

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lucas Lauro Brugger

Descrições Efetivas em Mecânica Quântica: Um Problema de Inferência
Bayesiana

Juiz de Fora

2025

Lucas Lauro Brugger

**Descrições Efetivas em Mecânica Quântica: Um Problema de Inferência
Bayesiana**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Prof. Dr. Cristhiano Duarte

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lauro Brugger, Lucas.

Descrições Efetivas em Mecânica Quântica: Um Problema de Inferência
Bayesiana / Lucas Lauro Brugger. – 2025.

70 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Cristhiano Duarte

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Quântica. 2. Fundamentos. 3. Inferência. 4. Bayes I. Rizzuti, Bruno
F., Prof. Dr.

Lucas Lauro Brugger

Descrições Efetivas em Mecânica Quântica: Um Problema de Inferência Bayesiana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 07 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Dr. Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva - Coorientador
Chapman University (CHAPMAN)

Prof. Dr. Carlos Humberto de Souza Vieira
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Prof. Dr. Rodrigo Alves Dias
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 23/07/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Servidor(a)**, em 07/08/2025, às 18:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva, Usuário Externo**, em 07/08/2025, às 18:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Humberto de Souza Vieira, Usuário Externo**, em 08/08/2025, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Alves Dias, Servidor(a)**, em 14/08/2025, às 16:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2513506** e o código CRC **DE2461EE**.

Dedico este trabalho aos povos oprimidos, os condenados da terra. Principalmente ao povo palestino que mostra sua força e resistência em suportar por mais de 79 anos as mais vis tiranias do imperialismo. Dedico também a todas as mulheres que diariamente são vítimas de perseguição, misoginia e variadas transgressões aos seus direitos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, Geny e Jorge, por todo o apoio durante os dois anos de mestrado. Sem o suporte incondicional de vocês, trilhar esse longo e sinuoso caminho não teria sido possível.

Agradeço também ao meu irmão, Rafael, que sempre me incentivou e motivou a seguir por essa trajetória — sobretudo por, desde cedo, ter me colocado em contato com a ciência e ter me aconselhado nos momentos mais difíceis desta jornada.

Agradeço, em especial, à minha companheira, Ana, por todo o apoio oferecido. É difícil condensar, em breves linhas, tudo aquilo pelo que sou grato a você. Mas, acima de tudo, agradeço por me mostrar diariamente a força que você possui como pessoa e como mulher, enfrentando uma sociedade excludente e opressora — e, principalmente, por usar essa força para nos motivar. Sou também profundamente grato pela sua atenta e criteriosa leitura do meu trabalho, e pelos inestimáveis conselhos que me ajudaram a aprimorar a escrita. Sem você, o que já foi difícil teria se tornado impossível.

Aos meus orientadores, Bruno e Cristhiano, deixo meus mais sinceros agradecimentos. O caminho foi longo, árduo e repleto de obstáculos, mas, com clareza e propósito, conseguimos atravessá-lo. Mais do que os ensinamentos acadêmicos, agradeço também pelos valiosos conselhos sobre a vida, que tanto me auxiliaram. Agradeço também ao Thales pelas discussões sobre os resultados.

Sou grato a todos os meus professores, de todas as etapas da minha formação, em especial aos docentes do Departamento de Física, com quem tive interações valiosas e de quem colhi grandes ensinamentos.

Agradeço também aos amigos que tornaram esses dois anos de trabalho os mais divertidos possíveis, pelas inúmeras horas que passamos sentados no corredor reclamando de tudo o que era possível, e pelas boas festas que tivemos.

Agradeço à UFJF e ao PPGF pela estrutura proporcionada e pela bolsa PBPG (Programa de Bolsas de Pós-Graduação da UFJF), que viabilizou meus estudos.

Por fim, a IA (Inteligência Artificial) foi utilizado neste trabalho com a finalidade de auxiliar o trabalho mecânico de encontrar comandos e pacotes *LaTeX*.

*Relembrando o soldado valente
Cujo exemplo o tornou imortal,
Enfrentaremos primeiro a morte,
Mas trair a pátria jamais*
- Venceremos - Unidade Popular Chilena

*[...] Poderosos, corajosos e mortais corações, mentes e mãos
Prenunciam sua fúria nas paredes de fábricas e quartéis:
“O Povo se rebelará e a tirania cairá!”
“Seremos grandes, poderosos e livres!”*
- Você Foi Vítima - Anton Arkhangelsky e Nikolay Ikonikov

*Dormia
A nossa pátria-mãe tão distraída
Sem perceber que era subtraída
Em tenebrosas transações
Seus filhos
Erravam cegos pelo continente
Levavam pedras feito penitentes
Erguendo estranhas catedrais*
- Vai Passar - Chico Buarque de Hollanda

RESUMO

Ao longo dos anos, diversos esforços foram feitos para reinterpretar a mecânica quântica a partir de novas perspectivas. Este trabalho baseia-se na abordagem que enquadra a teoria quântica como um formalismo generalizado para a inferência Bayesiana. Embora esse ponto de vista reavive o antigo debate sobre a lógica quântica, ele leva a sério a ideia de que existem outras formas de atribuição probabilística — além das clássicas. Nosso estudo insere o problema convencional de *coarse-graining* dentro de um contexto de inferência Bayesiana. Investigamos se técnicas de inferência generalizadas podem ser empregadas para estabelecer condições necessárias e suficientes para o surgimento de dinâmicas quânticas macroscópicas. Como este resumo já sugere, veremos que o arcabouço de inferência quântica, tal como geralmente proposto, possui suas limitações. Além disso, exploraremos como os mapas de recuperação de Petz podem, potencialmente, contornar essas limitações, a fim de encontrar um mapa emergente ótimo (em certo sentido) que permaneça consistente com o problema em praticamente qualquer cenário de *coarse-graining*.

Palavras-chave: Quântica; Fundamentos; Inferência; Bayes.

ABSTRACT

Throughout the years, various efforts have been made to reinterpret quantum mechanics from new perspectives. This work relies upon the approach that frames quantum theory as a generalized formalism for Bayesian inference. Although this standpoint revives the old debate about quantum logic, it nonetheless takes seriously the idea that there are other forms of probabilistic assignments—other than the classical ones. Our study embeds the conventional coarse-graining problem within a Bayesian inference setting. We investigate whether generalized inference techniques can be employed to establish necessary and sufficient conditions for the emergence of macroscopic quantum dynamics. As this abstract already hints, we will see that the quantum inference framework, as usually proposed, has its limitations. Furthermore, we will explore how Petz’s recovery maps can potentially circumvent these limitations, to find an optimal (in a certain sense) emergent map that remains consistent with the problem across virtually any coarse-graining scenario.

Keywords: Quantum; Foundations; Inference; Bayes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|----|
| Diagrama representando a relação entre mapas e estados condicionais. No caso causal assumimos que inicialmente temos o mapa como dado e via o isomorfismo de Jamiołkowski obtemos o estado condicional. No caso acausal assumimos que inicialmente temos o estado da região composta e via o isomorfismo de Jamiołkowski obtemos o mapa associado. | 17 |
| Diagrama representando as relações de a) causalidade entre as regiões. Uma seta contínua direcionada da região A para a região B . Setas de linha contínua serão utilizadas para representar relações <i>causais</i> entre as regiões. b) Uma seta pontilhada entre as regiões A e B . Linhas pontilhadas conectando duas ou mais regiões serão utilizadas para representar relações <i>acausais</i> entre as regiões. | 19 |
| Diagrama representando um mapa linear que se assemelha a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica, onde a variável aleatória R pode ser interpretada como o <i>input</i> de um canal clássico e a variável aleatória S pode ser interpretada como o <i>output</i> do referido canal clássico. | 22 |
| Diagrama representando a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica. As probabilidades $P(T)$ e $P(S)$ são combinadas a fim de se obter a probabilidade condicional relativa à propagação de crenças entre as regiões clássicas R e T , isto é $P(T R)$ | 27 |
| Diagrama representando os processos de medição e preparação de <i>ensemble</i> . a) Uma fonte emite fótons que passam por um polarizador. O polarizador por sua vez rotaciona lentamente. Dessa forma os fótons que passam pelo polarizador em diferentes instantes de tempo são levados a estados distintos resultando em um <i>ensemble</i> . b) Um sistema emite, ou não, pares de fótons em tiques de tempo. Cada estado emitido em um certo tique é representando por um qubit onde $ 0\rangle$ significa que não houve emissão e $ 1\rangle$ significa que houve emissão. Os estados então são enviados a um detector que realiza uma medição sobre eles e resulta em um outro estado. | 31 |
| Diagrama esquematizando quatro regiões clássicas e os estados condicionais. Estão representadas as dinâmicas que conectam casualmente as regiões, isto é $\varepsilon_{X R}$, $\varepsilon_{S R}$, $\varepsilon_{Y S}$ e seus respectivos estados condicionais associados $\rho_{X R}$, $\rho_{S R}$ e $\rho_{Y S}$ | 35 |
| Diagrama representando a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica entre as 4 regiões clássicas R , S , X e Y . Buscamos qual a probabilidade condicional responsável por realizar a propagação de crença direta entre as regiões clássicas X e Y | 38 |

| | |
|--|----|
| Diagrama representando medições simultâneas em duas regiões A e B espacialmente separadas. Onde representamos o estado conjunto das regiões espacialmente separadas A e B e os estados condicionais híbridos responsáveis pelas respectivas medições. Tal cenário pode ser utilizado para representar experimentos do tipo EPR. | 39 |
| Diagrama representando a propagação de crença da região X para a região Y , ou seja, a propagação de crença da esquerda para a direita. | 41 |
| Diagrama representando a propagação de crença da região Y para a região X , ou seja, a propagação de crença da direita para a esquerda. | 41 |
| Diagrama esquematizando duas regiões quânticas acasaulmente relacionadas e uma região clássica. No cenário da releitura do gato de Schrödinger sob a perspectiva de <i>quantum steering</i> , Alice e o gato se encontram na região A enquanto Bob e a caixa se encontram na região B . A região clássica Y é a responsável por capturar o estado da região quântica B após a medição. | 43 |
| Diagrama da representação do problema de <i>coarse-graining</i> e dinâmica emergente. As duas regiões inferiores conectam-se por uma evolução unitária \mathcal{U}_T e as regiões superiores são atingidas pela ação do <i>coarse-graining</i> Λ_{CG} . A dinâmica efetiva Γ_T conecta as regiões <i>coarse-grained</i> | 48 |
| Diagrama representando de forma esquemática a emissão de um estado bipartite $ 10\rangle$, e da leitura deste estado pelo detector borrado e saturado, levando à saída $ 1\rangle$ | 49 |
| Diagrama esquematizando duas regiões quânticas. A região B é obtida como a ação de uma evolução unitária sobre a região A | 50 |
| Diagrama esquematizando a atuação da dinâmica de <i>coarse-graining</i> nas regiões A e B e obtendo como consequência respectivamente as regiões C e D | 51 |
| Diagrama esquematizando as quatro regiões quânticas, as dinâmicas quânticas e os estados isomorfos. Novamente a dinâmica emergente Γ_T conecta as regiões após o <i>coarse-graining</i> | 51 |
| Diagrama representando o <i>SWAP</i> nas entradas de um vetor de um sistema bipartite e o Tr_B é o traço parcial na segunda entrada. Sendo tais escolhas de <i>coarse-graining</i> e de unitária, e dado os estados da região inferior, nota-se que neste caso não há dinâmica emergente que faz o diagrama comutar. | 52 |
| Diagrama representando três regiões quânticas conectadas via dinâmicas quânticas. Onde a região B está no futuro causal da região A e a região C está no futuro causal da região B | 54 |
| Diagrama esquematizando a dinâmica quântica $\varepsilon_{B A}$ e o mapa de Petz $\mathcal{R}_{\varepsilon_{B A}, \rho_A}(\cdot)$. O mapa de Petz é o responsável por <i>reverter</i> a dinâmica $\varepsilon_{B A}$ | 56 |

Diagrama das quatro regiões quânticas e os respectivos canais quânticos. Onde a dinâmica $\varepsilon_{D|C}$ é a sugerida com o intuito de fazer o respectivo diagrama comutar. No braço esquerdo do diagrama é representado também o mapa de Petz responsável por reverter a dinâmica $\varepsilon_{C|A}$ 60

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|---|----|
| Tabela 1 | – Analogia entre teoria de probabilidade clássica para duas variáveis aleatórias e para teoria quântica com duas regiões. | 20 |
| Tabela 2 | – Analogia entre distribuições de probabilidade conjunta e condicionais clássicas e os estados quânticos equivalentes. | 21 |
| Tabela 3 | – Tabela exemplificando a relação entre a teoria de inferência Bayesiana clássica e o seu análogo quântico. A letra grega σ foi utilizada como forma de mostrar a validade de dadas expressões tanto para estados causais quanto acausais. | 33 |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | ESTADOS CONDICIONAIS | 16 |
| 2.1 | BREVE RESUMO DE PROBABILIDADE CLÁSSICA | 17 |
| 2.2 | SOBRE REGIÕES | 18 |
| 2.3 | ESTADOS CONDICIONAIS ACAUSAIS | 19 |
| 2.3.1 | PROPAGAÇÃO DE CRENÇA ACAUSAL | 21 |
| 2.4 | ESTADOS CONDICIONAIS CAUSAIS | 26 |
| 2.5 | COMPOSIÇÃO DE ESTADOS CONDICIONAIS | 27 |
| 2.6 | OPERADORES HÍBRIDOS | 30 |
| 2.7 | TEOREMA DE BAYES QUÂNTICO | 32 |
| 3 | APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE ESTADOS CONDICIONAIS | 35 |
| 3.1 | COMPARANDO A PROPAGAÇÃO DE CRENÇA | 35 |
| 3.2 | PROPAGAÇÃO DE CRENÇA EM SISTEMAS HÍBRIDOS | 39 |
| 3.3 | O GATO DE SCHRÖDINGER | 42 |
| 4 | O PROBLEMA DE <i>COARSE-GRAINING</i> | 48 |
| 4.1 | MODELANDO O PROBLEMA DE <i>COARSE-GRAINING</i> NO FEC . . | 50 |
| 5 | CONCLUSÃO | 61 |
| | APÊNDICE A – ALGUMAS IDENTIDADES | 63 |
| | Bibliografia | 66 |

1 INTRODUÇÃO

Desde o surgimento da mecânica quântica, no início do século XX, destaca-se seu caráter probabilístico e consequentemente sua intrínseca conexão com a teoria de probabilidades [1, 2, 3]. Apoiando-se em tal aspecto, Leifer e Spekkens, publicam, em 2013, o trabalho, “*Towards a formulation of quantum theory as a causally neutral theory of Bayesian inference*” [4], onde uma formulação operacional da teoria quântica causalmente neutra, e ancorada na perspectiva da inferência Bayesiana [5, 6, 7], é proposta.¹

Diversos autores, além de Leifer e Spekkens, revisitaram os fundamentos da teoria quântica ao longo dos séculos XX e XXI, destacando possíveis conexões com a teoria de probabilidades clássica. Em particular, Dénes Petz, em seu trabalho “*Sufficient Subalgebras and the Relative Entropy of States of a von Neumann Algebra*” [8], introduz o chamado Mapa de Recuperação de Petz, que mais tarde seria relacionado ao conceito de retrodição na inferência Bayesiana. No artigo “*Bayes’ theorem and quantum retrodiction*” [1], Barnett, Pegg e Jeffers, estabelecem uma formulação simples, baseada no teorema de Bayes, para a obtenção do estado quântico anterior à medição. Posteriormente, Caves, Schack e Fuchs, em “*Quantum probabilities as Bayesian probabilities*” [9], defendem que as probabilidades em sistemas quânticos podem ser interpretadas no contexto da inferência Bayesiana, aprofundando-se nas implicações dessa proposta. Embora diversas contribuições significativas tenham sido fornecidas para o estabelecimento da conexão entre mecânica quântica e inferência Bayesiana, esta dissertação se concentrará nos trabalhos de Leifer e Spekkens, que propõem um formalismo operacional ao explorar a interrelação entre as duas teorias.

Dessa forma, o Formalismo de Estados Condicionais fundamenta-se na premissa de que [1, 3, 4, 10] a teoria quântica pode ser interpretada como uma generalização não comutativa de probabilidade clássica, onde os operadores densidade associados com os estados do sistema, são agora vistos como distribuições de probabilidade mais generalista. Diferente da mecânica clássica, onde é possível descrever completamente o estado de um sistema, de uma única partícula, conhecendo sua posição $x(t)$ e seu momento $p(t)$, a mecânica quântica, segundo seus postulados [11, 12, 13], estabelece que o estado de um sistema é representado por um vetor de estado (ou função de onda) em um espaço de Hilbert. Este vetor, por si só, não possui uma representação física direta, e as grandezas físicas — como posição e momento — são acessadas por meio de medições, as quais são representadas por operadores chamados observáveis.

Considere, por exemplo, a preparação de um conjunto de estados puros (um *ensemble*) de um dado sistema físico. Em geral, ao realizarmos esse procedimento, não podemos afirmar com certeza — isto é, com probabilidade igual a um — que o sistema está

¹ Usualmente ao longo do texto tal formalismo será chamada de *Formalismo de Estados Condicionais* (FEC).

em um único estado específico. Nesse caso, uma descrição mais adequada seria representar o sistema sob análise por uma mistura estatística dos possíveis estados preparados, cada um com um peso (probabilidade) associado. Entretanto, ao tentarmos expressar essa mistura como uma combinação linear dos vetores de estado individuais de cada estado puro preparado, o resultado, no geral, é inconsistente com os postulados da mecânica quântica, isto é, a combinação resultante não corresponde a um vetor de estado válido, pois, por exemplo, pode não estar normalizado.

Para contornar essa limitação, é introduzido o formalismo de matrizes densidade [14, 15], que permite representar tanto estados puros quanto estados mistos de forma consistente. A matriz densidade, que representa a mistura completa, é vista agora como a média ponderada das matrizes densidade de outros estados preparados, e incorpora de maneira correta as informações probabilísticas da preparação do sistema. Além disso, esse formalismo acomoda tanto a estrutura probabilística clássica quanto a quântica dentro do mesmo arcabouço matemático.

O centro dessa argumentação está no seguinte ponto: em sistemas quânticos, os estados são representados por operadores densidade — que, por exemplo, podem ser computados em uma base fixa, como a base referente dos autovetores de um certo observável. Tais operadores podem apresentar elementos fora da diagonal (os chamados termos de coerência [16]), sem correspondentes na teoria clássica. Estes termos refletem superposições entre diferentes configurações do sistema. Consequentemente, estados oriundos de preparações distintas podem não comutar entre si, o que é a base da teoria de probabilidade não comutativa. Já no contexto clássico, geralmente pode-se encontrar uma base na qual todos os operadores densidade são simultaneamente diagonalizáveis (embora existam casos especiais onde classicamente a não comutatividade seja possível [17]).

Então, sobre a perspectiva do FEC fornecida por Leifer e Spekkens, iremos analisar um sistema quântico submetido a uma evolução unitária — tal qual a evolução temporal, onde o sistema ocupa a mesma região espacial, mas é analisado em tempos distintos — e um detector com defeito é utilizado na tentativa de acessar todos os graus de liberdade disponíveis. Assim, na presença de um detector que não consegue acessar completamente o sistema sob análise, uma descrição completa (completa no sentido de tentar descrever todos os graus de liberdade) torna-se supérflua ou impossível e uma descrição efetiva se mostra necessária. Logo, utilizamos o conceito de *coarse-graining* como uma ferramenta matemática com intuito de realizar uma descrição efetiva do sistema. E uma vez diante desse cenário, nos perguntamos: quais são as condições necessárias e suficientes para a emergência de uma dinâmica quântica quando analisamos uma situação tal qual a descrita acima? Este será o foco deste trabalho.

A presente dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2, concentramos nossa atenção na análise do FEC, discutindo a definição de estados condicionais e os

principais teoremas utilizados na investigação subsequente. Exploramos também a conexão entre esses estados e as dinâmicas quânticas por meio do isomorfismo de Jamiołkowski, o qual desempenha um papel central ao longo de toda a análise. No Capítulo 3, aplicamos o FEC a diferentes cenários. Na Seção 3.1, utilizando as ferramentas fornecidas pelo FEC, analisaremos, com base em um exemplo, a reprodutibilidade da inferência clássica quando os estados condicionais são postos sob certas exigências. Em seguida, na Seção 3.2, voltamos para um cenário análogo ao experimento EPR [18], no qual o FEC é aplicado a um sistema em que medições são realizadas em duas regiões quânticas espacialmente separadas. Por fim, na Seção 3.3, analisamos uma releitura do experimento do gato de Schrödinger, interpretado como um problema de *quantum steering*. O Capítulo 4 é dedicado à investigação central deste trabalho: identificar as condições necessárias e suficientes para a emergência de uma dinâmica quântica efetiva a partir de uma descrição *coarse-grained* do sistema sob análise. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões deste trabalho e sugerimos possíveis desdobramentos para pesquisas futuras.

2 ESTADOS CONDICIONAIS

A teoria de probabilidades, remonta historicamente a meados do século XVI, quando o médico, matemático e filósofo italiano Girolamo Cardano tem seu tratado *Liber de Ludo Aleae* (“Ao Lançar o Dado”) [19, 20] publicado postumamente. Motivado por sua participação em jogos de azar, Girolamo apresenta estudos sobre as probabilidades nos jogos de aposta. No século XVII, na célebre “Correspondência sobre o problema dos pontos”, Blaise Pascal e Pierre de Fermat discutem como dividir de forma justa os ganhos de um jogo interrompido, estabelecendo princípios que fundamentariam a teoria da probabilidade moderna [21]. Ainda nesse século, influenciado por essa correspondência, o matemático e físico holandês Christiaan Huygens publica o primeiro livro dedicado ao tema, *De ratiociniis in ludo aleae* (“Sobre o Raciocínio nos Jogos de Azar”) [22]. Essas contribuições pioneiras seriam aprofundadas nos séculos seguintes por estudiosos como Jakob e Daniel Bernoulli, Laplace, Poisson e Gauss.

No século XVIII, Thomas Bayes — filósofo, matemático e pastor presbiteriano — redige *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (“Um Ensaio para a Solução de um Problema na Doutrina das Chances”) [6, 23], no qual apresenta pela primeira vez o que mais tarde seria conhecido como Teorema de Bayes. Após sua morte, Richard Price edita e publica o manuscrito na *Royal Society*. Independentemente, Pierre-Simon Laplace desenvolve resultados semelhantes.

Deixando de lado esta curta digressão histórica, damos um salto aos dias atuais quando Leifer e Spekkens passam a caracterizar a mecânica quântica como uma generalização da teoria clássica das probabilidades, formulando um novo arcabouço matemático baseado nas contribuições conceituais introduzidas pelas obras históricas anteriormente mencionadas. Os autores observam que a formulação matemática tradicional da teoria quântica está intrinsecamente vinculada à estrutura causal subjacente, o que resulta em descrições distintas para experimentos envolvendo dois (ou mais) sistemas espacialmente separados e para um mesmo sistema considerado em diferentes instantes temporais. Motivados por esse contraste, propõem um formalismo operacional alternativo para a mecânica quântica, com o objetivo de unificar, em um único arcabouço matemático, a descrição de experimentos independentemente da estrutura causal em que estejam inseridos.

Sendo assim, o *Isomorfismo de Choi-Jamiołkowski* [24, 25] é empregado de modo que o mapeamento que descreve a evolução de um sistema quântico passe a ser representado por um *estado condicional*, ou seja, uma matriz positiva semidefinida de traço igual à identidade. Ao mesmo tempo que, por meio do isomorfismo, o *estado condicional*, associado a experimentos envolvendo dois sistemas quânticos espacialmente separados, passe a ser associado a um mapeamento. Dessa maneira, conforme discutido anteriormente, o FEC busca unificar ambas as descrições em uma única estrutura matemática. A Figura 1

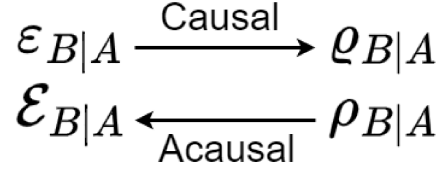


Figura 1 – Diagrama representando a relação entre mapas e estados condicionais. No caso causal assumimos que inicialmente temos o mapa como dado e via o isomorfismo de Jamiołkowski obtemos o estado condicional. No caso acausal assumimos que inicialmente temos o estado da região composta e via o isomorfismo de Jamiołkowski obtemos o mapa associado.

Fonte: Autoria Própria, 2025

apresenta uma esquematização das relações conceituais que serão detalhadas nas seções seguintes.

2.1 BREVE RESUMO DE PROBABILIDADE CLÁSSICA

Antes de introduzirmos as principais propostas do formalismo formulado por Leifer e Spekkens em [4], faremos uma breve recapitulação de alguns elementos da teoria de probabilidade clássica. Considerando R uma variável aleatória discreta,¹ a probabilidade de um evento arbitrário $R = r$ acontecer é denotado por $P(R = r)$. A soma sobre todos os valores possíveis da variável aleatória R é,

$$\sum_{R=r} P(R) = 1. \quad (2.1)$$

Quando temos duas variáveis aleatórias R e S podemos caracterizar a probabilidade conjunta dos eventos aleatórios que estas representam. A probabilidade conjunta de R e S é dada como $P(R, S)$. E a probabilidade marginal sobre S é definida como,

$$P(S) = \sum_{R=r} P(R, S). \quad (2.2)$$

Uma observação deve ser feita antes de avançarmos. Será adotado durante o texto a convenção de se somar sobre os outputs da variável aleatória, ou como veremos mais adiante, do rótulo da região quântica. Desse forma, a expressão (2.1) é representada como,

$$\sum_r P(R) = 1. \quad (2.3)$$

¹ Por definição, uma variável aleatória é uma função que associa os resultados de experimentos aleatórios a valores reais [5].

Assim, partindo das probabilidades marginais sobre R e S e supondo que tenhamos acesso a $P(R, S)$, podemos, então, definir a probabilidade condicional sobre estas variáveis. A probabilidade de S dado R é definida como,

$$P(S|R) = \frac{P(R, S)}{P(R)}, \quad (2.4)$$

onde também podemos representar,

$$P(R, S) = P(S|R)P(R). \quad (2.5)$$

O produto é feito elemento por elemento, isto é, $\forall r, s$ $P(R = r, S = s) = P(S = s|R = r)P(R = r)$. Além disso, a expressão (2.4) somente define uma probabilidade condicional quando $P(R = r) \neq 0$.

2.2 SOBRE REGIÕES

Um conceito fundamental e que utilizaremos durante toda a nossa discussão, e exposição de resultados, é o que chamamos de *região*. Como apresentada em [4], uma *região* é um conceito elementar que pode ser entendido como uma pequena porção do espaço-tempo onde um observador pode realizar uma única intervenção durante um experimento, como, por exemplo, realizar uma medição ou preparar um estado específico. Cada região elementar denominada A é associada a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A .

Quando trabalhamos com várias regiões, a região associada à composição destas regiões é definida como o produto tensorial dos espaços de Hilbert associados a cada uma delas. Em particular, o espaço de Hilbert associado à composição de duas regiões disjuntas A e B é representado como $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, sendo também os espaços, \mathcal{H}_{AB} e \mathcal{H}_{BA} , isomorfos.

Assim, quando temos regiões compostas, podemos classificar a relação *causal* estabelecida entre estas de duas maneiras distintas.

- Regiões *casualmente relacionadas*: aquelas onde uma tem uma influência causal sobre a outra.
- Regiões *acausalmente relacionadas*: aquelas onde uma não tem influência causal na outra, embora possam ter uma causa em comum.

No presente trabalho, representamos esquematicamente as regiões que são acausalmente conectadas por uma seta tracejada, enquanto as regiões que são casualmente conectadas são representadas por uma seta contínua, como apresentado na Figura 2. Como veremos a seguir, neste formalismo a relação de causalidade entre duas ou mais regiões tem um caráter central.

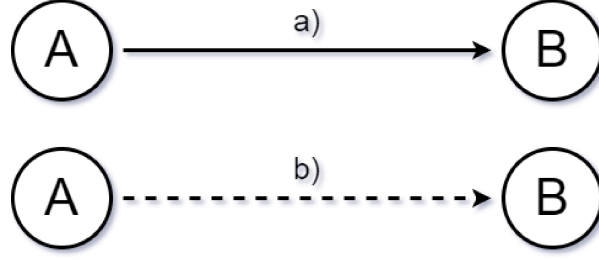


Figura 2 – Diagrama representando as relações de a) causalidade entre as regiões. Uma seta contínua direcionada da região A para a região B . Setas de linha contínua serão utilizadas para representar relações *causais* entre as regiões. b) Uma seta pontilhada entre as regiões A e B . Linhas pontilhadas conectando duas ou mais regiões serão utilizadas para representar relações *acausais* entre as regiões.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Em consonância com [4], utilizamos a convenção de representar regiões quânticas com as letras que compõe o início do alfabeto A, B, C, \dots . As regiões clássicas, associadas às variáveis aleatórias, são representadas pelas letras R, S, T, \dots e as regiões clássicas associadas com procedimentos de preparação de estados ou medição são representadas pelas letras X, Y, Z, \dots .

2.3 ESTADOS CONDICIONAIS ACAUSAIS

Uma vez estabelecidos esses conceitos, apresentamos a primeira analogia [4] relacionando a teoria de probabilidade clássica e o FEC. Seja R uma variável aleatória, a distribuição de probabilidade sobre ela é definida como $P(R)$ da forma que $\sum_r P(R = r) = 1$ e $\forall r \ P(R = r) \geq 0$. Logo, sendo a probabilidade clássica dotada de tal comportamento, esperamos que o operador análogo quântico análogo tenha o mesmo comportamento. Sendo assim, o operador análogo é um estado quântico respeitando $\rho_A \in \text{Pos}(\mathcal{H}_A)$ e $\text{Tr}(\rho_A) = 1$, ou seja, é um operador positivo semidefinido² com traço 1. A exigência do operador ser positivo semidefinido decorre do fato da distribuição de probabilidade respeitar $\forall r \ P(R = r) \geq 0$ e a exigência de $\text{Tr}(\rho_A) = 1$ decorre do fato de que $\sum_r P(R = r) = 1$.

Dada uma distribuição de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias R e S , $P(R, S)$ seu análogo quântico é um operador densidade $\rho_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$, e a marginalização é representada como o traço parcial sobre uma das regiões, definida da seguinte maneira: $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$.

Portanto, associando a probabilidade clássica aos operadores densidade, tal qual Leifer e Spekkens em [4], estabelecemos as primeiras analogias, compiladas na tabela 1.

² Um operador positivo semidefinido é tal que dado $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, então $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ [26].

| Probabilidade Clássica | Teoria Quântica |
|-------------------------|-----------------------------------|
| $P(R)$ | ρ_A |
| $P(R, S)$ | ρ_{AB} |
| $P(S) = \sum_R P(R, S)$ | $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ |

Tabela 1 – Analogia entre teoria de probabilidade clássica para duas variáveis aleatórias e para teoria quântica com duas regiões.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Classicamente, $P(S|R)$ é uma função positiva que satisfaz $\sum_s P(S|R) = 1$. Analogamente, no FEC temos,

Definição 2.3.1. Um *estado condicional acausal* de B dado A é um operador positivo semidefinido $\rho_{B|A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ que satisfaz,

$$\text{Tr}_B(\rho_{B|A}) = I_A, \quad (2.6)$$

onde $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ é o operador identidade.

A conexão da definição 2.3.1 com a expressão (2.5) é estabelecida da seguinte maneira,

$$\rho_{AB} = (\rho_A^{1/2} \otimes I_B) \rho_{B|A} (\rho_A^{1/2} \otimes I_B), \quad (2.7)$$

onde expressão (2.7) combina duas construções. A primeira, $\rho_A^{1/2}$ e $\rho_{B|A}$ são combinados via produto, entretanto tais operadores moram em espaços de Hilbert distintos. Para contornar este problema, ρ_A é expandido para um operador $\rho_A \otimes I_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ via uma identidade³ em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. E a segunda é, ao invés de apenas multiplicar $\rho_{B|A}$ com ρ_A , é utilizado $\rho_A^{1/2}$ no intuito de garantir que o operador ρ_{AB} seja positivo, pois expressões da forma $A\rho A^*$, quando $A^*A = I$, preservam a positividade (ver [26]). A expressão (2.7) motiva definir uma operação auxiliar, usualmente referenciada como produto estrela ou *link product* [4].

Definição 2.3.2. Seja M, N operadores pertencentes a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, o produto estrela entre M e N é definido como,

$$\begin{aligned} (\cdot) \star (\cdot) : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ (M, N) &\mapsto M \star N = N^{1/2} M N^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Observação: o produto estrela é não comutativo e não associativo.

³ Durante o texto algumas identidades serão omitidas. Por exemplo, o produto dos operadores $\rho_{A|B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ e $\rho_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ deve ser entendido como $\rho_{A|B} \rho_B = \rho_{A|B} (I_A \otimes \rho_B)$. A notação assim torna-se mais compacta e não traz prejuízos para a compreensão do texto.

| Probabilidade Clássica | Teoria Quântica |
|-------------------------|--|
| $P(R, S) = P(S R)P(R)$ | $\rho_{AB} = \rho_{B A} \star \rho_A$ |
| $P(S R) = P(R, S)/P(R)$ | $\rho_{B A} = \rho_{AB} \star \rho_A^{-1}$ |

Tabela 2 – Analogia entre distribuições de probabilidade conjunta e condicionais clássicas e os estados quânticos equivalentes.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Com a definição do produto estrela, reescrevemos a expressão (2.7) como,

$$\rho_{AB} = \rho_{B|A} \star \rho_A. \quad (2.9)$$

E, equivalentemente, se tivermos acesso inicialmente ao estado conjunto ρ_{AB} e seu estado marginal $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$, o estado condicional é definido como,

$$\rho_{B|A} = \rho_{AB} \star \rho_A^{-1}. \quad (2.10)$$

A tabela 2 estabelece as analogias entre a teoria de probabilidade clássica e o FEC. A distribuição de probabilidade conjunta entre duas variáveis aleatórias é associado a um estado conjunto da região composta \mathcal{H}_{AB} . Ao mesmo tempo, a probabilidade condicional de duas variáveis aleatórias é associado a um estado condicional pertencente à região composta \mathcal{H}_{AB} . Assim, via o produto estrela, estabelecemos a conexão entre os operadores quânticos e suas respectivas correspondências na teoria de probabilidade clássica.

Observação: tal qual a expressão (2.4), que só está definida quando $P(R = r) \neq 0$, o seu análogo no FEC, a expressão (2.10) está definida em $\mathcal{L}(\text{supp}(\rho_A) \otimes \mathcal{H}_B)$, onde $\text{supp}(\rho_A)$ é o espaço gerado pelo autovetores de ρ_A que possuem autovalor diferente de zero.

2.3.1 PROPAGAÇÃO DE CRENÇA ACAUSAL

Dadas duas variáveis aleatórias R e S , considere que dispomos da probabilidade condicional $P(S|R)$ e da probabilidade marginal $P(R)$. Podemos utilizar a propagação de crença⁴ [4, 5] no intuito de caracterizar a distribuição de probabilidade sobre S , isto é,

⁴ A crença [27], como referida no texto, pode ser caracterizada como uma quantificação que alguém que analisa um certo sistema atribui à probabilidade de um evento ocorrer. Uma analogia que podemos usar para tornar esse conceito mais acessível é: o autor desta dissertação tem uma crença muito fraca de que ele seja um astronauta cantor de sertanejo, entretanto, crê fortemente que está vivo. Como dito na frase anterior, as crenças também podem ser classificadas como fortes ou fracas. No contexto deste trabalho, as crenças são interpretadas, analogamente ao que foi citado acima, como a probabilidade de que determinado evento ocorra no sistema em análise.

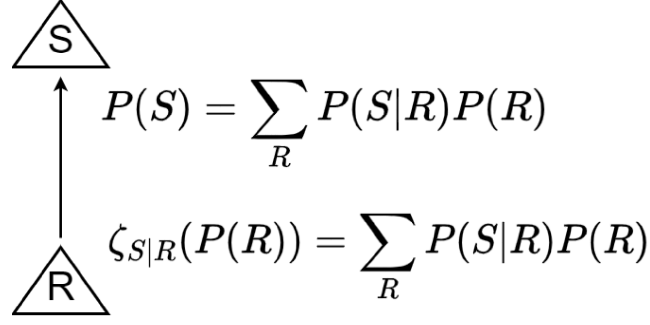


Figura 3 – Diagrama representando um mapa linear que se assemelha a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica, onde a variável aleatória R pode ser interpretada como o *input* de um canal clássico e a variável aleatória S pode ser interpretada como o *output* do referido canal clássico.

Fonte: Autoria Própria, 2025

$P(S)$,

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_r P(R, S) \\ &= \sum_r P(S|R)P(R). \end{aligned} \quad (2.11)$$

A expressão (2.11) assemelha-se com a especificação de um mapa linear da distribuição de probabilidades sobre a variável aleatória R para uma distribuição de probabilidade sobre a variável aleatória S , ou seja, $\zeta_{S|R}$, definido por,

$$\zeta_{S|R}(P(R)) \equiv \sum_r P(S|R)P(R) \quad (2.12)$$

A Figura 3 esquematiza a semelhança entre a propagação de crença clássica e o mapa linear.

Então, a propagação de crença de uma região quântica A para uma região quântica B é definida de maneira análoga,

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \text{Tr}_A(\rho_{B|A} \star \rho_A). \quad (2.13)$$

Utilizando a identidade (A.15) do apêndice, a expressão (2.13) toma a forma,

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{B|A}\rho_A). \quad (2.14)$$

Ainda mais, de forma equivalente ao que foi feito acima, a propagação de crença no FEC pode ser vista como a especificação de um mapa CPTP $\mathcal{E}_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ tal que,

$$\mathcal{E}_{B|A}(\rho_A) \equiv \text{Tr}_A(\rho_{B|A}\rho_A). \quad (2.15)$$

Mapas CPTP são aqueles que são completamente positivos e preservam o traço. Formalmente temos as seguintes definições [26],

Definição 2.3.3. Seja um mapa linear $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ onde \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B são espaços de Hilbert de dimensão finita. Dizemos que Φ é **completamente positivo (CP)** quando, para todo espaço de Hilbert de dimensão finita arbitrária \mathcal{H}_Z e para todo operador $\rho \in Pos(\mathcal{H}_{AZ})$, então $\Phi \otimes \mathbb{I}_Z(\rho) \in Pos(\mathcal{H}_{BZ})$, onde \mathbb{I}_Z é a identidade em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_Z)$.

Definição 2.3.4. Seja um mapa linear $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$ onde \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_C são espaços de Hilbert de dimensão finita. Dizemos que Φ **preserva o traço (TP)** quando $\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\Phi(\rho))$ para todo $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$.

Ainda mais, podemos estabelecer uma conexão entre o mapa CPTP $\mathcal{E}_{B|A}$ e o estado condicional $\rho_{B|A}$, que aparecem na expressão (2.15), via o *Isomorfismo de Jamiołkowski* [4]. Tal qual esquematizado na Figura 1, o isomorfismo associa mapas a operadores, ao mesmo tempo que associa operadores a mapas.

Quando os mapas são CPTP, o isomorfismo, tal qual será enunciado no teorema 2.3.1, associa estados condicionais acausais a estes mapas ao mesmo tempo que mapas CPTP são associados a estados condicionais acausais. O *Isomorfismo de Jamiołkowski* possui o seguinte enunciado [4],

Teorema 2.3.1. Isomorfismo de Jamiołkowski. *Seja $\mathcal{E}_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ um mapa linear e seja um operador $M_{AC} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AC})$ onde \mathcal{H}_C é um espaço de Hilbert de dimensão arbitrária. Então, a ação de $\mathcal{E}_{B|A}$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ (expandido com a identidade em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$) é dada por,*

$$(\mathcal{E}_{B|A} \otimes \mathbb{I}_C)(M_{AC}) = \text{Tr}_A(\rho_{B|A} M_{AC}), \quad (2.16)$$

onde $\rho_{B|A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ é dado por

$$\rho_{B|A} = (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_A) \left(\sum_{j,k} |j\rangle \langle k|_A \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \right). \quad (2.17)$$

A' representa uma cópia de A , $\mathbb{I}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ é a identidade e $\{|j\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_A . Ainda mais, o operador $\rho_{B|A}$ é um operador condicional acausal se, e somente se, $\mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$ é CPTP, onde $T_A : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ denota a transposta parcial relativa a alguma base.

Demonstração. A relação entre a expressão (2.16) e a expressão (2.17) é dada da seguinte

maneira,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_{B|A} \otimes \mathbb{I}_C)(M_{AC}) &= (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C)((\mathbb{I}_{A'} \otimes \mathbb{I}_C)M_{A'C}(\mathbb{I}_{A'} \otimes \mathbb{I}_C)) \\
&= (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C)\left(\sum_k |k\rangle \langle k|_{A'} M_{A'C} \sum_j |j\rangle \langle j|_{A'}\right) \\
&= (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C)\left(\sum_{k,j} \langle k| M_{A'C} |j\rangle_{A'} |k\rangle \langle j|_{A'}\right) \\
&= (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C)\left(\sum_{k,j} \text{Tr}_{A'}(|j\rangle \langle k|_{A'} M_{A'C}) |k\rangle \langle j|_{A'}\right).
\end{aligned}$$

Considerando $A = A'$

$$\begin{aligned}
&= (\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C) \text{Tr}_A\left(\sum_{k,j} (|j\rangle \langle k|_A \otimes |k\rangle \langle j|_{A'}) M_{AC}\right) \\
&= \text{Tr}_A((\mathcal{E}_{B|A'} \otimes \mathbb{I}_C)\left(\sum_{k,j} (|j\rangle \langle k|_A \otimes |k\rangle \langle j|_{A'}) M_{AC}\right)) \\
&= \text{Tr}_A(\rho_{B|A} M_{AC}).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora, suponha que $\rho_{B|A}$ seja um estado acausal. Logo $\rho_{B|A} \in \text{Pos}(\mathcal{H}_{AB})$ e $\text{Tr}_B(\rho_{B|A}) = I_A$. Para mostrar que $\mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$ é CPTP, primeiramente mostramos que tanto $\mathcal{E}_{B|A}$ quanto T_A são TP. Assim, sendo $M_{AC} = \sum_{aa'cc'} |a\rangle \langle a'| \otimes |c\rangle \langle c'|$, então,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(M_{AC}) &= \sum_{aa'a''cc'c''} m_{aa'cc'} \langle a''|a\rangle \langle a'|a''\rangle \otimes \langle c''|c\rangle \langle c'|c''\rangle \\
&= \sum_{aa'a''cc'c''} m_{aa'cc'} \delta_{a''a} \delta_{a'a''} \delta_{c''c} \delta_{c'c''} \\
&= \sum_{a''c''} m_{a''a''c''c''}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(T_A \otimes I_C)M_{AC}] &= \text{Tr}\left[\sum_{aa'cc'} m_{aa'cc'} T_A(|a\rangle \langle a'|) \otimes |c\rangle \langle c'|\right] \\
&= \sum_{aa'a''cc'c''} m_{aa'cc'} \delta_{a''a'} \delta_{aa''} \delta_{c''c} \delta_{c'c''} \\
&= \sum_{a''c''} m_{a''a''c''c''}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

E portanto, concluimos que,

$$\text{Tr}(M_{AC}) = \text{Tr}[(T_A \otimes I_C)M_{AC}]. \tag{2.21}$$

Logo a transposta parcial é TP. Agora, para mostrar que $\mathcal{E}_{B|A}$ é TP fazemos,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_B[\mathcal{E}_{B|A}(M_A)] &= \text{Tr}_B[\text{Tr}_A(\rho_{B|A} M_A)] \\
&= \text{Tr}_A[\text{Tr}_B(\rho_{B|A} M_A)] \\
&= \text{Tr}(I_A M_A) \\
&= \text{Tr}(M_A)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Assim, concluímos que $\mathcal{E}_{B|A}$ é TP.

Para mostrar que $\mathcal{E} \circ T_A$ é CP, notamos que esta composição é justamente o mapa de Choi [4, 25], ou seja, $\varepsilon_{B|A} = \mathcal{E} \circ T_A$. Por definição, o mapa de Choi isomorfo a um estado acausal $\rho_{B|A}$ é,

$$(\varepsilon_{B|A} \circ I_C)(M_{AC}) = \langle \phi^+ |_{AA'} \rho_{B|A'} \otimes M_{AC} | \phi^+ \rangle_{AA'}, \quad (2.23)$$

onde $|\phi^+\rangle = \sum_j |jj\rangle$ é o estado de Bell maximamente emaranhado e não normalizado e \mathcal{H}_C é um espaço de Hilbert de dimensão arbitrária.

Para mostrar que o mapa de Choi é CP, nos voltamos à sua definição [4]. Sendo $\varepsilon_{B|A} = \mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$, tomando $\rho_{AC} \in \text{Pos}(\mathcal{H}_{AC})$ e um estado acausal $\rho_{B|A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ temos,

$$(\varepsilon_{B|A} \circ I_C)(\rho_{AC}) \equiv \langle \phi^+ |_{AA'} \rho_{B|A'} \otimes \rho_{AC} | \phi^+ \rangle_{AA'}. \quad (2.24)$$

Por definição, um operador $M_{AC} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AC})$ é positivo semidefinido se para qualquer vetor arbitrário $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AC}$, $\langle \psi | M_{AC} | \psi \rangle \geq 0$. Logo, o operador resultante na expressão (2.24) é positivo semidefinido e, portanto, o mapa de Choi é CP.

Agora, assumimos que $\mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$ seja CPTP. Consequentemente $\mathcal{E}_{B|A}$ é TP, então $\rho_{B|A}$ é um estado acausal válido. De fato,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(\rho_{B|A}) &= \text{Tr}_B \left[\sum_{j,k} |j\rangle \langle k|_A \otimes \mathcal{E}_{B|A'}(|k\rangle \langle j|_{A'}) \right] \\ &= \sum_{j,k} |j\rangle \langle k|_A \otimes \text{Tr}_{A'}(\mathcal{E}_{B|A'}(|k\rangle \langle j|_{A'})) \\ &= \sum_{j,k} |j\rangle \langle k|_A \delta_{jk} \\ &= \sum_j |j\rangle \langle j|_A \\ &= I_A. \end{aligned} \quad (2.25)$$

E por fim, notamos que,

$$\rho_{B|A} = (\varepsilon_{B|A'} \otimes I_A)(|\phi^+\rangle \langle \phi^+|_{AA'}). \quad (2.26)$$

□

Via o teorema 2.3.1, é possível estabelecer uma conexão importante, o isomorfismo de Jamiolkowski entre o mapa CPTP $\mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$ com o estado condicional acausal $\rho_{B|A}$. Tal estado é responsável por, no FEC, realizar a propagação de crença entre regiões quânticas. Isto é, tal qual (2.15), temos que,

$$\mathcal{E}_{B|A}(\rho_A) = \rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{B|A} \rho_A). \quad (2.27)$$

2.4 ESTADOS CONDICIONAIS CAUSAIS

Quando estamos interessados em caracterizar as probabilidades condicionais de, digamos, duas variáveis aleatórias R e S , classicamente, não temos nenhuma exigência de estabelecer uma relação causal entre elas. Ou seja, independente se há ou não relação causal entre as variáveis, a descrição que a teoria de probabilidade usual oferece é neutra. No intuito de transportar essa neutralidade para o FEC, define-se então [4],

Definição 2.4.1. Um *estado condicional causal* de B dado A é um operador $\varrho_{B|A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ que pode ser escrito como,

$$\varrho_{B|A} = \rho_{B|A}^{T_A}, \quad (2.28)$$

para algum estado condicional acausal $\rho_{B|A}$. A transposta parcial T_A é tomada com relação a alguma base de \mathcal{H}_A .

Dado duas regiões quânticas, uma no futuro da outra, por exemplo, considerando a região B no futuro causal de A , tal relação pode ser descrita por um mapa CPTP $\varepsilon_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. Então, tendo o mapa que conecta as regiões causais, o seguinte teorema caracteriza a conexão de $\varepsilon_{B|A}$ com um *estado condicional causal*.

Teorema 2.4.1. *Seja $\varepsilon_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ um mapa linear e seja $\varrho_{B|A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ o operador Jamiołkowski isomorfo ao mapa. Então, $\varrho_{B|A}$ é um estado condicional causal se, e somente se, $\varepsilon_{B|A}$ for CPTP.*

Demonstração. Definimos $\rho_{B|A} = \varrho_{B|A}^{T_A}$ e consideramos $\mathcal{E}_{B|A}$ o mapa que é Jamiołkowski isomorfo a $\rho_{B|A}$. Por hipótese temos que $\varepsilon_{B|A} = \mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$. Da definição 2.4.1, $\varrho_{B|A}$ é um estado condicional se, e somente se $\rho_{B|A}$ for um estado condicional causal. Pelo teorema 2.3.1 $\rho_{B|A}$ é um estado condicional se, e somente se $\mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$ for CPTP. Então sendo $\varepsilon_{B|A} = \mathcal{E}_{B|A} \circ T_A$, decorre que $\varrho_{B|A}$ é um estado condicional válido se, e somente se $\varepsilon_{B|A}$ for CPTP. \square

Uma vez que $\varrho_{B|A}$ é o estado Jamiołkowski isomorfo ao mapa $\varepsilon_{B|A}$, sendo ρ_A um estado inicial na região A , então,

$$\rho_B = \varepsilon_{B|A}(\rho_A) = \text{Tr}_A(\varrho_{B|A}\rho_A). \quad (2.29)$$

A expressão (2.29) é o que chamamos de propagação de crença causal quântica.

Analogamente ao cenário acausal, pode-se definir um estado conjunto causal, tal qual representado na expressão (2.9). Define-se então [4],

Definição 2.4.2. Um *estado conjunto causal* de duas regiões casualmente relacionadas A e B é o operador em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ dado por,

$$\varrho_{AB} = \varrho_{B|A} \star \rho_A. \quad (2.30)$$

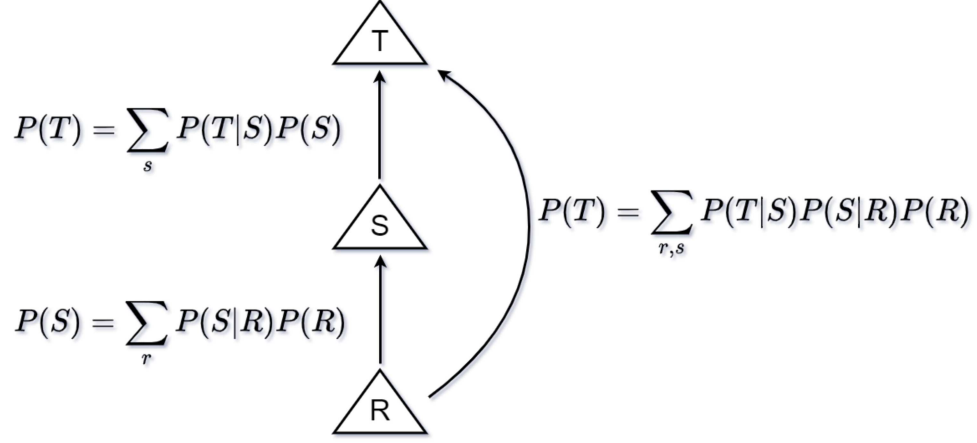


Figura 4 – Diagrama representando a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica. As probabilidades $P(T)$ e $P(S)$ são combinadas a fim de se obter a probabilidade condicional relativa à propagação de crenças entre as regiões clássicas R e T , isto é $P(T|R)$.

Fonte: Autoria Própria, 2025

A marginalização do estado conjunto causal ocorre tal qual o definido para o caso acausal sendo,

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\varrho_{AB}) = \text{Tr}_A(\varrho_{B|A}\rho_A). \quad (2.31)$$

2.5 COMPOSIÇÃO DE ESTADOS CONDICIONAIS

Vamos supor agora 3 regiões associadas às variáveis clássicas R , S e T , tal qual ilustra a Figura 4. Assumimos que S está no futuro de R , T está no futuro de S e que desejamos caracterizar a propagação de crenças de R para T . Classicamente, a propagação de crença é representada da seguinte maneira. Inicialmente propagamos as crenças de R para S ,

$$P(S) = \sum_r P(S|R)P(R), \quad (2.32)$$

e de S para T ,

$$\begin{aligned} P(T) &= \sum_s P(T|S)P(S) \\ &= \sum_{s,r} P(T|S)P(S|R)P(R). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Definindo,

$$P(T|R) \equiv \sum_s P(T|S)P(S|R), \quad (2.34)$$

podemos reescrever (2.33) como,

$$P(T) = \sum_r P(T|R)P(R). \quad (2.35)$$

Ainda mais, $P(T|R)$ define uma probabilidade condicional válida, pois

$$\begin{aligned}
 \sum_t P(T|R) &= \sum_{t,s} P(T|S)P(S|R) \\
 &= \sum_s \left(\sum_t P(T|S) \right) P(S|R) \\
 &= \sum_s P(S|R) \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Além disso $P(T|S) \geq 0$ e $P(S|R) \geq 0$, assumindo que essas distribuições de probabilidade condicional são válidas.

Nesse sentido, podemos naturalmente nos perguntar: qual o análogo quântico da propagação de crença quando analisamos um cenário semelhante ao descrito acima, isto é, quando desejamos caracterizar a propagação de crença entre mais de duas regiões quânticas casualmente relacionadas? O teorema abaixo dá uma resposta para essa questão.

Teorema 2.5.1. *Sejam $\varepsilon_{B|A}$, $\varepsilon_{C|B}$ e $\varepsilon_{C|A}$ mapas lineares tal que $\varepsilon_{C|A} = \varepsilon_{C|B} \circ \varepsilon_{B|A}$. Então os operadores Jamiołkowski isomorfos $\varrho_{B|A}$, $\varrho_{C|B}$ e $\varrho_{C|A}$ satisfazem,*

$$\varrho_{C|A} = \text{Tr}_B(\varrho_{C|B}\varrho_{B|A}). \tag{2.37}$$

Por outro lado, se três operadores satisfazem à expressão (2.37), então os mapas Jamiołkowski isomorfos satisfazem $\varepsilon_{C|A} = \varepsilon_{C|B} \circ \varepsilon_{B|A}$.

Demonstração. Pelo teorema 2.4.1 e considerando A' uma cópia da região A , temos que,

$$\begin{aligned}
\varrho_{C|A} &= (\varepsilon_{C|A} \otimes \mathbb{I}_{A'}) \left(\sum_{j,k} |j\rangle \langle k|_A \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \right) \\
&= \sum_{j,k} \varepsilon_{C|A}(|j\rangle \langle k|_A) \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \\
&= \sum_{j,k} \varepsilon_{C|B} \circ \varepsilon_{B|A}(|j\rangle \langle k|_A) \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \\
&= \sum_{j,k} \varepsilon_{C|B}(\text{Tr}_A(\varrho_{B|A} |j\rangle \langle k|_A)) \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \\
&= \sum_{j,k} \varepsilon_{C|B}(\langle k| \varrho_{B|A} |j\rangle_A) \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \\
&= \sum_{j,k} \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \langle k| \varrho_{B|A} |j\rangle_A) \otimes |k\rangle \langle j|_{A'} \\
&= \sum_{j,k} \langle k| \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}) |j\rangle_A \otimes |k\rangle \langle j|_{A'}.
\end{aligned}$$

Considerando $A = A'$,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k} |k\rangle \langle k|_A \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}) |j\rangle \langle j|_A \\
&= \left(\sum_k |k\rangle \langle k|_A \otimes \mathbb{I}_C \right) \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}) \left(\sum_j |j\rangle \langle j|_A \otimes \mathbb{I}_C \right) \\
&= (\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_C) \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}) (\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_C) \\
&= \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Por outro lado, temos que, para $M_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ arbitrário,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{C|A}(M_A) &= \text{Tr}_A(\varrho_{C|A} M_A) \\
&= \text{Tr}_A[\text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}) M_A] \\
&= \text{Tr}_B[\varrho_{C|B} \text{Tr}_A(\varrho_{B|A} M_A)] \\
&= \text{Tr}_B[\varrho_{C|B} \varepsilon_{B|A}(M_A)] \\
&= \varepsilon_{C|B}(\varepsilon_{B|A}(M_A)) \\
&= \varepsilon_{C|B} \circ \varepsilon_{B|A}(M_A).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

□

O teorema 2.5.1 nos fornece o análogo quântico da expressão (2.34). Um resultado que pode ser diretamente derivado do teorema 2.4.1 é o seguinte corolário,

Corolário 2.5.1. *Sejam $\varepsilon_{C|A}$, $\varepsilon_{C|D}$, $\varepsilon_{D|B}$ e $\varepsilon_{B|A}$ mapas lineares tal que $\varepsilon_{C|A} = \varepsilon_{C|D} \circ \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A}$. Então os operadores Jamiołkowski isomorfos $\varrho_{C|A}$, $\varrho_{C|D}$, $\varrho_{D|B}$ e $\varrho_{B|A}$ satisfazem,*

$$\varrho_{C|A} = \text{Tr}_{DB}(\varrho_{C|D} \varrho_{D|B} \varrho_{B|A}). \tag{2.40}$$

Por outro lado, se quatro operadores satisfazem (2.40) então os mapas Jamiołkowski isomorfos satisfazem $\varepsilon_{C|A} = \varepsilon_{C|D} \circ \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A}$.

Demonstração. Partindo do teorema 2.4.1, temos que

$$\varepsilon_{C|A} = \varepsilon_{C|B} \circ \varepsilon_{B|A} \quad (2.41)$$

é isomorfo a,

$$\varrho_{C|A} = \text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \varrho_{B|A}). \quad (2.42)$$

Considerando $\varepsilon_{C|B} = \varepsilon_{C|D} \circ \varepsilon_{D|B}$, novamente pelo teorema 2.4.1, temos,

$$\varrho_{C|B} = \text{Tr}_D(\varrho_{C|D} \varrho_{D|B}). \quad (2.43)$$

Assim, substituindo (2.43) em (2.42), encontramos,

$$\varrho_{C|A} = \text{Tr}_{BD}(\varrho_{C|D} \varrho_{D|B} \varrho_{B|A}). \quad (2.44)$$

Por outro lado, para $M_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{C|A}(M_A) &= \text{Tr}_{DB}(\varrho_{C|D} \varrho_{D|B} \varrho_{B|A} M_A) \\ &= \text{Tr}_D(\varrho_{C|D} \text{Tr}_B(\varrho_{D|B} \varrho_{B|A}) M_A) \\ &= \text{Tr}_D(\varrho_{C|D} \varrho_{D|A} M_A) \\ &= \varepsilon_{C|D} \circ \varepsilon_{D|A}(M_A) \\ &= \varepsilon_{C|D} \circ \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A}(M_A). \end{aligned} \quad (2.45)$$

□

2.6 OPERADORES HÍBRIDOS

Quando consideramos a preparação de *ensembles* ou medições em sistemas quânticos, ou seja, processos físicos, então, os mapas que representam tais processos são CPTP. A Figura 5 fornece um exemplo de medição e outro de preparação de estados. Sob a luz do FEC, apresentamos aqui os operadores híbridos, que serão os responsáveis por representar tais processos. Utilizando o teorema 2.3.1 definimos,

Definição 2.6.1. Um *operador híbrido* sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{XA})$ é um operador da forma,

$$M_{XA} = \sum_x |x\rangle \langle x|_X \otimes M_x^A, \quad (2.46)$$

onde $\{|x\rangle\}$ é uma base preferencial em \mathcal{H}_X e $\{M_x^A\}$ é um conjunto de operadores atuando sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ rotulados por valores da variável aleatória X associada à região clássica representada pelo espaço de Hilbert \mathcal{H}_X . Os operadores M_x^A são referidos como os componentes de M_{XA} .

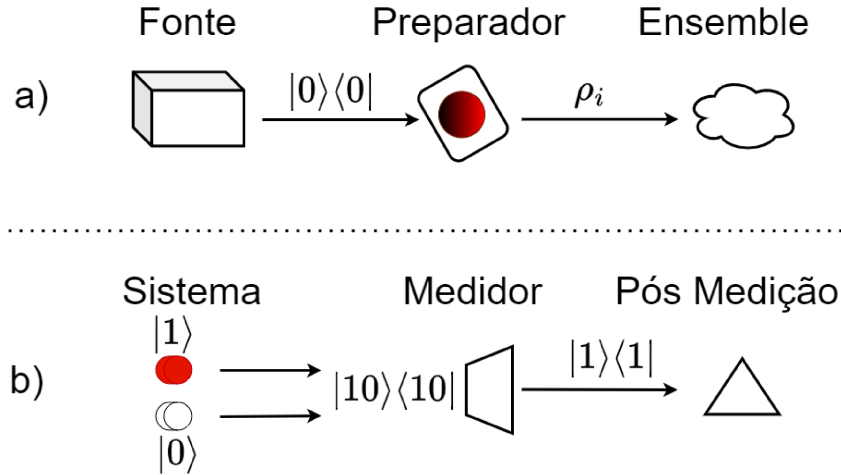


Figura 5 – Diagrama representando os processos de medição e preparação de *ensemble*. a) Uma fonte emite fótons que passam por um polarizador. O polarizador por sua vez rotaciona lentamente. Dessa forma os fótons que passam pelo polarizador em diferentes instantes de tempo são levados a estados distintos resultando em um *ensemble*. b) Um sistema emite, ou não, pares de fótons em tiques de tempo. Cada estado emitido em um certo tique é representado por um qubit onde $|0\rangle$ significa que não houve emissão e $|1\rangle$ significa que houve emissão. Os estados então são enviados a um detector que realiza uma medição sobre eles e resulta em um outro estado.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Quando se trata de estados condicionais híbridos, estes podem ser vistos como de dois tipos, que dependem diretamente de qual variável será condicionada. Para os sistemas que serão analisados neste trabalho, utilizaremos somente o condicionamento na variável clássica. Tais estados, representados da forma $\sigma_{X|A}$, são os estados associados ao processo de medição de um sistema quântico. Assim, o seguinte teorema caracteriza essa classe de estados híbridos.

Teorema 2.6.1. *Seja $\sigma_{X|A}$ um operador híbrido da forma,*

$$\sigma_{X|A} = \sum_x |x\rangle \langle x|_X \otimes E_x^A, \quad (2.47)$$

para algum conjunto de operadores $\{E_x^A\}$. Então, $\sigma_{X|A}$ satisfaz tanto a definição de estado acausal quanto de estado causal se, e somente se $\{E_x^A\}$ for um POVM sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$.

Demonstração. Seja o estado híbrido $\sigma_{X|A}$,

$$\sigma_{X|A} = \sum_x |x\rangle \langle x|_X \otimes E_x^A, \quad (2.48)$$

onde $\{E_x^A\}$ é um POVM. Então,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_X(\sigma_{X|A}) &= \sum_x \mathrm{Tr}(|x\rangle\langle x|) \otimes E_x^A \\ &= \sum_x E_x^A \\ &= I_A.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Ainda mais, para qualquer vetor arbitrário $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AX}$ temos que $\langle\psi|\sigma_{X|A}|\psi\rangle \geq 0$. Logo $\sigma_{X|A}$ satisfaz a definição 2.3.1 e, portanto, é um estado condicional acausal. Uma vez que $\sigma_{X|A}$ é um estado acausal válido, então pela definição 2.4.1,

$$\sigma_{X|A}^{T_A} = \sum_x |x\rangle\langle x| \otimes (E_x^A)^{T_A},\tag{2.50}$$

é um estado causal válido. E uma vez que se $\{E_x^A\}$ é um POVM então $\{(E_x^A)^{T_A}\}$ também forma um POVM, temos que,

$$\mathrm{Tr}_X(\sigma_{X|A}^{T_A}) = \sum_x (E_x^A)^{T_A} = I_A.\tag{2.51}$$

Supondo agora que $\sigma_{X|A}$ é um estado acausal, portanto $\sigma_{X|A} \in \mathrm{Pos}(\mathcal{H}_{XA})$ e $\mathrm{Tr}_X(\sigma_{X|A}) = I_A$. Como $\sigma_{X|A}$ é positivo semidefinido, isso implica que, para qualquer $|\psi\rangle$ arbitrário em \mathcal{H}_{XA} ,

$$\langle\psi|\sigma_{X|A}|\psi\rangle \geq 0.\tag{2.52}$$

Logo, pela arbitrariedade da escolha de $|\psi\rangle$ concluímos que cada um dos componentes de $\sigma_{X|A}$ devem ser localmente positivo semidefinidos, logo $E_x^A \in \mathrm{Pos}(\mathcal{H}_A)$. Como $\mathrm{Tr}_X(\sigma_{X|A}) = \sum_x E_x^A = I_A$, logo concluímos que E_x^A é um POVM. Pela definição 2.4.1, uma vez que $\sigma_{X|A}$ é um estado condicional acausal válido, então $\sigma_{X|A}^{T_A}$ é um estado causal válido. \square

2.7 TEOREMA DE BAYES QUÂNTICO

Dadas duas variáveis aleatórias R e S , sua probabilidade conjunta, como apresentado em (2.5), é da forma,

$$P(R, S) = P(R|S)P(S),\tag{2.53}$$

ou ainda,

$$P(R, S) = P(S|R)P(R).\tag{2.54}$$

Igualando as expressões (2.53) e (2.54) obtemos

$$P(R|S) = \frac{P(S|R)P(R)}{P(S)}.\tag{2.55}$$

A expressão (2.55) é o que chamamos de teorema de Bayes clássico. O principal ponto que nos interessa na expressão originalmente fornecida por Thomas Bayes [6, 23] é a

possibilidade de reverter probabilidades condicionais. Por exemplo, ao considerarmos a variável S associada ao ato “fumar” e a variável R for associada a “ter um ataque cardíaco”, sendo a probabilidade condicional relacionada a estas variáveis “ter um ataque cardíaco dado que fumou” $P(R|S)$, além de considerar que temos acesso às probabilidades marginais $P(S)$ e $P(R)$ e que ambas são diferentes de zero, então, via (2.55), conseguimos computar a probabilidade condicional “de ter fumado dado que teve um ataque cardíaco” $P(S|R)$.

O análogo quântico do teorema de Bayes pode ser definido de maneira similar ao caso clássico. Recordando a expressão (2.9), temos que,

$$\rho_{AB} = \rho_{A|B} \star \rho_B, \quad (2.56)$$

ou ainda,

$$\rho_{AB} = \rho_{B|A} \star \rho_A. \quad (2.57)$$

Logo, combinando as expressões (2.56) e (2.57), obtemos,

$$\rho_{A|B} = \rho_{B|A} \star (\rho_A \rho_B^{-1}). \quad (2.58)$$

A expressão (2.58) é o que chamamos teorema de Bayes quântico para estados condicionais acausais. Para os estados causais, temos similarmente,

$$\varrho_{A|B} = \varrho_{B|A} \star (\rho_A \rho_B^{-1}). \quad (2.59)$$

Por fim, a tabela 3 sintetiza uma visão geral da estrutura do Formalismo de Estados Condicionais e as suas analogias com a teoria clássica de inferência Bayesiana.

| | Classico | Quântico |
|------------------------------|------------------------------------|--|
| Estado | $P(R)$ | ρ_A |
| Estado Conjunto | $P(R, S)$ | σ_{AB} |
| Marginalização | $P(S) = \sum_R P(R, S)$ | $\rho_B = \text{Tr}_A(\sigma_{AB})$ |
| Estado condicional | $P(S R)$ | $\sigma_{B A}$ |
| | $\sum_S P(S R) = 1$ | $\text{Tr}_B(\sigma_{B A}) = I_A$ |
| Relação entre estados | $P(R, S) = P(S R)P(R)$ | $\sigma_{AB} = \sigma_{B A} \star \rho_A$ |
| | $P(S R) = \frac{P(R, S)}{P(R)}$ | $\sigma_{B A} = \sigma_{AB} \star \rho_A^{-1}$ |
| Teorema de Bayes | $P(R S) = \frac{P(S R)P(R)}{P(S)}$ | $\sigma_{A B} = \sigma_{B A} \star (\rho_A \rho_B^{-1})$ |
| Propagação de crença | $P(S) = \sum_R P(S R)P(R)$ | $\rho_B = \text{Tr}_A(\sigma_{B A} \rho_A)$ |

Tabela 3 – Tabela exemplificando a relação entre a teoria de inferência Bayesiana clássica e o seu análogo quântico. A letra grega σ foi utilizada como forma de mostrar a validade de dadas expressões tanto para estados causais quanto acausais.

Fonte: Esta tabela foi retirada diretamente da referência [4]

Terminamos esta seção recapitulando o que foi exposto aqui. Exploramos a proposta de Leifer e Spekkens de um novo arcabouço matemático que interpreta a mecânica quântica

como uma generalização da teoria de probabilidades clássica [4]. A respeito do agora intitulado FEC, explicitamos as definições fornecidas pelos autores. Partindo da ideia primitiva de região, tal como elaborada no trabalho supracitado, introduzimos os estados condicionais e as relações de causalidade que os permeiam. Em seguida, precisamos como se dá a propagação de crença no FEC e apresentamos o *isomorfismo de Jamiolkowski*, que nos permite associar os mapas CPTP a seus respectivos estados condicionais e vice-versa. Por fim, com base nas definições apresentadas, introduzimos o teorema de Bayes para operadores condicionais.

3 APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE ESTADOS CONDICIONAIS

Uma vez que temos o arcabouço necessário para dar continuidade a nossa investigação, neste capítulo nos voltaremos a aplicar a estrutura anteriormente introduzida para certos cenários.

3.1 COMPARANDO A PROPAGAÇÃO DE CRENÇA

Como prelúdio da investigação central que desenvolveremos neste trabalho, e que o motiva, analisamos aqui o cenário esquematizado na Figura 6. Isto é, vamos supor que tudo a que temos acesso sejam mapas CPTP conectando os espaços de Hilbert associados às regiões clássicas R , S , X e Y . Sob a perspectiva do FEC, como se estabelece a propagação de crença entre as regiões X e Y ? Com base nesse mesmo exemplo, ao final desta seção comparamos o resultado obtido via FEC com aquele derivado da teoria de probabilidades clássica.

Em consonância com [4], para as variáveis aleatórias R , S , X e Y , na perspectiva do FEC, escolhemos espaços de Hilbert com bases preferenciais, de tal forma que todos os operadores podem assumir uma representação diagonal. Assim, temos os espaços \mathcal{H}_R , \mathcal{H}_S , \mathcal{H}_X e \mathcal{H}_Y com as respectivas bases $\beta_R = \{|r\rangle\}_{r=1}^{|\Sigma_R|}$, $\beta_S = \{|s\rangle\}_{s=1}^{|\Sigma_S|}$, $\beta_X = \{|x\rangle\}_{x=1}^{|\Sigma_X|}$ e $\beta_Y = \{|y\rangle\}_{y=1}^{|\Sigma_Y|}$. A dimensão de cada espaço de Hilbert corresponde à quantidade de valores que a variável aleatória que rotula cada região clássica pode assumir.

Sendo assim, embutimos a probabilidade clássica conjunta de duas variáveis aleatórias R e S nos estados conjunto da seguinte maneira,

$$\rho_{RS} = \sum_{r,s} P(R, S) |r\rangle \langle r| \otimes |s\rangle \langle s|. \quad (3.1)$$

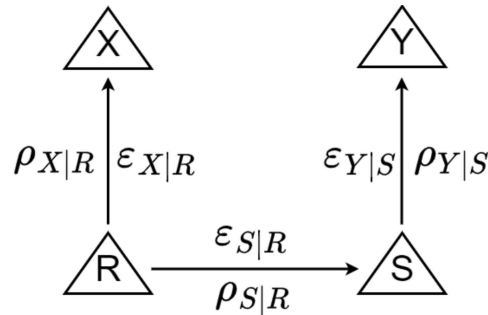


Figura 6 – Diagrama esquematizando quatro regiões clássicas e os estados condicionais. Estão representadas as dinâmicas que conectam casualmente as regiões, isto é $\epsilon_{X|R}$, $\epsilon_{S|R}$, $\epsilon_{Y|S}$ e seus respectivos estados condicionais associados $\rho_{X|R}$, $\rho_{S|R}$ e $\rho_{Y|S}$.

Conforme as regras estabelecidas na tabela 2, obtemos probabilidade marginal como,

$$\rho_S = \text{Tr}_R(\rho_{RS}) = \sum_s P(S) |s\rangle \langle s|, \quad (3.2)$$

e a probabilidade condicional como,

$$\rho_{S|R} = \sum_{r,s} P(S|R) |r\rangle \langle r| \otimes |s\rangle \langle s|. \quad (3.3)$$

Inicialmente, supomos que temos acesso às dinâmicas que conectam as regiões,¹ isto é, conhecemos $\varepsilon_{X|R}$, $\varepsilon_{S|R}$ e $\varepsilon_{Y|S}$. Temos assim os estados isomorfos² $\rho_{X|R}$, $\rho_{S|R}$ e $\rho_{Y|S}$. Além disso, dispomos de um estado inicial ρ_R . Com isso podemos continuar a busca do estado $\rho_{Y|X}$ (aqui pedimos que $\forall x, y \quad P(X=x|Y=y) \neq 0$). Precisamos então determinar o estado conjunto ρ_{XR} , análogo à probabilidade conjunta $P(X, R)$, conforme definido na expressão (3.1). Logo,

$$\begin{aligned} \rho_{XR} &= \rho_{X|R} \star \rho_R \\ &= (\rho_R^{1/2} \otimes I_X) \rho_{X|R} (\rho_R^{1/2} \otimes I_X) \\ &= \sum_{x,r} P(R) P(X|R) |r\rangle \langle r| \otimes |x\rangle \langle x| \\ &= \sum_{x,r} P(X, R) |r\rangle \langle r| \otimes |x\rangle \langle x|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Via marginalização,

$$\rho_X = \text{Tr}_R(\rho_{XR}) = \sum_x P(X) |x\rangle \langle x|. \quad (3.5)$$

E pelo teorema de Bayes quântico, dado pela expressão³ (2.58),

$$\begin{aligned} \rho_{R|X} &= \rho_{X|R} \star (\rho_R \rho_X^{-1}) \\ &= (\rho_R^{1/2} \otimes I_X) (I_R \otimes \rho_X^{-1/2}) \rho_{X|R} (\rho_R^{1/2} \otimes I_X) (I_R \otimes \rho_X^{-1/2}) \\ &= \sum_{x,r} \frac{P(R) P(X|R)}{P(X)} |r\rangle \langle r| \otimes |x\rangle \langle x| \\ &= \sum_{x,r} P(R|X) |r\rangle \langle r| \otimes |x\rangle \langle x|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

¹ O leitor pode se questionar o motivo dessa escolha. Justificamos: no nosso problema central, tudo o que temos são as dinâmicas causais que conectam regiões distintas. Aqui, nesta seção, queremos analisar o resultado considerando a mesma estrutura, porém aplicada a regiões clássicas.

² Como os estados condicionais clássicos, no exemplo que escolhemos retratar aqui, são definidos em uma base preferencial onde os operadores são diagonais, estes, por sua vez, são invariantes sobre transposição parcial. Portanto, os estados causais e acausais clássicos têm a mesma forma. Por isso que, mesmo assumindo que temos inicialmente acesso às dinâmicas, representamos os estados como $\rho_{(\cdot)}$.

³ Para evitar divisões por zeros na solução proposta, excluimos os casos em que $P(X=x) = 0$ para um dado $X=x$.

Como estamos tratando de probabilidade clássica imersa no Formalismo de Estados Condicionais, a inversão Bayesiana que fizemos acima não traz muitos problemas, uma vez que todos os operadores envolvidos permanecem positivo semidefinidos sobre todas as operações que realizamos. Entretanto, nem sempre esta inversão é possível quando tratamos de estados causais mais gerais do que os clássicos. Veremos uma discussão mais ampla sobre este fato na seção seguinte.

Sendo assim, uma vez que possuímos acesso aos mapas CPTP que conectam as regiões, via o teorema 2.4.1, temos

$$\rho_{S|R} = \sum_{s,r} P(S|R) |s\rangle \langle s| \otimes |r\rangle \langle r|, \quad (3.7)$$

$$\rho_{Y|S} = \sum_{y,s} P(Y|S) |y\rangle \langle y| \otimes |s\rangle \langle s|. \quad (3.8)$$

Logo, via o corolário 2.5.1, conseguimos encontrar quem é o estado que procuramos, isto é, quem é $\rho_{Y|X}$, o estado que representa a propagação de crença da região X para a região Y no diagrama 6. Sua forma é dada por,

$$\rho_{Y|X} = Tr_{RS}(\rho_{Y|S}\rho_{S|R}\rho_{R|X}). \quad (3.9)$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \rho_{Y|X} &= Tr_{RS}(\sum_{r,s,x,y} P(Y|S)P(S|R)P(R|X) |y\rangle \langle y| \otimes |x\rangle \langle x| \otimes |r\rangle \langle r| \otimes |s\rangle \langle s|) \\ &= \sum_{r,s,x,y} P(Y|S)P(S|R)P(R|X) Tr_{RS}(|y\rangle \langle y| \otimes |x\rangle \langle x| \otimes |r\rangle \langle r| \otimes |s\rangle \langle s|) \\ &= \sum_{r,s,x,y} P(Y|S)P(S|R)P(R|X) (|y\rangle \langle y| \otimes |x\rangle \langle x|). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por fim, verificamos se $\rho_{Y|X}$ é um estado acausal. Pela definição 2.3.1 temos,

$$Tr_Y(\rho_{Y|X}) = \sum_{r,s,x,y} P(Y|S)P(S|R)P(R|X) |x\rangle \langle x|. \quad (3.11)$$

Fixando $S = s \in \Gamma_S$ e somando sobre todos os $Y = y \in \Gamma_Y$ temos que $\sum_y P(Y|S) = 1$, analogamente para $R = r \in \Gamma_R$ e $X = x \in \Gamma_X$ fixados, $\sum_s P(S|R) = 1$ e $\sum_r P(R|X) = 1$. Portanto,

$$Tr_Y(\rho_{Y|X}) = \sum_x |x\rangle \langle x| = I_X. \quad (3.12)$$

E assim concluímos que o estado $\rho_{Y|X}$ é um estado acausal válido. Pela definição 2.4.1 sabemos que $\varrho_{Y|X} = \rho_{Y|X}$, onde notamos que os estados puramente clássicos são invariantes por transposição parcial e, portanto, $\varrho_{Y|X}$ é também um estado causal válido.

A expressão (3.10) é análoga à propagação de crença clássica. Para evidenciar essa conexão, tal qual foi feito na seção 2.5 para 3 regiões, vamos revisitar brevemente a propagação de crença clássica num cenário semelhante de 4 regiões.

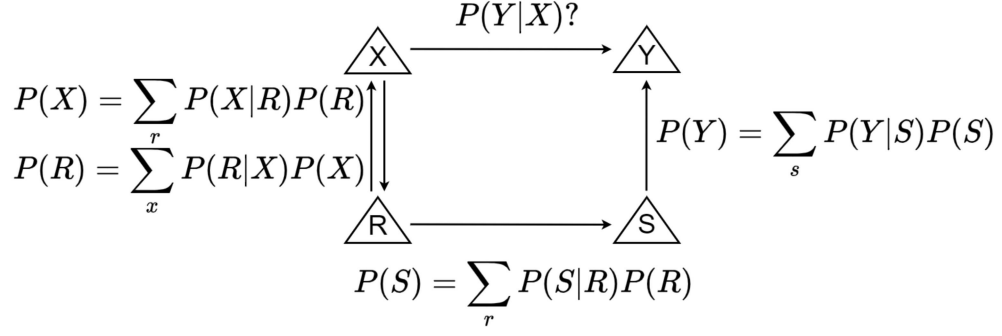


Figura 7 – Diagrama representando a propagação de crença na teoria de probabilidade clássica entre as 4 regiões clássicas R , S , X e Y . Buscamos qual a probabilidade condicional responsável por realizar a propagação de crença direta entre as regiões clássicas X e Y .

Fonte: Autoria Própria, 2025

Para isso, consideremos o diagrama contido na Figura 7. Temos,

$$P(Y) = \sum_s P(Y|S)P(S), \quad (3.13)$$

$$P(S) = \sum_r P(S|R)P(R), \quad (3.14)$$

$$P(R) = \sum_x P(R|X)P(X). \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) em (3.13) e depois substituindo (3.15) em (3.13) obtemos,

$$P(Y) = \sum_x P(Y|X)P(X), \quad (3.16)$$

onde,

$$P(Y|X) \equiv \sum_{s,r} P(Y|S)P(S|R)P(R|X). \quad (3.17)$$

Portanto, é possível notar uma conexão entre a teoria de probabilidades clássicas com o FEC uma vez que voltamos às expressões (3.17) e (3.10). Mais especificamente, notamos que a expressão (3.17) aparece no estado condicional $\rho_{Y|X}$ dado pela expressão (3.10).

Assim respondemos à pergunta inicial desta seção. Quando embutimos as probabilidades clássicas nos operadores condicionais associados ao exemplo que utilizamos, notamos, via as expressões (3.10) e (3.17), que a estrutura dos estados condicionais reproduz a propagação de crença. Ainda mais, quando trabalhamos com estados condicionais clássicos, dada a escolha de uma base preferencial para o espaço de Hilbert associado, notamos ainda que estes estados são invariantes por transposição parcial, nos permitindo inferir que os estados causais e acausais têm a mesma forma, mantendo a neutralidade em relação à causalidade na inferência clássica.

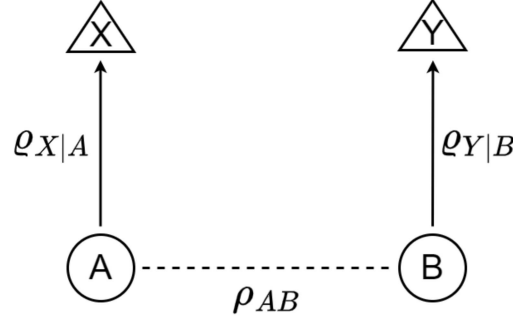


Figura 8 – Diagrama representando medições simultâneas em duas regiões A e B espacialmente separadas. Onde representamos o estado conjunto das regiões espacialmente separadas A e B e os estados condicionais híbridos responsáveis pelas respectivas medições.

Tal cenário pode ser utilizado para representar experimentos do tipo EPR.

Fonte: Autoria Própria, 2025

3.2 PROPAGAÇÃO DE CRENÇA EM SISTEMAS HÍBRIDOS

Vamos nos voltar agora a para análise de um cenário no qual existem duas regiões quânticas, A e B , acausalmente correlacionadas, e são performadas medições simultaneamente nas respectivas regiões. As medições, como exposto na seção 2.6, são representadas por estados condicionais híbridos causais $\varrho_{X|A}$ e $\varrho_{Y|B}$. Quando trabalhamos com cenários tal qual a Figura 8 apresenta, e buscamos correlações entre medições realizadas nas regiões acausalmente relacionadas, estamos esquematizando experimentos do tipo EPR [18], que serão explicados na próxima seção. Assim, buscamos aqui encontrar quem é o canal associado a propagação de crença entre as regiões X e Y .

Como as regiões A e B são acausalmente relacionadas, isto é, duas regiões espacialmente separadas, então o sistema físico das duas regiões é descrito por um estado conjunto ρ_{AB} .⁴

Olhando para a probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y , podemos a representar como,

$$P(X, Y) = \sum_{a,b} P(X, Y|A, B) P(A, B), \quad (3.18)$$

desde que assumamos a existência de uma distribuição $P(X, Y, A, B)$ [5]. Analogamente à expressão (3.18) e considerando que duas medições conjuntas são realizadas nas regiões

⁴ Como introduzido na seção 2.2 a representação de experimentos espacialmente separados no formalismo usual da teoria quântica é dado via um estado pertencente à região composta. No Formalismo de Estados Condicionais, modelamos tais experimentos espacialmente separados como regiões acausalmente correlacionadas. Dessa forma, quando nos deparamos com essa estrutura, o que temos inicialmente é um estado conjunto acausal entre as regiões. Quando temos a mesma região em dois instantes distintos, o que temos no formalismo usual é uma dinâmica CPTP, assim, no Formalismo de Estados Condicionais, via o teorema 2.3.1 e 2.4.1, obtemos inicialmente um estado condicional causal.

quânticas A e B , então, ρ_{XY} é então dado como

$$\rho_{XY} = \text{Tr}_{AB}((\varrho_{X|A}\varrho_{Y|B})\rho_{AB}). \quad (3.19)$$

Poderíamos buscar uma representação da expressão (3.19) onde tivéssemos uma dependência direta de $\rho_{B|A}$. Assim, para isso, escrevemos o estado conjunto das regiões A e B como $\rho_{AB} = \rho_{B|A} \star \rho_A$ e via teorema de Bayes,

$$\varrho_{X|A} = \varrho_{A|X} \star (\rho_X \rho_A^{-1}). \quad (3.20)$$

Substituindo a expressão para ρ_{AB} e a expressão (3.20) na expressão (3.19) e utilizando as propriedades apresentadas no apêndice, obtemos,

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \text{Tr}_{AB}\{[\varrho_{A|X} \star (\rho_X \rho_A^{-1})]\varrho_{Y|B}[\rho_{B|A} \star \rho_A]\} \\ &= \text{Tr}_{AB}\{\rho_X^{1/2} \rho_A^{-1/2} \varrho_{A|X} \rho_X^{1/2} \rho_A^{-1/2} \varrho_{Y|B} \rho_A^{1/2} \rho_{B|A} \rho_A^{1/2}\} \\ &= \text{Tr}_{AB}\{\rho_X^{1/2} \varrho_{A|X} \rho_X^{1/2} \varrho_{Y|B} \rho_{B|A}\} \\ &= \text{Tr}_{AB}\{\varrho_{Y|B} \rho_{B|A} \varrho_{A|X}\} \star \rho_X. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analisando a expressão (3.21), podemos constatar que, como supracitado, ela nos entrega, em função dos estados condicionais que temos acesso, o estado conjunto.

Além disso, quando nos voltamos à expressão (3.21), notamos a emergência de um estado condicional. Isto é, pelo corolário 2.5.1 obtemos,

$$\rho_{Y|X} = \text{Tr}_{AB}\{\varrho_{Y|B} \rho_{B|A} \varrho_{A|X}\}. \quad (3.22)$$

Do teorema 2.3.1, sabemos que $\rho_{Y|X}$ é isomorfo à dinâmica $\mathcal{E}_{Y|X}$.⁵ Por fim, mais uma vez pelo corolário 2.5.1, temos

$$\mathcal{E}_{Y|X} = \varepsilon_{Y|B} \circ \mathcal{E}_{B|A} \circ \varepsilon_{A|X}. \quad (3.23)$$

O estado condicional associado em (3.23) é o responsável por propagar as crenças do lado direito do diagrama na Figura 8 para o lado esquerdo.

Caso tivéssemos escolhido trabalhar sobre o estado $\varrho_{Y|B}$, realizando cálculos semelhantes aos descritos acima, obteríamos o estado conjunto,

$$\rho_{XY} = \text{Tr}_{AB}\{\varrho_{X|A} \rho_{A|B} \varrho_{B|Y}\} \star \rho_Y. \quad (3.24)$$

E, analogamente ao que foi feito acima, encontramos o estado condicional responsável por realizar a propagação de crença da direita para a esquerda como,

$$\rho_{X|Y} = \text{Tr}_{AB}\{\varrho_{X|A} \rho_{A|B} \varrho_{B|Y}\}. \quad (3.25)$$

⁵ Recordamos aqui que a letra \mathcal{E} é utilizada para representar dinâmicas que são relacionadas a estados condicionais acausais.

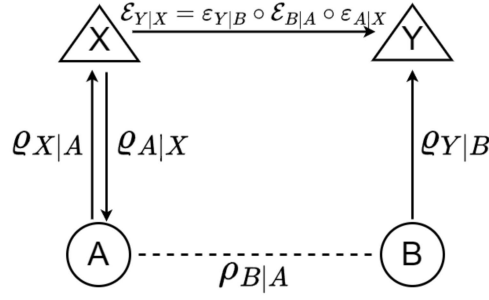


Figura 9 – Diagrama representando a propagação de crença da região X para a região Y , ou seja, a propagação de crença da esquerda para a direita.

Fonte: Autoria Própria, 2025

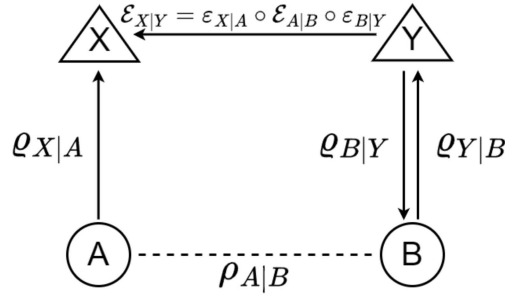


Figura 10 – Diagrama representando a propagação de crença da região Y para a região X , ou seja, a propagação de crença da direita para a esquerda.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Sendo o estado (3.25) isomorfo à dinâmica $\mathcal{E}_{X|Y} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_Y) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_X)$, que tem sua forma como,

$$\mathcal{E}_{X|Y} = \varepsilon_{X|A} \circ \varepsilon_{A|B} \circ \varepsilon_{B|Y}. \quad (3.26)$$

As Figuras 9 e 10 exemplificam esses dois casos de propagação de crença. Tanto o caso da esquerda para a direita quanto da direita para a esquerda.

Como trabalhamos com o estado condicional acausal $\rho_{B|A}$ e com os estados híbridos $\varrho_{X|A}$ e $\varrho_{Y|B}$ não tivemos nenhuma restrição na obtenção de $\rho_{Y|X}$, uma vez que a inversão bayesiana não encontra limitações quando consideremos tais estados (nas próximas seções analisaremos um caso em que as inversões bayesianas encontram uma limitação).

Assim, concluímos esta seção, ao analisar, sob a perspectiva do FEC, quais as correlações que obtemos quando consideramos, por exemplo, cenários que podem ser utilizados para simular experimentos do tipo EPR, isto é, duas medições são realizadas conjuntamente em duas regiões quânticas. Tendo conhecimento do estado conjunto das regiões acausais A e B e dos estados híbridos associados às medições respectivas medições,

obtivemos o estado conjunto relativo aos *outcomes* das medições, as expressões (3.21) e (3.24) os explicitam, onde também consideramos a propagação de crença da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

3.3 O GATO DE SCHRÖDINGER

Nesta seção, utilizaremos uma releitura do experimento do gato de Schrödinger, proposto em 1935 por Erwin Schrödinger [28], sob a perspectiva do *quantum steering* [4, 29, 30] e do Formalismo de Estados Condicionais. Considerando um sistema emaranhado, que será modelado como um estado conjunto de duas regiões quânticas espacialmente separadas, estudaremos como a atualização das crenças de uma região ocorre quando evidências são adquiridas a partir das crenças de outra região. Em outras palavras, como enunciado por Schrödinger [29], estudaremos como “o estado de um sistema é direcionado por experimentos realizados em outro sistema”.

O experimento original consiste num cenário hipotético no qual um gato é colocado em uma caixa hermeticamente fechada (hermeticamente no sentido de nenhuma influência externa afeta o interior da caixa) com um mecanismo que depende de um evento quântico aleatório. Como proposto por Schrödinger, o gato encontra-se dentro da caixa e, junto dele, um frasco com veneno, um martelo e um detector do tipo Geiger. Caso o detector registre o decaimento radioativo de um átomo, ele dispara o martelo que quebra o frasco com veneno e o gato morre; caso contrário, o gato continua vivo. Na interpretação de Copenhague [13], enquanto não se observa o sistema, nada se pode inferir com certeza sobre seu estado. O gato então encontra-se em uma *superposição quântica* dos estados “gato vivo” e “gato morto”, até que ocorra uma medição, momento em que a função de onda colapsa [11]. Formalmente o estado do gato é representado como

$$|\Psi\rangle = \alpha |\text{vivo}\rangle + \beta |\text{morto}\rangle, \quad (3.27)$$

e a abertura da caixa força o sistema a um dos estados.

Sendo assim, a nossa releitura se estrutura da seguinte maneira. Em duas salas, espacialmente separadas, encontra-se, em uma, Alice e na outra, Bob. Na sala de Alice, a qual chamaremos de região A , há um gato. Já na sala em que Bob se encontra, a qual chamaremos de região B , há uma caixa fechada com o mesmo aparato interno do experimento original. As duas regiões A e B , as quais associamos os espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B respectivamente, são então vistas como regiões acausalmente relacionadas. Além disso, há um tubo conectando a boca do gato à caixa da forma que, caso o frasco de veneno se quebre, este chegue até o gato. Bob, então, decide realizar uma medição na caixa a fim de constatar se o detector acusou o decaimento do átomo e o frasco de veneno foi quebrado.⁶

⁶ Realizar uma medição aqui pode ser visto como olhar para um mostrador que acusa qual a

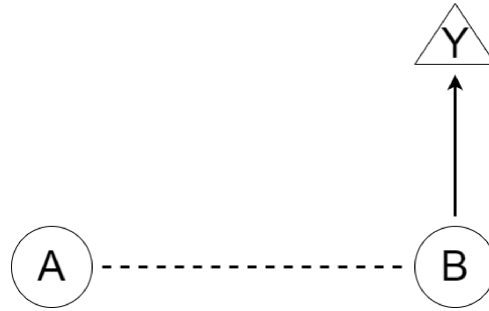


Figura 11 – Diagrama esquematizando duas regiões quânticas acasualmente relacionadas e uma região clássica. No cenário da releitura do gato de Schrödinger sob a perspectiva de *quantum steering*, Alice e o gato se encontram na região A enquanto Bob e a caixa se encontram na região B. A região clássica Y é a responsável por capturar o estado da região quântica B após a medição.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Portanto, considerando o experimento do gato como um problema de *quantum steering* [31], o ponto central da discussão torna-se: utilizando o FEC [4], quando Bob escolhe certas medições sobre o sistema em sua região, ele consegue prever com certeza os resultados das medições realizadas por Alice em sua região?

Discussões profundas ainda ocorrem, até os dias de hoje, sobre a natureza desse fenômeno. Em um breve contexto histórico, como explicam Einstein, Podolsky e Rosen no clássico artigo “*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*” [18], a teoria quântica, conforme interpretada, não fornece os chamados “elementos de realidade”. Segundo os autores, os elementos de realidade são caracterizados como: “*Se, sem de forma alguma perturbar um sistema, podemos prever com certeza (isto é, com probabilidade igual a um) o valor de uma grandeza física, então existe um elemento da realidade física correspondente a essa grandeza*”. Ainda no mesmo trabalho, os autores fornecem um exemplo onde os referidos “elementos de realidade” são violados, ao considerarem um estado envolvendo duas partículas, observa-se que, dadas as correlações entre seus estados, medições realizadas em uma das partículas poderiam ser usadas para prever os resultados de medições na outra partícula [32].

Logo depois, Schrödinger [28] discute esse fenômeno e observa que, ao se considerar sistemas compostos por duas (ou mais) partes correlacionadas, medições realizadas em uma parte “direcionam” o estado das demais partes.

Diante de tais fenômenos, Einstein, Podolsky e Rosen argumentavam, ainda no artigo EPR [18] que qualquer descrição física válida deveria conter elementos de realidade; do contrário, a teoria estaria incompleta. Para superar essa limitação, os autores sugeriram a introdução de variáveis ocultas.

leitura do contador Geiger que está dentro da caixa ou abrir a caixa e verificar em qual estado esta se encontra.

Em 1964, John S. Bell, no artigo “*On the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox*” [33], derivou uma desigualdade que toda teoria realista local de variáveis ocultas deveria satisfazer, mas que é violada pela mecânica quântica. Experimentos subsequentes confirmaram essas violações, e, em 2022, Alain Aspect, John F. Clauser e Anton Zeilinger receberam o Prêmio Nobel de Física por evidenciarem experimentalmente as violações das desigualdades de Bell [34, 35, 36, 37, 38].

Então, para analisar tal fenômeno à luz do FEC, à região A onde se encontra o gato associamos um espaço de Hilbert bidimensional \mathcal{H}_A com uma base $\beta_{\mathcal{H}_A} = \{|M\rangle, |V\rangle\}$, onde $|M\rangle$ ($|V\rangle$) descreve o estado do gato morto (vivo). Analogamente, à região B onde está a caixa associamos um espaço de Hilbert bidimensional \mathcal{H}_B com uma base $\beta_{\mathcal{H}_B} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ onde $|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$) corresponde ao estado do átomo quando este não decaiu (decaiu). Dessa forma, podemos descrever o estado conjunto do gato-caixa em \mathcal{H}_{AB} como,

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow M\rangle + |\uparrow V\rangle). \quad (3.28)$$

Partindo da expressão (3.28) podemos obter o operador densidade referente ao estado do gato pertencente ao $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$,

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|_{AB}. \quad (3.29)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \frac{1}{2}(|\downarrow M\rangle + |\uparrow V\rangle)(\langle\downarrow M| + \langle\uparrow V|) \\ &= \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |M\rangle\langle M| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |M\rangle\langle V| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |V\rangle\langle M| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |V\rangle\langle V|). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim, pela expressão (2.10), o estado condicional é da forma,

$$\rho_{B|A} = \rho_{AB} \star \rho_A^{-1}. \quad (3.31)$$

Para determinarmos a forma explícita da expressão (3.31), uma vez que temos ρ_{AB} , necessitamos ainda obter ρ_A . Para isso realizamos a marginalização,

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \quad (3.32)$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|) &= \text{Tr}(|\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = 1, \\ \text{Tr}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow|) &= \text{Tr}(|\downarrow\rangle\langle\uparrow|) = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

obtém-se que,

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|M\rangle\langle M| + |V\rangle\langle V|). \quad (3.34)$$

E a expressão (3.31) toma a forma,

$$\rho_{B|A} = \rho_{AB} \star \rho_A^{-1} = (I_B \otimes \rho_A^{-1/2})\rho_{AB}(I_B \otimes \rho_A^{-1/2}). \quad (3.35)$$

Como $\rho_A \in Pos(\mathcal{H}_A)$, então,

$$\rho_A^{-1/2} = (\rho_A^{1/2})^{-1} = \sqrt{2}(|M\rangle\langle M| + |V\rangle\langle V|). \quad (3.36)$$

Na forma matricial, temos,

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_A^{-1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

substituindo (3.36) em (3.35), obtemos,

$$\rho_{B|A} = (|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |M\rangle\langle M| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |M\rangle\langle V| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |V\rangle\langle M| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |V\rangle\langle V|). \quad (3.38)$$

Da definição 2.3.1 podemos verificar se $\rho_{B|A}$ é um estado acausal válido entre as regiões A e B ,

$$Tr_B(\rho_{B|A}) = |M\rangle\langle M| + |V\rangle\langle V| = I_A. \quad (3.39)$$

Conclui-se que de fato $\rho_{B|A}$ é um estado válido. Pela caracterização fornecida via o teorema 2.6.1 sabemos que o estado condicional híbrido $\varrho_{Y|B}$ é da forma,

$$\varrho_{Y|B} = \sum_{y \in \{y_1, y_2\}} |y\rangle\langle y| \otimes E_y^B, \quad (3.40)$$

onde $\{E_y^B\}$ é um POVM. Para a região clássica Y associaremos um espaço de Hilbert \mathcal{H}_Y bidimensional com uma base $\beta_{\mathcal{H}_Y} = \{|y_1\rangle, |y_2\rangle\}$. A escolha de \mathcal{H}_Y ser bidimensional justifica-se no fato de que a caixa possui dois únicos estados: decaiu e não decaiu. Assim, pelo teorema 2.5.1, isto é, ao realizar a composição dos estados condicionais,

$$\rho_{Y|A} = Tr_B(\varrho_{Y|B} \rho_{B|A}). \quad (3.41)$$

Avaliando o termo, $\varrho_{Y|B} \rho_{B|A}$,

$$\begin{aligned} \varrho_{Y|B} \rho_{B|A} &= (\varrho_{Y|B} \otimes I_A)(I_Y \otimes \rho_{B|A}) \\ &= \sum_{y \in \{y_1, y_2\}} (|y\rangle\langle y| \otimes E_y^B \otimes I_A)(I_Y \otimes \rho_{B|A}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

O que nos leva a,

$$\begin{aligned} \rho_{Y|A} &= \sum_{y \in \{y_1, y_2\}} |y\rangle\langle y| \otimes (Tr(E_y^B |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) |M\rangle\langle M| + Tr(E_y^B |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) |M\rangle\langle V| + \\ &\quad + Tr(E_y^B |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) |V\rangle\langle M| + Tr(E_y^B |\uparrow\rangle\langle\uparrow|) |V\rangle\langle V|). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Via o teorema de Bayes no FEC, tal qual explicitado em (2.58), fazemos a inversão,

$$\rho_{A|Y} = \rho_{Y|A} \star (\rho_A \rho_Y^{-1}). \quad (3.44)$$

Para calcular a expressão (3.44), precisamos obter ρ_Y , uma vez que já temos $\rho_{Y|A}$ e ρ_A . Obtemos ρ_Y aplicando a propagação de crença da região B para a região Y , assim,

$$\rho_Y = Tr_B(\varrho_{Y|B} \rho_B), \quad (3.45)$$

onde ρ_B pode ser obtido via marginalização do estado conjunto,

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \quad (3.46)$$

Então,

$$\begin{aligned} \rho_Y &= \text{Tr}_B(\varrho_{Y|B}\rho_B) \\ &= \text{Tr}_B\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{y\in\{y_1,y_2\}}|y\rangle\langle y|\otimes E_y^B\right)[I_Y\otimes(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|+|\downarrow\rangle\langle\downarrow|)]\right\} \\ &= \sum_{y\in\{y_1,y_2\}}|y\rangle\langle y|\text{Tr}(E_y^B\rho_B). \end{aligned} \quad (3.47)$$

O termo $P_y = \text{Tr}(E_y^B\rho_B)$ é a probabilidade de se obter cada uma das possíveis saídas, de medições do POVM $\{E_y^B\}$. Assim,

$$\rho_Y = \sum_{y\in\{y_1,y_2\}} P_y |y\rangle\langle y|, \quad (3.48)$$

e a forma matricial de ρ_Y é,

$$\rho_Y = \begin{pmatrix} P_{y_1} & 0 \\ 0 & P_{y_2} \end{pmatrix}, \quad \rho_Y^{-1} = \begin{pmatrix} P_{y_1}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{y_2}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Na expressão acima ambas as probabilidades P_{y_1} e P_{y_2} são exigidas como não nulas. Finalmente, obtemos,

$$\begin{aligned} \rho_{A|Y} &= \rho_{Y|A} \star (\rho_A \rho_Y^{-1}) \\ &= \sum_{y\in\{y_1,y_2\}} \frac{P_y^{-1}}{2} |y\rangle\langle y| \otimes [\text{Tr}(E_y^B |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) |M\rangle\langle M| + \text{Tr}(E_y^B |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) |M\rangle\langle V| + \\ &\quad + \text{Tr}(E_y^B |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) |V\rangle\langle M| + \text{Tr}(E_y^B |\uparrow\rangle\langle\uparrow|) |V\rangle\langle V|]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nossa tarefa agora é encontrar qual é o POVM responsável por sinalizar corretamente o estado da caixa que Bob presenciou. Para isso, de acordo com [39], tendo o vetor de estado (3.28), podemos determinar o POVM da seguinte maneira,

$$\|(\Upsilon_{\uparrow,\downarrow} \otimes I_A) |\psi\rangle_{AB}\|^2 = \frac{1}{2}[(\langle\downarrow|M| + \langle\uparrow|V|)(\Upsilon_{\uparrow,\downarrow} \otimes I_A)^*(\Upsilon_{\uparrow,\downarrow} \otimes I_A)[|\downarrow\rangle\langle M| + |\uparrow\rangle\langle V|]]. \quad (3.51)$$

Onde,

$$\Upsilon_{\uparrow,\downarrow} = \Upsilon_{\uparrow} + \Upsilon_{\downarrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (3.52)$$

Os termos $\Upsilon_{(\cdot)}^* \Upsilon_{(\cdot)}$ são os nossos respectivos elementos de POVM. E em consequência de (3.51), temos

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\downarrow}^* \Upsilon_{\downarrow} &= |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = E_{y_1}^B, \\ \Upsilon_{\uparrow}^* \Upsilon_{\uparrow} &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| = E_{y_2}^B. \end{aligned} \quad (3.53)$$

E como deve ser,

$$\sum_{y\in\{y_1,y_2\}} E_y^B = I_B. \quad (3.54)$$

Agora que temos $\rho_{A|Y}$ e o POVM correspondente, podemos responder à pergunta que iniciou esta seção. Quando Bob realiza uma medição sobre a caixa e, digamos, o *outcome* y_1 é selecionado como deve se atualizar o estado do gato à luz de novas evidências? Tomando o elemento de POVM $E_{y=y_1}^B$,

$$\begin{aligned}\rho_{A|Y=y_1} &= \frac{P_{y_1}^{-1}}{2} |y_1\rangle \langle y_1| \otimes (Tr(|\downarrow\rangle \langle \downarrow|) |M\rangle \langle M| + Tr(|\downarrow\rangle \langle \uparrow|) |M\rangle \langle V|) \\ &= \frac{P_{y_1}^{-1}}{2} |y_1\rangle \langle y_1| \otimes |M\rangle \langle M|.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Sendo o estado de A após a atualização,

$$\rho_A = \frac{P_{y_1}^{-1}}{2} |M\rangle \langle M|,\tag{3.56}$$

e quando $P_{y_1} = P_{y_2} = 1/2$,

$$\rho_A = |M\rangle \langle M|.\tag{3.57}$$

Assim, constatamos que, uma vez que Bob infere que o estado da caixa foi atualizado para “decaiu”, então ele consegue prever que o estado do gato que está na presença de Alice é “morto”. Caso Bob tivesse inferido que o estado da caixa fosse “não decaiu”, ele então conseguiria prever que o estado do gato é “vivo”, ou seja,

$$\rho_A = |V\rangle \langle V|.\tag{3.58}$$

Por fim, nesta seção estudamos o problema do gato de Schrödinger modelado como um caso de *quantum steering*, sob a perspectiva do Formalismo de Estados Condicionais. Uma vez que Bob constata que o átomo radioativo decaiu⁷ e tem acesso ao estado do sistema composto gato-caixa, como observado por Schrödinger [29], sua medição sobre a caixa “pilota o estado do gato” para o estado morto. Isto é, sem sequer interagir com o sistema que está na presença de Alice, Bob é capaz de determinar o estado em que o gato se encontra. Essencialmente, o que mostramos nesta seção é como o FEC reproduz o problema de *quantum steering*.

⁷ Considera-se que, em 100% das vezes em que ocorre o decaimento, este é detectado pelo contador Geiger presente na caixa, acionando o martelo que quebra o frasco de veneno.

4 O PROBLEMA DE *COARSE-GRAINING*

Quando uma medição é realizada sobre um sistema quântico e o aparato de medição que o acessa apresenta limitações, surge a necessidade de uma descrição efetiva que auxilie a contornar tal obstáculo. Nesse contexto, estrutura-se nossa investigação central e que será discutida neste capítulo. Buscamos quais as condições necessárias e suficientes para emergência de uma dinâmica entre as regiões *coarse-grained*. Para elaborar essa investigação, recorreremos ao FEC.

Mais especificamente, nos voltaremos a investigar um sistema, associado a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_D ($\dim \mathcal{H}_D = D$), que é acessado por detectores incapazes de distinguir todos os graus de liberdade disponíveis [40]. Logo, surge a necessidade de uma descrição efetiva, e então utilizamos o método de *coarse-graining* [40, 41, 42, 43] como uma ferramenta matemática para obter dada descrição. Após o processo de *coarse-graining*, a análise passa a ser realizada em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_d ($\dim \mathcal{H}_d = d$), onde $d < D$. Formalmente, essa transição é representada por um mapa CPTP $\Lambda_{CG} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$. O diagrama da Figura 12 mostra de forma esquemática a situação.

Um exemplo de *coarse-graining* [40] útil para visualizar e compreender tais processos é o seguinte: em um laboratório há um emissor de fótons com duas saídas, podendo emitir ou não fótons simultaneamente. Cada saída do emissor gera um qubit, onde $|1\rangle$ representa emissão e $|0\rangle$ a ausência dela. O sistema conjunto dos dois emissores é descrito como um sistema bipartite qubit-qubit e pode ser representado pela base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Esse sistema é medido por um detector borrado, incapaz de distinguir qual saída emitiu (ou não) o fóton, tratando os estados $|01\rangle$ e $|10\rangle$ como equivalentes. Além disso, ao receber um fóton vindo de um único emissor, o detector se satura, e a leitura de duas emissões

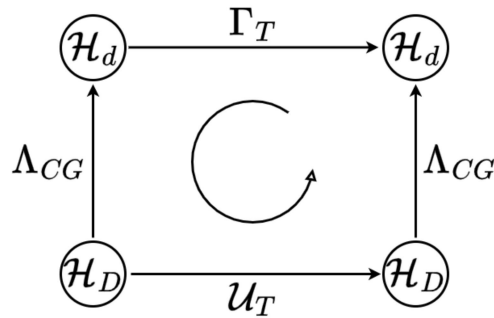


Figura 12 – Diagrama da representação do problema de *coarse-graining* e dinâmica emergente. As duas regiões inferiores conectam-se por uma evolução unitária \mathcal{U}_T e as regiões superiores são atingidas pela ação do *coarse-graining* Λ_{CG} . A dinâmica efetiva Γ_T conecta as regiões *coarse-grained*.

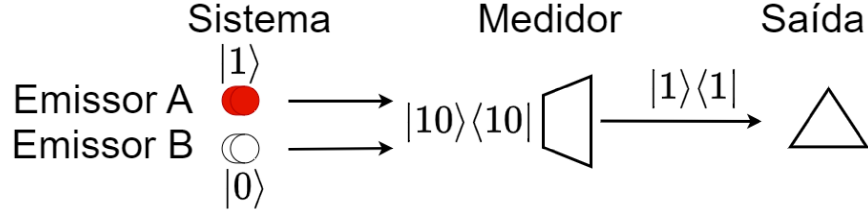


Figura 13 – Diagrama representando de forma esquemática a emissão de um estado bipartite $|10\rangle$, e da leitura deste estado pelo detector borrado e saturado, levando à saída $|1\rangle$.

Fonte: Autoria Própria, 2025

$|11\rangle$, ou a leitura de uma única emissão, $|10\rangle$ ou $|01\rangle$, acusam o mesmo *output*. Como consequência, o detector não acessa todos os graus de liberdade disponíveis no sistema, assim, os estados bipartite $|10\rangle$, $|01\rangle$, $|11\rangle$ apresentam leitura $|1\rangle$ e o estado bipartite $|00\rangle$ tem leitura $|0\rangle$. A Figura 13 esquematiza esse cenário. Nesses casos, justifica-se a utilização de *coarse-graining*, uma vez que uma descrição efetiva se faz necessária para lidar com as limitações de medição impostas pelo detector [40].

Dessa maneira, o cenário que será investigado aqui é tal qual o apresentado na Fig. 12, isto é, considerando que na parte inferior do diagrama temos uma evolução unitária \mathcal{U}_T e nos braços verticais temos o *coarse-graining* Λ_{CG} , desejamos encontrar uma dinâmica $\Gamma_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}_d) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ tal que o diagrama da Figura 12 comute. Isto é,

$$\Gamma_T \circ \Lambda_{CG} = \Lambda_{CG} \circ \mathcal{U}_T. \quad (4.1)$$

O subscrito T que se apresenta tanto em Γ_T quanto em \mathcal{U}_T , na expressão (4.1), é justificado pelo seguinte fato: quando trabalhamos com duas regiões casualmente conectadas, tal qual a Figura 14 esquematiza, podemos interpretá-las como a mesma região em dois instantes de tempo distintos.¹ Formalmente, evolução temporal de sistemas quânticos é descrita pelo operador unitário $\mathcal{U}_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}_D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_D)$, definido no espaço das transformações lineares de \mathcal{H}_D . Assim, dado um estado inicial $\rho_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_D)$, sua evolução temporal é dada como $\rho_T = \mathcal{U}_T(\rho_0) = e^{-\frac{iHT}{\hbar}} \rho_0 e^{\frac{iHT}{\hbar}}$, onde \hbar é a constante de Planck reduzida. Essa formulação assegura que a dinâmica preserva a completa positividade e a normalização do estado ρ_T [26, 39], características fundamentais para a consistência física da descrição quântica.

Assim, construímos nossa solução assumindo que temos o conhecimento das dinâmicas causais que conectam as regiões, sendo a evolução unitária e o *coarse-graining*, tal qual ilustra a Figura 12. Utilizando os resultados derivados do FEC [4, 26, 39], estabelecemos os estados condicionais associados a cada dinâmica e buscamos encontrar o estado condicional

¹ Uma evolução unitária é mais geral do que somente a evolução temporal. Mais adiante veremos o caso da unitária *SWAP*.

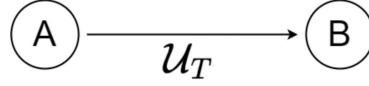


Figura 14 – Diagrama esquematizando duas regiões quânticas. A região B é obtida como a ação de uma evolução unitária sobre a região A .

Fonte: Autoria Própria, 2025

associado à propagação de crença entre as regiões *coarse-grained*. Consequentemente, propomos Γ_T como a composição das dinâmicas isomorfas a cada estado condicional, ou seja, $\Gamma_T = \varepsilon_{D|C} = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \varepsilon_{A|C}$. Entretanto, o formalismo apresenta limitações quando necessitamos computar $\varepsilon_{A|C}$ [4]. Para lidar com esse desafio, derivamos, dentro do FEC, o análogo ao mapa de Petz [8] que auxiliará para contornar as dadas limitações.

4.1 MODELANDO O PROBLEMA DE *COARSE-GRAINING* NO FEC

Efetivamente, qual é o cenário que trataremos? Este se estrutura da seguinte maneira. Consideremos duas regiões quânticas A e B descritas, respectivamente, por espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Por simplificação, tomaremos $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$. As regiões A e B são conectadas por uma dinâmica unitária que é dada como $\mathcal{U}_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. Essencialmente o que temos aqui é a região B no futuro causal da região A , tal qual ilustra a Figura 14.

Esse sistema é, então, medido por um detector incapaz de acessar todos os graus de liberdade disponíveis, tornando a descrição completa do sistema supérflua ou mesmo inacessível.² Para contornar essa limitação, recorreremos ao *coarse-graining*, com o objetivo de obter uma descrição efetiva. Para isso, aplicamos a dinâmica $\Lambda_{CG} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ sobre as regiões A e B , mapeando-as para novas regiões que denominamos C e D . A Figura 15, esquematiza a aplicação desta dinâmica sobre as regiões A e B .

Uma vez que o sistema em análise está sujeito à evolução unitária e ao *coarse-graining*, nos perguntamos quais são as condições necessárias e suficientes para garantir a existência de uma dinâmica³ Γ_T que faça o diagrama comutar? Como explicitado na expressão (4.1). A Figura 16 esquematiza essa dinâmica emergente junto ao mapa de *coarse-graining* e da evolução unitária.

Uma observação deve ser feita antes de avançarmos em nosso trabalho. Quando nos voltamos para investigações focadas em encontrar as condições necessárias e suficientes para emergência de dinâmicas como Γ_T , podemos observar que nem sempre tais condições

² É importante frisar que usamos o problema da medição aqui como uma motivação para estabelecermos nosso problema de coarse-graining.

³ Recordamos o leitor, que, como introduzido no início deste capítulo, o subíndice T é utilizado, pois a evolução unitária utilizada é a evolução temporal.

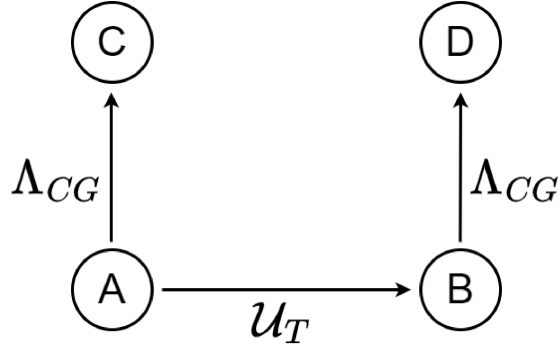


Figura 15 – Diagrama esquematizando a atuação da dinâmica de *coarse-graining* nas regiões A e B e obtendo como consequência respectivamente as regiões C e D .

Fonte: Autoria Própria, 2025

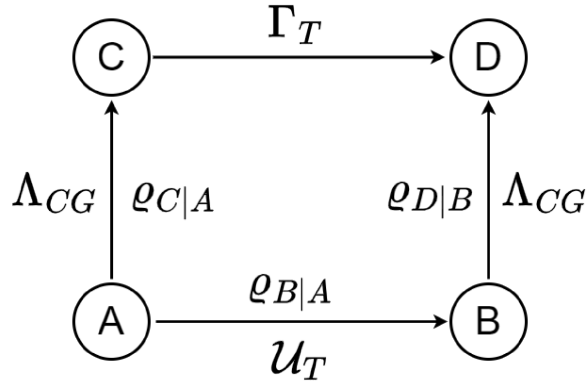


Figura 16 – Diagrama esquematizando as quatro regiões quânticas, as dinâmicas quânticas e os estados isomorfos. Novamente a dinâmica emergente Γ_T conecta as regiões após o *coarse-graining*.

Fonte: Autoria Própria, 2025

existem. Para endossar esse fato, trazemos como exemplo o sistema esquematizado no diagrama da Figura 17. Tal sistema consiste, por um lado, na realização do traço parcial sobre B (o que deve ser entendido como a eliminação da segunda entrada). Por outro lado, é aplicado um *SWAP* entre os estados $|00\rangle$ e $|01\rangle$, os levando para $|00\rangle$ e $|10\rangle$, respectivamente. Dessa forma, conforme esquematiza a Figura 17, encontrar uma dinâmica Γ_T implicaria encontrar, simultaneamente,

$$\begin{aligned}\Gamma_T(|0\rangle) &= |0\rangle, \\ \Gamma_T(|0\rangle) &= |1\rangle.\end{aligned}\tag{4.2}$$

O que é um absurdo, pois Γ_T sequer é uma função. Concluimos, assim, que Γ_T não existe para certas escolhas de dinâmicas CPTP que atuarão sob o sistema em análise.

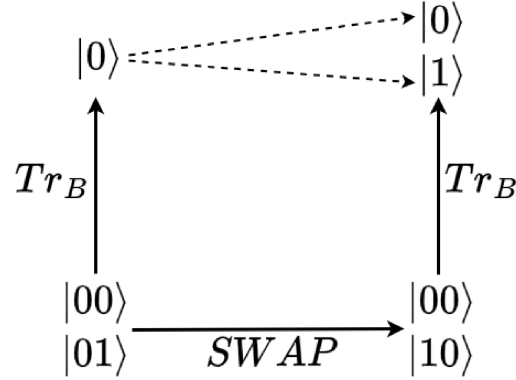


Figura 17 – Diagrama representando o *SWAP* nas entradas de um vetor de um sistema bipartite e o Tr_B é o traço parcial na segunda entrada. Sendo tais escolhas de *coarse-graining* e de unitária, e dado os estados da região inferior, nota-se que neste caso não há dinâmica emergente que faz o diagrama comutar.

Fonte: Autoria Própria, 2025

Nosso problema se configura da seguinte forma. Tudo o que temos acesso, como ilustrado no diagrama da Figura 16, são as dinâmicas causais que conectam as regiões quânticas. Isto é, temos como dados iniciais $\varepsilon_{C|A}$, $\varepsilon_{B|A}$ e $\varepsilon_{D|B}$.⁴ Uma vez que aplicamos o isomorfismo de Jamiołkowski para estados causais tal qual explicita o teorema 2.4.1, encontramos os estados isomorfos às respectivas dinâmicas, denotados por $\varrho_{C|A}$, $\varrho_{B|A}$ e $\varrho_{D|B}$. Além disso, temos como dado inicial um estado de A , ou seja, temos um ρ_A .⁵

Uma vez que temos acesso aos estados condicionais causais que conectam as regiões, podemos analisá-los com mais detalhes. Pela definição 2.4.1 de um estado causal, temos que estados causais são dados pela transposta parcial do estados acausais, ou seja,

$$\varrho_{B|A} = \rho_{B|A}^{T_A}. \quad (4.3)$$

Entretanto, quando nos voltamos à expressão (4.3), nos deparamos com algumas limitações. E estas, por sua vez, têm impacto direto no desenvolvimento da nossa proposta. A transposição parcial de operadores positivos semidefinidos, pode, em alguns casos, levar o operador a perder sua completa positividade, embora este permaneça localmente positivo. Para visualizar melhor esse argumento, analisemos brevemente o seguinte estado condicional acausal,

$$\rho_{B|A} = |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|, \quad (4.4)$$

⁴ Aqui, iremos nos referir às dinâmicas causais de forma genérica, ou seja, quando escrevemos $\varepsilon_{(\cdot)|(\cdot)}$, estamos tratando de mapas CPTP. No diagrama representado na Figura 16, a dinâmica $\varepsilon_{B|A}$ é equivalente à evolução unitária \mathcal{U}_T .

⁵ Também iremos nos referir a estados desta forma como estados *input*.

e sua representação matricial,

$$\rho_{B|A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

O operador acausal representado em (4.4) pertence aos $Pos(\mathcal{H}_{AB})$ e pode-se constatar que todos os seus autovalores são não negativos, isto é, $spec(\rho_{B|A}) = \{0, 0, 0, 2\}$. Já o operador causal, que é obtido tal qual a expressão (4.3), é da forma,

$$\varrho_{B|A} = \rho_{B|A}^{T_A} = |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|, \quad (4.6)$$

e tem sua representação matricial como,

$$\varrho_{B|A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Quando computamos seus autovalores, encontramos $spec(\varrho_{B|A}) = \{1, 1, 1, -1\}$. Portanto, concluímos que $\varrho_{A|B} \notin Pos(\mathcal{H}_{AB})$.

Utilizando os dados que temos disponíveis, nossa sugestão se configura da seguinte maneira. Estabeleceremos o estado causal $\varrho_{D|C}$ e iremos utilizar o isomorfismo de Jamiołkowski para estados causais, tal qual explicita o teorema 2.4.1, para encontrar a dinâmica associada a este estado. Tal dinâmica, representada como $\varepsilon_{D|C}$, é quem sugerimos como um possível candidato para Γ_T .

Para isso, uma vez que temos posse dos estados $\varrho_{D|B}$, $\varrho_{B|A}$ e $\varrho_{C|A}$. Propagamos as crenças entre as regiões D e C como,

$$\varrho_{D|C} = Tr_A(\varrho_{D|A}\varrho_{A|C}). \quad (4.8)$$

Na expressão (4.8) não temos a região B aparente, e de fato podemos omitir sua presença. Entretanto, se considerarmos,

$$\varrho_{D|A} = Tr_B(\varrho_{D|B}\varrho_{B|A}), \quad (4.9)$$

e substituirmos em (4.8), obtemos uma expressão para $\varrho_{D|C}$ que explicita a região B . Ou seja, obtemos,

$$\varrho_{D|C} = Tr_{AB}(\varrho_{D|B}\varrho_{B|A}\varrho_{A|C}), \quad (4.10)$$

tal qual o corolário 2.5.1 estrutura. Assim, utilizamos mais uma vez o teorema 2.4.1 e o corolário 2.5.1, a fim de encontrar a dinâmica $\varepsilon_{D|C}$, isomorfa ao estado causal $\varrho_{D|C}$, é,

$$\varepsilon_{D|C} = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \varepsilon_{A|C}. \quad (4.11)$$

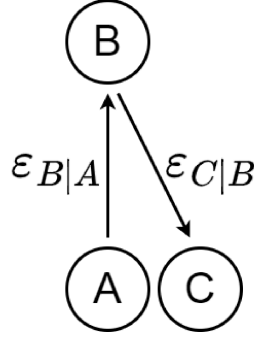


Figura 18 – Diagrama representando três regiões quânticas conectadas via dinâmicas quânticas. Onde a região B está no futuro causal da região A e a região C está no futuro causal da região B .

Fonte: Autoria Própria, 2025

A expressão (4.11) é explicitamente a nossa sugestão para a dinâmica emergente.

Observando (4.10), notamos que esta envolve o estado causal $\varrho_{A|C}$. No entanto, inicialmente, todo o nosso conhecimento reside na dinâmica $\varepsilon_{C|A}$ e em seu estado isomorfo $\varrho_{C|A}$. Então, para resolver essa inconsistência, poderíamos construir o estado conjunto,

$$\varrho_{AC} = \varrho_{C|A} \star \rho_A, \quad (4.12)$$

e tomando o traço em A obteríamos,

$$Tr_A(\varrho_{AC}) = \rho_C, \quad (4.13)$$

e, portanto, poderíamos inverter $\varrho_{C|A}$ via Bayes, resultando em,

$$\varrho_{A|C} = \varrho_{C|A} \star (\rho_A \rho_C^{-1}). \quad (4.14)$$

Entretanto, como estamos lidando com estados causais, a inversão representada em (4.14) nem sempre resulta em um estado causalmente válido. Para compreender melhor essa limitação, analisaremos o seguinte cenário.

Supondo que temos 3 regiões quânticas sendo elas A , B e C e que estas estão relacionadas umas às outras via dinâmicas causais $\varepsilon_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ e $\varepsilon_{C|B} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$, ou seja, B está no futuro de A e C está no futuro de B . Os estados isomorfos correspondentes são $\varrho_{B|A}$ e $\varrho_{C|B}$. O diagrama na Figura 18 exemplifica este cenário. Considerando o estado ρ_A como o estado *input*, temos,

$$\begin{aligned} \rho_B &= \varepsilon_{B|A}(\rho_A) \\ &= Tr_A(\varrho_{B|A} \rho_A). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Atuando com a segunda dinâmica,

$$\begin{aligned} \rho_C &= \varepsilon_{C|B}(\rho_B) \\ &= Tr_B(\varrho_{C|B} \rho_B) \\ &= Tr_B(\varrho_{C|B} Tr_A(\varrho_{B|A} \rho_A)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por outro lado, poderíamos tentar encontrar um estado conjunto causal para as três regiões, isto é, um⁶ ϱ_{ABC} tal que, ao tomarmos o traço sobre AB , obtivéssemos um estado marginal ρ_C consistente com aquele obtido pela aplicação das dinâmicas, conforme representado na expressão (4.16). Sabemos que, em cenários acausais, tal estado conjunto pode sempre ser construído; assim, seria natural esperar que um procedimento análogo fosse possível em cenários causais, de modo a manter o formalismo neutro em relação à causalidade. Em termos formais, teríamos,

$$\rho_C = \text{Tr}_{AB}(\varrho_{ABC}). \quad (4.17)$$

E para manter a consistência da descrição realizada, esperaríamos que,

$$\text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \text{Tr}_A(\varrho_{B|A} \rho_A)) = \rho_C = \text{Tr}_{AB}(\varrho_{ABC}). \quad (4.18)$$

Então, um candidato para este estado conjunto seria,

$$\varrho_{ABC} = \varrho_{C|B} \star (\varrho_{B|A} \star \rho_A). \quad (4.19)$$

Entretanto, a expressão (4.19) falha em representar um estado válido,⁷ pois $\varrho_{B|A} \star \rho_A$ não é completamente positivo, sendo apenas localmente positivo. Tal qual foi explicitado acima na matriz que representa o estado causal (4.7). Explicitamente,

$$\varrho_{ABC} = \sqrt{\varrho_{B|A} \star \rho_A} \varrho_{C|B} \sqrt{\varrho_{B|A} \star \rho_A}. \quad (4.20)$$

Na expressão (4.20), temos a raiz quadrada de um operador que pode apresentar autovalores negativos. Dessa forma, não é possível estabelecer uma igualdade entre as expressões (4.16) e (4.17), o que revela uma limitação para o estado ρ_C quando tratamos de regiões causalmente relacionadas. Mais especificamente, temos que, em geral,

$$\text{Tr}_B(\varrho_{C|B} \text{Tr}_A(\varrho_{B|A} \rho_A)) \neq \text{Tr}_{AB}(\varrho_{ABC}). \quad (4.21)$$

Além disso, dada limitação vai em contraste com a ideia do formalismo ser neutro em relação à causalidade. Uma vez que é possível obter o estado conjunto para as três regiões no caso acausal mas não no caso causal.

A limitação supracitada é justamente o que impede a realização direta da inversão no lado esquerdo do diagrama na Figura 16, que exemplifica o cenário que analisamos. Ao partirmos da dinâmica $\varepsilon_{C|A}$ e tentarmos encontrar a dinâmica equivalente à inversão bayesiana do estado condicional causal isomorfo, ou seja, determinar $\varepsilon_{A|C}$, de forma que

⁶ Quando temos três regiões quânticas espacialmente separadas (acausalmente correlacionadas), e A e C são condicionalmente independentes de B , é possível encontrar um estado acausal $\rho_{ABC} = \rho_{C|B} \star (\rho_{B|A} \star \rho_A)$. Com base nessa construção, propomos um análogo para o caso causal (ver [4]).

⁷ Quando consideramos cenários acausais, a expressão (4.19) não encontra limitações e é um estado acausal válido [4].

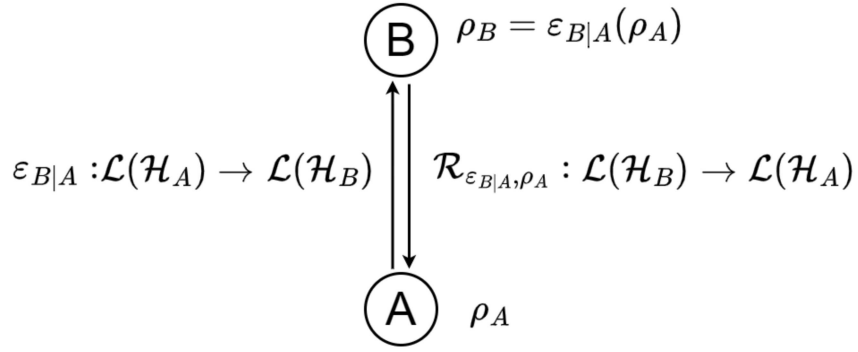


Figura 19 – Diagrama esquematizando a dinâmica quântica $\varepsilon_{B|A}$ e o mapa de Petz $\mathcal{R}_{\varepsilon_{B|A}, \rho_A}(\cdot)$. O mapa de Petz é o responsável por *reverter* a dinâmica $\varepsilon_{B|A}$.

Fonte: Autoria Própria, 2025

os estados marginais permaneçam consistentes, nos deparamos com a mesma limitação. Então, como superar essa limitação? Como podemos garantir uma forma de capturar as crenças da região A dadas as crenças da região C ? Nesse contexto introduzimos o mapa de Petz [4, 44, 8].

O mapa de Petz é definido a partir de uma dinâmica causal $\varepsilon_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ e um estado inicial $\rho_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$. A atuação da dinâmica causal sobre ρ_A é tal que $\varepsilon_{B|A}(\rho_A) = \rho_B$. A Figura 19 esquematiza essa estrutura. Sendo assim, o mapa de Petz tem a forma,

$$\mathcal{R}_{\varepsilon_{B|A}, \rho_A}(\cdot) = \rho_A^{1/2} \{ \varepsilon_{A|B}^*(\rho_B^{-1/2}(\cdot)\rho_B^{-1/2}) \} \rho_A^{1/2}, \quad (4.22)$$

Onde $\varepsilon_{A|B}^*$ é o mapa adjunto de $\varepsilon_{B|A}$. Uma vez que possuímos acesso a $\varepsilon_{B|A}$ entre duas regiões quânticas A e B e um estado inicial ρ_A , o que o mapa de Petz faz, como definido em (4.22), é justamente reverter essa dinâmica de forma quase ótima. Isto é, quando temos cenários tal qual esquematiza a Figura 19, a otimalidade reside no fato do mapa de Petz ser o responsável por reverter a dinâmica inicial com o mínimo de perda e informação possível [44]. Essencialmente, não temos um único mapa em (4.22), mas sim uma família de mapas indexada pela dinâmica quântica a ser revertida e pelo estado inicial.

Podemos avaliar o que acontece quando o *input* no mapa de Petz é justamente $\rho_B = \varepsilon_{B|A}(\rho_A)$, assim temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\varepsilon_{B|A}, \rho_A}(\rho_B) &= \rho_A^{1/2} \{ \varepsilon_{A|B}^*(\rho_B^{-1/2} \rho_B \rho_B^{-1/2}) \} \rho_A^{1/2} \\ &= \rho_A^{1/2} \{ \varepsilon_{A|B}^*[I_B] \} \rho_A^{1/2} \\ &= \rho_A^{1/2} I_A \rho_A^{1/2} \\ &= \rho_A. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Utilizamos o fato de, uma vez que $\varepsilon_{B|A}$ é TP, então $\varepsilon_{A|B}^*$ é unital, isto é, leva identidade em identidade (ver [26]). A (4.23) aflora um fato importante deste mapa, quando aplicado

no estado $\rho_B = \varepsilon_{B|A}(\rho_A)$, que é justamente o estado atingido pela dinâmica. O mapa recupera o estado inicial.

O mapa de recuperação de Petz é CPTP, pois é uma composição de mapas CPTP, explicitamente, $\mathcal{R}_{\varepsilon_{B|A}, \rho_A}(\cdot)$ pode ser visto como uma composição dos seguintes mapas,

$$\rho_A^{1/2}(\cdot)\rho_A^{1/2}, \quad \varepsilon_{A|B}^*(\cdot) \quad \text{e} \quad \rho_B^{-1/2}(\cdot)\rho_B^{-1/2}. \quad (4.24)$$

O primeiro e último mapa estão na forma de Kraus e logo são CPTP, o mapa $\varepsilon_{A|B}^*$ é o adjunto de $\varepsilon_{B|A}$ e é também CPTP (ver [4]).

Com o mapa de Petz em mãos voltamos ao nosso problema inicial esquematizado na Figura 16. O estado condicional representado por (4.14) faz emergir naturalmente dentro do formalismo o mapa de recuperação, isto é, a expressão para o estado condicional é transformada na expressão (4.22), para isso notamos que,

$$\rho_C = \text{Tr}_A(\varrho_{C|A}\rho_A). \quad (4.25)$$

Partindo do estado (4.14) e utilizando o isomorfismo de Jamiołkowski podemos estabelecer a relação entre o mapa (4.22) e estados condicionais. Assim, sendo $\varrho_{A|C} = \varrho_{C|A} \star (\rho_A \rho_C^{-1})$ e $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$, obtemos,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A|C}(\sigma) &= \text{Tr}_C[(\rho_A^{1/2} \otimes I_C)(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\varrho_{C|A}(\rho_A^{1/2} \otimes I_C)(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\sigma] \\ &= \rho_A^{1/2} \text{Tr}_C[(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\varrho_{C|A}(\rho_A^{1/2} \otimes I_C)(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\sigma] \\ &= \rho_A^{1/2} \text{Tr}_C[(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\sigma(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\varrho_{C|A}(\rho_A^{1/2} \otimes I_C)] \\ &= \rho_A^{1/2} \text{Tr}_C[(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\sigma(I_A \otimes \rho_C^{-1/2})\varrho_{C|A}]\rho_A^{1/2} \\ &= \rho_A^{1/2} \{\varepsilon_{A|C}^*(\rho_C^{-1/2} \sigma \rho_C^{-1/2})\} \rho_A^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da primeira para a segunda linha da expressão (4.26) utilizamos a propriedade II do Apêndice. Igualmente, na terceira linha aplicamos a propriedade III e na quarta linha aplicamos a propriedade I. Para a igualdade da última linha utilizamos o fato que $\varepsilon_{C|A}$ é um mapa CPTP, então $(\varepsilon_{A|C}^* \otimes I_B)(M_{CB}) = \text{Tr}_C(M_{BC} \varrho_{C|A})$ (ver [4]). Com isso a expressão (4.26) se transforma na expressão (4.22). Explicitamente,

$$\varepsilon_{A|C}(\cdot) = \mathcal{R}_{\varepsilon_{C|A}, \rho_A}(\cdot). \quad (4.27)$$

O teorema de Bayes no FEC (e o mapa de Petz), como na expressão (4.26), nos entrega uma formulação de inferência de estados causais de forma retroditiva [4, 1, 10, 45]. Para entendermos melhor esse assunto, vamos brevemente revisar um caso de inferência clássica e traçar o análogo para o caso quântico.

Suponha que tenhamos duas variáveis aleatórias clássicas R e S , e que os eventos que R representa precedem os eventos que S representa. A probabilidade conjunta é então,

$$P(R, S) = P(S|R)P(R) = P(R|S)P(S). \quad (4.28)$$

As probabilidades condicionais preditiva e retroditiva são, respectivamente,

$$P(S|R) = \frac{P(R, S)}{P(R)}, \quad (4.29)$$

$$P(R|S) = \frac{P(R, S)}{P(S)}. \quad (4.30)$$

Além disso, é importante ter clareza sobre os termos que utilizamos [1]. Por *predição*, denotamos a determinação de crenças de eventos futuros a partir da crença de eventos iniciais. Por *retrodição*, denotamos as crenças sobre eventos iniciais, dadas as crenças sobre eventos futuros. Podemos ilustrar melhor estes conceitos com um exemplo.

Em um dia típico de outono em uma cidade com clima tropical de altitude, um estudante gostaria de saber, ao observar a formação de nuvens de tempestade no céu, se há possibilidade de ocorrer queda de granizo. Assim, o estudante deseja calcular a probabilidade condicional dada por,

$$P(\text{Chover} \mid \text{Existência de nuvem de tempestade no céu}), \quad (4.31)$$

onde “chover” é representado pela variável aleatória C e “existência de nuvem de tempestade no céu” é representado pela variável aleatória N .⁸ Além disso, consideramos que em um dia pode ter nuvem ou não ter nuvem no céu, então,

$$P(N) + P(\neg N) = 1. \quad (4.32)$$

A chance total de chover em um certo dia, pode ser estimada pelo estudante preocupado, via propagação de crença. Portanto,

$$P(C) = P(C|N)P(N) + P(C|\neg N)P(\neg N), \quad (4.33)$$

onde $P(C|N)$ e $P(C|\neg N)$ são, respectivamente, as probabilidades condicionais preditivas de chover dado que há nuvens de tempestade, e de chover dado que não há nuvens de tempestade. Considerando que em um certo dia tenha chovido, o estudante poderia, via teorema de Bayes, calcular a probabilidade de que uma nuvem de tempestade tenha sido avistado no céu. Formalmente tal probabilidade pode ser obtida, tal qual a expressão (4.28) explicita,

$$P(N|C) = \frac{P(C|N)P(N)}{P(C)} = \frac{P(C|N)P(N)}{P(C|N)P(N) + P(C|\neg N)P(\neg N)}. \quad (4.34)$$

O que a expressão (4.34) entrega é justamente a probabilidade retroditiva de ter tido nuvem no céu dado que choveu. E uma vez tendo conhecimento de $P(N|C)$, o estudante poderia estimar $P(\neg N|C)$ como,

$$P(\neg N|C) = 1 - P(N|C). \quad (4.35)$$

⁸ $\neg N$ significa “Não há a existência de nuvem de tempestade no céu”

Com isso, retornamos ao Formalismo de Estados Condicionais. Analogamente ao caso clássico exemplificado acima, consideramos que uma dada região quântica B está no futuro de uma região quântica A . O Teorema de Bayes quântico, tal qual definido na seção 2.7, estabelece que o estado conjunto das duas regiões é da forma,

$$\varrho_{AB} = \varrho_{B|A} \star \rho_A = \varrho_{A|B} \star \rho_B. \quad (4.36)$$

Sendo os estados condicionais preditivo e retroditivo, respectivamente,

$$\varrho_{B|A} = \varrho_{AB} \star \rho_A^{-1}, \quad (4.37)$$

$$\varrho_{A|B} = \varrho_{AB} \star \rho_B^{-1}. \quad (4.38)$$

Via o teorema 2.4.1, temos a conexão destes estados condicionais com suas respectivas dinâmicas, sendo $\varepsilon_{B|A} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ associada a expressão (4.37), e $\varepsilon_{A|B}^{\text{retro}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ associada à expressão (4.38). Assim, $\varepsilon_{B|A}$ propaga estados de regiões iniciais para regiões futuras, enquanto $\varepsilon_{A|B}^{\text{retro}}$ propaga estados de regiões futuras para regiões iniciais. Isto é, quando consideramos, por exemplo, cenários de preparar e medir [46, 45] a retrodição quântica, dada por $\varepsilon_{A|B}^{\text{retro}}$, envolve encontrar as probabilidades das possíveis preparações de um sistema, dado os resultados das medições realizadas. Formalmente, o mapa de Petz pode ser visto como um mapa responsável por fazer a retrodição em sistemas quânticos, isto é,

$$\varepsilon_{A|B}^{\text{retro}}(\cdot) = \rho_A^{1/2} \{ \varepsilon_{B|A}^*(\rho_B^{-1/2}(\cdot)\rho_B^{-1/2}) \} \rho_A^{1/2}. \quad (4.39)$$

Podemos então concluir que o mapa de Petz não é somente a melhor forma de capturar as crenças de uma região B dado uma região A mas é também o mapa que faz isso de forma retroditiva.

Por fim, garantimos que $\varrho_{D|C}$ representado como,

$$\varrho_{D|C} = \text{Tr}_{AB}(\varrho_{D|B} \varrho_{B|A} \varrho_{A|C}), \quad (4.40)$$

é consistente e está bem definido. Dentro das limitações que o FEC apresenta, quando se tratando do estado $\varrho_{A|C}$, constatamos que este estado é o estado isomorfo à dinâmica responsável por trazer estados de uma região posterior C para uma região anterior A . Consequentemente, obtemos a dinâmica isomorfa a $\varrho_{D|C}$ como,

$$\varepsilon_{D|C} = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \varepsilon_{A|C}. \quad (4.41)$$

A expressão (4.41) é a sugestão para a dinâmica emergente Γ_T .

Quando consideramos um sistema sob análise de um detector que é incapaz de acessar todos os graus de liberdade disponíveis, o *coarse-graining* é utilizado como uma forma de descrever efetivamente o sistema. Assim, buscamos as condições necessárias e suficientes para a emergência de uma dinâmica efetiva entre as regiões “*coarse-grained*”

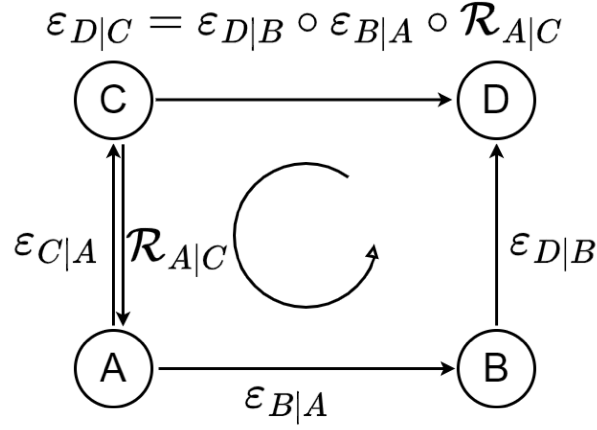


Figura 20 – Diagrama das quatro regiões quânticas e os respectivos canais quânticos. Onde a dinâmica $\varepsilon_{D|C}$ é a sugerida com o intuito de fazer o respectivo diagrama comutar. No braço esquerdo do diagrama é representado também o mapa de Petz responsável por reverter a dinâmica $\varepsilon_{C|A}$.

Fonte: Autoria Própria, 2025

que faça o diagrama da Figura 20 comutar, formalmente representado na expressão (4.1). Modelando este cenário no FEC, encontramos uma sugestão para a dinâmica emergente Γ_T , como

$$\Gamma_T = \varepsilon_{D|C} = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \varepsilon_{A|C}. \quad (4.42)$$

Ou ainda,

$$\Gamma_T(\cdot) = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \mathcal{R}_{\varepsilon_{A|C}, \rho_A}(\cdot). \quad (4.43)$$

A dinâmica emergente Γ_T , tal qual representada pela expressão (4.43) comuta o diagrama, como ilustra a Figura 20, ponto a ponto. Ou seja, não é um mapeamento geral (no sentido de independe de pontos do domínio), mas diretamente vinculado a cada ponto do domínio.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo, sob a perspectiva do Formalismo de Estados Condicionais (FEC), investigar a emergência de dinâmicas quânticas macroscópicas consistentes em cenários com ruído ou perda de informação.

Mais detalhadamente, quando um sistema quântico sujeito a uma evolução unitária \mathcal{U}_T é analisado por meio de um aparato de medição com limitações (ruído ou perda de informação), nem todos os graus de liberdade do sistema são acessados. Nesse contexto, o *coarse-graining* Λ_{CG} surge como um arcabouço matemático fundamental para a formulação de uma descrição efetiva do sistema ao nível macroscópico. Diante dessa nova representação, coloca-se uma questão central: quais as condições necessárias e suficientes para existência de uma dinâmica efetiva Γ_T que seja consistente? Formalmente, tal consistência é expressa pela seguinte relação:

$$\Gamma_T \circ \Lambda_{CG} = \Lambda_{CG} \circ \mathcal{U}_T. \quad (5.1)$$

Sendo assim, sobre a luz do Formalismo de Estados Condicionais, fornecido por Leifer e Spekkens [4], neste trabalho, buscamos estabelecer uma expressão para a dinâmica Γ_T . De modo geral,

- Começamos associando às regiões quânticas seus respectivos espaços de Hilbert.
- Tendo acesso aos mapas CPTP que conectam as regiões, via o isomorfismo de Jamiłkowski, caracterizado pelo teorema 2.3.1, os associamos aos estados condicionais causais respectivos.
- Via a estrutura de propagação de crença fornecida pelo FEC, especialmente o corolário 2.5.1, encontramos uma possível sugestão para a dinâmica emergente. Isto é, a nossa sugestão inicial reside na dinâmica isomorfa ao estado condicional dado pela expressão (4.10). Entretanto, dada sugestão depende diretamente do estado causal $\varrho_{A|C}$. Uma vez que temos é nos fornecido somente o estado $\varrho_{C|A}$, o reverteremos utilizando o teorema de Bayes quântico.
- Quando se tratando do estado $\varrho_{A|C}$, o formalismo se depara com limitações. Via mapa de Petz [4, 8], superamos estas limitações e mostramos, traçando um paralelo com o caso clássico, que a dinâmica associada a $\varrho_{A|C}$ é também o responsável por fazer a retrodição de estados da região C para a região A . Ou seja, aliando o mapa de Petz com a retrodição quântica fornecida pelo teorema de Bayes para estados condicionais, estabelecemos que, $\varrho_{A|C}$ é o estado condicional responsável por obter as crenças da região “passada” dado as crenças da região “futura”.
- Utilizamos o isomorfismo de Jamiłkowski e o mapa de Petz para encontrar a nossa sugestão para a dinâmica emergente Γ_T quando um cenário com *coarse-graining*

é considerado. Isto é, $\Gamma_T(\cdot) = \varepsilon_{D|B} \circ \varepsilon_{B|A} \circ \mathcal{R}_{\varepsilon_{A|C}, \rho_A}(\cdot)$ é a nossa sugestão para a dinâmica, como esquematizado na Figura 20.

- Os resultados obtidos indicam não uma única dinâmica, mas sim uma família de dinâmicas efetivas, pois a solução proposta depende tanto da dinâmica original que se deseja reverter quanto do estado inicial do sistema. Em termos formais, obtivemos um mapa que faz o diagrama comutar ponto a ponto, ou seja, um mapa cuja aplicação depende diretamente do ponto do domínio — caracterizando-o como ponto-dependente.

Como desdobramentos futuros, temos a proposta de utilizar técnicas de *semi-definite programming* (SDP) [26, 47] com o objetivo de investigar a existência de um mapa ótimo que satisfaça as mesmas restrições consideradas na construção da dinâmica emergente. Uma vez identificado tal mapa, pretendemos compará-lo com a proposta desenvolvida neste trabalho, visando avaliar qual das abordagens atende de forma mais eficiente às restrições impostas.

APÊNDICE A – ALGUMAS IDENTIDADES

Neste apêndice iremos provar 4 identidades que utilizamos para a demonstração de algumas expressões que compõe este trabalho. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ e $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$. Sendo $\{|a\rangle\}$ e $\{|b\rangle\}$ bases ortonormais de \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . E sendo $\{|a\rangle\langle a'|\}$ e $\{|b\rangle\langle b'|\}$ bases ortonormais de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, temos

$$(\text{Propriedade I}) \quad Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)(I_A \otimes B)] = Tr_B[(I_A \otimes B)\sigma(A \otimes I_B)]. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração. Por um lado,

$$\begin{aligned} Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)(I_A \otimes B)] &= Tr_B\left[\sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'| (A \otimes I_B)(I_A \otimes B)\right] \\ &= \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle\langle a'| A Tr(|b\rangle\langle b'| B). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Tr_B[(I_A \otimes B)\sigma(A \otimes I_B)] &= Tr_B[(I_A \otimes B) \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'| (A \otimes I_B)] \\ &= \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle\langle a'| A Tr(B |b\rangle\langle b'|). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pela propriedade cíclica do traço, $Tr(B |b\rangle\langle b'|) = Tr(|b\rangle\langle b'| B)$ e comparando as equações (A.2) e (A.3) concluímos que,

$$Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)(I_A \otimes B)] = Tr_B[(I_A \otimes B)\sigma(A \otimes I_B)]. \quad (\text{A.4})$$

□

Passemos à segunda propriedade.

$$(\text{Propriedade II}) \quad Tr_B[(A \otimes I_B)\sigma] = A Tr_B[(I_A \otimes I_B)\sigma]. \quad (\text{A.5})$$

Demonstração.

$$A = \sum_{a,a'} A_{aa'} |a\rangle\langle a'| \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{a,a',b,b'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'|. \quad (\text{A.6})$$

Então, sendo o traço parcial de um operador $\chi_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ calculado por,

$$Tr_B(\chi_{AB}) = \sum_b (I_A \otimes \langle b|) \chi_{AB} (I_A \otimes |b\rangle), \quad (\text{A.7})$$

temos,

$$\begin{aligned} Tr_B[(A \otimes I_B)\sigma] &= \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} (I_A \otimes \langle b''|) (A |a\rangle\langle a'| \otimes |b\rangle\langle b'|) (I_A \otimes |b''\rangle) \\ &= \sum_{aa'bb'b''} \sigma_{aa'bb'b''} A |a\rangle\langle a'| \delta_{b''b} \delta_{b'b''} \\ &= \sum_{aa'b''} \sigma_{aa'b''b''} A |a\rangle\langle a'|. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
ATr_B[(I_A \otimes I_B)\sigma] &= ATr_B\left(\sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'|\right) \\
&= A \sum_{aa'bb'b''} \sigma_{aa'bb'} (I_A \otimes \langle b''|) (|a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'|) (I_A \otimes |b''\rangle) \\
&= \sum_{aa'bb'b''} \sigma_{aa'bb'} A |a\rangle \langle a'| \delta_{b''b} \delta_{b'b''} \\
&= \sum_{aa'b''} \sigma_{aa'b''b''} A |a\rangle \langle a'|. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Assim, comparando as equações (A.8) e (A.9) concluímos que,

$$Tr_B[(A \otimes I_B)\sigma] = ATr_B[(I_A \otimes I_B)\sigma]. \tag{A.10}$$

□

Passemos à terceira propriedade.

$$(\text{Propriedade III}) \quad Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)] = Tr_B[\sigma(I_A \otimes I_B)]A. \tag{A.11}$$

Demonstração. Por um lado, temos,

$$\begin{aligned}
Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)] &= \sum_{aa'bb'b''} (I_A \otimes \langle b''|) (\sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'|) (I_A \otimes |b''\rangle) \\
&= \sum_{aa'bb'b''} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| A \delta_{b''b} \delta_{b'b''} \\
&= \sum_{aa'b''} \sigma_{aa'b''b''} |a\rangle \langle a'| A. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
Tr_B[\sigma(I_A \otimes I_B)]A &= \sum_{aa'bb'b''} (I_A \otimes \langle b''|) (\sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'|) (I_A \otimes |b''\rangle) A \\
&= \sum_{aa'bb'b''} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| A \delta_{b''b} \delta_{b'b''} \\
&= \sum_{aa'b''} \sigma_{aa'b''b''} |a\rangle \langle a'| A. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Assim, comparando as equações (A.12) e (A.13) concluímos que,

$$Tr_B[\sigma(A \otimes I_B)] = Tr_B[\sigma(I_A \otimes I_B)]A. \tag{A.14}$$

□

Passemos à quarta propriedade.

$$(\text{Propriedade IV}) \quad Tr_A[(A \otimes I_B)\sigma(A \otimes I_B)] = Tr_A[\sigma(AA \otimes I_B)]. \tag{A.15}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_A\{(A \otimes I_B)\sigma(A \otimes I_B)\} &= \text{Tr}_A\{(A \otimes I_B) \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'| (A \otimes I_B)\} \\
&= \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} \text{Tr}\{A |a\rangle \langle a'| A\} |b\rangle \langle b'| \\
&= \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} \text{Tr}\{|a\rangle \langle a'| AA\} |b\rangle \langle b'| \\
&= \text{Tr}_A\left\{ \sum_{aa'bb'} \sigma_{aa'bb'} |a\rangle \langle a'| \otimes |b\rangle \langle b'| (AA \otimes I_B) \right\} \\
&= \text{Tr}_A[\sigma(AA \otimes I_B)].
\end{aligned} \tag{A.16}$$

□

Bibliografia

- [1] Stephen M. Barnett, David T. Pegg e John Jeffers. “Bayes’ theorem and quantum retrodiction”. Em: *Journal of Modern Optics* 47.11 (2000), pp. 1779–1789. DOI: 10.1080/09500340008232431. URL: <https://doi.org/10.1080/09500340008232431>.
- [2] Luigi Accardi. “Topics in Quantum Probability”. Em: *Physics Reports* 77.3 (1981), pp. 169–192. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/0370-1573(81)90070-3.
- [3] M. S. Leifer. “Quantum dynamics as an analog of conditional probability”. Em: *Physical Review A* 74 (2006), p. 042310. DOI: 10.1103/PhysRevA.74.042310.
- [4] M. S. Leifer e R. W. Spekkens. “Towards a Formulation of Quantum Theory as a Causally Neutral Theory of Bayesian Inference”. Em: *Physical Review A* 88.5 (nov. de 2013), p. 052130. DOI: 10.1103/PhysRevA.88.052130. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.052130>.
- [5] Carlos A. B. Dantas. *Probabilidade: Um Curso Introductório*. pt-BR. EdUsp, 2023. ISBN: 978-65-5785-080-0.
- [6] G. A. Barnard. “Studies in the History of Probability and Statistics: IX. Thomas Bayes’s Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances”. Em: *Biometrika* 45 (1958). Contextualização histórica da obra de Bayes, pp. 293–295.
- [7] Edwin Thompson Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Pós-umo; abordagem conceitual e lógica da inferência bayesiana. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.
- [8] Dénes Petz. “Sufficient Subalgebras and the Relative Entropy of States of a von Neumann Algebra”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 105.1 (1986), pp. 123–131. DOI: 10.1007/BF01212345. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01212345>.
- [9] Carlton M. Caves, Christopher A. Fuchs e Rüdiger Schack. “Quantum probabilities as Bayesian probabilities”. Em: *Physical Review A* 65.2 (2002), p. 022305. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.022305. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.022305>.
- [10] David T. Pegg, Stephen M. Barnett e John Jeffers. “Quantum retrodiction in open systems”. Em: *Physical Review A* 66.2 (ago. de 2002), p. 022106. DOI: 10.1103/PhysRevA.66.022106. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.022106>.
- [11] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. 1^a ed. Vol. 1–2. Translated from the French by S. Rothman and others. Wiley-VCH, 1991.
- [12] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2^a ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN: 978-0131118928.

- [13] Adán Cabello. “Interpretations of Quantum Theory: A Map of Madness”. Em: *What is Quantum Information?* Ed. por Olimpia Lombardi et al. arXiv:1509.04711. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017, pp. 138–143. DOI: 10.1017/9781316494233.009.
- [14] Ugo Fano. “Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques”. Em: *Reviews of Modern Physics* 29.1 (1957), pp. 74–93. DOI: 10.1103/RevModPhys.29.74.
- [15] S. Popescu. “Quantum States and Knowledge: Between Pure States and Density Matrices”. Em: *arXiv preprint arXiv:1811.05472* (2018). arXiv:1811.05472 [quant-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/1811.05472>.
- [16] Wojciech Hubert Zurek. “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical”. Em: *Reviews of Modern Physics* 75.3 (2003), pp. 715–775. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.715.
- [17] Andrei Yu. Khrennikov e S. V. Kozyrev. “Noncommutative probability in classical disordered systems”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 326.3 (2003), pp. 456–463. DOI: 10.1016/S0378-4371(03)00360-1.
- [18] Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” Em: *Physical Review* 47.10 (1935), pp. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [19] Gerolamo Cardano. *The Book on Games of Chance: The 16th-Century Treatise on Probability*. Trad. por Sydney Henry Gould. Com pref. de Samuel S. Wilks. Originally published by Holt, Rinehart and Winston, 1961. Mineola, New York: Dover Publications, 2015. ISBN: 9780486808987.
- [20] David Bellhouse. “Decoding Cardano’s Liber de Ludo Aleae”. Em: *Historia Mathematica* 32.2 (2005), pp. 180–202. DOI: 10.1016/j.hm.2004.04.001. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086004000400>.
- [21] F. N. David. *Games, Gods and Gambling: The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era*. Apêndice 4, pp. 228–252, contém traduções das cartas entre Fermat e Pascal sobre o problema dos pontos. Capítulos 8-9 são feitas discussões sobre o Problema dos Pontos. New York: Hafner Publishing Company, 1962.
- [22] Christiaan Huygens. *The Value of All Chances in Games of Fortune, Cards, Dice, Wagers, Lotteries, &c., Mathematically Demonstrated*. English translation of *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (original Latin edition: 1657). London: S. Keimer for T. Woodward, 1714.

- [23] Thomas Bayes e Richard Price. “An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances”. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (1 de jan. de 1763). Publicado postumamente por Richard Price, pp. 370–418. DOI: 10.1098/rstl.1763.0053.
- [24] A. Jamiolkowski. “Linear Transformations Which Preserve Trace and Positive Semidefiniteness of Operators”. Em: *Reports on Mathematical Physics* 3.4 (1972), pp. 275–278. DOI: 10.1016/0034-4877(72)90011-0.
- [25] Man-Duen Choi. “Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 10 (1975), pp. 285–290. DOI: 10.1016/0024-3795(75)90075-0.
- [26] John Watrous. *Theory of Quantum Information*. Online. Lecture notes CS 766/QIC 820 Theory of Quantum Information (Fall 2011), University of Waterloo - Institute for Quantum Computing. 2011. URL: <https://johnwatrous.com/lecture-notes/>.
- [27] Hanti Lin. “Bayesian Epistemology”. Em: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [Online; acessado em 31-março-2025]. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/epistemology-bayesian/>.
- [28] Erwin Schrödinger. “The Present Situation in Quantum Mechanics”. Em: *Quantum Theory and Measurement*. Ed. por John Archibald Wheeler e Wojciech Hubert Zurek. Originally published as "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften* 23 (1935): 807–812, 823–828, 844–849. Princeton University Press, 1983, pp. 152–167.
- [29] Erwin Schrödinger. “Discussion of Probability Relations between Separated Systems”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31.4 (1935), pp. 555–563. DOI: 10.1017/S0305004100013554.
- [30] Fedor Herbut. “Schrödinger’s pure-state steering completed”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.8 (2009), p. 085202. DOI: 10.1088/1751-8113/42/8/085202.
- [31] Roope Uola et al. “Quantum steering”. Em: *Reviews of Modern Physics* 92.1 (mar. de 2020). Received 22 March 2019; Published 9 March 2020, p. 015001. DOI: 10.1103/RevModPhys.92.015001.
- [32] John S. Bell. “Bertlmann’s Socks and the Nature of Reality”. Em: *Le Journal de Physique Colloques* 42.C2 (1981). CERN-TH-2926, pp. C2-41–C2-62. DOI: 10.1051/jphyscol:1981202. URL: <https://doi.org/10.1051/jphyscol:1981202>.
- [33] J. S. Bell. “On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox”. Em: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), pp. 195–200. DOI: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

- [34] John F. Clauser et al. “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”. Em: *Physical Review Letters* 23.15 (out. de 1969). Received 4 August 1969; Published 13 October 1969, pp. 880–884. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880.
- [35] Stuart J. Freedman e John F. Clauser. “Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”. Em: *Physical Review Letters* 28.14 (abr. de 1972). Received 4 February 1972; Published 3 April 1972, pp. 938–941. DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.938.
- [36] Alain Aspect, Philippe Grangier e Gérard Roger. “Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem”. Em: *Physical Review Letters* 47.7 (ago. de 1981). Received 10 March 1981; Published 17 August 1981, pp. 460–463. DOI: 10.1103/PhysRevLett.47.460.
- [37] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne e Anton Zeilinger. “Going Beyond Bell’s Theorem”. Em: *Bell’s Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*. Ed. por Menas Kafatos. Vol. 37. Fundamental Theories of Physics. Chapter in edited volume. Springer, Dordrecht, 1989, pp. 69–72. ISBN: 978-94-017-0849-4. DOI: 10.1007/978-94-017-0849-4_10.
- [38] Dik Bouwmeester et al. “Observation of Three-Photon Greenberger–Horne–Zeilinger Entanglement”. Em: *Physical Review Letters* 82.7 (fev. de 1999). Received 4 November 1998; Published 15 February 1999, pp. 1345–1349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1345.
- [39] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th Anniversary Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978-1-107-00217-3. DOI: 10.1017/CB09780511976667.
- [40] Cristhiano Duarte et al. “Emerging dynamics arising from coarse-grained quantum systems”. Em: *Physical Review A* 96 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.96.032113.
- [41] Cristhiano Duarte et al. *Investigating Coarse-Grainings and Emergent Quantum Dynamics with Four Mathematical Perspectives*. Versão v2, submetida em 30 nov. 2020. 30 de nov. de 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2011.10349. arXiv: 2011.10349 [quant-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2011.10349>.
- [42] Paul Busch e Ralf Quadt. “Concepts of coarse graining in quantum mechanics”. Em: *International Journal of Theoretical Physics* 32.12 (dez. de 1993). Received 22 July 1993; Published December 1993, pp. 2261–2269. DOI: 10.1007/BF00672998.
- [43] Murray Gell-Mann e James B. Hartle. “Adaptive coarse graining, environment, strong decoherence, and quasiclassical realms”. Em: *Physical Review A* 89.5 (2014), p. 052125. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.052125. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.052125>.

- [44] H. Barnum e E. Knill. “Reversing quantum dynamics with near-optimal quantum and classical fidelity”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 43.5 (2002), pp. 2097–2106. DOI: 10.1063/1.1459754. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1459754>.
- [45] David T. Pegg, Stephen M. Barnett e John Jeffers. “Quantum theory of preparation and measurement”. Em: *Journal of Modern Optics* 49.5-6 (abr. de 2002), pp. 913–924. DOI: 10.1080/09500340110109412. URL: <https://doi.org/10.1080/09500340110109412>.
- [46] R. Grossi et al. “One Hundred Years Later: Stern-Gerlach Experiment and Dimension Witnesses”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 45 (2023), e20220227. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0227. URL: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/c853qYKN8NCsMXjvw7Pqdns/?lang=en>.
- [47] Paul Skrzypczyk e Daniel Cavalcanti. *Semidefinite Programming in Quantum Information Science*. IOP Publishing, 2023. ISBN: 978-0-7503-3343-6. DOI: 10.1088/978-0-7503-3343-6.