UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

CONSTRUINDO CONHECIMENTO: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS UTILIZANDO MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Jennefer da Costa Condak Monteiro
Marco Antônio Escher

Juiz de Fora
2025

Caro leitor,

É com grande satisfação que apresentamos este material educacional, fruto de uma pesquisa comprometida com a melhoria do ensino de Matemática, especialmente no que se refere à compreensão da demonstração do Teorema de Pitágoras. A motivação para a construção deste produto partiu da busca por uma abordagem mais atrativa aos estudantes do Ensino Fundamental, que muitas vezes enfrentam desafios ao lidar com abstrações matemáticas.

Sabemos que a demonstração de teoremas é um aspecto formativo do pensamento lógico-matemático dos alunos. No entanto, sua abordagem em sala de aula, muitas vezes centrada apenas na exposição teórica, pode dificultar sua compreensão. Diante disso, este material propõe um caminho alternativo, fundamentado no uso de atividades investigativas e materiais manipuláveis, permitindo que os alunos construam conhecimentos de forma ativa.

Além de favorecer a visualização e a experimentação, essa abordagem incentiva a colaboração e o diálogo entre os alunos, desenvolvimento do raciocínio crítico e da autonomia. A interação com materiais manipuláveis auxilia na transição entre o pensamento empírico e o abstrato.

Outro aspecto relevante deste material é a valorização do erro como parte do processo de aprendizagem. Ao manipular os materiais e testar diferentes estratégias, os alunos são incentivados a refletir sobre suas hipóteses e revisar suas conclusões, promovendo um ambiente de experimentação que se assemelha ao pensamento matemático.

Esperamos que este material possa servir como um recurso valioso para professores e alunos, auxiliando na construção de um ensino mais investigativo e autônomo. Que possamos, juntos, transformar a maneira como a matemática é ensinada e aprendida, tornando-a uma experiência mais interativa e significativa para todos.

Boa leitura e excelente trabalho!

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi criado como parte de um projeto desenvolvido para o Mestrado em Educação Matemática da UFJF, com o objetivo de oferecer aos professores recursos que tornam o ensino do Teorema de Pitágoras mais dinâmico e interativo. A proposta utiliza atividades investigativas com materiais manipuláveis, permitindo que os alunos explorem e compreendam a demonstração do Teorema de maneira prática. O intuito é conectar conceitos abstratos à realidade dos estudantes de forma acessível.

Além disso, o material proporciona a oportunidade de explorar o Teorema de Pitágoras em diferentes contextos, abordando não apenas a geometria plana, mas também suas aplicações em grandezas, situações tridimensionais e até no uso de ferramentas tecnológicas. Essa diversidade de abordagens amplia a compreensão dos alunos e enriquece sua visão sobre o teorema.

Para apoiar o desenvolvimento do raciocínio crítico, o produto inclui sugestões de perguntas que os professores podem utilizar durante as atividades. Essas questões têm o objetivo de incentivar os alunos a refletirem e discutirem o teorema, o pensamento crítico em relação ao desenvolvimento do conhecimento matemático.

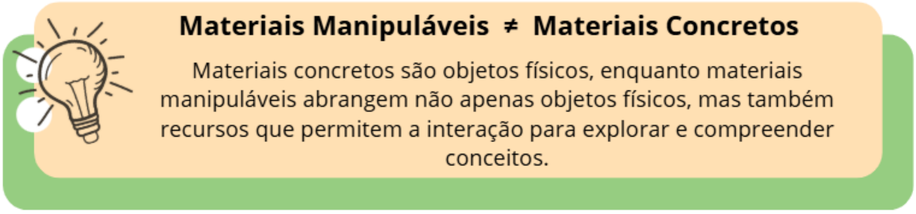
Ao adotar esse material, os professores terão recursos que promovem a aprendizagem ativa e colaborativa, estimulando os alunos a participarem da construção do conhecimento.

Por fim, as atividades propostas podem ser adaptadas conforme o contexto da turma, permitindo que o professor personalize o ensino de acordo com as necessidades e características dos alunos, tornando o aprendizado mais relevante.

2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Os materiais manipuláveis, conforme definido por Kindel e Oliveira (2017), são objetos, instrumentos ou outros meios, que têm aplicação nos afazeres do dia a dia, ou que são utilizados para representar uma ideia, e que os estudantes podem sentir, tocar, manipular e movimentar para ajudá-los a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diferentes fases de aprendizagem.

Figura 1- Materiais Mnipuláveis- Materiais Concretos



Fonte: Produzido pela Autora (2024)

Ressalta-se a importância da utilização desses materiais, por meio de representações visuais ou táteis, o qual, por sua vez, ao ser utilizado, possibilitará uma nova forma de aquisição do conhecimento. A utilização é relevante, pois, segundo Kaleff e Rosa (2016), a construção de uma imagem mental de um conceito matemático pode ser desafiadora para alguns alunos.

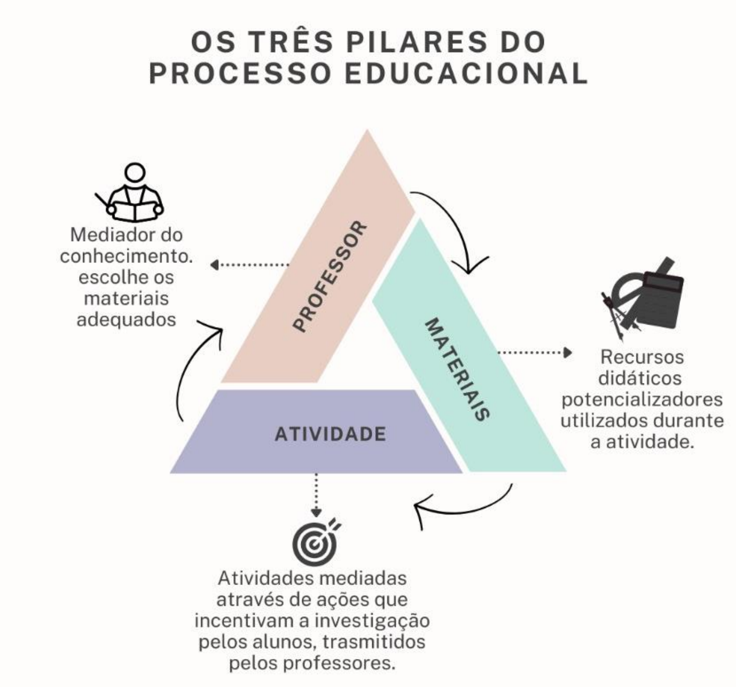
Além disso, a familiarização com a Matemática desde cedo, por meio de métodos pedagógicos e materiais didáticos apropriados, contribui para a desconstrução da imagem de que essa ciência é inacessível. Quando os alunos têm a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma manipulativa e contextualizada, eles passam a enxergar a Matemática não como um conjunto de fórmulas e regras desconectadas, mas como uma disciplina viva e relevante para a compreensão do mundo.

Nesse processo, a investigação no contexto educacional surge como uma abordagem pedagógica que complementa essa visão, incentivando os alunos a explorarem, questionarem e descobrirem conhecimentos por meio de atividades práticas e reflexivas. Fundamentada em teorias sociointeracionistas, a investigação coloca os alunos no centro do processo de aprendizagem, promovendo uma participação ativa.

Conforme descrito por Núñez (2009, p. 94), a sequência proposta por Galperin "[...] consiste em primeiro, encontrar a forma adequada da ação; segundo encontrar a forma material de representação da ação e terceiro, transformar essa ação externa em interna". Dessa forma demonstra que a internalização não ocorre de forma instantânea, mas sim como uma transição gradual que exige a participação ativa dos alunos em atividades cuidadosamente planejadas. Recomenda-se que o professor elabore estratégias que favoreçam essa transição, utilizando recursos que representem concretamente as ações a serem aprendidas.

Sendo assim, pode-se descrever uma interligação entre os três pilares formativos para aprendizagem dos alunos: o ***professor***, a ***atividade*** e os ***materiais***. Esses pilares são interdependentes e se complementam, formando a base do processo educativo.

Figura 2- Pilares do Processo Educacional

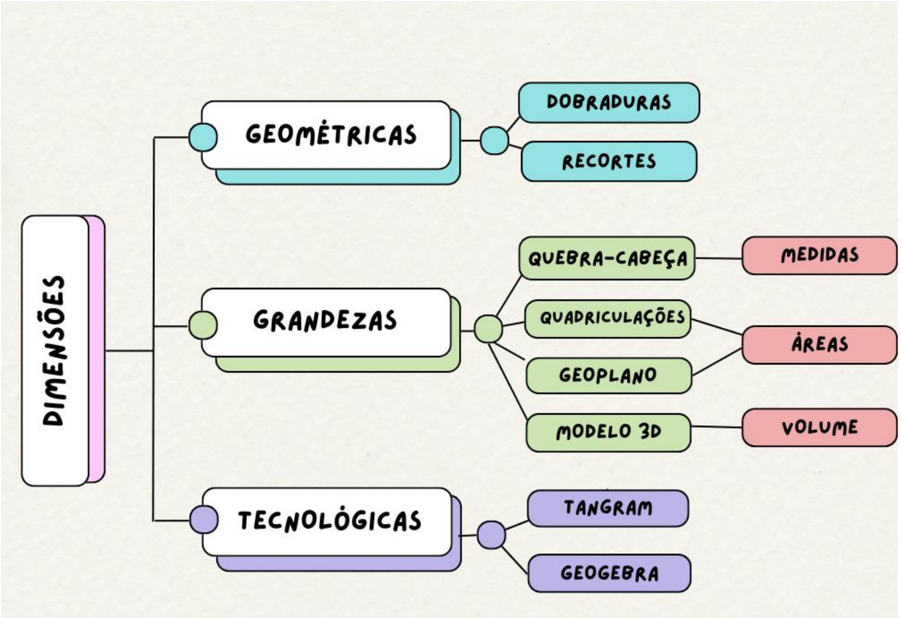


Fonte: Produzido pela autora (2024)

3 ATIVIDADES PROPOSTAS

As atividades propostas envolvem a demonstração do Teorema de Pitágoras, um dos fundamentos da geometria euclidiana, utilizando diferentes tipos de materiais manipuláveis. São exemplos que você, professor, poderá usar em suas aulas, incluindo os tipos de materiais, os procedimentos a serem seguidos e sugestões de intervenções.

Figura 3 - Dimensões das Demonstrações



Fonte: Produzido pela autora

3.1 DIMENSÃO GEOMÉTRICA

Refere-se à abordagem visual e espacial utilizada para ajudar os alunos a compreenderem as relações entre as figuras geométricas envolvidas no teorema. Essa dimensão foca em explorar as propriedades dos triângulos retângulos e os quadrados construídos sobre seus lados, sendo realizada através da visualização espacial, estabelecendo entre si a relação entre áreas dos quadrados. Será apresentada através de dobraduras e cortes de figuras geométricas.

3.1.1 Dobraduras

O método de dobraduras em um papel, utiliza-se de *origami* [1], para demonstrar o teorema de Pitágoras. Essa atividade foi retirada do trabalho intitulado como: "Papelmática:

[1] Origami- é a arte de dobrar papel, uma tradição milenar do Japão. A palavra vem do japonês ori, que significa "dobrar", e kami, que significa "papel".

geometria da dobradura" (Saldanha; Araújo, 2014). Para isso serão apresentados os materiais indicados e os procedimentos da atividade.

- ***MATERIAIS:***

  - Papel em formato de um quadrado e lápis de cor.

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **1º MOMENTO - DIVIDIR UM SEGMENTO DA FOLHA EM TRÊS PARTES IGUAIS**

I- Com uma folha quadrada de vértices ABCD, faça uma dobra, coincidindo o vértice A com o vértice D e o vértice B com o vértice C. Ao dobrar o lado $\overline{AD}$ do quadrado encontramos um ponto formado pelo cruzamento entre a dobra e o lado, denomine-o por E. Da mesma forma marque o ponto F no lado $\overline{BC}$ do seu quadrado. (Os pontos E e F são pontos médios dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ respectivamente.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que vocês perceberam ao dobrar o papel dessa forma?
- Como os pontos E e F se relacionam com os segmentos AD e BC? O que eles são dos lados AD e BC?

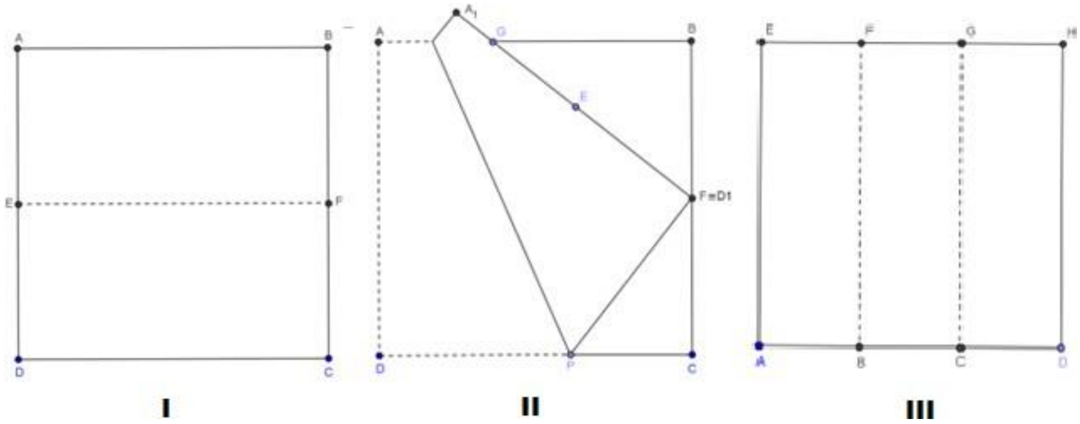
II - Faça o ponto D coincidir com o ponto F. Com isso, terá A_1 como a imagem do ponto A e D_1 como a imagem do ponto D. Assim, terá o ponto G, gerado pela intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A_1D_1}$.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Que figura foi formada ao observarmos os pontos PCF? O que se pode afirmar sobre o angulo C formado?
- Este triangulo é retângulo? Explique sua resposta.

III – Dobra-se a folha de forma que o ponto B coincida com o ponto G. Em seguida, faz-se outra dobra até que o lado do quadrado seja alcançado, dividindo o segmento em três partes iguais.

Figura 4 - Dimensão Geométrica utilizando Dobradura



Fonte: Saldanha; Araújo (2014)

- **2º MOMENTO - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA**

IV Utilizando o mesmo quadrado de papel, com seus vértices nomeados como "A, D, H e E", repita o procedimento anterior, dividindo os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$ em três partes iguais. Isso resultará nos pontos I e J, fazendo com que o quadrado original seja subdividido em 9 quadrados menores.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - O que representam os pontos I e J na divisão dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$??
  - O que aconteceu com o quadrado original após essa nova divisão?
  - Quantos quadrados menores foram formados? Eles possuem a mesma área?

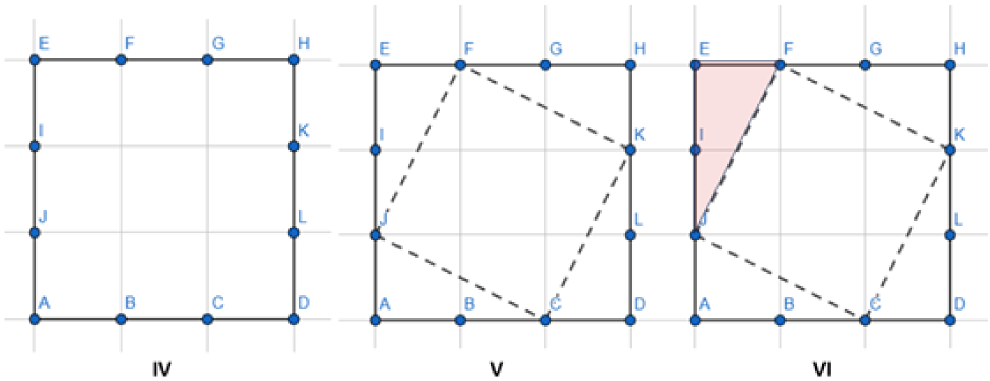
V - Faça as dobraduras levando o ponto C a J, J a F, F a K e K a C. Com isso, obtêm-se o quadrado CJFK, como mostrado a seguir.

VI- Desta forma aparece no final: um quadrado ADHE com medida de área $(a+b)^2$ contendo 4 triângulos com medida de área $\frac{ab}{2}$ mais um quadrado com área igual a c^2. Peça que pinte os triângulos de uma cor e o quadrado de outra cor para melhor visualização.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que mudou na figura após essas dobraduras?
- Como o quadrado CJFK está posicionado em relação ao quadrado original ADHE?
- Quais são os elementos geométricos que surgiram após as dobraduras?
- Como podemos expressar a área do quadrado ADHE matematicamente?
- Quantos triângulos foram formados e como eles se relacionam entre si?
- Qual a área de cada triângulo em relação às dimensões a e b?
- Como a área total do quadrado ADHE pode ser escrita em termos das áreas dos triângulos e do quadrado CJFK? Como essa relação pode ser usada?
-

Figura 5 - Dimensão Geométrica utilizando Dobradura-2º Momento



Fonte: Produzido pela autora

Logo, tem-se que: $(a + b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$

Então $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$.

Simplificando, $a^2 + b^2 = c^2$

3.1.2 Recortes

Para essa dimensão pode ser utilizado o método de Perigal. Essa abordagem envolve a divisão de figuras geométricas em partes menores que podem ser rearranjadas para formar outras figuras, mantendo a mesma área total. Aplicando no Teorema, mostra-se como os quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo podem ser recortados e reorganizados para formar o quadrado sobre a hipotenusa.

- ***MATERIAIS:***

 - Duas folhas de cores diferentes com tamanhos predeterminados, pois, ao utilizar o compasso, tem uma limitação; uma folha branca; compasso; fita adesiva; tesoura e régua.

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **1º MOMENTO - CORTE DE QUADRADOS E DEMARCAÇÃO DAS DIAGONAIS**

I - Para iniciar a atividade, distribua folhas coloridas aos alunos e instrua-os a cortar dois quadrados de tamanhos e cores diferentes. A técnica do origami será utilizada para garantir precisão.

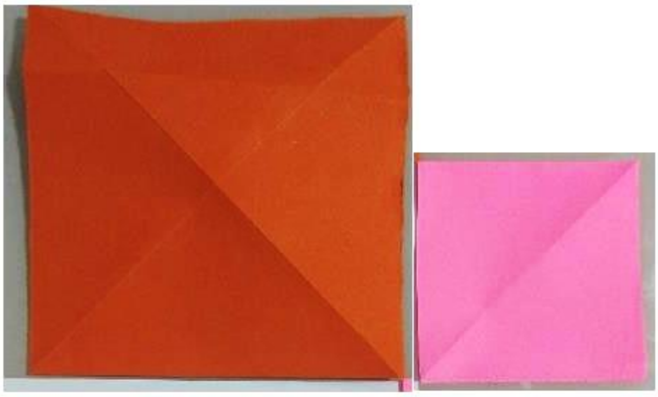
II - Dobre o quadrado maior ao meio, de canto a canto, formando um triângulo retângulo. Esta dobra marca uma das diagonais do quadrado. Desdobre o papel, deixando visível o vinco da diagonal.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que vocês perceberam após dobrar o quadrado maior ao meio? O que acabamos de descobrir?
- Que tipo de figura geométrica foi formada com essa dobra?

III - Repita o processo de dobrar o quadrado ao meio, desta vez unindo os dois outros cantos, formando novamente um triângulo retângulo e marcando a segunda diagonal. Em seguida, desdobre o papel. Agora, as duas diagonais estarão demarcadas, cruzando-se no centro do quadrado. O ponto de interseção das diagonais é nomeado como "O".

Figura 6 - Dimensão Geométrica utilizando método de Perigal



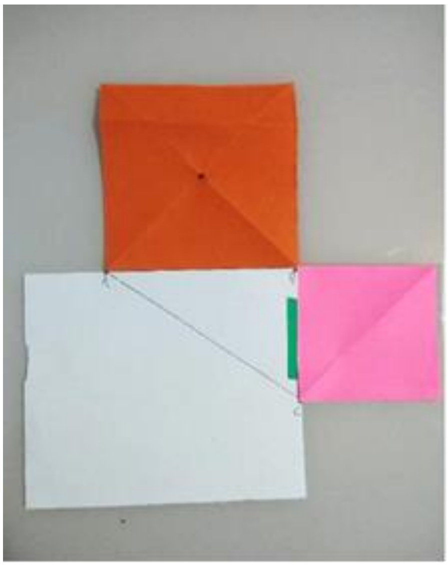
Fonte: Produzido pela autora

- **Sugestões de Perguntas :**
  - O que acabamos de encontrar? Como podemos nomear esse ponto?

- **2º MOMENTO - MONTAGEM DO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM QUADRADOS**

IV - A atividade continua com a utilização de uma folha branca como suporte para colar os quadrados cortados e formar um triângulo retângulo, utilizando fita adesiva, de modo que seus lados fiquem paralelos às bordas da folha como mostra a figura.

Figura 7- Dimensão Geométrica utilizando método de Perigal- 2º Momento



Fonte: Produzido pela autora

V - Deve-se colar o segundo quadrado colorido de modo que forme um ângulo de 90° com o primeiro, utilizando a borda de um dos lados do primeiro quadrado como referência. Os quadrados devem se tocar em apenas um ponto.

VI - Desse modo, encontra-se dois segmentos: $\overline{AB}$ (segmento do quadrado maior) e $\overline{BC}$ (segmento do quadrado menor). A partir desse momento, trace um segmento com os vértices A e C, formando, assim, o triângulo retângulo ABC retângulo em C.

- **Sugestões de Perguntas :**
  - Qual ângulo é formado no encontro dos quadrados?
  - Qual figura encontramos unindo os vértices A e C dos quadrados?
  - O que se pode dizer dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$? O que são do triângulo retângulo?

- **3º MOMENTO- APLICAÇÃO DO MÉTODO DE PERIGAL**

VII - Trace um segmento que seja paralelo à hipotenusa $\overline{AC}$ do triângulo retângulo ABC e que passe pelo ponto "O", o ponto de interseção das diagonais dos quadrados. Nomeie este segmento como $\overline{FG}$..

VIII - Trace outro segmento que seja perpendicular a $\overline{FG}$.e que passa pelo ponto “O”, utilize o compasso novamente.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - Ao traçar o segmento $\overline{FG}$., o que aconteceu com o ponto “O”? O que ele representa no contexto da atividade?

- **4º MOMENTO- DISSECÇÃO DAS FIGURAS ENCONTRADAS**

IX - O quadrado ABDE, construído sobre o cateto maior $\overline{AB}$,, é dissecado em quatro partes congruentes, formando 4 quadriláteros.

X - As quatro partes dissecadas do quadrado ABDE são somadas ao quadrado menor, localizado sobre o cateto $\overline{BC}$, completando assim o quadrado sobre a hipotenusa ACML.

XI - As áreas combinadas das figuras resultantes completam exatamente a área do quadrado ACML, que está sobre a hipotenusa. Esse rearranjo demonstra a expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

- **Sugestões de Perguntas:**
  - O que acontece quando você divide o quadrado ABDE, construído sobre o cateto maior $\overline{AB}$? Quais figuras são formadas?
  - O que acontece quando você soma as quatro partes dissecadas do quadrado ABDE ao quadrado menor sobre o cateto $\overline{BC}$?
  - Por que é importante perceber que as áreas combinadas das figuras resultantes formam o quadrado ACML?

3.2 DIMENSÃO GRANDEZAS

O uso de materiais como miçangas, canudos e folhas de papel coloridas pode ajudar a destacar as dimensões de comprimento e área, proporcionando uma percepção mais concreta das grandezas matemáticas envolvidas. Dessa forma, a aprendizagem se torna mais dinâmica e interativa, possibilitando que os estudantes internalizem os conceitos fundamentais de grandezas.

3.2.1 Quebra-cabeça (Medidas)

Para essa atividade será utilizado o método de demonstração por Bhaskara, com um quebra-cabeça de figuras geométricas. Para seguir tal método, é necessário analisar não apenas a forma de trocar as peças de lugar, mas também reconhecer os dois triângulos construídos a partir de um retângulo (Pereira, 2013).

- ***MATERIAIS:***

  - Cartolina ou E.V.A de duas cores diferentes; tesoura; régua; compasso.

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **1º MOMENTO- RECORTAR AS FIGURAS**

I - Construa dois retângulos, cada um medindo 10 cm por 5 cm, em papel cartolina. Em seguida, trace a diagonal de cada retângulo, dividindo-os em dois triângulos retângulos. Ao recortar os retângulos ao longo dessas diagonais, obter-se-ão quatro triângulos retângulos idênticos.

➢ **Sugestões de Perguntas :**

- O que aconteceu com os retângulos depois que traçamos a diagonal e recortamos?
- Quais tipos de triângulo foram formados?

II - Em seguida, utilizando uma cartolina de cor diferente, construa um quadrado com lados de 5 cm, ou seja, a mesma medida de um dos lados dos retângulos apresentados anteriormente. Esse quadrado será utilizado na montagem das figuras geométricas.

➢ **Sugestões de Perguntas :**

- Como o tamanho desse quadrado se relaciona com os retângulos que cortamos anteriormente?
- O que podemos observar ao comparar esse quadrado com os triângulos obtidos na etapa anterior?

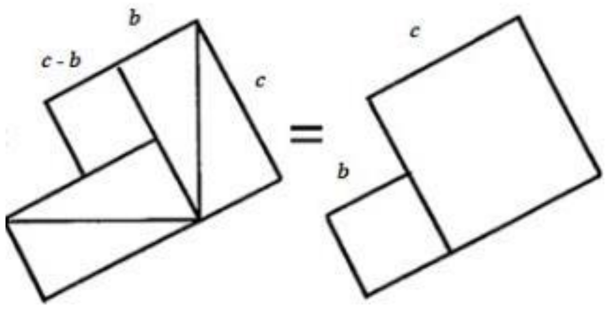
➢ **2º MOMENTO- REMANEJAR AS FIGURAS**

III - Com os quatro triângulos retângulos e o quadrado de 5 cm, o primeiro passo é montar um grande quadrado. Sugira que os alunos experimentem diferentes arranjos, como posicionar os triângulos em torno do quadrado de 5 cm para formar um retângulo ou outro polígono, explorando a variedade de formas possíveis com as mesmas peças geométricas. Em seguida, oriente-os a montar a figura conforme o seguinte: posicione os quatro triângulos de modo que as hipotenusas, os lados mais longos, formem o perímetro do quadrado, enquanto o quadrado menor fica centralizado, preenchendo o espaço restante.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Como o tamanho desse quadrado se relaciona com os retângulos que cortamos anteriormente?
- O que vocês perceberam ao tentar montar o grande quadrado com as peças disponíveis?
- Qual é a relação entre os lados dos triângulos retângulos e os lados do quadrado menor?
- Se somarmos as áreas dos quatro triângulos e do quadrado menor, qual resultado obtemos?

Figura 8 - Demonstração por Bháskara-- outra disposição



Fonte: Oliveira (2013)

Essa atividade envolve a aplicação prática de conceitos fundamentais relacionados à mensuração e comparação de figuras geométricas. Ao construir e manipular retângulos, triângulos e quadrados, os alunos trabalham com medidas de comprimento, área e propriedades das formas geométricas.

3.2.2 Geoplano (Áreas)

Nesta atividade, será utilizado o conceito e o somatório de áreas. O geoplano será empregado como recurso didático para explorar o triângulo retângulo, com o objetivo de evidenciar a relação entre os catetos e a hipotenusa. A proposta visa favorecer a visualização das medidas (Marques *et al*., 2014)

- ***MATERIAIS:***

  - Geoplano quadrado; lãs ou elásticos de cores diferentes.

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **1º MOMENTO - CONSTRUIR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO**

I - Escolha uma cor de lã para representar os catetos do triângulo. Em seguida, corte um pedaço de lã e fixe-o no geoplano, formando um segmento de 3 unidades de comprimento e outro de 4 unidades. Os dois catetos devem se encontrar em um ângulo reto, formando assim a hipotenusa, que terá 5 unidades de comprimento.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Qual é a relação entre as unidades de comprimento dos catetos e da hipotenusa?
- Se você medir os catetos e a hipotenusa, o que você percebe sobre os seus comprimentos?
- O que aconteceria se aumentássemos ou diminuíssemos o comprimento de um dos catetos? Como isso afetaria a hipotenusa?

➢ **2º MOMENTO- CONSTRUIR QUADRADOS SOB OS CATETOS DO TRIÂNGULO EHIPOTENUSA**

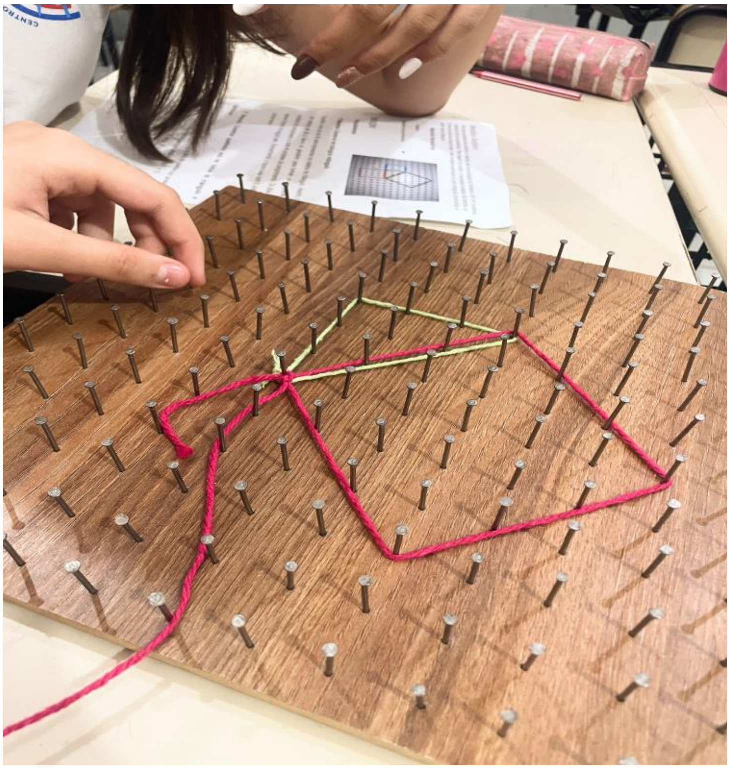
II - Com outras cores de lã, construa quadrados sob os catetos com áreas iguais a $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$ e sob a hipotenusa com área igual a $5^2 = 25$.

III - Visto que $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, então $3^2 + 4^2 = 5^2$.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que você observa sobre a área de cada quadrado construído? Como essa área está relacionada ao comprimento do cateto?
- Se o cateto tem comprimento 3, qual é a área do quadrado construído sobre esse cateto? E para o cateto de 4 unidades? E qual é a área do quadrado que está construído sobre a hipotenusa?
- Se você somar as áreas dos quadrados sob os catetos, o que você pode concluir sobre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa?

Figura 9 - Demonstração por Bháskara-- outra disposição



Fonte: Produzido pela autora

- **3º MOMENTO - DEMONSTRANDO O TEOREMA D PITÁGORAS ATRAVÉS DA COMPARAÇÃO DE ÁREAS**

IV - Como o quadrado da hipotenusa fica na diagonal do geoplano, dificulta assim a comprovação do teorema. Desta forma, são utilizados outros artifícios para a demonstração. Com outra cor de lã, prolongue o cateto menor do triângulo até que se alinhe ao vértice do quadrado da hipotenusa, formando um retângulo com medidas 3x4 unidades de comprimento. Repita o mesmo procedimento com o cateto maior do triângulo.

V - Construa outro retângulo tendo como base o cateto maior do triângulo, e altura o cateto menor.

VI - Após, construa outro retângulo que tem como diagonal o lado superior do quadrado da hipotenusa.

VII - Para provar o teorema, é necessário que o quadrado maior tenha 25 unidades de área. Cada retângulo obtido tem como área $3x4 = 12$. Como apenas a metade dele constitui o quadrado, então serão 6 unidades de comprimento. Como há 4 retângulos, então $4x6 = 24$ unidades. Pode-se observar que, no centro dos retângulos, formou-se um quadrado isolado com área igual a 1 unidade. Sendo assim, somando as áreas dos retângulos com a área do quadrado isolado, obtêm-se 24 + 1 = 25 unidades de comprimento.

3.2.3 Quadriculações (Áreas)

Nessa estratégia, os alunos montam um triângulo retângulo e, em seguida, preenchem os quadrados construídos sobre seus catetos e a hipotenusa com pequenos quadrados de E.V.A., comparando as quantidades. Ao observar que a soma dos quadradinhos nos catetos equivale exatamente ao número de quadradinhos que preenchem o quadrado da hipotenusa, os estudantes compreendem de forma concreta a relação

- ***MATERIAIS:***

- 16 Quadradinhos de EVA ou papel de mesma unidade de comprimento; 9 quadradinhos com a mesma unidade de comprimento com cor diferente; folha branca.

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **1º MOMENTO- CONSTRUIR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO**

I - Construa um triângulo retângulo na folha branca, com o auxílio de materiais que contenham linhas retas que o aluno possua. Os catetos deverão ter medidas de 3 unidades de quadradinhos e o outro com 4 unidades de quadradinhos.

➢ **2º MOMENTO- CONSTRUIR OS QUADRADOS**

II - Construa quadrados sob os catetos e a hipotenusa, delimitando suas áreas.

III- Coloque os quadradinhos de EVA dentro dos quadrados desenhados para preencher completamente as áreas dos quadrados dos catetos com suas respectivas cores (a^2 e b^2).

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- Você consegue identificar qual quadrado ocupa mais espaço? O que isso nos diz sobre o comprimento dos catetos?
- Qual é o número de quadradinhos de EVA que você usou para preencher o

quadrado sobre o cateto de 3 unidades? E o número de quadradinhos para o cateto de 4 unidades?

- Como você pode calcular a área de cada quadrado?

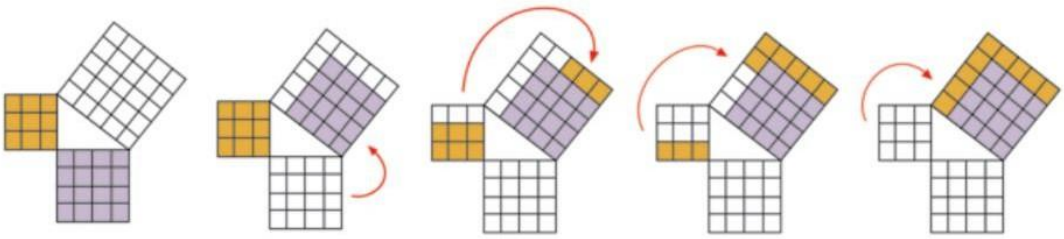
➢ **3º MOMENTO- COMPARAÇÃO DE ÁREAS**

IV - Assim, faça o remanejamento de todos os quadradinhos de EVA para completar o quadrado maior que está sob a hipotenusa. Desta forma, com a comparação de áreas, demonstra o Teorema.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que acontece quando você move todos os quadradinhos de E.V.A. dos quadrados menores para o quadrado maior? O que você consegue perceber sobre a organização das áreas?
- Ao preencher o quadrado sobre a hipotenusa, como as áreas dos quadrados sobre os catetos contribuem para a área total?
- Como você descreveria a relação entre os quadrados sobre os catetos e o quadrado sobre a hipotenusa em termos de soma de áreas?

Figura 10 - Dimensão Geométrica utilizando o método de Quadriculações



Fonte: Marques *et al*. (2014)

3.2.4 Modelo 3D (Volume)

Embora o Teorema de Pitágoras seja tradicionalmente associado a áreas e geometria plana, também é possível explorar uma analogia tridimensional usando a dimensão de medida volume, elementos geométricos em 3D, onde podem ser usados artifícios de volume para comprovar o teorema. A atividade a seguir foi inspirada por um vídeo do "Youtube".

- ***<u>MATERIAIS:</u>***

  - Um papel com gramatura maior; canudos; fita adesiva; miçangas; régua; tesoura; papel colorido e acetato.

- ***<u>PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:</u>***

➢ **1º MOMENTO- CONSTRUIR O TRIÂNGULO E OS QUADRADOS**

I - Construa um triângulo retângulo utilizando papel colorido, com os catetos medindo 3 e 4 centímetros (ou outras medidas), de forma que os quadrados possam ser acomodados dentro do papel. Cole o triângulo em um papel de maior gramatura.

II - Trace os limites dos quadrados com base nas medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo. Utilize fita adesiva para fixar os canudos nos respectivos tamanhos, garantindo que os quadrados dos catetos estejam claramente separados do quadrado da hipotenusa.

III - Dentro dos limites dos quadrados, distribua as miçangas de forma que elas se ajustem bem à figura.

IV - Cole um pedaço de acetato sobre toda a área para garantir que as miçangas fiquem no lugar e não se percam.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- A quantidade de miçangas dos dois quadrados menores consegue preencher completamente o quadrado sobre a hipotenusa?
- Se tivéssemos escolhido catetos com outras medidas, essa relação ainda seria válida? Por quê?

Figura 11 - Dimensão Medidas (Volume) Modelo 3D

Fonte: Produzido pela autora

3.3 DIMENSÃO TECNOLÓGICA

A dimensão tecnológica na aplicação do Teorema de Pitágoras transformou o ensino e a compreensão desse princípio matemático fundamental, proporcionando ferramentas avançadas para visualização e experimentação. Softwares de geometria dinâmica, como *GeoGebra*, permitem que estudantes manipulem triângulos retângulos interativamente, observando em tempo real como a relação do teorema se mantém constante, independentemente das dimensões dos catetos. Ademais, utiliza-se o mesmo *software* para o cálculo da distância entre dois pontos diretamente, ao traçar um triângulo retângulo entre eles.

3.3.1 Tangram

- ***<u>MATERIAIS:</u>***

  \- Aplet Geogebra online - Tangram del teorema de Pitágoras (https://www.geogebra.org/m/hngfkgkz)

- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

➢ **ENCAIXAR AS PEÇAS DO TANGRAM NOS QUADRADOS DOS CATETOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

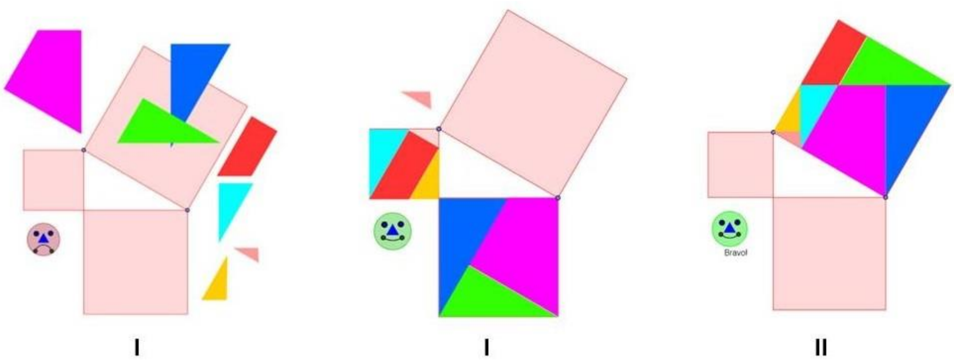
I - Ao abrir o aplicativo, já terá as peças do Tangram embaralhadas para que o aluno possa remanejar de modo que complete a área de cada quadrado dos catetos. O aplicativo dá a liberdade de modificar o tamanho do triângulo retângulo, com isso, as peças também irão aumentar ou diminuir de acordo com o comando.

II - Após encaixar todas as peças do Tangram nos dois quadrados sob os catetos, colocar todas as peças de modo que preencha o quadrado da hipotenusa. Assim será visto que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que você percebe ao encaixar as peças do Tangram nos quadrados sobre os catetos?
- Quando todas as peças são transferidas para o quadrado sobre a hipotenusa, o espaço é preenchido completamente?
- Se aumentarmos ou diminuirmos o tamanho do triângulo retângulo, essa relação continua válida? Por quê?

Figura 12 - Dimensão Tecnológica- Tangram



Fonte: Geogebra (2024)

3.3.2 Geogebra- Distância entre dois pontos

- ***MATERIAIS:***

- Aplet Geogebra online - https://www.geogebra.org/m/amcykswf

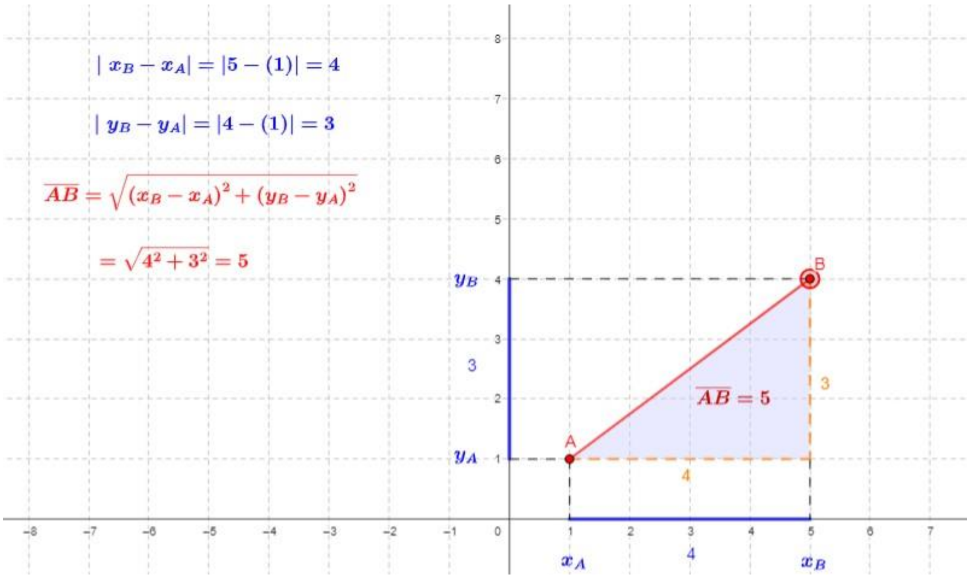
- ***PROCEDIMENTOS DA ATIVIDADE:***

I - Esse aplicativo permite as transformações quando se modifica os pontos. Nesse caso, mostra-se a fórmula da distância entre dois pontos, o qual aplica o teorema de Pitágoras. Pode-se observar que, à medida que se desloca os pontos, se aumenta ou diminui os catetos e, por consequência, se modifica também a distância que se correlaciona com as medidas dos catetos.

➢ **Sugestões de Perguntas:**

- O que acontece com a distância entre os pontos quando você desloca um dos vértices do triângulo?
- Se os catetos aumentam, o que ocorre com a hipotenusa? E se diminuem?

Figura 13 - Etapas da atividade em sala



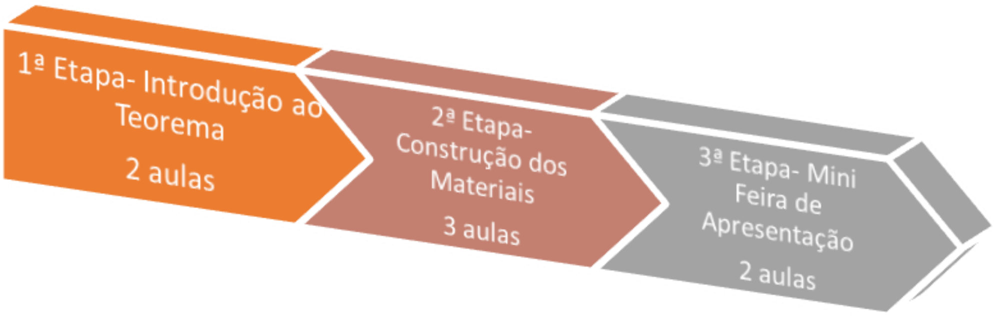
Fonte: Geogebra (2024)

4 APRENDENDO NA PRÁTICA

Por meio de uma atividade investigativa em uma turma de 7º ano, exemplificamos uma proposta que pode ser aplicada em sala de aula. Serão detalhados os procedimentos adotados, desde as etapas desenvolvidas até os materiais utilizados e as estratégias empregadas.

Estruturada com base na abordagem investigativa, a atividade se fundamenta na Teoria da Atividade de Leontiev (1978), que considera três elementos essenciais: necessidade, objeto e motivo, desenvolvendo-se em três etapas:

Figura 14 - Etapas da atividade em sala



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

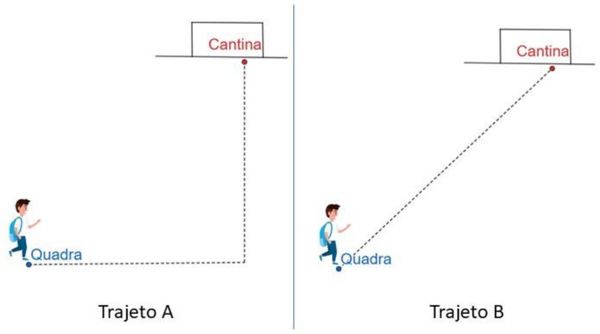
- <u>SITUAÇÃO-PROBLEMA</u>

A primeira etapa, voltada para a introdução ao Teorema de Pitágoras, foi desenvolvida em três momentos: Situação-problema, Questionário Prévio e Atividade Investigativa.

- Os estudantes são expostos a um problema contextualizado, no qual devem comparar duas distâncias percorridas entre um ponto da quadra da escola e a cantina.
- A turma é incentivada a analisar a situação e discutir qual trajeto seria mais adequado. Os alunos podem escolher entre realizar cálculos ou formular hipóteses com base na observação e no raciocínio lógico.
- Com base nas hipóteses levantadas, os estudantes utilizam estratégias para resolver o problema, aplicando conhecimentos matemáticos e investigativos.

- São incentivados a justificar suas escolhas e apresentar diferentes formas de solução.

Figura 15 - Situação Problema para o 7º ano



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Conexão com o Cotidiano

- Relacione o problema proposto com situações reais, mostrando a relevância da matemática no dia a dia.
- Incentive os alunos a compartilharem exemplos semelhantes que já vivenciaram.
- Apresente exemplos adicionais para aprofundar a reflexão e facilitar a compreensão do tema. Nesse momento, o conteúdo matemático central da atividade deve ser introduzido de forma clara, destacando seu papel na resolução do problema.

➢ <u>QUESTIONÁRIO PRÉVIO</u>

- Distribua um questionário avaliativo para identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras.
- As questões devem ser formuladas com base em um diagnóstico prévio.
- As respostas iniciais serão comparadas com as do questionário final, permitindo avaliar o progresso da turma.

Introdução ao Teorema de Pitágoras

- Apresente o tema "Teorema de Pitágoras", explicando sua relevância na matemática e suas aplicações práticas.
- Demonstre a formulação algébrica do teorema, destacando sua estrutura e a relação entre os lados do triângulo retângulo.

- Utilize exemplos do cotidiano para ilustrar a importância do conceito.

➢ <u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS</u>

Apresentação do Material Manipulável

- Explique aos alunos que será utilizado um recurso prático e de baixo custo para verificar a validade do Teorema de Pitágoras.
- Destaque a importância da experimentação e da aprendizagem ativa para compreender conceitos matemáticos.
- Divida a turma em grupos, garantindo que todos os alunos participem ativamente da atividade.
- Distribua a cada grupo uma folha contendo peças geométricas recortadas. Instrua os alunos a reorganizarem as peças, encaixando-as nos quadrados correspondentes aos catetos do triângulo retângulo. Após essa etapa, peça que agrupem as mesmas peças

> Disponibilize triângulos de diferentes tamanhos para cada grupo de alunos. Assim, permite que verifiquem se a relação do Teorema de Pitágoras se mantém independentemente das dimensões das figuras.

- Após a exposição inicial, cada grupo de alunos receberá, por sorteio, uma dimensão específica para trabalhar de acordo com as dimensões apresentadas.

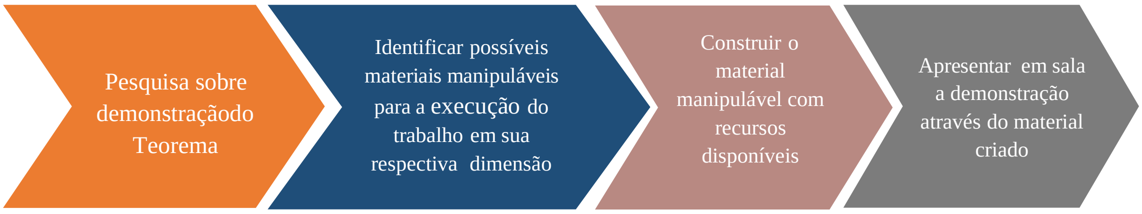
Figura 16 - Atividade em sala do 7º ano

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

Pesquisa Inicial sobre o Teorema de Pitágoras

- Oriente os alunos a realizarem uma pesquisa sobre a demonstração do Teorema de Pitágoras, explorando diferentes abordagens e métodos utilizados para prová-lo.
- Estimule-os a se familiarizarem com as diversas possibilidades de representação do teorema, preparando-os para a construção dos materiais nas etapas seguintes.

Figura 17 - Procedimentos da atividade proposta

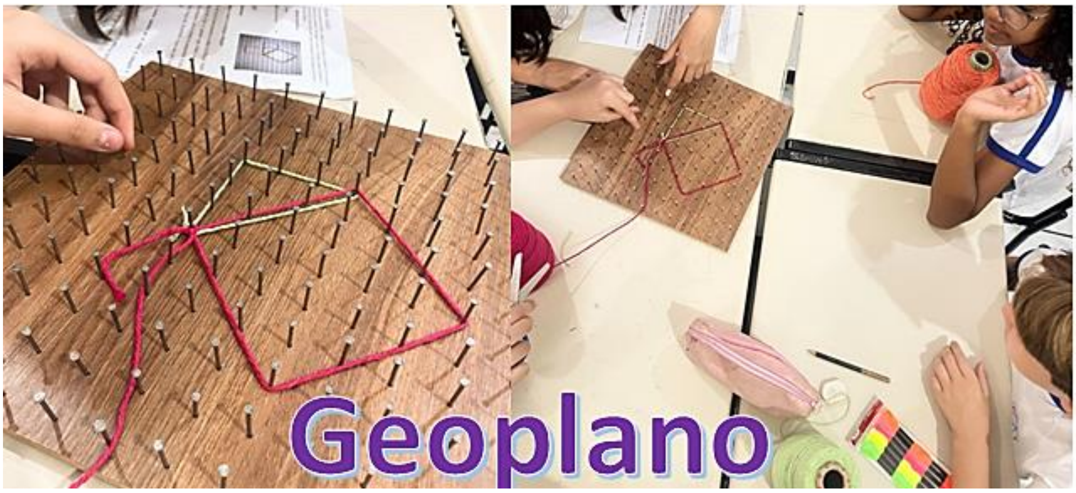


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Construção dos Materiais

- Dedique três aulas para que os grupos construam os materiais de acordo com os recursos sorteados.
- Forneça instruções claras sobre cada Demonstração.

Figura 18 - Material Geoplano



Fonte: Fotos produzidas pela autora

Intervenções a serem feitas

- Durante a execução das atividades, realize intervenções pontuais para estimular a reflexão dos alunos sobre o processo de construção.
- Questione-os sobre as relações observadas e os ajude a identificar possíveis ajustes ou melhorias nas representações.
- Encoraje-os a testar hipóteses, fazendo ajustes em seus materiais. Conforme com as representações ajustadas, é o momento de passar para a próxima etapa da atividade.

➢ <u>MINIFEIRA PARA APRESENTAÇÕES</u>

Demonstração do Teorema e Interações

- Utiliza-se de duas aulas para que os alunos consigam apresentar com suas contribuições

As apresentações foram planejadas para permitir que os alunos compartilhassem suas descobertas e compreensões do teorema com seus colegas e visitantes, promovendo um ambiente de aprendizado colaborativo.

Figura 19 - Material Quebra-Cabeça

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

- Durante as exposições, os grupos apresentam suas representações e explicaram sobre o teorema de forma interativa, utilizando materiais manipuláveis que foram construídos nas etapas anteriores.
- As intervenções do professor ocorrem ao longo das apresentações, com o objetivo de avaliar o entendimento dos estudantes sobre o conteúdo e observar como cada grupo estava lidando com as diferentes abordagens e explicação do teorema.

➢ *O objetivo dessa atividade é permitir que os alunos identifiquem, elaborem e compreendem o Teorema de Pitágoras por meio de suas próprias ações e interações dentro do grupo. Esperava-se que os alunos participem de investigação assertiva, onde trocam ideias e refletem sobre o conteúdo de maneira crítica, fortalecendo a compreensão coletiva e o aprendizado colaborativo.*

Figura 20 - Montagem de Recortes

Fonte: Fotos produzidas pela autora (2024)

5 CONSIDERAÇÕES

A realização deste trabalho sobre o Teorema de Pitágoras evidenciou a importância da utilização de materiais manipuláveis e de uma abordagem investigativa no ensino da matemática. Ao longo das etapas descritas, os alunos foram estimulados a explorar, testar hipóteses e construir significados, tornando-se protagonistas do próprio aprendizado.

Além disso, a proposta de dividir a turma em grupos e focar em cada um uma abordagem específica para a demonstração do teorema fortalece a colaboração e a autonomia na aprendizagem. Os estudantes têm a oportunidade de comparar diferentes métodos de demonstração, discutir entre si as estratégias mais práticas e apresentar suas lições, a argumentação matemática e a troca de conhecimentos.

O momento de exposição permitiu que os estudantes explicassem suas descobertas com base no que vivenciaram, demonstrando, de forma prática, o entendimento do conceito e sua aplicação.

Dessa forma, oferece um guia para professores que desejam adotar metodologias mais interativas e práticas no ensino da matemática. A abordagem aqui proposta reforça que a aprendizagem do Teorema de Pitágoras vai além da mera memorização de sua fórmula, incentivando a experimentação, a investigação e a reflexão.

Esperamos que essas estratégias inspirem novas práticas em sala de aula e contribuam para um ensino mais dinâmico.

REFERÊNCIAS

GEOGEBRA. – Distância entre dois pontos. Disponível em: www.geogebra.org/m /amcykswf. Acesso em: 15 mar. 2024.

GEOGEBRA. – Tangram del Teorema de Pitágoras. Disponível em. www.geogebra.org/m/ hngfkgkz. Acesso em: 15 mar. 2024.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C. A habilidade da visualização frente à sala de aula de Matemática. *In*: KALEFF, A. M. M. R. (org.). **Vendo com as mãos, olhos e mente**: Recursos didáticos para laboratório e museu de educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD / UFF, 2016, p. 27-40.

KINDEL, D. S.; OLIVEIRA, R. de. O uso de materiais manipuláveis na alfabetização Matemática. In: MAIA, M. G. B.; BRIÃO, G. F. (orgs.). **Alfabetização matemática**: perspectivas atuais. Curitiba: CRV, 2017, p. 61-81.

LEONTIEV, A. N. **Atividade, Consciência e Personalidade**. São Paulo: Martins Fontes, 1978.

MARQUES, J.; OLIVEIRA, G. S.; PREUSSLER, R. **Analisando a aprendizagem doteorema de pitágoras guiados pela investigação matemática.** IV EIEMAT- 2º Encontro Nacional Pibid Matemática, 2014.

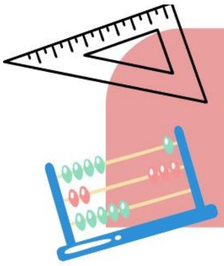
NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, A. L. C. **O Teorema de Pitágoras:** demonstrações e aplicações. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT - Universidade Estadual do Ceará Fortaleza, 2013.

PEREIRA, J. dos S. **Geometria, materiais manipuláveis e a participação de estudantes em termos do engajamento mútuo e do repertório compartilhado nas aulas de Matemática**. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2013.

SALDANHA, D. Z.; ARAÚJO, A. A. Papelmática: geometria da dobradura. **V Seminário Nacional de Pesquisa em Educação:** Éticas e Políticas, Santa Cruz do Sul - RS, 2014. Disponível em: online.unisc.br. Acesso em: 10 jan. 2024.

RECURSOS PARA EXPLORAÇÃO



CONHECIMENTOS PRÉVIOS SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS

ALUNO

DATA:

1**)** Com suas palavras, como você descreve o Teorema de Pitágoras?

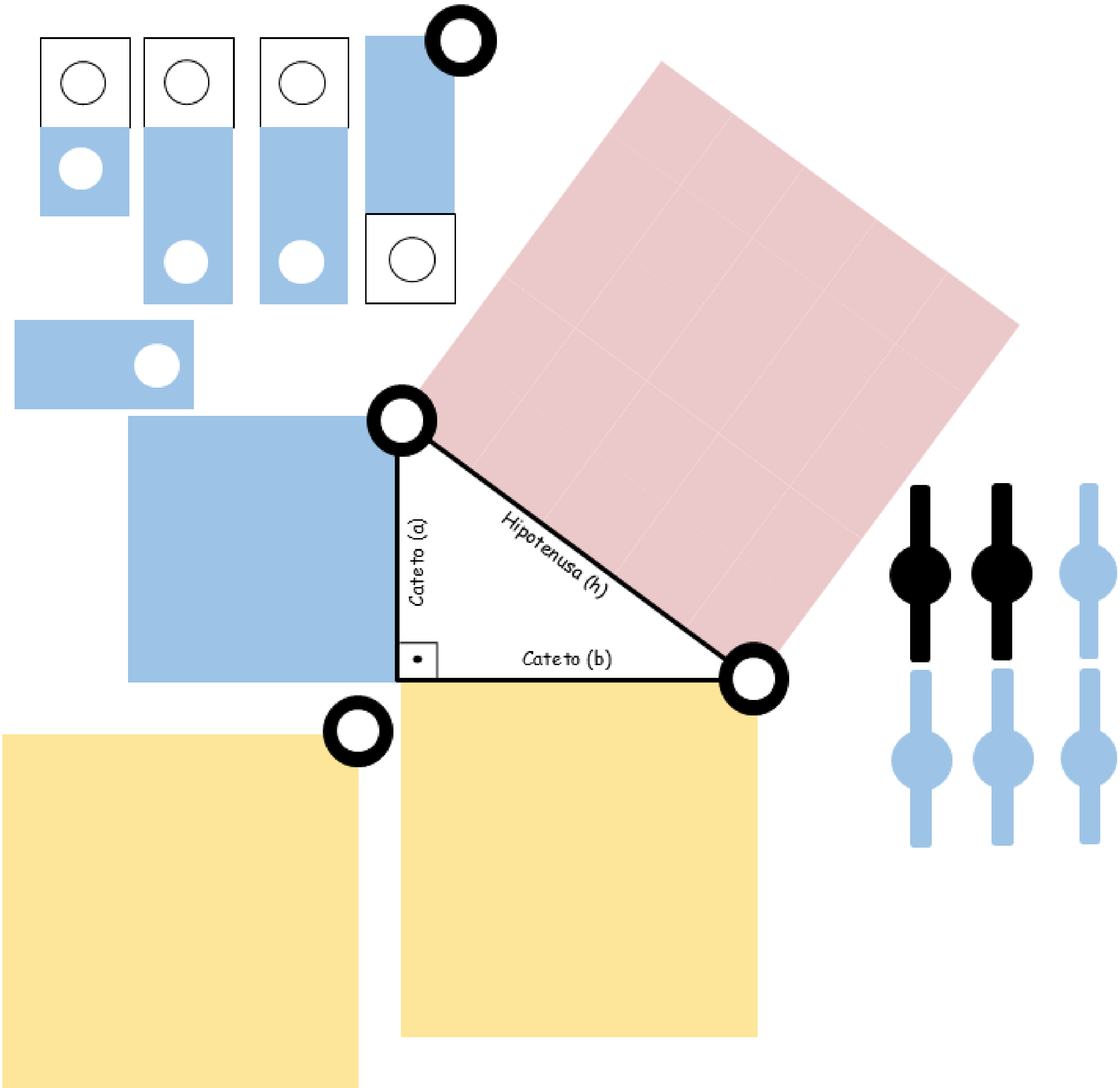
2) Em que tipo de triângulo o Teorema de Pitágoras é aplicável?

3) Quais são as características de um triângulo retângulo?

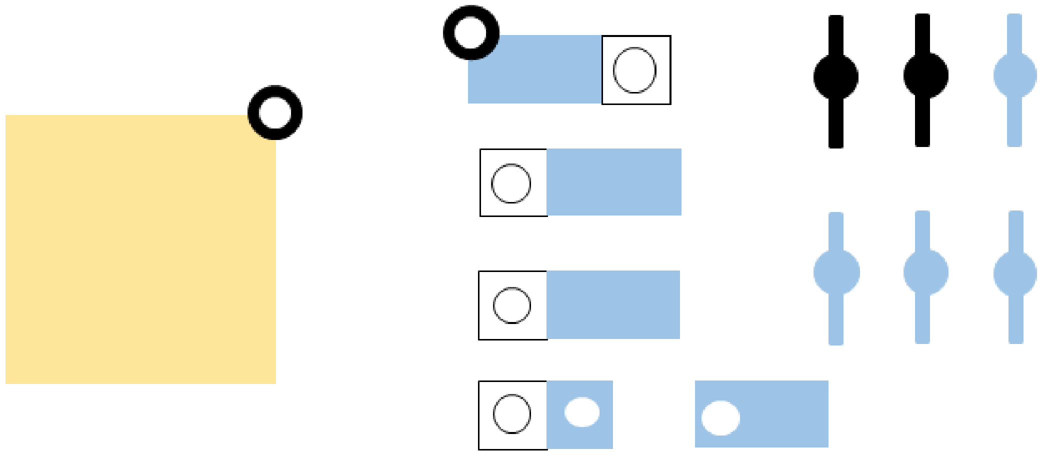
4) Qual é a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de acordo com o teorema?

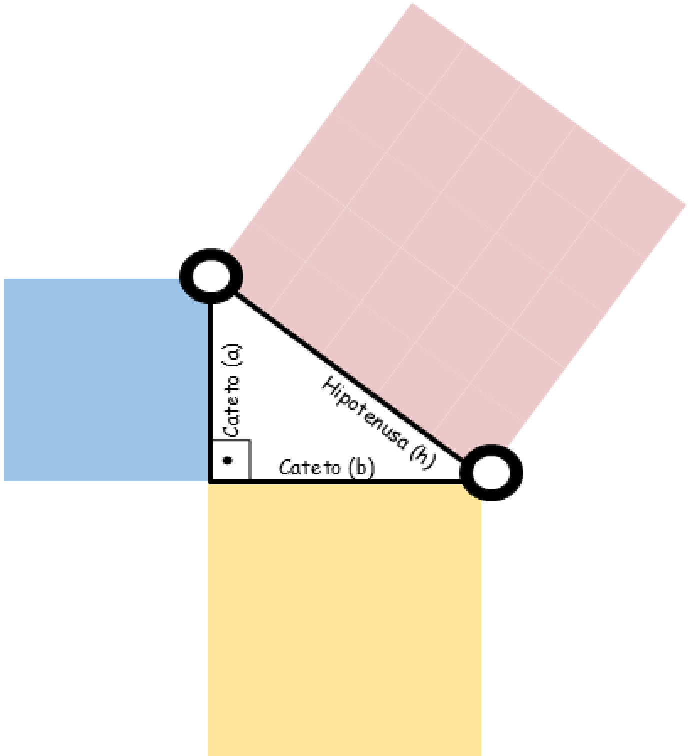
5) Como o Teorema de Pitágoras pode ser usado para calcular distâncias em um mapa?

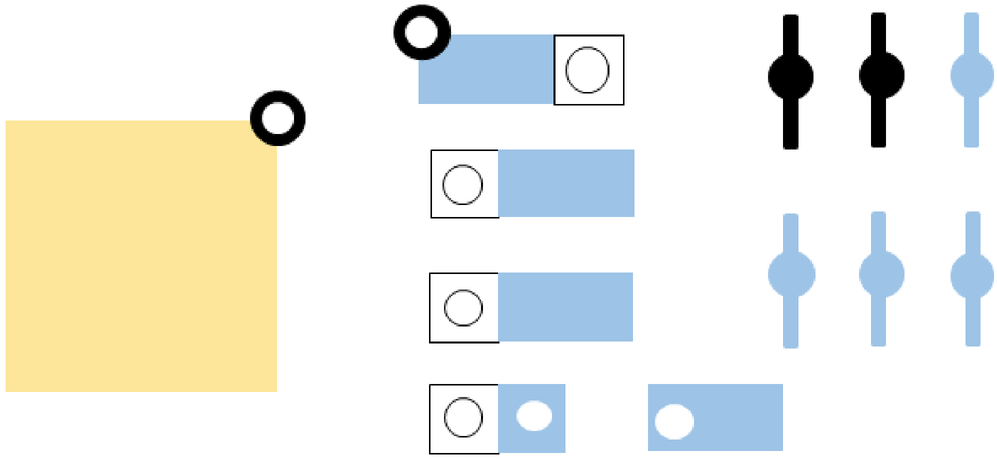
6) Além de resolver problemas geométricos, você pode pensar em alguma aplicação do Teorema de Pitágoras ? Descreva uma situação do cotidiano em que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado para resolver um problema prático.

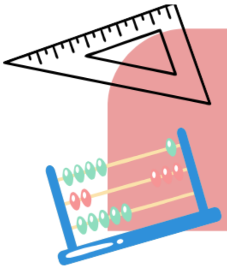


Peças para recortar




Cateto (a)
Hipotenusa (h)
Cateto (b)





CONHECIMENTOS SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS

ALUNO

DATA:

1)Escreva com suas palavras o que é Teorema de Pitágoras:

2)Qual a fórmula matemática que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

3)Qual tipo de triângulo que utilizamos no Teorema de Pitágoras?

4) Em quais situações podemos usar o Teorema?

5)Você realizou a atividade? Se não, qual foi o motivo ?

6)Durante a atividade, como os materiais que utilizaram , ajudaram a demonstrar o Teorema de Pitágoras?