Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós Graduação em Matemática

Fernando Lima Kneipp

O Grupo Fundamental de Variedades Flag Reais

Juiz de Fora

2025

Fernando Lima Kneipp

O Grupo Fundamental de Variedades Flag Reais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Kneipp, Fernando.
O Grupo Fundamental de Variedades Flag Reais / Fernando Lima Kneipp. – 2025.
87 f.

Orientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo
Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Matemática, 2025.

1. Variedades flag. 2. Grupos de Lie. 3. Grupo fundamental. 4.Álgebras de Lie. 5. Sistema de raízes. I. Rabelo, Lonardo, orient. II. Título.

Fernando Lima Kneipp

O Grupo Fundamental de Variedades Flag Reais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 21 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lonardo Rabelo - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Brian David Grajales Triana

Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Laércio José dos Santos

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 21/02/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Lonardo Rabelo**, **Professor(a)**, em 21/02/2025, às 13:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Laercio Jose dos Santos**, **Professor(a)**, em 21/02/2025, às 14:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Brian David Grajales Triana**, **Usuário Externo**, em 21/02/2025, às 15:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2260270** e o código CRC **0E87178A**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e à minha família pelo apoio de sempre. A trajetória até foi de altos e baixos. Quando terminei o ensino médio não passava pela minha cabeça cursar matemática, e no período de tempo até meu ingresso, passei por momentos difíceis. Ainda bem que sempre pude contar com vocês.

Agradeço à minha namorada, Lorena, pela parceria, compreensão e carinho. Por todos os momentos incríveis que vivemos juntos. Pela companhia nas idas à São Januário. Por ter me incentivado a cursar uma disciplina no IMPA e por ter aberto as portas da sua casa.

Agradeço aos amigos que fiz e que levo para a vida. Em particular, ao Daniel pela ajuda na apresentação e pelo incentivo em ir para a USP.

Agradeço ao meu orientador, Lonardo, por ter me ajudado a desenvolver este trabalho e por sempre ser solicito e presente. Desfrutei bastante do período em que trabalhamos juntos.

Agradeço aos membros da banca, Brian e Laércio, pelo aceite e pelos comentários sobre o trabalho. Ao Laércio, agradeço por todos os ensinamentos e por ter me guiado no mundo da teoria de Lie.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar duas abordagens para o cálculo do grupo fundamental de uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. A primeira abordagem é baseada em [1] e consiste em calcular o grupo fundamental de uma variedade flag via geradores e relações usando a estrutura celular obtida a partir da decomposição de Bruhat e o Teorema de van-Kampen (veja o Teorema 2.25). A segunda abordagem baseada em [2] parte de um resultado da teoria de recobrimentos que afirma que o grupo fundamental de G/P_Θ é isomorfo a um quociente de um subgrupo discreto especial (veja o Teorema 3.1). Mais especificamente, como um quociente do grupo das componenetes conexas de P_Θ (veja a Proposição A.65). Neste trabalho, usaremos este resultado para explorar com detalhes o cálculo do grupo fundamental das variedades flag de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Essa segunda abordagem tem um caráter mais algébrico, uma vez que o recobrimento universal de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ é descrito através das álgebras de Clifford.

Palavras-chave: álgebras de lie; grupo fundamental; grupos de lie; sistemas de raízes; variedades flag.

ABSTRACT

The objective of this work is to present two approaches for computing the fundamental group of a flag manifold $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. The first approach is based on [1] and involves calculating the fundamental group of a flag manifold via generators and relations, using the cellular structure obtained from the Bruhat decomposition and the van Kampen Theorem (see Theorem 2.25). The second approach, based on [2], relies on a result from covering theory, which states that the fundamental group of G/P_Θ is isomorphic to a quotient of a special discrete subgroup (see Theorem 3.1). More specifically, it is a quotient of the group of connected components of P_Θ (see Proposition A.65). In this work, we use this result to explore in detail the computation of the fundamental group of the flag manifolds of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. This second approach has a more algebraic nature, as the universal covering of $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ is described through Clifford algebras.

Keywords: flag manifolds; fundamental group; lie algebras; lie groups; root systems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Seja G grupo de Lie semissimples, com centro finito, e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, de forma que $G = KAN$ é a decomposição de Iwasawa de G e sejam Π o conjunto das raízes de $\mathfrak{a}$ e $\Sigma \subseteq \Pi$ um sistema simples de raízes. Para cada $\Theta \subseteq \Sigma$, consideremos a subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-$, onde $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}$ é a soma dos espaços de raízes correspondentes às raízes positivas e $\mathfrak{n}(\Theta)^-$ é a soma dos espaços de raízes correspondentes às raízes negativas que são geradas por Θ. Uma variedade flag de tipo Θ consiste no espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, onde P_Θ denota o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G. O objetivo do trabalho é calcular o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ apresentando como este cálculo pode ser feito através de duas abordagens distintas.

A primeira consiste em calcular o grupo fundamental com base na técnica desenvolvida em [1]. Esta é, de fato, a primeira referência na literatura sobre o assunto. A ideia é usar a decomposição celular de $\mathbb{F}_\Theta$ proveniente da decomposição de Bruhat que nos permite calcular o grupo fundamental via geradores e relações pelo método apresentado no teorema de Van-Kampen. Desta forma, obtém-se a seguinte apresentação do grupo fundamental (veja o Teorema 2.25):

Teorema 1.1. *Se $\Sigma^\star$ denota o conjunto das raízes simples de multiplicidade 1, e $\varepsilon(\alpha,\beta) = (-1)^{n(\alpha,\beta)}$, onde $n(\alpha,\beta) = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ é o número de Killing, então o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ tem a seguinte apresentação: os geradores são $t_\alpha,\ \alpha \in \Sigma^\star$, com relações $t_\beta t_\alpha = t_\alpha t_\beta^{\varepsilon(\alpha,\beta)}$, para $\alpha, \beta \in \Sigma^\star,\ \alpha \neq \beta$, e $t_\alpha = 1$, para $\alpha \in \Sigma^\star \cap \Theta$.*

A segunda abordagem foi desenvolvida mais recentemente na tese [2]. Ela consiste em usar a teoria de recobrimentos para calcular o grupo fundamental de variedades flag. A ideia é a seguinte: como as raízes que contribuem para o grupo fundamental são as raízes de multiplicidade 1, consideremos o caso em que $\mathfrak{m} = 0$ e sejam $p : \widetilde{G} \to G$ o recobrimento universal de G e $\widetilde{K} = p^{-1}(K)$ (veja a Proposição A.30). Denotemos por M o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K, $\widetilde{M}$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\widetilde{K}$, $\widetilde{P}_\Theta$ o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em $\widetilde{G}$ e $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ a componente conexa da identidade. Neste caso, temos o seguinte resultado (veja o Teorema 3.1)

Teorema 1.2. *O grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo à $\widetilde{M}/(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1)$.*

Notemos que uma consequência imediata é que o grupo fundamental do flag maximal $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\emptyset$ é isomorfo ao $\widetilde{M}$ (veja o Corolário 3.2). Além disso, usaremos esse resultado para explorar com detalhes o grupo fundamental das variedades flag de $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, que são os flags de subespaços de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, temos o seguinte resultado (veja o Corolário 3.36):

Teorema 1.3. *Seja $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ com $n > 2$. Se $\Theta \neq \emptyset$ então o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo à $M/(M \cap (P_\Theta)_1)$.*

Para destrinchar este resultado, precisaremos aprofundar no recobrimento universal de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, que é conhecido como grupo *spin*. A ideia da construção deste grupo é a seguinte: todo espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica pode ser visto como um subespaço de uma álgebra associativa, conhecida como álgebra de Clifford. No caso em que o espaço em questão tem dimensão finita, a álgebra de Clifford também tem dimensão finita e, portanto, o conjunto dos elementos inversíveis tem uma estrutura de grupo de Lie. O grupo spin é definido como sendo um subgrupo especial (veja a Definição 3.20).

Cada elemento em $\mathfrak{p}_\Theta$ é uma matriz em blocos e esses blocos são determinados por Θ. Relacionando o grupo spin com esses blocos, temos o seguinte resultado (veja o Teorema 3.38).

Teorema 1.4. *Seja $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ com $n > 2$. Se $\Theta \neq \emptyset$ então o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2^{k-1}$, onde k é a quantidade de blocos na diagonal determinados por $\mathfrak{p}_\Theta$.*

Para exemplificar a aplicação de ambos os métodos, consideramos o caso da variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n+1)$ que corresponde à variedade flag de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ com Θ dado pelo complementar de uma raiz simples, digamos, α_k. O Teorema 1.1 fornece o grupo fundamental dado por um único gerador t_{α_k} com relação $t_\alpha^2 = 1$, ou seja, o grupo é $\mathbb{Z}_2$ (veja a Seção 2.6). Por sua vez, pelo Teorema 1.4, como Θ determina dois blocos na subálgebra parabólica, concluímos que o grupo fundamental é $\mathbb{Z}_2$ (veja o Exemplo 3.39).

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 exploraremos a abordagem de [1] via o Teorema de van-Kampen para complexos celulares. Notemos que as células que contribuem para o grupo fundamental são as células de dimensão menor ou igual a 2 (veja o Teorema A.7). Portanto, na seção 2.2 estudaremos as células de dimensão menor ou igual a 2 de uma variedade flag. Nas seções seguintes teremos por objetivo obter as funções características dessas células para encontrar os geradores e as relações. Na última seção do capítulo utilizaremos essa abordagem para calcular o grupo fundamental das variedades Grassmannianas. No Capítulo 3, faremos a abordagem de [2], começando pela seção 3.1 onde provaremos o Teorema 3.1) que é o resultado principal deste capítulo. Nas seções 3.2, 3.3 e 3.4 exploraremos as álgebras de Clifford e na última seção nos concentraremos no grupo fundamental das variedades flags de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Nos apêndices estão os resultados que nos auxiliarão no texto principal. No Apêndice A.1 estão os resultados topológicos que precisaremos, principalmente o Teorema A.7 que nos diz como calcular o grupo fundamental de complexos celulares, e o Teorema A.13 que nos diz como é o grupo fundamental de um espaço homogêneo. No Apêndice A.2 estão alguns resultados sobre a estrutura dos grupos de Lie semissimples, principalmente a decomposição de Iwasawa e como ela é preservada no recobrimento universal. Já no Apêndice A.3 é feita a construção das variedades flag explorando aspectos importantes das subálgebras parabólicas.

2 GRUPO FUNDAMENTAL DE VARIEDADES FLAG: ABORDAGEM TOPOLÓGICA

2.1 PRELIMINARES

Esta seção tem por objetivo estabelecer as notações e enunciar alguns resultados que utilizaremos no decorrer do texto.

Seja G um grupo de Lie conexo, semissimples com centro finito e álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

e decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

de forma que $G = KAN$ é a decomposição de Iwasawa de G, sendo K, A, N os subgrupos conexos de G gerados por $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$, respectivamente (veja o Apêndice A.2.2). Denotemos por Π o conjunto das raízes e por Σ um sistema simples de raízes. Sejam $\Theta \subseteq \Sigma$ e P_Θ subgrupo parabólico de tipo Θ e seja $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ a variedade flag de tipo Θ (veja o Apêndice A.3). Neste caso, temos que $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfa à K/K_Θ, sendo K_Θ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K, de forma que $\mathbb{F}_\Theta$ é compacto. Em particular, se P denota o subgrupo parabólico minimal, então $\mathbb{F}$ é isomorfa à K/M, onde M denota o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K.

Se $\mathcal{W}$ denota o grupo de Weyl de Π, então todo elemento $k \in M_*$ é o representante de um elemento $w \in \mathcal{W}$, sendo M_* o normalizador de $\mathfrak{a}$ em K, pois $\mathcal{W}$ é isomorfo à M_*/M (Proposição A.47). Notemos que se $k_1M = k_2M$, então $k_2^{-1}k_1 \in M$, de forma que

$$k_1P_\Theta = k_2P_\Theta,$$

pois $P_\Theta = K_\Theta AN$ contém M. Neste sentido, se $k \in M_*$ é um representante de $w \in \mathcal{W}$, então podemos denotar

$$wP_\Theta = kP_\Theta.$$

Seja $\mathcal{W}_\Theta$ o conjunto dos elementos em $\mathcal{W}$ que centralizam $\mathfrak{a}_\Theta$. Neste caso, temos que $wb_\Theta = b_\Theta$ se, e somente se, $w \in \mathcal{W}_\Theta$ (veja o Lema 5.18 de [3]).

Assim, se $w_1\mathcal{W}_\Theta = w_2\mathcal{W}_\Theta$, então $w_1b_\Theta = w_2b_\Theta$. Vale a seguinte decomposição de $\mathbb{F}_\Theta$, a conhecida **decomposição de Bruhat** (veja o Teorema 5.19 de [3]).

Proposição 2.1. $\mathbb{F}_\Theta = \displaystyle\bigsqcup_{w\in\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} Nwb_\Theta.$

Seja $\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W}\colon\ l(wr_\alpha) > l(w);\ \forall\alpha \in \Theta\}$. Devido à Proposição A.59, podemos escrever $w = w_1w_2$, com $w_1 \in \mathcal{W}^\Theta$ e $w_2 \in \mathcal{W}_\Theta$, de forma que $w\mathcal{W}_\Theta = w_1\mathcal{W}_\Theta$. Assim, podemos tomar Nwb_Θ com $w \in \mathcal{W}^\Theta$. Denotemos Nwb_Θ por C_w^Θ. Quando $\Theta = \emptyset$, denotemos $C_w^\emptyset$ simplesmente por C_w.

Seja $\Pi_w^\Theta = \{\alpha \in \Pi^+ : \ w^{-1}\alpha \in \Pi^- \setminus \langle\Theta\rangle\}$.

Proposição 2.2. *A função*

$$\Psi : \sum_{\alpha \in \Pi_w^\Theta} \mathfrak{g}_\alpha \to Nwb_\Theta$$

que leva X em $\Psi(X) = \exp(X)wb_\Theta$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Veja o Teorema 5.14 de [3]. ∎

Corolário 2.3. *Se $w \in \mathcal{W}^\Theta$ e $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_q}$ é uma expressão reduzida, então*

$$\dim C_w^\Theta = \sum_{i=1}^{q} m_{\alpha_i} + m_{2\alpha_i},$$

onde m_α denota a dimensão de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Demonstração. A ideia da demonstração consiste em encontrar a cardinalidade do conjunto Π_w^Θ. No caso em que $\Theta = \emptyset$, temos que a cardinalidade é $n(w) = l(w) = q$ (veja a Proposição A.53). No caso geral, como $w \in \mathcal{W}^\Theta$ temos que C_w^Θ tem a mesma dimensão de C_w (Lema 3.1 de [4]). ∎

Em particular, cada C_w^Θ é uma célula aberta. As células C_w^Θ são denominadas de **células de Bruhat de** $\mathbb{F}_\Theta$. O fecho de cada célula de Bruhat C_w^Θ é denominada de **célula de Schubert** e é denotada por S_w^Θ. O seguinte resultado está enunciado na Proposição 2.7 de [1]

Proposição 2.4. $S_w^\Theta = \bigcup_{v \leq w} C_v^\Theta$, *onde $\leq$ denota a ordem de Bruhat*[1].

A partir da Proposição 2.4, temos que a decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}_\Theta$ nos fornece uma estrutura de complexo CW em $\mathbb{F}_\Theta$.

Observação 2.5. Notemos que a única 0-célula é $C_1^\Theta = \{b_\Theta\}$ e b_Θ está no fecho de toda 2-célula. Portanto, estamos nas condições deA.1.1

2.2 CÉLULAS DE DIMENSÃO ≤ 2

Em um complexo CW, as células que contribuem para o cálculo do grupo fundamental são as células de dimensão ≤ 2. Nesta seção caracterizaremos essas células em termos das raízes e do grupo de Weyl.

---
1 Veja a Definição A.60

Lema 2.6. *Se* $\alpha \in \Sigma$ *e* $A = \{\alpha\}$ *ou* $A = \{\alpha, 2\alpha\}$, *dependendo se* 2α *é raiz ou não, então*

$$r_\alpha(\Pi^+ \setminus A) = \Pi^+ \setminus A.$$

Demonstração. Veja Lema 3.95 de [5] ou a Proposição 9.12 de [6]. ■

Em particular, as únicas raízes positivas que são levadas em raízes negativas por uma reflexão simples r_α são α e 2α, dependendo se 2α é raiz ou não.

Lema 2.7. *1.* $w \in \mathcal{W}^\Theta \Leftrightarrow w(\Theta) \subseteq \Pi^+$.

2. Se $w \in \mathcal{W}_\Theta$ *e* $\alpha \notin \Theta$, *então* $w\alpha > 0$.

3. Se $\Theta_1, \Theta_2 \subseteq \Sigma$ *são subconjuntos tais que* $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$, *então* $\mathcal{W}_{\Theta_1} \subseteq \mathcal{W}^{\Theta_2}$.

Demonstração. 1. Suponhamos $w \in \mathcal{W}^\Theta$. Por definição de $\mathcal{W}^\Theta$, temos que $l(wr_\alpha) > l(w)$, para todo $\alpha \in \Theta$. Seja $\alpha \in \Theta$. Se $w\alpha \in \Pi^-$, então segue da Proposição A.51 que

$$l(wr_\alpha) = l(w) - 1 < l(w),$$

contradição! Portanto, $w\alpha \in \Pi^+$. Reciprocamente, se $w\alpha \in \Pi^+$, então

$$l(wr_\alpha) = l(w) + 1 > l(w),$$

para todo $\alpha \in \Theta$, de forma que $w \in \mathcal{W}^\Theta$.

2. Seja $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_q}$ uma expressão reduzida de w com $\alpha_i \in \Theta$ (Lema A.56). Se $w\alpha < 0$, então segue da Proposição A.51 e do Teorema A.54 que existe um índice $i \in \{1, \ldots, q\}$ tal que

$$w = r_{\alpha_1} \cdots \hat{r}_{\alpha_i} \cdots r_{\alpha_q} r_\alpha.$$

Daí, $r_\alpha \in \mathcal{W}_\Theta$ e, portanto, $\alpha \in \Theta$, contradição! Logo, $w\alpha > 0$.

3. Se $w \in \mathcal{W}_{\Theta_1}$ e $\alpha \in \Theta_2$, então segue do item 2 que $w\alpha > 0$. Logo, $w(\Theta_2) \subseteq \Pi^+$, donde $w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}$ pelo item 1.

Isso conclui a demonstração. ■

Seja $\Sigma^\star = \{\alpha \in \Sigma;\ m_\alpha = 1\}$, onde m_α denota a dimensão de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Proposição 2.8. *Seja* $w \in \mathcal{W}$. *Vale que*

1. $w \in \mathcal{W}^\Theta$ *e* $\dim C_w^\Theta = 0$ *se, e somente se,* $w = 1$.

2. $w \in \mathcal{W}^\Theta$ *e* $\dim C_w^\Theta = 1$ *se, e somente se,* $w = r_\alpha$, *com* $\alpha \in \Sigma^\star \setminus \Theta$.

3. $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ *e* $\dim C_w^{\Theta} = 2$ *se, e somente se, uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

a) $w = r_\alpha$, *com* $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$, $m_\alpha = 2$ *e* $m_{2\alpha} = 0$.

b) $w = r_\alpha r_\beta$, *com* $\alpha, \beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$ *e* $\alpha \neq \beta$.

c) $w = r_\alpha r_\beta$, *com* $\alpha \in \Sigma^\star \cap \Theta$, $\beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$ *e* $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$.

Demonstração. 1. Suponhamos $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$, $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$ expressão reduzida de w, e

$$0 = \dim C_w^{\Theta} = \sum_{i=1}^{k} m_{\alpha_i} + m_{2\alpha_i},$$

de forma que $k = 0$ e, portanto, $w = 1$. A recíproca também é imediata.

2. Suponhamos $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$, $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$ expressão reduzida de w e

$$1 = \dim C_w^{\Theta} = \sum_{i=1}^{k} m_{\alpha_i} + m_{2\alpha_i}.$$

Neste caso, $k = 1$ e $m_{\alpha_1} = 1$, donde $w = r_\alpha$ com $\alpha \in \Sigma^\star$. Usando o Lema 2.7 temos que $\alpha \notin \Theta$, pois $w(\Theta) \subseteq \Pi^+$ e $w\alpha = r_\alpha(\alpha) < 0$. Reciprocamente, suponhamos $w = r_\alpha$, com $\alpha \in \Sigma^\star \setminus \Theta$. Neste caso, a única raiz simples que é levada em raiz negativa por w é α. Como $\alpha \notin \Theta$, segue que $w(\Theta) \subseteq \Pi^+$, donde $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ (Lema 2.7).

3. Suponhamos $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ e $\dim C_w^{\Theta} = 2$. Neste caso, se $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_q}$ é uma expressão reduzida, então

$$\dim C_w^{\Theta} = \sum_{i=1}^{q} m_{\alpha_i} + m_{2\alpha_i},$$

de forma que $q \in \{1, 2\}$.

Se $q = 1$, então $w = r_\alpha$. Neste caso, a única possibilidade é $m_\alpha = 2$, pois se $m_\alpha = 1$, então $m_{2\alpha} = 0$ (Proposição A.20). Notemos que $\alpha \notin \Theta$, pois se $\alpha \in \Theta$, então $w(\alpha) = -\alpha < 0$, contrariando $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$. Assim, temos o item a.

Se $q = 2$, então $w = r_\alpha r_\beta$ com $\alpha \neq \beta$. Neste caso, temos $m_\alpha = 1$ e $m_\beta = 1$, de forma que $\alpha, \beta \in \Sigma^\star$. Temos que $\beta \notin \Theta$. De fato,

$$w(\beta) = r_\alpha r_\beta(\beta) = r_\alpha(-\beta).$$

Como $\alpha \neq \beta$ e α é a única raiz positiva levada em raiz negativa por r_α, segue que $r_\alpha(\beta) > 0$, donde

$$w(\beta) = -r_\alpha(\beta) < 0,$$

e portanto, $\beta \notin \Theta$, pois $w(\Theta) \subseteq \Pi^+$. Se $\alpha \notin \Theta$, então temos o item b. Se $\alpha \in \Theta$, então $w\alpha > 0$, pois $w \in \mathcal{W}^\Theta$. Notemos que

$$w\alpha = r_\alpha r_\beta(\alpha) = r_\alpha\left(\alpha - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}\beta\right).$$

Daí, se $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$, então $w\alpha = -\alpha$, contrariando $w\alpha > 0$. Portanto, $\langle \alpha, \beta\rangle \neq 0$, donde segue o item c.

Reciprocamente, suponhamos o item a: $w = r_\alpha$, com $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$, $m_\alpha = 2$ e $m_{2\alpha} = 0$. Neste caso, usando o Lema 2.7, temos que $\mathcal{W}_{\Sigma\setminus\Theta} \subseteq \mathcal{W}^\Theta$, de forma que $w \in \mathcal{W}^\Theta$. Daí,

$$\dim C_w^\Theta = m_\alpha + m_{2\alpha} = 2.$$

Agora suponhamos o item b: $w = r_\alpha r_\beta$, com $\alpha \neq \beta$ e $\alpha, \beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$. Neste caso, temos $w \in \mathcal{W}_{\Sigma\setminus\Theta} \subseteq \mathcal{W}^\Theta$ (Lema 2.7). Além disso, como $m_\alpha = 1$ e $m_\beta = 1$, temos que $m_{2\alpha} = 0 = m_{2\beta}$ (Proposição A.20). Como $\alpha \neq \beta$, segue que $w = r_\alpha r_\beta$ é uma expressão reduzida, de forma que

$$\dim C_w^\Theta = m_\alpha + m_\beta = 2.$$

Por fim, suponhamos o item c: $w = r_\alpha r_\beta$, com $\alpha \in \Sigma^\star \cap \Theta$, $\beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$ e $\langle \alpha, \beta\rangle \neq 0$. Primeiro, afirmamos que $w \in \mathcal{W}^\Theta$. De fato, como $\beta \neq \alpha$, temos que $\alpha, \beta \notin \Theta \setminus \{\alpha\}$, de forma que $\{\alpha, \beta\} \cap (\Theta \setminus \{\alpha\}) = \emptyset$. Segue do Lema 2.7 que

$$w \in \mathcal{W}_{\{\alpha,\beta\}} \subseteq \mathcal{W}^{\Theta\setminus\{\alpha\}}$$

e, portanto, $w(\Theta \setminus \{\alpha\}) \subseteq \Pi^+$, também pelo Lema 2.7. Para ver que $w\alpha > 0$, notemos que

$$\begin{aligned} w\alpha &= r_\alpha r_\beta(\alpha) = r_\alpha\left(\alpha - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}\beta\right) = -\alpha - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle} r_\alpha(\beta) && (2.1)\\ &= -\alpha - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}\left(\beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha\right) = -\alpha - n(\beta,\alpha)\beta + n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)\alpha && (2.2)\\ &= (n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) - 1)\alpha - n(\beta,\alpha)\beta, && (2.3)\end{aligned}$$

onde $n(\alpha,\beta) = 2\dfrac{\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}$ e $n(\beta,\alpha) = 2\dfrac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}$ são os números de Killing. Como α e β são raízes simples e $\alpha \neq \beta$, um resultado da teoria de raízes nos dá que $\langle \alpha, \beta\rangle \leq 0$ (veja a Proposição 3.35 de [5]). Como $\langle \alpha, \beta\rangle \neq 0$, segue que $\langle \alpha, \beta\rangle < 0$ e, portanto, $n(\alpha,\beta) < 0$ e $n(\beta,\alpha) < 0$. Daí, os únicos valores possíveis para $n(\alpha,\beta)$ e $n(\beta,\alpha)$ são $-1, -2, -3, -4$ (veja Proposição 3.25 de [5]), de forma que $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) \geq 1$. Assim, os coeficientes de $w\alpha$ em 2.1 são inteiros positivos e, portanto, $w\alpha > 0$. Assim, $w(\Theta) \subseteq \Pi^+$, donde $w \in \mathcal{W}^\Theta$. Como $\alpha \neq \beta$, temos que $w = r_\alpha r_\beta$ é uma expressão reduzida, de forma que

$$\dim C_w^\Theta = m_\alpha + m_\beta = 2. \qquad \blacksquare$$

2.3 GRUPO FUNDAMENTAL DE FLAGS MAXIMAIS

Nesta seção, calcularemos o grupo fundamental de flags maximais no caso particular em que cada espaço de raiz é unidimensional. Portanto, sejam $\Theta = \emptyset$ e $m_\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \Sigma$. O caso em que $m_\alpha = 1$ para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma$ ocorre quando $\mathfrak{g}$ é uma forma real normal de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (veja o item 6 da página 531 de [7]). Neste caso, tem-se que $\mathfrak{m} = 0$ e que $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (veja Proposição 6.47 de [8]), de forma que $\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}$. Assim, é possível obter uma decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C} \oplus \sum_{\gamma \in \Pi_\mathbb{C}} (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\gamma,$$

onde $\Pi_\mathbb{C}$ denota o conjunto das raízes de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Se $\alpha \in \Pi$ é uma raiz de $\mathfrak{a}$, então α é um funcional linear $\alpha : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$. Neste caso, é possível estender α para um único funcional linear sobre $\mathbb{C}$

$$(1 \otimes \alpha) : \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$$

tal que $1 \otimes \alpha(\lambda \otimes H) = \lambda\alpha(H)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e para todo $H \in \mathfrak{a}$.

Notemos que um elemento H de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ é da forma

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes H_i, \ \lambda_i \in \mathbb{C}, \ H_i \in \mathfrak{a}\,.$$

Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$\begin{aligned} [H, X] &= [\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes H_i, 1 \otimes X] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes [H_i, X] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes \alpha(H_i) X \\ &= (1 \otimes \alpha)(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes H_i)(1 \otimes X) = (1 \otimes \alpha)(H)(1 \otimes X). \end{aligned}$$

Logo, $1 \otimes \alpha$ é uma raiz de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ e se $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ denota o respectivo espaço de raiz, então $1 \otimes \mathfrak{g}_\alpha \subseteq (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$. Como $\mathfrak{g}_\alpha$ é unidimensional sobre $\mathbb{R}$, segue que $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\alpha$ é unidimensional sobre $\mathbb{C}$. Como os espaços de raízes de uma álgebra semissimples complexa são unidimensionais sobre $\mathbb{C}$, segue que

$$(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Sejam $\alpha \in \Sigma$ uma raiz simples arbitrária, $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ o único elemento tal que $\langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$, para todo $H \in \mathfrak{a}$ e seja $H_\alpha^\vee = \dfrac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha$. Neste caso, seguindo a Observação A.46, existe $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = -H_\alpha^\vee$, onde θ denota a involução de Cartan, de forma que

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathbb{R} X_\alpha \oplus \mathbb{R} H_\alpha^\vee \oplus \mathbb{R}\theta(X_\alpha)$$

é uma subálgebra isomorfa à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ via as identificações

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow X_\alpha, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_\alpha^\vee, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \theta X_\alpha.$$

Tomemos $Z_\alpha = X_\alpha + \theta X_\alpha$. Neste caso, Z_α se identifica com

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotando $\Theta = \{\alpha\}$, temos que $\mathfrak{g}(\alpha)$ é exatamente a subálgebra semissimples de tipo Θ (veja a seção A.3.1). Neste caso, vale que

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{k}(\alpha) \oplus \mathfrak{s}(\alpha)$$

é uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}(\alpha)$, sendo $\mathfrak{k}(\alpha) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(\alpha)$ e $\mathfrak{s}(\alpha) = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}(\alpha)$ e

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{k}(\alpha) \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}(\alpha)$$

é uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}(\alpha)$, sendo $\mathfrak{a}(\alpha) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}(\alpha)$ e $\mathfrak{n}(\alpha) = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(\alpha)$. Sejam $G(\alpha), K(\alpha), A(\alpha), N(\alpha)$ os subgrupos conexos de G gerados, respectivamente, por $\mathfrak{g}(\alpha)$, $\mathfrak{k}(\alpha)$, $\mathfrak{a}(\alpha)$ e $\mathfrak{n}(\alpha)$. Neste caso, temos que $G(\alpha) = K(\alpha)A(\alpha)N(\alpha)$ é decomposição de Iwasawa de $G(\alpha)$. A subálgebra parabólica minimal é

$$\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}(\alpha),$$

pois $\mathfrak{m}(\alpha) = 0$. Denotemos o normalizador de $\mathfrak{p}(\alpha)$ em $G(\alpha)$ por $P(\alpha)$, de forma que $\mathbb{F}(\alpha) = G(\alpha)/P(\alpha)$ é uma variedade flag maximal de $G(\alpha)$. Seja também $M(\alpha) = M \cap K(\alpha)$ o centralizador de $\mathfrak{a}(\alpha)$ em $K(\alpha)$ (veja a Proposição A.37).

Proposição 2.9. $\mathfrak{k}(\alpha) = \mathbb{R}Z_\alpha$.

Demonstração. Como $\mathfrak{g}(\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, temos que $\mathfrak{k}(\alpha) \simeq \mathfrak{so}(2,\mathbb{R})$, donde $\mathfrak{k}(\alpha)$ é unidimensional. ■

Agora, sejam B a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ e $B_\mathbb{C}$ a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Neste caso, vale que $B_\mathbb{C}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = B$ (veja a Seção 3 do Capítulo 1 de [8]). Notemos que se $H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes H_i \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, com $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $H_i \in \mathfrak{a}$, então

$$B_\mathbb{C}(H, 1 \otimes H_\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B(H_i, H_\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(H_i) = (1 \otimes \alpha)(\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes H_i) = (1 \otimes \alpha)(H).$$

Assim, $1 \otimes H_\alpha$ é o único elemento em $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ tal que

$$(1 \otimes \alpha)(H) = B_\mathbb{C}(H, 1 \otimes H_\alpha),\ \forall H \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}\,.$$

Seja $(\mathfrak{a}_\mathbb{C})(\alpha)$ o subespaço complexo de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ gerado por $1 \otimes H_\alpha$. Como $\mathfrak{a}(\alpha)$ é subespaço unidimensional sobre $\mathbb{R}$, segue que $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{a}(\alpha)$ é unidimensional sobre $\mathbb{C}$, de forma que

$$\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{a}(\alpha) = (\mathfrak{a}_\mathbb{C})(\alpha).$$

Seja $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})(\alpha) = (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_{-\alpha} \oplus (\mathfrak{a}_\mathbb{C})(\alpha) \oplus (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$. Neste caso, vale que

$$(\mathfrak{g}_\mathbb{C})(\alpha) = (\mathfrak{g}_{-\alpha})_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha)_\mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}(\alpha)_\mathbb{C}.$$

Lema 2.10. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se* $i = \sqrt{-1}$, *então* $e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)} = e^{\mathrm{ad}(\pi i H_\alpha^\vee)}$.
2. $\exp(tZ_\alpha) \in M(\alpha) \Leftrightarrow t = \pi k$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.
3. *Se* $\alpha, \beta \in \Sigma$, *então* $e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)} Z_\beta = (-1)^{n(\alpha,\beta)} Z_\beta$, *onde* $n(\alpha, \beta) = 2\dfrac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ *é o número de Killing.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}_\mathbb{C}(\alpha) = \mathfrak{g}(\alpha)_\mathbb{C}$, o isomorfismo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{g}(\alpha)$ se estende a um isomorfismo complexo $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}(\alpha)$. Neste caso,

$$\mathrm{ad} \circ \phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$$

é um homomorfismo. Como $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ é simplesmente conexo, existe um único homomorfismo $\Psi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ tal que $d\Psi_1 = \mathrm{ad} \circ \phi$ (veja o Teorema 7.13 de [9]). Neste caso, se $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}(\alpha)$, então

$$\Psi(\exp(\phi^{-1}(X))) = e^{\mathrm{ad} \circ \phi(\phi^{-1}(X))} = e^{\mathrm{ad}(X)}.$$

Em particular,

$$e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)} = \Psi(\exp(\pi \phi^{-1}(Z_\alpha))).$$

Mas, em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ vale que

$$\exp(\pi\phi^{-1}(Z_\alpha)) = \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix} = \exp(\pi\phi^{-1}(iH_\alpha^\vee)).$$

Logo,

$$e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)} = \Psi(\exp(\pi\phi^{-1}(Z_\alpha))) = \Psi(\exp(\pi i \phi^{-1}(H_\alpha^\vee))) = e^{\mathrm{ad}(\pi i H_\alpha^\vee)}.$$

Isso prova o item 1.

Para o item 2, como $\mathfrak{a}(\alpha)$ é gerado por $H_\alpha^\vee$, temos que

$$\exp(tZ_\alpha) \in M(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ad}(\exp(tZ_\alpha))H_\alpha^\vee = H_\alpha^\vee \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathrm{Ad}(\exp tZ_\alpha)H_\alpha^\vee) = \phi^{-1}(H_\alpha^\vee). \tag{2.4}$$

Mas, usando que $\phi^{-1} \circ \mathrm{ad}(Z_\alpha) \circ \phi = \mathrm{ad}(\phi^{-1}(Z_\alpha))$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\mathrm{Ad}(\exp tZ_\alpha)H_\alpha^\vee) &= \phi^{-1} \circ e^{t\,\mathrm{ad}(Z_\alpha)} \circ \phi(\phi^{-1}H_\alpha^\vee) = e^{t\,\mathrm{ad}(\phi^{-1}(Z_\alpha))}\phi^{-1}(H_\alpha^\vee) \\
&= \mathrm{Ad}(\exp(t\phi^{-1}(Z_\alpha)))\phi^{-1}(H_\alpha^\vee) \\
&= \exp(t\phi^{-1}(Z_\alpha))\phi^{-1}(H_\alpha^\vee)\exp(-t\phi^{-1}(Z_\alpha)) \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ -\sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daí, voltando na Equação (2.4), temos que $\exp(tZ_\alpha) \in M(\alpha)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ -\sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Isso acontece se, e somente se, $t = \pi k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Para o item 3, se $X \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\beta$, então

$$[\pi i H_\alpha^\vee, X] = \frac{2\pi i}{\langle \alpha, \alpha \rangle}[H_\alpha, X] = \frac{2\pi i}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\beta(H_\alpha)X = \pi i 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}X = \pi i \cdot n(\alpha, \beta)X.$$

Daí, usando o item 1, temos que

$$e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)}X = e^{\mathrm{ad}(\pi i H_\alpha^\vee)}X = e^{\pi i \cdot n(\alpha,\beta)}X.$$

Analogamente, temos que se $X \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_{-\beta}$, então

$$e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)}X = e^{\mathrm{ad}(\pi i H_\alpha^\vee)}X = e^{-\pi i \cdot n(\alpha,\beta)}X.$$

Como o número de Killing $n(\alpha, \beta)$ é um inteiro, temos que se $n(\alpha, \beta)$ é par, então

$$e^{\pm \pi i \cdot n(\alpha,\beta)} = 1$$

e se $n(\alpha, \beta)$ é ímpar, então

$$e^{\pm \pi i \cdot n(\alpha,\beta)} = -1.$$

Logo, como $Z_\beta = X_\beta + \theta X_\beta$, segue que

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)}Z_\beta &= e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)}X_\beta + e^{\mathrm{ad}(\pi Z_\alpha)}(\theta X_\beta) = (-1)^{n(\alpha,\beta)}X_\beta + (-1)^{n(\alpha,\beta)}\theta X_\beta \\
&= (-1)^{n(\alpha,\beta)}Z_\beta,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Como estamos considerando $\Theta = \emptyset$, uma célula de Bruhat C_w^{Θ} é denotada simplesmente por C_w. Neste caso, o ponto base b_Θ do flag maximal $\mathbb{F}$ é denotado simplesmente por b.

Observação 2.11. Para cada $\alpha \in \Sigma$, denotemos $\mathbb{F}(\alpha) = G(\alpha)/P(\alpha)$ o flag maximal de $G(\alpha)$ de forma que $b(\alpha) = 1P(\alpha)$ denota o ponto base. Neste caso, temos uma inclusão natural

$$\iota : G(\alpha)/P(\alpha) \to G/P, \ gb(\alpha) \mapsto gb.$$

O espaço tangente de $\mathbb{F}(\alpha) = G(\alpha)/P(\alpha)$ no ponto base é

$$T_{b(\alpha)}\, \mathbb{F}\,(\alpha) = \{X \cdot b\colon \ X \in \mathfrak{g}(\alpha)\},$$

de forma que o espaço tangente nos demais pontos gb_α são obtidos por translações

$$T_{gb(\alpha)}\, \mathbb{F}\,(\alpha) = \{g(X \cdot b)\colon \ X \in \mathfrak{g}(\alpha)\}.$$

Analogamente, o espaço tangente de $\mathbb{F}$ no ponto base é

$$T_b\mathbb{F} = \{X \cdot b\colon \ X \in \mathfrak{g}\}$$

e o espaço tangente no ponto gb é

$$T_{gb}\mathbb{F} = \{g(X \cdot b)\colon \ X \in \mathfrak{g}\}.$$

Para maiores detalhes, veja o Apêndice C de [3].

Daí, calculando a derivada da inclusão no ponto $b(\alpha)$, temos que $d\iota_{b(\alpha)}$ é injetora, pois se $d\iota_{b(\alpha)}(X \cdot b(\alpha)) = 0$, então

$$0 = d\iota_{b(\alpha)}(X \cdot b(\alpha)) = \frac{d}{dt}\iota(\exp(tX)b(\alpha))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(tX)b|_{t=0} = X \cdot b, \tag{2.5}$$

donde $X \in \mathfrak{p}$. Logo, $X \in \mathfrak{g}(\alpha) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\alpha)$, e portanto, $X \cdot b(\alpha) = 0$. Notemos que

$$(\iota \circ \widetilde{g})(kb(\alpha)) = \iota(gkb(\alpha)) = gkb = (g \circ \iota)(kb(\alpha)),$$

onde $\widetilde{g} : \mathbb{F}(\alpha) \to \mathbb{F}(\alpha)$ e $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ denotam a translação por g. Derivando em $b(\alpha)$, temos que

$$d\iota_{gb(\alpha)} \circ d\widetilde{g}_{b(\alpha)} = dg_b \circ d\iota_{b(\alpha)}.$$

Como $d\widetilde{g}_{b(\alpha)} : T_{b(\alpha)}\, \mathbb{F}\,(\alpha) \to T_{gb(\alpha)}\, \mathbb{F}\,(\alpha)$ e $dg_b : T_b\mathbb{F} \to T_{gb}\mathbb{F}$ são isomorfismos, segue que ι tem posto constante. Sendo uma aplicação injetora de posto constante, segue que ι é uma imersão. Assim, podemos olhar para $\mathbb{F}(\alpha)$ dentro de $\mathbb{F}$.

Denotemos por $\mathbb{F}_\alpha$ a variedade flag $\mathbb{F}_{\{\alpha\}} = G/P_{\{\alpha\}}$ de tipo $\Theta = \{\alpha\}$, b_α o ponto base e consideremos a projeção

$$p_\alpha : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\alpha,\ p_\alpha(gb) = gb_\alpha$$

do flag maximal em $\mathbb{F}_\alpha$. É claro que p_α é equivariante.

Proposição 2.12. *A fibra $p_\alpha^{-1}(b_\alpha)$ é difeomorfa ao flag maximal $\mathbb{F}(\alpha) = G(\alpha)/P(\alpha)$, de maneira que $gb \in p_\alpha^{-1}(b_\alpha)$ é identificado com $gb(\alpha) \in \mathbb{F}(\alpha)$.*

Demonstração. Se $\iota : \mathbb{F}(\alpha) \to \mathbb{F}$ denota a inclusão $\iota(gb(\alpha)) = gb$, então como ι é imersão, basta mostrarmos que $p_\alpha^{-1}(b_\alpha) = \iota(\mathbb{F}(\alpha))$. Se $kb \in p_\alpha^{-1}(b_\alpha)$, $k \in K$, então $kb_\alpha = b_\alpha$, donde $k \in P_{\{\alpha\}} = K_{\{\alpha\}}AN$ (Proposição A.44). Mas $K_{\{\alpha\}} = K(\alpha)M$ (Teorema 4.13 de [3]), de forma que $k = k(\alpha)m \in K(\alpha)M$. Daí, $kb = k(\alpha)b = \iota(k(\alpha)b(\alpha))$. Reciprocamente, se $k(\alpha)b = \iota(k(\alpha)b(\alpha))$, então

$$p_\alpha(k(\alpha)b) = k(\alpha)b_\alpha = b_\alpha,$$

pois $k(\alpha) \in K(\alpha) \subseteq K_{\{\alpha\}} \subseteq P_{\{\alpha\}}$. ■

Lema 2.13. *A decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}(\alpha) = G(\alpha)/P(\alpha)$ é*

$$\mathbb{F}(\alpha) = \{b(\alpha)\} \bigsqcup N(\alpha)r_\alpha b(\alpha)$$

Demonstração. A decomposição de Bruhat de $G(\alpha)/P(\alpha)$ é

$$G(\alpha)/P(\alpha) = \bigsqcup_{\overline{w} \in \overline{\mathcal{W}_\alpha}} N(\alpha)\overline{w}b(\alpha),$$

onde $b(\alpha)$ é o ponto base $1P(\alpha)$, $\mathfrak{a}_\alpha$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\alpha)$ em $\mathfrak{a}$, $\mathcal{W}_\alpha = \{w \in \mathcal{W};\ w|_{\mathfrak{a}_\alpha} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}_\alpha}\}$ e a barra denota a restrição à $\mathfrak{a}(\alpha)$. Como $\mathcal{W}_\alpha$ é o grupo de Weyl de $\mathfrak{a}(\alpha)$ (veja Proposição A.57), temos que

$$\overline{\mathcal{W}_\alpha} = \{1, \overline{r_\alpha}\}.$$

Pela Proposição A.45, temos que r_α e $\overline{r}_\alpha$ são representados pelo mesmo elemento em $M(\alpha)_*$, de forma que $r_\alpha b(\alpha) = \overline{r}_\alpha b(\alpha)$. Daí, a decomposição de Bruhat de $G(\alpha)/P(\alpha)$ é

$$G(\alpha)/P(\alpha) = \{b(\alpha)\} \bigsqcup N(\alpha)r_\alpha b(\alpha),$$

como queríamos. ■

Lema 2.14. *Se $\alpha, \beta \in \Sigma$ são tais que $\alpha \neq \beta$, então*

1. $C_{r_\alpha} = N(\alpha)r_\alpha b$.

2. $C_{r_\alpha r_\beta} = N(\alpha)N(r_\alpha(\beta))r_\alpha r_\beta b$.

3. *Seja* $k_\alpha \in K(\alpha)$. *Tem-se que* $k_\alpha \in K(\alpha) \setminus M(\alpha) \Leftrightarrow k_\alpha b \in C_{r_\alpha}$.

4. *Todo elemento de* C_{r_α} *é da forma* $k_\alpha b$, *com* $k_\alpha \in K(\alpha) \setminus M(\alpha)$.

Demonstração. 1. Sejam $\mathfrak{n}_\alpha = \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$ e N_α o subgrupo conexo de N gerado por $\mathfrak{n}_\alpha$. Neste caso, segue do Lema A.15 que $N = N(\alpha)N_\alpha$. Afirmamos que $N_\alpha r_\alpha b = r_\alpha b$. De fato, se $n \in N_\alpha$, então também pelo Lema A.15 podemos escrever $n = \exp(X)$, com $X \in \mathfrak{n}_\alpha$. Daí, $X = \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha\}} X_\gamma$, de forma que usando a Proposição A.48 ficamos com

$$r_\alpha X = r_\alpha \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha\}} X_\gamma \in \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_{r_\alpha \gamma}.$$

Mas $r_\alpha(\gamma) \in \Pi^+ \setminus \{\alpha\}$, para toda raiz positiva $\gamma \neq \alpha$ (Lema 2.6), de forma que $r_\alpha X \in \mathfrak{n}_\alpha$. Portanto, $\mathfrak{n}_\alpha$ é invariante por r_α. Daí, como $r_\alpha = r_\alpha^{-1}$, temos que

$$r_\alpha \exp(X) r_\alpha = \exp(r_\alpha X) \in N_\alpha.$$

Assim,

$$N r_\alpha b = N(\alpha) N_\alpha r_\alpha b = N(\alpha) r_\alpha r_\alpha^{-1} N_\alpha r_\alpha b = N(\alpha) r_\alpha N_\alpha b = N(\alpha) r_\alpha b,$$

sendo que a última igualdade segue do fato de que $N_\alpha \subseteq N$ de forma que $N_\alpha b = b$.

2. Sejam $\tilde{\mathfrak{n}} = \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha, r_\alpha \beta\}} \mathfrak{g}_\gamma$ e $\mathfrak{n}_\beta = \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\beta\}} \mathfrak{g}_\gamma$ e sejam $\widetilde{N}$ e N_β os respectivos subgrupos conexos. Neste caso, temos que

$$N = N(\alpha) N(r_\alpha \beta) \widetilde{N}.$$

Um elemento em $\widetilde{N}$ é da forma $\exp(X)$ com $X \in \tilde{\mathfrak{n}}$ e

$$r_\alpha X = r_\alpha \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha, r_\alpha \beta\}} X_\gamma \in \sum_{\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha, r_\alpha \beta\}} \mathfrak{g}_{r_\alpha \gamma}.$$

Afirmamos que $r_\alpha X \in \mathfrak{n}_\beta$. De fato, se $r_\alpha \gamma = \beta$, então $\gamma = r_\alpha \beta$, contradição. Portanto, $r_\alpha \gamma \neq \beta$ para todo $\gamma \in \Pi^+ \setminus \{\alpha, r_\alpha \beta\}$, de forma que $r_\alpha X \in \mathfrak{n}_\beta$. Daí,

$$r_\alpha \widetilde{N} r_\alpha \subseteq N_\beta.$$

Segue da demonstração do item 1 que $r_\beta N_\beta r_\beta \subseteq N_\beta \subseteq N$. Assim,

$$r_\beta r_\alpha \widetilde{N} r_\alpha r_\beta \subseteq r_\beta N_\beta r_\beta \subseteq N,$$

de forma que

$$r_\beta r_\alpha \widetilde{N} r_\alpha r_\beta b = b$$

$$\begin{aligned} N r_\alpha r_\beta b &= N(\alpha) N(r_\alpha \beta) \widetilde{N} r_\alpha r_\beta b = N(\alpha) N(r_\alpha \beta) r_\alpha r_\beta (r_\alpha r_\beta)^{-1} \widetilde{N} r_\alpha r_\beta b \\ &= N(\alpha) N(r_\alpha \beta) r_\alpha r_\beta \Big(r_\beta r_\alpha \widetilde{N} r_\alpha r_\beta \Big) b \\ &= N(\alpha) N(r_\alpha \beta) r_\alpha r_\beta b. \end{aligned}$$

3. Suponhamos $k_\alpha \in K(\alpha) \setminus M(\alpha)$. Neste caso, pelo Lema 2.13 temos que a decomposição de Bruhat de $G(\alpha)/P(\alpha)$ é

$$G(\alpha)/P(\alpha) = \{b(\alpha)\} \bigsqcup N(\alpha) r_\alpha b(\alpha).$$

Como $k_\alpha \notin M(\alpha)$, temos que $k_\alpha b(\alpha) \in N(\alpha) r_\alpha b(\alpha)$, de forma que

$$k_\alpha b(\alpha) = n_\alpha r_\alpha b(\alpha),\ n_\alpha \in N(\alpha).$$

Pela Proposição 2.12, identificando $k_\alpha b(\alpha)$ com $k_\alpha b$ e $n_\alpha r_\alpha b(\alpha)$ com $n_\alpha r_\alpha b$, temos que

$$k_\alpha b = n_\alpha r_\alpha b \in C_{r_\alpha}.$$

Reciprocamente, se $k_\alpha b \in C_{r_\alpha}$, com $k_\alpha \in K(\alpha)$, então $k_\alpha b \neq b$, donde $k_\alpha \notin M(\alpha)$.

4. Todo elemento de C_{r_α} é da forma $n_\alpha r_\alpha b$. Usando a decomposição de Iwasawa de $G(\alpha)$, podemos escrever $n_\alpha r_\alpha = k_\alpha a n \in K(\alpha)A(\alpha)N(\alpha)$, de forma que

$$n_\alpha r_\alpha b = k_\alpha a n b = k_\alpha b,$$

com $k_\alpha \in K(\alpha)$. Como $k_\alpha b \in C_{r_\alpha}$, temos que $k_\alpha \in K(\alpha) \setminus M(\alpha)$.

Isso termina a demonstração. ■

Denotando $I = [0,1]$, e b o ponto base de $\mathbb{F} = G/P$, consideremos as seguintes funções

$$T_\alpha : I \to \mathbb{F},\ T_\alpha(s) = \exp(s\pi Z_\alpha) b$$
$$T_{\alpha\beta} : I \times I \to \mathbb{F},\ T_{\alpha\beta}(s,t) = \exp(s\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta) b.$$

Proposição 2.15. *T_α é uma função característica para C_{r_α}.*

Demonstração. Temos que $T_\alpha(0) = b \in C_1$ e $T_\alpha(1) = \exp(\pi Z_\alpha) b = b \in C_1$, pois, pelo Lema 2.10, $\exp(\pi Z_\alpha) \in M(\alpha) \subseteq P$. Daí, T_α leva o bordo de I em C_1. Se $s \in \mathrm{Int}(I)$, então pelo Lema 2.10 temos que $\exp(s\pi Z_\alpha) \in K(\alpha) \setminus M(\alpha)$, donde $\exp(s\pi Z_\alpha) b \in C_{r_\alpha}$ (Lema 2.14). Resta mostar que T_α é um difeomorfismo entre $\mathrm{Int}(I)$ e C_{r_α}. Afirmamos que T_α é injetora em $\mathrm{Int}(I)$. De fato, se $s_1, s_2 \in \mathrm{Int}(I)$ são tais que $\exp(s_1\pi Z_\alpha) b = \exp(s_2\pi Z_\alpha) b$, então

$$\exp((s_1 - s_2)\pi Z_\alpha) b = b \in C_1,$$

donde $\exp((s_1-s_2)\pi Z_\alpha) \in M(\alpha)$, pelo Lema 2.14. Logo, pelo Lema 2.10, temos que $s_1-s_2 = k$, para algum inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Como $0 < s_1, s_2 < 1$, segue que $k = 0$ e, portanto, $s_1 = s_2$. Assim, T_α é injetora em $\mathrm{int}(I)$. Para a sobrejetividade, segue do item 3 do Lema 2.14 que um elemento de C_{r_α} é da forma $k_\alpha b$, com $k_\alpha \in K(\alpha) \setminus M(\alpha)$. Como $\mathfrak{k}(\alpha) = \mathbb{R}\mathbb{Z}_\alpha$ é unidimensional, segue que $k_\alpha = \exp(t\pi Z_\alpha),\ t \in \mathbb{R}$. Como k_α não está em $M(\alpha)$, segue do Lema 2.10 que t não é inteiro. Mas, também pelo Lema 2.10, temos que $\exp(t\pi Z_\alpha)b = \exp((t+k)\pi Z_\alpha)b$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, de forma que podemos escrever

$$k_\alpha b = \exp(t\pi Z_\alpha)b = \exp(s\pi Z_\alpha b),\ s \in \mathrm{Int}(I),$$

donde $k_\alpha b = T_\alpha(s)$. Assim, T_α é uma bijeção entre $\mathrm{Int}(I)$ e C_{r_α}. Para ver que é difeomorfismo, basta notar que a curva T_α é uma curva integral do campo infinitesimal gerado por πZ_α que passa por b. Notemos que b não é ponto fixo deste campo, pois se fosse, teríamos $T_\alpha(s) = \exp(s\pi Z_\alpha)b = b$, para todo $s \in (0,1)$, o que não pode acontecer, pois $T_\alpha(s) \in C_{r_\alpha}$ e as células são disjuntas. Como b não é ponto fixo, segue que T_α é uma imersão que leva $\mathrm{Int}(I)$ em C_{r_α}. Como C_{r_α} tem dimensão 1, temos que T_α é um difeomorfismo local entre $\mathrm{Int}(I)$ e C_{r_α}. Sendo um difeomorfismo local bijetor, T_α é um difeomorfismo entre $\mathrm{Int}(I)$ e C_{r_α}. ■

O objetivo agora é provar que $T_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C_{r_\alpha r_\beta}$.

Lema 2.16. *Sejam $\alpha, \beta \in \Sigma$ raízes simples com $\alpha \neq \beta$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *MA normaliza $N(\alpha)$.*

2. *M normaliza $K(\alpha)$ e $M(\alpha)$.*

3. *Se $n_\alpha \in N(\alpha)$ e $n_\beta \in N(\beta)$, então $n_\alpha n_\beta r_\beta b = n_\beta r_\beta b$.*

4. *M_* normaliza MA.*

Demonstração. Para o item 1, notemos que A normaliza $N(\alpha)$, pois se $a \in A$ e $n_\alpha \in N(\alpha)$, então $a = \exp(H),\ H \in \mathfrak{a}$ e $n_\alpha = \exp(Y_\alpha),\ Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ (Teorema A.24). Neste caso,

$$an_\alpha a^{-1} = a\exp(Y_\alpha)a^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(a)Y_\alpha).$$

Mas,

$$\mathrm{Ad}(a)Y_\alpha = \mathrm{Ad}(\exp(H))Y_\alpha = e^{\mathrm{ad}(H)}Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,$$

pois $[H, Y_\alpha] = \alpha(H)Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Portanto, A normaliza $\mathfrak{g}_\alpha$. Também temos que M normaliza $N(\alpha)$, pois M normaliza $\mathfrak{g}_\alpha$ (Proposição A.48), de forma que se $m \in M$, então

$$mn_\alpha m^{-1} = m\exp(Y_\alpha)m^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(m)Y_\alpha) \in N(\alpha).$$

Como M e A normalizam $N(\alpha)$, segue que MA normaliza $N(\alpha)$, o que prova o item 1. Para o item 2, como M normaliza $\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_{-\alpha}$ e $\mathfrak{a}(\alpha)$, temos que M normaliza

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Daí, se $X \in \mathfrak{g}(\alpha)$ e $m \in M$, então

$$m \exp(X) m^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(m)X) \in G(\alpha).$$

Como $G(\alpha)$ é gerada por exponenciais de $\mathfrak{g}(\alpha)$, segue que M normaliza $G(\alpha)$, donde M normaliza $K(\alpha) = K \cap G(\alpha)$. Assim, M normaliza $M(\alpha) = M \cap K(\alpha)$, o que prova o item 2. Para o item 3, basta mostrarmos que

$$r_\beta^{-1} n_\beta^{-1} n_\alpha n_\beta r_\beta \in P.$$

Escrevamos $n_\alpha = \exp(Y_\alpha),\ Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, e $n_\beta = \exp(Y_\beta),\ Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$. Neste caso,

$$n_\beta^{-1} n_\alpha n_\beta = n_\beta^{-1} \exp(Y_\alpha) n_\beta = \exp(\mathrm{Ad}(n_\beta^{-1}) Y_\alpha).$$

Mas,

$$\mathrm{Ad}(n_\beta^{-1}) Y_\alpha = \mathrm{Ad}(\exp(-Y_\beta)) Y_\alpha = e^{\mathrm{ad}(-Y_\beta)} Y_\alpha \in \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_{\alpha + k\beta}$$

Daí, $n_\beta^{-1} n_\alpha n_\beta \in N$. Como $\alpha \neq \beta$, e a única raiz simples levada em raiz negativa por r_β é β, temos que $r_\beta(\alpha + k\beta)$ é uma raiz positiva, para todo $k \geq 0$. Daí, segue da Proposição A.48 que

$$r_\beta \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_{\alpha + k\beta} = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_{r_\beta(\alpha + k\beta)} \subseteq \mathfrak{n}\,.$$

Assim,

$$r_\beta^{-1} n_\beta^{-1} n_\alpha n_\beta r_\beta \in N \subseteq P$$

de forma que

$$n_\alpha n_\beta r_\beta b = n_\beta r_\beta b,$$

o que prova o item 3. Para o item 4, sejam $k \in M_*,\ m \in M$ e $H \in \mathfrak{a}$. Neste caso, como $k^{-1}H \in \mathfrak{a}$, segue que

$$kmk^{-1}H = kk^{-1}H = H,$$

donde M_* normaliza M. Como M_* normaliza A e M, segue que M_* normaliza MA, o que prova o item 4. ∎

Lema 2.17. *Se $p_\beta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\beta$ denota a projeção $p_\beta(gb) = gb_\beta$, então*

1. $p_\beta^{-1}(N r_\alpha r_\beta b_\beta) = N r_\alpha b \dot{\cup} N r_\alpha r_\beta b$.

2. $p_\beta|_{N r_\alpha b} : N r_\alpha b \to N r_\alpha b_\beta$ *é difeomorfismo.*

Demonstração. Para o item 1, a decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}(\beta)$ é

$$\mathbb{F}(\beta) = \{b(\beta)\}\dot{\cup}N(\beta)r_\beta b(\beta).$$

Usando o difeomorfismo de $p_\beta^{-1}(b_\beta)$ com $\mathbb{F}(\beta)$ (Lema 2.12) temos que

$$p_\beta^{-1}(b_\beta) = \{b\}\dot{\cup}N(\beta)r_\beta b.$$

Aplicando r_α e usando a equivariância de p_β, ficamos com

$$p_\beta^{-1}(r_\alpha b_\beta) = \{r_\alpha b\}\dot{\cup}r_\alpha N(\beta)r_\beta b.$$

Usando que $r_\alpha \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{r_\alpha\beta}$ (Proposição A.48) e que $r_\alpha(\beta)$ é uma raiz positiva (Lema 2.6), temos que

$$r_\alpha N(\beta) = r_\alpha N(\beta) r_\alpha^{-1} r_\alpha = N(r_\alpha(\beta))r_\alpha,$$

de forma que

$$p_\beta^{-1}(r_\alpha b_\beta) = \{r_\alpha b\}\dot{\cup}N(r_\alpha\beta)r_\alpha r_\beta b.$$

Aplicando N e usando a equivariância de p_β, ficamos com

$$p_\beta^{-1}(Nr_\alpha b_\beta) = Nr_\alpha b\dot{\cup}Nr_\alpha r_\beta b.$$

Mas, $r_\beta b_\beta = b_\beta$, pois $r_\beta \in K(\beta)$. Daí,

$$p_\beta^{-1}(Nr_\alpha r_\beta b_\beta) = p_\beta^{-1}(Nr_\alpha b_\beta) = Nr_\alpha b\dot{\cup}Nr_\alpha r_\beta b.$$

Para provar o item 2, basta mostrarmos que p_β é injetora em $Nr_\alpha b$, pois p_β é equivariante e, em particular, tem posto constante, de forma que se for uma bijeção é um difeomorfismo. Portanto, seja $n_1 r_\alpha b_\beta = n_2 r_\alpha b_\beta$. Neste caso, temos que

$$n_2^{-1}n_1 r_\alpha b \in p_\beta^{-1}(r_\alpha b_\beta) = \{r_\alpha b\}\dot{\cup}N(r_\alpha\beta)r_\alpha r_\beta b.$$

Como $n_2^{-1}n_1 r_\alpha b \in C_{r_\alpha}$ e as células são disjuntas, temos que $n_2^{-1}n_1 r_\alpha b \notin N(r_\alpha\beta)r_\alpha r_\beta b$, de forma que

$$n_2^{-1}n_1 r_\alpha b = r_\alpha b,$$

o que prova que p_β é injetora em $Nr_\alpha b$. ■

O Lema 2.17 acima é o Lema 1.4 de [4], mas enunciado de maneira adequada para o nosso contexto de uma 2-célula. O argumento da demonstração é essencialmente o mesmo.

Proposição 2.18. *$T_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C_{r_\alpha r_\beta}$.*

Demonstração. Primeiro, provemos que $T_{\alpha\beta}(\partial(I \times I))$ está contido no 1-esqueleto. De fato,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(s,0) &= \exp(s\pi Z_\alpha)b \in C_{r_\alpha} \\ T_{\alpha\beta}(s,1) &= \exp(s\pi Z_\alpha)\exp(\pi Z_\beta)b = \exp(s\pi Z_\alpha)b \in C_{r_\alpha}, \end{aligned}$$

pois $\exp(\pi Z_\beta) \in M(\beta)$ (Lema 2.10).

$$T_{\alpha\beta}(0,t) = \exp(t\pi Z_\beta)b \in C_{r_\beta}.$$

Agora, usando que M normaliza $K(\beta)$ (Lema 2.16), temos que

$$T_{\alpha\beta}(1,t) = \exp(\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta)b = \exp(\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta)\exp(-\pi Z_\alpha)b \in C_{r_\beta}.$$

Assim, $T_{\alpha\beta}$ leva $\partial(I \times I)$ no 1-esqueleto. Agora, provemos que $T_{\alpha\beta}$ é um difeomorfismo entre $\mathrm{Int}(I \times I)$ e $C_{r_\alpha r_\beta}$. Por um lado, seja $(s,t) \in \mathrm{Int}(I \times I)$. Neste caso, como $T_\alpha(\mathrm{Int}\, I) = C_{r_\alpha} = N(\alpha)r_\alpha b$, temos que $\exp(s\pi Z_\alpha)b = n_\alpha r_\alpha b$, com $n_\alpha \in N(\alpha)$, de forma que

$$\exp(s\pi Z_\alpha) = n_\alpha r_\alpha q n,$$

com $q \in MA$ e $n \in N$. Notemos que $qn \in P \cap G(\alpha) = P(\alpha) = M(\alpha)A(\alpha)N(\alpha)$. Pela unicidade da decomposição $qn \in M(\alpha)A(\alpha)N(\alpha)$, segue que $q \in M(\alpha)A(\alpha)$ e $n \in N(\alpha)$. Denotemos $n = n'_\alpha \in N(\alpha)$, de forma que

$$\exp(s\pi Z_\alpha) = n_\alpha r_\alpha q n'_\alpha.$$

Também podemos escrever

$$\exp(t\pi Z_\beta)b = n_\beta r_\beta b.$$

Daí,

$$T_{\alpha\beta}(s,t) = \exp(s\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta)b = n_\alpha r_\alpha q n'_\alpha n_\beta r_\beta b.$$

Pelo item 3 do Lema 2.16, temos que $n'_\alpha n_\beta r_\beta b = n_\beta r_\beta b$, donde

$$n_\alpha r_\alpha q n'_\alpha n_\beta r_\beta b = n_\alpha r_\alpha q n_\beta r_\beta b.$$

Como $qn_\beta = qn_\beta q^{-1} q = n'_\beta q$, com $n'_\beta = qn_\beta q^{-1} \in N(\beta)$ (item 1 do Lema 2.16), temos que

$$n_\alpha r_\alpha q n_\beta r_\beta b = n_\alpha r_\alpha n'_\beta q r_\beta b.$$

Mas, M_* normaliza MA (item 4 do Lema 2.16), de forma que $qr_\beta b = r_\beta r_\beta^{-1} q r_\beta b = r_\beta b$. Daí,

$$n_\alpha r_\alpha n'_\beta q r_\beta b = n_\alpha r_\alpha n'_\beta r_\beta b.$$

Usando a Proposição A.48, temos que $n_{r_\alpha(\beta)} = r_\alpha n'_\beta r_\alpha^{-1} \in N(r_\alpha(\beta))$. Assim,

$$n_\alpha r_\alpha n'_\beta r_\beta b = n_\alpha r_\alpha n'_\beta r_\alpha^{-1} r_\alpha r_\beta b = n_\alpha n_{r_\alpha(\beta)} r_\alpha r_\beta b \in C_{r_\alpha r_\beta},$$

pois $C_{r_\alpha r_\beta} = N(\alpha)N(r_\alpha(\beta))r_\alpha r_\beta b$ (Lema 2.14). Portanto,

$$T_{\alpha\beta}(s,t) \in C_{r_\alpha r_\beta}.$$

Reciprocamente, se $n_\alpha n_{r_\alpha(\beta)} r_\alpha r_\beta \in C_{r_\alpha r_\beta}$, então usando a Proposição A.48 temos que $n_\beta = r_\alpha^{-1} n_{r_\alpha(\beta)} r_\alpha \in N(\beta)$, de forma que

$$n_\alpha n_{r_\alpha(\beta)} r_\alpha r_\beta b = n_\alpha r_\alpha r_\alpha^{-1} n_{r_\alpha(\beta)} r_\alpha r_\beta b = n_\alpha r_\alpha n_\beta r_\beta b.$$

Mas, $n_\alpha r_\alpha b = \exp(s\pi Z_\alpha)b$, com $s \in (0,1)$, de forma que

$$n_\alpha r_\alpha = \exp(s\pi Z_\alpha) q n'_\alpha, q \in MA,\ n'_\alpha \in N(\alpha).$$

Daí,

$$n_\alpha r_\alpha n_\beta r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) q n'_\alpha n_\beta r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) q n_\beta r_\beta b,$$

onde a última igualdade segue do item 3 do Lema 2.16. Como MA normaliza $N(\beta)$, segue que

$$\exp(s\pi Z_\alpha) q n_\beta r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) q n_\beta q^{-1} q r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) n'_\beta q r_\beta b,\ n'_\beta \in N(\beta).$$

Usando que M_* normaliza MA, ficamos com

$$\exp(s\pi Z_\alpha) n'_\beta q r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) n'_\beta r_\beta r_\beta^{-1} q r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha) n'_\beta r_\beta b.$$

Mas, $n'_\beta r_\beta b = \exp(t\pi Z_\beta)b$, com $t \in (0,1)$, donde

$$\exp(s\pi Z_\alpha) n'_\beta r_\beta b = \exp(s\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta) b = T_{\alpha\beta}(s,t).$$

Em resumo, $T_{\alpha\beta}$ leva o interior de $I \times I$ em $C_{r_\alpha r_\beta}$ e todo elemento de $C_{r_\alpha r_\beta}$ é imagem de alguém no interior de $I \times I$. Afirmamos que $T_{\alpha\beta}$ é injetora em $\mathrm{Int}(I \times I)$. De fato, sejam (s,t) e $(\tilde{s},\tilde{t})$ em $\mathrm{Int}(I \times I)$ tais que $T_{\alpha\beta}(s,t) = T_{\alpha\beta}(\tilde{s},\tilde{t})$. Sem perda de generalidade, se $s > \tilde{s}$, então multiplicando os dois lados por $\exp(-\tilde{s}\pi Z_\alpha)$, ficamos com

$$T_{\alpha\beta}(s-\tilde{s},t) = T_{\alpha\beta}(0,t).$$

Mas o lado direito está em C_{r_β}, enquanto o lado esquerdo está em $C_{r_\alpha r_\beta}$, o que não pode acontecer pois as células são disjutas. Portanto, $\tilde{s} = s$. Daí,

$$T_{\alpha\beta}(0,t) = T_{\alpha\beta}(0,\tilde{t}),$$

donde $T_\beta(t) = T_\beta(\tilde{t})$ e, portanto, $t = \tilde{t}$. Isso prova que $T_{\alpha\beta}$ é injetora em $\mathrm{Int}(I \times I)$. Por fim, afirmamos que $T_{\alpha\beta}$ é uma imersão de $\mathrm{Int}(I \times I)$ em $\mathbb{F}$. Para isso, basta mostrarmos que

$$\left\{ d(T_{\alpha\beta}|_{(s_0,t_0)})\left(\frac{\partial}{\partial s}|_{(s_0,t_0)}\right), d(T_{\alpha\beta})|_{(s_0,t_0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}|_{(s_0,t_0)}\right)\right\}$$

é linearmente independente no espaço tangente de $C_{r_\alpha r_\beta}$ no ponto $T_{\alpha\beta}(s_0,t_0)$, para todo $(s_0,t_0)\in \mathrm{Int}(I\times I)$. Fixemos $t_0\in(0,1)$ e consideremos a seguinte aplicação

$$T^0_{\alpha\beta}:(0,1)\to C_{r_\alpha r_\beta}b,\ T^0_{\alpha\beta}(s)=T_{\alpha\beta}(s,t_0).$$

Seja $p_\beta:\mathbb{F}\to\mathbb{F}_\beta$ a projeção. Neste caso, como $\exp(t_0\pi Z_\beta)\in K(\beta)$, temos que

$$\begin{aligned} p_\beta\circ T^0_{\alpha\beta}(s) &= \exp(s\pi Z_\alpha)\exp(t_0\pi Z_\beta)b_\beta=\exp(s\pi Z_\alpha)b_\beta \\ &= p_\beta\circ T_\alpha(s). \end{aligned}$$

Como $T_\alpha:(0,1)\to N r_\alpha b$ é um difeomorfismo (Proposição 2.15) e p_β é um difeomorfismo entre $Nr_\alpha b$ e $Nr_\alpha b_\beta$ (Lema 2.17), temos que

$$p_\beta\circ T^0_{\alpha\beta}=p_\beta\circ T_\alpha:(0,1)\to Nr_\alpha b\to Nr_\alpha b_\beta$$

é um difeomorfismo. Daí,

$$dp_\beta\left(d(T_{\alpha\beta})_{(s_0,t_0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}|_{(s_0,t_0)}\right)\right)$$

é base do espaço tangente de $Nr_\alpha b_\beta$ no ponto $p_\beta(T_{\alpha\beta}(s_0,t_0))$. Em particular,

$$d(T_{\alpha\beta})_{(s_0,t_0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}|_{(s_0,t_0)}\right)\neq 0. \tag{2.6}$$

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_{\alpha\beta}(s_0,t)|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}\exp(s_0\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta)b=d(E_{\exp(s_0\pi Z_\alpha)})\left(\frac{d}{dt}\exp(t\pi Z_\beta)b|_{t=t_0}\right) \\ &= d(E_{\exp(s_0\pi Z_\alpha)})\Big(T'_\beta(t_0)\Big), \end{aligned}$$

onde $E_{\exp(s_0\pi Z_\alpha)}$ denota a translação à esquerda, que é um difeomorfismo. Como $T'_\beta(t_0)\neq 0$ (Proposição 2.15), temos que $d(T_{\alpha\beta})_{(s_0,t_0)}(\partial/\partial t|_{(s_0,t_0)})\neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} dp_\beta\left(d(T_{\alpha\beta})_{(s_0,t_0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}|_{(s_0,t_0)}\right)\right) &= \frac{d}{dt}p_\beta(T_{\alpha\beta}(s_0,t))|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}\exp(s_0\pi Z_\alpha)\exp(t\pi Z_\beta)b_\beta|_{t=t_0} \\ &= \frac{d}{dt}\exp(s_0\pi Z_\alpha)b_\beta|_{t=t_0}=0. \end{aligned}$$

Logo, $d(T_{\alpha\beta})(\partial/\partial t|_{(s_0,t_0)})$ não pertence ao subespaço gerado por $d(T_{\alpha\beta})(\partial/\partial s|_{(s_0,t_0)})$, de forma que esses elementos formam um conjunto linearmente independente. Com isso, $T_{\alpha\beta}$ é uma imersão de $\mathrm{Int}(I\times I)$ em $\mathbb{F}$ que cai em $C_{r_\alpha r_\beta}$ e, como $C_{r_\alpha r_\beta}$ tem dimensão 2, segue que $T_{\alpha\beta}$ é um difeomorfismo local de $\mathrm{Int}(I\times I)$ em $C_{r_\alpha r_\beta}$. Sendo um difeomorfismo local bijetor, temos que $T_{\alpha\beta}$ é um difeomorfismo entre $\mathrm{Int}(I\times I)$ e $C_{r_\alpha r_\beta}$. Portanto, $T_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C_{r_\alpha r_\beta}$. ■

Observação 2.19. A demonstração de que $T_{\alpha\beta}$ é um difeomorfismo entre $(0,1) \times (0,1)$ e $C_{r_\alpha r_\beta}$ foi inspirada na demonstração da Proposição 1.9 de [4]. Lá, o resultado é mais geral para uma célula C_w, e o argumento é uma indução sobre $l(w)$, que é semelhante ao que fizemos para $T_{\alpha\beta}$. A diferença é que na Equação 2.6 podemos provar que o conjunto $\{\partial/\partial t_1 T_w, \ldots, \partial/\partial t_{n-1} T_w\}$ é linearmente independente usando que p_{α_n} é submersão (aqui $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n}$ é minimal) e $\partial/\partial t_n T_w$ não pertence ao subespaço gerado, de forma que $\{\partial/\partial t_1 T_w, \ldots, \partial/\partial t_n T_w\}$ é linearmente independente. ■

Denotemos por t_α a classe de homotopia de T_α e $\varepsilon(\alpha, \beta) = (-1)^{n(\alpha,\beta)}$, onde $n(\alpha, \beta)$ é o número de Killing. Para o resultado que enunciaremos abaixo, usaremos o conceito de palavra de fronteira que foi introduzido na Definição A.6.

Proposição 2.20. *Uma palavra de fronteira de $T_{\alpha\beta}$ é $t_\beta t_\alpha t_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)} t_\alpha^{-1}$.*

Demonstração. Consideremos os caminhos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 : I \to \partial(I \times I)$ definidos da seguinte forma:

$$\phi_1(s) = (0, s), \ \phi_2(s) = (s, 1), \ \phi_3(s) = (1, 1-s), \ \phi_4(s) = (1-s, 0).$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\phi_2"] & {} \arrow[d, "\phi_3"] \\ {} \arrow[u, "\phi_1"] & {} \arrow[l, "\phi_4"] \end{tikzcd}.$$

Neste caso, temos que a concatenação dos caminhos

$$\phi = \phi_1 \star \phi_2 \star \phi_3 \star \phi_4$$

é um laço em $\partial(I \times I)$ que gera o grupo fundamental de $\partial(I \times I) \simeq \mathbb{S}^1$. Daí, a palavra de fronteira de $T_{\alpha\beta}$ é a classe de homotopia de $T_{\alpha\beta} \circ \phi$. Mas,

$$T_{\alpha\beta} \circ \phi = (T_{\alpha\beta} \circ \phi_1) \star (T_{\alpha\beta} \circ \phi_2) \star (T_{\alpha\beta} \circ \phi_3) \star (T_{\alpha\beta} \circ \phi_4).$$

Notemos que

$$T_{\alpha\beta} \circ \phi_1 = T_\beta;$$
$$T_{\alpha\beta} \circ \phi_2 = T_\alpha;$$
$$T_{\alpha\beta} \circ \phi_4 = T_\alpha^{-1}.$$

Para calcular $T_{\alpha\beta} \circ \phi_3$, vejamos que

$$T_{\alpha\beta} \circ \phi_3(s) = T_{\alpha\beta}(1, 1-s) = \exp(\pi Z_\alpha) \exp((1-s)\pi Z_\beta) b = \exp(\pi Z_\alpha) \exp(-s\pi Z_\beta) b.$$

Denotando $m_\alpha = \exp(\pi Z_\alpha) \in M(\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} \circ \phi_3(s) &= m_\alpha \exp(-s\pi Z_\beta) b = m_\alpha \exp(-s\pi Z_\beta) m_\alpha^{-1} b \\ &= \exp(-s\pi \operatorname{Ad}(m_\alpha) Z_\beta) = \exp(-s\pi \operatorname{Ad}(\exp(\pi Z_\alpha)) Z_\beta) \\ &= \exp(-s\pi e^{\operatorname{ad}(\pi Z_\alpha)} Z_\beta). \end{aligned}$$

Usando o item 3 do Lema 2.10, temos que $e^{\operatorname{ad}(\pi Z_\alpha)} Z_\beta = (-1)^{n(\alpha,\beta)} Z_\beta = \varepsilon(\alpha,\beta) Z_\beta$ de forma que

$$T_{\alpha\beta} \circ \phi_3(s) = \exp(-s\pi\varepsilon(\alpha,\beta) Z_\beta) = T_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)}(s).$$

Assim,

$$T_{\alpha\beta} \circ \phi = T_\beta \star T_\alpha \star T_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)} \star T_\alpha^{-1}.$$

Portanto, uma palavra de fronteira de $T_{\alpha\beta}$ é

$$t_\beta t_\alpha t_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)} t_\alpha^{-1},$$

como queríamos. ■

Com isso, usando o Teorema A.7, podemos calcular o grupo fundamental de $\mathbb{F} = G/P$ via geradores e relações.

Teorema 2.21. *O grupo fundamental de $\mathbb{F}$ tem a seguinte apresentação: os geradores são t_α, com $\alpha \in \Sigma$, e as seguintes relações: $t_\beta t_\alpha = t_\alpha t_\beta^{\varepsilon(\alpha,\beta)}$, com $\alpha, \beta \in \Sigma,\ \alpha \neq \beta$.*

2.4 GRUPO FUNDAMENTAL DE VARIEDADES FLAG: CASO GERAL

Agora consideremos o caso geral de uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$, isto é, quando $\Theta \subseteq \Sigma$ é qualquer e os espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ não são necessariamente unidimensionais. Para calcular o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$, juntaremos a Proposição 2.15, a Proposição 2.18 e a Proposição 2.8.

Segue da Proposição 2.8 que as células de dimensão 1 são $C^\Theta_{r_\alpha}$ com $\alpha \in \Sigma^* \backslash \Theta$. Portanto, os geradores do grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ são t_α com $\alpha \in \Sigma^* \setminus \Theta$. Agora, calcularemos as palavras de fronteira para as células de dimensão 2.

Consideremos a projeção $p_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ que leva $gb \in \mathbb{F}$ em $p_\Theta(gb) = gb_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$. Notemos que p_Θ está bem definida pois $P \subseteq P_\Theta$. Daí, podemos considerar as aplicações

$$T_\alpha^\Theta : p_\Theta \circ T_\alpha : I \to \mathbb{F}_\Theta, \text{ e } T_{\alpha\beta}^\Theta = p_\Theta \circ T_{\alpha\beta} : I \times I \to \mathbb{F}_\Theta,\ \alpha, \beta \in \Sigma.$$

Notemos que $p_\Theta(C_w) = C_w^\Theta$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Proposição 2.22. *Se $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$ é tal que $m_\alpha = 2$ e $m_{2\alpha} = 0$, então a palavra de fronteira de $C^\Theta_{r_\alpha}$ é trivial*

Demonstração. Segue da Proposição 2.4 que a fronteira de $C^\Theta_{r_\alpha}$ é a célula trivial $C^\Theta_1 = \{b_\Theta\}$, de forma que o laço de fronteira é constante igual a b_Θ e, portanto, a palavra de fronteira é trivial. ■

Proposição 2.23. *Se $\alpha, \beta \in \Sigma^* \setminus \Theta$ com $\alpha \neq \beta$, então $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$ e $t_\beta t_\alpha t_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)} t_\alpha^{-1}$ é uma palavra de fronteira para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$*

Demonstração. Como $\alpha, \beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$, segue que os argumentos da Proposição 2.18 se aplicam neste caso. Daí, basta aplicar a Proposição 2.20. ■

Proposição 2.24. *Se $\alpha \in \Sigma^\star \cap \Theta$ e $\beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$, com $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, então $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$ e $t_\beta t_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)}$ é uma palavra de fronteira para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$, e $t_\alpha = 1$.*

Demonstração. Neste caso, $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$. De fato, como $p_\Theta(C_{r_\alpha r_\beta}) = C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$, temos que $T^\Theta_{\alpha\beta}(\mathrm{Int}(I \times I)) = C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$ e que $T^\Theta_{\alpha\beta}(\partial(I \times I))$ cai no 1-esqueleto. Afirmamos que $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é injetora em $\mathrm{Int}(I \times I)$. De fato, seguindo a mesma ideia da demonstração da Proposição 2.18, se $T^\Theta_{\alpha\beta}(s,t) = T^\Theta_{\alpha\beta}(\tilde{s},\tilde{t})$, então $T^\Theta_{\alpha\beta}(s-\tilde{s},t) = T^\Theta_{\alpha\beta}(0,t)$. Como o lado direito está em $C^\Theta_{r_\beta}$, segue que $s = \tilde{s}$, pois as células são disjuntas. Daí, $T^\Theta_\beta(t) = T^\Theta_\beta(\tilde{t})$. Como $\beta \in \Sigma^\star \setminus \Theta$, caímos no caso da Proposição 2.15, de forma que T^Θ_β é injetora em $\mathrm{Int}(I)$. Agora, $p_\Theta : C_{r_\alpha r_\beta} \to C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$ é uma submersão e, como $C_{r_\alpha r_\beta}$ e $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$ têm dimensão 2, segue que p_Θ é um difeomorfismo local. Como $T_{\alpha\beta} : \mathrm{Int}(I \times I) \to C_{r_\alpha r_\beta}$ é difeomorfismo, temos que

$$T^\Theta_{\alpha\beta} = p_\Theta \circ T_{\alpha\beta} : \mathrm{Int}(I \times I) \to C_{r_\alpha r_\beta} \to C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$$

é um difeomorfismo local. Sendo um difeomorfismo local bijetor, segue que $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é difeomorfismo entre $\mathrm{Int}(I \times I)$ e $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$, de forma que $T^\Theta_{\alpha\beta}$ é uma função característica para $C^\Theta_{r_\alpha r_\beta}$. Com isso, podemos calcular a palavra de fronteira assim como na Proposição 2.20, mas neste caso T_α é um laço trivial pois $\alpha \in \Theta$, de forma que a palavra de fronteira é $t_\beta t_\beta^{-\varepsilon(\alpha,\beta)}$. ■

Com isso, usando o Teorema A.7, podemos calcular o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ via geradores e relações:

Teorema 2.25. *O grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ tem a seguinte apresentação: os geradores são t_α, $\alpha \in \Sigma^\star$, com relações $t_\beta t_\alpha = t_\alpha t_\beta^{\varepsilon(\alpha,\beta)}$, para $\alpha, \beta \in \Sigma^\star$, $\alpha \neq \beta$, e $t_\alpha = 1$, para $\alpha \in \Sigma^\star \cap \Theta$.*

2.5 EXEMPLO: FLAG MAXIMAL DE SL(3, $\mathbb{R}$)

Seja $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$. Neste caso, temos que $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ com $n(\alpha,\beta) = -1$ e $n(\beta,\alpha) = -1$. Daí, o grupo fundamental H do flag maximal $\mathbb{F}$ tem geradores t_α, t_β com relações

$$t_\alpha t_\beta = t_\beta t_\alpha^{-1} \text{ e } t_\beta t_\alpha = t_\alpha t_\beta^{-1}. \tag{2.7}$$

Proposição 2.26. *Se $c = [t_\alpha, t_\beta] = t_\alpha t_\beta t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1}$ denota o comutador de t_α e t_β, então*

$$c = t_\alpha^2 = t_\beta^2 = t_\alpha^{-2} = t_\beta^{-2} \text{ e } c^2 = 1.$$

Demonstração. Usando que $t_\alpha t_\beta = t_\beta t_\alpha^{-1}$, temos que

$$c = t_\alpha (t_\beta t_\alpha^{-1}) t_\beta^{-1} = t_\alpha t_\alpha t_\beta t_\beta^{-1} = t_\alpha^2.$$

Por outro lado,

$$t_\alpha^2 = c = t_\alpha t_\beta (t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1}) = t_\alpha t_\beta (t_\beta t_\alpha)^{-1} = t_\alpha t_\beta (t_\alpha t_\beta^{-1})^{-1} = t_\alpha t_\beta^2 t_\alpha^{-1},$$

de forma que $t_\alpha = t_\beta^2 t_\alpha^{-1}$ e, portanto, $t_\beta^2 = t_\alpha^2 = c$. Também temos que

$$c = (t_\alpha t_\beta) t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = t_\beta t_\alpha^{-2} t_\beta^{-1} = t_\beta (t_\beta)^{-2} t_\beta^{-1} = t_\beta^{-2}.$$

Portanto,

$$c = t_\alpha^2 = t_\beta^2 = t_\beta^{-2} = t_\alpha^{-2} \text{ e } c^2 = 1, \tag{2.8}$$

como queríamos. ∎

Com este resultado, temos que $C = \{1, c\}$ é um subgrupo normal de H.

Proposição 2.27. *O grupo H/C é isomorfo à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Como H é gerado por t_α, t_β e $c = t_\alpha^2 = t_\beta^2 = t_\alpha^{-2} = t_\beta^{-2}$, temos que H/C é um subgrupo com 4 elementos $\{\overline{1}, \overline{t_\alpha}, \overline{t_\beta}, \overline{t_\alpha t_\beta}\}$, onde a barra denota a classe de um elemento em H/C. A identificação

$$\begin{aligned} \overline{1} &\mapsto (0,0) \\ \overline{t_\alpha} &\mapsto (1,0) \\ \overline{t_\beta} &\mapsto (0,1) \\ \overline{t_\alpha t_\beta} &\mapsto (1,1) \end{aligned}$$

define um isomorfismo. ∎

Assim, H é um grupo com 8 elementos. Se $\pi : H \to H/C$ denota a projeção, então a fibra de cada elemento tem dois elementos. Temos que

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\overline{1}) &= \{1, c\} \\
\pi^{-1}(\overline{t_\alpha}) &= \{t_\alpha, t_\alpha^{-1}\} \\
\pi^{-1}(\overline{t_\beta}) &= \{t_\beta, t_\beta^{-1}\} \\
\pi^{-1}(\overline{t_\alpha t_\beta}) &= \{t_\alpha t_\beta, t_\beta t_\alpha\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$H = \{1, c, t_\alpha, t_\alpha^{-1}, t_\beta, t_\beta^{-1}, t_\alpha t_\beta, t_\beta t_\alpha\}.$$

Proposição 2.28. *H é isomorfo ao grupo quaterniônico*

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

de forma que t_α é identificado com i e t_β é identificado com j.

Demonstração. As identificações

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto 1, & c &\mapsto -1 \\
t_\alpha &\mapsto i, & t_\alpha^{-1} &\mapsto -i \\
t_\beta &\mapsto j, & t_\beta^{-1} &\mapsto -j \\
t_\alpha t_\beta &\mapsto k, & t_\beta t_\alpha &\mapsto -k
\end{aligned}$$

definem um isomorfismo. ■

2.6 EXEMPLO: VARIEDADES GRASSMANNIANAS

Uma variedade Grassmaniana $\mathrm{Gr}_k(n+1)$ consiste no conjunto dos subespaços de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensão k. Seja $G = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$. Como todo elemento de G é um isomorfismo e isomorfismos preservam dimensão, temos uma ação natural de G em $\mathrm{Gr}_k(n+1)$. Denotemos por $b \in \mathrm{Gr}_k(n+1)$ o subespaço gerado por $\{e_1, \ldots, e_k\}$, onde $e_1, \ldots, e_{n+1}$ denotam os vetores canônicos. Neste caso, fixemos $x \in \mathrm{Gr}_k(n+1)$, e tomemos uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de x e completemos para uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ (com relação ao produto interno canônico). Com isso, podemos definir um isomorfismo $g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ de forma que $ge_i = v_i$. Como g leva base ortonormal em base ortonormal, temos que g é ortogonal. Caso $\det g = -1$, trocamos v_1 por $-v_1$, de forma que g tenha determinante 1. Notemos que $g \in \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ leva o subespaço $b \in \mathrm{Gr}_k(n+1)$ gerado por $\{e_1, \ldots, e_k\}$ no subespaço $x \in \mathrm{Gr}_k(n+1)$ gerado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Portanto, a órbita de b pela ação de G é todo o conjunto $\mathrm{Gr}_k(n+1)$, de forma que a ação é transitiva. Com isso, podemos colocar uma estrutura de variedade em $\mathrm{Gr}_k(n+1)$ de forma que $\mathrm{Gr}_k(n+1)$ seja difeomorfa à G/G_b, onde G_b denota a isotropia de b. Notemos que G_b consiste no subgrupo das matrizes em blocos da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

onde A é um bloco $k \times k$.

Por outro lado, a álgebra de Lie de G é $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$, que admite uma decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n+1, \mathbb{R})$, $\mathfrak{a}$ consiste no subespaço das matrizes diagonais e $\mathfrak{n}$ consiste na subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal. Neste caso, as raízes são α_{ij}, onde $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}^*$ leva uma matriz $H = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})$ em $a_i - a_j$ e o espaço de raiz associado $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ é o subespaço gerado pela matriz E^{ij} que tem 1 na entrada ij e zero nas demais. As raízes positivas são as raízes α_{ij} com $i < j$ e as raízes negativas são as raízes α_{ij}, com $j < i$. Um sistema simples é $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, onde $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$.

Tomando $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_k\}$, afirmamos que $G_b = P_\Theta$. De fato, notemos que se $j < k < i$, então $\alpha_{ij} \notin \langle \Theta \rangle^-$, pois se $\alpha_{ij} \in \langle \Theta \rangle^-$, então $\alpha_{ji} \in \langle \Theta \rangle^+$, de forma que

$$\alpha_{ji} = \sum_{\alpha \in \Theta} n_\alpha \alpha,$$

e por outro lado,

$$\alpha_{ji} = \alpha_i + \cdots + \alpha_k + \cdots + \alpha_j,$$

o que contraria a unicidade da decomposição de α_{ji} como combinação linear de elementos de Σ. Portanto, temos que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-,$$

de forma que $\mathfrak{p}_\Theta$ consiste na subálgebra das matrizes em blocos da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

onde a é uma matriz $k \times k$. Assim, $G_b = P_\Theta$, de forma que $\mathbb{F}_\Theta = G/G_b \simeq \mathrm{Gr}_k(n+1)$.

Com isso, podemos calcular o grupo fundamental de $\mathrm{Gr}_k(n+1) \simeq \mathbb{F}_\Theta$: temos que $t_\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \Theta$, de forma t_{α_k} é um gerador, submetido a seguinte relação:

$$t_{\alpha_k} = t_{\alpha_k}^{-1}.$$

Logo, o grupo fundamental de $\mathrm{Gr}_k(n+1)$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2$.

3 ABORDAGEM ALGÉBRICA

3.1 PRELIMINARES

O cálculo do grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ via geradores e relações (Teorema 2.25) indica que as raízes que contribuem para o cálculo do grupo fundamental são as raízes de multiplicidade 1. O que faremos agora é dar uma outra abordagem para encontrar o grupo fundamental de uma variedade flag. Para isso, consideraremos o caso em que a álgebra de Lie de G é uma forma real normal, de forma que $\mathfrak{m} = 0$. Depois, calcularemos o exemplo das variedades flag de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, que são os flags de subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Seja G grupo de Lie conexo semissimples com centro finito e álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como no Capítulo 2 e consideremos o caso em que a álgebra de Lie de G é uma forma real normal. Neste caso, temos que $\mathfrak{m} = 0$, de forma que M é discreto. Seja $p : \widetilde{G} \to G$ recobrimento universal de G (veja a Seção A.2.3). Neste caso, denotemos por $\widetilde{P}_\Theta$ o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em $\widetilde{G}$, de forma que $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta = \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta$ é uma variedade flag do tipo Θ de $\widetilde{G}$. Denotemos por $\widetilde{b}_\Theta$ o ponto base $1\widetilde{P}_\Theta \in \widetilde{\mathbb{F}}_\Theta$. Neste caso, temos que $p^{-1}(P_\Theta) = \widetilde{P}_\Theta$ e que $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta$ é difeomorfa à $\mathbb{F}_\Theta$ (veja a Proposição A.43).

Para exibir o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$, usaremos o seguinte resultado (para os detalhes, veja a Proposição A.13): se G é um grupo de Lie, $H \subseteq G$ é um subgrupo fechado e H_1 denota a componente conexa da identidade, então a aplicação natural $G/H_1 \to G/H$ é um fibrado principal com grupo estrutural H/H_1. Daí, se H/H_1 é discreto e G/H_1 é simplesmente conexo, então o grupo fundamental de G/H é isomorfo à H/H_1.

Teorema 3.1. *Se $\widetilde{M}$ denota o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\widetilde{K}$ e $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ denota a componente conexa da identidade de $\widetilde{P}_\Theta$, então o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo à*

$$\widetilde{M}/(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1).$$

Demonstração. Consideremos o fibrado $q : \widetilde{G}/(\widetilde{P}_\Theta)_1 \to \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta$. Como $\widetilde{P}_\Theta = (\widetilde{P}_\Theta)_1\widetilde{M}$ (Proposição A.65), temos que a fibra

$$\frac{\widetilde{P}_\Theta}{(\widetilde{P}_\Theta)_1} = \frac{(\widetilde{P}_\Theta)_1\widetilde{M}}{(\widetilde{P}_\Theta)_1} \simeq \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1}.$$

Em particular, como $\mathfrak{m} = 0$, segue que $\widetilde{M}$ é discreto e, portanto, $\widetilde{P}_\Theta/(\widetilde{P}_\Theta)_1$ é discreto. Além disso, como $\widetilde{G}$ é simplesmente conexo e $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ é conexo, segue que $\widetilde{G}/(\widetilde{P}_\Theta)_1$ é simplesmente conexo (veja a Proposição 1.94 e) de [8]). Portanto, segue da Proposição A.13 que o grupo fundamental de $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta = \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta$ é isomorfo à

$$\frac{\widetilde{P}_\Theta}{(\widetilde{P}_\Theta)_1} \simeq \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1}.$$

O resultado segue pois $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta$ e $\mathbb{F}_\Theta$ são difeomorfas. ■

Corolário 3.2. *O grupo fundamental do flag maximal* $\mathbb{F}$ *é isomorfo à* $\widetilde{M}$.

Demonstração. No caso do flag maximal, temos que $\widetilde{P} = \widetilde{M}\widetilde{A}\widetilde{N}$ e a álgebra de Lie é

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}\,.$$

Daí, $(\widetilde{P})_1$ e $\widetilde{A}\widetilde{N}$ são subgrupos conexos com a mesma álgebra de Lie, de forma que $(\widetilde{P})_1 = \widetilde{A}\widetilde{N}$. Logo, $\widetilde{M} \cap (\widetilde{P})_1 = \{1\}$, de forma que o grupo fundamental de $\mathbb{F}$ é isomorfo à

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P})_1} \simeq \widetilde{M},$$

como queríamos. ■

Observação 3.3. No caso em que $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, vimos na Proposição 2.28 que o grupo fundamental de $\mathbb{F}$ é isomorfo ao grupo quaterniônico

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}.$$

Portanto, $\widetilde{M} \simeq Q_8$.

3.2 ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Com o Teorema 3.1 em mãos, calcularemos o grupo fundamental das variedades flag no caso em que $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, cujas variedades flag são os flags de subespaços em $\mathbb{R}^n$. Para este fim, precisaremos das álgebras de Clifford para obter um recobrimento universal de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. As referências utilizadas foram [10] e [11].

Definição 3.4. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **forma quadrática em** V consiste em uma aplicação $q : V \to \mathbb{R}$ tal que

1. $q(av) = a^2 q(v),\ \forall v \in V,\ \forall a \in \mathbb{R}$.
2. A aplicação $(u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v)$ é bilinear.

Um **espaço quadrático** consiste em um par (V, q) onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e q é uma forma quadrática em V.

Se (V, q) é um espaço quadrático, a forma bilinear

$$B_q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

é a única forma bilinear simétrica tal que $B_q(u,u) = q(u)$. Reciprocamente, se B é uma forma bilinear simétrica em V, então a aplicação $q(u) = B(u,u)$ define uma forma quadrática. Neste sentido, estudar espaços quadráticos é equivalente a estudar espaços com uma forma bilinear simétrica. No decorrer do texto denotaremos a forma bilinear simétrica também por q.

Definição 3.5. Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra associativa com unidade 1. Uma **aplicação de Clifford** de V para $\mathcal{C}$ consiste em uma aplicação linear $\iota : V \to \mathcal{C}$ tal que

$$\iota(v)^2 = -q(v)1, \ \forall v \in V. \tag{3.1}$$

Notemos que a Equação 3.1 é equivalente à

$$\iota(u)\iota(v) + \iota(v)\iota(u) = -2B_q(u,v)1, \ \forall u, v \in V. \tag{3.2}$$

Proposição 3.6. *Seja $\iota : V \to \mathcal{C}$ aplicação de Clifford. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para toda álgebra associativa com unidade $\mathcal{A}$ e para toda aplicação de Clifford $\phi : V \to \mathcal{A}$, existe um único homomorfismo de álgebras $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que $\Phi \circ \iota = \phi$.*

2. *A imagem de ι gera $\mathcal{C}$ e para toda álgebra associativa com unidade $\mathcal{A}$ e para toda aplicação de Clifford $\phi : V \to \mathcal{A}$ existe um homomorfismo $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que $\Phi \circ \iota = \phi$.*

Demonstração. Suponhamos 1. Para mostrar que $\operatorname{Im} \iota$ gera $\mathcal{C}$ sejam $\mathcal{A}$ a subálgebra de $\mathcal{C}$ gerada por $\operatorname{Im} \iota$ e seja $j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ a inclusão. Consideremos a restrição

$$\widetilde{\iota} : V \to \mathcal{A}$$

do contradomínio de ι. Notemos que $\widetilde{\iota}$ é uma aplicação de Clifford, de forma que existe um único homomorfismo $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que $\Phi \circ \iota = \widetilde{\iota}$. Daí,

$$j \circ \Phi \circ \iota = j \circ \widetilde{\iota} = \iota,$$

donde $j \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ pela unicidade de $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Logo, $j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é sobrejetora e, portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{C}$. A implicação $2 \Rightarrow 1$ é imediata, pois se dois homomorfismos coincidem num conjunto gerador então eles são iguais. ∎

Definição 3.7. Uma **álgebra de Clifford** sobre V consiste em um par $(\mathcal{C}, \iota)$, onde $\mathcal{C}$ é uma álgebra associativa com unidade e $\iota : V \to \mathcal{C}$ é uma aplicação de Clifford que satisfaz alguma das condições da Proposição 3.6.

Proposição 3.8. *Se $(\mathcal{C}_1, \iota_1)$ e $(\mathcal{C}_2, \iota_2)$ são álgebras de Clifford sobre V, então existe um isomorfismo $\Phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tal que $\Phi \circ \iota_1 = \iota_2$.*

Demonstração. Como $(\mathcal{C}_1, \iota_1)$ é uma álgebra de Clifford e $\iota_2 : V \to \mathcal{C}_2$ é uma aplicação de Clifford, temos que existe um único homomorfismo $\Phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tal que $\Phi \circ \iota_1 = \iota_2$. Analogamente, existe um único homomorfismo $\Psi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tal que $\Psi \circ \iota_2 = \iota_1$. Daí,

$$\Phi \circ \Psi \circ \iota_2 = \Phi \circ \iota_1 = \iota_2,$$

donde $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$, onde usamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{C}_2} \circ \iota_2 = \iota_2$ e a unicidade do homomorfismo com esta propriedade. Analogamente, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$, donde Φ é isomorfismo. ■

Exemplo 3.9.

1. Consideremos a forma bilinear simétrica $\langle x, y \rangle = xy$ em $\mathbb{R}$ e seja $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a aplicação $\iota(a) = ia$, onde $i = \sqrt{-1}$. Notemos que a aplicação ι é de Clifford. A imagem de ι gera $\mathbb{C}$, pois se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, então $a = \iota(1)\iota(-a)$ e $ib = \iota(b)$. Além disso, sejam $f : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ uma aplicação de Clifford e $\alpha = f(1)$. Notemos que $f(a) = af(1) = a\alpha$ e que
$$\alpha^2 = f(1)^2 = -1.$$
Definamos a aplicação linear $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ na base por $\widetilde{f}(1) = 1$ e $\widetilde{f}(i) = \alpha$, de forma que
$$\widetilde{f}(a + ib) = a1 + b\alpha.$$
Usando que $\alpha^2 = -1$, é possível verificar que $\widetilde{f}$ é um homomorfismo. Por fim,
$$\widetilde{f} \circ \iota(a) = a\alpha = f(a),$$
donde $(\mathbb{C}, \iota)$ é uma aplicação de Clifford sobre $\mathbb{R}$.

2. Consideremos a álgebra dos quatérnions definida da seguinte forma: em $\mathbb{R}^4$, denotemos
$$1 = (1, 0, 0, 0),\ i = (0, 1, 0, 0),\ j = (0, 0, 1, 0)\ k = (0, 0, 0, 1)$$
definamos um produto nesta base de $\mathbb{R}^4$ de acordo com a seguinte tabela:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

A álgebra dos quatérnions consiste do espaço $\mathbb{R}^4$ munido deste produto e é denotado por $\mathbb{H}$. Notemos que a álgebra é associativa com unidade 1, mas não é comutativa, pois $ij = k$, e $ji = -k$. Um elemento de $\mathbb{H}$ é da forma $a + ib + jc + kd$, onde $a = a1$. Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores canônicos de $\mathbb{R}^2$ e definamos a aplicação linear

$\iota : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ na base por $\iota(e_1) = i$ e $\iota(e_2) = j$. Considerando o produto interno canônico em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac + bd,$$

temos que ι é uma aplicação de Clifford, pois

$$\iota((a,b))^2 = (ai+bj)(ai+bj) = -a^2 + abk - bak - b^2 = -(a^2+b^2) = -\langle (a,b),(a,b)\rangle.$$

Notemos que a imagem de ι gera $\mathbb{H}$, pois dado $a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, temos que

$$ib = \iota((b,0)),\ jc = \iota((0,c)) \text{ e } kd = \iota((1,0))\iota((0,d)).$$

Por fim, sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{A}$ uma aplicação de Clifford e sejam $\alpha = f(e_1)$ e $\beta = f(e_2)$. Neste caso,

$$\alpha^2 = f(e_1)^2 = -1 = f(e_2) = \beta^2$$

e

$$\alpha\beta + \beta\alpha = f(e_1)f(e_2) + f(e_2)f(e_1) = -2\langle e_1, e_2\rangle 1 = 0.$$

Definamos a tranformação linear $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathcal{A}$ na base de $\mathbb{R}^4$ por

$$\widetilde{f}(1) = 1,\ \widetilde{f}(i) = \alpha,\ \widetilde{f}(j) = \beta \text{ e } \widetilde{f}(k) = \alpha\beta.$$

Usando que $\alpha^2 = -1,\ \beta^2 = -1$ e $\alpha\beta = -\beta\alpha$, é possível verificar que $\widetilde{f}$ é um homomorfismo. Além disso,

$$\widetilde{f} \circ \iota((a,b)) = a\alpha + b\beta = f(a,b),$$

donde $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Clifford sobre $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.10. *Se (V,q) é um espaço quadrático, então existe uma algebra de Clifford sobre V.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T}(V)$ a álgebra tensorial de V e consideremos I o ideal bilateral gerado por elementos do tipo

$$x \otimes x + q(x,x)1, x \in V.$$

Denotemos por $j : V \to \mathcal{T}(V)$ a inclusão e $\pi : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)/I$ a projeção. Afirmamos que

$$\iota = \pi \circ j : V \to \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)/I$$

é uma aplicação de Clifford. De fato,

$$\iota(x)^2 = \pi(j(x))\pi(j(x)) = \pi(x \otimes x) = \pi(-q(x)1) = -q(x)1.$$

Agora, sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade e $f : V \to \mathcal{A}$ uma aplicação de Clifford. A propriedade universal da álgebra tensorial nos dá que existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{A}$ tal que $\phi \circ j = f$. Notemos que $I \subseteq \ker \phi$, pois

$$\phi(x \otimes x) + q(x, x) = f(x)f(x) + q(x)1 = 0.$$

Logo, existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : \mathcal{T}(V)/I \to \mathcal{A}$ tal que $\widetilde{f} \circ \pi = \phi$. Daí,

$$\widetilde{f} \circ \iota = \widetilde{f} \circ \pi \circ j = \phi \circ j = f.$$

Além disso, se $g : \mathcal{T}(V)/I \to \mathcal{A}$ é um homomorfismo tal que $g \circ \iota = f$, então $g \circ \pi \circ j = f$, donde $g \circ \pi = \phi$, pela unicidade de ϕ e portanto $g = \widetilde{f}$ pela unicidade de $\widetilde{f}$. Assim, o par $(\mathcal{T}(V)/I, \iota)$ é uma álgebra de Clifford sobre V. ■

Proposição 3.11. *Se $(\mathcal{C}, \iota)$ é uma aplicação de Clifford sobre V, então $\iota : V \to \mathcal{C}$ é injetora.*

Assim, podemos identificar V com $\iota(V) \subseteq \mathcal{C}$.

Teorema 3.12. *Se V tem dimensão finita com base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\mathcal{C}$ é uma álgebra de Clifford sobre V, então os elementos da forma*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_s},\ i_1 < \cdots < i_s,\ s = 0, \ldots, n$$

formam uma base de $\mathcal{C}$.

Demonstração. A ideia é que a partir da relação $x_i x_j + x_j x_i = -2q(x_i, x_j)1$ temos que esses elementos geram $\mathcal{C}$ e usar que a dimensão de $\mathcal{C}$ é 2^n, pois $\mathcal{C}$ e $\bigwedge^* V$ são isomorfos como espaços vetoriais (veja Proposição 1.3 de [10]). ■

Como a álgebra de Clifford $\mathcal{C}$ sobre E é uma álgebra associativa, temos que $\mathcal{C}$ admite uma estrutura de álgebra de Lie dada pelo comutador

$$[u, v] = uv - vu,\ u, v \in \mathcal{C}.$$

3.3 PROPRIEDADES DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Sejam (V, q) um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica e seja $\mathrm{Cl}(V, q)$ a álgebra de Clifford associada.

Definição 3.13. Um **morfismo** entre (V, q) e (V', q') consiste em uma aplicação linear $f : V \to V'$ que preserva a forma bilinear, isto é,

$$q'(f(u), f(v)) = q(u, v),\ \forall u, v \in V.$$

Se $f:(V,q)\to(V',q')$ preserva forma e $\iota:V\to \mathrm{Cl}(V,q)$ e $\iota':V'\to\mathrm{Cl}(V',q')$ são as respectivas inclusões, então existe um único homomorfismo

$$\widetilde{f}:\mathrm{Cl}(V,q)\to\mathrm{Cl}(V',q')$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & V' \arrow[d, "\iota'"] \\ \mathrm{Cl}(V,q) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathrm{Cl}(V',q') \end{tikzcd}$$

Proposição 3.14. *Sejam $f:(V,q)\to(V'q')$ e $g:(V'q')\to(V'',q'')$ aplicações que preservam forma. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\widetilde{g\circ f}=\widetilde{g}\circ\widetilde{f}$.
2. $\widetilde{\mathrm{id}_V}=\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}(V,q)}$.

Demonstração. 1. O homomorfismo $\widetilde{g\circ f}:\mathrm{Cl}(V,q)\to\mathrm{Cl}(V'',q'')$ é o único tal que

$$\widetilde{g\circ f}\circ\iota=\iota''\circ(g\circ f).$$

Por outro lado, $\widetilde{f}:\mathrm{Cl}(V,q)\to\mathrm{Cl}(V',q')$ é o único homomorfismo tal que

$$\widetilde{f}\circ\iota=\iota'\circ f$$

e $\widetilde{g}:\mathrm{Cl}(V',q')\to\mathrm{Cl}(V'',q'')$ é o único homomorfismo tal que

$$\widetilde{g}\circ\iota'=\iota''\circ g.$$

Daí,

$$\widetilde{g}\circ\widetilde{f}\circ\iota=\widetilde{g}\circ\iota'\circ f=\iota''\circ g\circ f.$$

A unicidade de $\widetilde{g\circ f}$ nos dá que $\widetilde{g\circ f}=\widetilde{g}\circ\widetilde{f}$.

2. Análogo, usando a unicidade de $\widetilde{\mathrm{id}_V}$.

■

Definição 3.15. Definimos o **grupo ortogonal associado ao espaço** (V,q) como sendo o conjunto

$$O(V,q)=\{f\in\mathrm{GL}(V);\ q(f(u),f(v))=q(u,v),\ \forall u,v\in V\}$$

É claro que $O(V,q)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$, pois se $f,g \in O(V,q)$, então

$$q(g\circ f(u), g\circ f(v)) = q(f(u), f(v)) = q(u,v).$$

e

$$q(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = q(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v)) = q(u,v).$$

Proposição 3.16. *A aplicação $\phi : O(V,q) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(V,q))$ que leva $f : V \to V$ em $\widetilde{f}$ é um homomorfismo injetor.*

Demonstração. Que é homomorfismo, segue da Proposição 3.14. Que é injetor, segue de que $\iota : (V,q) \to \mathrm{Cl}(V,q)$ é injetora, pois se $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, então

$$\iota \circ f = \widetilde{f} \circ \iota = \widetilde{g} \circ \iota = \iota \circ g,$$

donde $f = g$, pois ι é injetora. ■

Consideremos a aplicação $\beta : (V,q) \to (V,q)$ que leva $v \in V$ em $\beta(v) = -v$. Notemos que $\beta^2 = \mathrm{id}_V$ e que

$$q(\beta(u), \beta(v)) = q(-u,-v) = q(u,v),$$

donde $\beta \in O(V,q)$. Definamos $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(V,q))$ da seguinte forma: $\alpha = \widetilde{\beta} : \mathrm{Cl}(V,q) \to \mathrm{Cl}(V,q)$. Como $\beta \circ \beta = \mathrm{id}_V$, segue que

$$\alpha^2 = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\beta} = \widetilde{\beta^2} = \widetilde{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}(V,q)}\,.$$

Sendo assim, $\mathrm{Cl}(V,q)$ se decompõe como soma dos autoespaços de α associados aos autovalores 1 e -1. Seja $\mathrm{Cl}^0(V,q)$ o autoespaço associado ao autovalor 1 e $\mathrm{Cl}^1(V,q)$ o autoespaço associado ao autovalor -1, de forma que

$$\mathrm{Cl}(V,q) = \mathrm{Cl}^0(V,q) \oplus \mathrm{Cl}^1(V,q).$$

Definição 3.17. O autoespaço $\mathrm{Cl}^0(V,q)$ é denominado de **parte par de** $\mathrm{Cl}(V,q)$ e o autoespaço $\mathrm{Cl}^1(V,q)$ é denominado de **parte ímpar de** $\mathrm{Cl}(V,q)$.

Seja $i \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ e consideremos o conjunto

$$\mathrm{Cl}^i(V,q) = \{u \in \mathrm{Cl}(V,q);\ \alpha(u) = (-1)^i u\}.$$

Notemos que se i é par, então $\mathrm{Cl}^i(V,q) = \mathrm{Cl}^0(V,q)$ e se i é ímpar, então $\mathrm{Cl}^i(V,q) = \mathrm{Cl}^1(V,q)$, de forma que

$$\mathrm{Cl}(V,q) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Cl}^i(V,q) = \mathrm{Cl}^0(V,q) \oplus \mathrm{Cl}^1(V,q).$$

Além disso, $\mathrm{Cl}^i(V,q)\,\mathrm{Cl}^j(V,q) \subseteq \mathrm{Cl}^{i+j}(V,q)$, donde

$$\mathrm{Cl}(V,q) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Cl}^i(V,q)$$

é uma álgebra graduada, de forma que $\mathrm{Cl}^i(V,q) = \mathrm{Cl}^0(V,q)$, se i é par, e $\mathrm{Cl}^i(V,q) = \mathrm{Cl}^1(V,q)$, se i é ímpar, isto é, o supraíndice é lido módulo 2. Neste caso, dizemos que

$$\mathrm{Cl}(V,q) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Cl}^i(V,q)$$

é uma **álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada**.

Em particular, $\mathrm{Cl}^0(V,q)$ é fechado para o produto e $1 \in \mathrm{Cl}^0(V,q)$, pois como α é homomorfismo de álgebras, temos que $\alpha(1) = 1$. Portanto, $\mathrm{Cl}^0(V,q)$ é uma subálgebra de $\mathrm{Cl}(V,q)$.

Um elemento $x \in \mathrm{Cl}(V,q)$ é dito **inversível**, quando existe $y \in \mathrm{Cl}(V,q)$ tal que $xy = 1 = yx$. Neste caso, y é único com essa propriedade e é denotado por x^{-1}. Denotemos o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathrm{Cl}(V,q)$ por $\mathrm{Cl}^{\times}(V,q)$ que é um grupo.

Um apêndice: Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que o espaço vetorial subjacente seja de dimensão finita e consideremos $G(\mathcal{A})$ o conjunto dos elementos inversíveis. Temos que $G(\mathcal{A})$ é um grupo. Afirmamos que $G(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ é aberto na topologia induzida por uma norma no espaço vetorial $\mathcal{A}$. De fato, fixado $x \in \mathcal{A}$, seja $E_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a translação à esquerda que leva $y \in \mathcal{A}$ em $E_x(y) = xy$. Notemos que E_x é linear, pois

$$E_x(ay_1 + y_2) = x(ay_1 + y_2) = a(xy_1) + xy_2 = aE_x(y_1) + E_x(y_2).$$

Assim, podemos considerar a aplicação

$$E : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

que leva $x \in \mathcal{A}$ na transformação linear E_x ($\mathcal{L}(\mathcal{A})$ denota o espaço dos operadores lineares de $\mathcal{A}$). Notemos que

$$E_{ax_1+x_2}(y) = (ax_1 + x_2)y = a(x_1y) + x_2y = aE_{x_1} + E_{x_2},$$

de forma que E é uma aplicação linear. Além disso,

$$E_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = E_x \circ E_y(z),$$

e $E_1(x) = x$, isto é,$E_1 = 1 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Logo, E é um homomorfismo de álgebras. Notemos que E é injetora, pois se $E_x = E_y$, então

$$x = E_x(1) = E_y(1) = y.$$

Seja $||\cdot||$ uma norma em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ e definamos

$$|x| = ||E_x||.$$

Notemos que

$$|x| = 0 \Leftrightarrow ||E_x|| = 0 \Leftrightarrow E_x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Além disso, temos que

$$E_{x+y}(z) = (x+y)z = xz + yz = (E_x + E_y)(z),$$

de forma que

$$|x+y| = ||E_{x+y}|| = ||E_x + E_y|| \leq ||E_x|| + ||E_y|| = |x| + |y|.$$

Portanto, $|\cdot|$ define uma norma em $\mathcal{A}$. Notemos que

$$|xy| = ||E_{xy}|| = ||E_x \circ E_y|| \leq ||E_x||||E_y|| = |x||y|.$$

Assim, se $|x| < 1$, então a série $\sum\limits_n x^n$ é convergente, pois

$$\left|\sum_n x^n\right| \leq \sum_n |x^n| \leq \sum_n |x|^n$$

e $\sum |x|^n$ converge. Seja $y = \sum\limits_n x^n$. Neste caso,

$$(1-x)y = (1-x)\sum_n x^n = \lim_n \sum_k^n (1-x)x^k = \lim_n (1 - x^{n+1}) = 1.$$

Portanto, se $|x| < 1$, então $1 - x$ é invertível. Notemos que se $|x| < 1$, então $|-x| < 1$, donde $1 + x$ é invertível. Agora, afirmamos que se x é invertível e $|h| < \dfrac{1}{2|x^{-1}|}$, então $x + h$ é invertível. De fato, neste caso temos que

$$|x^{-1}h| \leq |x^{-1}||h| < \frac{1}{2} < 1,$$

donde $1 + x^{-1}h$ é invertível. Daí,

$$x + h = x(1 + x^{-1}h)$$

é invertível, pois é produto de invertíveis. Assim, o conjunto $G(\mathcal{A})$ dos elementos invertíveis é aberto em $\mathcal{A}$, pois dado $x \in G(\mathcal{A})$, temos que se $|y - x| < \dfrac{1}{2|x^{-1}|}$, então $y = x + (y - x)$ é invertível. Portanto, $G(\mathcal{A})$ é uma subvariedade aberta de $\mathcal{A}$. Como o produto em $\mathcal{A}$ é diferenciável, pois é bilinear e $\mathcal{A}$ tem dimensão finita, segue que o produto em $G(\mathcal{A})$ é diferenciável e, portanto, $G(\mathcal{A})$ é um grupo de Lie. Uma translação à esquerda por g em $G = G(\mathcal{A})$ é a restrição de $E_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, que é linear. Assim,

$$d(E_g|_G)_h = E_g.$$

Seja $X : G \to \mathcal{A}$ um campo invariante à esquerda, isto é,

$$X(gh) = d(E_g)_h(X(h)) = E_g(X(h)) = gX(h),\ \forall g, h \in G.$$

Em particular, vale que

$$X(g) = gX(1),$$

de forma que os campos invariantes à esquerda são da forma gX, onde $X \in \mathcal{A}$. Consideremos o PVI

$$g' = gX,\ g(0) = 1.$$

Como o sistema é linear, temos que a solução da EDO é

$$ge^{tX},\ \text{onde } e^{tX} = \sum_n \frac{(tX)^n}{n!}.$$

Agora, a adjunta de $g \in G$ é

$$\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1 = d(E_g \circ D_{g^{-1}})_1 = E_g \circ D_{g^{-1}},$$

de forma que

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}.$$

A representação adjunta é definida como sendo

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$$

que leva $g \in G$ em $\mathrm{Ad}(g)$. Denotemos a álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda por $\mathfrak{g}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que a representação local do colchete de Lie é

$$[X, Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x)).$$

Sejam $\widetilde{X} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\widetilde{Y} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definidos respectivamente por $\widetilde{X}(x) = xX$ e $\widetilde{Y}(x) = xY$. Temos que X e Y são as restrições de $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, que são lineares. Portanto,

$$[X, Y](x) = Y(X(x)) - X(Y(x)) = x(XY) - x(YX) = (XY - YX)(x).$$

Portanto, o campo $[X, Y]$ coincide com o campo $XY - YX$, de forma que o colchete de Lie é o comutador

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Voltando para as álgebras de Clifford, temos que $\mathrm{Cl}(V, q)$ é uma álgebra associativa, de forma que o grupo dos elementos invertíveis $\mathrm{Cl}^{\times}(V, q)$ é um grupo de Lie, cuja álgebra de Lie é $\mathrm{Cl}(V, q)$.

Proposição 3.18. *Se $v \in V$ é tal que $q(v,v) \neq 0$, então v é invertível.*

Demonstração. Tomando $u = -\dfrac{v}{q(v,v)}$, temos que

$$vu = -\frac{v^2}{q(v,v)} = 1 = uv.$$

■

Proposição 3.19. *Se $v \in V$ é tal que $q(v,v) \neq 0$, então $-\operatorname{Ad}(v)(w) = w - 2\dfrac{q(v,w)}{q(v,v)}v$, para todo $w \in V$.*

Demonstração. Segue diretamente das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}(v)w &= vwv^{-1} = \frac{-1}{q(v,v)}vwv = \frac{-1}{q(v,v)}(-2q(v,w) - wv)v \\ &= 2\frac{q(v,w)}{q(v,v)}v + \frac{1}{q(v,v)}wv^2 = 2\frac{q(v,w)}{q(v,v)}v - w.\end{aligned}$$

■

Usando a Proposição 3.19 e abrindo as contas, é possível verificar que $\operatorname{Ad}(v)$ deixa q invariante, para todo $v \in V$ tal que $q(v,v) \neq 0$, de forma que $\operatorname{Ad}(v) \in O(V,q)$, para todo $v \in V$ tal que $q(v,v) \neq 0$.

Para evitar o sinal negativo na fórmula $-\operatorname{Ad}(v)w = w - 2\dfrac{q(v,w)}{q(v,v)}v$, definimos a representação adjunta torcida

$$\widetilde{\operatorname{Ad}}(v)w = \alpha(v)wv^{-1},$$

onde α é a aplicação que estende $\beta(v) = -v$. Temos que $\widetilde{\operatorname{Ad}(v)} \in \operatorname{GL}(\operatorname{Cl}(V,q))$, para todo $v \in \operatorname{Cl}^\times(V,q)$. Com isso,

$$\operatorname{Ad} : \operatorname{Cl}^\times(V,q) \to \operatorname{GL}(\operatorname{Cl}(V,q))$$

está bem definida e é um homomorfismo de grupos. Notemos que se $v \in V$ é tal que $q(v,v) \neq 0$, então

$$\widetilde{\operatorname{Ad}}(v)w = \alpha(v)wv^{-1} = -vwv^{-1} = -\operatorname{Ad}(v)w = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v,v)}v.$$

Além disso, se $v \in \operatorname{Cl}^0(V,q)$, então $\alpha(v) = v$, de forma que $\widetilde{\operatorname{Ad}}(v) = \operatorname{Ad}(v)$.

Seja $V^\times = \{v \in V;\ q(v,v) \neq 0\}$ e consideremos o subgrupo $P(V,q)$ de $\operatorname{Cl}^\times(V,q)$ gerado por $V^\times$.

Definição 3.20. O grupo **Pin** de $\operatorname{Cl}(V,q)$ é definido como sendo o subgrupo de $P(V,q)$ gerado por $\{v \in V;\ q(v,v) = \pm 1\}$ e é denotado por $\operatorname{Pin}(V,q)$. O grupo **Spin** de $\operatorname{Cl}(V,q)$ é definido como

$$\operatorname{Spin}(V,q) = \operatorname{Pin}(V,q) \cap \operatorname{Cl}^0(V,q).$$

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com o produto denotado por ϕ, e definamos

$$\phi^{\text{opp}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

por $\phi^{\text{opp}}(x, y) = \phi(y, x)$. Temos que ϕ^{opp} é bilinear, definindo assim uma estrutura de álgebra em $\mathcal{A}$, que também é associativa. Em particular, consideremos a álgebra $\text{Cl}(V, q)^{\text{opp}}$ e seja

$$\iota : V \to \text{Cl}(V, q)^{\text{opp}}$$

a inclusão. Como a estrutura de espaço vetorial de $\text{Cl}(V, q)^{\text{opp}}$ é a mesma de $\text{Cl}(V, q)$, temos que ι é linear e, portanto, se estende a um homomorfismo

$$\tau : \text{Cl}(V, q) \to \text{Cl}(V, q)^{\text{opp}}.$$

Notemos que

$$\tau(uv) = vu, \forall u, v \in V$$

Assim, considerando a estrutura de álgebra de $\text{Cl}(V, q)$, temos que τ é um antihomomorfismo, denominado de **aplicação transposta**. A aplicação transposta também é denotada por

$$\tau(u) = u^t, \ u \in \text{Cl}(V, q).$$

Como $\text{Im}\,\iota$ gera $\text{Cl}(V, q)$, temos que todo elemento de $\text{Cl}(V, q)$ se exprime como combinação linear de elementos do tipo

$$u_1 \cdots u_r, \ r \geq 1, \ u_i \in V.$$

Notemos que

$$\tau(u_1 \cdots u_r) = u_r \cdots u_1,$$

de forma que τ^2 coincide com a identidade em um conjunto gerador de $\text{Cl}(V, q)$. Logo, $\tau^2 = \text{id}_{\text{Cl}(V,q)}$. Analogamente, como α é homomorfismo e τ é antihomomorfismo, temos que

$$\tau \circ \alpha(u_1 \cdots u_r) = \tau(\alpha(u_1) \cdots \alpha(u_r)) = \alpha(u_r) \cdots \alpha(u_1) = \alpha(u_r \cdots u_1) = \alpha \circ \tau(u_1 \cdots u_r).$$

Como $\alpha \circ \tau$ e $\tau \circ \alpha$ coincidem num conjunto gerador, segue que $\alpha \circ \tau = \tau \circ \alpha$.

A partir da aplicação transposta, podemos definir a aplicação

$$N : \text{Cl}(V, q) \to \text{Cl}(V, q)$$

que leva $u \in \text{Cl}(V, q)$ em $N(u) = u\alpha(u^t)$, denominada de **aplicação norma**.

Seja $\widetilde{P}(V, q) = \{v \in \text{Cl}^{\times}(V, q);\ \widetilde{\text{Ad}}(v)(V) = V\}$. Notemos que $\widetilde{P}(V, q)$ é um subgrupo de $\text{Cl}^{\times}(V, q)$, pois se $u, v \in \widetilde{P}(V, q)$ e $w \in V$, então

$$V = \widetilde{\text{Ad}}(v^{-1})(\widetilde{\text{Ad}}(v)(V)) = \widetilde{\text{Ad}}(v^{-1})(V).$$

Daí,

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}(uv^{-1})(V) = \widetilde{\mathrm{Ad}}(u)\widetilde{\mathrm{Ad}(v^{-1})}(V) = V,$$

donde $uv^{-1} \in \widetilde{P}(V,q)$ e, portanto, $\widetilde{P}(V,q)$ é subgrupo.

As demonstrações dos próximos resultados são um pouco mais trabalhosas, por isso enunciaremos os resultados e indicaremos a referência da demonstração.

Teorema 3.21. *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e q é uma forma bilinear simétrica não degenerada em V, então o núcleo do homomorfismo*

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} : \widetilde{P}(V,q) \to \mathrm{Aut}(V)$$

é o conjunto

$$\mathbb{K}^{\times} = \{a \in \mathbb{K};\ a \neq 0\}.$$

Demonstração. Veja a Proposição 2.4 de [10]. ■

Proposição 3.22. *1.* $P(V,q) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Cl}(V,q);\ r \geq 0$ *e* $v_i \in V^{\times}\}$.

2. Se $S = \{v \in V;\ q(v,v) = \pm 1\}$, *então* $\mathrm{Pin}(V,q) = \{v_1 \cdots v_r;\ r \geq 0,$ *e* $v_i \in S\}$.

3. $\mathrm{Spin}(V,q) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Pin}(V,q);\ r$ *é par*$\}$.

Demonstração. Veja as equações 2.20, 2.24 e 2.25 de [10] ou a Proposição 2.0.13 de [11] ■

Notemos que se $v \in \mathrm{Spin}(V,q)$, então $v = v_1 \cdots v_{2k}$, com $q(v_i) = \pm 1$, de forma que

$$\alpha(v) = \alpha(v_1) \cdots \alpha(v_{2k}) = (-1)^{2k} v_1 \cdots v_{2k} = v.$$

Portanto, se $v \in \mathrm{Spin}(V,q)$, então $\mathrm{Ad}(v) = \widetilde{\mathrm{Ad}}(v)$.

3.4 RECOBRIMENTO UNIVERSAL DE $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$

Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e q o produto interno canônico. Neste caso, denotamos a álgebra de Clifford por Cl_n e o grupo Spin por Spin_n.

Proposição 3.23. *A sequência*

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n \xrightarrow{\gamma} SO(n,\mathbb{R}) \to 0$$

é exata, onde $\gamma = \mathrm{Ad}\,|_{\mathrm{Spin}_n}$, $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ *e* $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n$ *é a inclusão.*

Proposição 3.24. *Se $n > 2$, então o grupo* Spin_n *é simplesmente conexo.*

Demonstração. Como $\gamma : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ é um recobrimento duplo (a fibra tem dois elementos) de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, segue que o subgrupo $\gamma_*(\pi_1(\mathrm{Spin}_n),\cdot)$ tem índice 2 em $\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}),\cdot)$, isto é, a cardinalidade de $\dfrac{\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}),\cdot)}{\gamma_*(\pi_1(\mathrm{Spin}_n,\cdot))}$ é dois. Mas para $n > 2$ temos que o grupo fundamental de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ é $\mathbb{Z}_2$. Assim, pelo Teorema de Lagrange, a cardinalidade de $\gamma_*(\pi_1(\mathrm{Spin}_n,\cdot))$ é 1. Como γ_* é injetora, pois $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ é recobrimento, segue que Spin_n é simplesmente conexo. ∎

Sejam $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $n > 2$, com decomposição de Iwasawa $G = KAN$, onde $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, A é o subgrupo das matrizes diagonais com entradas positivas e N é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal. Denotemos por $\widetilde{G}$ o recobrimento universal de G. Neste caso, temos que

$$\widetilde{G} = \widetilde{KAN} \simeq \widetilde{K}\widetilde{A}\widetilde{N} = \widetilde{K}AN,$$

pois A, N são simplesmente conexos. Como $\widetilde{K}$ é o recobrimento universal de $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, temos que K é isomorfo ao grupo Spin_n, para $n > 2$. Em particular, a álgebra de Lie de Spin_n é $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

Proposição 3.25. *O grupo* $\mathrm{Spin}(V,q)$ *é subgrupo fechado de* $\mathrm{Cl}^\times(V,q)$ *e, portanto, é subgrupo de Lie.*

Demonstração. Basta usar que os elementos de $\mathrm{Spin}(V,q)$ são da forma $w_1\cdots w_r \in \mathrm{Pin}(V,q)$ com r par e usar a aplicação norma, que é homomorfismo contínuo e coincide com q em V. ∎

Assim, a exponencial $\exp : \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Spin}_n$ é a restrição da exponencial $\exp : \mathrm{Cl}(V,q) \to \mathrm{Cl}^\times(V,q)$, que é

$$\exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}.$$

Proposição 3.26. *O subespaço gerado por* $\{[x,y];\ x,y \in \mathbb{R}^n\}$ *coincide com o subespaço gerado por* $\{xy;\ x,y \in \mathbb{R}^n,\ q(x,y) = 0\}$ *e este subespaço é uma subálgebra de Lie isomorfa à* $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$. *A identificação é feita da seguinte forma*

$$F^{ij} = E^{ij} - E^{ji} \leftrightarrow -\frac{1}{2}e_ie_j;\ 1 \leq i < j \leq n,$$

onde e_i *denota os vetores canônicos.*

Demonstração. Proposição 11.14 de [6]. ∎

3.5 GRUPO FUNDAMENTAL DE VARIEDADES FLAG DE SL$(n,\mathbb{R})$

O grupo $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie simples cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Uma decomposição de Cartan é $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{s}$ é o subespaço das matrizes simétricas. Temos que o subespaço $\mathfrak{a}$ das matrizes diagonais é um abeliano maximal em $\mathfrak{s}$ e as raízes associadas são

$$\alpha_{ij} : \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i - a_j,$$

sendo $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ o subespaço unidimensional gerado pela matriz E^{ij} que tem 1 na entrada ij e zero nas demais. Neste caso, um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\},$$

onde α_i denota a raiz $\alpha_{i,i+1}$.

Notemos que no caso $n = 2$, temos que $\Sigma = \{\alpha_1\}$, de forma que o único caso não trivial é $\Theta = \emptyset$. Neste caso, a variedade flag é

$$\mathbb{F} \simeq K/M = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}P^1 \simeq \mathbb{S}^1$$

de forma que o grupo fundamental é $\mathbb{Z}$.

Proposição 3.27. *O centralizador M de $\mathfrak{a}$ em $K = SO(n,\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes $\{diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n);\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1 \ e \ |\varepsilon_i| = 1\}$ e M é isomorfo à $\mathbb{Z}_2^{n-1}$.*

Demonstração. Se $k \in M$, então k é uma matriz diagonal, pois centraliza todas as matrizes diagonais. Digamos $k = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Como $k \in SO(n,\mathbb{R})$, temos que $|\varepsilon_i| = 1$ e $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = \det(k) = 1$. Por outro lado, é claro que uma matriz desse tipo centraliza $\mathfrak{a}$. Daí, escolhendo as entradas que contém -1 aos pares, temos que a ordem de M é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k},$$

onde $2k$ é o maior inteiro par menor ou igual a n. Usando o binômio de Newton, temos que

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k,$$

donde

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

temos que a ordem de M é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}.$$

Como M é um grupo finito tal que $x^2 = 1$, para todo $x \in M$, segue que $|M| = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e M é isomorfo à $\mathbb{Z}_2^k$. Como $|M| = 2^{n-1}$, segue que $k = n - 1$. ■

Exemplo 3.28. No caso $n = 3$, temos que

$$M = \{\mathrm{diag}(1, 1, 1), \mathrm{diag}(1, -1, -1), \mathrm{diag}(-1, 1 - 1), \mathrm{diag}(-1, -1, 1)\}.$$

Além disso, o recobrimento universal de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ é

$$\gamma : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}),$$

sendo $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$ o grupo dos quatérnions unitários e $\gamma(u)w = uwu^{-1}, w \in \mathbb{R}^3$, onde $\mathbb{R}^3$ é o subespaço de $\mathbb{H}$ gerado por $\{i, j, k\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \gamma(i)i &= i \\ \gamma(i)j &= -j \\ \gamma(i)k &= -k, \end{aligned}$$

de forma que

$$\gamma(i) = \mathrm{diag}(1, -1, -1).$$

Analogamente, temos que

$$\gamma(j) = \mathrm{diag}(-1, 1, -1) \text{ e } \gamma(k) = \mathrm{diag}(-1, -1, 1).$$

Como o recobrimento é duplo, temos que cada fibra tem exatamente dois elementos e, como o núcleo de γ é $\{\pm 1\}$, temos que

$$\widetilde{M} = \gamma^{-1}(M) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

é o grupo quaterniônico. ■

Sejam $p : \widetilde{G} \to G$ o recobrimento universal de G, de forma que $\widetilde{G} = \widetilde{K}\widetilde{A}\widetilde{N}$. Como $p|_{\widetilde{K}} : \widetilde{K} \to K$ é recobrimento universal (Proposição A.28), temos que $\widetilde{K}$ é difeomorfo ao grupo Spin_n, pois $\gamma = \mathrm{Ad}|_{\mathrm{Spin}_n} : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ é recobrimento universal (Proposição 3.23 e Proposição 3.24), onde $\gamma(u)w = uwu^{-1}$, para todo $w \in \mathrm{Cl}_n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Cl}_n$, então usando que $e_ie_j = -e_je_i$, para todos $i \neq j$ (Equação 3.2), temos que

$$\begin{aligned} \gamma(e_1e_2)e_1 &= e_1e_2e_1e_2^{-1}e_1^{-1} = -e_1e_1e_2e_2^{-1}e_1^{-1} = -e_1 \\ \gamma(e_1e_2)e_2 &= e_1e_2e_2e_2^{-1}e_1^{-1} = -e_2e_1e_2e_2^{-1}e_1^{-1} = -e_2 \\ \gamma(e_1e_2)e_j &= e_1e_2e_je_2^{-1}e_1^{-1} = e_je_1e_2e_2^{-1}e_1^{-1} = e_j, \ \forall j > 2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\gamma(e_1e_2) = \operatorname{diag}(-1, -1, 1, \ldots, 1).$$

De maneira inteiramente análoga, temos que

$$\gamma(e_ie_j) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1_i, 1, \ldots, 1, -1_j, 1, \ldots, 1).$$

Proposição 3.29. *Se $\widetilde{M}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\widetilde{K}$, então $\widetilde{M} = \mathcal{D}_n$, onde*

$$\mathcal{D}_n = \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}};\ 1 \leq i_1, \ldots, i_{2k} \leq n\},$$

e $\widetilde{M}/\ker\gamma$ é isomorfo ao M.

Demonstração. Se $e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n$, então $\gamma(e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ onde cada $\varepsilon_{i_j} = -1$ e os demais ε_i são 1. Portanto, $\gamma(\mathcal{D}_n) \subseteq M$, de forma que $\mathcal{D}_n \subseteq \gamma^{-1}(M) = \widetilde{M}$ (Proposição A.31). Por outro lado, se $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in M$, então os elementos $\varepsilon_i = -1$ aparecem aos pares pois $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1$. Digamos que sejam $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_{2k}}$. Neste caso, $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \gamma(e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}) \in \gamma(\mathcal{D}_n)$, de forma que $\gamma(\mathcal{D}_n) = M$. Assim, se $k \in \widetilde{M}$, então $\gamma(k) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \gamma(\widetilde{k})$, para algum $\widetilde{k} = e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n$. Segue do Teorema 3.21 que o núcleo de γ é ± 1, de forma que $k = \pm e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n$. Em particular, como $\widetilde{M} = \mathcal{D}_n$ e $\gamma : \widetilde{M} \to M$ é sobrejetor, segue que $\widetilde{M}/\ker\gamma \simeq M$. ■

Agora, seja $\Theta \subseteq \Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ e vejamos como descrever $\mathfrak{p}_\Theta$ em termos de matrizes em blocos. Como

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

se $\alpha_i \in \Theta$, então $\mathfrak{g}_{\alpha_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \subseteq \mathfrak{p}_\Theta$. Daí, se $\alpha_i \in \Theta$ e $\alpha_{i-1} \notin \Theta$ e $\alpha_{i+1} \notin \Theta$, então α_i determina um bloco 2×2. Se $\alpha_i, \ldots \alpha_{i+k} \in \Theta$ e $\alpha_{i-1} \notin \Theta$ e $\alpha_{i+k+1} \notin \Theta$, então $\alpha_i, \ldots, \alpha_{i+k}$ determinam um bloco $(k+1) \times (k+1)$. As entradas abaixo desses blocos são nulas. Para exemplificar, consideremos os casos abaixo:

Exemplo 3.30. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$ e consideremos os casos

1. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde A é um bloco 2×2 e B é um bloco 4×4.

2. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_4\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \begin{pmatrix} A & * & * & * \\ 0 & B & * & * \\ 0 & 0 & C & * \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

onde A e C são blocos 2×2 e B e D são blocos 1×1.

3. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

onde A, B, C são blocos 2×2.

Como $\mathfrak{k}_\Theta \subseteq \mathfrak{p}_\Theta \cap \mathfrak{k}$, temos que todo elemento de $\mathfrak{k}_\Theta$ é uma matriz diagonal em blocos, onde cada bloco é determinada por Θ assim como $\mathfrak{p}_\Theta$. Cada bloco é um $\mathfrak{so}(*)$.

Exemplo 3.31. 1. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{k}_\Theta = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $A \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ e $B \in \mathfrak{so}(4, \mathbb{R})$.

2. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_4\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{k}_\Theta = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

onde $A, C \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ e B e D são blocos 1×1.

3. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$\mathfrak{k}_\Theta = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

onde $A, B, C \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.

Se $X = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ é uma matriz diagonal em blocos, então $X^n = \operatorname{diag}(A_1^n, \dots, A_k^n)$, para todo $n \geq 0$. Assim, a exponencial de uma matriz diagonal em blocos é a exponencial de cada bloco.

Observação 3.32. Seja $(K_\Theta)_1$ a componente conexa da identidade de K_Θ. Temos que $(K_\Theta)_1 \subseteq K_\Theta$ é um subgrupo normal, fechado e aberto (pois é componente conexa de um espaço topológico localmente conexo). Em particular, a álgebra de Lie de $(K_\Theta)_1$ é $\mathfrak{k}_\Theta$. Como K_Θ é compacto (fechado dentro do compacto K), temos que $(K_\Theta)_1$ é compacto e conexo e, portanto, a exponencial $\exp : \mathfrak{k}_\Theta \to (K_\Theta)_1$ é sobrejetora (veja o Corolário 11.28 de [9]). Assim, $(K_\Theta)_1$ é uma matriz diagonal em blocos, em que cada bloco é um SO($*$)

Exemplo 3.33.

1. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$(K_\Theta)_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & \mathrm{SO}(4,\mathbb{R}) \end{pmatrix}.$$

2. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_4\}$. Neste caso,

$$(K_\Theta)_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$. Neste caso,

$$(K_\Theta)_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.34. *Seja $\Theta \neq \emptyset$. Se $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ denota a componente conexa da identidade de $(\widetilde{P}_\Theta)$ e $\gamma : \mathrm{Spin}_n \to SO(n,\mathbb{R})$ denota o recobrimento universal, então $\ker\gamma \subseteq (\widetilde{P}_\Theta)_1$.*

Demonstração. Como $\ker\gamma = \{\pm 1\}$ (Teorema 3.21) e $1 \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$, basta mostrarmos que $-1 \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$. Notemos que, para cada i, j, vale que

$$\begin{aligned}
(e_ie_j)^2 &= e_ie_je_ie_j = -e_1^2e_j^2 = -1 \\
(e_ie_j)^3 &= -e_ie_j \\
(e_ie_j)^4 &= -e_ie_j(e_ie_j) = e_i^2e_j^2 = 1 \\
(e_ie_j)^5 &= e_ie_j \\
(e_ie_j)^6 &= (e_ie_j)^2 = -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, se $t \in \mathbb{R}$ e $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, temos que

$$\exp(te_je_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(e_je_{j+1})^k}{k!} = \cos(t) + \sin(t)e_je_{j+1}.$$

Em particular, tomando $t = \pi$, temos que

$$\exp(\pi e_j e_{j+1}) = -1.$$

Agora, como $\Theta \neq \emptyset$, podemos tomar $\alpha_j \in \Theta$. Neste caso, $\mathfrak{g}_{\alpha_j} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_j} \subseteq \mathfrak{p}_\Theta$, de forma que $E^{j,j+1} - E^{j+1,j} \in \mathfrak{p}_\Theta$. Usando a identificação de $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ com uma subálgebra de Cl_n (Proposição 3.26), temos que $\pi e_j e_{j+1} \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta$. Daí,

$$-1 = \exp(\pi e_j e_{j+1}) \in (\widetilde{K_\Theta})_1 \subseteq (\widetilde{P}_\Theta)_1,$$

como queríamos. ■

Lema 3.35. *Se* $\Theta \neq \emptyset$*, então* $\gamma(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1) = M \cap (P_\Theta)_1$.

Demonstração. Como $p(\widetilde{M}) = M$ (Proposição A.31), $p((\widetilde{P}_\Theta)_1) = (P_\Theta)_1$ (Proposição A.43) e $p|_{\widetilde{K}} = \gamma$, temos que

$$p(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1) = \gamma(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1) \subseteq M \cap ((P_\Theta)_1).$$

Por outro lado, seja $m \in M \cap (P_\Theta)_1$. Neste caso, $m = p(\widetilde{m})$, para algum $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ e $m = p(\widetilde{g})$, para algum $\widetilde{g} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$. Mas podemos escrever $\widetilde{g} = \widetilde{k}\widetilde{a}\widetilde{n} \in \widetilde{K}\widetilde{A}\widetilde{N}$, de forma que

$$m = p(\widetilde{g}) = p(\widetilde{k})p(\widetilde{a})p(\widetilde{n}) \in KAN.$$

Logo, $p(\widetilde{a}) = 1$ e $p(\widetilde{n}) = 1$, donde $a = 1$ e $n = 1$, pois $p|_{\widetilde{A}}$ e $p|_{\widetilde{N}}$ são difeomorfismos (Proposição A.29). Assim, $\widetilde{g} = \widetilde{k} \in (P_\Theta)_1$, com $\widetilde{k} \in \widetilde{K}$. Como $p|_{\widetilde{K}} = \gamma$, temos que $\gamma(\widetilde{m}) = m = \gamma(\widetilde{k})$, de forma que

$$\widetilde{m}\widetilde{k}^{-1} \in \ker\gamma \subseteq (\widetilde{P}_\Theta)_1.$$

Logo, $\widetilde{m} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1 \cap \widetilde{M}$. ■

Para o próximo resultado, usaremos o Terceiro Teorema de Isomorfismo de grupos: sejam G grupo, $H, N \subseteq G$ subgrupos normais com $N \subseteq H$. Neste caso, existe um isomorfismo

$$\psi : \frac{G}{H} \to \frac{G/N}{H/N}$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{G}{N} \arrow[d, "\rho"] \\
\frac{G}{H} \arrow[r, "\psi"'] & \frac{G/N}{H/N}
\end{tikzcd}$$

Também usaremos o seguinte fato: se $\phi_0 : G \to \widetilde{G}$ é isomorfismo e $N \subseteq G$ é normal, então existe um isomorfismo

$$\phi : G/N \to \widetilde{G}/\phi_0(N)$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\eta"] \\ G/N \arrow[r, "\phi"'] & \widetilde{G}/\phi_0(N) \end{tikzcd}$$

Corolário 3.36. *Se $\Theta \neq \emptyset$, então existe um isomorfismo*

$$\theta : \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1} \to \frac{M}{M \cap (P_\Theta)_1}$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\eta"] \\ \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1} \arrow[r, "\theta"'] & \frac{M}{M \cap (P_\Theta)_1} \end{tikzcd},$$

onde π e η são as respectivas projeções. Em particular, o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta, b_\Theta) \simeq \frac{M}{M \cap (P_\Theta)_1}.$$

Demonstração. Como $\ker \gamma \subseteq (P_\Theta)_1$, podemos usar o Terceiro Teorema de Isomorfismos que nos dá um isomorfismo

$$\psi : \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1} \to \frac{\widetilde{M}/\ker \gamma}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1/\ker \gamma}$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{\widetilde{M}}{\ker \gamma} \arrow[d, "\rho"] \\ \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1} \arrow[r, "\psi"'] & \frac{\widetilde{M}/\ker \gamma}{\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1/\ker \gamma} \end{tikzcd}.$$

Além disso, segue da Proposição 3.29 que existe um isomorfismo

$$\phi_0 : \widetilde{M}/\ker \gamma \to M$$

tal que $\phi_0 \circ \xi = \gamma$. Pelo Lema 3.35, temos que

$$\phi_0(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1/\ker \gamma) = \phi_0 \circ \xi(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1) = \gamma(\widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_1) = M \cap (P_\Theta)_1.$$

Daí, existe um isomorfismo

$$\phi : \frac{\widetilde{M}/\ker\gamma}{\widetilde{M}\cap(\widetilde{P}_\Theta)_1/\ker\gamma} \to \frac{M}{M\cap(P_\Theta)_1}$$

que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
\frac{\widetilde{M}}{\ker\gamma} \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "\rho"'] & M \arrow[d, "\eta"] \\
\frac{\widetilde{M}/\ker\gamma}{\widetilde{M}\cap(\widetilde{P}_\Theta)_1/\ker\gamma} \arrow[r, "\phi"'] & \frac{M}{M\cap(P_\Theta)_1}
\end{tikzcd}.$$

Tomando $\theta = \phi\circ\psi$, temos que θ é um isomorfismo tal que

$$\theta\circ\pi = \eta\circ(\phi_0\circ\xi) = \eta\circ\gamma,$$

como queríamos. ∎

Proposição 3.37. *Seja $e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n = \widetilde{M}$. Tem-se que $e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$ se, e somente se, a quantidade de índices que aparece em cada bloco definido por $\mathfrak{p}_\Theta$ é par.*

Demonstração. Primeiro, afirmamos que $\widetilde{m} = e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$ se, e somente se $\gamma(\widetilde{m}) \in (P_\Theta)_1$. De fato, se $\widetilde{m} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$, então $\gamma(\widetilde{m}) \in (P_\Theta)_1$ (Lema 3.35). Reciprocamente, se $\gamma(\widetilde{m}) \in (P_\Theta)_1$, então com a notação do Corolário 3.36, temos que

$$1 = \eta(\gamma(\widetilde{m})) = \theta(\pi(\widetilde{m})) \Rightarrow \pi(\widetilde{m}) = 1,$$

pois θ é isomorfismo. Daí, $\widetilde{m} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$. Por outro lado, um elemento $m = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in M$ está em $(P_\Theta)_1 = (K_\Theta)_1 AN$ se, e somente se, está em $(K_\Theta)_1$. Como os blocos de $(K_\Theta)_1$ têm determinante 1, temos que $m \in (K_\Theta)_1$ se, e somente se, a quantidade de $\varepsilon_i = -1$ em cada bloco é par. Mas $\gamma(e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}})$ é uma matriz tal que $e_{i_j} = -1$ e as demais entradas na diagonal são 1, de forma que $e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \in (\widetilde{P}_\Theta)_1$ se, e somente se, a quantidade de índices em cada bloco é par. ∎

Assim, os elementos em um bloco de $\mathfrak{p}_\Theta$ são da forma

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_{i+l}),\ \varepsilon_i\cdots\varepsilon_{i+l} = 1,\ \text{e } |\varepsilon_j| = 1.$$

Logo, se os blocos têm dimensão $r_1,\dots,r_k$, então $r_1+\cdots+r_k = n$ e

$$M\cap(P_\Theta)_1 \simeq \mathbb{Z}_2^{r_1-1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_2^{r_k-1} = \mathbb{Z}_2^{n-k},$$

donde $\mathbb{Z}_2^{n-1}/\mathbb{Z}_2^{n-k} \simeq \mathbb{Z}_2^{k-1}$. Em resumo:

Teorema 3.38. *Se $\Theta \neq \emptyset$, então o grupo fundamental de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2^{k-1}$, onde k é o número de blocos determinado por $\mathfrak{p}_\Theta$.*

Exemplo 3.39. O espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ pode ser visto como uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ escolhendo $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_1\} = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Neste caso, temos dois blocos determinados por $\mathfrak{p}_\Theta$, de forma que o grupo fundamental de $\mathbb{RP}^n$ é $\mathbb{Z}_2$. Já a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ pode ser vista como uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ escolhendo $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_k\}$. Neste caso, também temos dois blocos determinados por Θ, de forma que o grupo fundamental de $\mathrm{Gr}_k(n)$ é $\mathbb{Z}_2$ (como já foi visto na Seção 2.6). ■

Vejamos agora como podemos descrever os geradores do grupo fundamental. Seja

$$m_{ij} = \mathrm{diag}(1, \ldots, -1_i, \ldots, -1_j, \ldots, 1), \ i < j,$$

a matriz diagonal que tem -1 nas entradas ii e jj e 1 nas demais entradas da diagonal. Dado $m = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in M$, temos que a quantidade de $\varepsilon_i = -1$ é par, digamos $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{j_1} \ldots, \varepsilon_{i_k}, \varepsilon_{j_k}$. Neste caso,

$$m = m_{i_1,j_1} \cdots m_{i_k,j_k}, \ i_1 < j_1 < \cdots < i_k < j_k.$$

Portanto, M é gerado por $\{m_{ij};\ 1 \leq i < j \leq n\}$. Mas cada m_{ij} é da forma

$$m_{ij} = m_{i,i+1} \cdots m_{j-1,j},$$

donde M é gerado por

$$\{m_{12}, \ldots, m_{n-1,n}\}.$$

Afirmamos que $M/(M \cap (P_\Theta)_1)$ é gerado pelas classes dos elementos m_{ij} tais que -1_i e -1_j estão em blocos sucessivos. De fato, notemos que $m_{ij} \in (P_\Theta)_1$ se, e somente se, -1_i e -1_j estão no mesmo bloco, pois o determinante de cada bloco é positivo. Além disso, se m_{ij} e m_{rs} são tais que $-1_i, -1_r$ estão em um bloco e $-1_j, -1_s$ estão em um outro bloco, então

$$m_{ij} m_{rs} \in (P_\Theta)_1,$$

de forma que esses elementos estão na mesma classe em $M/(M \cap (P_\Theta)_1)$. Portanto, as classes dos elementos m_{ij} tais que -1_i e -1_j estão em blocos sucessivos geram $M/(M \cap (P_\Theta)_1)$. Em particular, a classe dos elementos $m_{i,i+1}$ tais que -1_i e -1_{i+1} estão em blocos sucessivos geram $M/(M \cap (P_\Theta)_1)$. Para exemplificar essa discussão, consideremos a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n+1) = G/P_\Theta$, onde $G = \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ e

$$P_\Theta = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz $k \times k$. Neste caso, um gerador para o grupo fundamental pode ser escolhido como sendo $m_{k,k+1}$ (que corresponde à raiz simples α_k, veja a Seção 2.6), mas também pode ser escolhido como sendo $m_{1,n+1}$. Essa discussão sobre geradores foi baseada nas notas não publicadas de San Martin [12].

APÊNDICE A –

A.1 TOPOLOGIA

A.1.1 COMPLEXOS CW

As referências para esta seção são os capítulo 5 e 10 de [13] e também o Apêndice de [14].

Sejam $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma coleção de espaços topológicos e consideremos a união disjunta

$$X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \{(\alpha, x_\alpha);\ \alpha \in A \text{ e } x_\alpha \in X_\alpha\} = \bigcup_{\alpha\in A} (\{\alpha\} \times X_\alpha).$$

Para cada $\alpha \in A$, existe uma função injetora

$$\iota_\alpha : X_\alpha \to X$$

definida por $\iota_\alpha(x) = (\alpha, x)$. Portanto, podemos identificar cada X_α com um subconjunto de X. Definamos uma topologia em X da seguinte forma: $U \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $U \cap X_\alpha \subseteq X_\alpha$ é aberto na topologia induzida em X_α, para todo $\alpha \in A$. Não é difícil verificar que isso de fato define uma topologia em X. Notemos que se $U \subseteq X_\alpha$ é aberto, então $U \subseteq X$ é aberto, pois $U \cap X_\alpha = U$, que é aberto em X_α, e $U \cap X_\beta = \emptyset$, para todo $\beta \neq \alpha$.

Seja $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma coleção de conjuntos, Y um conjunto fixado e, para cada $\alpha \in A$, seja

$$f_\alpha : X_\alpha \to Y$$

uma função. Definimos

$$f : \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \to Y$$

por $f(\alpha, x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$. Identificando X_α com um subconjunto de $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, temos que cada f_α é a restrição de f ao X_α e, além disso, f é a única função que estende cada f_α.

Proposição A.1. *Sejam Y espaço topológico $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma coleção de espaços topológico e, para cada $\alpha \in A$, seja*

$$f_\alpha : X_\alpha \to Y$$

uma função. Seja

$$f : \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \to Y$$

a única função que estende cada f_α. Tem-se que f é contínua se, e somente se, cada f_α é contínua.

Sejam X e Y espaços topológicos, $A \subseteq Y$ um subespaço fechado e $f : A \to X$ uma função contínua. Consideremos a relação de equivalência $\sim$ em $X \bigsqcup Y$ gerada por

$$a \sim f(a), \ \forall a \in A.$$

Neste caso, o espaço quociente

$$(X \bigsqcup Y)/\sim$$

é denotado por $X \cup_f Y$ e denominado **espaço de adjunção colando Y em X por f.**

Proposição A.2. *Se $q : X \bigsqcup Y \to X \cup_f Y$ denota a aplicação quociente, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A restrição $q|_X : X \to X \cup_f Y$ é um mergulho topológico e $q(X) \subseteq X \cup_f Y$ é fechado.*
2. *A restrição $q|_{Y \setminus A} : Y \setminus A \to X \cup_f Y$ é um mergulho topológico e $q(Y \setminus A \subseteq) X \cup_f Y$ é aberto.*
3. *$X \cup_f A$ é a união disjunta de $q(Y \setminus A)$ e $q(X)$.*

Seja D^n a bola fechada n-dimensional em $\mathbb{R}^n$. Temos que D^n é uma variedade topológica com bordo, de forma que o conjunto $\operatorname{Int} D^n$ dos pontos interiores é exatamente a bola aberta n-dimensional e o conjunto ∂D^n dos pontos de bordo é a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, $\operatorname{cl}(\operatorname{Int} D^n) = D^n$.

Definição A.3. Uma **n-célula aberta** consiste em um espaço topológico homeomorfo à bola aberta n-dimensional e uma **n-célula fechada** consiste em um espaço topológico homeomorfo à bola fechada n-dimensional.

Como D^n é uma variedade topológica com bordo, segue que toda n-célula fechada é uma variedade topológica com bordo. Denotemos por $\operatorname{Int} D^n$ o conjunto dos pontos interiores e ∂D^n o conjunto dos pontos de bordo. Notemos que se $F : D^n \to \overline{D}^n$ é homeomorfismo, então $x \in D^n$ é ponto interior se, e somente se, $F(x) \in \int D^n$, e $x \in D^n$ é ponto de bordo se, e somente se, $F(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Isso porque um ponto interior de uma variedade com bordo não pode ser ponto de bordo e um ponto de bordo não pode ser ponto interior. Daí, se $x \in \partial D^n$, então $F(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq D^n$, donde

$$x \in F^{-1}(\operatorname{cl}(\operatorname{Int} D^n)) = \operatorname{cl}(F^{-1}(\operatorname{Int} D^n)) = \operatorname{cl}(\operatorname{Int} D^n).$$

Portanto,

$$\operatorname{cl}(\operatorname{Int} D^n) = D^n.$$

Além disso, temos que $\mathrm{Int}(D^n) \subseteq D^n$ é aberto e $\partial D^n \subseteq D^n$ é fechado.

Sejam X espaço topológico, $(D_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma coleção de n-células fechadas e $f_\alpha : \partial D_\alpha \to X,\ \alpha \in A$, coleção de funções contínuas. Neste caso, existe uma única função contínua

$$f : \bigsqcup_{\alpha\in A} \partial D_\alpha \to X$$

que estende cada f_α. Neste caso, cada $\partial D_\alpha \subseteq \bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ é fechado, de forma que $\bigsqcup_{\alpha\in A} \partial D_\alpha \subseteq \bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ é fechado e, portanto, podemos formar o espaço de adjunção

$$X \cup_f \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha \right).$$

Definição A.4. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que Y **é obtido de** X **colando** n**-células**, quando Y é homeomorfo ao espaço de adjunção

$$X \cup_f \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha \right).$$

Definição A.5. Um **complexo CW** consiste em um espaço topológico Hausdorff X que satisfaz as seguintes condições:

1. Existe uma coleção de subespaços $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots$ tais que $X = \bigcup_n X^n$. Cada X_n é denominado n**-esqueleto de** X.
2. X^0 é discreto.
3. Para cada $n \geq 1$ tem-se que X^n é obtido de X^{n-1} colando n-células.
4. Um subespaço $A \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $A \cap X^n \subseteq X^n$ é fechado, para cada n.

Um complexo CW é dito **finito** quando $X = X_n$ para algum n.

Uma n-célula é denotada por e^n_λ. Cada n-célula com $n \geq 1$ admite uma **função característica** T^n_λ, que é a composição

$$T^n_\lambda : D^n \hookrightarrow X^{n-1} \bigsqcup e^n_\lambda \to X^n \hookrightarrow X.$$

A função característica T^n_λ de uma n-célula tem as seguintes propriedades (veja Proposição A.2 de [14])

1. $T^n_\lambda|_{\mathrm{Int}\, D^n} : \mathrm{Int}\, D^n \to e^n_\lambda$ é um homeomorfismo.
2. $T^n_\lambda(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$.

Além disso, vale que $T_\lambda^n(D^n) = \mathrm{cl}(e_\lambda^n)$, isso porque um complexo CW é normal, em particular Hausdorff (veja Proposição A.3 de [14]). Daí, $T_\lambda^n(D^n) \subseteq e_\lambda^n$, pois T_λ^n é contínua e, como $T_\lambda^n(D^n) \subseteq X$ é compacto, segue que é, em particular, fechado e contém e_λ^n. Logo, $\mathrm{cl}(e_\lambda^n) \subseteq T_\lambda^n(D^n)$.

Uma das técnicas para o cálculo do grupo fundamental é o Teorema de van-Kampen (veja a seção 70 de [15]) e a partir dele é possível calcular o grupo fundamental de um complexo CW. A linguagem que utilizaremos pode ser encontrada no Capítulo 7 de [16].

Seja $X = \bigcup_n X_n$ um complexo CW finito com as seguintes propriedades:

1. $X_0 = \{x_0\}$.
2. x_0 está no fecho de todas as 2-células.

Neste caso, temos que o fecho de cada 1-célula e_λ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, de forma que a função característica

$$T_\lambda : D^1 = [-1, 1] \to \mathrm{cl}(e_\lambda)$$

é um laço baseado em x_0, cuja classe de homotopia gera $\pi_1(\mathrm{cl}(e_\lambda), x_0)$. Denotemos por t_λ a classe de homotopia de T_λ. Também temos que $x_0 \in T_\lambda^2(\mathbb{S}^1)$, para toda 2-célula e_λ^2, pois temos que $x_0 \in \mathrm{cl}(e_\lambda^2) = T_\lambda^2(D^2)$, mas $x_0 \notin e_\lambda^2 = T_\lambda^2(\mathrm{Int}\, D^2)$, pois $\{x_0\}$ é uma 0-célula e as células são disjuntas. Assim, $x_0 = T_\lambda^2(z_0)$, com $z_0 \in \mathbb{S}^1$. Seja $\phi : I \to \mathbb{S}^1$ um laço cuja classe de homotopia gera $\pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$. Neste caso,

$$T_\lambda^2(\phi(0)) = T_\lambda^2(z_0) = x_0 = T_\lambda^2(\phi(1)).$$

Logo,

$$R_\lambda = T_\lambda^2 \circ \phi : I \to X$$

é um laço em baseado em x_0.

Definição A.6. Com a notação acima, dizemos que R_λ é um **laço de fronteira** e a classe de homotopia de R_λ é denotada por r_λ e é denominada **palavra de fronteira**.

Teorema A.7. *Se $\{e_\lambda^1;\ \lambda \in L_1\}$ são as 1-células e $\{e_\mu^2;\ \mu \in L_2\}$ são as 2-células, então o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ tem apresentação*

$$\langle t_\lambda,\ \lambda \in L_1 |\ r_\mu,\ \mu \in L_2 \rangle.$$

A.1.2 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

Sejam E, E', B espaços topológicos conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos.

Definição A.8. Dizemos que dois recobrimentos $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ são **equivalentes** quando existe um homeomorfismo $h : E \to E'$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Neste caso, dizemos que h é uma **equivalência de recobrimentos.**

Proposição A.9. *Se $p : E \to B$ é um recobrimento e $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, então a aplicação*

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

é injetora e a imagem $p_*(\pi_1(E, e_0))$ consiste nas classes de laços em b_0 cujos levantamentos são laços em e_0.

Demonstração. Veja a Proposição 1.31 de [14]. ■

Teorema A.10. *Sejam $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ recobrimentos de B, e $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ e $e_0' \in p'^{-1}(b_0)$. Tem-se que existe uma equivalência $h : E \to E'$ com $h(e_0) = e_0'$ se, e somente se, $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E', e_0'))$. Neste caso, a equivalência com $h(e_0) = e_0'$ é única.*

Demonstração. Veja o Teorema 79.2 de [15] ■

Definição A.11. Dizemos que um recobrimento $p : E \to B$ é um **recobrimento universal** quando E é simplesmente conexo.

Seja $p : E \to B$ recobrimento universal. Notemos que o conjunto $\mathcal{C}$ das transformações de recobrimento de $p : E \to B$ é um grupo, denominado **grupo de transformações de recobrimento**. Se $h \in \mathcal{C}$, então $p \circ h = p$, de forma que h preserva cada fibra de p. Neste sentido, $\mathcal{C}$ age em cada fibra $p^{-1}(b_0)$ da segunite forma:

$$(h, e_0) \mapsto h(e_0).$$

A ação é transitiva, pois como E é simplesmente conexo existe uma única transformação de recobrimento $h : E \to E$ tal que $h(e_0) = e_1$ (Teorema A.10). Além disso, a unicidade da transformação de recobrimento nos garante que se $h(e_0) = e_0$, então $h = \mathrm{id}_E$, de forma que a ação é livre. Assim, fixado $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, existe uma bijeção

$$\Psi : \mathcal{C} \to p^{-1}(b_0)$$

que leva $h \in \mathcal{C}$ em $h(e_0)$. Dado $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe um caminho γ em E ligando e_0 a e_1, pois E é conexo por caminhos. Se γ_0 é um outro caminho ligando e_0 a e_1, então $\gamma \star \gamma_0^{-1}$ é um laço em e_0, de forma que $[\gamma \star \gamma_0] = [c_{e_0}]$, pois E é simplesmente conexo. Assim,

$$[c_{b_0}] = p_*[\gamma \star \gamma_0^{-1}] = [p\gamma \star p\gamma_0^{-1}] = [p \circ \gamma] \star [p \circ \gamma_0]^{-1},$$

donde $[p \circ \gamma] = [p \circ \gamma_0]$. A partir disso, podemos definir uma função

$$\Phi : p^{-1}(b_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

que leva $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ na classe $[p \circ \gamma]$, onde γ é um caminho entre e_0 e e_1. Por outro lado, para cada $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, existe um único levantamento $\widetilde{f}$ de f com ponto inicial e_0, pois E é simplesmente conexo (veja a Proposição 1.33 de [14]). Definimos

$$\Xi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

como sendo a função que leva $[f]$ em $\widetilde{f}(1)$. Notemos que $\tilde{f}$ é um caminho entre e_0 e $\tilde{f}(1)$, de forma que

$$\Phi \circ \Xi([f]) = \Phi(\tilde{f}(1)) = [\pi \circ \tilde{f}] = [f].$$

Por outro lado, se γ é um caminho entre e_0 e e_1, então γ é o levantamento de $p \circ \gamma$ com ponto inicial e_0, de forma que

$$\Xi \circ \Phi(e_1) = \Xi([p \circ \gamma]) = \gamma(1) = e_1.$$

Portanto, $\Phi : \mathcal{C} \to \pi_1(B, b_0)$ é bijetora com inversa Ξ. Fazendo a composição de Ψ com Φ, temos que a função

$$\Phi \circ \Psi : \mathcal{C} \to p^{-1}(b_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

é bijetora. Esta função leva $h \in \mathcal{C}$ em $[p \circ \gamma]$, onde γ é um caminho entre e_0 e $h(e_0)$. Para ver que é homomorfismo, sejam $h_1, h_2 \in \mathcal{C}$, $e_1 = h_1(e_0),\ e_2 = h_2(e_0),\ e_3 = h_2(e_1) = h_2(h_1(e_0))$ e sejam γ_1 caminho entre e_0 e e_1, e γ_2 caminho entre e_0 e e_2. Neste caso, $h_1 \circ \gamma_2$ é um caminho entre

$$h_1 \circ \gamma_2(0) = h_1(e_0) = e_1 \text{ e } h_1 \circ \gamma_2(1) = h_1(e_2) = e_3.$$

Assim, $\gamma_1 \star (h_1 \circ \gamma_2)$ está bem definido e é um caminho entre e_0 e e_3. Mas $\gamma_1 \star (h_1 \circ \gamma_2)$ é o levantamento de $(p \circ \gamma_1) \star (p \circ \gamma_2)$, com ponto inicial e_0 pois

$$p \circ (\gamma_1 \star (h_1 \circ \gamma_2)) = (p \circ \gamma_1) \star (p \circ (h_1 \circ \gamma_2)) = (p \circ \gamma_1) \star (p \circ \gamma_2).$$

Portanto,

$$\Phi \circ \Psi(h_1 \circ h_2) = [(p \circ \gamma_1) \star (p \circ \gamma_2)] = [p \circ \gamma_1] \star [p \circ \gamma_2] = (\Phi \circ \Psi(h_1)) \star (\Phi \circ \Psi(h_2)).$$

Em resumo:

Proposição A.12. *Para cada $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ existe um isomorfismo entre $\mathcal{C}$ e $\pi_1(B, b_0)$. Este isomorfismo é dado da seguinte forma: se $h \in \mathcal{C}$ e γ é um caminho entre e_0 e $h(e_0)$, então h é levado em $[p \circ \gamma]$.*

Proposição A.13. *Sejam G grupo de Lie, $H \subseteq G$ subgrupo fechado e H_1 a componente conexa da identidade em H. Tem-se que a aplicação natural*

$$p : G/H_1 \to G/H$$

que leva gH_1 em gH é um fibrado principal com grupo estrutural H/H_1. Em particular, se H/H_1 é discreto, então p é um recobrimento. Além disso, se G/H_1 é simplesmente conexo, então o grupo fundamental de G/H no ponto $b = H \in G/H$ é isomorfo a H/H_1.

Demonstração. Que p é um fibrado com grupo estrutural H/H_1 é a Proposição 13.23 de [9]. Um fibrado localmente trivial com fibra discreta é um recobrimento. Para cada $h \in H$, seja

$$f_h : G/H_1 \to G/H_1$$

a função que leva gH_1 em $f_h(gH_1) = (gh^{-1})H_1$. Esta função está bem definida no sentido em que se $gH_1 = \tilde{g}H_1$, então $\tilde{g}^{-1}g \in H_1$, de forma que

$$h\tilde{g}^{-1}gh^{-1} \in H_1,$$

pois H_1 é normal em H. Logo, $gh^{-1}H_1 = \tilde{g}h^{-1}H_1$. Se $p_1 : G \to G/H_1$ denota a projeção e $D_{h^{-1}}$ denota a translação à direita por h^{-1}, então $p_1 \circ D_{h^{-1}} = f_h \circ p_1$, donde f_h é contínua com inversa $f_{h^{-1}}$. Logo, f_h é homeomorfismo.

Notemos que se $g \in G$, então

$$p(gh^{-1}H_1) = gh^{-1}H = gH = p(gH_1),$$

donde $p \circ f_h(gH_1) = p(gh^{-1}H_1) = p(gH_1)$, e portanto, f_h é uma transformação de recobrimento. Por outro lado, afirmamos que se $\phi \in \mathcal{C}$ é uma tranformação de recobrimento, então $\phi(1H_1) = hH_1$, com $h \in H$. De fato, temos que $\phi(1H_1) = hH_1$, com $h \in G$. Como ϕ é transformação de recobrimento, temos que

$$hH = p \circ \phi(1H_1) = p(1H_1) = 1H,$$

donde $h \in H$. Com isso, a unicidade de ϕ tal que $\phi(1H_1) = hH_1$ (Teorema A.10) nos dá que $\phi = f_{h^{-1}}$. Agora, como H_1 é normal em H, podemos tomar classes laterais à esquerda. Consideremos a função

$$\xi : H/H_1 \to \mathcal{C}$$

que leva $hH_1 = H_1h$ em f_h. Notemos que ξ está bem definida, pois se $H_1h_1 = H_1h_2$, então $h_2h_1^{-1} \in H_1$. Assim, se $g \in G$, então $(gh_1^{-1})H_1 = (gh_2^{-1})H_1$, donde $f_{h_1} = f_{h_2}$. Além disso, ξ é injetora, pois se $f_{h_1} = f_{h_2}$, então

$$h_1^{-1}H_1 = f_{h_1}(1H_1) = f_{h_2}(1H_1) = h_2^{-1}H_1$$

donde $h_2h_1^{-1} \in H_1$ e, portanto $H_1h_1 = H_1h_2$. Como toda transformação de recobrimento é da forma f_h, com $h \in H$, segue que ξ é sobrejetora e, portanto, é bijetora. Para ver que é homomorfismo, basta notar que

$$f_{h_1h_2}(g) = (g(h_1h_2)^{-1})H_1 = (gh_2^{-1})h_1^{-1}H_1 = f_{h_1} \circ f_{h_2}(g).$$

Portanto, o grupo $\mathcal{C}$ das transformações de recobrimento de G/H_1 é isomorfo ao H/H_1 e, como $\mathcal{C}$ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(G/H, 1H)$, segue que H/H_1 é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(G/H, 1H)$. ■

A.2 ESTRUTURA DOS GRUPOS DE LIE

A.2.1 GRUPOS NILPOTENTES

Seja G um grupo de Lie conexo. Dizemos que G é **nilpotente** quando sua álgebra de Lie for uma álgebra nilpotente.

Proposição A.14. *Se G é um grupo conexo nilpotente, então a exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é uma aplicação de recobrimento. Além disso, G é simplesmente conexo se, e somente se,* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é injetora.*

Demonstração. Veja o Corolário 10.9 de [9]. ■

Sejam G um grupo de Lie conexo semissimples com um automorfismo de Cartan θ e seja

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

a decomposição da sua álgebra de Lie em espaços de raízes. Sejam

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Como $\theta\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, temos que

$$\phi_0 = \theta|_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}^- .$$

é isomorfismo. Sejam N e N^- os subgrupos conexos gerados por $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{n}^-$, respectivamente. Como $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{n}^-$ são nilpotentes, segue que N e N^- são nilpotentes. Além disso, o Teorema da decomposição de Iwasawa garante que $\exp : \mathfrak{n} \to N$ é difeomorfismo, de forma que N é simplesmente conexo. Daí, existe um único homomorfismo

$$\Phi : N \to N^-$$

tal que $d\Phi_1 = \phi_0$, de forma que

$$\Phi(\exp(X)) = \exp(\phi_0(X)).$$

Notemos que $\ker \Phi$ é discreto, pois sua álgebra de Lie é $\ker \phi_0 = 0$. Daí, se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n}^-$ são tais que

$$\exp(Y_1) = \exp(Y_2),$$

então escrevendo $Y_i = \phi_0(X_i)$, temos que

$$\Phi(\exp(X_1)) = \Phi(\exp(X_2)).$$

Mas $\exp(X_i)$ está na componente conexa da identidade de N, de forma que

$$\exp(X_1) = \exp(X_2),$$

donde $X_1 = X_2$, pois $\exp : \mathfrak{n} \to N$ é difeomorfismo. Logo, $\exp : \mathfrak{n}^- \to N^-$ é injetora, donde N^- é simplesmente conexo. Sendo N e N^- grupos simplesmente conexos com álgebras de Lie isomorfas, segue que N e N^- são isomorfos.

Precisaremos do seguinte resultado (veja o Lema 2.3 de [17])

Lema A.15. *Sejam $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ subálgebras de $\mathfrak{n}$ tais que*

1. $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_k$.

2. *Cada $\mathfrak{n}_j$ é soma de espaços de raízes $\mathfrak{g}_\alpha$. Nestas condições, a função*

$$N_1 \times \cdots \times N_k \to N$$

que leva $(n_1, \ldots, n_k)$ em $n_1 \cdots n_k$ é difeomorfismo.

A.2.2 DECOMPOSIÇÃO DE CARTAN E IWASAWA

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita e

$$B(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y))$$

a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$.

Definição A.16. Uma **involução de Cartan de $\mathfrak{g}$** consiste em um automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $\theta^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

2. A forma bilinear
$$\langle X, Y \rangle = -B(X, \theta Y)$$
define um produto interno em $\mathfrak{g}$, denominado de **produto interno de Cartan**.

Definição A.17. Dizemos que uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é **semissimples** quando $\mathfrak{g}$ admite uma involução de Cartan.

Se θ é uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ se decompõe como soma direta de autoespaços
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$
onde $\mathfrak{k}$ é o autoespaço associado ao autovalor 1 e $\mathfrak{s}$ é o autoespaço associado ao autovalor -1. Esta decomposição é denomidada de **decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ associada à** θ. Notemos que se $X, Y \in \mathfrak{k}$, então
$$\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y] = [X, Y],$$
donde $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. Logo, $\mathfrak{k}$ é subálgebra. Por outro lado, se $X, Y \in \mathfrak{s}$, então
$$\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y] = [-X, -Y] = [X, Y],$$
donde $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. Em particular, $\mathfrak{s}$ não é subálgebra em geral. Além disso, se $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, então
$$\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y] = [X, -Y] = -[X, Y],$$
donde $[X, Y] \in \mathfrak{s}$. Em resumo, temos que
$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k} \;\; [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}, \;\; [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Proposição A.18. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan associada à θ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de Cartan. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $X \in \mathfrak{k}$, então $\mathrm{ad}(X)$ é antissimétrica com relação ao produto interno de Cartan.*

2. *Se $X \in \mathfrak{s}$, então $\mathrm{ad}(X)$ é simétrica com relação ao produto interno de Cartan.*

3. *$\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ são ortogonais com relação ao produto interno de Cartan e com relação à forma de Cartan-Killing.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathfrak{k}$ e $Y, Z \in \mathfrak{g}$. Usando que $B(\mathrm{ad}(X)Y, Z) + B(Y, \mathrm{ad}(X)Z) = 0$ ficamos com

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle &= -B(\mathrm{ad}(X)Y, \theta Z) = B(Y, \mathrm{ad}(X)\theta Z) = B(Y, [X, \theta Z])\\ &= B(Y, \theta[\theta X, Z]) = B(Y, \theta[X, Z]) = -\langle Y, [X, Z]\rangle\\ &= -\langle Y, \mathrm{ad}(X)Z\rangle,\end{aligned}$$

donde $\mathrm{ad}(X)$ é antissimétrica, demonstrando o item 1. O item 2 é análogo usando que se $X \in \mathfrak{s}$, então $\theta(X) = -X$. Para o item 3, usaremos que a forma de Cartan-Killing é invariante por automorfismos, isto é,

$$B(X, Y) = B(\theta X, \theta Y),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. Sejam $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$. Segue que

$$B(X, Y) = B(\theta X, \theta Y) = -B(X, Y),$$

donde $B(X, Y) = 0$. Assim,

$$\langle X, Y\rangle = -B(X, \theta Y) = B(X, Y) = 0,$$

o que prova o item 3. ■

Sejam θ uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$ e $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ um isomorfimo de álgebras de Lie. Definamos o automorfismo

$$\phi_*\theta = \phi \circ \theta \circ \phi^{-1} : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}.$$

Notemos que

$$(\phi_*\theta)^2(\widetilde{X}) = \phi \circ \theta^2 \circ \phi^{-1}(\widetilde{X}) = \widetilde{X},$$

para todo $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$, donde $\phi_*\theta$ é uma involução de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, denotemos $\phi(X) = \widetilde{X}$. Neste caso, temos que a forma de Cartan-Killing $\widetilde{B}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ é

$$\widetilde{B}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\widetilde{X})(\widetilde{Y})) = \mathrm{tr}(\phi\, \mathrm{ad}(X)\, \mathrm{ad}(Y)\phi^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)) = B(X, Y).$$

Daí, se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$, então

$$-\widetilde{B}(\widetilde{X}, \phi_*\theta\widetilde{Y}) = -\widetilde{B}(\phi(X), \phi \circ \theta(Y)) = -B(X, \theta(Y))$$

define um produto interno em $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Assim, ϕ induz a involução de Cartan $\phi_*\theta$ em $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Notemos que o autoespaço associado ao autovalor 1 é $\phi(\mathfrak{k})$ e o autoespaço associado ao autovalor -1 é $\phi(\mathfrak{s})$, de forma que

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \phi(\mathfrak{k}) \oplus \phi(\mathfrak{s}).$$

A partir de agora, fixemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ associada à θ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de Cartan.

Como $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, existe uma subálgebra abeliana $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contida em $\mathfrak{s}$ que é maximal. Seja $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ um funcional linear de $\mathfrak{a}$ e consideremos o seguinte conjunto

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g};\ \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Caso α seja um funcional linear não nulo de $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, diremos que α é uma **raiz restrita** de $\mathfrak{a}$ (ou simplesmente uma **raiz** de $\mathfrak{a}$) e que $\mathfrak{g}_\alpha$ é um espaço de raiz. O conjunto das raízes restritas é denotado por Π. Valem as seguintes propriedades a respeito dos espaços de raízes (para a demonstração veja a Proposição 6.40 de [8]).

Proposição A.19. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A álgebra $\mathfrak{g}$ se decompõe na soma direta ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$.*
2. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
3. *Se θ é a involução de Cartan, então $\theta \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$.*
4. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, *onde $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$. Além disso, $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{a}$ são ortogonais.*

O conjunto das raízes restritas forma um sistema de raízes[1] em $\mathfrak{a}^*$ (Corolário 6.53 de [8]). Seja $\Sigma \subseteq \Pi$ um sistema simples de raízes. Neste caso, podemos definir o conjunto Π^+ das raízes positivas, que são as raízes que se exprimem como combinação linear de Σ com coeficientes inteiros não negativos.

No caso de uma álgebra semissimples real, os espaços de raízes podem ter dimensão maior do que 1, diferente do que acontece com uma álgebra semissimples complexa. Também pode acontecer de 2α ser raiz, de forma que Π não é um sistema de raízes reduzido. O que acontece é que se $\mathfrak{g}_\alpha$ tem dimensão ímpar, então 2α não é raiz. Este fato está citado na página 530 de [7] e a demonstração está na Proposição 2.3 de [18] ou no Lema 2 da página 33 de [19].

Proposição A.20. *Se m_α denota a dimensão de $\mathfrak{g}_\alpha$ e m_α é impar, então 2α não é raiz.*

Seja $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Pela Proposição A.19, temos que $\mathfrak{n}$ é subálgebra e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$. Vale a seguinte decomposição de $\mathfrak{g}$, conhecida por **decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie**

[1] Para a teoria de sistemas de raízes, veja o Capítulo 3 de [5]. Outras referências são o Capítulo II, seção 5 de [8] e o Capítulo 9 de [6].

Teorema A.21 (Decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie)**.** *Com a notação acima,* $\mathfrak{g}$ *se decompõe na soma direta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}\,.$$

Seja $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ isomorfismo de álgebras de Lie. Vimos anteriormente que $\phi_*\theta$ define uma involução de Cartan, de forma que $\widetilde{\mathfrak{g}} = \phi(\mathfrak{k}) \oplus \phi(\mathfrak{s})$ é decomposição de Cartan de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Seja $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$ abeliana maximal. É claro que $\phi(\mathfrak{a})$ é subálgebra abeliana maximal de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ contida em $\phi(\mathfrak{s})$.

Denotemos por $\widetilde{\Pi}$ o conjunto das raízes de $\phi(\mathfrak{a})$ e seja $\phi^* : \mathfrak{g}^* \to \widetilde{\mathfrak{g}}^*$ a transposta de ϕ^{-1}. Como $\mathfrak{a}^*$ é identificado com um subespaço de $\mathfrak{g}^*$ por extensão de um funcional linear de $\mathfrak{a}$ para um funcional linear de $\mathfrak{g}$, não é difícil verificar que $\widetilde{\Pi} = \phi^*(\Pi)$, que $\phi^*(\Sigma)$ é um sistema simples de raízes em $\widetilde{\Pi}$ e que $\phi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha}$ (Veja a demonstração do Lema 4.6 de [5]). Considerando o conjunto das raízes positivas $\widetilde{\Pi}^+$ definido por $\phi^*(\Sigma)$, temos que $\phi^*(\Pi^+) = \widetilde{\Pi}^+$, de forma que $\phi(\mathfrak{n}) = \sum_{\beta \in \widetilde{\Pi}^+} \mathfrak{g}_\beta = \widetilde{\mathfrak{n}}$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição A.22. *Se* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ *é decomposição de Iwasawa de* $\mathfrak{g}$ *e* $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ *é isomorfismo, então*

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \phi(\mathfrak{k}) \oplus \phi(\mathfrak{a}) \oplus \phi(\mathfrak{n})$$

é decomposição de Iwasawa de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Definição A.23. Um grupo de Lie conexo é dito **semissimples**, quando sua álgebra de Lie é semissimples.

Fixemos um grupo de Lie conexo G semissimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples e consideremos as notações acima. Sejam $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle,\ A = \langle \exp \mathfrak{a} \rangle,\ N = \langle \exp \mathfrak{n} \rangle$ os subgrupos de Lie conexos gerado por $\mathfrak{k},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{n}$, respectivamente.

Teorema A.24 (Decomposição de Iwasawa do grupo de Lie)**.** *Seja* G *um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*. Com as notações acima, seja* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ *uma decomposição de Iwasawa de* $\mathfrak{g}$*. Tem-se que a função*

$$\phi : K \times A \times N \to G$$

definida por $\phi(k, a, n) = kan$ *é um difeomorfismo, de forma que todo elemento* $g \in G$ *se exprime, de forma única, como um produto* $g = kan$*, com* $k \in K,\ a \in A,\ n \in N$*. Além disso,*

1. $K,\ A,\ N$ *e* AN *são subgrupos fechados.*

2. $\exp : \mathfrak{a} \to A$ *e* $\exp : \mathfrak{n} \to N$ *são difeomorfismos, donde* A *e* N *são difeomorfos a espaços euclidianos.*

3. K é compacto e $K = \exp(\mathfrak{k})$ se, e somente se, o centro de G é finito.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada no Teorema 12.12 de [9] ou no Teorema 6.64 de [8].

Uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$ consiste em uma subálgebra nilpotente que coincide com seu próprio normalizador.

Proposição A.25. *Se $\mathfrak{t}$ é um subespaço abeliano maximal contido em $\mathfrak{m}$, então $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Veja Proposição 6.47 de [8]. ■

Assim, $\mathfrak{a}$ está contido em uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Neste caso, a complexificação $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, pois a complexificação de uma subálgebra nilpotente ainda é nilpotente e a propriedade de coincidir com o próprio normalizador não depende dos escalares. Com relação a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, vale a seguinte decomposição em espaços de raízes

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi_{\mathbb{C}}} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha},$$

onde $\Pi_{\mathbb{C}}$ denota o conjunto das raízes com relação à $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Se β é uma raiz restrita, isto é, β é uma raiz de $\mathfrak{a}$, então vale o seguinte resultado:

$$\mathfrak{g}_{\beta} = \mathfrak{g} \cap \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \Pi_{\mathbb{C}} \\ \alpha|_{\mathfrak{a}} = \beta}} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha} \right),$$

(veja as equações 6.48 de [8]). Em particular, as raízes de $\mathfrak{a}$ são restrições das raízes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

A.2.3 RECOBRIMENTO DE GRUPOS DE LIE

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Considerando o recobrimento universal $p : \widetilde{G} \to G$ da variedade subjacente e tomando um elemento $\widetilde{1} \in p^{-1}(\{1\})$, podemos colocar uma estrutura de grupo de Lie em $\widetilde{G}$ de tal forma que $\widetilde{1}$ é a identidade, p é homomorfismo diferenciável e $dp_{\widetilde{1}}$ é isomorfismo entre a álgebra de Lie de $\widetilde{G}$ e a álgebra de Lie de G. (Veja o Teorema 7.16 de [9]). Denotando a identidade em $\widetilde{G}$ por 1 e identificando a álgebra de Lie de $\widetilde{G}$ com a álgebra de Lie de G por meio de dp_1, podemos interpretar dp_1 como sendo a identidade. Como a decomposição de Iwasasa de álgebras de Lie é invariante por isomorfismos, essa identificação não nos causará prejuízos.

Proposição A.26. *Se* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *denota a exponencial de* G *e* $\widetilde{\exp} : \mathfrak{g} \to \widetilde{G}$ *denota a exponencial de* $\widetilde{G}$*, então*

$$p(\widetilde{\exp}(X)) = \exp(X), \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Como $p : \widetilde{G} \to G$ é homomorfismo, temos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, "p"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\widetilde{\exp}"] \arrow[r, "dp_1"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Assim, $p(\widetilde{\exp}(X)) = \exp(dp_1(X)) = \exp(X)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. ∎

Proposição A.27. *Se* $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$*, então* $\mathrm{Ad}(\widetilde{g}) = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g}))$.

Demonstração. Denotemos por E_g e D_g as translações à esquerda e à direita em G por $g \in G$, respectivamente, e C_g a conjugação em G por $g \in G$. Analogamente, sejam $E_{\widetilde{g}}$ e $D_{\widetilde{g}}$ as translações à esquerda e à direita em $\widetilde{G}$ por $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ e $C_{\widetilde{g}}$ a conjugação em $\widetilde{G}$ por $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Neste caso, vale que

$$p \circ E_{\widetilde{g}}(\widetilde{h}) = p(\widetilde{g}\widetilde{h}) = p(\widetilde{g})p(\widetilde{h}) = E_{p(\widetilde{g})} \circ p(\widetilde{h}).$$

Analogamente,

$$p \circ D_{\widetilde{g}} = D_{p(\widetilde{g})} \circ p, \ \forall \widetilde{g} \in \widetilde{G}.$$

Daí,

$$p \circ C_{\widetilde{g}} = p \circ E_{\widetilde{g}} \circ D_{\widetilde{g}^{-1}} = E_{p(\widetilde{g})} \circ p \circ D_{\widetilde{g}^{-1}} = E_{p(\widetilde{g})} \circ D_{p(\widetilde{g})^{-1}} \circ p = C_{p(\widetilde{g})} \circ p.$$

Derivando na identidade e denotando por $\mathrm{Ad}(\widetilde{g})$ a adjunta de $\widetilde{g}$ em $\widetilde{G}$, que é a derivada de $C_{\widetilde{g}}$ na identidade, temos que

$$dp_1 \circ \mathrm{Ad}(\widetilde{g}) = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g})) \circ dp_1.$$

Como dp_1 é a identidade, segue que

$$\mathrm{Ad}(\widetilde{g}) = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g})),$$

como queríamos. ∎

Agora, sejam $\widetilde{K}$, $\widetilde{A}$ e $\widetilde{N}$ os subgrupos conexos de $\widetilde{G}$ gerados por $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$, respectivamente. O Teorema da decomposição de Iwasawa (Teorema A.24) nos dá que $\widetilde{K}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{N}$ e $\widetilde{A}\widetilde{N}$ são subgrupos fechados e $\widetilde{A}$ e $\widetilde{N}$ são simplesmente conexos. Neste caso, $\widetilde{A}\widetilde{N}$ é simplesmente conexo.

Proposição A.28. *Tem-se que* $p(\widetilde{K}) = K$ *e* $p|_{\widetilde{K}} : \widetilde{K} \to K$ *é um recobrimento.*

Demonstração. Seja $\widetilde{k} \in \widetilde{K}$. Neste caso, podemos escrever $\widetilde{k} = \widetilde{\exp}(Z_1) \cdots \widetilde{\exp}(Z_k),\ Z_i \in \mathfrak{k}$, de forma que

$$p(\widetilde{k}) = p(\widetilde{\exp}(Z_1)) \cdots p(\widetilde{\exp}(Z_k)) = \exp(Z_1) \cdots \exp(Z_k) \in K$$

Como todo elemento de K é da forma $\exp(Z_1) \cdots \exp(Z_k),\ Z_i \in \mathfrak{k}$, vale a igualdade $p(\widetilde{K}) = K$. Agora, como $\widetilde{K}$ é subgrupo de $\widetilde{G}$, temos que $p|_{\widetilde{K}} : \widetilde{K} \to K$ é homomorfismo sobrejetor. Para mostrar que $p|_{\widetilde{K}}$ é recobrimento, basta mostrar que a derivada na identidade é um isomorfismo (Veja a Proposição 7.4 de [9]). Mas

$$d(p|_{\widetilde{K}})_1(\mathfrak{k}) = d(p \circ \iota)_1(\mathfrak{k}) = dp_1 \circ d\iota_1(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k},$$

onde $\iota : \widetilde{K} \to \widetilde{G}$ é a inclusão de forma que $d\iota_1(\mathfrak{k})$ é identificado com $\mathfrak{k}$. Daí, temos que $d(p|_{\widetilde{K}}) : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$ é isomorfismo, donde $p|_{\widetilde{K}}$ é recobrimento. ∎

De maneira análoga e usando que $\widetilde{A}\widetilde{N}, \widetilde{A}, \widetilde{N}$ são simplesmente conexos, temos que

Proposição A.29. *Tem-se que* $p(\widetilde{A}\widetilde{N}) = AN,\ p(\widetilde{A}) = A,\ p(\widetilde{N}) = N$ *e* $p|_{\widetilde{A}\widetilde{N}} : \widetilde{A}\widetilde{N} \to AN,\ p|_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to A,\ p|_{\widetilde{N}} : \widetilde{N} \to N$ *são recobrimentos. Em particular, são difeomorfismos.*

Proposição A.30. *Tem-se que* $p^{-1}(K) = \widetilde{K}$.

Demonstração. Se $\widetilde{g} \in p^{-1}(K)$, então usando a decomposição de Iwasawa de $\widetilde{G}$, podemos escrever

$$\widetilde{g} = \widetilde{k}\widetilde{a}\widetilde{n} \in \widetilde{K}\widetilde{A}\widetilde{N},$$

de forma que

$$p(\widetilde{k})p(\widetilde{a})p(\widetilde{n}) = p(\widetilde{g}) \in K,$$

donde $p(\widetilde{a}) = 1$ e $p(\widetilde{n}) = 1$. Como $p|_{\widetilde{A}}$ e $p|_{\widetilde{N}}$ são difeomorfismos sobre A e N, respectivamente, temos que $\widetilde{a} = 1$ e $\widetilde{n} = 1$, donde $\widetilde{g} = \widetilde{k} \in \widetilde{K}$. A outra inclusão é direta de $p(\widetilde{K}) = K$, pois

$$\widetilde{K} \subseteq p^{-1}(p(\widetilde{K})) = p^{-1}(K).$$

Logo, $p^{-1}(K) = \widetilde{K}$. ∎

Proposição A.31. *Se* $\widetilde{M}$ *é o centralizador de* $\mathfrak{a}$ *em* $\widetilde{K}$ *e* M *é o centralizador de* $\mathfrak{a}$ *em* K, *então* $\widetilde{M} = p^{-1}(M)$.

Demonstração. Se $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ e $H \in \mathfrak{a}$, então $p(\widetilde{m}) \in K$ e

$$H = \mathrm{Ad}(\widetilde{m})H = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{m}))H,$$

donde $p(\widetilde{m}) \in M$ e, portanto, $\widetilde{M} \subseteq p^{-1}(M)$. Por outro lado, se $\widetilde{m} \in p^{-1}(M)$, então $\widetilde{m} \in \widetilde{K}$ e

$$\mathrm{Ad}(\widetilde{m})H = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{m}))H = H,$$

donde $p^{-1}(M) = \widetilde{M}$. ■

A.3 VARIEDADES FLAG

A.3.1 SUBÁLGEBRAS PARABÓLICAS

Nesta seção, coletaremos alguns resultados do Capítulo 4 de [3] que nos serão úteis.

Seja G grupo de Lie conexo semissimples com centro finito[2] e álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples com decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de Cartan e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ uma decomposição de Iwasawa. Sejam também $\Pi \subseteq \mathfrak{a}^*$ o conjunto das raízes de $\mathfrak{a}$ e $\Sigma \subseteq \Pi$ um sistema simples de raízes (Veja a Seção A.2.2 para essas definições). Neste caso, como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno, temos o isomorfismo linear canônico

$$\hat{\omega} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$$

que leva $H \in \mathfrak{a}$ no funcional linear $\hat{\omega}(H)(\tilde{H}) = \langle \tilde{H}, H \rangle$. Notemos que $\hat{\omega}$ induz um produto interno em $\mathfrak{a}^*$ definido por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \hat{\omega}^{-1}(\alpha), \hat{\omega}^{-1}(\beta) \rangle.$$

Para cada $\alpha \in \Pi$, seja $H_\alpha = \hat{\omega}^{-1}(\alpha)$ e seja

$$H_\alpha^\vee = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha. \tag{A.1}$$

Neste caso, a teoria de sistemas de raízes nos garante que o conjunto

$$\Pi^\vee = \{H_\alpha^\vee : \alpha \in \Pi\}$$

é um sistema de raízes em $\mathfrak{a}$ que é, num certo sentido, dual à Π. Para mais detalhes, veja o Capítulo 3 de [5], mais especificamente a Proposição 3.23.

Sejam $\Theta \subseteq \Sigma$ e $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathrm{ger}\{H_\alpha : \alpha \in \Theta\}$. Neste caso, existe um subespaço $\mathfrak{a}_\Theta$ de $\mathfrak{a}$ que é o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$, de forma que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta .$$

2 A hipótese de G ter centro finito entra para que na decomposição de Iwasawa $G = KAN$ tenhamos que K seja compacto, na verdade subgrupo compacto maximal. Veja Teorema 6.31 de [8]

Denotemos por $\langle\Theta\rangle$ o conjunto das raízes que são combinações lineares de Θ e seja $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por

$$\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Proposição A.32. *$\mathfrak{g}(\Theta)$ é uma álgebra semissimples, $\theta|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}(\Theta)$ e*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$$

é a decomposição de Cartan associada à $\theta|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$.

Dizemos que $\mathfrak{g}(\Theta)$ é a subálgebra semissimples de tipo Θ.

Denotemos $\langle\Theta\rangle^+ = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+$ e $\langle\Theta\rangle^- = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^-$ e sejam

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}(\Theta)^- = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Proposição A.33. *Tem-se que $\mathfrak{a}(\Theta) \subseteq \mathfrak{s}(\Theta)$ é um abeliano maximal e $\overline{\langle\Theta\rangle} = \{\alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} \colon \alpha \in \langle\Theta\rangle\}$ é o conjunto das raízes de $\mathfrak{a}(\Theta)$. Além disso,*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)$$

é uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}(\Theta)$.

Sejam $G(\Theta),\ K(\Theta),\ A(\Theta),\ N(\Theta)$ os subgrupos conexos de G gerados por $\mathfrak{g}(\Theta),\ \mathfrak{k}(\Theta),\ \mathfrak{a}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)$, respectivamente.

Proposição A.34. *O subgrupo semissimples $G(\Theta)$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$ e tem decomposição de Iwasawa dada por*

$$G(\Theta) = K(\Theta)A(\Theta)N(\Theta).$$

Com isso, temos o seguinte

Proposição A.35. $K(\Theta) = K \cap G(\Theta),\ A(\Theta) = A \cap G(\Theta),\ N(\Theta) = N \cap G(\Theta).$

Proposição A.36. *Se $M(\Theta)_*$ denota o normalizador de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $K(\Theta)$, então $M(\Theta)_* = M_* \cap K(\Theta)$.*

Como $G(\Theta)$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$, temos o seguinte resultado:

Proposição A.37. *Se $M(\Theta)$ denota o centralizador de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $K(\Theta)$, então $M(\Theta) = M \cap K(\Theta)$.*

Denotemos por $\mathfrak{g}_\Theta$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{g}$, isto é,

$$\mathfrak{g}_\Theta = \{X \in \mathfrak{g} \colon [X, H] = 0, \ \forall H \in \mathfrak{a}_\Theta\}$$

e denotemos por $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{g}_\Theta \cap \mathfrak{k}$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{k}$.

Proposição A.38. *Se $\mathfrak{m}$ denota o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ e $\langle\Theta\rangle$ denota o conjunto das raízes que são combinações lineares de Θ, então*

$$\mathfrak{g}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Sejam

$$\mathfrak{n}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha, \ \mathfrak{n}_\Theta^- = \sum_{\alpha \in \Pi^- \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha, \ \mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}(\Theta)^- = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle \cap \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Notemos que se $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\Theta \oplus \mathfrak{n}(\Theta) \text{ e } \mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-.$$

Consideremos o conjunto $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{g}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta$ e notemos que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^- \oplus \mathfrak{n}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-. \tag{A.2}$$

Proposição A.39. *O conjunto $\mathfrak{p}_\Theta$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Definição A.40. A subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$ é denominada de **subálgebra parabólica de tipo** Θ. Caso $\Theta = \emptyset$, denotamos $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{p}$ e dizemos que $\mathfrak{p}$ é a **subálgebra parabólica minimal**.

Proposição A.41. *A subálgebra parabólica minimal se decompõe como*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Definição A.42. O normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G é denotado por P_Θ e é denominado **subgrupo parabólico de tipo** Θ. Caso $\Theta = \emptyset$, denotamos $P_\emptyset$ por P, denominado **subgrupo parabólico minimal.**

Em geral, o normalizador de uma subálgebra em G é um subgrupo fechado de G. Em particular, P_Θ é um subgrupo fechado, de forma que existe uma estrutura diferenciável em G/P_Θ munido da topologia quociente. (Veja Seção 6.7 de [9]). Com essa estrutura, a variedade G/P_Θ é denominada **variedade flag de tipo** Θ e é denotada por $\mathbb{F}_\Theta$. O ponto base $1P_\Theta$ é denotado por b_Θ, de forma que todo elemento de $\mathbb{F}_\Theta$ é da forma gb_Θ, $g \in G$. Quando $\Theta = \emptyset$, o ponto base b_Θ é denotado simplesmente por b.

Sejam $p : \widetilde{G} \to G$ recobrimento universal de G e $\widetilde{P}_\Theta$ o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em $\widetilde{G}$. De maneira análoga, consideremos a variedade $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta = \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta$ e denotemos por $\widetilde{b}_\Theta$ o ponto base $1\widetilde{P}_\Theta \in \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta$. Além disso, sejam $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ e $(P_\Theta)_1$ as respectivas componentes conexas.

Proposição A.43. *1.* $\widetilde{P}_\Theta = p^{-1}(P_\Theta)$.

2. $p((\widetilde{P}_\Theta)_1) = (P_\Theta)_1$.

3. $\widetilde{\mathbb{F}}_\Theta$ *é difeomorfa à* $\mathbb{F}_\Theta$.

Demonstração. Para provar 1, basta usar que $\mathrm{Ad}(\widetilde{g}) = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g}))$, para todo $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ (Proposição A.27). Assim, se $\widetilde{g} \in p^{-1}(P_\Theta)$, então

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g}))\,\mathfrak{p}_\Theta = \mathrm{Ad}(\widetilde{g})\,\mathfrak{p}_\Theta,$$

donde $\widetilde{g} \in \widetilde{P}_\Theta$. Reciprocamente, se $\widetilde{g} \in \widetilde{P}_\Theta$, então

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathrm{Ad}(\widetilde{g})\,\mathfrak{p}_\Theta = \mathrm{Ad}(p(\widetilde{g}))\,\mathfrak{p}_\Theta,$$

donde $\widetilde{g} \in p^{-1}(P_\Theta)$. Para provar 2, basta notarmos que $(\widetilde{P}_\Theta)_1$ e $(P_\Theta)_1$ são os respectivos subgrupos conexos com álgebra de Lie $\mathfrak{p}_\Theta$ e usar o mesmo argumento da Proposição A.28. Agora, para provar 3, temos que $\widetilde{G}$ age transitivamente em $\mathbb{F}_\Theta$ de forma que se $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ e $gb_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$, então

$$\widetilde{g} \cdot (gb_\Theta) = (p(\widetilde{g})g)b_\Theta.$$

Se $\widetilde{G}_{b_\Theta}$ denota o subgrupo de isotropia desta ação, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{g} \in \widetilde{G}_{b_\Theta} &\Leftrightarrow p(\widetilde{g})b_\Theta = b_\Theta \Leftrightarrow p(\widetilde{g}) \in P_\Theta \\ &\Leftrightarrow \widetilde{g} \in p^{-1}(P_\Theta) = \widetilde{P}_\Theta. \end{aligned}$$

Logo, a isotropia desta ação é $\widetilde{P}_\Theta$, de forma que a aplicação

$$\xi_{b_\Theta} : \widetilde{G}/\widetilde{P}_\Theta \to G/P_\Theta$$

dada por $\xi_{b_\Theta}(\widetilde{g}\widetilde{P}_\Theta) = p(\widetilde{g})b_\Theta$ é difeomorfismo (Veja Proposição 13.9 de [9]). ■

Proposição A.44. *O subgrupo parabólico de tipo* Θ *se decompõe como*

$$P_\Theta = K_\Theta AN,$$

sendo K_Θ *o centralizador de* $\mathfrak{a}_\Theta$ *em* K*. Em particular, o subgrupo parabólico minimal se decompõe como*

$$P = MAN,$$

sendo M *o centralizador de* $\mathfrak{a}$ *em* K*.*

A.3.2 GRUPO DE WEYL

Sejam $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de Π e $\mathcal{W}^*$ o grupo de Weyl de $\Pi^\vee$. Neste caso, se r_α denota a reflexão em α no espaço $\mathfrak{a}^*$, então identificando $\mathfrak{a}$ com o bidual $\mathfrak{a}^{**}$, temos que a transposta

$$r_\alpha^t : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$$

é uma reflexão em $H_\alpha^\vee$ (veja a Proposição 3.22 de [5]). Para cada $w \in \mathcal{W}$, denotemos por w^* a transposta da inversa

$$w^* = (w^{-1})^t : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a},$$

de forma que

$$w^* H(\alpha) = H(w^{-1}\alpha) = w^{-1}\alpha(H).$$

Consideremos a função

$$\mathcal{W} \to \mathcal{W}^*$$

que leva $w \in \mathcal{W}$ em w^*. Notemos que a função está bem definida no sentido em que $w^* \in \mathcal{W}$, pois se $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, então

$$w^* = ((r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k})^{-1})^t = (r_{\alpha_k} \cdots r_{\alpha_1})^t = r_{\alpha_1}^t \cdots r_{\alpha_k}^t \in \mathcal{W}^* .$$

Além disso, é homomorfismo, pois

$$(r_\alpha r_\beta)^* = ((r_\alpha r_\beta)^{-1})^t = (r_\beta r_\alpha)^t = r_\alpha^t r_\beta^t = r_\alpha^* r_\beta^*.$$

É injetor, pois se $(w^{-1})^t = \mathrm{id}$, então $w^{-1} = \mathrm{id}$, donde $w = \mathrm{id}$, e é sobrejetor pois $\mathcal{W}^*$ é gerado por $r_\alpha^t,\ \alpha \in \Pi$. Portanto, $\mathcal{W}$ é isomorfo a $\mathcal{W}^*$. Além disso, temos que $w = (w^*)^*$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Sejam M_* o normalizador de $\mathfrak{a}$ em K e M o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K. É claro que M é subgrupo normal de M_*, de forma que M_*/M é um grupo. Vale que M_*/M é isomorfo ao grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Daremos a ideia da demonstração com base no capítulo VI.5 de [8].

Proposição A.45. *Se $\alpha \in \Pi$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $[X_\alpha, \theta(X_\alpha)] = B(X_\alpha, \theta(X_\alpha))H_\alpha$ *e* $B(X_\alpha, \theta(X_\alpha)) < 0$.
2. $\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}H_\alpha \oplus \mathbb{R}\theta(X_\alpha)$ *é uma subálgebra isomorfa à* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.
3. *Se X_α é tal que $B(X_\alpha, \theta(X_\alpha)) = \dfrac{-2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, então o elemento*

$$k_\alpha = \exp\left(\frac{\pi}{2}(X_\alpha + \theta(X_\alpha))\right)$$

pertence à M_* e $\mathrm{Ad}(k_\alpha)$ age como a reflexão r_α em $\mathfrak{a}^*$, isto é, $\mathrm{Ad}(k_\alpha)|_{\mathfrak{a}} = r_\alpha^t$.

Observação A.46. Uma forma de ver o isomorfismo do item 2 da Proposição A.45 é a seguinte: como $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)H_\alpha$, com $B(X_\alpha, \theta X_\alpha) < 0$, podemos normalizar X_α de forma que

$$[X_\alpha, \theta X_\alpha] = -H_\alpha^\vee.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[H_\alpha^\vee, X_\alpha] &= \alpha(H_\alpha^\vee)X_\alpha = 2X_\alpha \\
[H_\alpha^\vee, -\theta X_\alpha] &= -\theta[\theta H_\alpha^\vee, X_\alpha] = \theta[H_\alpha^\vee, X_\alpha] = -2(-\theta X_\alpha) \\
[X_\alpha, -\theta X_\alpha] &= H_\alpha^\vee,
\end{aligned}$$

de forma que temos as seguintes identificações

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow X_\alpha, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow H_\alpha^\vee, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \theta X_\alpha.$$

Em particular, o item 3 nos dá que $\mathcal{W}^* \subseteq \{\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \colon\ k \in M_*\}$. No Capítulo VI.6 de [8] é provada a igualdade $\mathcal{W}^* = \{\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \colon\ k \in M_*\}$. Notemos que a função $M_* \to \{\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \colon\ k \in M_*\}$ que leva $k \in M_*$ em $\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}}$ é um homomorfismo sobrejetor com núcleo M. Assim, M_*/M é isomorfo à $\{\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \colon k \in M_*\}$. Logo, $\mathcal{W}^*$ e M_*/M são isomorfos e, portanto, $\mathcal{W}$ e M_*/M são isomorfos, de maneira que se $k \in M_*$, então $kM \in M_*/M$ é identificado com $(\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}})^* \in \mathcal{W}$. Para referência futura, enunciaremos o resultado.

Proposição A.47. *$\mathcal{W}$ é isomorfo à M_*/M de forma que kM é identificado com $(\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}})^*$.*

Proposição A.48. *Sejam $\alpha \in \Pi \cup \{0\}$ e $k \in M_*$. Se $w = (\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}})^* \in \mathcal{W}$ denota o representante de k no grupo de Weyl, então*

$$k\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}.$$

Em particular, M normaliza cada espaço de raiz.

Demonstração. Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $H \in \mathfrak{a}$. Neste caso, temos que

$$[H, kX] = k[k^{-1}H, X] = k\alpha(k^{-1}H)X = \alpha(k^{-1}H)kX.$$

Mas $w = (\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}})^*$, que pode ser interpretado como $(k^{-1})^t$ de forma que

$$\alpha(k^{-1}H) = ((k^{-1})^t\alpha)(H) = w\alpha(H).$$

Portanto, $kX \in \mathfrak{g}_{w\alpha}$. ■

Temos que o grupo de Weyl $\mathcal{W}$ é gerado pelas reflexões r_α com $\alpha \in \Sigma$ (veja Proposição 3.98 de [5]), de forma que todo elemento $w \in \mathcal{W}$ se exprime como $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, com $\alpha_i \in \Sigma$. Por simplicidade, denotaremos r_{α_i} simplesmente por r_i. Os resultados a seguir podem ser encontrados nas seções 1.6 e 1.7 de [20].

Definição A.49. Seja $w \in \mathcal{W}$. Definimos o **comprimento de** w como sendo o menor inteiro não negativo k tal que

$$w = r_1 \cdots r_k.$$

Neste caso, denotamos $l(w) = k$ e dizemos que $w = r_1 \cdots r_k$ é uma **expressão reduzida de** w.

Observação A.50. 1. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w = r_\alpha,\ \alpha \in \Sigma$.

2. $l(w) = l(w^{-1})$, pois se $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$ é uma expressão reduzida de w, então

$$w^{-1} = r_{\alpha_k} \cdots r_{\alpha_1},$$

donde $l(w^{-1}) \leq l(w)$. De maneira análoga, $l(w) \leq l(w^{-1})$.

Proposição A.51. *Sejam $w \in \mathcal{W}$ e $\alpha \in \Sigma$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $w\alpha > 0$, então $l(wr_\alpha) = l(w) + 1$.*
2. *Se $w\alpha < 0$, então $l(wr_\alpha) = l(w) - 1$.*
3. *Se $w^{-1}\alpha > 0$, então $l(r_\alpha w) = l(w) + 1$.*
4. *Se $w^{-1}\alpha < 0$, então $l(r_\alpha w) = l(w) - 1$.*

Para $w \in \mathcal{W}$, seja $n(w)$ a quantidade de raízes positivas que são levadas em raízes negativas por w.

Teorema A.52 (Condição de redução)**.** *Se $w = r_1 \cdots r_k$ e $n(w) < k$, então existem índices $1 \leq i < j \leq k$ tais que*

$$w = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots \hat{r}_j \cdots r_k,$$

onde o chapéu indica omissão.

Proposição A.53. *Se $w \in \mathcal{W}$, então $l(w) = n(w)$.*

Teorema A.54. *Seja $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$ expressão de w que não é necessáriamente reduzida. Se $\alpha \in \Sigma$ é tal que $l(wr_\alpha) < l(w)$, então existe um índice $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que*

$$w = r_{\alpha_1} \cdots \hat{r}_{\alpha_i} \ldots r_{\alpha_k} r_\alpha.$$

Definição A.55. Seja $\Theta \subseteq \Sigma$. Definimos o conjunto $\mathcal{W}_\Theta$ como sendo o conjunto dos elementos em $\mathcal{W}$ que centralizam $\mathfrak{a}_\Theta$.

Proposição A.56. *1. $\mathcal{W}_\Theta$ é gerado por $\{r_\alpha;\ \alpha \in \Theta\}$.*

2. Se $w \in \mathcal{W}_\Theta$ e $l(w) = k$, então existe uma expressão reduzida $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, com $\alpha_i \in \Theta$.

Demonstração. O item 1 é a Proposição 3.18 de [3] e o item 2 é a Proposição da seção 1.10, item b de [20]. ∎

No contexto das álgebras semissimples, temos que se $\Theta \subseteq \Sigma$ e $\mathfrak{g}(\Theta)$ é a subálgebra semissimples de tipo Θ, então a Proposição A.33 nos dá que $\overline{\langle\Theta\rangle}$ é um sistema de raízes em $\mathfrak{a}(\Theta)$. Consideremos a seguinte notação: para cada $w \in \mathcal{W}_\Theta$, sejam $\overline{w} = w|_{\mathfrak{a}(\Theta)}$ e $\overline{\mathcal{W}_\Theta} = \{\overline{w};\ w \in \mathcal{W}_\Theta\}$. Vale o seguinte resultado:

Proposição A.57. *1. $\overline{\mathcal{W}_\Theta}$ é o grupo de Weyl de $\overline{\langle\Theta\rangle}$.*

2. $\mathcal{W}_\Theta = \mathrm{Ad}(M(\Theta)_*)|_{\mathfrak{a}}$.

Demonstração. O item 1 é a Proposição 3.19 de [3] e o item 2 é a Proposição 4.7 de [3]. ∎

Com isso, usando a mesma ideia da Proposição A.47 temos o seguinte resultado:

Proposição A.58. *$\overline{\mathcal{W}_\Theta}$ é isomorfo à $M(\Theta)_*/M(\Theta)$ de forma que $kM(\Theta)$ é identificado com* $(\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}(\Theta)})^*$.

Seja $\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W} \colon l(wr_\alpha) > l(w);\ \forall \alpha \in \Theta\}$.

Proposição A.59. *Se $w \in \mathcal{W}$, então existem únicos elementos $u \in \mathcal{W}^\Theta$ e $v \in \mathcal{W}_\Theta$ tais que $w = uv$. Além disso,*

1. $l(w) = l(u) + l(v)$.

2. $u \in \mathcal{W}^\Theta$ é o único elemento em $w\mathcal{W}_\Theta$ de menor comprimento.

Definição A.60. Sejam $w, v \in \mathcal{W}$ e $w = r_1 \cdots r_k$ uma expressão reduzida de w. Dizemos que $v \leq w$ quando v se exprime como uma subexpressão de $w = r_1 \cdots r_k$. Em outras palavras, existem $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, k\}$, com $i_1 \leq \cdots \leq i_s$, tais que

$$v = r_{i_1} \cdots r_{i_s}.$$

A relação $\leq$ em $\mathcal{W}$ é denominada **ordem de Bruhat.**

A.3.3 CÂMARAS DE WEYL

Como o conjunto Π das raízes de $\mathfrak{a}$ é um sistema de raízes, podemos definir uma **câmara de Weyl** de Π como sendo uma componente conexa do conjunto

$$\{H \in \mathfrak{a} \colon \alpha(H) \neq 0,\ \forall \alpha \in \Pi\}.$$

Para mais detalhes, veja a seção 3.6 de [5]. Fixemos uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ e um elemento $H \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+)$. Neste caso, denotando

$$\Sigma(H) = \{\alpha \in \Sigma \colon \alpha(H) = 0\},$$

vale que o conjunto das raízes que são combinações lineares de $\Sigma(H)$ é

$$\langle \Sigma(H) \rangle = \{\alpha \in \Pi \colon \alpha(H) = 0\}$$

(veja a Proposição 3.16 de [3]). Por outro lado, vale o seguinte resultado:

Proposição A.61. *Se $\Theta \subseteq \Sigma$, então existe $H_\Theta \in cl(\mathfrak{a}^+) \cap \mathfrak{a}_\Theta$ tal que $\Sigma(H_\Theta) = \Theta$.*

Demonstração. Veja Proposição 3.17 de [3]. ∎

Agora, seja G_H o centralizador de H em G e $K_H = G_H \cap K$ o centralizador de H em K. Consideremos também o grupo $K(H) = K(\Sigma(H))$.

Proposição A.62. *$K_H = K_{\Sigma(H)} = K(H)M$.*

Consideremos os conjuntos

$$\mathfrak{n}_H = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi^+ \\ \alpha(H) > 0}} \mathfrak{g}_\alpha \ \text{ e } \ \mathfrak{p}_H = \mathfrak{g}_H \oplus \mathfrak{n}_H,$$

onde $\mathfrak{g}_H$ é o centralizador de H em $\mathfrak{g}$. Se P_H denota o normalizador de $\mathfrak{p}_H$ em G, então vale o seguinte resultado:

Proposição A.63. *$P_H = P_{\Sigma(H)}$ e $P_H = K_H AN$.*

Com isso, podemos provar o seguinte:

Proposição A.64. *$P_H = (P_H)_1 M$*

Demonstração. Como $P_H = K_H AN$ e $K_H = K(H)M$, temos que

$$P_H = K(H)MAN.$$

Mas, segue da Proposição A.48 que M centraliza A e M normaliza N, de forma que

$$P_H = K(H)ANM.$$

Mas $K(H)AN$ é um conexo contido em P_H que contém a identidade, de forma que $K(H)AN \subseteq (P_H)_1$. Daí,

$$P_H = K(H)ANM \subseteq (P_H)_1 M.$$

A outra inclusão é direta, pois $(P_H)_1 \subseteq P_H$ e $M \subseteq P_H$. ∎

Corolário A.65. *Se* $\Theta \subseteq \Sigma$, *então*

$$P_\Theta = (P_\Theta)_1 M$$

Demonstração. Basta tomar $H_\Theta \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Sigma(H_\Theta) = \Theta$ e usar que $P_{H_\Theta} = (P_{H_\Theta})_1 M$. ∎

REFERÊNCIAS

[1] M. Wiggerman, “The fundamental group of a real flag manifold,” *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 9, no. 1, pp. 141–153, 1998.

[2] A. Santos, *Controlabilidade de sistemas de controle em grupos de Lie simples e a topologia das variedades flag.* PhD thesis, IMECC Unicamp, 2011.

[3] M. Patrão and L. Seco, *Dinâmica de Translações em Variedades Flag.* Em construção.

[4] L. Rabelo and L. A. B. San Martin, “Cellular homology of real flag manifolds,” *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 30, no. 5, pp. 745–772, 2019.

[5] F. Kneipp, *Classificação das álgebras de Lie semissimples.* Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023.

[6] L. San Martin, *Álgebras de Lie.* Campinas: Unicamp, 2010.

[7] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, vol. 80 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[8] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, vol. 140 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second ed., 2002.

[9] L. San Martin, *Grupos de Lie.* Campinas: Unicamp, 2017.

[10] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, vol. 38 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[11] M. Müller, *Introdução às álgebras de Clifford.* Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

[12] L. San Martin, “Grupo fundamental de flags.” Em construção.

[13] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, vol. 202 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second ed., 2011.

[14] A. Hatcher, *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[15] J. R. Munkres, *Topology.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition.

[16] W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction.* Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.

[17] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, and V. S. Varadarajan, “Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups,” *Compositio Math.*, vol. 49, no. 3, pp. 309–398, 1983.

[18] S. Araki, "On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces," *J. Math. Osaka City Univ.*, vol. 13, pp. 1–34, 1962.

[19] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[20] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, vol. 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.