UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Jennefer da Costa Condak Monteiro

O uso de materiais manipuláveis em aulas investigativas: uma experiência com o Teorema de Pitágoras

Juiz de Fora
2025

Jennefer da Costa Condak Monteiro

O uso de materiais manipuláveis em aulas investigativas: uma experiência com o Teorema de Pitágoras

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Escher

Juiz de Fora
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Monteiro, Jennefer da Costa Condak.
O uso de materiais manipuláveis em aulas investigativas: uma experiência com o Teorema de Pitágoras / Jennefer da Costa Condak Monteiro. -- 2025.
117 f. : il.

Orientador: Marco Antônio Escher
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2025.

1. Materiais Manipuláveis. 2. Aprendizagem Matemática. 3. Educação Matemática. 4. Atividade Investigativa. 5. Teorema de Pitágoras. I. Escher, Marco Antônio , orient. II. Título.

Jennefer da Costa Condak Monteiro

O uso de materiais manipuláveis em aulas investigativas: uma experiência com o Teorema de Pitágoras

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 04 de abril de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marco Antônio Escher - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Dora Soraia Kindel - Membro externo
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Flávio de Souza Coelho - Membro interno
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 04/07/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Flavio de Souza Coelho**, **Professor(a)**, em 19/08/2025, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Dora Soraia Kindel**, **Usuário Externo**, em 25/09/2025, às 17:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2484660** e o código CRC **F573C7C8**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por sua presença em minha vida, sua graça e misericórdia, por seu amor incondicional e por me conceder a força necessária para ingressar e concluir o Mestrado.

Ao meu esposo, pelo apoio, pela companhia em cada desafio e por segurar minha mão nos momentos mais difíceis. Sua presença e incentivo foram fundamentais ao longo dessa jornada, tornando essa conquista também sua.

À minha família – minha mãe, meu pai, minha tia e minhas irmãs, por me incentivarem constantemente e por me lembrarem, em todos os momentos, da fé e do amparo de Deus.

Ao meu orientador, Marco Antônio Escher, pela paciência, pelas valiosas trocas de conhecimento e por todo o aprendizado que contribuiu para minha trajetória acadêmica e profissional.

À banca examinadora, professores Dr. Flávio e Dra. Soraia, pelas contribuições enriquecedoras ao meu trabalho.

Aos professores do Mestrado em Educação Matemática da UFJF, por todo o conhecimento compartilhado e pelas experiências que tanto agregaram à minha formação.

Aos meus alunos, pelas valiosas contribuições e participação dedicada no projeto de pesquisa.

A todos que, de alguma forma, estiveram ao meu lado nessa jornada, meu sincero agradecimento.

"Em toda sabedoria há uma preciosidade, e o conhecimento do justo é uma árvore de vida." (Provérbios. 3:18).

RESUMO

Esta pesquisa, de abordagem qualitativa, tem como objetivo identificar e analisar as contribuições dos materiais manipuláveis associados a metodologias investigativas para o aprendizado do Teorema de Pitágoras em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. O estudo foi estruturado em três etapas: a apresentação de uma situação-problema com a aplicação de materiais manipuláveis, a produção de materiais pelos próprios alunos e, por fim, a socialização das diferentes formas de demonstração do Teorema de Pitágoras em uma minifeira. A pesquisa fundamenta-se na teoria sociocultural de Vygotsky (1987), que destaca a mediação e a interação no processo de aprendizagem; na teoria da atividade de Leontiev (1978), que discute a atividade humana como um processo mediado por instrumentos e voltado para um objetivo; e nas contribuições de Lorenzato (2006), que abordam os materiais manipuláveis na compreensão de conceitos matemáticos. A partir desse referencial teórico, busca-se compreender como os alunos percebem a relação entre o uso de materiais manipuláveis e sua aprendizagem. Nesse sentido, a questão central do estudo é: "Qual é a percepção dos alunos sobre a importância do uso de materiais manipuláveis integrados a atividades investigativas no ensino do Teorema de Pitágoras?". Para responder a essa questão, os dados foram coletados por meio da aplicação de questionários e do registro dos relatos de experiência dos alunos em um caderno de bordo. Os resultados indicam que a utilização de materiais manipuláveis em atividades investigativas possibilita aos estudantes uma construção ativa do conhecimento, incentivando a experimentação, o raciocínio lógico e a argumentação matemática. Além disso, observou-se que essa abordagem promove maior interação entre os alunos, estimula a formulação de hipóteses e contribui para o desenvolvimento de habilidades voltadas à aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis; Aprendizagem Matemática; Educação Matemática; Atividade Investigativa; Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

This qualitative research aims to identify and analyze the contributions of manipulable materials associated with investigative methodologies for learning the Pythagorean Theorem among 7th-grade students in elementary education. The study was structured in three stages: presenting a problem situation with the application of manipulable materials, the production of materials by the students themselves, and, finally, the sharing of different forms of demonstration of the Pythagorean Theorem in a mini fair. The research is based on Vygotsky's (1987) sociocultural theory, which emphasizes mediation and interaction in the learning process; Leontiev's (1978) activity theory, which discusses human activity as a mediated process aimed at achieving a goal; and Lorenzato's (2006) contributions, which focus on the role of manipulable materials in understanding mathematical concepts. Drawing on this theoretical framework, the study seeks to understand how students perceive the relationship between the use of manipulable materials and their learning. In this context, the central research question is: "What is the students' perception of the importance of using manipulable materials integrated with investigative activities in teaching the Pythagorean Theorem?" To address this question, data were collected through questionnaires and students' experience reports. The results indicate that the use of manipulable materials in investigative activities enables students to actively construct knowledge, fostering experimentation, logical reasoning, and mathematical argumentation. Furthermore, it was observed that this approach promotes increased student interaction, encourages the formulation of hypotheses, and supports the development of skills essential for learning mathematics.

Palavras-chave: Manipulable Materials; Mathematical Learning; Mathematics Education; Investigative Activity; Pythagorean Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A qualidade do ensino nas escolas públicas de Educação Básica está relacionada ao reconhecimento das particularidades de cada estudante. voltadas ao ensino da Matemática revela-se um caminho promissor para inspirar práticas pedagógicas alinhadas às diferentes realidades escolares.

Busca-se, então, ampliar o pensamento da equipe pedagógica no processo de aquisição do conhecimento, considerando a pluralidade de características pessoais da turma, o que constitui uma riqueza de diferenças. Diante disso, o processo de ensino e aprendizagem é frequentemente delineado pelas inquietações acadêmicas e ocupa um lugar relevante nas pesquisas, especialmente na área de Educação Matemática.

Este trabalho busca identificar procedimentos que possam contribuir para a construção contínua da prática docente em relação à aprendizagem, além de tentar compreender como a aprendizagem ocorre entre os alunos no contexto em que se encontram.

Minha experiência como bolsista em programas de formação docente, como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência- PIBID e a Residência Pedagógica, permitiu-me observar de perto as dinâmicas da sala de aula. Pude notar que uma parcela significativa dos alunos manifestava insegurança em relação à Matemática, o que, muitas vezes, parecia refletir-se em dificuldades no processo de aprendizagem. Diante desse cenário, percebi que a adoção de metodologias diferenciadas e o uso estratégico de materiais manipuláveis poderiam ser ferramentas valiosas para despertar o interesse dos estudantes e promover uma participação mais ativa

Ao lecionar em uma turma do 7º ano, surgiram de abordar um tema relevante na área da Matemática, que envolve os campos algébrico e geométrico: o Teorema de Pitágoras, abordando-o sob diferentes perspectivas nas demonstrações, o que pode enriquecer a compreensão dos alunos.

Destaca-se, então, que diversos aspectos da Educação Matemática podem ser considerados pelos profissionais que atuam na sala de aula, incluindo questões sobre como o ensino pode atingir de forma satisfatória e elevar o conhecimento de cada estudante, superando as dificuldades existentes. Nessa perspectiva, propõe-se que o aluno seja um participante ativo em sua aprendizagem matemática, podendo atuar como agente transformador ao identificar o meio em que está inserido e suas interações, conforme sugerido pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). O docente, por sua vez, tem um papel mediador, buscando proporcionar meios adequados para um aprendizado efetivo.

Ademais, com o contexto pós-pandêmico, surge a necessidade de identificar possíveis medidas que poderiam ser adotadas para evitar que os estudantes sejam prejudicados em sua trajetória escolar. Para que isso se torne realidade na atual conjuntura, torna-se relevante integrar a pesquisa a novas concepções e metodologias no ensino da Matemática.

Diante da realidade educacional e com base nas experiências acumuladas ao longo da trajetória acadêmica, surgiu o interesse em identificar a relevância do uso de materiais manipuláveis associados às atividades investigativas no ensino da Matemática. Para isso, propõem-se três pilares: os materiais manipuláveis, a atividade proposta e o professor. É importante que os materiais manipuláveis estejam alinhados com a atividade planejada, sendo relevante a atuação do professor como mediador durante o processo de aprendizagem do conteúdo.

Considerando o vasto campo de trabalho sobre materiais manipuláveis, observou-se uma lacuna quanto à representação que articule a metodologia de investigação matemática, na qual o aluno é o agente construtor do conhecimento e o professor, o mediador do processo.

Para delimitar a pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no portal CAPES, com base em critérios de busca específicos. Esse processo resultou na identificação de seis estudos que abordaram o uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática. No entanto, observou-se que a discussão sobre aulas investigativas era pouco explorada nessas pesquisas. A partir disso, optou-se por focar na integração de aulas investigativas e materiais manipuláveis para o ensino do Teorema de Pitágoras, com a intenção de complementar a literatura existente e contribuir para a prática pedagógica.

Com base nas informações obtidas, a questão central da pesquisa foi formulada da seguinte forma: “Qual é a percepção dos alunos sobre a importância do uso de materiais manipuláveis integrados a atividades investigativas no ensino do Teorema de Pitágoras?”. O objetivo geral consiste em “Identificar e analisar as contribuições dos materiais manipuláveis associados a metodologias investigativas para o aprendizado do Teorema de Pitágoras em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental”.

Para direcionar a pesquisa, foram definidos os seguintes objetivos específicos: (i) destacar a importância do uso dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática; (ii) analisar a relação entre materiais, professor e atividade; (iii) associar o uso de materiais manipuláveis à construção da aprendizagem matemática; (iv) identificar o processo de aprendizagem à luz da teoria sociocultural; (v) desenvolver propostas de atividades investigativas que utilizem materiais manipuláveis para a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Em razão dos objetivos estabelecidos, o trabalho foi estruturado em nove capítulos, com o intuito de proporcionar uma organização detalhada dos diversos aspectos abordados ao longo da pesquisa. Cada capítulo foi planejado para cobrir uma etapa específica do estudo, desde a apresentação do contexto e dos objetivos até a discussão dos resultados e a conclusão.

O primeiro capítulo descreve os procedimentos metodológicos da pesquisa, abordando o planejamento e a execução do estudo, além de descrever os dados e os instrumentos utilizados na coleta, como questionários e observações.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica, na qual são discutidas propostas pedagógicas relacionadas ao ensino do Teorema de Pitágoras, com foco no uso de materiais manipuláveis. A literatura revisada mostra como esses métodos contribuem para a melhoria da compreensão e retenção de conceitos abstratos pelos alunos.

No terceiro capítulo, discute-se a teoria sociocultural de Vygotsky, que oferece uma compreensão sobre a aprendizagem mediada pela cultura e pelas interações sociais. Este referencial teórico fundamenta a análise do uso de materiais manipuláveis e atividades investigativas no ensino de matemática, destacando a construção colaborativa e contextualizada do conhecimento.

O quarto capítulo dedica-se ao estudo dos materiais manipuláveis e suas contribuições para a aprendizagem, associando-os às atividades investigativas. O capítulo explora como esses recursos tangíveis possibilitam a compreensão de conceitos abstratos, tornando o ensino mais acessível e personalizado para os alunos, ao mesmo tempo em que estimulam o aprendizado ativo e a interação com o conteúdo.

O quinto capítulo aborda o uso de atividades investigativas nas aulas de matemática, analisando como essas atividades podem ser estruturadas para estimular a descoberta ativa dos alunos. A relevância dessa abordagem no contexto educacional é discutida, com ênfase no ensino do Teorema de Pitágoras. Também é explorada a interação entre os materiais manipuláveis, o papel do professor e a dinâmica das atividades em sala de aula. O subcapítulo investiga como a escolha e a integração adequada dos materiais podem influenciar diretamente o processo de ensino e aprendizagem, destacando a função do professor como mediador e orientador.

O sexto capítulo dedica-se ao entendimento do Teorema de Pitágoras, explorando suas diversas demonstrações e ressaltando sua relevância no ensino da matemática. Abordam-se diferentes perspectivas para comprovar a validade do teorema, desde as geométricas até as algébricas.

No sétimo capítulo, são apresentados os procedimentos e a atividade planejada para o ensino da Demonstração do Teorema de Pitágoras, com o uso de materiais manipuláveis, voltada para turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. A atividade é descrita de forma detalhada, incluindo sugestões de questionamentos que estimulam a reflexão dos alunos e os objetivos específicos de aprendizagem que se busca alcançar.

No oitavo capítulo, os dados são organizados e analisados de forma a identificar padrões, relações e possíveis contribuições dos materiais manipuláveis e das atividades investigativas para o aprendizado dos alunos. A análise é estruturada em quatro partes: primeiro, a Situação Problema é apresentada, contextualizando o estudo e preparando os alunos para a investigação. Em seguida, é discutida a Atividade Investigativa Inicial, destacando como ela foi utilizada para estimular o pensamento crítico e a exploração do conteúdo matemático. O terceiro ponto aborda a Construção dos Materiais Manipuláveis, detalhando como esses recursos foram desenvolvidos e aplicados no ensino. Por fim, a Minifeira é descrita como uma oportunidade para os alunos compartilharem e apresentarem suas descobertas, utilizando os materiais manipuláveis para demonstrar as dimensões do teorema, permitindo uma análise visual e prática das aprendizagens adquiridas ao longo do processo.

Apresentação do Teorema de Pitágoras pelos alunos destacou três pontos importantes: valorização da comunicação como ferramenta para consolidar e compartilhar conhecimento; diversidade de métodos e materiais manipuláveis utilizados, possibilitando diferentes formas de compreensão do teorema; desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e autonomia, evidenciando que mesmo diante de dificuldades, estudantes conseguiram articular e expressar ideias, reforçando importância de abordagens variadas no processo de aprendizagem.

Ao final, apresenta as conclusões da pesquisa, além das referências bibliográficas e apêndices.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os métodos de pesquisa são caracterizados como um conjunto das diversas etapas ou passos para a conclusão da pesquisa. Para Cervo e Bervian (2002, p. 26), os objetos de investigação determinam o tipo de método a ser empregado e as técnicas a serem utilizadas.

Com tais propósitos, ao longo da análise realizada pela autora durante sua trajetória escolar e acadêmica, ficou evidente uma disparidade entre dois métodos de ensino de matemática. A utilização contínua de aulas tradicionais, centradas no professor, com exposição direta dos conteúdos e pouca interação dos alunos, resultava em desinteresse por parte dos estudantes. Segundo Lima e Souza (2020), essas aulas frequentemente falham em despertar o engajamento dos alunos, limitando a aprendizagem a processos mecânicos. Por outro lado, quando eram introduzidas atividades que envolviam manipulação, os estudantes não apenas demonstravam maior interesse, mas também conseguiam compreender conceitos e análises que antes passavam despercebidos.

Além desse aspecto, ao realizar estágios e atuar efetivamente como professora, percebeu a necessidade de criar atividades nas quais os alunos possam construir sua compreensão do conteúdo, assumindo o papel de investigadores do próprio conhecimento. Durante as aulas, foi notória uma inquietação particular em relação ao Teorema de Pitágoras, principalmente quanto à forma de estabelecer a relação com o triângulo retângulo e a tendência de muitos alunos em simplesmente mecanizar os conceitos, sem uma compreensão aprofundada sobre o assunto.

Diante dessa realidade, definiu-se como pergunta norteadora da pesquisa: "Qual é a percepção dos alunos sobre a importância do uso de materiais manipuláveis integrados a atividades investigativas no ensino do Teorema de Pitágoras?". Como descreve Bicudo: "pesquisar significa perseguir uma interrogação (problema, pergunta) de modo rigoroso, sistemático, sempre, sempre andando em torno dela, buscando todas as dimensões... qualquer que seja a concepção de pesquisa assumida pelo pesquisador" (Bicudo, 1993, p. 18-19).

A fim de responder a essa questão, adotou-se uma metodologia cuja base inicial foi o estudo e leitura de bibliografias pertinentes ao tema, o que auxiliou na delimitação das etapas do desenvolvimento do trabalho. Aliada à fundamentação teórica, a pesquisa contou com atividades práticas em sala de aula, aplicação de questionários, observação direta das interações dos alunos com os materiais manipuláveis e registros reflexivos em caderno de bordo, com foco nas experiências vividas durante as aulas.

Para condução do trabalho, optou-se por empregar a abordagem qualitativa, que permite uma investigação mais aprofundada do fenômeno em análise. Essa abordagem considera as experiências, perspectivas e contextos dos envolvidos, possibilitando compreender de que forma os estudantes interagiram com as propostas investigativas e como isso impactou sua aprendizagem do Teorema de Pitágoras, em contraste com a abordagem quantitativa. A respeito de procedimentos englobados no tema a ser tratado, Bauer e Gaskell afirmam que:

> A pesquisa quantitativa — lida com números, usa modelos estatísticos para explicar os dados, já a pesquisa qualitativa — lida com interpretações das realidades sociais evitando os números (Bauer; Gaskell, 2012, p. 22-23).

Ainda de acordo com os autores, a pesquisa qualitativa se volta com atenção para a direção da qualidade e da produção de dados. Como afirma D'Ambrósio (2012, p. 12), muitas vezes a pesquisa qualitativa é chamada de pesquisa naturalística, visando entender e interpretar dados e discursos.

Diante dos aspectos que se relacionam sobre essa metodologia, Bogdan e Biklen (2013) identificam cinco características básicas para delimitar a investigação do pesquisador:

> 1.Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. 2. A investigação qualitativa é descritiva. 3.Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (Bogdan; Biklen, 2013, p. 47-50).

Com base nesses fundamentos metodológicos, adotou-se a pesquisa participante como abordagem central, permitindo à autora acompanhar e conduzir as atividades diretamente em sala de aula. A imersão no ambiente escolar favoreceu a compreensão das percepções, dificuldades e interações dos estudantes durante as atividades com materiais manipuláveis em aulas investigativas.

Em relação aos procedimentos metodológicos, Bogdan e Biklen (2013) propõem um processo interativo. Isso significa que os pesquisadores coletam dados, realizam a codificação e categorização dos mesmos, e buscam padrões específicos para elencar com as teorias fundamentadas nos próprios dados, visto que é necessário organizar os dados em categorias que representam temas para a construção teórica.

Dessa forma, a pesquisa foi realizada em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, composta por 28 alunos, na qual a autora atua como docente. Esse contexto permitiu a compreensão do ambiente escolar e das características dos estudantes, elementos que influenciam na construção e os resultados da proposta aplicada ao ensino do Teorema de Pitágoras. Embora os alunos ainda não tivessem estudado o teorema, já possuíam noções de construções geométricas, especialmente relacionadas a triângulos e seus elementos.

Considerando esse cenário, elaborou-se uma proposta didática estruturada em três etapas: a apresentação de uma situação-problema, a realização de pesquisas com a construção dos materiais e, por fim, a exposição das produções em uma minifeira de matemática. Nesse evento, os alunos apresentaram diferentes formas de aplicação do Teorema de Pitágoras, utilizando materiais manipuláveis para demonstrar suas descobertas.

A análise dos dados coletados priorizou a observação atenta das interações em sala, valorizando a riqueza e complexidade das situações vivenciadas. De acordo com Bogdan e Biklen (2013), nenhum detalhe deve ser considerado irrelevante, pois até mesmo aquilo que parece banal pode revelar aspectos significativos para a compreensão do fenômeno investigado.

Corroborando essa ideia, Strauss e Corbin (2008) enfatizam a importância de utilizar métodos como entrevistas, observações e análise de documentos para capturar informações contextualizadas. A produção de dados deve ser realizada com cautela e focada em explorar as experiências e perspectivas dos participantes de maneira detalhada, visto que é um processo categorizado pelo inesperado, espontâneo. Essa escolha possibilitou a observação e produção de dados — por meio de registros em caderno de bordo, aplicação de questionários e análise das intervenções pedagógicas — além da participação ativa nas experiências dos alunos.

Percebeu-se a relevância de analisar como os conteúdos podem ser assimilados através do uso de materiais manipuláveis pelos alunos, em que medida esses recursos contribuem para o processo de aprendizagem. Além disso, destaca-se a importância da valorização dos pensamentos, que envolve atenção às pessoas e às suas ideias (D'Ambrósio, 2012, p. 21) e pode ser compreendida como uma forma de oferecer voz e participação aos indivíduos (Bauer; Gaskell, 2012, p. 30).

Para a análise dos dados, adotou-se um enfoque que não parte de hipóteses prévias, mas sim da abstração das informações emergentes da observação. Acontece como um funil, como dizem Bogdan e Biklen (2013):

> O processo de análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo. O investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efectuar a investigação (Bogdan; Biklen, 2013, p. 50).

Nesse sentido, a análise dos dados coletados nesta pesquisa foi orientada pela realidade observada em sala de aula. Embora as respostas dos alunos tenham sido registradas individualmente, a análise será realizada com base na dinâmica de cada grupo, considerando o percurso coletivo de construção do conhecimento. Essa escolha dialoga com os pressupostos de Vygotsky, ao valorizar o aspecto social da aprendizagem, em que a troca de ideias e a cooperação entre os pares contribuem para o desenvolvimento de cada indivíduo. Mesmo quando uma resposta se destaca, ela reflete um processo de construção conjunta, fruto do diálogo e da interação entre os membros do grupo.

No que se refere à elaboração de relatórios, Strauss e Corbin (2008) recomendam que os resultados sejam apresentados de forma detalhada. O relatório não apenas descreve a conclusão de uma pesquisa, mas também documenta todo o decorrer da atividade juntamente com as teorias analisadas, incluindo as categorias identificadas durante a análise dos dados.

Todos os achados da pesquisa serão apresentados detalhadamente no Capítulo 8, no qual serão descritos a estruturação do estudo, a metodologia adotada e a análise dos resultados obtidos em cada etapa da investigação. Serão abordadas as implicações dos dados produzidos, destacando-se as contribuições para o ensino de matemática, bem como as possíveis limitações do estudo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Durante o proceder da presente pesquisa, foram considerados os trabalhos previamente divulgados e conduzidos que poderiam fornecer cooperações valiosas para o desdobramento deste estudo. Foi realizado uma busca de teses, dissertações e artigos relacionados ao tema em análise na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações e através do Portal Capes, com destaque para a relevância na atualização das informações e no alinhamento com as discussões e publicações pertinentes já apresentadas no mundo acadêmico.

O assunto abordado nessa seção resulta de uma análise voltada para trabalhos acadêmicos defendidos nos últimos 10 anos, buscando a atualidade das informações e o alinhamento com as discussões mais recentes na área de Educação Matemática. Foi empreendida uma revisão bibliográfica concentrada em dissertações e teses oriundos dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática no Brasil, disponíveis na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações- BDTD.

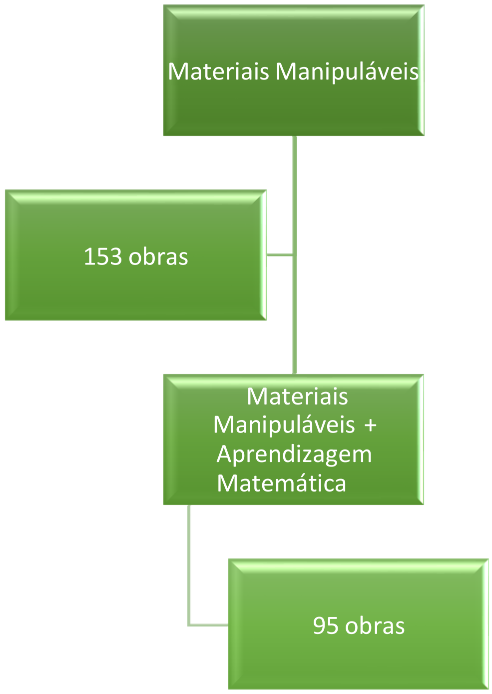
A escolha por acessar o repositório de dissertações e teses dos programas cadastrados na Base BDTD[1] teve como objetivo restringir e aprimorar a busca em conformidade com os temas da presente pesquisa. Com este intuito, foram estabelecidos alguns critérios para a seleção. Buscou-se estabelecer conexões entre obras que abordam temas similares com questões para impulsionar o progresso da pesquisa e identificar possíveis interrupções a serem investigadas.

Inicialmente, a palavra-chave utilizada teve como tema central “materiais manipuláveis”, identificando um total de 153 trabalhos, sendo 142 dissertações e 11 teses. Considerando que alguns dos resultados não estão diretamente ligados ao nosso interesse, foi necessário criar outra palavra-chave que fosse integrada à aprendizagem matemática, ou ensino da matemática, desta forma, as obras encontradas se restringiram a 95.

Apresentamos no esquema a seguir o desdobramento de nossa busca.

[1] BDTD - Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.

Figura 1- Diagrama da Revisão Bibliográfica



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Das 95 obras inicialmente selecionadas, foi realizada uma avaliação própria para identificar aquelas mais alinhadas ao assunto deste estudo, que inclui a educação matemática, materiais manipuláveis, atividades investigativas e o ensino do Teorema de Pitágoras. Esse processo levou à exclusão de trabalhos voltados para os anos iniciais do Ensino Fundamental, daqueles que não faziam uso de materiais manipuláveis e dos que abordavam temas científicos fora do escopo da matemática. Como resultado, restaram 52 obras, organizadas em um quadro que apresenta as instituições correspondentes, o número de trabalhos realizados em cada uma delas, sua classificação como dissertações ou teses, e seus respectivos títulos. Essa organização teve o propósito de facilitar a consulta da autora, permitindo a identificação dos trabalhos mais relevantes para análise e contribuição à pesquisa. O quadro encontra-se no Apêndice A.

Dado que este trabalho abrange o tema igualmente relevante sobre "atividade investigativa", decidiu-se, então, incorporá-lo como um filtro adicional. Como resultado, apenas 9 trabalhos foram localizados, dentre eles, 8 dissertações e uma tese, igualmente apresentados no Apêndice B. Para dar continuidade ao trabalho, foi necessário incluir mais um tema e reunir todos os tópicos envolvidos, como "materiais manipuláveis", "atividade investigativa" e "Teorema de Pitágoras". Essa combinação resultou em apenas um estudo, intitulado "Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de matemática", de Pereira (2013), que será analisado detalhadamente.

Devido à quantidade limitada de trabalhos encontrados inicialmente, recorreu-se a outro repositório para complementar a revisão. Optou-se pelo Portal da CAPES, onde a nova análise foi realizada com os mesmos critérios de seleção. Como resultado, foram identificados cinco artigos adicionais, apresentados no Apêndice B.

Os trabalhos selecionados para uma análise mais aprofundada, juntamente com a pesquisa correspondente, foram escolhidos com base em sua relevância para o tema deste estudo. Além disso, considerou-se a justificativa para sua importância, bem como seu papel na fundamentação da escolha dos recursos pedagógicos e das estratégias investigativas. Dessa forma, ao examinar diferentes perspectivas e evidências científicas, este estudo se alinha a essas contribuições, ao mesmo tempo em que propõe novas reflexões e práticas para o ensino da Matemática. A seguir, são apresentados os temas e as respectivas análises.

Quadro 1 – Trabalhos analisados na Revisão

AUTOR	TIPO	TÍTULOS
Pereira (2013)	Dissertação	"Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de matemática."
Pereira e Oliveira (2016)	Artigo	"Materiais manipuláveis e repertório compartilhado em aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria."
Silveira e Belo (2020)	Artigo	"(RE) Descobrindo o Teorema de Pitágoras: uma experiência com materiais didáticos manipuláveis."
Moré *et. al.* (2021)	Artigo	"Ensino do teorema de Pitágoras utilizando material concreto manipulável."
Costa e Andrade (2021)	Artigo	"Contribuições da oficina remota 'Tangram e o Teorema de Pitágoras' na Educação Básica e na Formação Docente."
Duarte e Yamamoto (2022)	Artigo	"Trincas pitagóricas e números figurados: um enfoque histórico para o ensino do Teorema de Pitágoras."

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Pereira (2013), em sua dissertação "Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de matemática", estabeleceu como objetivo investigar como a utilização de materiais manipuláveis influencia a participação dos estudantes nas aulas de geometria e como o estudo compartilhado e o engajamento mútuo podem contribuir para a aprendizagem geométrica. Foram escolhidos dois tópicos: o Teorema de Pitágoras e ângulos fundamentais no círculo. O cenário da pesquisa ocorreu em duas turmas da rede pública de Feira de Santana e Salvador: 8º e 9º ano. Sua estruturação foi feita no formato *multipaper*[2], utilizando três artigos independentes para compor o trabalho.

Houve a tentativa compartilhada de ajustar a fórmula do teorema de Pitágoras, utilizando os blocos geométricos, réguas, compassos e outros materiais para explorar visualmente os conceitos geométricos, incluindo o próprio Teorema. Esse método prático e colaborativo permitiu que os alunos manipulassem os materiais para investigar e verificar as relações entre os lados dos triângulos retângulos. A dissertação discute como essas atividades práticas com materiais manipuláveis facilitam a compreensão do Teorema de Pitágoras.

No artigo "Materiais manipuláveis e repertório compartilhado em aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria," compartilha-se os mesmos objetivos delineados na dissertação mencionada anteriormente, visto que ele é, na verdade, um fragmento da dissertação. Nessa seção, os autores detalham como os alunos são incentivados a explorar e verificar as relações entre oslados de um triângulo retângulo utilizando materiais manipuláveis. Isso permite uma compreensão do Teorema de Pitágoras, alcançando resultados congruentes com os apresentados na dissertação de Pereira (2013).

No artigo de Silveira e Belo (2020), os autores descrevem como, por meio de atividades práticas, os alunos são incentivados a compreender o Teorema de Pitágoras, manipulando materiais como réguas, papéis utilizados como moldes e caixas representando os quadrados do teorema. O processo envolveu a manipulação de peças, comparações visuais e discussões coletivas, permitindo que os estudantes chegassem à formulação do teorema de forma autônoma, sem que ele fosse diretamente apresentado pelo professor. Essa abordagem favoreceu a construção ativa do conhecimento, estimulando a curiosidade e o pensamento crítico, além de reforçar a importância da experimentação no ensino da Matemática. A experiência foi conduzida com uma turma de 29 alunos do 9º ano de uma escola estadual.

Moré *et al.* (2021) exploram metodologias para o ensino do Teorema de Pitágoras por meio do uso de materiais concretos manipuláveis. O objetivo central do artigo é demonstrar como a aplicação de objetos físicos pode motivar e despertar o interesse dos alunos no aprendizado do Teorema de Pitágoras. Para isso, foi desenvolvida uma atividade com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, durante a participação dos licenciandos da Universidade

[2] Multipaper é uma forma de apresentar uma dissertação ou tese como uma coleção de artigos que podem ser publicados.

Federal da Grande Dourados no PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência). A atividade consistia na aplicação de questionários e na apresentação de um material confeccionado com E.V.A., que continha três quadrados de tamanhos diferentes e treze quadrados pequenos de tamanho uniforme. O objetivo era que os alunos constatassem que os treze quadradinhos representavam a soma das áreas dos dois quadrados relacionados aos catetos, e que essa soma correspondia exatamente ao tamanho do quadrado maior, ou seja, o quadrado da hipotenusa.

Embora tenham percebido que a atividade precisava de um planejamento mais cuidadoso e desenvolvimento mais detalhado, o que resultou em dificuldades devido ao tempo limitado, os autores notaram que a utilização dos materiais manipuláveis proporcionou um retorno satisfatório.

Costa e Andrade (2021), no artigo intitulado "Contribuições da oficina remota 'Tangram e o Teorema de Pitágoras' na Educação Básica e na Formação Docente", investigam o impacto de uma oficina remota sobre diversas temáticas do Ensino Fundamental. O público-alvo da pesquisa foi composto por 21 alunos da Educação Básica e 20 futuros docentes. O Tangram, utilizado como recurso manipulável, serviu como ponto de partida para que os alunos explorassem e investigassem conceitos geométricos. A partir dessa interação com o material, os discentes foram incentivados a estabelecer relações geométricas que levariam à descoberta do Teorema de Pitágoras.

O trabalho apresentou as contribuições da oficina para ambos os públicos: o docente e o discente. Os resultados foram positivos para ambos os lados. Para o professor, a oficina ofereceu uma oportunidade para aprimorar as suas práticas, incentivando-os a realizar uma abordagem investigativa no processo de aprendizagem. Para os alunos, a atividade proporcionou o interesse e a concentração,

Duarte e Yamamoto (2020) abordam as trincas pitagóricas e números figurados, explorados em contexto histórico para tornar o aprendizado mais significativo. Para a construção da proposta, os autores estabeleceram uma combinação entre a história da matemática, resolução de problemas, o uso de materiais manipuláveis como fichas coloridas e recursos digitais em torno da origem dos termos aritméticos do Teorema de Pitágoras. O trabalho foi desenvolvido com 4 turmas do 9º ano de uma escola particular dividindo em grupos para a proposta do trabalho. Conclui-se que a atividade pode proporcionar uma experiência educacional enriquecedora, promovendo a compreensão do teorema, pois incentiva a curiosidade e a investigação entre os participantes.

De acordo com as perspectivas apresentadas nas seis obras analisadas, foi notória a satisfação dos autores quanto ao uso de materiais manipuláveis para o ensino do Teorema de Pitágoras. Cada uma delas destacou pontos relevantes para o ensino, utilizando recursos disponíveis tanto em ambientes virtuais quanto presenciais, como o incentivo à curiosidade, bem como a participação dos estudantes enquanto realizavam as tarefas.

Apesar de as obras abordarem o Tema do Teorema e a utilização de materiais manipuláveis, observou-se que a maioria fez uso apenas da abordagem geométrica para sua demonstração. No entanto, há um vasto campo de possibilidades, incluindo a aritmética e algébrica, que também poderiam ser exploradas. Partindo desse pressuposto, percebeu-se a necessidade de incluir metodologias investigativas que podem possibilitar ao aluno a construção ativa de seu conhecimento sobre o Teorema, sem se limitar a uma única dimensão.

4. A APRENDIZAGEM SOCIAL E CULTURAL

A aprendizagem é um processo complexo e fundamental no desenvolvimento humano, influenciado por diversas abordagens que desempenham um papel na evolução e no crescimento individual, pois é por meio do que se aprende que se adquire novos conhecimentos, habilidades e competências ao longo da vida.

A compreensão dos processos de aprendizagem envolve a consideração de uma ampla variedade de perspectivas teóricas. Como observado por Schunk (2016), existem várias abordagens que explicam esse fenômeno através das chamadas "teorias da aprendizagem". A começar pelas teorias behavioristas que destacam a importância das observações aos estímulos externos. Esse processo aponta para a influência do ambiente que gera a resposta do indivíduo.

As teorias cognitivas concentram-se nos processos mentais internos, relacionando memória, percepção e resolução de problemas, explorando a forma que se encontra as informações e como a cognição impacta o aprendizado, na influência das escolhas e decisões (Schunk, 2016).

Além disso, as teorias construtivistas enfatizam a importância da participação ativa na construção do conhecimento a partir das experiências e reflexões sobre elas.

Abordagens socioculturais, como a teoria de Vygotsky, destacam a importância das interações sociais e da cultura na aprendizagem e são essenciais para a construção do conhecimento.

Vygotsky dedicou grande parte de sua vida ao estudo de diversos temas, com um destaque para as relações entre desenvolvimento e aprendizagem, bem como sobre os processos de aprendizagem que ocorrem tanto no contexto escolar, quanto extraescolar (Rego, 1994). Ou seja, o psicólogo se empenhou em desenvolver uma vertente da psicologia que oferecesse uma visão unificada do ser humano, buscando integrar corpo e mente, ser biológico e social, membro da espécie humana e participante de um processo histórico contínuo (Oliveira, 1993, p. 23), essa visão pode ser utilizada para melhor compressão sobre a aprendizagem do indivíduo.

Com base nisso, o psicólogo afirma que todo aprendizado amplia o universo mental do indivíduo, promovendo processos internos de desenvolvimento que surgem da interação com outras pessoas e com o ambiente. Ao transformar o meio para atender suas necessidades, o ser humano também se transforma, pois as modificações que ele realiza influenciam seu comportamento (Vygotsky, 2007).

Como relatam Smolka e Góes:

> O que parece fundamental nessa interpretação da formação do sujeito é que o movimento de individuação se dá a partir das experiências propiciadas pela cultura. O desenvolvimento envolve processos, que se constituem mutuamente, de imersão na cultura e emergência da individualidade. Num processo de desenvolvimento que tem caráter mais de revolução que de evolução, o sujeito se faz como ser diferenciado do outro, mas formado na relação com o outro: singular, mas constituído socialmente, e, por isso mesmo, numa composição individual, mas não homogênea (Smolka; Góes, 1993).

Como evidenciado em sua concepção, o processo de interação e aprendizagem não pode ser analisado de forma isolada, desvinculado do contexto histórico-cultural vigente, já que o desenvolvimento individual é influenciado pelas condições sociais e culturais presentes. Assim, as reações dos estudantes em relação ao aprendizado são difundidas e interligadas pelas características do ambiente escolar, bem como pelas influências dos professores e colegas, que articulam seu modo de pensar socialmente de acordo com suas motivações e convicções pessoais.

Essas interações intervêm nas reações comportamentais e na receptividade dos alunos, podendo levar a um distanciamento em relação ao conteúdo, afetando em seu progresso acadêmico. Todos esses aspectos têm o potencial de impactar significativamente o resultado do processo de aquisição do conhecimento. Em outras palavras, estar fisicamente presente em um ambiente educacional não garante que todos os alunos aprenderão; além disso, mesmo aqueles que aprendem, podem fazê-lo de maneiras e ritmos diferentes, uma vez que o ser humano não é só um produto social, mas também um agente ativo em sociedade.

Para Vygotsky (2007), essas interações são fundamentais para o processo de internalização das experiências vividas. Ele enfatiza que a linguagem atua como uma ferramenta mediadora entre o pensamento individual e o ambiente social e cultural. Segundo sua teoria, é através da linguagem que se estabelece não apenas a comunicação, mas também a internalização dos conceitos, desenvolvendo habilidades cognitivas mais complexas.

Desta forma, a linguagem gerou três mudanças para aprendizagem.

A primeira possibilita aos indivíduos compreender objetos ausentes e internalizar experiências, mesmo sem terem vivenciado diretamente os acontecimentos.

A segunda mudança possibilitou a análise, a abstração e a generalização, promovendo o desenvolvimento de conceitos e formas de ordenar o conhecimento.

Já a terceira enfatiza que a linguagem, ao funcionar como um sistema de signos compartilhados, não só possibilita a comunicação eficaz entre pessoas, mas também a assimilação de informações acumuladas ao longo da história humana. Assim, a linguagem não apenas molda a maneira como se percebe o mundo, mas também serve como uma ferramenta para o aprendizado (Rego, 1994).

A comunicação é essencial para a aprendizagem, pois é através dela que os indivíduos interagem socialmente, compartilham conhecimentos e constroem significados em conjunto. Por meio da comunicação, os indivíduos desenvolvem a habilidade de refletir sobre problemas, planejar soluções e colaborar efetivamente. A interação verbal em sala de aula, como debates, discussões e explicações, facilita a internalização de conceitos complexos e a construção de um entendimento mais detalhado dos conteúdos estudados.

Sobre esses aspectos, seguidores de Vygotsky demonstram que as práticas educativas são meios de organizar o processo de assimilação e são essenciais para o desenvolvimento. Essas práticas envolvem formas de comunicação e os enunciados apresentados aos alunos. Daniels (1995) afirma: "Portanto, desenvolvimento e educação não são dois processos independentes, relacionam-se como conteúdo e forma do mesmo processo."

Sob essas perspectivas, as práticas educativas se moldam para a construção do conhecimento, conectando as experiências sociais coletivas ao desenvolvimento individual. Elas contribuem para que os indivíduos adquiram habilidades práticas e assimilem diferentes formas de pensamento e valores culturais, favorecendo sua capacidade de agir e pensar de maneira autônoma e reflexiva. Para tais argumentações, Vygotsky determinou que a consciência individual segue um esquema: atividade social coletiva, cultura, signos, atividade individual e, finalmente, consciência individual (Daniels, 1995). Relacionando todos esses aspectos, obtém-se a internalização de conceitos empregados em um determinado ensino.

A partir de uma atividade em grupo, onde os fatores sociais e culturais são agentes que interferem no processo de aprendizagem, os signos funcionam como instrumentos mediadores do processo de internalização. Esses signos permitem a criação de meios de imaginação e a elaboração de diferentes formas de resolução de problemas. Assim, após interagir social e culturalmente, o aluno realiza a atividade de forma individual, resultando na conscientização dos processos internalizados. Desse modo, a educação facilita a transição do aprendizado social para o individual.

Para a implementação desse esquema, são apresentadas abordagens variadas e criadas condições adequadas para que os alunos realizem diferentes atividades em grupo. Dessa forma, eles podem participar ativamente da construção do próprio conhecimento, considerando as influências do contexto em que estão inseridos.

Nesse processo, o papel do professor é de extrema importância, pois ele atua como mediador direto das práticas educativas, facilitando a interação social e cultural e orientando os alunos na internalização dos conceitos e habilidades. Assim, as ações do professor são influenciadoras para alcançar os alunos, promovendo um aprendizado significativo e contextualizado.

Como a aprendizagem está inserida em um processo social e cultural, visa distinguir dois tipos de processos de aprendizagem elencados por Vygotsky: os conceitos previamente concebidos pela experiência individual da criança, denominados como conceito cotidiano, que ocorrem em interações informais formando a base do conhecimento prático da indivíduo, e os conceitos científicos, que são elaborados em sala de aula são construídos de maneira sistemática e intencional no ambiente escolar, proporcionando um entendimento estruturado dos conteúdos acadêmicos. (Rego, 1994). Embora distintos, esses dois tipos de processos são complementares.

Vygotsky argumenta que a interação entre esses dois tipos de conhecimento é essencial para o desenvolvimento cognitivo, pois os conceitos científicos enriquecem e reorganizam os conceitos cotidianos, levando a uma compreensão mais completa e integrada da realidade.

Na Matemática, podemos exemplificar esses dois processos de aprendizagem através da compreensão de um cubo. Um aluno pode reconhecer um cubo e suas características básicas, mesmo sem conhecer e nomear seus elementos (face, aresta e vértice), mas, reconhecer suas características que são semelhantes ao dado e diferentes à uma caixa de sapato, por exemplo. Ou seja, seu contato com diferentes objetos ao longo da vida lhe permite fazer comparações e identificar semelhanças e diferenças entre diferentes objetos e no processo constrói categorias com as quais pode usar para expressar suas ideias.

Esses são exemplos de conceitos cotidianos, que são informais e práticos. No entanto, quando o aluno entra em uma sala de aula, ele é exposto a conceitos formais e abstratos sobre o cubo, como suas propriedades geométricas e fórmulas matemáticas. Esse ambiente escolar permite que o aluno generalize e aprofunde seu entendimento, transformando a percepção cotidiana em um conceito científico mais abrangente e estruturado. Dessa forma, a educação formal complementa e enriquece os conhecimentos práticos adquiridos na vida cotidiana, promovendo uma compreensão completa e sistemática da realidade.

A formalização desses conceitos não é um processo fácil; ela exige atenção deliberada, memória lógica, abstração, e habilidade de comparar e diferenciar (Rego, 1994). Para que isso aconteça de maneira eficaz, o ensino não pode ser mecanizado nem se restringir a uma simples apresentação de conteúdo. Isso é particularmente relevante na área da matemática, onde a abstração tem um papel central. Um ensino baseado apenas na repetição e memorização não será capaz de desenvolver as habilidades necessárias para a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos. Os educadores podem criar ambientes de aprendizagem que estimulem a reflexão crítica, a resolução de problemas e o entendimento conceitual, facilitando a internalização e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos. Como relata Vygotsky:

> O ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor quetenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto overbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante a de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo (Vygotsky, 1987, p. 72).

Esses ambientes podem ser proporcionados pela escola, incentivando nos alunos o desejo de aprender, gradualmente, de forma crítica e independente. A educação não deve se limitar a uma mera apresentação de conteúdos (Davidov, 1988, p. 3), pois entende-se a necessidade de os alunos buscarem o hábito de aplicar os ensinamentos em sua vida diária, superando os desafios impostos. A escola tem o papel de incentivar os alunos a utilizarem os processos de internalização na prática, permitindo que eles compreendam os conceitos aprendidos e os integrem em suas experiências cotidianas. Dessa forma, a educação torna-se um processo dinâmico e contínuo, capacitando os alunos a pensarem de maneira autônoma e a se adaptarem aos diversos contextos que enfrentarão ao longo da vida.

Para isso, o papel do professor se transforma em mediador, proporcionando um ensino que incentive o interesse e a curiosidade dos alunos. Com sua experiência e conhecimento, ele guia os estudantes e cria atividades que os ajudem a observar e explorar novos conceitos, desenvolvendo habilidades críticas. Atuando dessa maneira, o professor cria um ambiente de aprendizagem onde os alunos se sentem motivados a questionar, investigar e construir seu próprio entendimento. Como relata Rego:

> Nesse caso é oportuno que se planejem atividades que envolvam observação (por exemplo, de fenômenos da natureza), pesquisa sobre determinado tema (em casa, na biblioteca, com os parentes etc.), resolução de questões específicas (que podem tentar ser respondidas individualmente, em duplas ou grupos maiores) ou mesmo proposta de estudos e preparação de seminários, palestras ou outras apresentações (Rego, 1994).

Para essas mediações, retoma-se a visão de Vygotsky (1987) sobre o aprendizado e suas propostas educacionais. O autor vê o aprendizado como um processo social e enfatiza que os educadores reconheçam que o ensino é o meio pelo qual o desenvolvimento avança. Ele argumenta que os conteúdos socialmente elaborados do conhecimento humano e as estratégias cognitivas necessárias para sua internalização precisam ser evocados nos aprendizes de acordo com seus níveis reais de desenvolvimento.

Referindo-se a esses níveis, Vygotsky (2007) aponta para o fundamento das funções chamadas funções psicológicas superiores, que estão relacionadas ao desenvolvimento cognitivo da pessoa, distinguindo-a dos animais não racionais, como: atenção e memória voluntária, memorização ativa, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo e capacidade de planejamento.

As funções são consideradas superiores, pois estão relacionadas às ações conscientes, mecanismos intencionais e processos voluntários pelos quais a pessoa exerce sua independência sobre o meio. Tem-se que essas funções não se baseiam em fatos biológicos e nem na história da espécie, pois elas se integram no social, utilizando das culturas diferenciadas em cada estrutura humana e das relações sociais existentes (Rego, 1994). Através da interação social mediada pela linguagem, transforma-se processos externos em processos internos, aumentando as capacidades mentais.

A aprendizagem se desenvolve atribuindo às funções psicológicas superiores duas vertentes: caminhos diretos e caminhos indiretos ao aprender assuntos variados. As áreas das funções psicológicas superiores podem se manifestar através desses dois caminhos, e entende-se que, pelo caminho direto, não se utiliza de outros meios para se chegar ao resultado que se é planejado. (Vygotsky, 2007, p. 864).

Os caminhos diretos referem-se aos métodos de aprendizagem em que o aluno adquire conhecimento de maneira imediata e explícita, geralmente por meio da instrução direta e da repetição de informações apresentadas de forma clara e estruturada.

Já quem se apropria do caminho indireto utiliza-se de formas que ajudam a chegar ao objeto final do conhecimento. Como relata Vygotsky (2007), a estrutura de conhecimentos da criança se apropria de caminhos indiretos para chegar ao seu objetivo quando não é viável ou suficiente seguir o caminho direto, desta forma, são proporcionadas alternativas para a internalização do conhecimento.

Concluindo, a aprendizagem, segundo Vygotsky (2007), é um processo complexo e dinâmico, no qual o caminho indireto tem um papel relevante na construção do conhecimento. Ao utilizar alternativas para alcançar o objeto final do conhecimento, a criança desenvolve habilidades cognitivas essenciais, adaptando-se às situações em que o caminho direto não é viável. O autor enfatiza que essa estrutura de conhecimentos é fundamental para o desenvolvimento cognitivo, pois permite que os alunos internalizem conceitos e estratégias de maneira mais flexível e resiliente. Dessa forma, a mediação do professor e a criação de um ambiente de aprendizagem rico em interações sociais e culturais são indispensáveis para que os alunos possam explorar e construir conhecimento.

5. MATERIAIS MANIPULÁVEIS E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Com a base teórica apresentada anteriormente, pode-se estabelecer uma relação concreta com a prática educativa, especialmente no Ensino da Matemática, evidenciando a aplicabilidade das ideias de Vygotsky. O autor argumenta que o aprendizado é intrínseco a um processo mediado socialmente, no qual ferramentas e símbolos culturais contribuem para a construção do conhecimento.

Para a realização de tais argumentos na área da Educação, é indicado que os profissionais busquem estratégias assertivas que utilizem a liberdade cultural e o contexto social para promover mudanças no ambiente de aprendizagem. Apresentam-se, então, diferentes abordagens pedagógicas, proporcionando oportunidades para o aprendizado de estudantes com diversas necessidades e diferenças.

Até o século XX, o sistema educacional brasileiro foi marcado por um ensino focado no professor e predominantemente expositivo, com os alunos desempenhando um papel passivo e focado na memorização de informações, o que limitava uma descoberta de criação e crítica ao que lhe era fornecido, sem incrementar o contexto social da época. essa perspectiva, o professor exercia uma função mais diretiva, e o uso de materiais era frequentemente visto como perda de tempo ou até como um obstáculo ao andamento das aulas, por estimular o interesse dos alunos e favorecer a comunicação entre eles (Fiorentini; Miorim, 1990). Não havia uma preocupação em proporcionar materiais que permitissem a visualização e a experimentação dos conceitos teóricos ensinados.

A inserção de recursos didáticos foi um processo gradual e transformador, que refletiu uma mudança nas práticas educacionais do país. Como precursor desse processo, Pestalozzi defendia uma educação que integrasse a teoria à prática e promovesse o desenvolvimento integral do aluno. Ele acreditava que o aprendizado se baseava na experiência direta e no uso de objetos concretos, o que ajudou a fundamentar a utilização de materiais didáticos que envolvem a manipulação e a experimentação (Souza, 2007).

Nesse contexto, prover um ensino que atenda a todos os alunos não é uma tarefa fácil, mas a incorporação dessas ferramentas didáticas, alinhadas às ideias de Pestalozzi, possibilita acolher e incentivar a criatividade dos alunos. Ao utilizar recursos que envolvem formas, comunicação e criação, o processo educativo se torna mais inclusivo e acessível. Dessa forma, os alunos se sentem mais integrados e motivados, desenvolvendo suas habilidades pessoais e participando ativamente do seu próprio aprendizado.

Ao destacar a importância de diversificar as estratégias de ensino para atender aos diferentes estilos de aprendizagem dos alunos, Howard Gardner (1994) argumenta que oferecer várias formas de interação com o conteúdo pode facilitar a compreensão e a retenção.

Para que isso ocorra, os recursos didáticos fornecem um apoio para o desenvolvimento da aprendizagem de conceitos. De acordo com Souza (2007, p.111): “recurso didático é todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos”.

Podem incluir livros, vídeos, softwares, jogos, experimentos práticos, materiais manipuláveis, entre outros. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância dos recursos didáticos ao afirmar que:

> Os recursos e materiais didáticos são fundamentais para promover práticas pedagógicas diversificadas e inclusivas, com potencial de gerar novas formas de pensar e agir, que contribuam para o desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes (Brasil, 2017, p. 25).

A sua utilização promove a assimilação do conteúdo, criatividade, coordenação motora e habilidade ao manusear diferentes objetos, que serão identificados e mediados pelos professores em suas aulas (Souza, 2007).

Dentre os recursos, enfatiza-se os materiais manipuláveis que, de acordo com Kindel e Oliveira (2017), são definidos como:

> Objetos, instrumentos ou outros meios, que têm aplicação nos afazeres do dia a dia, ou que são utilizados para representar uma ideia, e que os estudantes podem sentir, tocar, manipular e movimentar para ajudá-los a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diferentes fases de aprendizagem (Kindel; Oliveira, 2017, p. 63)

É importante frisar que há uma distinção entre os termos “materiais manipuláveis” e “materiais concretos”. Diversos autores utilizam o segundo termo para se referir a todos os materiais disponíveis. Porém, há uma diversidade de materiais manipuláveis que não se encaixa na categoria de materiais concretos, pois materiais manipuláveis são objetos que não apenas existem fisicamente, mas também são projetados para serem manipulados pelos alunos durante o processo de aprendizagem. Esses materiais permitem interações mais dinâmicas e a experimentação ativa. Já os materiais concretos são representações físicas utilizadas para representar conceitos teóricos (Kindel; Oliveira, 2017).

Há ainda uma abordagem importante sobre dois conceitos relevantes para essa área: materiais manipuláveis estruturados e não estruturados, conforme conceituados por Kindel e

Oliveira (2017). Os materiais manipuláveis estruturados são projetados com um propósito educacional e utilizados para ensinar conceitos e procedimentos já definidos para uma finalidade específica. Eles geralmente vêm com instruções sobre como utilizá-los. Exemplos disso são o Tangram e o Geoplano - utilizados para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Por outro lado, os materiais manipuláveis não estruturados são apresentados sem uma função predeterminada e podem ser adaptados para várias finalidades. Exemplos incluem blocos de construção, massas de modelar, palitos de madeira e tampas de garrafa. Esses materiais podem ser organizados de maneira a contribuir para a criação de um material estruturado.

Ambos os tipos de materiais possuem significância, especialmente na matemática, onde podem ser utilizados para diversos fins educativos relacionados a conceitos importantes, seja na Geometria ou na Álgebra. Assim, entende-se que, tanto os materiais manipuláveis estruturados quanto os não estruturados, são valiosos no processo de ensino e aprendizagem, oferecendo flexibilidade e especificidade conforme a necessidade educativa.

Essa flexibilidade é crucial, pois uma das principais necessidades no campo da matemática é a visualização de seus conceitos, devido à sua natureza abstrata. A capacidade de representar visualmente esses conceitos permite que os alunos construam uma compreensão mais profunda das ideias matemáticas (D'Ambrósio, 2012).

Lorenzato (2009) destaca o papel da visualização, especialmente em geometria, onde a percepção de formas e relações espaciais contribui para o aprendizado, e em álgebra, onde representação gráfica de funções e equações ajuda na compreensão de propriedades e comportamentos

Em vista disso, ressalta-se a importância do material manipulável, por meio de representações visuais ou táteis, o qual, por sua vez, ao ser utilizado, possibilitará uma nova forma de aquisição do conhecimento, usufruindo dos caminhos indiretos, pois, de acordo com Kaleff e Rosa (2016), a produção de uma imagem mental de um conceito matemático pode ser uma ação complexa para alguns estudantes.

Além disso, a familiarização com a Matemática desde cedo, por meio de métodos pedagógicos e materiais didáticos apropriados, contribui para a desconstrução da imagem de que essa ciência é inacessível. Quando os alunos têm a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma manipulativa e contextualizada, eles passam a enxergar a Matemática não como um conjunto de fórmulas e regras desconectadas, mas como uma disciplina viva e relevante para a compreensão do mundo. Como relata Kindel e Oliveira (2007):

> Objetos, instrumentos ou outros meios, que têm aplicação nos afazeres do dia a dia, ou que são utilizados para representar uma ideia, e que os estudantes podem sentir, tocar, manipular e movimentar para ajudá-los a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diferentes fases de aprendizagem (Kindel; Oliveira, 2017, p. 63).

Para atingir esse objetivo, os materiais que são utilizados podem desempenhar várias funções mediante a finalidade que se é requerida em cada aula pelo professor. Lorenzato (2009) afirma que o trabalho inicial é saber qual meta quer alcançar com esses materiais:

> [...] o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula. (Lorenzato, 2009, p. 18)

Após estabelecer os objetivos da aula, escolhe-se os materiais que serão utilizados. Como critério para seleção, opta-se por aqueles que atendem às especificidades de cada turma e de cada estudante individualmente. Essa tarefa exige atenção a diversos critérios para garantir que esses materiais possam contribuir, não apenas como complemento de estudo, mas também como ferramentas que enriquecem o processo de aprendizagem.

Assim, de acordo com Valle e Salles (2010), para a escolha de materiais manipuláveis, considera-se alguns critérios fundamentais: adequação ao conteúdo; segurança; durabilidade e custo benefício; diversidade e inclusão; e flexibilidade e criatividade. A adequação ao conteúdo envolve selecionar materiais que sejam diretamente relevantes aos objetivos educacionais e ao currículo, considerando o nível de desenvolvimento dos alunos. Além disso, esses materiais precisam conectar novos conhecimentos ao conhecimento prévio dos alunos, incentivando a exploração e descoberta de forma interativa. Para a segurança, é preciso considerar a durabilidade dos materiais para evitar que se quebrem facilmente e se tornem perigosos. Há uma prioridade no planejamento educacional: avaliar os riscos associados ao uso de cada material.

O critério de durabilidade e custo-benefício visa selecionar materiais de alta qualidade que reduzam a necessidade de reposições frequentes, evitando gastos recorrentes, por isso, deve-se optar por materiais que ofereçam um bom custo-benefício para que não comprometa o orçamento disponível, garantindo investimentos eficientes e sustentáveis no ambiente educacional. A diversidade e a inclusão na escolha de materiais manipuláveis são essenciais para criar um ambiente de aprendizado que acolha e valorize as diferenças individuais. Materiais que refletem uma ampla gama de experiências culturais e sociais ajudam os alunos a desenvolverem uma compreensão global e uma maior empatia.

Por fim, a flexibilidade e a criatividade na utilização dos materiais também são consideradas. Materiais que permitam múltiplas formas de uso podem estimular a criatividade dos alunos e dos professores, possibilitando abordagens pedagógicas inovadoras e diversificadas.

Considerando os critérios apresentados, o uso da tecnologia tem ganhado espaço no âmbito educacional, tornando-se uma alternativa viável para escolha de material manipulável, mesmo sem a necessidade de toque físico, pois permite a interação ativa dos alunos com o conteúdo educativo. Segundo Carvalho e Silva (2017): "a interação proporcionada por softwares educativos e aplicativos digitais possibilita que os alunos manipulem informações e conceitos, experimentando diferentes cenários e soluções". Essa interatividade é uma forma de manipulação cognitiva, onde os alunos podem alterar variáveis, observar resultados e desenvolver habilidades de resolução de problemas de maneira dinâmica.

A adequação ao conteúdo através do uso dos recursos digitais dinamiza a visualização de conceitos abstratos, atendendo ao critério da segurança, e permitindo a continuidade do aprendizado de maneira remota. Em termos de durabilidade e custo-benefício, as ferramentas digitais são econômicas a longo prazo, eliminando a necessidade de reposições frequentes. Além disso, a tecnologia promove diversidade e inclusão, oferecendo acessibilidade para alunos com diferentes necessidades e refletindo diversas experiências culturais.

Com isso, os materiais que se integram à tecnologia tornaram-se essenciais para abranger os conteúdos. Viabilizam a oferta de atividades síncronas e assíncronas, além de possibilitar a construção do conhecimento cooperativo, onde há interação entre professor e aluno e aluno com aluno.

Por conseguinte, os materiais tecnológicos são agentes de possibilidades de atividades com cunho qualitativo, que envolvem aplicativos de celulares, *softwares* educativos, plataformas de *e-learning* [3] e laboratórios virtuais, os quais podem contribuir para que o aluno investigue, interaja e construa significados sobre o que está sendo aprendido (Lucena, 2017)

Alguns *softwares* matemáticos são considerados dinâmicos, onde o aluno pode adotar o papel de construtor de conhecimentos, já que ele irá investigar, entender, preparar argumentos, estabelecer sua própria convicção sobre as propriedades existentes, tudo de acordo com a sua percepção e com mediação do professor. Tais *softwares* são disponibilizados através de computadores e dispositivos com toques de tela.

[3] E-learning- Aprendizagem eletrônica. É uma modalidade de ensino a distância que utiliza recursos tecnológicos para promover o aprendizado.

A manipulação será realizada de forma interativa, permitindo ao aluno compreender e aplicar conceitos em temas como álgebra, aritmética, geometria, estatística e construção de gráficos. Os educandos poderão revisar conteúdos já estudados ou aprender novos conceitos de forma introdutória. Em um contexto de construção, podem ser exemplificados sólidos geométricos, gráficos de funções, estatísticas, além de possibilitar cálculos de áreas, perímetros, entre outros.

Não se pode deixar de destacar a importância dos materiais físicos, que possibilitam uma experiência sensorial. Eles são especialmente eficazes no desenvolvimento de habilidades motoras e na facilitação da compreensão de conceitos abstratos de maneira tangível e direta. Como Pires e Branco (2010) afirmam: "os materiais manipuláveis permitem que os estudantes explorem conceitos complexos por meio de experiências práticas, o que é crucial para o desenvolvimento cognitivo e motor".

É importante frisar que nenhum desses materiais simplificará a ciência da Matemática, mas serão geradores de possibilidades no aprendizado de conceitos e procedimentos para uma resolução de problemas. Além disso, contribuirão para a compreensão de aspectos interligados, como certas abstrações que não foram plenamente entendidas em aulas expositivas e teóricas.

Isso é possível, pois tais recursos podem exercer o papel de catalisador na construção do saber matemático pelo educando, uma vez que estimulam a atividade mental. Com base nessa afirmativa, é possível identificar dois fatores substanciais de desenvolvimento que distinguem duas vertentes do aprendizado: a que segue um roteiro pré-definido para a compreensão de conceitos e resoluções, e a que enfatiza a construção ativa do conhecimento, sendo esta última mais propensa a ser aceita pelos educandos.

5.1 MATERIAIS ALINHADOS ÀS ATIVIDADES INVESTIGATIVAS MATEMÁTICAS

A investigação no contexto educacional é uma abordagem pedagógica que incentiva os alunos a explorarem, questionarem e descobrirem conhecimentos por meio de atividades práticas e reflexivas. Fundamentada em teorias sociointeracionistas, a investigação indica que os alunos sejam o centro do processo de aprendizagem, promovendo uma participação ativa.

Freire (1996), em sua obra Pedagogia da Autonomia, argumenta que a aprendizagem não deve ser uma simples transferência de informações do professor para o aluno, mas um processo colaborativo em que o aluno é sujeito ativo.

Para implementar a investigação em sala de aula, é importante seguir algumas etapas. A investigação começa com a identificação de questões ou problemas que despertem o interesse dos alunos e sejam relevantes para o conteúdo curricular. Esses questionamentos podem ser formulados de maneira a permitir múltiplas abordagens e respostas, incentivando os alunos a explorarem diferentes caminhos de investigação, já que eles irão refletir sobre o processo. Como Lorenzato (2016) afirma: "o ponto de partida para a investigação deve ser a problematização do conteúdo, fazendo com que o aluno se sinta desafiado a buscar soluções e, assim, participe ativamente do processo de aprendizagem".

Uma vez identificadas as questões, os alunos são incentivados a formular hipóteses, que são suposições iniciais sobre possíveis respostas ou soluções com base em seus conhecimentos prévios e interesses. Carvalho (2013) explica que "a formulação de hipóteses é um passo fundamental, pois envolve o aluno em um exercício de previsão e planejamento, crucial para o desenvolvimento do pensamento científico".

O próximo passo é o planejamento da investigação, onde os alunos decidem quais métodos e ferramentas utilizarão para testar suas hipóteses. Isso pode incluir a produção de dados, a realização de experimentos, observações diretas, entrevistas, pesquisas bibliográficas, entre outras estratégias. Durante essa fase, os alunos são incentivados a pensar criticamente sobre a validade e a confiabilidade dos métodos que estão escolhendo.

Durante a fase de investigação, os alunos participam de atividades práticas, coletando dados e registrando suas observações e resultados. Esse envolvimento direto é importante, pois, como destaca Carvalho (2013, p. 48), "a experiência direta e prática fortalece a compreensão dos conceitos e proporciona uma base sólida para a reflexão crítica".

A análise e interpretação dos resultados é uma etapa importante do processo investigativo. Os alunos comparam os dados coletados com suas hipóteses iniciais, avaliam se os resultados confirmam ou refutam suas previsões e consideram possíveis explicações para os resultados obtidos. Esse processo de reflexão crítica contribui para o desenvolvimento do pensamento científico e da capacidade de resolver problemas complexos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), nessa etapa são realizados testes e refinadas as conjecturas formuladas inicialmente.

A comunicação dos resultados constitui uma das etapas finais da investigação. Os alunos apresentam suas descobertas de maneira clara e organizada, seja por meio de relatórios escritos, apresentações orais ou outros formatos. Esse compartilhamento promove não apenas a consolidação do conhecimento, mas também habilidades de comunicação e a capacidade de trabalhar colaborativamente. Carvalho (2013, p. 49) enfatiza que "a comunicação dos resultados é um componente vital, pois permite a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento".

Nesse momento, apresentar demonstrações fornece uma prova rigorosa e conclusiva de que a conjectura é verdadeira ou falsa, podendo envolver a replicação de resultados já experimentados e a confirmação de que as observações feitas estão de acordo com a conjectura dada. Este método impulsiona a exploração matemática de maneira sistemática e com uma finalidade. Os testes apresentados posteriormente não apenas validam ou refutam as conjecturas, mas também promovem uma compreensão das conjecturas iniciais.

A fase de demonstração, por sua vez, assegura que as descobertas sejam fundamentadas em evidências. Como relatam Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 10): “As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração”.

O processo de investigação educacional, portanto, não é apenas uma técnica de ensino, mas um meio de promover um aprendizado crítico e construtor propriamente dito. Ao envolver os alunos ativamente na construção do conhecimento, a investigação desenvolve competências essenciais para a vida acadêmica e profissional, além de estimular uma atitude investigativa e crítica frente ao mundo.

Nos anos 1990, no Brasil, essa abordagem começou a ganhar força, impulsionada por reformas educacionais que buscavam renovar métodos de ensino antigos, marcados por um ensino focado no Professor. A publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), em 1997, foi um marco importante, incentivando práticas pedagógicas centradas no aluno e promovendo a investigação como uma metodologia.

Entre os pioneiros na implementação das aulas investigativas no Brasil, destaca-se a experiência do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Na instituição, projetos de investigação começaram a ser incorporados ao currículo nas disciplinas de ciências naturais e humanas. Essas iniciativas foram documentadas em diversas pesquisas acadêmicas, como o trabalho de Cunha (2001), que analisa a eficácia das aulas investigativas no desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos. Outro exemplo significativo é o Projeto "Investigando a Investigação", desenvolvido pela Universidade de São Paulo (USP), que ofereceu formação continuada para professores da rede pública, capacitando-os a implementar metodologias investigativas em suas aulas (Nardi, 2003).

Além das ciências naturais, a aula investigativa também é válida para a área de Matemática. A aplicação dessa metodologia visa transformar a forma como os alunos compreendem e se relacionam com os conceitos matemáticos. Em vez de simplesmente memorizar fórmulas e procedimentos, os estudantes são incentivados a explorar problemas matemáticos autênticos e a desenvolver estratégias para investigá-los. Essa abordagem não só promove um entendimento mais profundo dos conceitos, como também desenvolve habilidades essenciais, como o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de argumentação.

Ponte (2005) destaca que "a investigação em matemática não apenas desenvolve competências cognitivas, mas também promove atitudes positivas em relação à aprendizagem, como a persistência e a disposição para enfrentar desafios" Ele ainda enfatiza que "os alunos, ao investigarem, estão a desenvolver capacidades de pensar criticamente e de resolver problemas de forma autônoma" Para o autor, a aula investigativa permite que "os alunos construam significados próprios e compreendam a matemática como uma disciplina viva" (Ponte, 2005).

A prática de aulas investigativas em matemática pode ser ilustrada com exemplos de atividades onde os alunos investigam padrões numéricos, exploram propriedades geométricas através de construções, experimentações e demonstrações, e investigam questões complexas que exigem a aplicação integrada de vários conceitos matemáticos. Essas atividades, muitas vezes realizadas em grupo, incentivam a colaboração e a troca de ideias, promovendo um ambiente de aprendizagem dinâmico e participativo, o que comprova a teoria sociocultural de Vygotsky.

Isso se deve ao fato constatado por Lorenzato (2009): “[...] mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso [...]”.

Desta forma, com o propósito de atender a todos os discentes, adota-se metodologias diferenciadas, como enfatiza D’ Ambrosio (1989): “há de se considerar que é difícil, em um trabalho escolar, desenvolver a matemática de forma rica para todos os alunos se for enfatizada apenas uma linha metodológica”.

Uma das estratégias que os professores podem utilizar em aulas investigativas é incentivar o pensamento crítico dos alunos em relação aos resultados obtidos em cada tema estudado, promovendo a descoberta de novos conhecimentos. Para implementar essa metodologia, preparam-se questionamentos direcionados, que serão abordados ao longo da atividade, de modo a guiar os alunos na busca pela solução desejada, mesmo que a resposta final não seja imediata. Como destacam Fajardo e Machado (2013):

> Além do mais, não se pode garantir que a investigação, através do questionamento, sane todas as dificuldades de um aluno em relação ao conteúdo matemático. Porém, sabe-se que um aluno motivado e incentivado a descobrir as razões de um resultado, torna a matemática mais atrativa e compreensível (Fajardo; Machado, 2013, p. 422).

Isto posto, por mais que não seja garantido o sucesso absoluto, essa proposta de ensino proporciona motivação para que os discentes tenham vontade de aprender matemática e valorizem suas contribuições.

5.2 RELAÇÃO ENTRE MATERIAIS, PROFESSOR E ATIVIDADE

O ensino e a aprendizagem são processos interdependentes que envolvem a interação dinâmica entre professores e alunos. O ensino vai além da exposição de informações, buscando criar condições para que os alunos possam construir seu próprio conhecimento, visto que, de acordo com o contexto histórico apresentado anteriormente, os alunos eram considerados passivos.

A aprendizagem, por sua vez, é um processo ativo em que os alunos assimilam, interpretam e aplicam novos conhecimentos, muitas vezes reformulando suas ideias previamente concebidas. Conforme destaca Freire (1996): "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção". Assim, enfatiza-se a importância de metodologias que promovam a participação ativa e crítica dos estudantes.

A atuação da profissão do professor demanda um compromisso com o próprio desenvolvimento pessoal, que vai além da simples aquisição de conhecimentos técnicos. Segundo Nóvoa (1995):

> Os professores precisam investir na sua formação contínua, não apenas em termos de atualização de conhecimentos, mas também no desenvolvimento de competências que lhes permitam enfrentar os desafios do ensino de forma eficaz e humanizada (Nóvoa, 1995).

Libâneo (1994) corrobora essa visão ao afirmar que "o sucesso do ensino depende tanto do conhecimento do conteúdo quanto da capacidade do professor de motivar e envolver os alunos em atividades significativas". Isso corrobora o que já foi escrito nos capítulos anteriores, sobre a necessidade de se habituar a um novo ensino que usufrui das metodologias diferenciadas para atender uma nova demanda do ensino, que inclui a área da Matemática.

Dessa forma, uma das estratégias apresentadas destaca a importância de produzir aulas que sejam integradas a uma investigação dos problemas apresentados a priori pelos professores, o que leva os alunos a realizarem uma atividade de construção.

Leontiev (1978), seguindo os ensinamentos de Vygotsky, propõe que o desenvolvimento humano é o resultado das atividades que os indivíduos realizam. Assim, a Teoria da Atividade sugere que, em vez de focar em comportamentos isolados, analisa-se as atividades como um todo para compreender os processos psicológicos. Esta teoria possui implicações em diversas áreas, especialmente na educação e, de forma particular, na aprendizagem matemática.

Com base nesse princípio, a teoria considera três elementos essenciais para que uma ação seja caracterizada como atividade: a necessidade, o objeto e o motivo. A necessidade, elemento inicial, impulsiona o indivíduo a agir. Sob a perspectiva de Leontiev, a necessidade representa uma carência ou desejo que o sujeito busca satisfazer através de sua interação com o meio. Conforme afirma o autor: "A necessidade é a condição subjetiva que incita a atividade e a dirige para objetos específicos que podem satisfazê-la". (Leontiev, 1978, p. 121)

O objeto, segundo Longarezi e Puentes (2013, p. 88), "indica para onde a ação é dirigida, é o conteúdo da atividade, o que dirige a ação". O objeto é, portanto, o que dá direção e conteúdo à atividade, orientando as ações específicas que o sujeito realizará. Já o motivo é o que transforma uma necessidade em uma força ativa que leva o indivíduo a agir. Os autores explicam que o motivo fundamenta a mobilização do indivíduo em busca da satisfação de suas necessidades, funcionando como o motor da atividade.

Com esses elementos, ocorre a transformação da atividade externa para a atividade interna, um processo para a evolução psicológica. Leontiev (1978, p.121) explica que "a necessidade é a condição subjetiva que incita a atividade e a dirige para objetos específicos que podem satisfazê-la, mediando assim a internalização dos processos externos".

Para tal argumento, Piotr Yakovlevich Galperin apresenta uma sequência de etapas que são norteadoras para a criação de uma atividade. Conforme descrito por Núñez (2009, p. 94), a sequência proposta por Galperin "[...] consiste em primeiro, encontrar a forma adequada da ação; segundo encontrar a forma material de representação da ação e terceiro, transformar essa ação externa em interna".

Isso demonstra que a internalização não ocorre de forma instantânea, mas sim como uma transição gradual que exige a participação ativa dos alunos em atividades cuidadosamente planejadas.

Desta forma, pode-se diferenciar ações e atividade, onde as ações são os passos específicos realizados para alcançar um objetivo imediato, enquanto a atividade é o processo mais amplo e motivado que engloba essas ações, direcionado à satisfação de uma necessidade ou desejo maior.

Uma forma eficaz desse processo é a implementação de materiais manipuláveis. Segundo Lorenzato (2006, p. 15), "o uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática possibilita que o aluno estabeleça uma relação concreta com o objeto de estudo, facilitando a compreensão de conceitos abstratos". Quando os estudantes interagem com objetos que representam os conceitos que estão aprendendo, eles conseguem ver e tocar o que está sendo estudado, o que pode aumentar seu interesse e envolvimento, trazendo a motivação para chegar ao objetivo requerido.

Borin (1997, p. 47) também destaca que "os materiais manipuláveis permitem ao aluno explorar e descobrir, promovendo uma aprendizagem ativa e significativa". Isso significa que, ao utilizar materiais manipuláveis, os alunos têm a oportunidade de se envolver de maneira prática e direta com o conteúdo que estão estudando. Esse tipo de interação incentiva a exploração e a descoberta de novos conceitos de forma autônoma e investigativa.

Os materiais manipuláveis trazem um caminho de forma indireta para que os alunos participem ativamente do processo de aprendizagem, em vez de serem apenas receptores passivos de informações. Quando os alunos manipulam objetos, eles são capazes de visualizar e experimentar os conceitos matemáticos, o que pode levar a uma compreensão sobre o que está sendo estudado.

É preciso ter muito cuidado ao falar de materiais manipuláveis sem relacioná- los com a prática pedagógica. Os recursos, independentemente de suas características, não se integram automaticamente ao ensino. Libâneo (1994, p. 83) enfatiza que "os materiais manipuláveis, isolados, não garantem a efetividade do ensino. É na articulação com a prática pedagógica que esses recursos ganham significado e se tornam ferramentas valiosas no processo educativo". Isso destaca a necessidade de um planejamento cuidadoso e uma implementação estratégica por parte do professor para que os materiais manipuláveis contribuam verdadeiramente para o aprendizado dos alunos.

Além disso, Zabala (1998, p. 45) reforça que "os materiais didáticos devem ser selecionados e utilizados em conformidade com os objetivos educacionais e as necessidades dos alunos, sendo essencial a mediação do professor para que esses recursos tenham significado real". Sem essa mediação, os materiais manipuláveis perdem seu potencial, tornando-se meramente objetos sem função pedagógica.

Essa abordagem também permite que os alunos façam conexões entre o que estão aprendendo e suas próprias experiências e interesses. Lorenzato (2006, p. 23) reforça essa ideia ao afirmar que "os materiais concretos possibilitam ao aluno estabelecer relações entre o conteúdo escolar e suas vivências". Além disso, a utilização desses materiais pode ajudar a desenvolver habilidades importantes, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade, pois os alunos são desafiados a pensar de maneira inovadora e a encontrar soluções por conta própria. Borin (1997) observa que "ao manipular materiais, os alunos são estimulados a desenvolver estratégias próprias, o que favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo".

Quando os próprios alunos constroem seus materiais manipuláveis, o processo de aprendizagem se intensifica ainda mais. A criação desses materiais não apenas aprofunda a compreensão dos conceitos, mas também envolve os alunos de forma ativa no processo educativo. Ao desenvolverem seus próprios recursos, os estudantes têm a oportunidade de experimentar, cometer erros e corrigi-los, o que fortalece suas habilidades de resolução de problemas e estimula a criatividade.

Segundo Moura (2000, p. 67), "a construção de materiais didáticos pelos próprios alunos promove uma aprendizagem mais engajada e autônoma, pois os estudantes se tornam protagonistas do seu processo de construção do conhecimento". Com esse envolvimento ativo na construção de materiais manipuláveis, os alunos passam a ver a relevância prática dos conceitos que estão estudando.

Além disso, a construção de materiais manipuláveis pode incentivar o trabalho em equipe e a colaboração entre os alunos. Silva (2014, p. 92) observa que "a elaboração colaborativa de materiais didáticos permite aos alunos desenvolver competências sociais e aprender a trabalhar em grupo, o que é fundamental para a formação integral do estudante". Quando os alunos trabalham juntos para criar materiais, eles compartilham ideias, discutem soluções e aprendem a colaborar um com o outro.

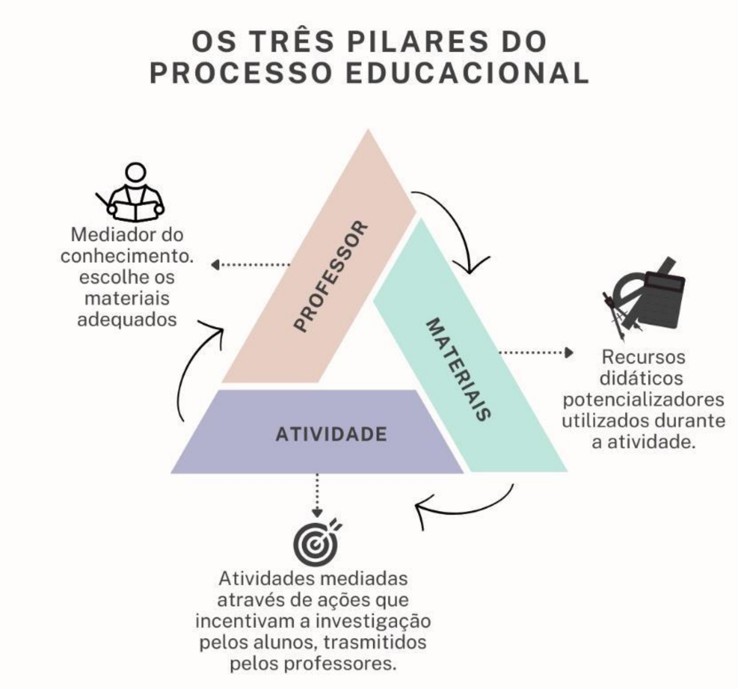
Diante disso, neste processo, é importante que o professor atue como mediador, oferecendo ideias que incentivem os alunos a refletirem e criar novas ações, alinhadas com o objetivo central da atividade e com o uso dos materiais. Dessa forma, o professor elabora questionamentos que despertam a curiosidade e promovem o pensamento crítico dos alunos.

Para ajudar os alunos a identificarem o objetivo da atividade e encontrarem uma solução, os professores podem fazer perguntas como: "Qual é o problema que estamos tentando resolver com este material?" Para incentivar os alunos a pensarem sobre como os materiais manipuláveis podem ser utilizados para visualizar e entender conceitos abstratos, uma pergunta útil seria:

"Como podemos usar estes materiais para representar este conceito matemático?" Para promover a experimentação e a exploração, permitindo que os alunos vejam o impacto de diferentes variáveis em suas construções, a pergunta pode ser: "O que acontece se modificarmos este elemento do nosso material?" (Moura, 2000). Indagações que encorajam os alunos a pensarem de maneira criativa e a considerarem múltiplas abordagens para a resolução de problemas incluem: "De que outra forma poderíamos resolver este problema usando materiais diferentes?" (Silva, 2014).

Isso indica que esses questionamentos ajudam a direcionar a atividade, garantindo que ela tenha um objetivo claro, alinhado aos três elementos apresentados pela Teoria da Atividade. Assim, uma das importâncias ao estabelecer previamente os objetivos das ações, implica em uma abordagem reflexiva sobre os processos de aprendizagem, ou seja, os caminhos optados pelos alunos para elaborarem os seus conhecimentos de forma única. Sendo assim, com todos os argumentos apresentados anteriormente, pode-se descrever uma interligação entre os três pilares formativos para aprendizagem dos alunos: o professor, a atividade e os materiais. Esses pilares são interdependentes e se complementam, formando a base do processo educativo.

Figura 2 - Os três pilares do Processo Educacional



Fonte: Produzido pela autora (2024)

O professor, como mediador do conhecimento, planeja e executa atividades que desafiam os alunos, utilizando materiais diversificados e adequados para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. As atividades, cuidadosamente elaboradas, podem estimular habilidades cognitivas e sociais para o desenvolvimento integral dos alunos. Os materiais, por sua vez, oferecem suporte tangível às atividades e ajudam a concretizar conceitos abstratos.

Essa ligação entre os três pilares promove que a educação seja um processo dinâmico, capaz de atender às diversas necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos. Ao entender e aplicar essa interligação de maneira eficaz, os educadores podem criar ambientes de aprendizagem que inspirem e preparem os alunos para enfrentar os desafios do mundo moderno.

6. IMPORTÂNCIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O Teorema de Pitágoras é um conceito amplamente abordado no ensino da matemática, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a compreensão de relações geométricas. Além de fornecer uma base para a geometria, seu ensino pode facilitar a introdução a conceitos matemáticos mais avançados. Nesse contexto, é interessante que sua abordagem em sala de aula vá além da memorização de fórmulas.

Sua aplicabilidade pode ser observada em diversas situações do cotidiano, o que torna seu estudo relevante para a formação dos alunos. Na Física, o teorema é usado para compreender vetores e movimentos, no cálculo do módulo do vetor resultante na soma de vetores perpendiculares; na Engenharia e na Arquitetura, ao auxiliar no cálculo de distâncias e no planejamento de estruturas seguras; e, na Matemática e no cotidiano, é aplicado para medir a diagonal de uma tela ou calcular a distância entre dois pontos. Conforme Iezzi e Dolce (2013, p. 45), "o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta indispensável em várias áreas do conhecimento, destacando-se pela sua aplicação prática".

O estudo do Teorema e suas aplicações no Ensino Fundamental e Médio contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Além disso, sua presença como componente da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), indica a intenção de promover uma aprendizagem que favoreça a construção de competências importantes para diferentes contextos da vida acadêmica e futura atuação dos estudantes.

No entanto, além de ensinar o teorema em si, é igualmente importante destacar o valor das demonstrações matemáticas. Apresentar diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras ajuda os alunos a entenderem a fundamentação lógica por trás das afirmações matemáticas, permitindo-lhes ver de onde vêm os resultados que conhecem e aceitam. Ou seja, as demonstrações matemáticas têm a função de comprovar e validar informações, garantindo que os resultados são corretos e confiáveis. Singh (2004) comenta que o seu processo decorre de:

> A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema (Singh, 2004, p. 41).

Para que haja discernimento sobre esses fatores, é preciso diferenciar três aspectos pertinentes nessa área, pois apresentam funções distintas: a explicação, a prova e a demonstração matemática. Segundo Balacheff (2019), a explicação visa tornar o entendimento acessível, com os motivos e processos claros e subjacentes a uma proposição, facilitando a compreensão dos alunos. A prova matemática, por sua vez, é o método mais criterioso, estabelecendo a verdade de uma proposição através de uma sequência lógica de argumentos rigorosamente baseados em axiomas, definições e teoremas. Já a demonstração, embora também verifique e explique, é a prática de apresentar uma prova, preocupando-se tanto com a correção quanto com a pedagogia, para dinamizar a compreensão dos alunos.

Segundo De Villiers (2001), as funções da demonstração são: a verificação (convencimento), a explicação, a descoberta, a comunicação, o desafio intelectual e a sistematização. A função explicativa é fundamental em um contexto escolar, Amado *et al.* (2015, p. 642) colaboram com essa perspectiva ao dizerem que: “uma demonstração que ajude a clarificar o motivo pelo qual um resultado é válido, ou não, contribui certamente para uma compreensão do mesmo".

Ademais, Pólya (1945) argumenta que, ao envolver os alunos em processos de raciocínio lógico e argumentação rigorosa, as demonstrações não apenas validam conceitos, mas também estimulam a análise crítica das ideias apresentadas. Segundo Pólya (1945):

> as demonstrações matemáticas, além de serem instrumentos para a validação de conceitos, oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver habilidades de pensamento crítico, pois exigem a análise cuidadosa de argumentos, a construção de raciocínios lógicos e a capacidade de revisar e justificar cada passo dado (Pólya, 1945).

Como discutido por Santos (2019), fornecer demonstração requer também um suporte contínuo de materiais didáticos adequados e formação docente especializada. Essas iniciativas não apenas auxiliam na superação das dificuldades enfrentadas na demonstração de teoremas, mas também contribuem para a formação de estudantes.

Nesse sentido, recorrer à história da Matemática pode ser uma estratégia valiosa para identificar caminhos que contribuam para a superação desses desafios. O estudo do desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras permite compreender como diferentes civilizações formularam e aplicaram esse conhecimento, possibilitando uma abordagem mais contextualizada e conectada à evolução do pensamento matemático. A seguir, será apresentado um breve panorama sobre a trajetória desse teorema ao longo dos séculos.

6.1 O TEOREMA DE PITÁGORAS EM SUA CONSTRUÇÃO

Desde a antiguidade, a busca pelo conhecimento matemático tem sido uma trajetória continua de descobertas e conquistas. As sociedades antigas, movidas pela necessidade de sustento e progresso, dedicaram-se ao estudo sistemático dos fenômenos naturais, como o de adquirir conhecimento indispensável à sua sobrevivência. Essa demanda impulsionou a evolução de métodos numéricos e sistemas de contagem, que foram progressivamente aprimorados com a adoção dos recursos disponíveis em cada contexto histórico e geográfico específico.

Ao longo da história, destacados matemáticos têm emergido, contribuindo para a evolução humana, e permanecendo como referências influentes até os dias atuais. O Teorema intitulado pelo nome de Pitágoras é um dos mais notórios para a área da Matemática. Além de sua importância histórica como uma descoberta precursora, este teorema se destaca como uma ferramenta poderosa para o ensino e a aprendizagem de diversas áreas, especialmente a geometria.

Existem evidências que sugerem que os antigos babilônios, egípcios e chineses conheciam o Teorema. Durante o período do rei Hamurabi, aproximadamente entre 1800 e 1600 a.C., foram encontrados tabletes de argila na Babilônia que contêm tabelas de números inteiros. Estudos detalhados desses tabletes revelaram que esses números formavam ternas pitagóricas, ou seja, apresentavam a propriedade de que, quando um deles era elevado ao quadrado, resultava na soma dos quadrados dos outros dois (Silva, 2023).

Figura 3 - Pimpton 322

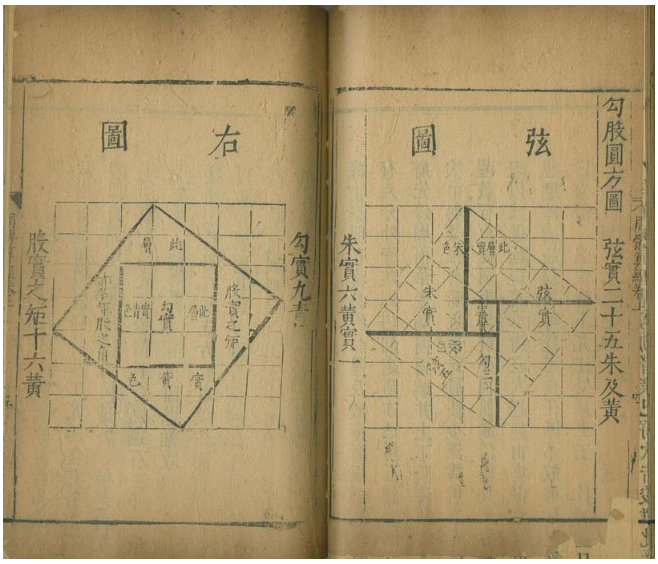
Fonte: magimaticas.webnode.es/pagina-en-blanco16

Os babilônios tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo, embora não exista nenhuma demonstração formal, já que os matemáticos daquela época não se preocupavam com isso, pois eles possuíam métodos práticos que funcionavam para solucionar diversos problemas (Lima; Carvalho; Wagner, 2006)

De acordo com Eves (2004), foram encontradas abordagens no antigo Egito onde se usavam princípios geométricos equivalentes ao Teorema, na prática. Eles utilizavam uma corda com 12 segmentos iguais, demarcados por 11 nós equidistantes, para criar um triângulo retângulo. Este método permitia-lhes formar um triângulo com lados de 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Para aplicar este conhecimento, os egípcios esticavam a corda no solo de modo a formar o triângulo e, ao fazerem isso, notaram que o ângulo entre os dois lados menores era reto.

No que se refere aos chineses, foi encontrado em um texto matemático antigo, conhecido como "Zhou Bi Suan Jing", um problema antigo chamado "Gou gu", o equivalente ao Teorema, datado de cerca de 600 anos antes de Pitágoras.

Figura 4 - Problema chinês "Gou gu"



Fonte: maa.org/press/periodicals/convergence

Embora o teorema fosse conhecido e utilizado por diversas culturas antigas, estudiosos declaram que, possivelmente, Pitágoras ou um de seus discípulos foi o primeiro a demonstrar o Teorema, razão pela qual ele recebeu seu nome (Silva, 2023)

Esse marco é especialmente importante, já que Pitágoras de Samos (c. 570-495 a.C.) é lembrado principalmente pelo Teorema que leva seu nome, mas suas contribuições à Matemática vão além, refletindo seu papel na história do pensamento matemático. Ele não apenas formulou princípios matemáticos fundamentais, mas também fundou uma escola de pensamento que integrava filosofia, ciência e matemática, estabelecendo as bases para uma abordagem mais sistemática do conhecimento. Apesar da escassez de documentos diretamente atribuídos a ele, o legado de Pitágoras perdura, especialmente no contexto da geometria e na aplicação prática de seus teoremas (Silva, 2023).

O Enunciado do Teorema de Pitágoras é expresso de várias maneiras por diferentes autores. O livro Temas e Problemas Elementares (Lima; Carvalho; Wagner, 2006) traz da seguinte forma: “Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”, porém, a forma usual como as pessoas o conhecem é “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, uma expressão que integra uma infinidade de aplicações e implicações, fazendo do teorema um elemento no ensino de matemática em todo o mundo.

Convencionalmente, se utiliza em sua formulação a representação algébrica em que a representa a medida da hipotenusa e b e c representam as medidas dos catetos, podendo ser expressa como: $a^2 = b^2 + c^2$.

Visto que essa relação não é imediatamente evidente, busca-se oferecer uma demonstração, pois, na matemática, para verificar a veracidade de uma proposição, se requer a apresentação de uma demonstração ou prova baseada em axiomas, definições e teoremas previamente estabelecidos. Tal demonstração segue uma sequência lógica de passos que leva à conclusão desejada, mostrando que a proposição é verdadeira em todas as circunstâncias. No teorema em questão, a demonstração utilizará princípios geométricos e algébricos, ou mesmo o raciocínio visual, desde que seja rigorosa e completa para a validação.

6.2 ALGUMAS POSSIBILIDADES DE DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Segundo Oliveira (2013), existem mais de 400 demonstrações distintas do Teorema de Pitágoras. Entre os notáveis demonstradores estão Bháskara, Leonardo da Vinci e o ex-presidente dos Estados Unidos, James Abram Garfield. Dessas demonstrações, 370 foram catalogadas por Elisha Scott Loomis (1940) em sua obra intitulada "The Pythagorean Proposition". O autor elenca em seu livro os quatro tipos de demonstrações existentes: Provas Algébricas (Relações Lineares- implicando o conceito de tempo); Provas Geométricas (comparação de áreas- implicando conceitos de espaço); Provas com operações Vetoriais (implicando o conceito de direção) e Provas Dinâmicas (Massa e Velocidade- implicando o conceito de Força).

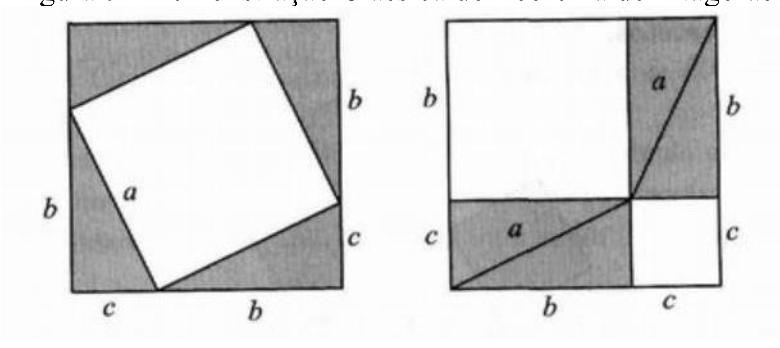
Para a demonstração dos conceitos matemáticos do Teorema, optou-se por utilizar tanto provas geométricas quanto algébricas. As provas geométricas oferecem uma visualização direta das propriedades das figuras e suas relações, permitindo avaliar a compreensão dos alunos por meio de desenhos e construções. Por sua vez, as provas algébricas proporcionam uma base lógica e rigorosa, recorrendo a equações e manipulações para demonstrar as propriedades. Algumas dessas abordagens serão apresentadas na seção a seguir.

Demonstrações geométricas do Teorema de Pitágoras são aquelas que se baseiam na manipulação de figuras geométricas, como triângulos, quadrados retângulos, figuras semelhantes, para ilustrar e provar a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Essas demonstrações são valiosas porque permitem uma compreensão visual e intuitiva do teorema, mostrando como ele se aplica geometricamente. Existem diversas formas de realizar essas demonstrações, algumas das quais serão apresentadas a seguir: Demonstração de Pitágoras, Demonstração por quadriculados, Demonstração através da construção com Tangram e Demonstração pelo método de Perigal.

A demonstração realizada por Pitágoras, segundo estudiosos, provavelmente era de natureza geométrica, baseada na comparação de áreas. Essa abordagem visual e intuitiva reflete o estilo geométrico predominante na matemática grega antiga (Lima; Carvalho; Wagner, 2006).

Considerada como clássica, a demonstração emerge como a figura a seguir:

Figura 5 - Demonstração Clássica do Teorema de Pitágoras



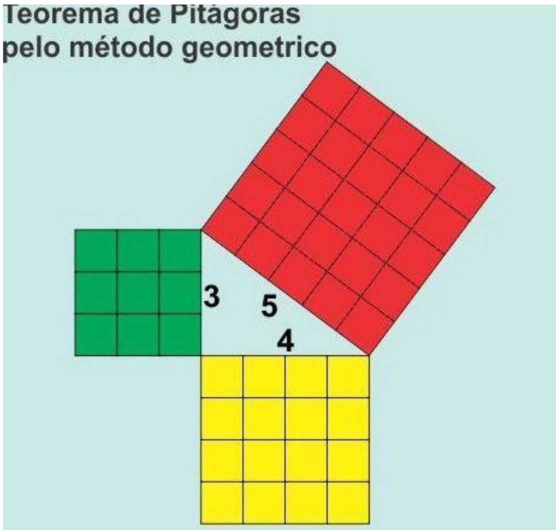
Fonte: Lima; Carvalho; Wagner (2006)

Estabelecendo um triângulo retângulo sendo a sua hipotenusa, b e c os catetos, considere um quadrado, com a medida de lado $(b + c)$. Retira-se desse quadrado quatro triângulos retângulos como estabelecido. Sabe-se que o quadrilátero de lado a é um quadrado, pois os ângulos agudos de cada triângulo retângulo são complementares. Resta assim, um quadrado de lado a, como mostrado na figura à esquerda.

Com um segundo quadrado de mesma medida, retira-se 4 triângulos retângulos conforme estabelecido, porém de maneira que formem dois retângulos com lados b e c. Dessa forma, restam um quadrado de lado b e um quadrado de lado c. Visto que ao comparar as duas figuras, a área não foi alterada pela nova composição. Portanto, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados de lados b e c, provando assim o teorema (Lima; Carvalho; Wagner, 2006).

A demonstração pelo método de quadriculados oferece uma maneira visual de compreender o Teorema de Pitágoras, mostrando como as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo se relacionam de acordo com a formulação do teorema. A demonstração será mostrada a seguir:

Figura 6 - Demonstração Clássica do Teorema de Pitágoras



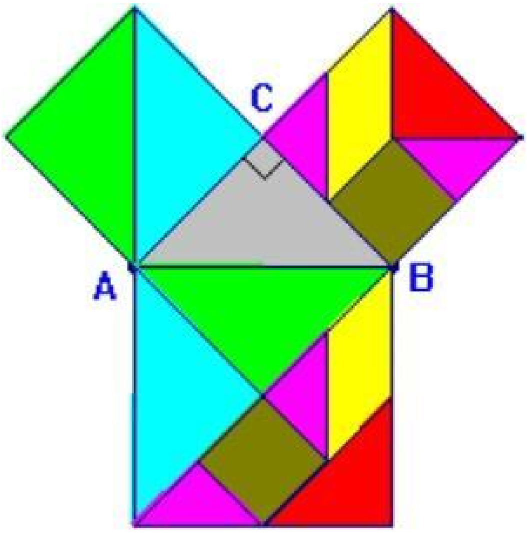
Fonte: www.osfantasticosnumerosprimos.com.br

Para a aplicação de tal método, considera-se um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 unidades, e cuja hipotenusa possui 5 unidades de comprimento. A partir desse triângulo, são construídos quadrados sobre cada um de seus lados. Ao calcular as áreas desses quadrados por meio de uma malha quadriculada, obtêm-se os seguintes valores: o quadrado construído sobre o cateto de 3 unidades apresenta uma área de 9 unidades quadradas; o quadrado sobre o cateto de 4 unidades possui uma área de 16 unidades quadradas; e o quadrado sobre a hipotenusa totaliza 25 unidades quadradas. Dessa forma, confirma-se a relação matemática entre essas áreas, expressa pela igualdade 25 = 9 + 16 (Barbosa, 1993).

Consequentemente, observa-se que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa, o que confirma a relação do teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$. Uma maneira comum de visualizar e provar geometricamente consiste em reorganizar as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, de modo que preencham exatamente a área do quadrado formado sobre a hipotenusa. Esse processo pode ser realizado por meio da divisão e do rearranjo dessas áreas em figuras menores, que se encaixam perfeitamente no quadrado maior. Dessa forma, comprova-se que a soma das áreas dos quadrados dos catetos corresponde exatamente à área do quadrado da hipotenusa.

A demonstração por meio da construção com o Tangram oferece uma abordagem lúdica e visual que permite reorganizar as peças de forma a ilustrar áreas equivalentes. O Tangram é um quebra-cabeça chinês composto por sete peças geométricas, conhecidas como "tans", sendo elas: dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Em 1818, esse jogo já era amplamente conhecido em diversos países, como Estados Unidos, Alemanha, França, Itália e Áustria. O termo "Tangram" possui diversas possíveis origens, sendo uma delas a expressão chinesa "Tchi Tchião Pan", que significa "Sete Peças da Sabedoria" (Pereira, 2013).

Figura 7 - Demonstração com peças do Tangram

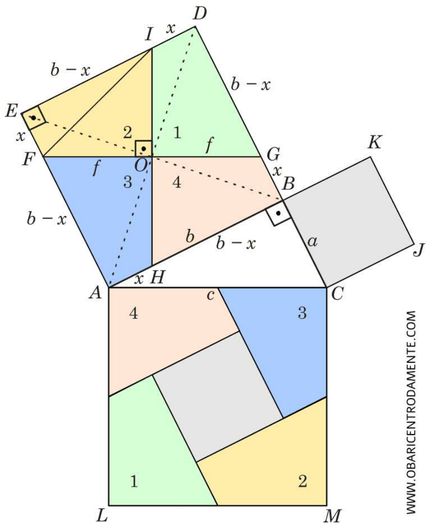


Fonte: https://expressaomatematica.blogspot.com

As peças do Tangram são utilizadas para representar os quadrados construídos sobre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Para isso, um quadrado de lado b pode ser formado com um triângulo pequeno e um paralelogramo, organizados de modo a preencher a área b^2. Da mesma forma, o restante das peças é disposto para construir um quadrado de lado c, resultando na área c^2. Assim, os lados b e c, correspondem aos catetos do triângulo retângulo, cuja hipotenusa possui medida a, obtendo área igual a a^2.

A demonstração de Henry Perigal para o Teorema de Pitágoras é uma prova geométrica que utiliza a divisão e o rearranjo de áreas para evidenciar a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Deve-se considerar um triângulo retângulo com catetos de medidas a e b e hipotenusa c. Para a demonstração, constroem-se dois quadrados cujos lados correspondem aos catetos e traçam-se as diagonais do quadrado sobre o cateto maior. O ponto de interseção das diagonais, denominado O, representa o centro do quadrado. Perigal divide o quadrado sobre o cateto maior em quatro partes congruentes, utilizando duas linhas que passam por seu centro: uma paralela à hipotenusa e outra perpendicular a ela. Essas quatro partes, combinadas com o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado sobre a hipotenusa, confirmando a relação. (Santos, 2011)

Figura 8 - Demonstração pelo Método de Perigal

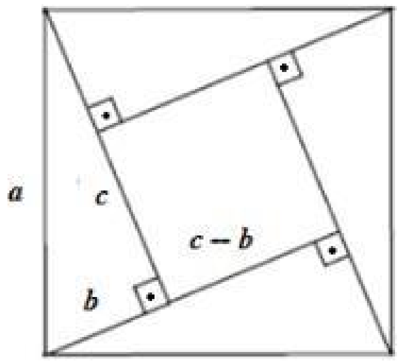


Fonte: www.obaricentrodamente.com/

As demonstrações algébricas do Teorema de Pitágoras utilizam operações algébricas para chegar à resposta final do teorema, complementando a abordagem geométrica. Ao integrar álgebra e visualização geométrica, essas demonstrações enriquecem a compreensão do teorema, proporcionando uma visão mais detalhada dos procedimentos envolvidos. Esse processo contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato e analítico na Matemática No presente trabalho, serão apresentadas as seguintes demonstrações: por Bháskara, por semelhança de triângulos e utilizando coordenadas.

A demonstração de Bhaskara do Teorema de Pitágoras, uma das mais simples, combina elementos geométricos e algébricos para estabelecer a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Bhaskara, matemático indiano do século XII, utilizou um método visual, construindo um quadrado e organizando triângulos retângulos dentro dele. A representação dessa demonstração incluía quatro triângulos retângulos, acompanhados da palavra "Veja!". (Pereira, 2013)

Figura 9 - Demonstração por Bháskara



Fonte: Oliveira (2013)

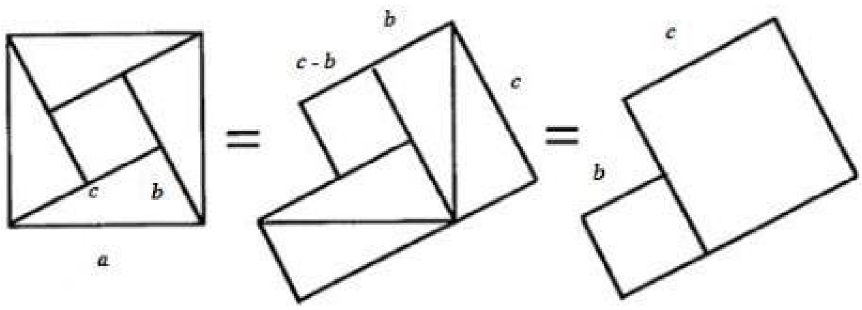
A demonstração começa com a construção de um grande quadrado, cujo lado tem medida a. Esse quadrado é formado por 4 triângulos retângulos com medidas b e c e hipotenusa a. Esses quatro triângulos são dispostos de maneira que formem um quadrado menor no centro com medida de $c - b$.

Logo, a área do quadrado maior será dada por:

$$A = a^2 = 4\frac{b.c}{2} + (c - b)^2 = 2b.c + c^2 - 2b.c + b^2$$

Assim, segue que: $a^2 = c^2 + b^2$, com outra disposição geométrica, conforme apresentado a seguir:

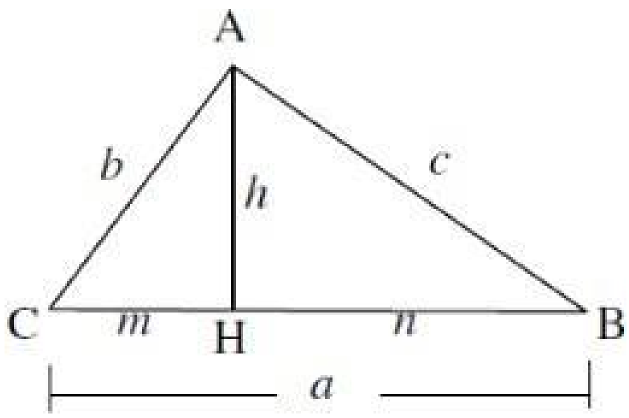
Figura 10 - Demonstração por Bháskara-- outra disposição



Fonte: Oliveira (2013)

A demonstração por semelhança de triângulos utiliza as propriedades dos triângulos semelhantes para provar a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Ao traçar uma altura a partir do vértice do ângulo reto até a hipotenusa, formam-se dois triângulos menores, que são semelhantes entre si e ao triângulo original. Essa semelhança possibilita a formação de proporções entre os lados correspondentes desses triângulos.

Figura 11 - Demonstração por semelhança de Triângulos



Fonte: Oliveira (2013)

Para isso, considera-se um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A e catetos medindo $b\ e\ c$, e a hipotenusa a ao traçar a altura do vértice A até a hipotenusa BC, formam-se dois triângulos menores, ACH e AHB, com H representando o ponto de interseção da altura com a hipotenusa. Dessa forma, obtêm-se os segmentos CH=m e BH=n que são as projeções dos catetos AC e AB sobre a hipotenusa.

Os triângulos menores ACH e AHB são semelhantes ao triângulo original e entre si, pois ambos possuem um ângulo reto e compartilham um ângulo agudo com o triângulo ABC. A partir dessa semelhança, podem ser estabelecidas as seguintes relações.

1. $\triangle$ ACH~ $\triangle$ ABC $\longrightarrow \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}\ OU\ \frac{m}{b} = \frac{b}{a}, logo\ b^2 = m.a\ (1)$
2. $\triangle$ AHB~ $\triangle$ ABC $\longrightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}\ OU\ \frac{n}{c} = \frac{c}{a}, logo\ c^2 = n.a\ (2)$

Ao somar (1) e (2), tem-se que:

$$b^2 + c^2 = m.a + n.a = a(m+n)$$

Sendo que m+n=a, então:

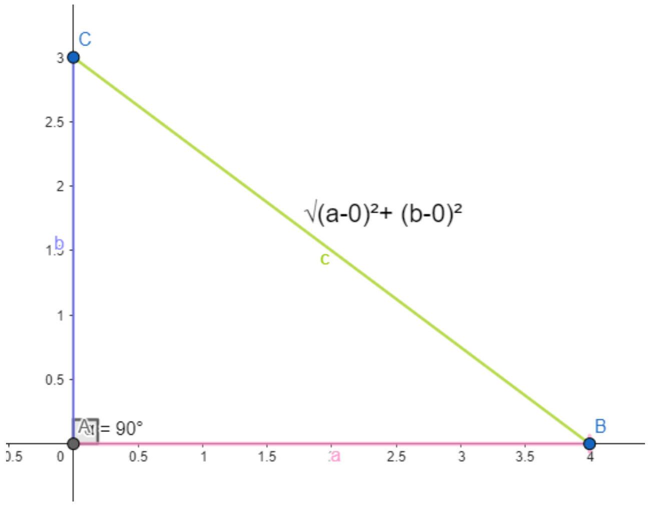
$$a(m+n) = a.a = a^2$$

Logo obtém :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A demonstração utilizando coordenadas consiste em posicionar estrategicamente um triângulo retângulo no sistema de coordenadas, o que permite derivar a relação pitagórica a partir dos princípios básicos da geometria analítica.

Figura 12 - Demonstração utilizando coordenadas



Fonte: Produzido pela autora (2024)

Para validar, considera-se um triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa c. Posicionando o triângulo de forma estratégica no plano cartesiano, onde o vértice do ângulo reto está na origem (0,0), um vértice do cateto a está em $(a,0)$ e o vértice do cateto b está em $(0,b)$. Essa configuração permite o uso da fórmula da distância entre dois pontos para demonstrar o teorema, um exemplo foi mostrado na figura anterior.

Será usado a distância entre dois pontos $(x1,\ y1)$ e $(x2,\ y2)$, como fórmula para demonstrar o teorema que é dada por:

$$d = \sqrt{(x^2 - x^1)^2 + \ (y^2 - y^1)^2}$$

Aplicando aos pontos (a,0) e (0,b), e sendo d a distância entre os ponto A e B, então d= c, obtém:

$$c = \sqrt{(a-0)^2 + \ (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + \ b^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, resulta na expressão:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

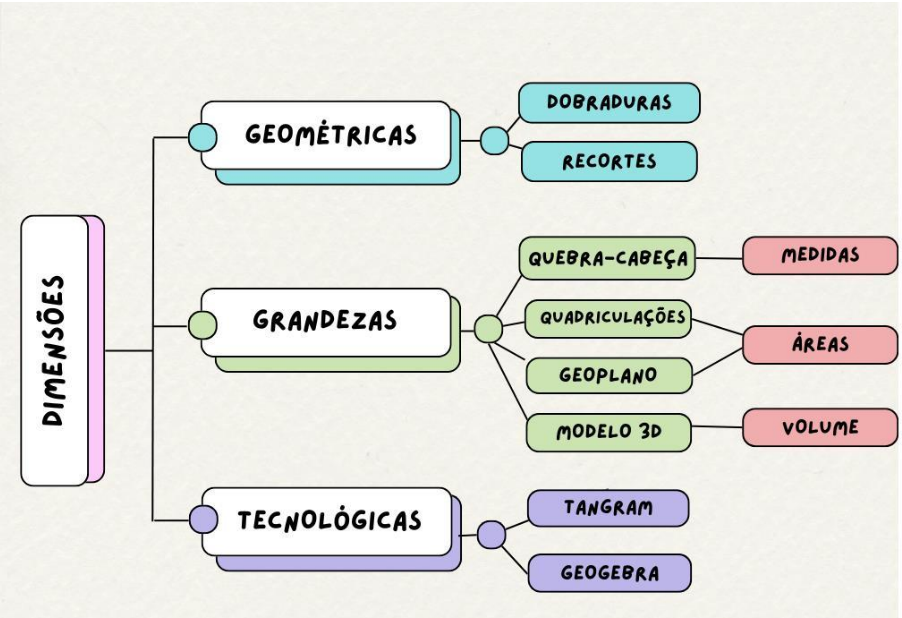
Confirmando assim o Teorema de Pitágoras.

7. ATIVIDADES PROPOSTAS

Este capítulo aborda atividades propostas que envolvem a demonstração do Teorema de Pitágoras, um dos pilares da geometria euclidiana, utilizando diversos tipos de materiais manipuláveis. A aplicação desses métodos visa facilitar a compreensão e o engajamento dos estudantes, transformando a sala de aula em um espaço de aprendizado dinâmico.

Traduzir o teorema para uma experiência prática pode ser um desafio, mas o uso de ferramentas manipuláveis pode tornar o conceito mais acessível, como discutido nos capítulos anteriores. A seguir, exploraremos diversas atividades investigativas que exemplificam como esses materiais podem ser empregados de maneira inovadora para demonstrar o teorema, permitindo a exploração de várias dimensões dentro de seu contexto, conforme apresentado na figura a seguir. Essas atividades serão organizadas em seções, incluindo os materiais utilizados, os procedimentos com instruções detalhadas para cada etapa da atividade e sugestões de intervenções que os professores podem realizar durante o desenvolvimento. Ademais, todas as atividades serão realizadas em grupos.

Figura 13 - Dimensões das Demonstrações



Fonte: Produzido pela autora (2024)

7.1 DIMENSÃO GEOMÉTRICA

Refere-se à abordagem visual e espacial utilizada para ajudar os alunos a compreenderem as relações entre as figuras geométricas envolvidas no teorema. Essa dimensão tem por objetivo explorar as propriedades dos triângulos retângulos e os quadrados construídos sobre seus lados, sendo realizada através da visualização espacial, estabelecendo entre si a relação entre áreas dos quadrados. Será apresentada através de dobraduras e recortes das figuras geométricas envolvidas, triangulares e quadradas.

7.1.1 Dobraduras

O método de dobraduras em um papel, utiliza-se de *origami* [4], para demonstrar o teorema de Pitágoras. Essa atividade foi retirada do trabalho intitulado como: "Papelmática: geometria da dobradura" (Saldanha; Araújo, 2014). Para isso, serão apresentados os materiais indicados e os procedimentos da atividade.

- MATERIAIS:
  - Papel em formato quadrado e lápis de cor.

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

  - **1º MOMENTO - DIVIDIR UM SEGMENTO DA FOLHA EM TRÊS PARTES IGUAIS**

I- Com uma folha quadrada de vértices ABCD, faça uma dobra, coincidindo o vértice A com o vértice D e o vértice B com o vértice C. Ao dobrar o lado $\overline{AD}$ do quadrado encontramos um ponto formado pelo cruzamento entre a dobra e o lado, denomine-o por E. Da mesma forma marque o ponto F no lado $\overline{BC}$ do seu quadrado. (Os pontos E e F são pontos médios dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ respectivamente).

  - **Sugestões de Perguntas:**

[4] Origami- é a arte de dobrar papel, uma tradição milenar do Japão. A palavra vem do japonês ori, que significa "dobrar", e kami, que significa "papel".

- O que vocês perceberam ao dobrar o papel dessa forma?
- Como os pontos E e F se relacionam com os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$? O que eles são dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$?

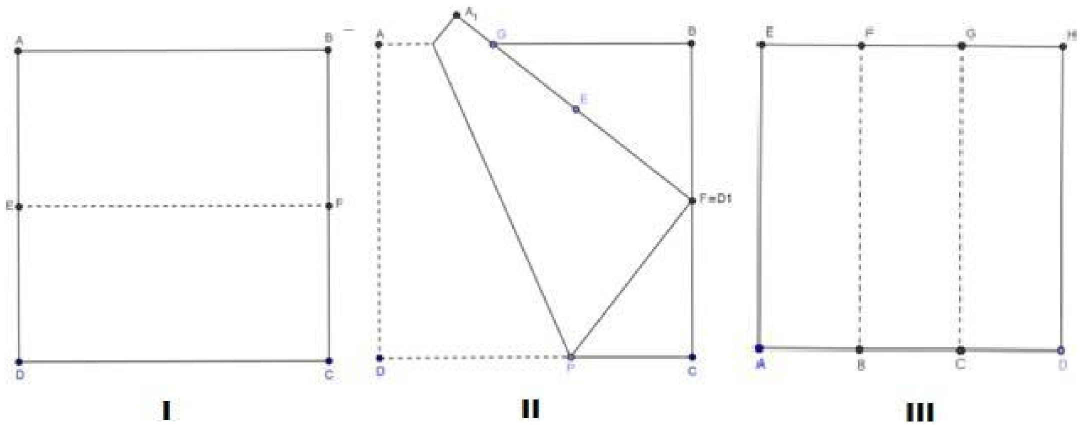
II - Faça o ponto D coincidir com o ponto F. Com isso, terá A_1 como a imagem do ponto A e D_1 como a imagem do ponto D. Assim, terá o ponto G, gerado pela intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A_1D_1}$.

➢ **Sugestões de Perguntas :**

- Que figura foi formada ao observarmos os pontos PCF? O que se pode afirmar sobre o ângulo C formado?
- Este triangulo é retângulo? Explique sua resposta.

III – Dobra-se a folha de forma que o ponto B coincida com o ponto G. Em seguida, faz-se outra dobra até que o lado do quadrado seja alcançado, dividindo o segmento em três partes iguais.

Figura 14 - Dimensão Geométrica utilizando Dobradura



Fonte: Saldanha; Araújo (2014)

➢ **2º MOMENTO - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA**

IV- Utilizando o mesmo quadrado de papel, com seus vértices nomeados como “A, D, H e E”, repita o procedimento anterior, dividindo os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$ em três partes iguais. Isso resultará nos pontos I e J, fazendo com que o quadrado original seja subdividido em 9 quadrados menores.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que representam os pontos I e J na divisão dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$?
- O que aconteceu com o quadrado original após essa nova divisão?
- Quantos quadrados menores foram formados? Eles possuem a mesma área?

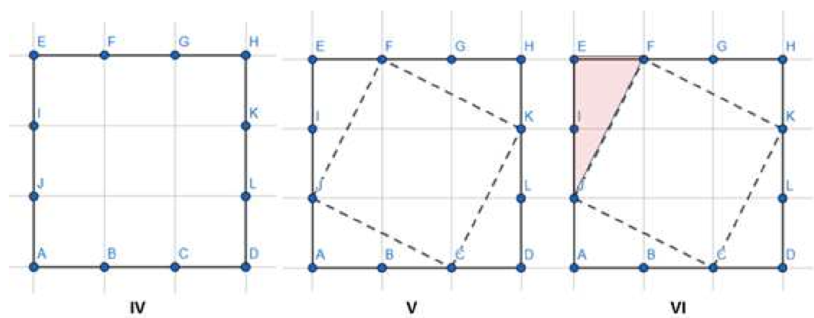
V - Faça as dobraduras levando o ponto C a J, J a F, F a K e K a C. Com isso, obtêm-se o quadrado CJFK, como mostrado a seguir.

VI- Desta forma aparece no final: um quadrado ADHE com medida de área $(a+b)^2$ contendo 4 triângulos com medida de área $\frac{ab}{2}$ mais um quadrado com área igual a c^2. Peça que pinte os triângulos de uma cor e o quadrado de outra cor para melhor visualização.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que mudou na figura após essas dobraduras?
- Como o quadrado CJFK está posicionado em relação ao quadrado original ADHE?
- Quais são os elementos geométricos que surgiram após as dobraduras?
- Como podemos expressar a área do quadrado ADHE matematicamente?
- Quantos triângulos foram formados e como eles se relacionam entre si?
- Qual a área de cada triângulo em relação às dimensões a e b?
- Como a área total do quadrado ADHE pode ser escrita em termos das áreas dos triângulos e do quadrado CJFK? Como essa relação pode ser usada?

Figura 15 - Dimensão Geométrica utilizando Dobradura-2º Momento



Fonte: Produzido pela autora (2024)

Logo, tem-se que: $(a + b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$

Então $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$.

Simplificando, $a^2 + b^2 = c^2$

7.1.2 Recortes

Para essa dimensão pode ser utilizado o método de Perigal. Essa abordagem envolve a divisão de figuras geométricas em partes menores que são rearranjadas para formar outras figuras, mantendo a mesma área total. Aplicando no Teorema, mostra-se como os quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo podem ser recortados e reorganizados para formar o quadrado sobre a hipotenusa.

- MATERIAIS:
  - Duas folhas de cores diferentes com tamanhos predeterminados, pois, ao utilizar o compasso, tem uma limitação; uma folha branca; compasso; fita adesiva; tesoura e régua.

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

➢ **1º MOMENTO - CORTE DE QUADRADOS E DEMARCAÇÃO DAS DIAGONAIS**

I - Para iniciar a atividade, distribua folhas coloridas aos alunos e instrua-os a cortar dois quadrados de tamanhos e cores diferentes. A técnica do origami será utilizada para garantir precisão.

II - Dobre o quadrado maior ao meio, de canto a canto, formando um triângulo retângulo. Esta dobra marca uma das diagonais do quadrado. Desdobre o papel, deixando visível o vinco da diagonal.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que vocês perceberam após dobrar o quadrado maior ao meio? O que acabamos de descobrir?
- Que tipo de figura geométrica foi formada com essa dobra?

III - Repita o processo de dobrar o quadrado ao meio, desta vez unindo os dois outros cantos, formando novamente um triângulo retângulo e marcando a segunda diagonal. Em seguida, desdobre o papel. Agora, as duas diagonais estarão demarcadas, cruzando-se no centro do quadrado. O ponto de interseção das diagonais é nomeado como "O".

Figura 16 - Dimensão Geométrica utilizando método de Perigal

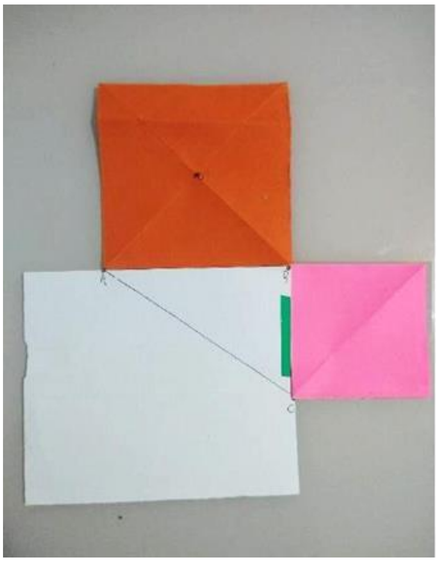
Fonte: Produzido pela autora (2024)

- **Sugestões de Perguntas :**
  - O que acabamos de encontrar? Como podemos nomear esse ponto?

- **2º MOMENTO - MONTAGEM DO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM QUADRADOS**

IV - A atividade continua com a utilização de uma folha branca como suporte para colar os quadrados cortados e formar um triângulo retângulo, utilizando fita adesiva, de modo que seus lados fiquem paralelos às bordas da folha como mostra a figura.

Figura 17 - Dimensão Geométrica utilizando método de Perigal- 2º Momento



Fonte: Produzido pela autora (2024)

V - Deve-se colar o segundo quadrado colorido de modo que forme um ângulo de 90° com o primeiro, utilizando a borda de um dos lados do primeiro quadrado como referência. Os quadrados devem se tocar em apenas um ponto.

VI - Desse modo, encontra-se dois segmentos: $\overline{AB}$ (segmento do quadrado maior) e $\overline{BC}$ (segmento do quadrado menor). A partir desse momento, trace um segmento com os vértices A e C, formando, assim, o triângulo retângulo ABC retângulo em C.

- **Sugestões de Perguntas :**
  - Qual ângulo é formado no encontro dos quadrados?
  - Qual figura encontramos unindo os vértices A e C dos quadrados?
  - O que se pode dizer dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$? O que são do triângulo retângulo?

- **3º MOMENTO- APLICAÇÃO DO MÉTODO DE PERIGAL**

VII - Trace um segmento que seja paralelo à hipotenusa $\overline{AC}$ do triângulo retângulo ABC e que passe pelo ponto “O”, o ponto de interseção das diagonais dos quadrados. Nomeie este segmento como $\overline{FG}$.

VIII - Trace outro segmento que seja perpendicular a $\overline{FG}$ e que passa pelo ponto “O”, utilize o compasso novamente.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - Ao traçar o segmento $\overline{FG}$, o que aconteceu com o ponto “O”? O que ele representa no contexto da atividade?

- **4º MOMENTO- DISSECÇÃO DAS FIGURAS ENCONTRADAS**

IX - O quadrado ABDE, construído sobre o cateto maior $\overline{AB}$, é dissecado em quatro partes congruentes, formando 4 quadriláteros.

X - As quatro partes dissecadas do quadrado ABDE são somadas ao quadrado menor, localizado sobre o cateto $\overline{BC}$, completando assim o quadrado sobre a hipotenusa ACML.

XI - As áreas combinadas das figuras resultantes completam exatamente a área do quadrado ACML, que está sobre a hipotenusa. Esse rearranjo demonstra a expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - O que acontece quando você divide o quadrado ABDE, construído sobre o cateto maior $\overline{AB}$? Quais figuras são formadas?
  - O que acontece quando você soma as quatro partes dissecadas do quadrado ABDE ao quadrado menor sobre o cateto $\overline{BC}$?
  - Por que é importante perceber que as áreas combinadas das figuras resultantes formam o quadrado ACML?

7.2 DIMENSÃO GRANDEZAS

O uso de materiais como miçangas, canudos e folhas de papel coloridas pode ajudar a destacar as dimensões de comprimento e área, proporcionando uma percepção mais concreta das grandezas matemáticas envolvidas. Dessa forma, a aprendizagem se torna mais dinâmica e interativa, possibilitando que os estudantes internalizem os conceitos fundamentais de grandezas.

7.2.1 Quebra-cabeça (Medidas)

Para essa atividade será utilizado o método de demonstração por Bhaskara, com um quebra-cabeça de figuras geométricas. Para seguir tal método, é necessário analisar não apenas a forma de trocar as peças de lugar, mas também reconhecer os dois triângulos construídos a partir de um retângulo (Pereira, 2013).

- MATERIAIS:

  - Cartolina ou E.V.A de duas cores diferentes; tesoura e régua.

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

➢ **1º MOMENTO- RECORTAR AS FIGURAS**

I - Construa dois retângulos, cada um medindo 10 cm por 5 cm, em papel cartolina. Em seguida, trace a diagonal de cada retângulo, dividindo-os em dois triângulos retângulos. Ao recortar os retângulos ao longo dessas diagonais, obter-se-ão quatro triângulos retângulos idênticos.

➢ **Sugestões de Perguntas :**

- O que aconteceu com os retângulos depois que traçamos a diagonal e recortamos?
- Quais tipos de triângulo foram formados?

II - Em seguida, utilizando uma cartolina de cor diferente, construa um quadrado com lados de 5 cm, ou seja, a mesma medida de um dos lados dos retângulos apresentados anteriormente. Esse quadrado será utilizado na montagem das figuras geométricas.

➢ **Sugestões de Perguntas :**

- Como o tamanho desse quadrado se relaciona com os retângulos que cortamos anteriormente?
- O que podemos observar ao comparar esse quadrado com os triângulos obtidos na etapa anterior?

- **2º MOMENTO- REMANEJAR AS FIGURAS**

III - Com os quatro triângulos retângulos e o quadrado de 5 cm, o primeiro passo é montar um grande quadrado. Sugira que os alunos experimentem diferentes arranjos, como posicionar os triângulos em torno do quadrado de 5 cm para formar um retângulo ou outro polígono, explorando a variedade de formas possíveis com as mesmas peças geométricas.

IV- Em seguida, oriente-os a montar a figura conforme o seguinte: posicione os quatro triângulos de modo que as hipotenusas, os lados mais longos, formem o perímetro do quadrado, enquanto o quadrado menor fica centralizado, preenchendo o espaço restante.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Como o tamanho desse quadrado se relaciona com os retângulos que cortamos anteriormente?
- O que vocês perceberam ao tentar montar o grande quadrado com as peças disponíveis?
- Qual é a relação entre os lados dos triângulos retângulos e os lados do quadrado menor?
- Se somarmos as áreas dos quatro triângulos e do quadrado menor, qual resultado obtemos?

Essa atividade envolve a aplicação prática de conceitos fundamentais relacionados à mensuração e comparação de figuras geométricas. Ao construir e manipular retângulos, triângulos e quadrados, os alunos trabalham com medidas de comprimento, área e propriedades das formas geométricas.

7.2.2 Geoplano (Áreas)

Nesta atividade, será utilizado o conceito e o somatório de áreas. O geoplano será empregado como recurso didático para explorar o triângulo retângulo, com o objetivo de evidenciar a relação entre os catetos e a hipotenusa. A proposta visa favorecer a visualização das medidas (Marques *et al.*, 2014)

- MATERIAIS:

- Geoplano quadrado; lãs ou elásticos de cores diferentes.

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

➢ **1º MOMENTO - CONSTRUIR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO**

I - Escolha uma cor de lã para representar os catetos do triângulo. Em seguida, corte um pedaço de lã e fixe-o no geoplano, formando um segmento de 3 unidades de comprimento e outro de 4 unidades. Os dois catetos devem se encontrar em um ângulo reto, formando assim a hipotenusa, que terá 5 unidades de comprimento.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Qual é a relação entre as unidades de comprimento dos catetos e da hipotenusa?
- Se você medir os catetos e a hipotenusa, o que você percebe sobre os seus comprimentos?
- O que aconteceria se aumentássemos ou diminuíssemos o comprimento de um dos catetos? Como isso afetaria a hipotenusa?

➢ **2º MOMENTO- CONSTRUIR QUADRADOS SOB OS CATETOS DO TRIÂNGULO EHIPOTENUSA**

II - Com outras cores de lã, construa quadrados sob os catetos com áreas iguais a $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$ e sob a hipotenusa com área igual a $5^2 = 25$.

III - Visto que $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, então $3^2 + 4^2 = 5^2$.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que você observa sobre a área de cada quadrado construído? Como essa área está relacionada ao comprimento do cateto?
- Se o cateto tem comprimento 3, qual é a área do quadrado construído sobre esse cateto? E para o cateto de 4 unidades? E qual é a área do quadrado que está construído sobre a hipotenusa?
- Se você somar as áreas dos quadrados sob os catetos, o que você pode concluir

sobre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa?

- **3º MOMENTO - DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS ATRAVÉS DE COMPARAÇÃO DE ÁREAS**

IV - Como o quadrado da hipotenusa fica na diagonal do geoplano, dificulta assim a comprovação do teorema. Desta forma, são utilizados outros artifícios para a demonstração. Com outra cor de lã, prolongue o cateto menor do triângulo até que se alinhe ao vértice do quadrado da hipotenusa, formando um retângulo com medidas 3x4 unidades de comprimento. Repita o mesmo procedimento com o cateto maior do triângulo.

V - Construa outro retângulo tendo como base o cateto maior do triângulo, e altura o cateto menor.

VI - Após, construa outro retângulo que tem como diagonal o lado superior do quadrado da hipotenusa.

VII - Para provar o teorema, é necessário que o quadrado maior tenha 25 unidades de área. Cada retângulo obtido tem como área $3x4$ = 12. Como apenas a metade dele constitui o quadrado, então serão 6 unidades de comprimento. Como há 4 retângulos, então $4x6$ = 24 unidades. Pode-se observar que, no centro dos retângulos, formou-se um quadrado isolado com área igual a 1 unidade. Sendo assim, somando as áreas dos retângulos com a área do quadrado isolado, obtêm-se 24 + 1 = 25 unidades de comprimento.

7.2.3 Quadriculações (Áreas)

- <u>MATERIAIS:</u>
  - 16 Quadradinhos de EVA ou papel de mesma unidade de comprimento; 9 quadradinhos com a mesma unidade de comprimento com cor diferente e folha branca.

- <u>PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:</u>

- **1º MOMENTO- CONSTRUIR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO**

I - Construa um triângulo retângulo na folha branca, com o auxílio de materiais que contenham linhas retas que o aluno possua. Os catetos deverão ter medidas de 3 unidades de quadradinhos e o outro com 4 unidades de quadradinhos.

- **2º MOMENTO- CONSTRUIR OS QUADRADOS**

II - Construa quadrados sob os catetos e a hipotenusa, delimitando suas áreas.

III - Coloque os quadradinhos de EVA dentro dos quadrados desenhados para preencher completamente as áreas dos quadrados dos catetos com suas respectivas cores (a^2 e b^2).

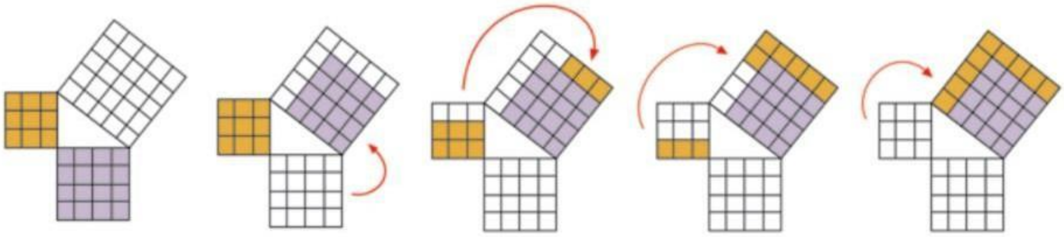
- **Sugestões de Perguntas:**
  - Você consegue identificar qual quadrado ocupa mais espaço? O que isso nos diz sobre o comprimento dos catetos?
  - Qual é o número de quadradinhos de EVA que você usou para preencher o quadrado sobre o cateto de 3 unidades? E o número de quadradinhos para o cateto de 4 unidades?
  - Como você pode calcular a área de cada quadrado?

- **3º MOMENTO- COMPARAÇÃO DE ÁREAS**

IV - Assim, faça o remanejamento de todos os quadradinhos de EVA para completar o quadrado maior que está sob a hipotenusa. Desta forma, com a comparação de áreas, demonstra o Teorema.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - O que acontece quando você move todos os quadradinhos de E.V.A. dos quadrados menores para o quadrado maior? O que você consegue perceber sobre a organização das áreas?
  - Ao preencher o quadrado sobre a hipotenusa, como as áreas dos quadrados sobre os catetos contribuem para a área total?
  - Como você descreveria a relação entre os quadrados sobre os catetos e o quadrado sobre a hipotenusa em termos de soma de áreas?

Figura 18 - Dimensão Geométrica utilizando o método de Quadriculações



Fonte: Marques *et al*. (2014)

7.2.4 Modelo 3D (Volume)

Embora o Teorema de Pitágoras seja tradicionalmente associado a áreas e geometria plana, também é possível explorar uma analogia tridimensional usando a dimensão de medida volume, elementos geométricos em 3D. A atividade a seguir foi inspirada por um vídeo do “Youtube”.

Figura 19 - Dimensão Medidas (Volume) Modelo 3D

Fonte: Pythagoras's/ Pythagorean Theorem 3D Working Model (2023)

- MATERIAIS:

  - Um papel com gramatura maior; canudos; fita adesiva; miçangas; régua; tesoura; papel colorido e acetato.

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

➢ **1º MOMENTO- CONSTRUIR O TRIÂNGULO E OS QUADRADOS**

I - Construa um triângulo retângulo utilizando papel colorido, com os catetos medindo 3 e 4 centímetros (ou outras medidas), de forma que os quadrados possam ser acomodados dentro do papel. Cole o triângulo em um papel de maior gramatura.

II - Trace os limites dos quadrados com base nas medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo. Utilize fita adesiva para fixar os canudos nos respectivos tamanhos, garantindo que os quadrados dos catetos estejam claramente separados do quadrado da hipotenusa.

III - Dentro dos limites dos quadrados, distribua as miçangas de forma que elas se ajustem bem à figura.

IV - Cole um pedaço de acetato sobre toda a área para garantir que as miçangas fiquem no lugar e não se percam.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- A quantidade de miçangas dos dois quadrados menores consegue preencher completamente o quadrado sobre a hipotenusa?
- Se tivéssemos escolhido catetos com outras medidas, essa relação ainda seria válida? Por quê?

Figura 20- Dimensão Medidas (Volume) Modelo desenvolvido pelos alunos

Fonte: Foto produzida pela autora (2024)

7.3 DIMENSÃO TECNOLÓGICA

A dimensão tecnológica na aplicação do Teorema de Pitágoras transformou o ensino e a compreensão desse princípio matemático, proporcionando ferramentas avançadas para visualização e experimentação. Softwares de geometria dinâmica, como *GeoGebra*, permitem que estudantes manipulem triângulos retângulos interativamente, observando em tempo real como a relação do teorema se mantém constante, independentemente das dimensões dos catetos. Ademais, utiliza-se o mesmo *software* para o cálculo da distância entre dois pontos diretamente, ao traçar um triângulo retângulo entre eles.

7.3.1 Tangram

- MATERIAIS:
  - Aplet Geogebra online - Tangram del teorema de Pitágoras (https://www.geogebra.org/m/hngfkgkz)

- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

➢ **ENCAIXAR AS PEÇAS DO TANGRAM NOS QUADRADOS DOS CATETOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

I - Ao abrir o aplicativo, já terá as peças do Tangram embaralhadas para que o aluno possa remanejar de modo que complete a área de cada quadrado dos catetos. O aplicativo dá a liberdade de modificar o tamanho do triângulo retângulo, com isso, as peças também irão aumentar ou diminuir de acordo com o comando.

II - Após encaixar todas as peças do Tangram nos dois quadrados sob os catetos, colocar todas as peças de modo que preencha o quadrado da hipotenusa. Assim será visto que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa.

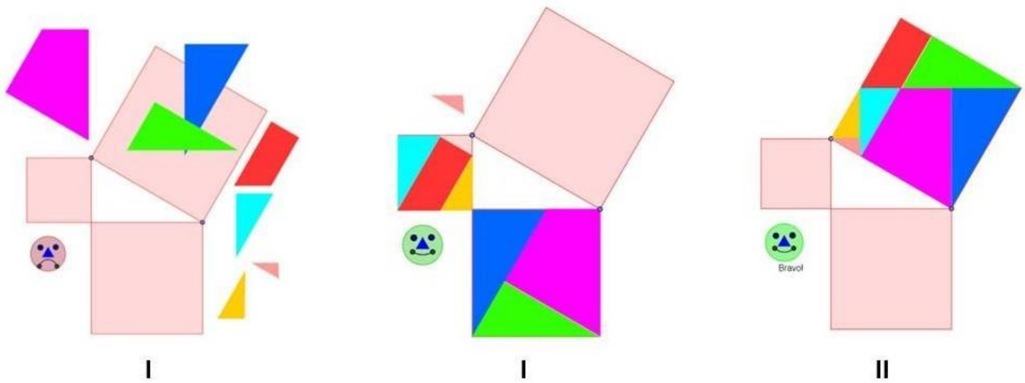
➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que você percebe ao encaixar as peças do Tangram nos quadrados sobre os catetos?
- Quando todas as peças são transferidas para o quadrado sobre a hipotenusa, o

espaço é preenchido completamente?

- Se aumentarmos ou diminuirmos o tamanho do triângulo retângulo, essa relação continua válida? Por quê?

Figura 21- Dimensão Tecnológica- Tangram



Fonte: Geogebra (2024)

7.3.2 Geogebra- Distância entre dois pontos

- MATERIAIS:

 - Aplet Geogebra online - https://www.geogebra.org/m/amcykswf

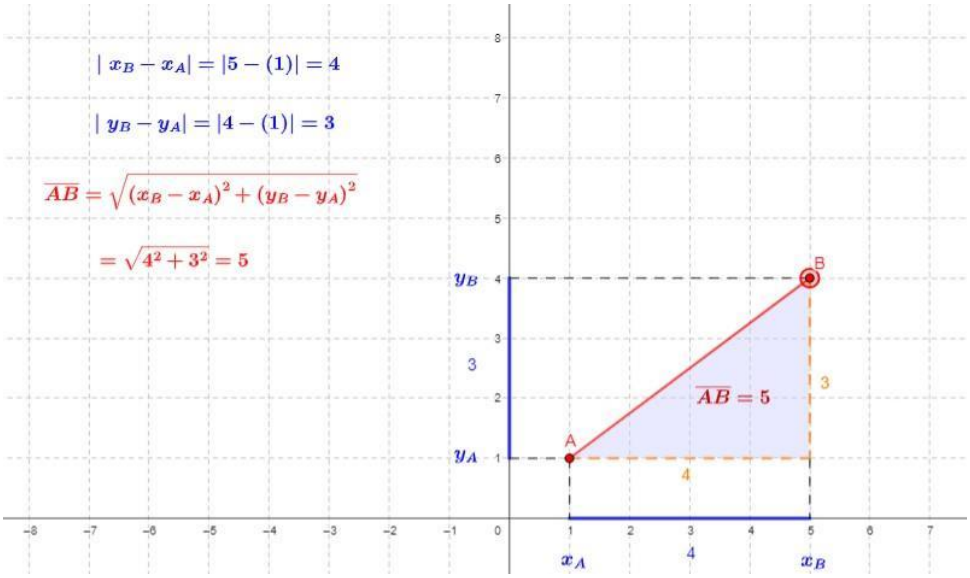
- PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:

I - Esse aplicativo permite as transformações quando se modifica os pontos. Nesse caso, mostra-se a fórmula da distância entre dois pontos, o qual aplica o teorema de Pitágoras. Pode-se observar que, à medida que se desloca os pontos, se aumenta ou diminui os catetos e, por consequência, se modifica também a distância que se correlaciona com as medidas dos catetos.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que acontece com a distância entre os pontos quando você desloca um dos vértices do triângulo?
- Se os catetos aumentam, o que ocorre com a hipotenusa? E se diminuem?

Figura 22- Etapas da atividade em sala



Fonte: Geogebra (2024)

8. PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE

Nesta seção, serão apresentados os procedimentos adotados durante a atividade analisada, incluindo as etapas realizadas, os materiais utilizados e as estratégias empregadas.

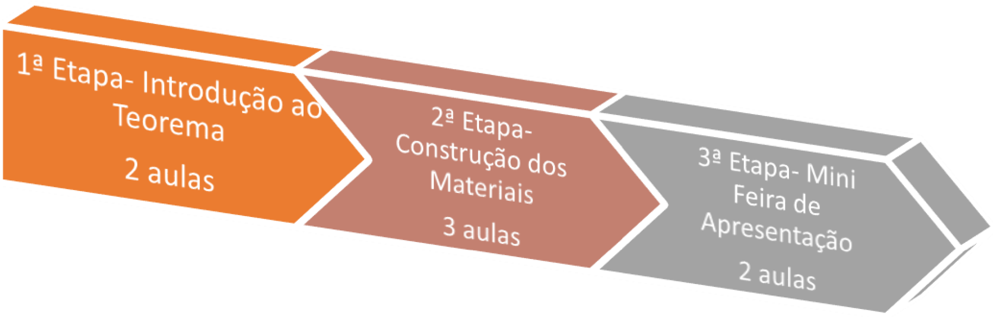
Os participantes da pesquisa são 28 alunos do 7º ano de uma escola em que a pesquisadora atua como professora o que permitiu e facilitou a observação e o reconhecimento do comportamento e das características individuais de cada estudante diante das tarefas propostas para análise deste trabalho. Ou seja, é possível reconhecer a diversidade de personalidades dentro de uma turma, com diferentes níveis de participação e interesse.

A análise dos resultados será realizada por grupo, embora as respostas sejam individuais, pois a reflexão e a construção dessas respostas surgiram a partir das discussões coletivas. Mesmo que algum aluno se destaque na apresentação, a resposta final é fruto de um trabalho conjunto, resultado das negociações e trocas entre os membros do grupo. Essa abordagem está alinhada à visão de Vygotsky, que destaca a importância da participação e da integração social no processo de aprendizagem.

Embora o Teorema de Pitágoras não esteja previsto no currículo do 7º ano pela BNCC, sua abordagem mostrou-se relevante, uma vez que os conceitos sobre triângulos retângulos haviam sido introduzidos no ano anterior. Além disso, explorar o teorema permite estabelecer conexões com situações do cotidiano. No entanto, há de se considerar que alguns alunos ainda não faziam associações espontâneas com o tema ao retomá-lo.

As tarefas propostas foram estruturadas com base em uma abordagem investigativa, fundamentada na Teoria da Atividade de Leontiev (1978), que envolve três elementos principais: necessidade, objeto e motivo. Para estimular a aprendizagem, foram utilizados materiais manipuláveis, permitindo que os alunos explorassem os conceitos do Teorema de Pitágoras de maneira prática. Dessa forma, a compreensão foi incentivada por meio da experimentação, e a tarefa foi dividida em três etapas, organizadas da seguinte maneira:

Figura 23- Etapas da atividade em sala

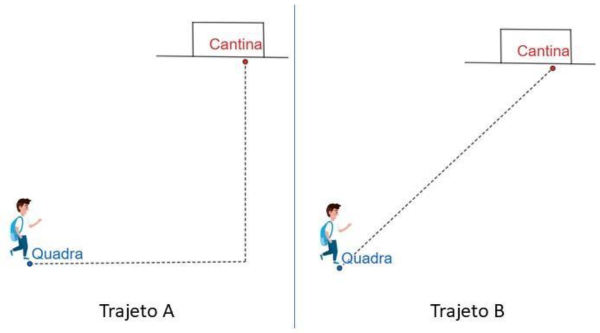


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

8.1 INTRODUÇÃO AO TEOREMA

A primeira etapa, voltada para a introdução ao Teorema de Pitágoras, foi desenvolvida em três momentos: Situação-problema, Questionário Prévio e Atividade Investigativa. Inicialmente, os estudantes foram expostos a um problema contextualizado, que envolvia a comparação entre duas distâncias percorridas entre um ponto da quadra da escola e a cantina. A partir dessa situação, foram incentivados a discutir qual trajeto seria mais adequado, podendo optar por realizar cálculos ou formular hipóteses, conforme ilustrado a seguir.

Figura 24- Situação Problema para o 7º ano



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Os alunos puderam discutir sobre qual o melhor caminho a ser seguido e o que achavam sobre cada resposta. Nesse processo, a formulação de hipóteses teve um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento científico. Carvalho (2013) ressalta essa importância ao afirmar que "a formulação de hipóteses é um passo fundamental, pois envolve o aluno em um exercício de previsão e planejamento, crucial para o desenvolvimento do pensamento científico".

A partir da discussão sobre qual caminho seria mais adequado, os alunos manifestaram diferentes percepções, expressando suas ideias por meio de afirmações, como:

Aluno 1: "acho que o melhor caminho é o trajeto B, assim consigo chegar mais rápido."
Aluno 2: "teríamos que medir o tamanho dos trajetos para saber qual é o melhor."
Aluno 3: "acho que poderíamos testar contando o tempo de cada um."

Inicialmente, algumas falas demonstraram incerteza e questionamento, indicando que os estudantes estavam explorando diferentes possibilidades antes de chegar a uma conclusão. Esse momento de dúvida durante o aprendizado investigativo motiva a reflexão e estimula a busca por estratégias para validar ou refutar suas hipóteses. Vygotsky (1978) argumenta que o aprendizado ocorre quando os estudantes enfrentam desafios que estão ligeiramente além de suas habilidades atuais, mas que podem ser superados com a ajuda de um mediador.

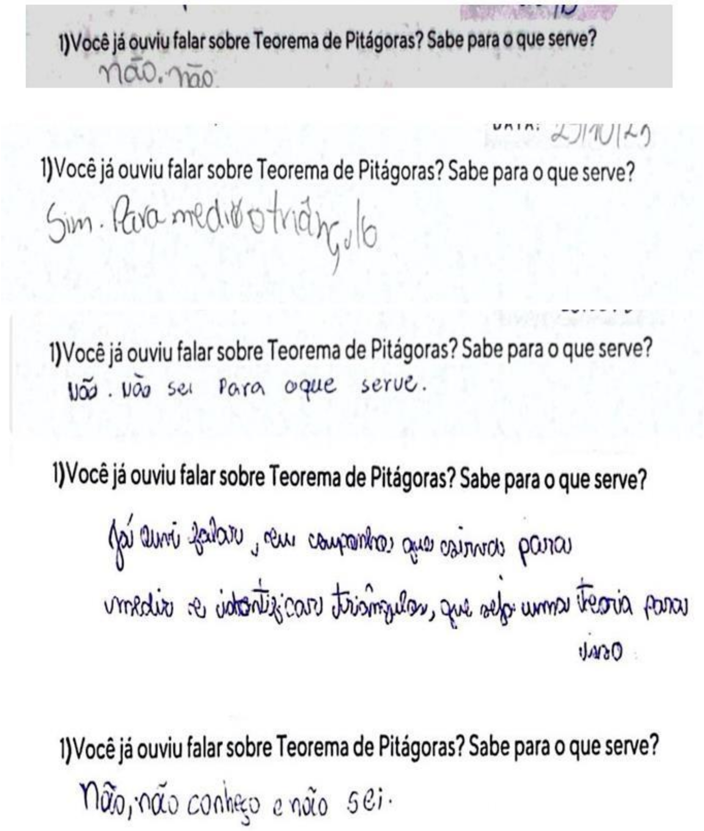
Ao refletirem sobre a medição ou a escolha do caminho mais rápido ou curto, os alunos têm a oportunidade de se familiarizar, de maneira intuitiva, com conceitos como distâncias e a aplicação do Teorema de Pitágoras. Esse processo contribui para a construção do conhecimento do aluno, permitindo sua assimilação.

Após, foi apresentado um método para determinar o trajeto mais curto, iniciando o segundo momento da atividade. Nessa fase, abordou-se a importância de compreender esses aspectos e sua relação com situações do cotidiano. Para aprofundar a reflexão, foram exibidos outros exemplos como o caminho de casa até a escola ou ainda a forma mais rápida de atravessar um campo ou quadra, destacando que existe um conceito matemático que auxilia na resolução do problema.

Após essa apresentação, aplicou-se um questionário avaliativo com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os temas relacionados ao Teorema de Pitágoras, que seriam comparados às respostas do questionário aplicado após as atividades. As questões foram elaboradas com base em um diagnóstico da turma, construído ao longo do tempo de acompanhamento da turma, período em que foi possível observar as principais dificuldades e avanços dos estudantes em relação aos conteúdos matemáticos estudados. O questionário completo está disponível no Apêndice D.

Com base nas respostas, alguns participantes foram selecionados para aprofundar a compreensão sobre seu nível de conhecimento. Essa seleção permitiu identificar diferentes formas de raciocínio que, ao serem comparadas com as respostas do questionário final, proporcionam uma análise mais detalhada da evolução da aprendizagem, a qual será apresentada a seguir.

Figura 25-Respostas do 1º Questionário



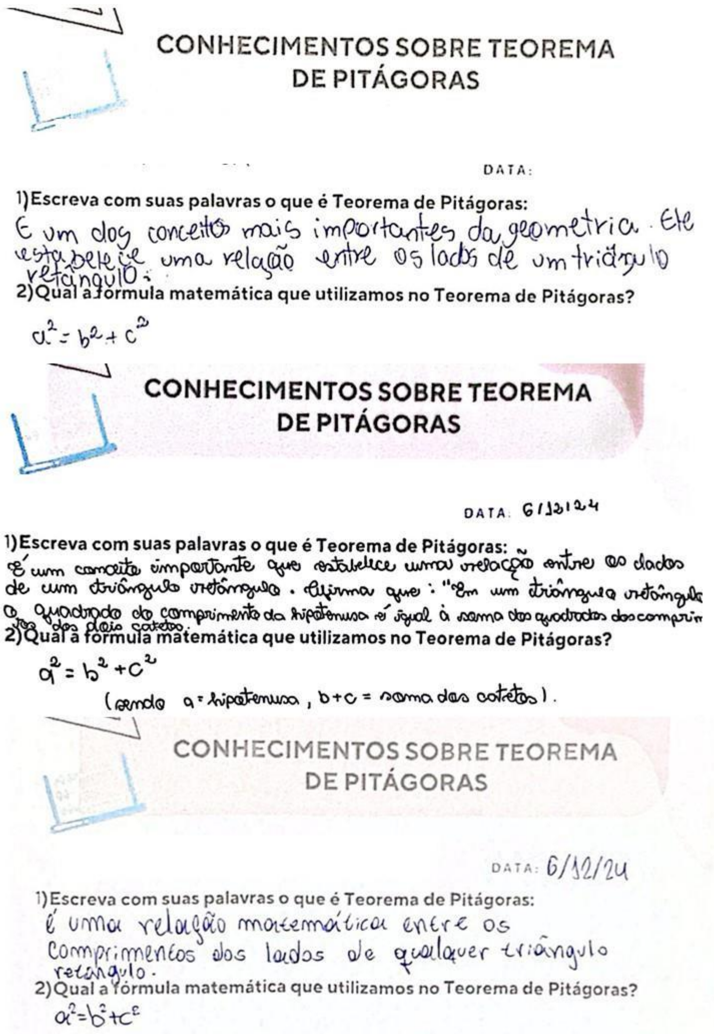
Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

No segundo questionário, os alunos foram convidados a descrever, com suas próprias palavras, o que haviam compreendido após a atividade prática. Esse procedimento permitiu avaliar não apenas a assimilação do conceito, mas também a forma como cada estudante expressava seu entendimento. Ademais, possibilitou identificar eventuais dificuldades persistentes e a maneira como os alunos relacionaram a teoria com a prática.

As respostas indicaram um progresso na compreensão do conceito, com explicações mais detalhadas e contextualizadas. Observou-se que muitos alunos passaram a utilizar exemplos práticos e uma terminologia mais alinhada ao tema, o que sugere um avanço na familiarização com os termos matemáticos.

Para uma análise aprofundada, foi selecionada uma amostra representativa das respostas, considerando diferentes formas de abordagem e níveis de detalhamento. Essa amostra foi examinada qualitativamente para compreender melhor a evolução do aprendizado ao longo da atividade. Os resultados sugerem que estratégias didáticas que envolvem atividades práticas podem contribuir para a compreensão de conceitos abstratos, auxiliando os alunos a estabelecerem conexões com o conteúdo estudado.

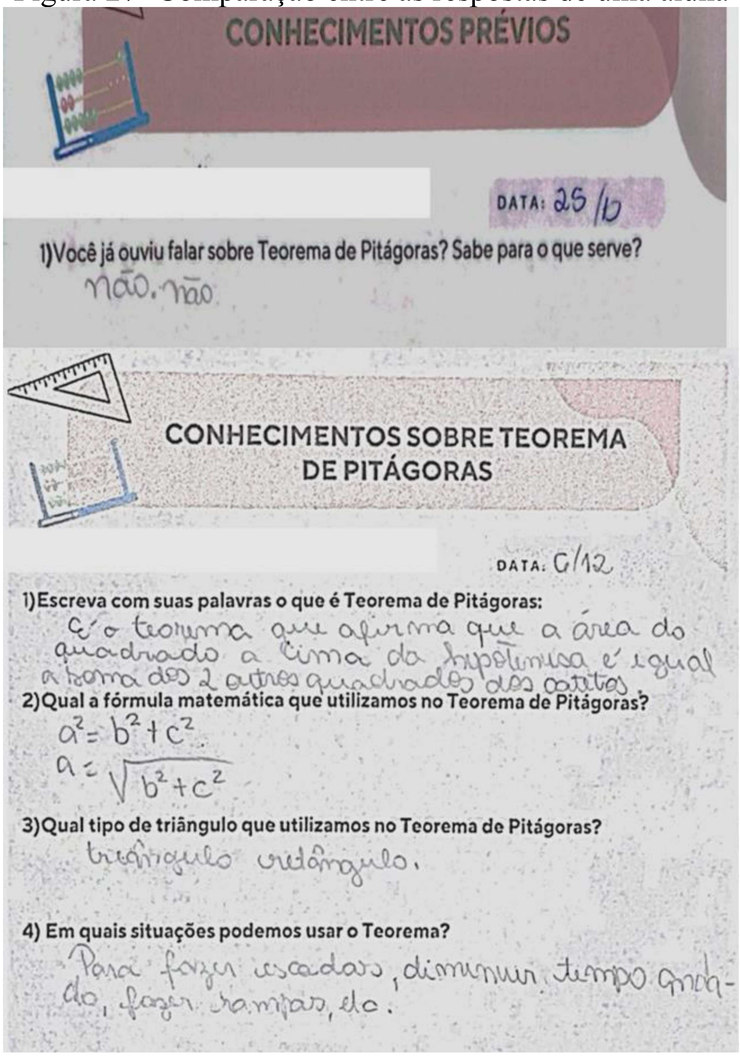
Figura 26- Respostas do 2º Questionário



Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Um exemplo desse avanço é a resposta de uma aluna que, no primeiro questionário, respondeu apenas "Não" à pergunta inicial, sem maiores explicações. Contudo, após a atividade manipulativa, sua descrição sobre o Teorema de Pitágoras tornou-se mais estruturada, mostrando sua compreensão da relação entre os lados do triângulo retângulo e a aplicabilidade do teorema em diferentes situações, incluindo a representação algébrica. Essa mudança reforça a importância do uso de materiais manipuláveis para tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis. Como destaca Lorenzato (2006), "o uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática possibilita que o aluno estabeleça uma relação concreta com o objeto de estudo, facilitando a compreensão de conceitos abstratos".

Figura 27- Comparação entre as respostas de uma aluna


CONHECIMENTOS PRÉVIOS

DATA: 25/10

1)Você já ouviu falar sobre Teorema de Pitágoras? Sabe para o que serve?

não. não

CONHECIMENTOS SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS

DATA: 6/12

1)Escreva com suas palavras o que é Teorema de Pitágoras:

é o teorema que afirma que a área do quadrado a cima da hipotenusa é igual a soma dos 2 outros quadrados dos catetos.

2)Qual a fórmula matemática que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

$a^2 = b^2 + c^2$

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

3)Qual tipo de triângulo que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

triângulo retângulo.

4) Em quais situações podemos usar o Teorema?

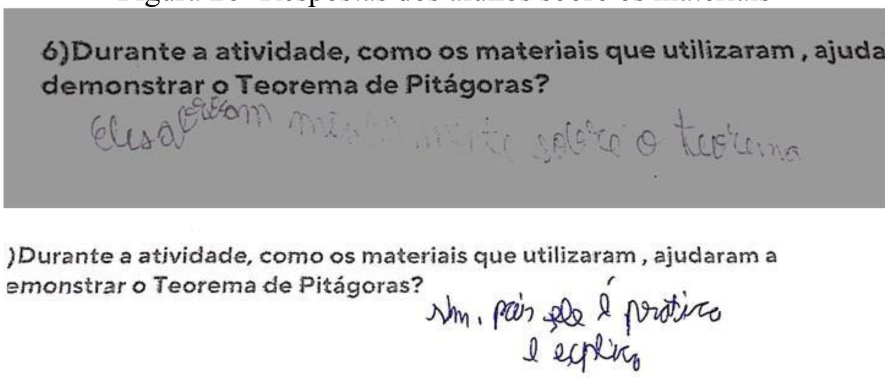
Para fazer escadas, diminuir tempo andado, fazer rampas, etc.

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Durante a atividade, os alunos puderam visualizar e interagir com os elementos matemáticos, possibilitando a transição do conceito abstrato para uma experiência visual e investigativa. Esse tipo de abordagem contribuiu para a internalização do conhecimento, pois permite que os estudantes explorem, testem e construam seu próprio entendimento a partir da prática. O que vem de encontro com o descrito de Ponte (2005): "os alunos, ao investigarem, estão a desenvolver capacidades de pensar criticamente e de resolver problemas de forma autônoma".

As respostas do questionário reforçam essa percepção. Um dos alunos afirmou que os materiais foram úteis porque o teorema é "prático e explica", indicando que a experiência manipulativa ajudou na compreensão da demonstração. Outro aluno mencionou que os recursos utilizados "abriram sua mente sobre o teorema", sugerindo que a interação com os materiais permitiu novas formas de visualizar o conceito.

Figura 28- Respostas dos alunos sobre os materiais



6)Durante a atividade, como os materiais que utilizaram , ajuda
demonstrar o Teorema de Pitágoras?
Elas abriram minha mente sobre o teorema

)Durante a atividade, como os materiais que utilizaram , ajudaram a
emonstrar o Teorema de Pitágoras?
Sim, pois ele é prático
e explica

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Apesar do avanço observado em grande parte dos alunos, algumas respostas indicaram dificuldades na compreensão do teorema, mesmo após a atividade prática. Em certos casos, as explicações permaneceram superficiais, sem o uso adequado da terminologia matemática ou sem estabelecer conexões claras entre os elementos do teorema e sua aplicação. Também houve alunos que não realizaram a atividade, o que os levou a afirmar que não compreenderam o teorema.

Esse resultado sugere que, embora as atividades práticas sejam um recurso didático valioso, seu impacto pode variar entre os alunos. Fatores como nível de familiaridade prévia com o tema, formas individuais de aprendizagem e até mesmo o tempo necessário para a assimilação dos conceitos podem influenciar na eficácia da abordagem. Para esses casos, estratégias complementares, como discussões guiadas, revisões adicionais se integram para fortalecer a compreensão.

Por fim, foi introduzido o tema "Teorema de Pitágoras" juntamente com sua formulação algébrica, destacando sua importância na matemática e suas aplicações práticas. Nesse contexto, ressaltou-se brevemente o papel das demonstrações no ensino de teoremas matemáticos. Acompanhar esse processo permite aos alunos não apenas validar a afirmação, mas também entender sua aplicabilidade, conforme discutido por Amado *et al*. (2015).

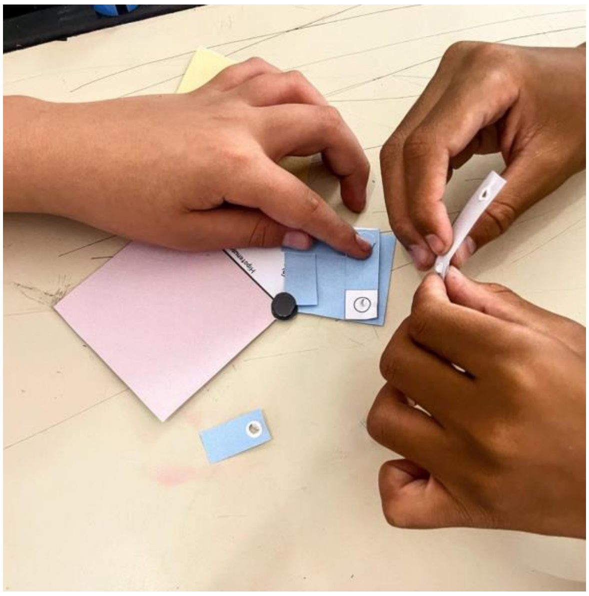
Dessa forma, iniciou-se o terceiro momento da atividade: a demonstração do Teorema de Pitágoras por meio de um material manipulável. Esse recurso, recortes de figuras geométricas de triângulos e quadrados em cartolina para que pudessem manipular e verificarem de maneira ativa, a validade do teorema. Isto é, que a área do quadrado cujo lado possui a medida da hipotenusa do triângulo é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados cujos lados possuem a medida dos catetos da figura triangular tomada como base no experimento.

Para a realização da atividade, a turma foi dividida em sete grupos, com o objetivo de incentivar a cooperação e a troca de ideias, permitindo que os alunos explorassem os conceitos por meio de materiais manipuláveis. Essa proposta dialoga com a teoria sociocultural de Vygotsky (2007), que destaca o papel da linguagem não apenas como meio de comunicação, mas também como ferramenta para a internalização dos conceitos e o desenvolvimento de habilidades cognitivas mais avançadas.

Cada grupo recebeu peças que podiam ser reorganizadas de forma a preencher os quadrados construídos sobre os catetos. Em seguida, as mesmas peças foram dispostas no quadrado maior, sobre a hipotenusa, demonstrando visualmente a relação entre as áreas. O modelo da folha utilizada está disponível no Apêndice E.

Triângulos de diferentes tamanhos foram disponibilizados para que os alunos explorassem e analisassem se chegariam aos mesmos resultados, independente das dimensões das figuras. Esse momento proporcionou aos estudantes a oportunidade de expressar suas compreensões.

Figura 29 - Atividade em sala do 7º ano



Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

A interação em grupo possibilitou que os alunos expressassem suas ideias de forma espontânea, contribuindo para a construção da consciência individual a partir das experiências coletivas. Durante essa dinâmica, os signos, especialmente a linguagem, atuaram como mediadores do aprendizado, auxiliando na transição do conhecimento compartilhado para a compreensão individual, promovendo a internalização de conceitos, conforme apontado por Daniels (1995) ao discutir Vygotsky. Além disso, a troca de ideias criou um ambiente propício para questionamentos e intervenções do professor, aprofundando o diálogo e incentivando reflexões mais elaboradas sobre o tema.

Durante a observação do professor, foram feitas perguntas como: “O que vocês acham que acontecerá quando reorganizarmos as peças dos quadrados dos catetos? As peças que estavam nos quadrados dos catetos se encaixaram perfeitamente no quadrado da hipotenusa? O que isso pode indicar?”; “Vocês percebem alguma relação entre as áreas dos quadrados menores e a área do quadrado maior?”; “Como podemos representar, por meio de operações matemáticas, o que observamos com as peças?”; “Quais seriam as áreas dos quadrados?”; “Ao somar as áreas dos quadrados menores, qual resultado obtemos?” e “Se os triângulos forem de tamanhos diferentes, o que pode mudar no resultado?”.

Essas questões refletem a importância da mediação do professor para estimular a reflexão dos alunos e ajudá-los a internalizar conceitos matemáticos. Como afirma Vygotsky (2001, p. 94): "o papel do professor é criar condições para que o aluno, com sua própria ação, conquiste o conhecimento, e é por meio da mediação da linguagem que se dá essa transformação".

As falas dos alunos evidenciaram diversas estratégias e formas de raciocínio para enfrentar o desafio proposto. Expressões como “Não sei se todas as peças vão se encaixar” e “Pode ser que encaixe, mas depende do jeito que a gente arruma as peças” demonstram um processo inicial de exploração, no qual os estudantes testam possibilidades e ajustam suas hipóteses à medida que manipulam os materiais.

Já afirmações como “As peças se encaixaram, mas é um quebra-cabeça bem diferente” e “Os tamanhos dos quadrados se encaixam no maior” mostram uma evolução na compreensão do conceito, evidenciando que os alunos começaram a perceber a relação entre as áreas dos quadrados e a propriedade do Teorema de Pitágoras.

Outro aspecto interessante observado pelos alunos foi que os triângulos distribuídos para cada grupo tinham tamanhos diferentes. No entanto, nos grupos que conseguiram concluir a atividade, percebeu-se que o reposicionamento das peças funcionava independentemente das dimensões dos triângulos, o que reforça a validade do Teorema de Pitágoras. Esse processo está alinhado com a afirmação de Pólya (1945), que destaca:

> As demonstrações matemáticas, além de serem instrumentos para a validação de conceitos, oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver habilidades de pensamento crítico, pois exigem a análise cuidadosa de argumentos, a construção de raciocínios lógicos e a capacidade de revisar e justificar cada passo dado (Polya, 1945).

Sobre o material manipulável, alguns alunos tiveram dificuldades para identificar o posicionamento correto das peças, o que estendeu o tempo de execução da atividade. No entanto, conseguiram, por conta própria, encontrar soluções para avançar, conforme destaca Borin (1997): "ao manipular materiais, os alunos são estimulados a desenvolver estratégias próprias, o que favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo".

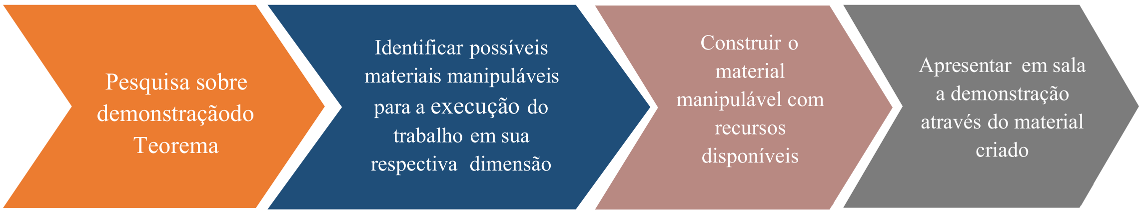
Figura 30 - Alunos utilizando o material manipulável

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Ao final da atividade, alguns alunos ficaram surpresos ao perceber que a soma das áreas dos dois quadrados menores resultava exatamente na área do quadrado maior. Diante dessa descoberta, a expressão algébrica correspondente foi reformulada no quadro, permitindo que os estudantes estabelecessem uma conexão entre a experiência vivenciada por meio da manipulação das peças e a representação matemática do teorema.

Ao concluir a atividade, evidenciou-se que o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado de diversas maneiras, com destaque para as abordagens geométricas e algébricas. O uso de materiais manipuláveis complementa essas demonstrações, mostrando que múltiplas dimensões podem ser exploradas, conforme discutido nos capítulos anteriores. Após essa exposição, cada grupo de alunos recebeu, mediante sorteio, uma dimensão específica, e realizou os seguintes procedimentos:

Figura 31 - Procedimentos da atividade proposta



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Nesse período, os alunos foram inicialmente orientados a realizar uma pesquisa sobre a demonstração do Teorema de Pitágoras, a fim de se familiarizarem com suas diferentes abordagens e possibilidades. Em seguida, três aulas foram dedicadas à construção de materiais que representassem cada uma dessas dimensões. Para isso, foram sorteados os seguintes recursos: Tangram (tecnológica), Quebra-cabeça (medidas), Recortes (geométricas), Dobraduras (geométricas), Geoplano (áreas), Quadriculações (áreas) e Modelo 3D (volume). Durante a execução das atividades, foram realizadas intervenções para estimular a reflexão dos alunos.

8.2 CONSTRUÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Os grupos tiveram dedicação ao construir seus materiais, participando ativamente da atividade e buscando seguir as instruções que foram entregues, o que contribuiu para uma melhor exploração das propriedades. A manipulação dos materiais possibilitou que os alunos testassem hipóteses, fizessem ajustes e discutissem entre si as relações observadas. Além disso, esse momento incentivou a colaboração entre os colegas.

O objetivo foi promover, por meio da abordagem investigativa, um aprendizado que integrasse aspectos socioculturais de Vygotsky (2007), a Teoria da Atividade de Leontiev (1978) e o processo de demonstração, destacando suas funções de verificar, explicar e sistematizar, conforme aponta De Villiers (2001).

Nesse sentido, o professor desempenha o papel de estimular a construção do conhecimento em um ambiente colaborativo entre os alunos. Essa perspectiva se conecta à Teoria da Atividade de Leontiev, que enfatiza a importância do contexto motivacional na aprendizagem. Para que um conceito seja internalizado, a ação precisa ter significado para o estudante e estar relacionada às suas necessidades e objetivos.

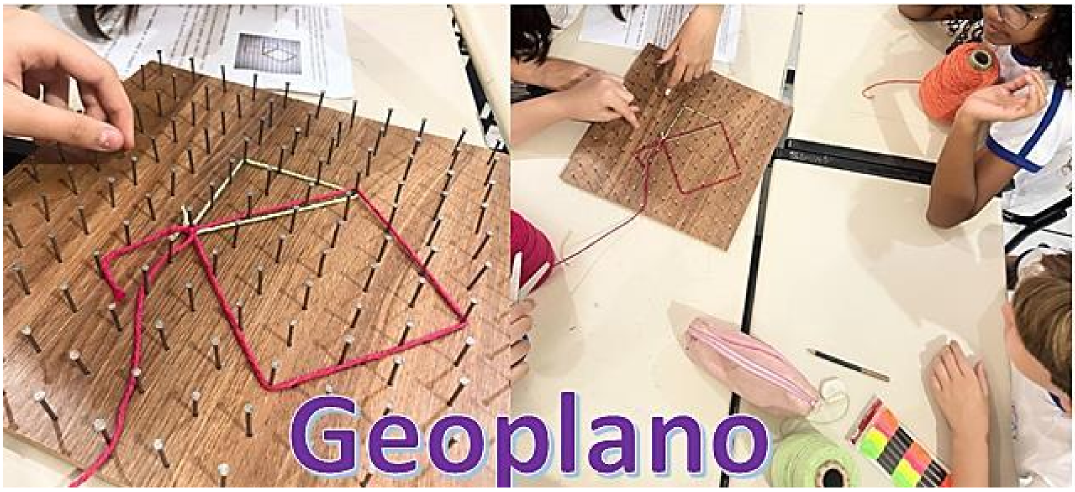
Ao integrar essas concepções com o processo de demonstração matemática contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e a estruturação do conhecimento matemático. Dessa maneira, a abordagem investigativa se fortalece ao incentivar os alunos a explorarem conceitos matemáticos por meio da experimentação, da manipulação de materiais e da argumentação.

O grupo 1, responsável pela Dimensão Grandezas - Áreas utilizando o Geoplano como ferramenta para a demonstração. Os alunos cortaram barbantes coloridos para demarcar um triângulo retângulo e os quadrados correspondentes aos seus catetos e à hipotenusa, onde as medidas dos catetos eram representadas pelos espaços entre os pregos do material. Durante a atividade, testaram diferentes tamanhos de triângulos retângulos dentro dos limites do geoplano, analisando a melhor forma de representar a relação entre as áreas para a próxima etapa da explicação. Contaram com o suporte da representação algébrica do teorema para auxiliar na verificação e organização dos resultados.

No início, os alunos encontraram dificuldades para realizar as atividades de maneira independente, pois não tinham experiência com o uso do Geoplano. No entanto, à medida que se acostumaram com o recurso, e com a orientação da professora, passaram a explorar, por conta própria, diferentes arranjos e dimensões para o triângulo e investigar se o Teorema poderia ser aplicado a triângulos retângulos com diferentes tamanhos.

Durante essa exploração, observou-se que, ao testar as possibilidades, os alunos identificaram soluções viáveis e outras que não eram possíveis devido às restrições do tamanho do Geoplano. Esse processo de tentativa e erro confirma o que é sugerido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), de que, nesse estágio, são realizados testes e ajustadas as hipóteses formuladas inicialmente.

Figura 32 - Material Geoplano



Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

No grupo 2, responsável pela Dimensão Grandezas - Áreas com Quadriculações, dois alunos estavam ausentes, e os demais demoraram a iniciar as atividades. A proposta envolvia recortar quadrados maiores, de cores diferentes, para representar os catetos e a hipotenusa, além de quadrados menores para simbolizar unidades de medida. No entanto, os integrantes demonstraram resistência na elaboração dos materiais, dificultando o andamento da atividade. Como consequência, dois alunos não compareceram à apresentação, e os demais não produziram o material esperado. Isso sugere que a turma possui diferentes perfis de aprendizagem e que uma única metodologia pode não ser igualmente eficaz para todos.

No grupo 3, que trabalhou com a Dimensão Grandezas e Medidas utilizando um quebra-cabeça, os alunos não enfrentaram dificuldades na montagem das peças, embora tenham levado algum tempo para identificar as diferentes possibilidades de construção. Um momento importante ocorreu quando perceberam que a medida do quadrado correspondia a um dos catetos do triângulo, o que permitiu o encaixe das peças mesmo sem seguir o formato tradicional do quebra-cabeça. A tarefa tornou-se mais desafiadora quando foi necessário estabelecer a relação entre o objeto montado e a expressão algébrica correspondente ao Teorema de Pitágoras.

Observou-se que, ao seguir esse processo, os alunos não só procuraram soluções para os problemas, mas também exploraram diferentes possibilidades, se desafiando e ampliando seus conhecimentos. As conjecturas, nesse caso, serviram como ponto de partida para novas descobertas, enquanto os testes e projeções ajudaram a validar as ideias propostas. Como destaca Ponte *et al*. (2006, p. 10): “As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração”.

Figura 33 - Material Quebra-Cabeça

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

No Grupo 4, responsável pela Dimensão Grandezas e Medidas – Volume com o Modelo 3D, os alunos enfrentaram dificuldades iniciais para localizar todos os materiais necessários à realização da atividade. Diante desse obstáculo, uma aluna propôs uma adaptação criativa, utilizando papel colorido, miçangas e acetato para construir uma representação alternativa ao modelo apresentado no vídeo. A partir dessa iniciativa, o grupo colaborou na exploração de diferentes formas de representação. Esse processo reflete o que Ponte (2005) observou: "a investigação em matemática não apenas desenvolve competências cognitivas, mas também promove atitudes positivas em relação à aprendizagem, como a persistência e a disposição para enfrentar desafios".

Figura 34 - Modelo 3D

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Os alunos do Grupo 5, que trabalharam com a Dimensão Geométrica - Dobradura, demonstraram dedicação ao longo da atividade. Seguindo atentamente as instruções, exploraram a técnica de dobradura para representar a relação entre os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa. Durante o processo, discutiram estratégias para tornar a demonstração mais clara, optando por recortar os triângulos obtidos ao final em outra cor, facilitando a visualização da composição das áreas.

Os alunos questionaram se diferentes formas de dobrar o papel poderiam impactar o resultado final, demonstrando o esforço para compreender os conceitos geométricos envolvidos. A dúvida sobre como verificar a congruência dos triângulos menores indicou que os estudantes refletiam sobre a precisão das formas e das medidas.

Nesse momento, a orientação desempenhou um papel importante para que os alunos seguissem corretamente as etapas da dobradura, o que possibilitou alcançar o objetivo da atividade. Além disso, perguntas foram feitas para estimular a reflexão dos alunos sobre suas escolhas, promovendo uma aproximação entre a teoria e a prática. Esse processo de mediação é destacado por Libâneo (1994), ao afirmar que: "os materiais manipuláveis, isolados, não garantem a efetividade do ensino. É na articulação com a prática pedagógica que esses recursos ganham significado e se tornam ferramentas valiosas no processo educativo".

Figura 35 - Montagem do grupo de Dobradura

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

O Grupo 6, que trabalhou com a Dimensão Geométrica - Recortes, Inicialmente, utilizaram um pedaço pequeno de papel branco como suporte, o que dificultou o traçado da linha perpendicular. Como solução, trocaram por um papel maior, garantindo uma área adequada para realizar as construções com o compasso. Durante a atividade, mantiveram o foco e só apresentaram dúvidas sobre como o método poderia ser aplicado para chegar à formulação do Teorema. Como já haviam trabalhado com material manipulativo na etapa anterior, entenderam que, de alguma forma, o quadrado maior precisava ser reorganizado para formar o quadrado da hipotenusa. Essa abordagem prática e visual, como destaca D'Ambrósio (2012), permite a construção de uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos por meio da experiência direta com os recursos manipulativos.

Figura 36 - Montagem de Recortes

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

O Grupo 7 trabalhou com a Dimensão Tecnológica – Tangram, utilizando o computador e o applet do GeoGebra. Os alunos manipularam digitalmente as peças para explorar a aplicação do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos de diferentes proporções. A plataforma permitiu ajustes precisos e imediatos nas dimensões e ângulos, facilitando a visualização das relações geométricas. Diferentemente dos materiais concretos, que exigiriam a construção de várias peças, o recurso digital tornou o processo mais ágil e interativo. Como afirmam Carvalho e Silva (2017), "a interação proporcionada por softwares educativos e aplicativos digitais possibilita que os alunos manipulem informações e conceitos, experimentando diferentes cenários e soluções".

Em conclusão, as atividades investigativas realizadas pelos grupos destacaram a importância do trabalho colaborativo, da exploração prática e da utilização de diferentes recursos no ensino do Teorema de Pitágoras. Cada grupo, ao adotar uma abordagem distinta para a demonstração do teorema, contribuiu para uma aprendizagem diversificada, permitindo que os alunos testassem suas hipóteses, discutissem ideias e solucionassem problemas com a intervenção do professor.

8.3 MINIFEIRA- APRESENTAÇÃO DAS DIMENSÕES

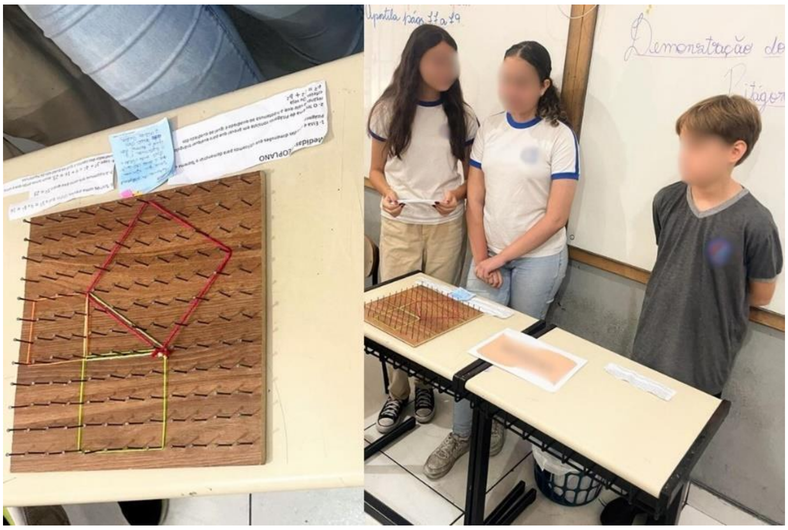
Após a confecção dos materiais, os alunos tiveram uma semana para se preparar para suas apresentações. Esses momentos ocorreram em formato de minifeira, durante duas aulas, com a presença de duas professoras da escola, convidadas para prestigiar os trabalhos. Cada grupo ficou responsável por demonstrar o Teorema em uma de suas respectivas dimensões. Durante as exibições, intervenções foram feitas para avaliar o entendimento dos alunos sobre o tema e observar o desempenho no processo de aprendizagem.

Esse momento indicou a consolidação do entendimento dos estudantes, pois ao articularem o processo de demonstração, refletiram sobre cada etapa da atividade e a explicaram de maneira acessível, o que contribuiu para a compreensão tanto para eles quanto para os colegas. Isso reforça a ideia de Carvalho (2013, p. 49), ao afirmar que "a comunicação dos resultados é um componente vital, pois permite a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento".

Os alunos que representaram o Geoplano organizaram a exposição de forma estruturada, garantindo que cada integrante participasse ativamente. Levaram o material já preparado, com os barbantes posicionados corretamente, e dividiram a explicação em etapas. Iniciaram com uma introdução sobre o Teorema de Pitágoras, destacando como a análise das áreas permite comprovar sua validade para triângulos retângulos. Em seguida, detalharam o processo de construção, começando pelo triângulo retângulo com catetos de 3 e 4 unidades. A partir dessas medidas, envolveram os barbantes formando os quadrados sobre cada cateto e sobre a hipotenusa, utilizando cores diferentes para facilitar a visualização das proporções.

Por fim, demonstraram que, ao somar as áreas dos quadrados menores, obtinha-se a área do quadrado formado sobre a hipotenusa, comprovando, de maneira prática e visual, a relação matemática estabelecida pelo teorema.

Figura 37 - Alunos apresentando a Dimensão áreas- Geoplano



Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

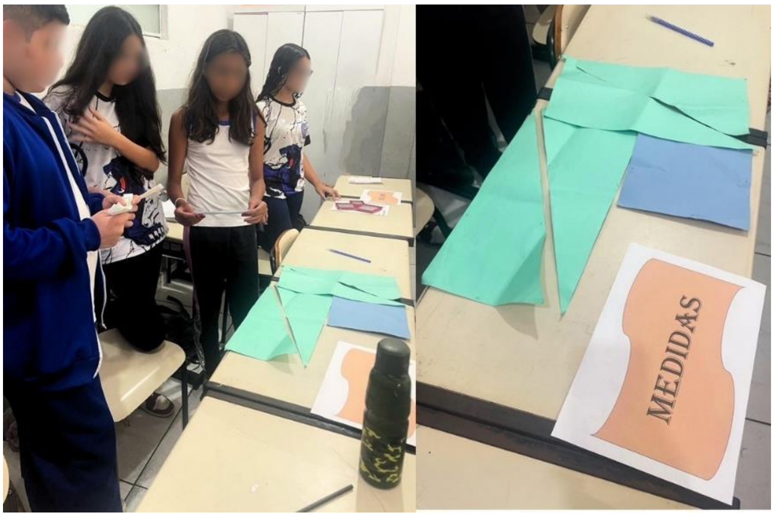
O grupo designado para a demonstração por quadriculações não levou o material manipulável, mas dois alunos presentes se dispuseram a explicar como o processo seria realizado. Eles descreveram que cada quadrado do teorema seria formado por unidades de 1x1 em cores diferentes e, em seguida, reorganizado no quadrado da hipotenusa. Dessa maneira, demonstrariam que a soma das áreas dos quadrados dos catetos equivale à área do quadrado maior, comprovando a validade do Teorema de Pitágoras. Durante a apresentação, enfrentaram algumas dificuldades e recorreram com frequência às instruções fornecidas na etapa anterior.

Figura 38 - Alunos demonstrando o Teorema através de Quadriculações

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Utilizando o recurso do Quebra-Cabeça, os alunos do Grupo de Dimensão Grandezas - Medidas apresentaram duas abordagens para a demonstração do Teorema. Embora a atividade tenha sido complexa, eles mostraram que, ao relacionar com a expressão algébrica, poderiam somar as medidas de cada triângulo com o quadrado. Explicaram que, inicialmente, cortaram os retângulos, que possuem ângulos retos, e, ao traçar a diagonal, formaram dois triângulos retângulos. Em seguida, ao alinhar as peças com a expressão algébrica, detalharam as construções passo a passo, culminando na comprovação do Teorema.

Figura 39 - Alunos apresentando a Dimensão Medidas Quebra- Cabeça



Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

O grupo que trabalhou com a Dimensão Grandeza - Volume contou com a participação de apenas dois alunos na apresentação. Mesmo com uma equipe reduzida, eles conseguiram explicar como o Teorema de Pitágoras também pode ser aplicado na relação com o volume. Utilizou-se de explicação acessível, demonstrando que o teorema, além de comprovar relações entre áreas e comprimentos, pode ser explorado em contextos tridimensionais. A apresentação ressaltou a importância da visualização e da experimentação, permitindo que os colegas compreendessem o conceito de forma visual.

Figura 40 - Alunos demonstrando o Teorema através do Modelo 3D

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O grupo que utilizou a técnica de dobradura para demonstrar o teorema explicou como as dobras no papel ajudam na visualização da relação o Teorema. A manipulação do material permitiu identificar as equivalências entre as áreas e, com o apoio de conceitos algébricos, foram estabelecidas medidas genéricas correspondentes aos catetos e à hipotenusa. Dois alunos se destacaram ao utilizarem papéis de cores diferentes para ilustrar que a soma das áreas dos triângulos, junto ao quadrado menor encontrado com as dobraduras, corresponde à área do quadrado maior. Já os outros dois alunos expressaram dificuldades em compreender a aplicação da álgebra na demonstração, especialmente no que diz respeito à relação entre as áreas e as medidas.

Figura 41 - Alunos apresentando a Dimensão Dobradura

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O grupo que utilizou recortes trouxe dois materiais: um ainda em processo de produção e outro com as peças já recortadas, de modo que cada etapa fosse visualizada pelos espectadores. Ao formar quadriláteros dentro das áreas dos quadrados e somar as respectivas medidas, foi possível identificar um quadrado central que correspondia à área do quadrado de um dos catetos. Ao final, revelou como as peças foram reorganizadas para completar a demonstração.

Figura 42 - Alunos apresentando a Dimensão Recortes

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O último grupo, ao utilizar o Tangram na dimensão tecnológica, demonstrou com precisão a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras. Durante a apresentação, evidenciaram que a relação do teorema se mantém válida para triângulos retângulos de diferentes dimensões. A manipulação das peças permitiu ajustar os quadrados conforme as variações nas medidas, proporcionando uma melhor visualização da matemática e reforçando a compreensão tanto deles quanto dos colegas.

Figura 43 - Alunos apresentando a Dimensão Tecnológica Tangram

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Com base nas narrativas dos alunos e nas formas de apresentação utilizadas, foi possível observar que, apesar das dificuldades enfrentadas ao longo do processo, eles conseguiram expressar, com suas próprias palavras, diferentes formas de representar o teorema. Além disso, demonstraram diversos caminhos possíveis para o entendimento de um tema que será fundamental para o seu aprendizado nos próximos anos. Essa diversidade de abordagens reflete não apenas a riqueza de perspectivas dos alunos, mas também a importância de proporcionar oportunidades para que desenvolvam habilidades de pensamento crítico e autonomia na construção do conhecimento.

Ao final da atividade, foi aplicado um questionário sobre os conhecimentos adquiridos, cuja finalidade era compará-los com os dados do questionário prévio, modelo disponível no Apêndice F.

Este percurso teve como proposta favorecer a identificação, construção e compreensão do Teorema de Pitágoras pelos próprios alunos, a partir de suas interações e vivências em grupo. A expectativa era que participassem de discussões construtivas, favorecendo um aprendizado conjunto. Ao final, cada grupo pôde compartilhar sua compreensão de forma espontânea, utilizando materiais manipuláveis para explicar o teorema de maneira simples e interativa, a partir de suas próprias palavras.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo possibilitou reflexões sobre o ensino da Matemática e os caminhos que podem ser percorridos para desenvolver a aprendizagem dos estudantes. Mais do que apenas apresentar resultados, este capítulo busca ampliar a discussão que alinha o referencial teórico, a pesquisa participativa do professor e a produção de dados ao longo do trabalho no contexto da educação atual.

Desde o início desta pesquisa, buscou-se responder à seguinte questão: "Qual é a percepção dos alunos sobre a importância do uso de materiais manipuláveis integrados a atividades investigativas no ensino do Teorema de Pitágoras?" Essa indagação surgiu a fim de compreender como esses recursos impactam o aprendizado, não apenas do ponto de vista da assimilação de conceitos matemáticos, mas também em relação ao desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e do interesse dos alunos pela disciplina.

Com isso, para responder a questão do trabalho, estabeleceu-se como um dos principais objetivos: identificar e analisar as contribuições dos materiais manipuláveis associados a metodologias investigativas para o aprendizado do Teorema de Pitágoras em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. Os resultados demonstraram que esses materiais, quando utilizados de forma estruturada e mediada pelo professor, contribuem significativamente para a aprendizagem, o que confirma o alcance desse objetivo.

Para direcionar essa investigação, estabeleceram-se objetivos norteadores, como destacar a importância do uso dos materiais manipuláveis em aulas de matemática; analisar a relação entre Materiais, Professor e Atividade; associar o uso de materiais manipuláveis com a construção da aprendizagem matemática; identificar o processo de aprendizagem por meio da teoria sociocultural; e desenvolver propostas de atividades investigativas que usufruem desses materiais para a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Essas diretrizes permitiram estruturar a pesquisa de maneira a compreender a influência dessas abordagens na assimilação do conteúdo pelos estudantes e avaliar como esses recursos podem contribuir para o ensino da Matemática. O embasamento teórico sustentou a pesquisa participante realizada, confirmando que a interação entre os estudantes e os materiais manipuláveis potencializa a construção do conhecimento matemático. Esse objetivo foi atingido, pois a experiência com os alunos mostrou que eles conseguiram visualizar e compreender melhor o teorema por meio das atividades propostas.

Além disso, a descrição das demonstrações e das atividades utilizadas para aplicar o Teorema de Pitágoras identificou como esses recursos auxiliam na internalização do conceito matemático. A compreensão do teorema não se limita à sua fórmula, mas se fortalece por meio da experimentação prática, permitindo que os alunos visualizem e apliquem o conhecimento em diferentes contextos. Em consonância com as ideias de Vygotsky (2007), que afirma "O aprendizado ocorre por meio da interação social e da mediação de instrumentos culturais", esta pesquisa verificou que os materiais manipuláveis, quando utilizados em um contexto investigativo e mediado pelo professor, potencializam a construção do conhecimento matemático e ampliam as oportunidades de desenvolvimento cognitivo dos alunos, fortalecendo a relação direta entre os Materiais Manipuláveis, a Atividade e o Professor.

Com a produção de dados foi possível verificar que as três etapas realizadas na atividade final permearam um caminho de investigação do começo ao fim, que alinhou a prática sociocultural, a teoria da atividade e o uso dos materiais manipuláveis no ensino da demonstração do Teorema de Pitágoras. Leontiev (1978) argumenta que "o desenvolvimento humano é o resultado das atividades que os indivíduos realizam", o que reforça a importância de considerar a ação dos alunos de forma coletiva até a sua internalização de conceitos. Essa teoria destaca que a necessidade, o objeto e o motivo são elementos essenciais no processo de internalização do conhecimento, elementos que se fizeram presentes na experiência dos estudantes ao explorarem a demonstração do Teorema de Pitágoras por meio das atividades propostas.

A primeira etapa da atividade permitiu que os alunos explorassem os materiais manipuláveis e formulassem hipóteses sobre a situação-problema apresentada, criando um ambiente para a incrementação do tema e favorecendo a autonomia dos estudantes em suas construções. Houve espaço para dúvidas e suposições sobre o Teorema de Pitágoras, o que colaborou com as ideias da turma. Segundo Carvalho (2013), "a formulação de hipóteses é um passo fundamental, pois envolve o aluno em um exercício de previsão e planejamento, crucial para o desenvolvimento do pensamento científico".

A segunda etapa envolveu a mediação do professor para direcionar a investigação e estimular o pensamento crítico e dinamização da construção dos materiais. Como destaca Libâneo (1994), "os materiais manipuláveis, isolados, não garantem a efetividade do ensino. É na articulação com a prática pedagógica que esses recursos ganham significado e se tornam ferramentas valiosas no processo educativo". Dessa forma, a intervenção docente interligada ao material manipulável possibilitou que os alunos estabelecessem conexões entre a teoria e a prática.

Na terceira etapa, os alunos aplicaram seus conhecimentos ao apresentarem, de forma criativa e com suas próprias palavras, o que foi internalizado por eles, alinhando-se à Teoria da Atividade e à teoria sociocultural. Durante essa fase, os estudantes utilizaram materiais manipuláveis para demonstrar seus raciocínios, indicando a importância desses recursos no processo de ensino, pois proporcionou uma melhor assimilação do conteúdo e incentivou a autonomia dos alunos na construção do conhecimento matemático. Como destaca Borin (1997), "os materiais manipuláveis permitem ao aluno explorar e descobrir, promovendo uma aprendizagem ativa e significativa".

Apesar das contribuições positivas, alguns desafios foram observados. No Grupo 4, os alunos enfrentaram dificuldades para encontrar todos os materiais necessários, o que demandou adaptações e soluções criativas, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. No Grupo 3, houve dificuldades na manipulação e organização dos materiais, o que exigiu tempo adicional para a compreensão da atividade. Esse aspecto revela que, embora o objetivo de promover a autonomia tenha sido identificado, alguns alunos necessitaram de maior apoio para concluir a tarefa.

Esses desafios mostram que, apesar da proposta ter promovido um aprendizado mais dinâmico e interativo, houve a necessidade de intervenções e ajustes ao longo do processo. A presença do professor como mediador guiou os alunos na superação das dificuldades para que os objetivos da atividade fossem atingidos.

Porém, por mais que tenha ocorrido dificuldades, foi visto que, através da atividade, o processo de aprendizado passou a ser mais dinâmico, permitindo que os alunos formulassem hipóteses, testassem suas ideias e revisassem seus entendimentos com maior autonomia. Dessa forma, a construção do conhecimento ocorreu de maneira mais interativa, possibilitando que os estudantes desenvolvessem suas próprias estratégias e conexões com o conteúdo trabalhado.

As atividades investigativas impulsionaram um envolvimento notável, no qual os estudantes tornaram-se protagonistas do próprio aprendizado. Além disso, observou-se que a aprendizagem por meio da experimentação ressignificou a percepção dos alunos, de acordo com inúmeras formas de representação de dimensões. A construção de conhecimento, quando mediada por recursos manipuláveis, contribuiu com a aplicação prática dos conteúdos.

Tendo em vista a relevância do tema, observada através da reflexão em relação às perspectivas apresentadas no decorrer do trabalho, desenvolveu-se a motivação da criação de um material que pudesse ajudar os professores na introdução de materiais manipuláveis em sala de aula, com atividades investigativas e sugestões de questionamentos que estimulem a compreensão e a percepção dos alunos acerca da aprendizagem com esses recursos.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua para a busca de novas metodologias de ensino que favoreçam o envolvimento dos estudantes e tornem a aprendizagem mais dinâmica. Novas pesquisas podem explorar outras formas de integrar atividades práticas ao ensino, ampliando as possibilidades de aprendizado para diferentes perfis de alunos.

REFERÊNCIAS

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

BALACHEFF, N. Prova, explicação e raciocínio na educação matemática. *In*: HERBST, P.; CHEVALLARD, U.; CLARK, D. J. (eds.). **O Segundo Manual de Pesquisa sobre a Psicologia da Educação Matemática**. Berlim: Springer, 2019.

BARBOSA, R.M. **DESCOBRINDO PADRÕES PITAGÓRICOS**: GEOMÉTRICOS E NUMÉRICOS. SÃO PAULO: ATUAL, 1993.

BAUER, M. W. GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som:** um manual prático. Tradução de Pedrinho A. Guareschi, 10 ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-posições**, Campinas: FE-Unicamp, Cortez, v. 4, n. 1 (10), p. 18-23, 1993.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20. fev. 2024.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Lisboa: Porto Editora, 2013.

BORIN, J. **Manipulando a Matemática.** São Paulo: IME-USP, 1997.

CARVALHO, A. M. P. **Ensino de Ciências por Investigação:** Condições para a Aplicação em Sala de Aula. São Paulo: Cortez, 2013.

CARVALHO, A.; SILVA, M**. Educação e Tecnologia:** Interatividade e Aprendizagem. Rio de Janeiro: Editora Universitária, 2017.

CERVO, A. L; BERVIAN, P. A. **Metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

COSTA, S. da S.; JESUS, R. A. de. Contribuições da oficina remota "Tangram e o Teorema de Pitágoras" na Educação Básica e na Formação Docente. **Revista Internacional Educon**, [S. l.], v. 2, n. 1, p. e21021010, 2021. DOI: 10.47764/e21021010. Disponível em: https://grupoeducon.com/revista/index.php/revista/article/view/1641. Acesso em: 4 mar. 2024.

CREATIONS, D. **Pythagoras's/ Pythagorean Theorem 3D Working Model**. Math School Project. Ferrero Rocher Recycled. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-nm_8gXeMc4. Acesso em: 23 nov. 2023.

CUNHA, M. I. **A Aula Investigativa e o Desenvolvimento do Pensamento Crítico**: Um Estudo de Caso. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2001.

D’ AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. ANO II. N2. Brasília, 1989. p. 15-19.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23 ed. Campinas: Papirus, 2012a. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. *In*: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012b.

DANIELS, H. (org). **Vygotsky Em Foco:** Pressupostos e Desdobramentos. 2. ed. Campinas: Papirus, 1995.

DAVIDOV, V. **La ensenanza escolar y el desarrollo psiquico**: investigación psicológica teórica y experimental. Moscou: Editorial Progresso, 1988.

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 63, p. 31-36, jun. 2001. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1013. Acesso em: 23 de nov. 2024.

DUARTE, A. M.; YAMAMOTO, F. S. O. Trincas pitagóricas e números figurados: um enfoque histórico para o ensino do Teorema de Pitágoras. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 24, p. 505–526, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6732. Acesso em: 4 mar. 2024.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FAJARDO, R.; MACHADO, S. B. Matemática crítica: o porquê de algumas definições e regras. **Actas del VII CIBEM**, 2013. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/167.pdf. Acesso em: 11 dez. 2022.

FIORENTINI D.; MIORIM, M. Â. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim SBEM-SP - UNICAMP, 2006. Disponível em: http// www.educar.sc.usp.br - acesso em 10 de fev. De 2023.

FREIRE, P**. Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARDNER, H. **Estruturas da Mente:** A Teoria das Inteligências Múltiplas. Porto Alegre: Artmed, 1994.

GEOGEBRA. – Distância entre dois pontos. Disponível em: www.geogebra.org/m /amcykswf. Acesso em: 15 mar. 2024.

GEOGEBRA. – Tangram del Teorema de Pitágoras. Disponível em. www.geogebra.org/m/ hngfkgkz. Acesso em: 15 mar. 2024.

IEZZI, G.; DOLCE, O. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Volume 1: Aritmética e Álgebra. São Paulo: Atual, 2013.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C. A habilidade da visualização frente à sala de aula de Matemática. *In*: KALEFF, A. M. M. R. (org.). **Vendo com as mãos, olhos e mente**: Recursos didáticos para laboratório e museu de educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD / UFF, 2016, p. 27-40.

KINDEL, D. S.; OLIVEIRA, R. de. O uso de materiais manipuláveis na alfabetização Matemática. *In*: MAIA, M. G. B.; BRIÃO, G. F. (orgs.). **Alfabetização matemática**: perspectivas atuais. Curitiba: CRV, 2017, p. 61-81.

LEONTIEV, A. N. **Atividade, Consciência e Personalidade**. São Paulo: Martins Fontes, 1978.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, A. **Temas e Problemas Elementares**. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, M. R.; SOUZA, J. R. O ensino de matemática: desafios e possibilidades. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, v. 22, n. 2, p. 42-57, 2020.

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Teoria da Atividade**: Uma Introdução. Campinas: Editora da Unicamp, 2013.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. 2. ed. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1972.

LORENZATO, S. A. **Ensino de matemática:** da teoria à prática. 3. ed. São Paulo: Editora X, 2016.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática nas Referências na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2009. p. 3-38

LORENZATO, S. **Manipulando ideias matemáticas**. UNICAMP –FE, set. 2002. Mimeografado.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUCENA, R. S. **Laboratório de Ensino de Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

MARQUES, J.; OLIVEIRA, G. S.; PREUSSLER, R. **Analisando a aprendizagem do teorema de pitágoras guiados pela investigação matemática.** IV EIEMAT- 2º Encontro Nacional Pibid Matemática, 2014.

MORÉ, C. B. B. *et al*. Ensino do teorema de Pitágoras utilizando material concreto manipulável. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 9, p. 92523–92529, 2021. DOI: https://doi.org/10.34117/bjdv7n9-423. Disponível em: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/36408. Acesso em: 4 mar. 2024.

MOURA, M. O. **Ensino de matemática**: materiais e métodos. São Paulo: Cortez, 2000.

NARDI, R**. Investigando a Investigação**: Formação Continuada de Professores de Ciências. São Paulo: USP, 2003.

NÓVOA, A. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, A. L. C. **O Teorema de Pitágoras:** demonstrações e aplicações. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT - Universidade Estadual do Ceará Fortaleza, 2013.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1993.

PEREIRA, J. dos S. **Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de Matemática**. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2013.

PEREIRA, J. dos S.; OLIVEIRA, A. M. P. de. Materiais manipuláveis e repertório compartilhado em aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria. **Boletim GEPEM**, n. 69, p. 80–90, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/101/85. Acesso em: 4 dez. 2023.

PEREIRA, R. **A Utilização de Materiais Manipuláveis para o Ensino do Teorema de Pitágoras**. Material Didático (Professor PDE) - UEM, Maringá/PR, 2013. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/. Acesso em: 4 dez. 2023.

PIRES, C.; BRANCO, A. **Materiais Didáticos e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Educacional, 2010.

POLYA, G. **Como resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de José Francisco L. de Oliveira. São Paulo: Cia. das Letras, 1995.

PONTE, J. P**. Investigar para Aprender Matemática**. Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

REGO, C. T. **Vygotsky**. Petrópoles: Vozes, 1994.

SALDANHA, D. Z.; ARAÚJO, A. A. Papelmática: geometria da dobradura. **V Seminário Nacional de Pesquisa em Educação:** Éticas e Políticas, Santa Cruz do Sul - RS, 2014. Disponível em: online.unisc.br. Acesso em: 10 jan. 2024.

SANTOS, R. C. **Material didático e formação docente em matemática**: um estudo sobre práticas pedagógicas. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2019.

SCHUNK, D. H. **Teorias da aprendizagem**: uma perspectiva educacional. Pearson, 2016.

SILVA, F. F. **Explorando o Teorema de Pitágoras na perspectiva do pensamento crítico e criativo em matemática**. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade de Brasília (UnB), Brasília, 2023. Disponível em: http://www.realp.unb.br/jspui/bitstream/10482/47455/1/. Acesso em: 10 jan. 2024.

SILVA, T. A. **Aprendizagem colaborativa**: práticas e teorias. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

SILVEIRA A. A. F.; BELO T. J. (RE)Descobrindo o Teorema de Pitágoras: uma experiência com materiais didáticos manipuláveis. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 52–64, 2020. DOI: 10.36524/saladeaulav9i1.765. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/765.Acesso em: 4 mar. 2024.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10. ed. Tradução: Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro; São Paulo: Record, 2004.

SMOLKA, A. L. B.; GÓES, C. **A linguagem e o outro no espaço escolar**: Vygotsky e a construção do conhecimento. Campinas: Papirus, 1993.

SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. *In*: **I ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, IV JORNADA DE PRÁTICA DE ENSINO, XIII SEMANA DE PEDAGOGIA DA UEM**, Maringá, 2007. Arq. Mudi. Periódicos.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

VALLE, E. M.; SALLES, A. **Materiais didáticos e o processo de ensino- aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **Historia del desarrollo de lãs funciones psíquicas superiores**. La Habana: Científico-Técnica, 1987.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Editora 34, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A- Levantamento Bibliográfico na BDTD

INSTITUIÇÃO	NÚMERO DE TRABALHOS	TIPO		TÍTULOS
UPF	1	Dissertações	1	"O uso de materiais manipuláveis no ensino da operação de divisão de números naturais com alunos surdos"
		Teses	0	
UCS	1	Dissertações	1	Formação continuada de professores dos anos iniciais: materiais manipuláveis ou digitais para a compreensão de conceitos de matemática básica
		Teses	0	
UNICENTRO	1	Dissertações	0	"Tecnologia assistiva 3m: material manipulável de multiplicação para aprendizagem do conceito matemático ao estudante cego na perspectiva inclusiva."
		Teses	1	
UFU	1	Dissertações	1	"O ensino da matemática para alunos surdos: metodologias para os primeiros anos do ensino fundamental
		Tese	0	
UFRN	1	Dissertações	1	"Calculando distância em geometria espacial usando material manipulável como recurso didático"
		Teses	0	
UFOPA	1	Dissertações	1	A utilização de materiais concretos no ensino de fração
		Tese	0	
UFOP	1	Dissertações	1	"Abordagem histórico cultural em sala de aula inclusiva de Matemática : o processo de apropriação do conceito da função derivada por um aluno cego.
		Teses	0	
UFSM	1	Dissertações	1	Isometrias e homotetias: teoria e aplicações com o GeoGebra e materiais manipulativos
		Teses	0	
UFAL	1	Dissertações	1	"A utilização do laboratório de matemática para o ensino e aprendizagem de trigonometria no 2º ano do Ensino médio"
		Teses	0	
UFPE	1	Dissertações	1	"Conversões entre representações de números racionais : limites e possibilidades no uso de material manipulável"
		Tese	0	
UEPB	4	Dissertações	4	"GeometriRA: proposta didática unindo realidade aumentada, materiais manipuláveis, ludicidade e gamificação para o Ensino Fundamental" "Práticas de Ensino de Matemática: Análise praxeológica de materiais de apoio para surdos" "Ensino de Geometria: Construção de materiais didáticos manipuláveis com alunos surdos e ouvintes." "A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos"
		Teses	0	
UTFPR	4	Dissertações	4	"Origami e os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele" "Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica" "Ensino de grandezas e medidas: uma proposta com materiais didáticos manipuláveis para o 6º do ensino fundamental." "GeoPlexo: um material manipulável para o ensino dos números complexos"
		Teses	0	

INSTITUIÇÃO	NÚMERO DE TRABALHOS	TIPO		TÍTULOS
UFRRJ	2	Dissertações	2	"Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência em uma turma de segundo ano do ensino médio da rede pública" "Estudo de áreas e de perímetros de polígonos, com o auxílio do geoplano e do papel quadriculado, numa turma de sétimo ano do ensino fundamental de uma escola pública"
		Teses	0	
USP	3	Dissertações	3	"Uma proposta de introdução ao conceito de equivalência para o ensino de equações de primeiro grau com uma incógnita com foco em estudantes com um histórico de dificuldades de aprendizagem." "Geometria espacial no ensino médio: aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis" "Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros"
		Teses	0	
UNESP	2	Dissertações	2	"Aspectos sobre o ensino de matemática e a inclusão de estudantes cegos: reflexões a partir de falas e práticas de professoras" "Uma investigação sobre a utilização de materiais didáticos manipuláveis e a resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental"
		Teses	0	
UFBA	2	Dissertações	2	"Uso de dobraduras como ferramenta de aprendizagem sobre quadriláteros notáveis na educação básica" "Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de matemática"
		Teses	0	
UFG	2	Dissertações	2	"Desenho geométrico e os materiais manipuláveis – aliados no ensino da Geometria" "Objeto de aprendizagem hiperligado com materiais manipuláveis para o ensino de geometria espacial para alunos com baixa visão na educação básica"
		Teses	0	
UFPR	2	Dissertações	2	"Materiais manipuláveis e recursos digitais no ensino de trigonometria" "Materiais didáticos manipuláveis e registros de representações : a compreensão matemática de estudantes."
		Teses	0	
UFN	3	Dissertações	3	"Estudo de conceitos de álgebra com o auxílio de materiais manipuláveis." "Princípio aditivo e multiplicativo: explorando o pensamento combinatório por meio da resolução de problemas e com uso de materiais manipuláveis e jogos" "Formação em exercício de professores dos anos iniciais: habilidades visuais no ensino e aprendizagem de geometria"
		Teses	0	
UFSCAR	2	Dissertações	2	"Teorema de Pitágoras: uma proposta de ensino e aprendizagem para alunos deficientes visuais" "Frações: estratégias lúdicas no ensino da matemática"
		Teses	0	
UFJF	3	Dissertações	3	"As relações pedagógico-metodológicas vivenciadas entre professores que ensinam matemática em um laboratório virtual "A utilização do Laboratório de Educação Matemática na escola: experiências com professores que ensinam matemática." "Ensino e aprendizagem de geometria no 8 º ano do ensino fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos."
		Teses	0	

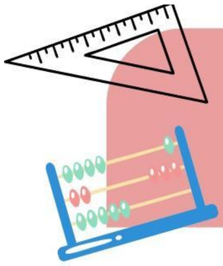
APÊNDICE B- Levantamento bibliográfico selecionado na BDTD

INSTITUIÇÃO	NÚMERO DE TRABALHOS	TIPO		TÍTULOS
UFSC	1	Dissertações	0	"A pedagogia da escola nova e a concepção de concreto: o ensino dos saberes elementares matemáticos no paraná (1920- 1960)"
		Teses	1	
UFPA	1	Dissertações	1	"Laboratório de etnomatemática da Amazônia Tocantina."
		Teses	0	
UFMT	1	Dissertações	1	"Ensino aprendizagem dos números inteiros no ensino fundamental : um olhar sobre as teses e dissertações produzidas no Brasil entre os anos de 2009 a 2019."
		Teses	0	
UFERSA	1	Dissertações	1	"A mosca, a formiga e a gota de mel: um estudo de caso utilizando a sequência fedathi na formação de conceitos da geometria espacial através de abordagens alternativas."
		Tese	0	
UEM	1	Dissertações	1	"Área da superfície e volume de prismas e cilindros."
		Tese	0	
UFT	2	Dissertações	2	"O ensino de Matemática: uma abordagem do MDC com alunos surdos." "Letramento matemático: ensino de geometria para alunos com deficiência intelectual da segunda série do ensino médio."
		Tese	0	
UFAM	1	Dissertações	1	"Hometetia e semelhança de triângulos: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos e manipuláveis."
		Teses	0	
UFPEL	1	Dissertações	1	"O ensino de frações para crianças em situação de vulnerabilidade."
		Teses	0	
UFPE	1	Dissertações	1	"Conversões entre representações de números racionais: limites e possibilidades no uso de material manipulável"
		Tese	0	

APÊNDICE C- Levantamento bibliográfico através do Portal CAPES

INSTITUIÇÃO	NÚMERO DE TRABALHOS	TIPO	TÍTULOS
UFSC	1	Dissertações 0 Teses 1	"A pedagogia da escola nova e a concepção de concreto: o ensino dos saberes elementares matemáticos no paraná (1920-1960)."
UFN	1	Dissertações 1 Teses 0	"Estudo de conceitos de álgebra com o auxílio de materiais manipuláveis."
PUC-SP	1	Dissertações 1 Teses 0	"Estudo sobre os conhecimentos dos professores de matemática na construção do processo de generalização."
UFU	1	Dissertações 1 Tese 0	"O ensino da matemática para alunos surdos: metodologias para os primeiros anos do ensino fundamental
UFRRJ	2	Dissertações 2 Teses 0	"Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência em uma turma de segundo ano do ensino médio da rede pública" "Estudo de áreas e de perímetros de polígonos, com o auxílio do geoplano e do papel quadriculado, numa turma de sétimo ano do ensino fundamental de uma escola pública"
UFJF	1	Dissertações 1 Teses 0	Ensino e aprendizagem de geometria no 8° ano do ensino fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos
UEPB	2	Dissertações 2 Tese 0	"A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos." "GeometriRA: proposta didática unindo realidade aumentada, materiais manipuláveis, ludicidade e gamificação para o Ensino Fundamental."

APÊNDICE D- Questionário de conhecimentos prévios



CONHECIMENTOS PRÉVIOS SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS

ALUNO

DATA:

1**)** Com suas palavras, como você descreve o Teorema de Pitágoras?

2) Em que tipo de triângulo o Teorema de Pitágoras é aplicável?

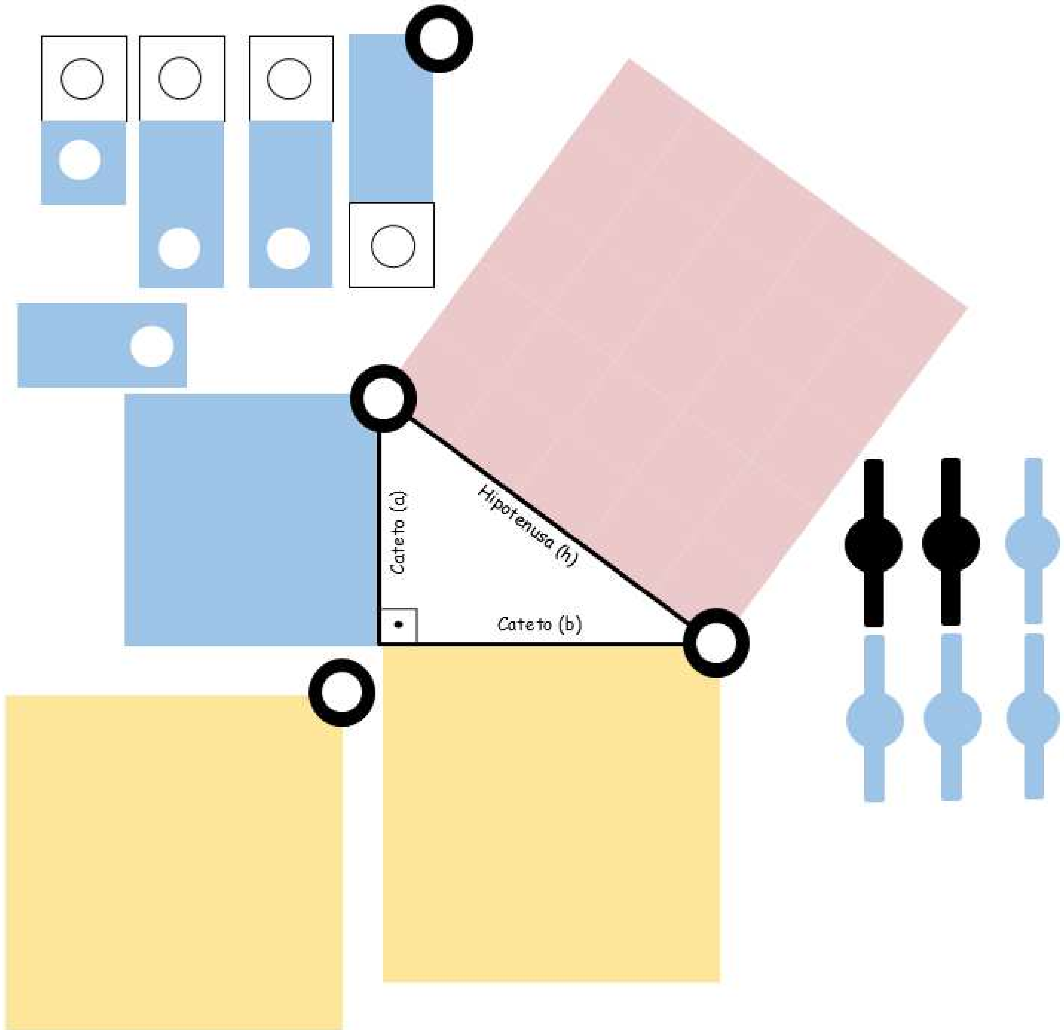
3) Quais são as características de um triângulo retângulo?

4) Qual é a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de acordo com o teorema?

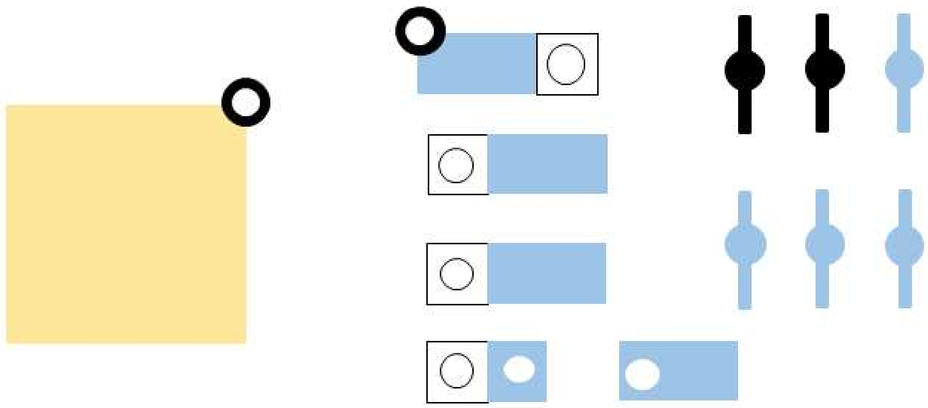
5) Como o Teorema de Pitágoras pode ser usado para calcular distâncias em um mapa?

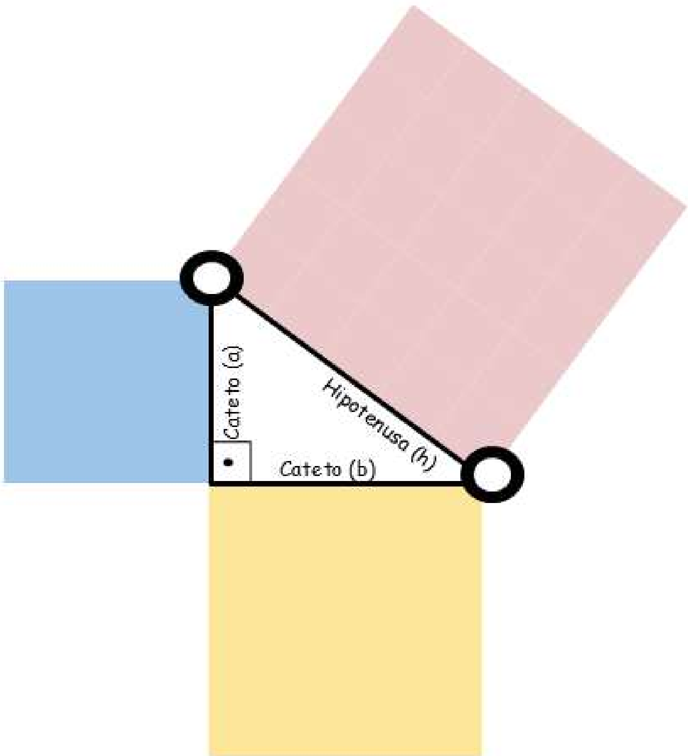
6) Além de resolver problemas geométricos, você pode pensar em alguma aplicação do Teorema de Pitágoras ? Descreva uma situação do cotidiano em que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado para resolver um problema prático.

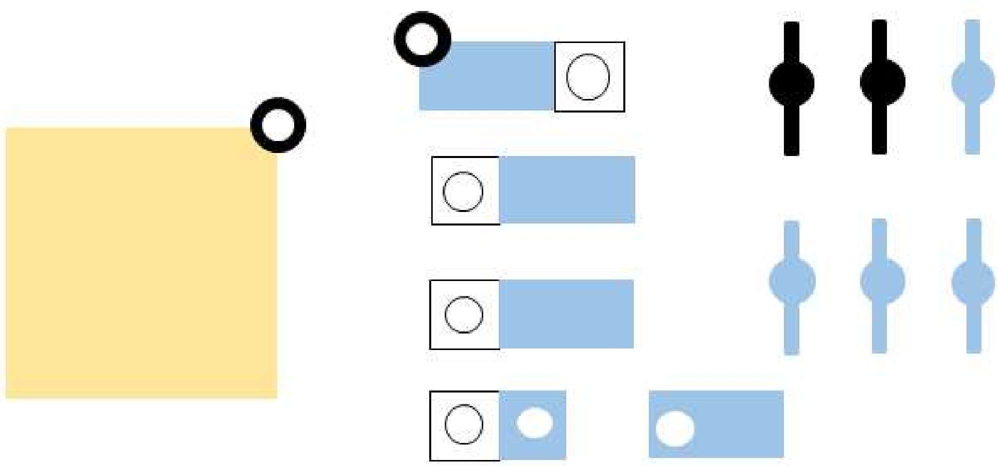
APÊNDICE E- Material Manipulável



Peças para recortar




Cateto (a)
Hipotenusa (h)
Cateto (b)



APÊNDICE F- Questionário de conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras

CONHECIMENTOS SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS

ALUNO

DATA:

1)Escreva com suas palavras o que é Teorema de Pitágoras:

2)Qual a fórmula matemática que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

3)Qual tipo de triângulo que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

4) Em quais situações podemos usar o Teorema?

5)Você realizou a atividade? Se não, qual foi o motivo ?

6)Durante a atividade, como os materiais que utilizaram , ajudaram a demonstrar o Teorema de Pitágoras?