponto... além do que está desenhado.</p> <p>G.B: Eu acho que o ponto F é o ponto de encontro...</p> <p>L.B: mas como é ponto de encontro, se ele não existe?</p>	<p>Nos escritos, a maioria argumenta, tentando ser seguros, pelo obstáculo euclidiano a uma situação projetiva; um aluno, no entanto, traz o infinito como possibilidade de ser medidas comparáveis. As argumentações estão livres e focadas. Recriar a situação parece ser o motor dos vislumbres. Movimentos empíricos são feitos para trazer intuições promissoras. A discussão sobre o infinito é reposta, usada como critério do que se pode e do que não se pode pensar e fazer.</p>	<p>A atividade instaura um campo didático de explorações, envolvendo o corpo e conhecimentos. Vários caminhos de solução ao solicitado vão sendo ocupados. Poder ou não alterar a figura também é um saber geométrico. Possibilidade se transformam em métodos, às vezes se agarrando em objetos geométricos já estruturados, às vezes se lançando a novas possibilidades.</p>
<p>L.A: Calderano, voltando na questão 3... a da semelhança...E se eu construir alturas...pra</p>	<p>Este aluno busca outro enfrentamento, voltando em outra situação já discutida. Não quer</p>	

<p>gerar semelhanças?</p> <p>Pesq: Vocês ouviram o que o Lucas perguntou? Embora a ideia não era de deformar a figura, mas....sim, pode aparecer semelhança sim! Aliás, este é um bom exercício...a gente trabalhar com essas construções.</p>	<p>filosofar; quer arrumar uma saída construtível, segundo seus conhecimentos conceituais e de método.</p>	
--	--	--

### ATIVIDADE 5:

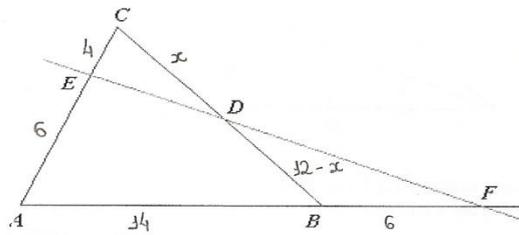
#### PREÂMBULO:

*É chegado o momento da apresentação do Teorema de Menelau a partir desta atividade. O clima de curiosidade é percebido, mas não alarmante quando se é mencionado sobre o próximo exercício. Todos os alunos já se mostram cúmplices ao projeto mediado pelo pesquisador. Logo, explana-se a ideia de uma novidade, que pode agradar.*



**Enunciado: Usando o Teorema de Menelau, calcule o tamanho de CD, sabendo que  $CB = 12$ ,  $CA = 10$ ,  $AB = 14$ ,  $BF = 6$  e  $EC = 4$**

1ª coluna		
Exemplo (I)		



Usando o Teorema de Menelau, calcule o tamanho de CD, sabendo que  $CB = 12\text{cm}$ ,  $CA = 10\text{cm}$ ,  $AB = 14\text{cm}$ ,  $BF = 6\text{cm}$  e  $EC = 4\text{cm}$

$$\begin{array}{r} 80 \\ +160 \\ \hline 240 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$x \cdot 6 \cdot 6 = (12 - x) \cdot 20 \cdot 4$$

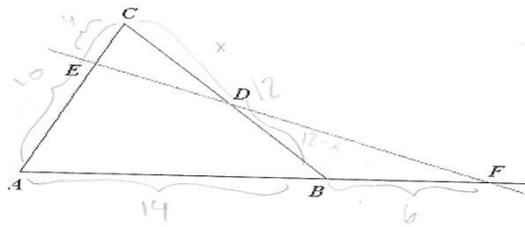
$$36x = 960 - 80x$$

$$116x = 960$$

$$x \approx 8,27$$

$$\begin{array}{r} 15:146 \\ 960 \\ 0320 \\ 0880 \\ \hline 960 \end{array}$$

### Exemplo (II)



Usando o Teorema de Menelau, calcule o tamanho de CD, sabendo que  $CB = 12\text{cm}$ ,  $CA = 10\text{cm}$ ,  $AB = 14\text{cm}$ ,  $BF = 6\text{cm}$  e  $EC = 4\text{cm}$

$$(12-x) \cdot 4 \cdot 10 = x \cdot 6 \cdot 6$$

$$(12-x) \cdot 40 = 36x$$

$$960 - 80x = 36x$$

$$960 = 36x + 80x$$

$$960 = 116x$$

$$x = \frac{960}{116}$$

$$\frac{36}{116} = \frac{9}{29}$$

$$\frac{960}{116} = \frac{240}{29} = 8,27$$

2ª coluna: transcrições:

3ª: DESCRIÇÃO DAS ações e RESPOSTAS

4ª: interpretações

(novamente, os grupinhos de três)

L.A: É só substituir.

O aluno logo percebe que é uma atividade mais simples; de aplicação direta.

O aluno não se incomoda em observar que a Geometria Escolar tem o lado operacional,

	Os registros escritos mostram que a maioria apresentou contas oriundas da aplicação do teorema; mas, há esboços de chaveamento de segmentos adjacentes, numa prática comum quando se trabalha com homologia em situação de paralelismo.	que um teorema é um modo de agir diretamente.
Pesq: Todo mundo entendeu o enunciado? Diz pra mim, quantos aqui não ouviu falar do Teorema de Menelau?	O pesquisador aproveita para fazer uma enquete	O resultado da enquete mostra que certos teoremas não habitam o cotidiano da Geometria ensinada
<p>Pesq: Vocês repararam que o desenho da atividade 5 é o mesmo da atividade 3?</p> <p>Pesq: Notaram que o objetivo é apenas apresentar e usar o Teorema de Menelau? <i>Os alunos reagem favoravelmente à pergunta, tentando entender o que o pesquisador quer relacionar, mas, mostram que não compreenderam plenamente essa ação.</i></p> <p>Pesq: Alguém pode me dizer o quanto achou...</p> <p><i>Os alunos respondem corretamente pela resposta numérica esperada</i></p>	O pesquisador chama os alunos para comungarem de seu objetivo implícito, que é o de passar do euclidiano usual para um novo campo de exploração geométrica. O resultado numérico conseguido expressa um modo de adesão de todos.	Os alunos têm um início de sinal de que a falta de semelhanças (tal como visto na atividade 3), tem também tratamento na Geometria.

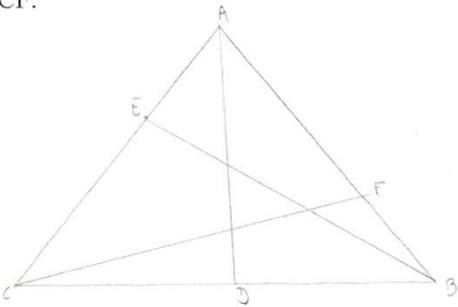
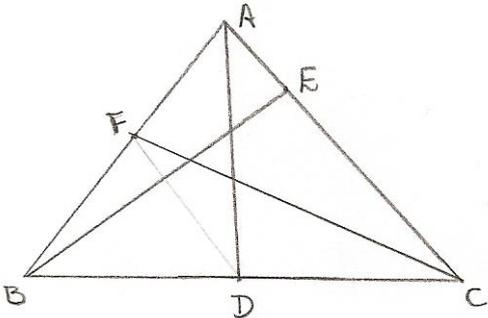
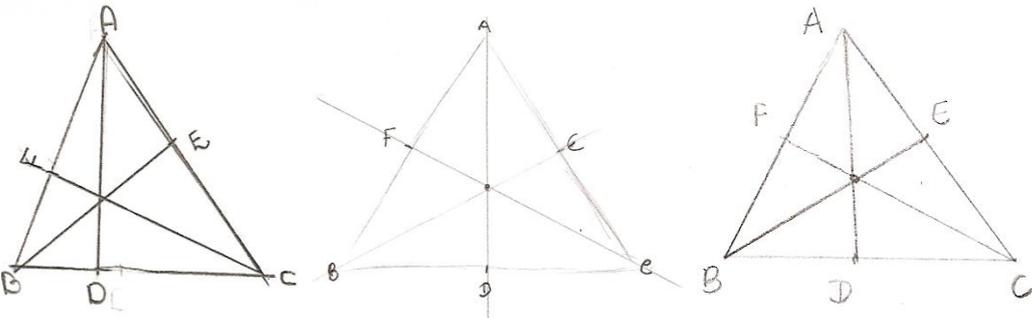
## ATIVIDADE 6:

### PREÂMBULO:

*O mesmo acontece na abertura dessa questão. Os alunos, já munidos por uma nova ferramenta recém aprendida (mesmo não demonstrada), viveram a*

oportunidade de desenvolver um exercício utilizando uma ferramenta nova, mesmo não tendo a noção da veracidade do resultado proposto por Tales, como justificativa para Menelau. Estavam, no entanto, contentes por terem encontrados, a maioria, o resultado esperado. Com Ceva, além da apresentação direta do exercício e a proposta de seu uso como alavanca de resolução, na letra (a) desta atividade, busca-se, o caminho da aleatoriedade e reflexão acerca do estudo das cevianas de um triângulo.

**Enunciado:** Construa um triângulo ABC qualquer. Agora escolha um ponto D em BC, um ponto E em AC e outro ponto F em AB. Com o auxílio de uma régua, construa as cevianas AD, BE e CF. Você usou alguma técnica especial para traçar os segmentos AD, BE e CF? Olhando para a sua construção acima, você considera possível tais segmentos se cruzarem em apenas um ponto?

1ª coluna		
<p>a)</p> <p>Cr.</p>  <p>Sujeito (II)</p>  <p>Sujeito (V)</p> <p>Outros Exemplos</p>  <p>b) Não, apenas escolhi pontos aleatórios. Sim, é possível (L.A)</p>		
2ª coluna: transcrições:	3ª: DESCRIÇÃO DAS ações e RESPOSTAS	4ª: interpretações
Os alunos não têm dificuldades em entender o solicitado e	O pesquisador tem uma intenção, a de questionar uma	Mais uma vez o escopo cultural da Geometria Escolar estipula modos

<p><i>partem para a ação:</i> J.O: prof, usar compasso e régua é uma técnica?</p> <p>O pesquisador enfatiza o que quer dos alunos:</p> <p>Pesq: Pessoal, preste atenção... No item (I) eu não pedi para que vocês traçassem simplesmente 3 cevianas. Eu pedi para que você escolhesse um ponto num lado, depois outro ponto no outro lado e outro ponto no outro lado...aleatoriamente.</p> <p>Pesq. Mesmo aleatoriamente, você acredita ser possível que as três cevianas se cruzem em apenas um ponto?</p> <p>Todos dizem sim</p> <p>C.O: só em um ponto?</p>	<p>concorrência possível, mas, os alunos já partem de que é possível.</p> <p>Modos de fazer, que são modos de pensar, se entrecruzam, entre o material instrumental e os conceitos.</p>	<p>de procedimento: se os alunos sabem que 3 cevianas podem se cortar num único ponto, para quê não desenhar isto?</p>
<p><i>J.O (também respondendo ao pesquisador): como resolução ... ou só no desenho, assim ... (roda suas mãos no ar, interrogativamente) ... criando modos de resolver?</i></p>	<p>O aluno parece perceber que o pesquisador quer ir mais além com o proposto. Parece querer habitar o campo da dinâmica de formas, como que a replicar: se quer saber se sempre se cortam num único ponto?</p>	<p>Buscar a geometria dinâmica é um modo de pesquisar sobre, e novos objetos geométricos.</p>
<p><i>O pesquisador apresenta simplesmente um modo de ver o teorema de CEVA. Faz uma enquete sobre quem já o conhecia.</i></p> <p>Pesq: Vou fazer a mesma pergunta que eu fiz sobre o Menelau...</p>	<p>O pesquisador opta por um meio de trazer uma nova ideia. Sua enquete é também uma maneira de dizer: é algo novo.</p>	<p>A Geometria Escolar usual não lida com situações mais aplicadas, como CEVA.</p>

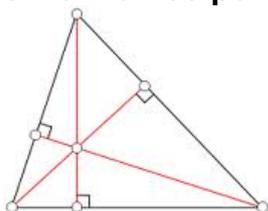
<p>alguém já tinha ouvido falar? Quem não conhecia o Teorema de Ceva levanta a mão.</p> <p><i>A maioria levanta a mão. Ninguém afirma que sim.</i></p>		
<p><i>Em um breve tempo os alunos resolvem a solicitação.</i></p> <p>Pesq: Novamente, estou apenas apresentando o Teorema de Ceva, embora ele facilmente pode ser demonstrado usando Menelau.</p> <p>L.L: Calderano, eu resolvi sem usar CEVA.</p> <p>Pesq: Opa, isso é interessante. Quanto você encontrou?</p> <p>L.L: 3.</p> <p>Pesq: mais alguém achou 3 com ou sem Ceva?</p> <p>...</p> <p>Pesq: Larinha, você quer nos dizer como fez?</p> <p>L.L: eu apenas percebi que o triângulo grande era equilátero (...segue murmúrios...), isósceles. Alguns concordam, outros não.</p> <p>Pesq: Bem, todo mundo que usou ou não o Ceva achou 3, ok!? Excelente!</p>	<p>Os dados terem algumas medidas iguais turva um pouco o pretendido pelo pesquisador, já que uma aluna usa de uma percebida particularidade para partir por um caminho longe do planejado.</p>	<p>Percebe-se, em geral, que o teorema tem uma força em incidir sobre a situação geométrica posta. Mas, uma oportunidade lança uma aluna nos caminhos mais usuais de se agir em Geometria.</p>

### ATIVIDADE 7:

**PREÂMBULO:**

Ao se aproximar do fim desta abordagem de campo, a questão 7 é o sinal de que o novo, proposto no decorrer das atividades desta pesquisa, pode ser enxergado no entorno do que se estuda atualmente nas salas de Geometria triangular. Os alunos, mais confiantes e interessados no “desvelar” de alguns pontuais resultados, tal como a concorrência das três alturas e a existência do ortocentro, mostram-se mais íntimos destes bastidores triangulares, tendo como aliado o Teorema de Ceva, como início de uma discussão de intervenção.

**Enunciado:** na figura abaixo, tem-se um triângulo acutângulo (todos os ângulos internos agudos) com suas alturas traçadas. Note que essas alturas se cruzam em um único ponto chamado **ORTOCENTRO**.



- Justifique com suas palavras o porquê das alturas se cruzarem em apenas um ponto.
- Qual seria o método geométrico adequado para provarmos que as alturas de um triângulo se cruzam em apenas um ponto? Como fazer?
- Você conhece outras cevianas no triângulo que também se cruzam em apenas um ponto? Quais? Quais as características de cada uma delas?

1ª coluna

Algumas respostas relevantes:

“ Reafirma Ceva que através de Menelau e Tales é comprovada. Por isso se cruzam” (letra a – L.A)

“ Poderíamos usar semelhança de triângulos, montando um sistema com as igualdades encontradas e depois manipulando até chegarmos em ceva, provando assim o cruzamento. (letra b – L.A)

“ Sim, sendo que as mais notáveis são mediana, bissetrizes e a já citada altura. A mediana sai de um vértice qualquer e toca o ponto médio do lado oposto, sendo que o encontro gera o baricentro e a razão do cruzamento é  $2/3$  – baricentro (centro de gravidade) e a bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais (letra c – L.A)

2ª coluna: transcrições

3ª: DESCRIÇÃO DAS ações e RESPOSTAS

4ª: interpretações

C.O: posso dizer que aprendi construir as coisas nas aulas de desenho geométrico?

Com gestos e argumentações sobre a folha da atividade, a possibilidade de uma construção gráfica, no

Apesar de o pesquisador querer guiar os alunos por um caminho mais dirigido ao uso do teorema, os alunos mostram que a pesquisa em

<p>Pesq: Camilinha, você quer dar uma justificativa via construção geométrica. É isso?</p> <p>(Vários alunos levantam a possibilidade de o desenho vir a ser um modo de pesquisa.)</p>	<p>rigor disciplinar do desenho geométrico é posto como um caminho de se pensar a Geometria.</p>	<p>geometria permite outras possibilidades.</p>
<p>L.A: Ceva está obvio aí, não é?!</p> <p>Pesq: Lembremos: O teorema de Ceva, que vimos na questão anterior, é válido para quando as cevianas (que não precisam ser alturas) se cruzam em apenas um ponto. Vocês acham razoável dizer que o cruzamento das alturas tem a ver com Ceva?</p> <p>(Todos dizem que sim!)</p> <p>Pesq: Repare que este “sim” ou “não” poderão ser utilizados para outras justificativas depois.</p>	<p>O aluno encarna o espírito de diretividade proposta e sacramenta o que a maioria viria a registrar no material escrito.</p>	<p>Aparece a força de um objeto geométrico quando ele é instrumental.</p>
<p><i>O pesquisador segue, aproveitando a compreensão de todos para a potencialidade do teorema de Ceva, fazendo comentários:</i></p> <p>Pesq: O que podemos neste caso fazer é usar do que conhecemos para colocar em Ceva e comprovarmos.</p> <p>L.A: Mecanismos como Menelau, semelhança?</p>	<p>Um aluno dá vazão à explanação do pesquisador, percebendo que um novo objeto geométrico dialoga com outros já conhecidos.</p>	<p>A incorporação de novos conhecimentos tem um ritual de falas, especialmente as que vêm da autoridade do professor.</p>

<p><i>O pesquisador faz um discurso sobre a reciprocidade, tanto como um modo de se fazer matemática quanto a que se dirige potencialmente ao que acabam de conhecer. Os alunos acompanham as falas, ainda sem entender bem as intenções do pesquisador.</i></p>	<p>O pesquisador explana o que seria um novo assunto, e que não está descrito na atividade. Os alunos aceitam, mas aguardam consequências.</p>	<p>Há um ritual na pedagogia da Matemática que pede que os assuntos sejam expostos explicitamente, como numa aula usual. Comentários como corolários deveriam ter esse modo também.</p>
<p>O pesquisador leva todos a pensar na letra B da atividade 7.</p> <p>Pesq:: Então, como podemos provar que as alturas se cruzam?</p> <p>L.A: com semelhança, podemos provar Ceva.</p> <p>L.L: por desenho geométrico...</p> <p>Pesq: Vocês conseguem enxergar semelhança aí?</p> <p>(Todos dizem sim)</p>	<p>O aluno, continuando no vislumbre que Ceva prova a concorrência, entende que uma tarefa seria provar o teorema de Ceva. A aluna mantém-se na possibilidade do desenho geométrico, o que o pesquisador deixa sem consequência.</p>	<p>A semelhança sugerida pelos triângulos retângulos é forte em trazer a bagagem cultural geométrica dos alunos, quando o pesquisador intencionava que se fosse direto por CEVA.</p>
<p>Letra c:</p> <p><i>Todos falam sobre Bissetrizes e Medianas... Alguns ainda confundem mediana com mediatriz..</i></p> <p>(Os alunos se movem para falar o que sabem sobre cevianas e suas relações...)</p> <p>L.L: A bissetriz divide o ângulo ao meio e a mediana chega no ponto médio do lado oposto.</p> <p>L.A: Também tem os nomes dos pontos dos cruzamentos...baricentro, incentro...</p>	<p>Os alunos pontuam conceitos e relações acerca das principais cevianas, pontos notáveis, etc.</p>	<p>A espontaneidade é percebida e maximizada dentre as falas previstas nesta pesquisa de campo. Torna-se mais próximo o enlace entre o que já existe há tempos (cevianas) com o que se propõe (Ceva).</p>

L.A: E as medianas se encontram na razão 1/3.		
<p><i>Finalmente, houve uma conversa entre o pesquisador e os alunos envolvidos. Muitos contribuíram com comentários pertinentes:</i></p> <p>Pesq: Pessoal, alguém quer falar algo sobre as atividades? Acharam chato, etc?</p> <p>L.A: Percebi que com pouca informação, dá pra gente fazer muita coisa.</p> <p>C.O: Eu concordo! Mal conhecemos os Teoremas, dá pra fazer bastante coisa!</p>	É destacado a simplicidade das novidades e a sua eficácia.	Os Teoremas de Menelau e Ceva, dentre outras funções, servem como atalhos, que abrem caminhos mais curtos e ligeiros quando se defronta com problemas específicos. A amplitude dada por estes Teoremas, geralmente pode ser empreendida com pouca investida conceitual e de tempo.

As ideias que interpretamos a partir das falas e escritas dos sujeitos pontuam que as atividades propostas projetaram uma tensão entre o euclidianismo culturalmente posto na Geometria Escolar e uma abertura de os alunos quererem subverter suas bases. Cruzar ou não cruzar as paralelas no plano foi um dos mais interessantes debates.

Percebemos isto que chamamos de espírito euclidiano não só no apego a situações, objetos e propriedades do escopo da tradição de Euclides, como no modo com o qual os alunos se mostram metodologicamente com elas, em suas tarefas de Geometria. É marcante os sujeitos buscarem uma paralela onde isto não era exatamente solicitado. As particularizações angulares e lineares, como vimos no trabalho com cevianas, também é uma marca desse apego.

Quando a pesquisa objetivou quebrar esse apego euclidiano, os sujeitos logo percebem que seus conhecimentos atuais não são bastantes para compreender questões que se abrem, especialmente a catalisadora questão acerca do infinito. Nesse momento, retornam ao mundo da criatividade

investigativa, manifestando bases intuitivas que não toda hora se permitem em seus estudos. Eles se dão ao incômodo, deixam se estranhar com colegas, ideias e eles mesmos. Uma semente de pensamento projetivo emerge como possibilidade de se pensar geometricamente, buscando ser mais amplo que o que eles guardam do euclidiano.

A Geometria Euclidiana Escolar é a zona de conforto dos estudantes da Geometria, e o Teorema de Tales é o seu porto seguro. Vimos a tendência aberta de que, a qualquer estranhamento frente a tormentas de ideias, é buscada a segurança desse porto.

Alunos que vieram de várias escolas de sua comunidade, os sujeitos foram unânimes em responder a enquete feita pelo pesquisador: Teoremas como os de Menelau e Ceva não habitam seu cotidiano escolar.

Mas, o espírito de descoberta se levanta mais forte que qualquer acomodação e as tarefas para novos olhares vão tomando lugar até mesmo nas atitudes corporais, as mãos deslizam pelas folhas das atividades e o espaço da folha não é mais respeitado em suas margens, pois, se o paralelismo é um infinito que esvai, a concorrência projetiva carece de ser atualizada. Nessas tarefas, os sujeitos até subvertem o pesquisador, querem mudar as figuras e o estático que caracteriza o euclidiano mais tachado ganha uma dinâmica. Assim, percebemos que novos objetos, novas ideias, requerem novos métodos.

Quando as atividades premiam introduzir os novos teoremas de forma direta e aplicada, os sujeitos compreendem que essas novas direções geométricas também têm seu ferramental. A pragmática dos alunos os faz perceber a operacionalidade de Menelau e Ceva, nas situações aplicadas. É uma questão de tempo – o tempo que o aluno gasta, se dedicando a uma solução – e é uma questão de funcionalidade, eles dando conta, como operadores em novas tarefas geométricas.

Mas, também se interpreta que, além do aspecto ferramental, os alunos vão percebendo que os novos teoremas são passaportes para novos ambientes geométricos, permitindo a eles irem além – no sentido do que já conhecem - das semelhanças e paralelismos. Os novos conhecimentos, percebidos como ideia manifestada, não vão se encaixando numa linha

conceitual, pois, com eles, revisita-se conhecimentos já constituídos, formando um novo todo.

### **4.3) Pesquisa de Campo II**

Decidimos que uma nova pesquisa poderia ser feita e sustentada por uma nova direção: que a proposição dos teoremas fosse levada ancorada em discussões quanto aos seus fundamentos. Agora, procuramos conversar e apresentar a nossa proposta para alunos do Ensino Médio em geral, pertencentes a um grupo de estudo acostumado a atividades de investigação, sediado na mesma escola da pesquisa anterior. Era possível que alguns desses novos alunos já conhecessem os Teoremas de Menelau e Ceva e suas aplicações. A intenção, porém, é fazer com que tais teoremas possam ser enxergados pelos sujeitos da pesquisa como uma importante ferramenta na resolução dos problemas propostos, deixando-se confirmar a abertura a partir de Tales e de seus pilares.

Os sujeitos eram alunos que gostam e esperam da Matemática bem mais que conceitos prontos. Eles gostam de discutir, demonstrar verdades e sustentar as possibilidades da pesquisa em Matemática.

#### **4.3.1) As atividades da Pesquisa II**

Propomos levar situações geométricas a serem investigadas, algumas em situações bem familiares aos alunos. Informaremos e apresentaremos o viés de Menelau e Ceva como coroamento de descobertas esperadas, por parte dos alunos, que serão levados a investigar, a resolver problemas. A partir disso, se dialogará com os alunos envolvidos sobre a consideração da validade de tais informações, bem como sobre o modo com que elas apareceram e fizeram sentido para eles.

Procuramos buscar problemas que incitassem a discussão e o caminhar para o confronto de outras ideias de resolução. Os cinco problemas, inicialmente, foram divididos não com a proposta de nível de dificuldade, mas de abrangência e confluência com que desejamos que eles

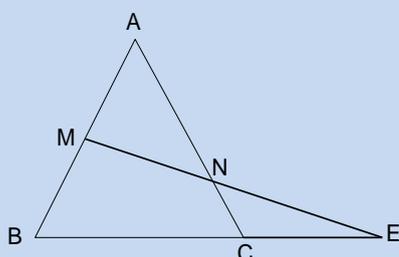
percebam. Haverá problemas em que a novidade que queremos propor será requerida. A provisória sensação de dificuldade com alguns problemas poderá ser substituída pelo esclarecimento dos novos teoremas.

Tais atividades são propostas numa sequência que apresentará e moverá os conceitos envolvidos nos teoremas a partir do de Menelau. Entendemos que o aluno de Ensino Médio, em geral, possui conhecimentos para desenvolvê-los independente de saber lidar com esses teoremas, e, inicialmente, tenderia a assim proceder. No entanto, a proposta é exatamente partir dessas situações, que são, portanto, familiares, e ir colocando os instrumentos de solução que vão aparecer com o pensamento de Menelau, tendo como premissa o aparecimento de situações de *colinearidade* e *concorrência*.

As atividades escritas e entregues em forma de caderno aos alunos-sujeitos são apresentadas a seguir. Cada aluno recebeu a sua, mas com a liberdade de compor respostas mediante argumentações trocadas com colegas.

ICE – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

- 01) Dado um triângulo equilátero ABC. Tome o segmento ME, em que M é o ponto médio de AB e E se dá no prolongamento do lado BC, de modo que  $BC = CE$ . Se o ponto de cruzamento entre ME e AC é N, calcule o valor de  $\frac{AN}{NC}$ .



- 02) Desenhe um triângulo ABC cujos lados medem  $AC = 7$ ,  $AB = 5$  e  $BC = 8$ . Tome o ponto D, médio de BC e tome o ponto E em AC, de modo que  $CE = 3$ . Considere o ponto de cruzamento das cevianas AD e BE como P e prolongue o segmento CP

até intersectar o lado AB no ponto F. Sendo assim, responda:

a) Qual o valor de  $\frac{AF}{FB}$  ?

b) Qual o tamanho de AF ?

03) Três cevianas de um triângulo se concorrem em um único ponto dividindo-o em seis triângulos menores cujas áreas são dadas por S1, S2, S3, S4, S5, S6 (no sentido horário). Sendo assim, provar que  $S1.S3.S5 = S2.S4.S6$

04) Um triângulo ABC possui seus lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ . Sabe-se que a altura AH, a bissetriz interna BD e a mediana CM se cruzam em um único ponto. Sendo assim, qual a relação entre a, b e c:

05) Demonstrar o Teorema de Tales a partir do Teorema de Menelau.

As expectativas que seguiam nossas intenções são pré-justificadas a seguir. Dada a abertura ao fenômeno que nos acompanhava em nossa intencionalidade, na verdade, torcíamos para que expectativas fossem sendo superadas pelos sujeitos envolvidos.

### Exercício 01)

O que se propunha aqui já é um exemplo de como essa duplicidade (Menelau/Semelhança) pode ser explicitada, deixando livre seu enfrentamento pelo aluno. Inicialmente, pode-se pensar em, após o aluno resolver do modo com que está mais preparado – certamente usando de recursos de semelhança de triângulos –, mostrar incisivamente a teoria relativa ao teorema de Menelau. Este teorema, assim apresentado, começa a mostrar suas potencialidades aglutinadoras de objetos e relações geométricos, ficando claro que um primeiro papel é dar agilidade ao trabalho sobre eles.

### Exercício 02)

A intenção aqui foi permitir ao aluno fazer uma leitura atenta do enunciado e construir adequadamente o triângulo com as suas medidas, prezando a geometrização do enunciado. Aqui, o aluno percebe que sem o Teorema de Ceva, o problema poderá se complicar, gerando operadores mais

extensos e penosos. A partir do conhecimento de Ceva, o conceito de agilidade e segurança acerca do problema aparece espontaneamente.

### **Exercício 03)**

Além de estimular mais uma vez o uso do Teorema de Ceva, por conta do aparecimento de cevianas concorrentes, explorou-se a importância e articulação do tema “áreas”, gerando prolongamentos conceituais e curriculares. O estudo de áreas, principalmente no que tange à proporcionalidade, vem ao encontro da nossa pesquisa em bases teóricas. Tal problema promove no aluno a ideia de entendimento da razão entre áreas de triângulos a partir da razão de segmentos (bases).

### **Exercício 04)**

Neste caso, a abrangência acerca das cevianas notáveis de um triângulo fala mais alto e motiva, mais uma vez, o aluno a fazer uso dos Teoremas apresentados (principalmente Ceva). É sabido que as alturas concorrem entre si. O mesmo acontece com as bissetrizes internas e com as medianas. Esperava-se possibilitar ao aluno recuperar ideias e conceitos particulares de cada uma das cevianas notáveis e usar Ceva como fechamento algébrico, já que o problema é visto como literal.

### **Exercício 05)**

A ideia nessa tarefa é basicamente colocar Menelau numa posição de importância e relevância de aplicação (para os alunos). O antigo e respeitado Teorema de Tales norteou as bases euclidianas de se pensar a geometria grega. É possível que o próprio Menelau tenha percebido a possível convergência de seu teorema para o de Tales. Além disso, como foi dito anteriormente, o aluno aprende a intuir e dar tratamento epistemológico ao paralelismo e ao infinito. Visa-se, portanto, não uma demonstração sem precedentes, mas uma co-relação de Menelau com Tales a partir de um construto intuitivo e lógico.

Após esse primeiro movimento, que resultou nas respostas dos sujeitos no caderno distribuído, e percebendo que estas não davam conta de toda a

discussão que as atividades geraram, resolvemos entregar um questionário sugerido aos alunos – com *fac-símili* abaixo –, propondo questões que, respondidas, poderiam estender o pensamento deles acerca do que tinham experienciado. O objetivo do questionário era deixar que o aluno envolvido neste processo se posicionasse frente ao que ele já sabe de Geometria e, principalmente, como ele utiliza seus conhecimentos na resolução dos problemas propostos. Os alunos levaram para casa e entregaram a mim em dois dias. Assim pudemos trabalhar em cima das falas significativas a nossa pesquisa.

 UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA			
<b>ICE – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA</b> <b>MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</b>			
Nome: _____			
Colégio: _____			
Série: _____	Data: _____	Local _____	
<b>Perguntas relacionadas à pesquisa:</b>			
<b>01) Você já conhecia os Teoremas de Menelau e Ceva? (Caso afirmativo, em qual realidade).</b>			
_____			
_____			
<b>02) Tais teoremas são ferramentas auxiliadoras na resolução de exercícios em Geometria. Em qual dos 5 exercícios você percebeu mais isso? Por quê?</b>			
_____			
_____			
<b>03) Qual a sua opinião acerca do Ensino de Geometria convencional? Dê ênfase ao que é geralmente ensinado e como ensinado.</b>			
_____			
_____			
<b>04) Os Teoremas de Menelau e Ceva são sustentados por dois conceitos importantes da Geometria Projetiva – uma geometria além da Euclidiana. Tais conceitos são a COLINEARIDADE e CONCORRÊNCIA. De acordo com o que você entende e espera da Geometria convencional, você acredita que a inserção de tais teoremas poderá surtir</b>			

mudanças positivas no aprendizado?

#### 4.3.2) O ambiente da Pesquisa II

Os alunos envolvidos na segunda pesquisa possuem um porte mais denso e seguro em relação à Matemática do Ensino Médio. Tais alunos fazem parte de um grupo de estudo e discussão na área da Matemática, com reuniões sistemáticas aos sábados.

A aplicação das atividades e o envolvimento dos alunos se deram com as atividades impressas sendo entregues para uma primeira leitura e possíveis discussões sobre cada um dos problemas. Foi falado dos moldes e rumos da nossa pesquisa e da importância da participação dos alunos-sujeitos, para a consolidação das nossas concepções e propostas.

Posteriormente, os alunos sugeriram resoluções sobre as cinco atividades, sem necessariamente conhecer os Teoremas de Menelau ou Ceva. Assim, foi se desenvolvendo a aula e, a partir dos pilares da semelhança de triângulos (presente no primeiro exercício), começou a emergir a sugestão em apresentar Menelau. A partir daí, sugeriu-se que os alunos fizessem a questão primeira novamente, com o olhar de Menelau e que fizessem considerações.

Em seguida, resolvemos a quinta atividade, com sugestões de alguns alunos (que não conheciam o Teorema de Menelau), dando margem à percepção de improriedade de um ponto e a importância da intuitividade acerca do conceito do infinito e de convergência.

Depois do quinto problema resolvido e discutido, foi apresentado o Teorema de Ceva como consequência de aplicação do Teorema de Menelau, demonstrado por meio deste<sup>5</sup>. Assim, os alunos enxergaram que a segunda questão podia ser resolvida com facilidade usando o teorema recém apresentado.

---

<sup>5</sup> Existem outras maneiras de demonstrar Ceva sem ser pela via de Menelau. Queríamos, no entanto, dar o entendimento que os dois teoremas estão amarrados conceitualmente.

No primeiro momento, com os alunos sentados tradicionalmente, entregou-se as folhas com as atividades; propôs-se uma primeira leitura individual e silenciosa. A intenção era justamente gerar a inquietação frente aos problemas propostos, deixando claro que os teoremas de Menelau e Ceva deveriam, aos poucos, se mostrarem na sequência de observações e comentários.

Depois de lidos, foi-se sugerindo e suscitando propostas de resolução via investigação. Embora estivesse diante da turma, tradicionalmente estabelecida e posicionada, na frente do quadro negro e com o giz nas mãos, o pesquisador não resolveu nenhum exercício prontamente sem antes ambientar este momento com um tom de pesquisa aberta, em que a troca de informações seria tão importante quanto a resolução propriamente ditas das tarefas.

Já no primeiro exercício, percebeu-se que a maioria dos alunos envolvidos havia rascunhado alguns rabiscos e fórmulas no papel reservado para a resolução das questões. Além disso, mantinham os olhos atentos a qualquer comentário mediador que o pesquisador fazia acerca de uma ou outra abordagem – principalmente quando se tratava de situações via semelhança de triângulos.

Nas tarefas últimas, em que o Teorema de Menelau é apresentado como alternativa de resolução percebe-se uma espécie de *clarão epistemológico* por parte dos alunos. O que ficou claro nos olhares ainda sedentos da maioria é que agora o exercício poderia ter uma solução mais rápida e limpa – aqui entendida como segura e legítima. É prudente mencionar que não houve, neste primeiro contato, uma abordagem muito densa sobre os conceitos de colinearidade, nos quais o Teorema de Menelau se sustenta.

#### **4.3.3) Quadros ideográficos da Pesquisa II**

Os sujeitos se manifestaram por meio de falas gravadas (áudio) e por escrito, o que se pode verificar nos anexos deste trabalho. Montamos, por conseguinte, um quadro ideográfico com a justificativa de melhor visualizarmos o processo de interação de pesquisador-sujeito, tais como suas falas e interpretações. As colunas deste quadro se articulam metodologicamente, de

modo a especificar os teores do que queremos alcançar com a pesquisa de campo.

Quando nos debruçamos sobre o material produzido, a saber, as atividades geométricas, a gravação audiovisual e o questionário, vimos que os dados escritos neste último continham toda a densidade significativa que satisfazia nosso interesse de pesquisa. Para a redução fenomenológica em busca das ideias manifestas, consideramos apenas os dados desse questionário, respondido escrito pelos alunos. Nossa interpretação, no entanto, foi balizada pela experiência que tivemos ao estar presentes na gravação e na prática das atividades propostas.

Nos quadros, primeira coluna é construída pelas falas transcritas – originalmente – dos alunos-sujeitos envolvidos. Na segunda coluna, pomos-nos a interpretar as falas dos sujeitos, justificando-as como pressupostos de algumas intersecções conceituais a fim de gerar categorias específicas, presente na terceira coluna.

**Esquema ideográfico de apresentação das reduções fenomenológicas realizadas pelo pesquisador para a chamada Pesquisa II:**

<b>Falas significativas</b>	<b>Interpretações</b>	<b>Ideias articuladas</b>
Coluna que traz as falas dos sujeitos consideradas significativas para o foco da questão e o pensar do pesquisador. É apontada qual questão gera o conjunto de falas.	Coluna que apresenta uma leitura direta que pesquisador faz dos dados brutos, fazendo uma descrição das falas, e o apontamento das ideias que trazem, tal como elas se mostraram a ele, que se fez presente na produção original delas.	Coluna que traz uma segunda interpretação do pesquisador, atento ao momento fenomênico da produção original dos dados, mas já atento à sua comunidade acadêmica, enfatizando as ideias oferecidas pelos sujeitos, dando ênfase a elas em atinência à questão que é a da pesquisa.

A questão 1 não gerou falas significativas, pois se tratou de uma enquete, simplesmente. Dispensamos, então, aqui, de lhe fazer um quadro ideográfico.

## Questão 2

Falas significativas	Interpretações	Ideias articuladas
<p>Sujeito (1): No caso de um concurso, onde o tempo deve ser bem aproveitado, os teoremas fariam com que os candidatos resolvessem as perguntas formuladas mais rapidamente.</p> <p>Sujeito (2): Nos exercícios 3, 4 e 5 isso é muito mais notado, pelo fato de os teoremas serem a saída mais viável nas suas resoluções.</p> <p>Sujeito (3): Tais teoremas agilizam a resolução de exercícios em geometria propiciando a economia de tempo em questão de provas, além do fato de os mesmos acrescentarem conhecimentos ao estudante.</p> <p>Sujeito (4): No primeiro exercício temos um problema que pode ser resolvido normalmente, mas com muito mais eficiência utilizando o Teorema de Menelau. No número (3), é interessante a relação de áreas obtidas através do Teorema de Ceva.</p> <p>Sujeito (5): Apesar dos dois primeiros exercícios poderem ser feitos sem os teoremas de Menelau e Ceva, o uso destes permite uma resolução bem mais simplificada. (...) o (3), (4) e (5) só podem ser resolvidos por Menelau e Ceva.</p> <p>Sujeito (6): (...) no exercício (2), sem o conhecimento de tais teoremas, o uso de semelhança torna-se mais difícil e trabalhoso.</p>	<p>As falas trazem a ideia de que os teoremas sublinhados em nossa pesquisa têm o caráter de ferramentas e apoiadores na resolução de problemas diversos.</p> <p>Manifesta-se a preocupação do estudante frente ao processo avaliativo de vestibulares e concursos.</p> <p>A economia de tempo, ideia manifesta em algumas respostas dos sujeitos, alia uma maior praticidade na resolução dos problemas, com a uma abertura inovadora e conceitual, de conhecimento</p> <p>algumas questões apresentaram a possibilidade de serem resolvidas por métodos tradicionais, mas, evidencia-se que o uso de Menelau e Ceva os deixaria mais simples e mais ligeiros. Em compensação, foi também evidenciado a ideia de exclusividade do uso de tais teoremas frente a um certo problema, tornando a solução plausível e</p>	<p>Há o vislumbre dos novos Teoremas, não só como simples atalhos.</p> <p>Questiona-se a superficialidade da Geometria escolar.</p> <p>Argumentação em relação ao problema da formação básica dos alunos em geral (quando o conteúdo programático se mostra insuficiente para a adesão de um alicerce conceitual).</p> <p>Abrir portas é uma possibilidade, frente ao ferramental básico que os teoremas propõem. Ir além dos moldes convencionais, implementando discussões e investigações fazem parte do estar-se pensando Geometria.</p>

<p>Sujeito (7): (...) sem tais teoremas, dificilmente eu conseguiria resolver este exercício.</p> <p>Sujeito (8): A facilidade que os teoremas nos proporcionam foi notável, visto que tentei fazer os exercícios antes e depois de aprendê-los.</p>	<p>simples somente com o uso e a interpretação de tais objetos de trabalho.</p>	
--	---	--

### Questão 3:

<b>Falas significativas</b>	<b>Interpretações</b>	<b>Ideias articuladas</b>
<p>Sujeito (1): A geometria é tratada pelos alunos superficialmente. Em geral, há uma preocupação maior somente em “guardar” as fórmulas e teoremas, sem querer entendê-los. Assim sendo, somente o básico tem sido o suficiente para o aprendizado, na visão dos alunos.</p> <p>Sujeito (2): Eu acho que o ensino de Geometria tem um bom conteúdo, mas muitas vezes insuficiente para algumas situações que não seriam demais ser aprendidas nos ensinos fundamental e médio. Também no ensino fundamental deveria ser dada uma base melhor, o que não acontece em todos os colégios.</p> <p>Sujeito (3): Há um esforço por parte dos educadores em mostrar ao aluno a origem de teorias e postulados, porém falta à grade curricular o conhecimento necessário para que o aluno esteja preparado para o ensino superior e com todas as ferramentas de auxílio na</p>	<p>Os sujeitos expressam uma leitura sobre como a geometria é abordada e difundida nas salas de aula.</p> <p>A insuficiência e não efetividade de alguns assuntos são vistos como elementos de entrave no processo de aprendizado em geometria.</p> <p>Teoremas apresentados e não demonstrados podem trazer à tona um conceito puro de “cópia” e “decoreba”, evitando o ambiente de descoberta, rigor e investigação.</p> <p>A noção de pré-requisito mostra que existe a preocupação de um preparo mais arrojado da Matemática enquanto disciplina curricular como instrumento de “base” para o ensino</p>	<p>A atividade permite emergir a ideia de eficiência em matemática. Junto, vem amplitude da geometria com seus conceitos e perspectivas, deixando claro a “finalidade” da geometria usual, especialmente como preparadora para vestibulares.</p> <p>Mais uma vez, a ideia de efeito simplificador, balizada pelo uso dos teoremas em questão.</p>

<p>área acadêmica, tais como os teoremas de Menelau e Ceva, neste caso, tomados como relevantes exemplos.</p> <p>Sujeito (4): Sabe-se que a Geometria é uma área muito ampla e uma pequena fração dela é ensinada nas escolas. Entretanto, a didática da geometria é suficiente para fornecer aos alunos uma boa base, sem que estes fiquem deficientes em conhecimento para vestibulares convencionais.</p> <p>Sujeito (5): O ensino da Geometria convencional apresenta algumas “lacunas” que futuramente levam à dúvidas e incompreensões. Muitas vezes o professor passa alguns teoremas aos alunos sem demonstra-los ou prova-los, impossibilitando uma melhor compreensão das ciências geométricas.</p> <p>Sujeito (6): Na minha opinião, é incompleto, pois muitas vezes é apresentada alguma fórmula e não é provada para os alunos. O simples ato do aluno gravar tal fórmula não o ajuda a pensar num problema qualquer, mas sim naqueles específicos apresentados em sala.</p> <p>Sujeito (7): O ensino da Geometria é fundamental na formação do aluno, uma vez que proporciona uma grande noção das formas que conhecemos e temos contato diariamente.</p> <p>Sujeito (8): Penso que o Ensino de Geometria é constante. As didáticas em geral, são poucas, limitadas a</p>	<p>médio e superior.</p> <p>As “lacunas” mencionadas na fala do sujeito 5 podem ser entendidas como a não utilização das articulações conceituais acerca da Geometria, principalmente quando se tem a ideia de um todo, não trabalhado pelo professor na sala de aula convencional.</p> <p>Manifesta-se a importância de se estudar geometria como oportunidade de se enxergar no mundo, interpretando geometricamente tudo que está ao redor.</p>	
---	--	--

desenhos no quadro e fórmulas prontas.		
--	--	--

**Questão 4:**

<b>Falas significativas</b>	<b>Interpretações</b>	<b>Ideias articuladas</b>
<p>Sujeito (1): Pelo que tenho visto ultimamente, para aqueles que não cultuam a matemática, supondo que a única mudança positiva para a inserção de tais teoremas na geometria convencional seria de melhor aproveitamento do tempo na solução de problemas que os envolvessem. Entretanto, para quem gosta e se dedica à matéria, acredito que os teoremas deveriam ser inseridos efetivamente, pelo fato de tratar os conceitos citados com maior abrangência.</p> <p>Sujeito (2): Com certeza a inserção dos teoremas de Menelau e Ceva trariam melhoras na aprendizagem, pois são ferramentas muito úteis e simples.</p> <p>Sujeito (3): Acredito que sim, pois podem trazer significados aos ensinamentos com cevianas cruzando-se em um único ponto em um triângulo e acredito que podem gerar novas fontes de pesquisa por parte do aluno no que tange não só a geometria convencional, mas também à geometria analítica.</p> <p>Sujeito (4): Qualquer inserção de conhecimento na Geometria convencional é positiva no aprendizado. Os teoremas de Menelau e Ceva nos levam a conclusões interessantes e podem ser úteis. Na minha opinião, mais ainda o Teorema de Ceva, pois o de Menelau é muito específico.</p> <p>Sujeito (5): Obviamente que sim. Com a inserção destes na Geometria haverá uma melhor compreensão do que exposto em matemática, ampliando a visão do aluno e consequentemente sua visão de mundo.</p> <p>Sujeito (6): Tais teoremas realmente facilitarão a resolução de vários problemas, como os que envolvem semelhança em triângulos, principalmente.</p> <p>Sujeito (7): Sim. Os teoremas de Menelau e Ceva são fortes</p>	<p>Manifesta-se a crença na efetividade da inserção dos teoremas de Menelau e Ceva no currículo básico de Geometria, agregando-se ao que já existe.</p> <p>Um duplo é posto na inserção dos teoremas: pra quem não gosta de geometria, a utilização dos novos teoremas seriam, apenas, instrumentação na resolução de problemas; enquanto para os alunos mais interessados na disciplina, seria vista a oportunidade de abertura conceitual e de maior abrangência.</p> <p>Mais uma vez, sobrevém a leitura de que Menelau e Ceva são ferramentas pautadas na simplicidade e agilidade.</p> <p>Os teoremas sugeridos para inserção podem gerar boas discussões em sala, gerando ambientes de descoberta e criticidade geométrica.</p>	<p>Há uma realidade: O aluno é moldado frente a um mosaico de fórmulas prontas, gerando um automatismo operacional, sem reflexões e interações.</p> <p>Colocam-se em discussão os outros olhares, mais tradicionais e menos específicos, com a questão da facilidade com o que se pode resolver um problema portando o Teorema de Menelau e Ceva,</p> <p>A fundamentação da geometria e suas aplicações em exercícios é uma questão emergente.</p> <p>Os novos teoremas vistos como boas ferramentas e como oportunidade e objetos de discussão em sala, uma discussão crítica e investigativa.</p> <p>Crítica aos moldes atuais, provavelmente</p>

<p>ferramentas na resolução de problemas geométricos, que conhecidos pelos alunos se tornam bons "atalhos" para resolver problemas em geometria.</p> <p>Sujeito (8): Penso que será muito bom termos novas ferramentas interessantes, como Menelau e Ceva. Elas podem ser úteis para vestibulares e para gerarem discussões nas salas de aula, debates mais críticos quanto à geometria.</p>		<p>os do automatismo de fórmulas de áreas e volumes.</p>
--	--	--

As atividades propostas nesta Pesquisa II permitiram aos alunos-sujeitos manifestarem seus conhecimentos geométricos, mas, também, produzirem argumentações mais gerais quanto à geometria na escola, posicionando nas questões suplementares a eles encaminhadas.

A abertura de um ambiente de investigações sobre novas possibilidades sugere que se reflita sobre a geometria escolar usual, vista como sendo tratada com superficialidade conceitual. O aluno acaba não concebendo a Geometria como um todo de sentido. O automatismo no uso de fórmulas, especialmente na chamada geometria métrica, é uma manifestação apontada dessa reflexão crítica.

É interessante notar que uma sessão com atividades propostas sobre objetos geométricos permite aos alunos argumentarem nas direções de currículo, metodologia e relações produtivas com o conhecimento. Os dois teoremas abordados são vistos como ferramentas operantes, mas, tal como manifestado na Pesquisa I, eles abrem portas para se discutir e ampliar a geometria escolar.

Os sujeitos revelaram que os teoremas propostos como intervenção, além de úteis, são simples. Esta fala vai ao encontro dos objetivos e justificativas do nosso trabalho frente aos teoremas de Menelau e Ceva. Estes são vistos como outra via de acesso ao conhecimento geométrico, não fechada às demais já existentes.

## **5) Análise Nomotética**

As ideias que interpretamos das falas e escritos dos sujeitos nas Pesquisa I e II nos ajudaram a estruturar nossa compreensão do como alunos do Ensino Médio experienciam uma intervenção curricular proposta com os teoremas de Menelau e de Ceva.

Com a intenção metodológica de mostrar essa estrutura no modo mais essencial – segundo a perspectiva e a inquietação pesquisadora –, aproximamos as diversas ideias em convergências que, nominadas, são possibilidades categóricas de desenhar essa estrutura, permitindo discursos analíticos argumentativos sobre ela.

Sujeitos de pesquisa em situação de ação livre, em estado fenomênico espontâneo, sempre surpreenderão com suas percepções manifestadas, de modo que, em nossa pesquisa, o que resultou de compreensão é mais amplo de que nossas expectativas projetavam. A seguir, mostramos essas convergências.

### **5.1) Sobre o Ensino de Geometria**

A inserção de novos objetos geométricos, que incidem sobre um campo conceitual já conhecido, permitiu que os alunos pesquisados pudessem expressar algumas colocações na direção da reflexão sobre o ensino da Geometria escolar, em apontamentos que vão além de simplesmente serem julgadores de qualidade.

A própria questão da introdução de novos teoremas abriu possibilidades de atitudes reflexionantes e críticas. Lembrando que o Teorema de Tales quase sempre é dado sem um completo escopo matemático puro – quando uma análise tem de vir para dar conta da medição de incomensuráveis –, o fato de o teorema de Menelau ser plenamente demonstrável com recursos geométricos (ainda que tributário do de Tales), parece acender uma chama de crítica sobre os momentos em que ao aluno não é facultado a oportunidade de tal rigor.

A ênfase que vemos nessa crítica aparece até mesmo em nossa proposta de ir a campo entre a Pesquisa I e a II: na primeira, por opção, os teoremas foram inseridos sem maiores discussões. Quando, na II, eles têm um tratamento mais cuidadoso, os sujeitos reconhecem esse diferencial.

Pelo menos dois alunos da Pesquisa II, mais diretamente, puseram em questão, positivamente, a via do ensino pela apresentação de teoremas. Percebemos ser interessante analisar isto porque concordamos que quando o aluno faz uma meta compreensão do seu aprendizado, tal como se conscientiza de como está aprendendo, ele já está num nível mais alto de aproximação com o conhecimento, com concretas possibilidades de o afetivo contribuir para uma aprendizagem mais significativa<sup>6</sup>.

Os alunos se dão a criticar, também, aspectos de uma metodologia didática, percebendo que o novo estudo desnuda lacunas até então não percebidas. Ver um modo novo de atuar na Geometria acaba requisitando que eles reflitam sobre todos os outros momentos em que propostas metodológicas poderiam ter sido pertinentes e não foram buscadas. Apesar de um aluno afirmar que “A didática da Geometria é suficiente para vestibulares”, a maioria deles clama por ocupações didáticas, querendo dizer, em nossa interpretação, tais como as do modo que ocorreram no trabalho com os teoremas de Menelau e Ceva. Mesmo a fala recortada acima parece-nos soar como uma ironia; relendo-a, ela estaria dizendo: as propostas usuais só dão conta de vestibulares.

## **5.2) Sobre a Geometria como Ciência**

Todas as vezes que um professor de Matemática convida seus alunos para uma discussão além dos próprios conteúdos, regra geral, surte um movimento de falas que tornam, ou tentam tornar, essa discussão dentro dos limites da familiaridade. Às vezes, nem é o professor que insinua uma direção, e os alunos a ocupam. Algumas falas dos alunos se mostram além do requerido, do entorno da discussão de dois teoremas, ficam além, são

---

<sup>6</sup> Significativa aqui querendo dizer de uma aprendizagem co-dialogada, autônoma, apropriada (tornada própria) e crítica.

extemporâneas em significados, ampliando o sentido que se abriu como horizonte de conversas possíveis.

Alguns alunos se empenharam em discutir valores científicos, sobremaneira conteúdos geométricos, alçando questionamentos para concepções acerca da própria Matemática como ciência do homem, como um horizonte de manifestação humana, enfim, numa discussão que observaríamos ser do campo da filosofia desta ciência. Um sujeito da pesquisa é preciso ao perceber que tratar assuntos “fora da curva”, como são os Teorema de Menelau e Ceva, muito mais do que se ampliar o arsenal de objetos matemáticos, traz novas compreensões sobre toda a Matemática, ampliando “a visão do aluno e, conseqüentemente, sua visão de mundo”.

Também se percebe uma abertura para se ampliar questões acerca da Matemática, vendo as propostas levadas na pesquisa como oportunidades de se ter “debates mais críticos quanto à Geometria”. Enxergar a Geometria mais abrangentemente – como quando se falou na extensão possível para a Geometria Analítica – ficou, nos dados da pesquisa, com um sentido maior do que estender a quantidade de objetos matemáticos.

### **5.3) Os Teoremas de Menelau e Ceva como ferramentas, como redimensões curriculares e metodológicas.**

O limiar de nossa pesquisa, além da abertura conceitual para o estudo dos triângulos e suas possibilidades à luz da projetividade, converge também para a instrumentação na resolução dos exercícios específicos, cuja implementação está no entorno de Menelau e Ceva.

Os alunos destacaram os teoremas mencionados como “atalhos” e “úteis” na resolução dos problemas propostos. Alguns são mais incisivos acerca da aplicação dos Teoremas enquanto agilidade e praticidade de resolução, dando ênfase à diferença em resolver com ou sem Menelau e Ceva, o que se dá, também, em situações de dificuldade e nebulosidade, resolvidas por Menelau e Ceva e, anteriormente, não conseguidas por outro método.

Embora para muitos dos alunos envolvidos na pesquisa os dois teoremas aqui sugestionados soem como ferramentas facilitadoras na resolução dos exercícios propostos, defendemos a ideia de uma apresentação bem mais abrangente que a levada na geometria triangular nos moldes curriculares convencionais, enxergando novas possibilidades de vislumbre desta nova geometria a partir da reflexão crítica dos conceitos de *colinearidade* e *concorrência*, ideias que foram manifestadas pelos sujeitos.

#### **5.4) Concorrências curriculares**

O nosso projeto inicial de pesquisa é afim com as necessidades de mudança de paradigmas acerca do ensino de Geometria no Brasil, conforme entendemos. Assim, dedicamos a nos preparar, apresentar e propor novidades acerca dos Teoremas de Menelau e Ceva como elementos de intervenção pedagógica e curricular. Entendemos que a simples inserção dos teoremas no currículo básico, é, em suma, insuficiente para um movimento bem maior no qual representa o pensamento de uma nova Geometria – a que vai além de Euclides. No entanto, percebemos com a nossa investida de pesquisa, que a apresentação de Menelau e Ceva, com suas demonstrações e confluências com o que já existe de euclidiano, geraria discussões interessantes e ricas, similares às que compilamos em nossa pesquisa de campo.

Associadamente ao que já existe, percebemos a possibilidade da visualização e inserção de Menelau logo depois da abertura do Teorema de Tales e, por consequência, as semelhanças de triângulos embutidas à luz da proporcionalidade de segmentos. Os sujeitos nos ajudaram a ver que Menelau poderá ser apresentado como mais um (e inovador) teorema contemplado na antiguidade grega. Já vimos que, uma vez entendidos os critérios de invariância geométrica, presentes na proporcionalidade dos lados de um par de triângulos semelhantes, é perfeitamente possível construirmos demais triângulos e chegarmos ao conceito da colinearidade de Menelau.

Por outro lado, o Teorema de Ceva, poderá ser vislumbrado no momento em que sempre deveria estar presente nas bases curriculares – no estudo das cevianas de um triângulo. Após a definição pura do que é ceviana

de um triângulo, poderá se discutir com os alunos as possibilidades de concorrência ou não dessas cevianas.

### **5.5) Régua e compasso**

Uma das características de uma pesquisa de fundo qualitativo, trabalhado com abertura ao fenômeno, sobre ações humanas, é surpreender o pesquisador no tocante a perspectivas inesperadas, oferecidas pelos sujeitos.

Independente dos teoremas apresentados, interpretamos aqui que, do modo com que foram levados e com as exigências naturais de os sujeitos investigarem, eles parecem recuperar o estado de atenção criativa em vários momentos das duas Pesquisas, recuperando o sentido intuitivo que emerge quando nos damos a um novo assunto e entendemos que devemos abdicar simplesmente de pressupostos já conhecidos.

Vimos seus corpos pensantes assumirem novas posturas, suas mãos deslizarem *não euclidianamente*. Também, neste momento, emergem a régua e o compasso, que os alunos solicitam usar, perguntam se podem usá-los. Treinados na ideia do rigor matemático da sala de aula, requerem a autoridade do professor-pesquisador para anuir na possibilidade das construções gráficas gerarem e provarem verdades geométricas.

Tínhamos previsto construções nas atividades, mas não que estas também sobressairiam com valores epistemológicos tão caros aos alunos, especialmente na Pesquisa I. Só quando foram tratados e interpretados os dados, é que esse viés se fez claro para nós. Passou a ser um sinal forte de que ambientes investigativos devem ser abertos, também, aos modos, às mídias, às linguagens, tanto quanto puderem estar disponíveis.

### **5.6) Sobre o infinito**

Dom Helder Câmara diz, poeticamente, que quer se encontrar no infinito. O infinito não é uma magia da Matemática. É um objeto de desejo intelectual, espiritual, cosmológico.

Não é esta a primeira pesquisa em que vemos alunos esvaindo-se ao infinito. Sempre que sua ideia está subjacente, ele emerge como tema, e é interessante como os alunos, mesmo crianças ou adolescente, crêem que a Matemática é um espaço para se dar conta de seu entendimento. O que se produziu nos ambientes de nossas Pesquisas não deu conta do infinito, mas, é uma satisfação de pesquisador ver que elas deram conta de ser ambientes saudáveis para se falar e pensar nele.

Temos, assim, mais um sinal. De que atividades propostas devem resguardar, em seus imprevistos, fugas ao olhar filosófico, já que se produz tão pouca Filosofia da Matemática em nossas escolas. Percebemos que o proposto cumpriu este papel, que é o de retornar essa disciplina Matemática, tão *árida* e distante, ao mundo vivencial. Interessante é ver essa distância ser encurtada por uma discussão abstrata. Também, percebemos que toda proposta que abrace algo novo requer essa abertura fundacional ao filosófico.

## 6) Considerações Finais

Pretendemos aqui, como pesquisadores, poder mensurar o quanto já foi pesquisado e compilado acerca da temática proposta neste trabalho. Consideramos, em suma, a validade de todo o processo de nosso estudo, além da apresentação, aplicação e a possível inserção dos Teoremas de Menelau e Ceva como elementos de abordagem de uma Geometria além da de Euclides.

Tornar-se-á visível, na altura do processo de pesquisa, diversas possibilidades de abertura de uma abordagem crítica dos teoremas mencionados nas séries do Ensino Médio, dando ênfase à investigação e ao debate articulador em relação aos conceitos enraizados na geometria clássica, promovendo inovações.

Creemos que o processo de apresentação, e, por tanto, de inserção dos teoremas, é cíclico e constante. Deseja-se, através do material impresso em Produto do Mestrado Profissional, consequência articulada com esta dissertação, que a nossa proposta de inovação seja considerada atrativa em situações de formação de novos professores de Matemática. Sabemos, portanto, que a apresentação do “novo” dever ser embasada em critérios motivados por um resultado de uma pesquisa focada, cujo dinamismo vem ao encontro do que se propõe.

Todo o material aqui apresentado em forma de dissertação de mestrado profissional em Educação Matemática foi resultado de uma pesquisa erguida e sustentada por pilares construídos mediante uma problematização posta à luz do ensino atual de Geometria. Mesmo tendo um objetivo bem traçado em relação a nossa abordagem de pesquisa, percebemos que o que foi fomentado e incitado por nós está no entorno da busca da eficiência e efetivação do que é ensinado e do que é aprendido.

Tivemos a oportunidade de construir, nestes mais de dois anos de trabalho, um mosaico de atividades de campo, permitindo-nos, como pesquisadores, certificar a carência em alguns setores conceituais na Geometria, principalmente no que se refere ao estudo dos triângulos. Além de confrontarmos lacunas, vistas como entraves conceituais, o que é perceptível

neste trabalho é o espaço gerado para as possíveis intervenções, articulando com o que já é considerado usualmente tradicional.

Ver a Geometria além dos moldes euclidianos, mesmo que intuitivamente, foi, sem dúvida, o vetor primordial desta pesquisa. A proposta de Menelau como aquele que sugere uma maior abrangência sobre Tales e suas paralelas aparece, neste texto, como a oportunidade de irmos além do que está posto curricularmente, puro e simplesmente.

As duas pesquisas de campo, geradas e empregadas com os alunos de Ensino Médio, nos deram base para argumentar que é possível e salutar implementar os Teoremas de Menelau e Ceva no currículo básico de Geometria Plana, mesmo cientes que não basta, isoladamente, abordar essa região de conteúdos nas salas de aula do Ensino Médio. Entendemos que o processo de inserção e admissão destes teoremas deve partir de uma reflexão prévia de onde se quer chegar com tal investida. Estamos certos e embasados pelas pesquisas de campo que a instrumentação de Menelau e Ceva torna o que já existe mais rico, abrangente e por que não dizer, interessante.

Mesmo tendo a certeza de que algumas atividades propostas – em ambas as pesquisas - não tenham surtido resultados totalmente condizentes com as expectativas nossas, concluímos que o resultado final foi de grande valia. É perceptível, em muitas atividades desenvolvidas pelos alunos envolvidos, a dificuldade de se manterem “desprotegidos” pelo cenário euclidiano. Ou seja, mesmo tendo como proposta de intervenção algo além de Euclides, entendemos que a herança epistemológica da Geometria, historicamente acumulada pelos alunos da pesquisa, não pode ser quebrada tão facilmente.

O que se mostra como interessante é que temos um bom caminho a percorrer, visto que o ambiente a ser construído pelos professores nas salas de aula acerca desta abordagem em torno de Menelau é ampla e plena de pormenores. O que nos contenta é que os dados das pesquisas anexadas e interpretadas por nós, mediante ao que construímos como ideal deste trabalho, vai além de uma simples sugestão e aceitação de algo novo no currículo.

Torna-se, porém, necessário, um pressuposto para atingirmos todas as esferas interligadas para a absorção daquilo que foi resultado em nossas pesquisas. Os resultados têm de ser praticados, postos a serviço de

professores e escolas, e serem renovados como fruto de reflexões da comunidade profissional.

Por isso, cria-se em nós, um compromisso de continuidade, de se continuar a pensar materiais específicos sobre o ideal de construirmos algo novo e mais abrangente em Geometria a partir de Menelau e Ceva, sem interromper ou desconstruir o legado euclidiano, cujo cenário ainda é nossa principal referência. Desse modo, além do Produto que falamos, poderemos superá-lo, pesquisando e sugerindo atividades na trilha daquilo que hora aprontamos: envolvendo as primitivas noções da Geometria Projetiva, baseada nas invariâncias proporcionais, médias harmônicas e anarmônicas, plano projetivo, pontos impróprios, colinearidade e concorrência, além dos teoremas de Menelau, Desargues, Pappus, Pascal e Ceva.

Por fim, desejamos que esse Produto possa ser utilizado, além de salas de aulas no Ensino Médio, por professores que lidam diretamente com a formação de novos docentes de Matemática nos cursos de licenciaturas, uma vez que o vemos como abertos a redimensionamentos, que podem ser feitos por olhares acadêmicos críticos.

**Referências:**

ÁVILA, Geraldo. **Reflexões sobre o Ensino de Geometria**. RPM – Número 71. São Paulo, 2010.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; MARTINS, Joel. **A Pesquisa Qualitativa em Psicologia. Fundamentos e Recursos Básicos**. São Paulo: Editora Parma, 1988.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Revista Pro-Posições – Vol 4, No 1, 1993.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org); DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Monteiro Rosa. **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

CHAPUT, Frère Ignace (FIC). **Elementos de Geometria**. 11 edição. Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia, 1941.

EUCLIDES. **Os Elementos** – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática- Representação e construção em geometria**. 1ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil**. Revista Zetetiké – ano 3 –no 4. São Paulo, 1995.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of Mathematics structures**. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; GONÇALVES, Luci Mara Gotardo. **Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com os alunos**. Caderno CEDES, Número 74, Campinas, 2008.

HENRIQUES, M D. **Uma análise da produção de significados para área e perímetro na Geometria Plana**. Dissertação de Mestrado. UFJF, Mestrado Profissional em Educação Matemática. 2011.

KALEFF, A.M.M.R. **Geometrias não euclidianas na educação básica: utopia ou possibilidade**. X Encontro Nacional de Educação Matemática: Salvador – BA, 2010.

KAY, David C. **College Geometry**. Oklahoma: Holt, 1969.

ICMI: **Pespectiva em La enseñanza de La Geometría para El siglo XXI**. – Documento de Grupo, ICMI, 1993.

MARTINS, Joel; FARINHA, Maria Fernanda; DICHTCHEKENIAN, Beirão (Orgs). **Temas Fundamentais de Fenomenologia**. São Paulo: Editora Moraes 1984.

MIGUEL, Antônio e MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática – Propostas e desafios**. 1 Edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** – Pro-Posições. Volume 3, Número 1, 1992.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial. 2004.

PCN – **Ensino Médio** – Brasília, 1999: MEC.

SANTOS, Maria Regina dos. ***Um estudo fenomenológico sobre o conhecimento geométrico.*** Texto de Qualificação de Doutorado, Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2012.

SILVA, Maria Célia Leme; BONGIOVANNI, Vincenzo; VALENTE, Vagner Rodrigues. ***Abandono da Geometria? Vivam as geometrias!*** Educação Matemática na Amazônia – Coleção II, V9. Belém - SBEM , 2011.

## **Anexos**

**Formulário entregue na Pesquisa de Campo II**  
**Aluna: ABFF**



ICE – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
 MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nome: Alessandra Bitencourt Ferreira Fernandes  
 Colégio: Colégio Apogeu  
 Série: 1º ano E.M. Data: 11/09/2011 Local: \_\_\_\_\_

Perguntas relacionadas à pesquisa:

01) Você já conhecia os Teoremas de Menelau e Ceva? (Caso afirmativo, em qual realidade).

Sim, conheci os teoremas através de uma turma de aproveitamento (ITA JR)

02) Tais teoremas são ferramentas auxiliadoras na resolução de exercícios em Geometria. Em qual dos 5 exercícios você percebeu mais isso? Por quê?

Os dois primeiros exercícios são perceptíveis em se tratando da utilização dos dois teoremas como ferramenta de resolução. No caso de um concurso, onde o tempo deve ser bem aproveitado, os teoremas foram com que os candidatos resolvessem as perguntas formuladas mais rapidamente.

03) Qual a sua opinião acerca do Ensino de Geometria convencional? Dê ênfase ao que é geralmente ensinado e como ensinado.

A geometria é tratada pelos alunos superficialmente no entendimento dos docentes, segundo informações. Em geral há uma preocupação maior somente em "guardar" as fórmulas e teoremas sem querer entendê-los. Assim sendo somente o básico tem sido o suficiente para o aprendizado, na visão dos alunos.

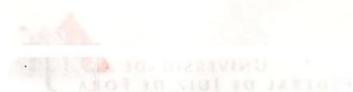
04) Os Teoremas de Menelau e Ceva são sustentados por dois conceitos importantes da Geometria Projetiva – uma geometria além da Euclidiana. Tais conceitos são a COLINEARIDADE e CONCORRÊNCIA. De acordo com o que você entende e espera da Geometria convencional, você acredita que a inserção de tais teoremas poderá surtir mudanças positivas no aprendizado?

Pelo que tenho visto atualmente, para aqueles que não cultivam a matemática, suponho que a única mudança positiva para a inserção de tais teoremas na geometria convencional seria de melhor aproveitamento do tempo na resolução de problemas que os envolvem. Entretanto para quem gosta e se dedica à matéria, acredito que os teoremas deveriam ser inseridos e efetivamente, pelo fato de tratar os conceitos citados com mais abrangência.

## Formulário entregue na Pesquisa de Campo II

Aluno: JPSHL

3



ICE - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nome: João Paulo Sales Henriques Lima  
Colégio: Apogeu  
Série: 3º ANO Data: 10/09/2011 Local: \_\_\_\_\_

Perguntas relacionadas à pesquisa:

01) Você já conhecia os Teoremas de Menelau e Ceva? (Caso afirmativo, em qual realidade).

Não conhecia tais teoremas.

02) Tais teoremas são ferramentas auxiliaadoras na resolução de exercícios em Geometria. Em qual dos 5 exercícios você percebeu mais isso? Por quê?

Percebi a importância nos exercícios 03, 04 e 05. A facilidade que os teoremas nos proporcionou foi notável, visto que tentei fazer os exercícios antes e depois de aprendê-los.  
O exercício 05 é explícito quanto ao uso dos teoremas, porém os outros dois se mostram simples se os usamos.

03) Qual a sua opinião acerca do Ensino de Geometria convencional? Dê ênfase ao que é geralmente ensinado e como ensinado.

Penso que o Ensino de Geometria é constante, sem atividades ou conteúdos que desperte muito interesse na maioria dos alunos. O que nos é ensinado se prende muitas vezes a área e volume. As didáticas em geral são poucas, limitando as aulas a desenhos no quadro e fórmulas prontas.

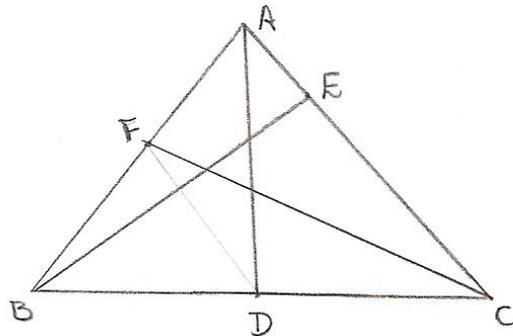
04) Os Teoremas de Menelau e Ceva são sustentados por dois conceitos importantes da Geometria Projetiva – uma geometria além da Euclidiana. Tais conceitos são a COLINEARIDADE e CONCORRÊNCIA. De acordo com o que você entende e espera da Geometria convencional, você acredita que a inserção de tais teoremas poderá surtir mudanças positivas no aprendizado?

Penso que seria muito bom termos novas ferramentas interessantes, como Menelau e Ceva. Elas podem ser úteis para vestibulares e para gerar discussões nas salas de aula, debates mais críticos quanto à geometria.

**Formulário entregue na Pesquisa de Campo I**  
**Aluna: L R S – 1º E (Atividade 6)**

Atividade 6:

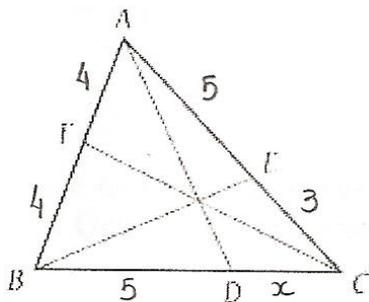
- a) Construa um triângulo ABC qualquer. Agora escolha um ponto D em BC, um ponto E em AC e outro ponto F em AB. Com o auxílio de uma régua, construa as cevianas AD, BE e CF.



- b) Você usou alguma técnica especial para traçar os segmentos ~~CD~~, ~~AE~~ e ~~BF~~? Olhando para a sua construção acima, você considera possível, tais segmentos se cruzarem em apenas um ponto?

*Não usei nenhuma técnica especial. Sim, os três segmentos podem se cruzar em apenas um ponto.*

- c) A representação abaixo é sobre outro teorema chamado **Teorema de Ceva**. Tal resultado se dá quando as cevianas traçadas se cruzam em apenas um ponto (ponto de concorrência). O Teorema de Ceva pode ser demonstrado usando o Teorema de Menelau. Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4$



$$\begin{aligned} 5 \cdot x \cdot 4 &= 3 \cdot 5 \cdot 4 \\ 20x &= 60 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

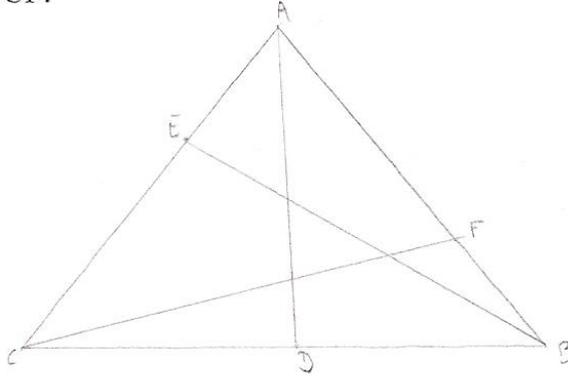
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4\text{cm}$  e  $AC = 8\text{cm}$ . Calcule o tamanho de DC.

**Formulário entregue na Pesquisa de Campo I**  
**Aluna: L A – 1º E (Atividade 6)**

Atividade 6:

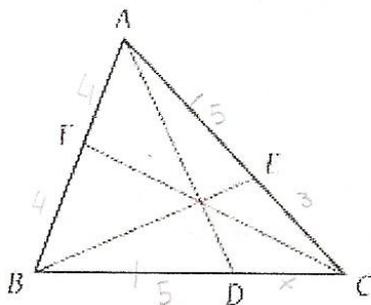
a) Construa um triângulo ABC qualquer. Agora escolha um ponto D em BC, um ponto E em AC e outro ponto F em AB. Com o auxílio de uma régua, construa as cevianas AD, BE e CF.



b) Você usou alguma técnica especial para traçar os segmentos CD, AE e BF? Olhando para a sua construção acima, você considera possível, tais segmentos se cruzarem em apenas um ponto?

*Não, apenas escolhi pontos aleatórios. Sim é possível.*

c) A representação abaixo é sobre outro teorema chamado **Teorema de Ceva**. Tal resultado se dá quando as cevianas traçadas se cruzam em apenas um ponto (ponto de concorrência). O Teorema de Ceva pode ser demonstrado usando o Teorema de Menelau. Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4$



$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$5 \cdot x \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 4$$

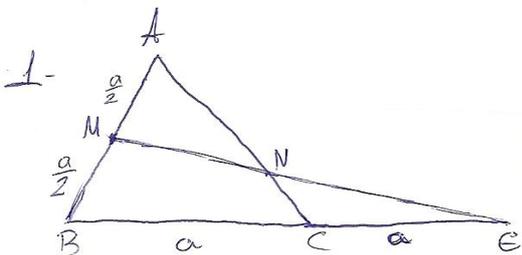
$$x = 3$$

Considere  $AE = BD = 5\text{cm}$ ,  $AF = FB = 4\text{cm}$  e  $AC = 8\text{cm}$ . Calcule o tamanho de DC.

**Resolução das atividades da Pesquisa I**  
**Aluno: G R M B (Página 1)**

Guilherme Mansur - 2º Ano

6

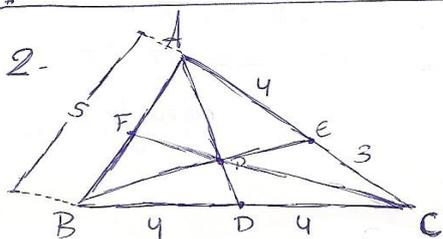


Por Menelau:

$$NC \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a = AN \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

$$2NC = AN$$

$$\frac{AN}{NC} = 2$$



a) Pelo Teorema de Ceva:

$$AE \cdot DC \cdot FB = EC \cdot BD \cdot AF$$

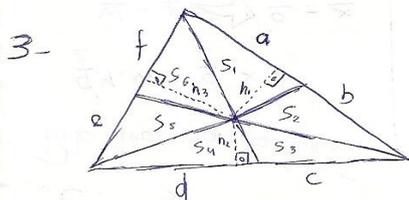
$$4 \cdot 4 \cdot FB = 3 \cdot 4 \cdot AF$$

$$3AF = 4FB$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{4}{3}$$

b)  $AF + FB = 5$   
 $4AF + 4FB = 20$   
 $4FB = 3AF$   
 $4AF + 3AF = 20$   
 $7AF = 20$

$$AF = \frac{20}{7}$$



$$S_1 = \frac{ah_1}{2}$$

$$a = \frac{2S_1}{h_1}$$

$$S_2 = \frac{bh_1}{2}$$

$$b = \frac{2S_2}{h_1}$$

$$S_3 = \frac{ch_2}{2}$$

$$c = \frac{2S_3}{h_2}$$

$$S_4 = \frac{dh_2}{2}$$

$$d = \frac{2S_4}{h_2}$$

$$S_5 = \frac{eh_3}{2}$$

$$e = \frac{2S_5}{h_3}$$

$$S_6 = \frac{fh_3}{2}$$

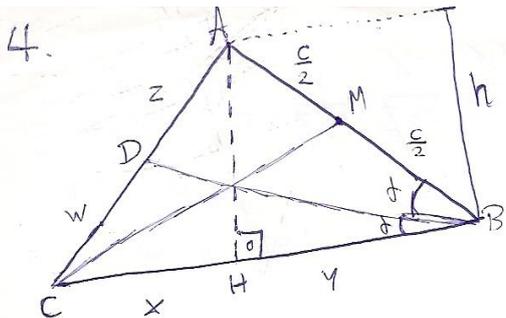
$$f = \frac{2S_6}{h_3}$$

Pelo Teorema de Ceva:

$$a \cdot c \cdot e = b \cdot d \cdot f$$

$$\frac{2S_1}{h_1} \cdot \frac{2S_3}{h_2} \cdot \frac{2S_5}{h_3} = \frac{2S_2}{h_1} \cdot \frac{2S_4}{h_2} \cdot \frac{2S_6}{h_3}$$

$$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$$



$$\begin{cases} x+y=a \\ z+w=b \end{cases}$$

Pelo Teorema da Bissetriz interna:

$$\frac{z}{c} = \frac{w}{a}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{w}{z}$$

Pelo Teorema de Ceva:

$$\frac{d}{z} \cdot \frac{w}{c} = \frac{d}{x} \cdot \frac{z}{a}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{x}{y}$$

$$x = \frac{ay}{c}$$

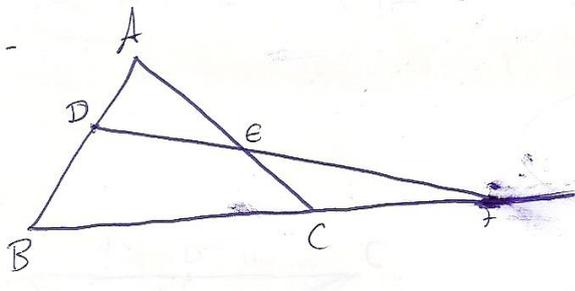
$$\begin{cases} x+y=a \\ \frac{ay}{c} + y = a \\ ay + yc = ac \\ y(a+c) = ac \\ y = \frac{ac}{a+c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \left( \frac{ac}{a+c} \right) \\ x = \frac{a^2 c}{a+c} \end{cases}$$

Por Pitágoras:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + y^2 \\ b^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 - b^2 = y^2 - x^2 \\ c^2 - b^2 = \frac{a^2 c^2}{(a+c)^2} - \frac{a^4}{(a+c)^2} \quad (-) \\ b^2 - c^2 = \frac{a^4}{(a+c)^2} - \frac{a^2 c^2}{(a+c)^2} \\ b^2 - c^2 = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{(a+c)^2} \end{cases}$$

5.



Caso F se afaste muito, de forma que  $CF \rightarrow \infty$ ,  $BF \rightarrow \infty$ , pois o tamanho BC será desprezível. Dessa forma, podemos considerar  $CF = BF$ . Então: Note que isso só acontece quando DF e BF são praticamente paralelas.

Por Menelau:

$$EC \cdot AD \cdot BF = AE \cdot DB \cdot CF$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Como podemos considerar  $DF \parallel BF$ , a equação acima enuncia o Teorema de Tales.