

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA (UFJF)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS (ICE)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Pedro Moreira Machado de Souza

Simetria Conforme em Teoria de Campos

Juiz de Fora
2026

Pedro Moreira Machado de Souza

Simetria Conforme em Teoria de Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora
2026

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Pedro Moreira Machado de.

Simetria Conforme em Teoria de Campos / Pedro Moreira Machado de Souza. -- 2026.

140 p. : il.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2026.

1. Simetria. 2. Grupo conforme. 3. Teoria de campos. 4. Transformações de Weyl. I. Shapiro, Ilya Lvovich, orient. II. Título.

Pedro Moreira Machado de Souza

Simetria Conforme em Teoria de Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 06 de maio de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Profa. Dra .Márcia Rodrigues Tenser

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Prof. Dr. Dmitry Melnikov

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Dr. Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Juiz de Fora, 29/04/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Membro**, em 06/05/2026, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dmitry Melnikov, Usuário Externo**, em 06/05/2026, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale, Usuário Externo**, em 06/05/2026, às 16:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Tenser, Usuário Externo**, em 06/05/2026, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto, Professor(a)**, em 06/05/2026, às 17:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2965399** e o código CRC **0DDAA45C**.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Cibele Almeida Moreira Machado e Flávio Alves de Souza, e ao meu padrasto, Leandro Cerqueira Moreira, pelo apoio incondicional à minha decisão de seguir a carreira acadêmica. Agradeço também aos meus irmãos — Júlia, Maria Luiza, Lucas, Geovana e Lara — pelos momentos de descontração, essenciais para manter meu equilíbrio ao longo deste percurso; e aos meus avós e tios — especialmente José Carlos, Valdete, Dilma, Jerinaldo, Meire, Jamile, Júnior, Reginaldo, Robson e Adevaldo — por acompanharem essa jornada e acreditarem em meus esforços.

Agradeço aos meus amigos pela leveza e tranquilidade que trouxeram ao meu cotidiano, como também à minha psicóloga pelo acompanhamento profissional e auxílio no manejo de meus desafios pessoais;

Agradeço a Lucas Pereira de Souza pelas inúmeras discussões e pelos valiosos aprendizados compartilhados ao longo dos últimos dois anos;

Agradeço a Maísa e a Fábio pela disponibilização de suas dependências para a alocação de estudantes, o que tornou possível a realização deste trabalho;

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora por proporcionar um ambiente acadêmico de excelência, e aos professores da instituição pela formação acadêmica propiciada. Em particular, agradeço ao meu orientador, Ilya Lvovich Shapiro, por ter me acolhido como aluno, mesmo sem planejamento prévio;

Agradeço à FAPEMIG, pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

“The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.”
Sidney Coleman

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução à simetria conforme, enfatizando suas principais propriedades e seu papel na teoria de campos. Após fornecida uma motivação e a definição geral de transformações conformes, iniciamos a análise pelas isometrias conformes em sua formulação infinitesimal, geradas por vetores de Killing conformes, e reconstruímos, de maneira sistemática, a estrutura de grupo a partir da equação de Killing correspondente. Em seguida, determinadas as representações do grupo conforme, aplicamos o teorema de Noether às simetrias conformes e derivamos as condições sob as quais uma teoria de campos Lagrangiana é invariante conforme. Posteriormente, estendemos a análise para o espaço-tempo curvo, esclarecendo a distinção entre isometrias conformes e transformações de Weyl — uma questão que frequentemente leva a confusões e mal-entendidos. Para esse fim, promovemos a simetria global de Weyl a uma simetria local e examinamos a relação entre a simetria conforme no espaço-tempo plano e a invariância de Weyl. A geometria de Weyl é então revisada em contraste com a estrutura pseudo-riemanniana da Relatividade Geral. Por fim, concluímos com algumas observações acerca da ampla aplicação das transformações conformes e indicamos possíveis direções para estudos futuros.

Palavras-chave: Simetria, grupo conforme, teoria de campos, transformações de Weyl.

Abstract

This work presents an introduction to conformal symmetry, emphasizing their main properties and their role in field theory. After providing a motivation and the general definition of conformal transformations, we begin our analysis with conformal isometries in their infinitesimal formulation, generated by conformal Killing vectors, and systematically reconstruct the structure of the conformal group from the corresponding Killing equation. Next, after determining the representations of the conformal group, we apply Noether's theorem to conformal symmetries and derive the conditions under which a Lagrangian field theory is conformally invariant. We then extend the analysis to curved spacetime, clarifying the distinction between conformal isometries and Weyl transformations—an issue that often leads to confusion and misunderstandings. To this end, we gauge the global Weyl symmetry and examine the relationship between conformal symmetry in flat spacetime and Weyl invariance. Weyl geometry is then reviewed in contrast to the pseudo-riemannian structure of General Relativity. Finally, we conclude with some remarks on the broader implications of conformal transformations and indicate possible directions for further study.

Keywords: Symmetry, conformal group, field theory, Weyl transformations.

Lista de Figuras

2.1	Decomposição de uma transformação conforme especial		47
2.2	Diagrama da realização $(d + 2)$ -dimensional da álgebra conforme		54

Lista de Tabelas

2.1	Geradores infinitesimais.	33
2.2	Contagem de dimensões da álgebra conforme em d dimensões.	36
2.3	Formas finitas das isometrias conformes no espaço-tempo de Minkowski e seus respectivos fatores de escala.	64
3.1	Classificação de interações segundo sua estrutura e dimensão crítica de invariância de escala.	94

Lista de Abreviaturas e Siglas

AdS	Anti-de Sitter
CCJ	Callan–Coleman–Jackiw
CFT	Teoria de Campos Conformes
GR	Grupo de Renormalização
IR	Infravermelha
JBD	Jordan–Brans–Dickie
QCD	Cromodinâmica Quântica
QED	Eletrodinâmica Quântica
RG	Relatividade Geral
SED	Eletrodinâmica Escalar
TCE	Transformação Conforme Especial
TQC	Teoria Quântica de Campos
UV	Ultravioleta
VKC	Vetor de Killing Conforme

Notações e Convenções

$\mathcal{M}$	Denota uma variedade lorentziana, isto é, uma variedade suave de dimensão d equipada com uma métrica pseudo-riemanniana de assinatura $(1, d-1)$ ou, equivalentemente, $(d-1, 1)$.
$\dim(N)$	Denota a dimensão da variedade diferenciável N .
$\mathbb{R}^{1,d-1}$	Denota o espaço de Minkowski d -dimensional.
v	Denota vetores pertencentes a $\mathbb{R}^{1,d-1}$, cujas componentes $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$ são rotuladas por índices $\mu \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.
$ v $	Denota a norma do vetor v .
$v \cdot u$	Denota o produto interno no espaço de Minkowski,

$$v \cdot u = \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} v^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu = v^0 u^0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

v^2	Denota, até que se indique o contrário, o produto interno de v consigo mesmo,
-------	---

$$v^2 = v \cdot v = (v^0)^2 - \mathbf{v}^2.$$

ϕ_i	Denota uma coleção de campos, cada um dos quais se transforma segundo uma representação finita do grupo de Lorentz. Em particular, incluem-se, campos escalares φ , campos fermiônicos ψ , campos vetoriais de <i>gauge</i> A_μ e, quando pertinente, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.
----------	--

δ^μ_ν	Denota a delta de Kronecker,
------------------	------------------------------

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

A^T	Denota a transposta da matriz A , cujas componentes são dadas por
-------	---

$$(A^T)_\nu{}^\mu = A^\mu{}_\nu = \eta_{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} A_\beta{}^\alpha.$$

$\text{tr}(A)$	Denota o traço da matriz A , definido por
----------------	---

$$\text{tr}(A) = A^\mu{}_\mu.$$

$\det(A)$	Denota o determinante da matriz A .
J^μ_ν	Denota as componentes da matriz jacobiana.
J	Denota o determinante da matriz jacobiana.
R^μ_ν	Denota as componentes de matrizes pseudo-ortogonais.
$\dot{F}$	Denota a derivada temporal de F .
$\partial_\mu F$	Denota a derivada de F com respeito à coordenada x^μ .
$[Q]$	Denota a dimensão física da quantidade Q em termos das grandezas fundamentais comprimento (L), tempo (T) e massa (M), isto é,

$$[Q] = L^a T^b M^c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$[\cdot, \cdot]$	Denota o comutador entre dois elementos algébricos.
------------------	---

Adotaremos as seguintes convenções neste trabalho:

- Sistema de unidades naturais com $c = \hbar = 1$. Nesse contexto, comprimento e tempo possuem a mesma dimensão física, isto é, $L = T$, enquanto a energia possui dimensão inversa de tempo, $[E] = T^{-1}$. Consequentemente, a equivalência massa-energia permite expressar escalas de comprimento, tempo e energia em unidades de massa, de modo que a dimensão física de um campo ϕ_i é inteiramente especificada por sua dimensão de massa Δ , isto é, $[\phi_i] = M^\Delta$.
- A função exponencial é denotada por $\exp(x)$;
- Índices gregos α, μ, ν e latinos A, B, C identificam, respectivamente coordenadas do espaço-tempo e índices internos associados a uma álgebra de Lie, enquanto índices latinos i, j, k , até que se indique o contrário, rotulam diferentes campos físicos das teoria e objetos a eles associados. Outras convenções de índices serão introduzidas conforme necessário;
- Assinatura *mostly minus* da métrica de Minkowski: $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$;
- Convenção de soma de Einstein

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^{d-1} A_\mu B^\mu.$$

- Índices simetrizados são denotados por $(\alpha\beta)$, enquanto índices antissimetrizados são denotados por $[\alpha\beta]$. Essa notação não se limita a pares de índices adjacentes, podendo também ser aplicada a pares de tensores adjacentes. Por exemplo,

$$A_{(\alpha} B_{\beta)} = \frac{1}{2} (A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha) \quad \text{e} \quad A_{[\alpha} B_{\beta]} = \frac{1}{2} (A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha).$$

- Para a matriz jacobiana associada à transformação $x \mapsto x'$, é adotada a convenção

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Sumário

1	Introdução	16
2	O grupo conforme	20
2.1	Simetria de escala e mecânica clássica	21
2.2	Transformações conformes	23
2.3	Isometrias conformes infinitesimais	24
2.4	A álgebra conforme	30
2.5	Forma finita das isometrias conformes	37
2.5.1	Transformações conformes especiais	43
2.6	O grupo conforme em três ou mais dimensões	51
2.7	O grupo conforme em duas dimensões	65
3	Simetria conforme	68
3.1	Representações do grupo conforme	69
3.2	Simetria conforme em teoria de campos	76
3.2.1	Campo escalar	85
3.2.2	Campo de <i>gauge</i> vetorial	89
3.2.3	Campo de Dirac	93
3.3	Simetria conforme no regime quântico	95
4	Simetria de Weyl	98
4.1	Transformação conforme em espaços-tempos curvos	99
4.2	Simetria de Weyl e simetria conforme	101
4.3	Simetria de Weyl global e local	103
4.4	Teoria de <i>gauge</i> de Weyl	107
5	Comentários finais	112
	Referências bibliográficas	114
A	Análise tensorial	122
A.1	Espaço vetorial e espaço dual	122
A.2	Tensores	123
B	Variedades pseudo-Riemannianas	125
B.1	Campos tensoriais	125
B.2	Tensores de curvatura	127
B.3	Transformações	130

C	Simetrias variacionais	132
C.1	Problema variacional de Noether	132
C.2	Simetrias globais e o primeiro teorema de Noether	136
C.3	Formalismo Hamiltoniano	137
C.4	Teorema recíproco de Noether e álgebra das cargas	138

Capítulo 1

Introdução

O emprego sistemático das transformações conformes remonta ao período das grandes navegações, motivado pela necessidade de mapear rotas marítimas no plano da maneira mais fiel possível, isto é, de preservar propriedades geométricas desejadas, ao custo da inevitável distorção dos demais aspectos métricos. Em particular, as projeções cartográficas do tipo conforme¹, embora distorçam o tamanho das regiões representadas, conservam ângulos formados entre geodésicas, tornando-as ideais para a orientação marítima.

Ao longo dos séculos seguintes, a propriedade conforme presente nessas projeções foi gradualmente formalizada, contando com contribuições de grandes matemáticos, como Euler, Lagrange, Gauss e Riemann, sendo o “príncipe dos matemáticos” quem possivelmente consagrou o termo “conforme” na terminologia matemática² (Kastrup, H., 2008).

Em um contexto distinto, as transformações conformes foram introduzidas na física por Bateman (Bateman, 1910) e Cunningham (Cunningham, 1910), por volta de 1909, ao observarem que a equação de onda é invariante sob um conjunto ainda mais amplo de transformações globalmente definidas — o grupo conforme. Ou seja, além das simetrias de Poincaré — consistindo em translações espaço-temporais, rotações espaciais e *boosts* — as equações de Maxwell³ são também invariantes sob dilatações uniformes das coordenadas e transformações conformes especiais (Kastrup, H. A., 1962), estas últimas podendo ser entendidas como composições particulares de translações e inversões. Tais transformações definem o grupo de simetrias globais que preservam a estrutura causal do espaço-tempo (Daudé; Häfner; Nicolas, 2018).

¹Etimologicamente, conforme — do latim *conformis* — significa “que tem a mesma forma”.

²O desenvolvimento das transformações conformes ocorreu inicialmente a partir do intenso interesse matemático por inversões circulares (Blair, 2000).

³Uma demonstração em notação moderna pode ser encontrada em (Rosen, G., 1972). Uma discussão do caso escalar, juntamente com outros tópicos correlatos, encontra-se em notas anônimas e não publicadas disponibilizadas no site <http://www.cphysics.org>.

Partindo de uma concepção alternativa do grupo conforme, Weyl propôs, em 1918, que a teoria gravitacional de Einstein possuísse, adicionalmente, invariância sob transformações arbitrárias de escalas da métrica (Weyl, 1919b). Essa simetria de *gauge* complementar resultou na implementação de um campo vetorial compensador, o qual Weyl identificou com o quadripotencial eletromagnético, na tentativa de unificar a Relatividade Geral (RG) com o eletromagnetismo. Embora carecesse de plausibilidade física, como alertara Einstein, tal idealização plantou as sementes das teorias de *gauge*.

No mesmo ano, o princípio de invariância que levou Weyl a associar a conservação da carga elétrica a uma simetria abeliana foi formalizado por Noether sob a forma de dois teoremas (Noether, 1983), legitimando a relação entre as simetrias de uma teoria e constantes de movimento. Esses resultados foram posteriormente generalizados por Bessel-Hagen e aplicados à invariância conforme do eletromagnetismo⁴ (Bessel-Hagen, 1921), com o intuito de obter novas leis de conservação para além das já conhecidas — conservação de energia, do momento linear e do momento angular — associadas, respectivamente, à invariância sob translações temporais, translações espaciais e rotações⁵.

Um significado físico satisfatório para as conservações adicionais surgiu somente em meados das décadas de 1960 e 1970, quando a invariância de escala passou a ser interpretada em termos da ausência de parâmetros característicos de energia e de comprimento associados às interações fundamentais (Jackiw, 1972). Tratando-se, portanto, de uma simetria aproximada, uma vez que as interações físicas são, em geral, caracterizadas por parâmetros dimensionais, como as massas das partículas elementares e as constantes de acoplamento. Entretanto, essa simetria torna-se exata no caso de partículas não massivas ou no regime de altas energias (Dubovik, 1973).

Na mesma época, estabeleceu-se que as transformações conformes especiais estariam associadas a mudanças de coordenadas entre referenciais em aceleração constante (Fulton; Rohrlich; Witten, 1962a), uma interpretação que permitiu estender o domínio de aplicação das simetrias conformes para além do contexto da geometria riemanniana (Fulton; Rohrlich; Witten, 1962b; Barut; Haugen, 1972).

Esse esforço renovado na investigação do possível papel das transformações conformes em teorias de campos (Wess, 1960; Mack; Salam, 1969; Callan Jr; Coleman; Jackiw, 1970; Coleman; Jackiw, 1971) culminou no desenvolvimento da Teoria de Campos Conformes

⁴Uma revisão do resultado obtido por Bessel-Hagen pode ser encontrada em (Plybon, 1974).

⁵A invariância sob *boosts* está associada à conservação do centro de massa (Olver, 1993).

(CFT) ([Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012]). Em particular, as CFTs bidimensionais, caracterizadas pela invariância sob um grupo de simetrias de dimensão infinita, consolidaram-se como uma área de estudo à parte, em virtude das restrições extremamente fortes que impõem à Teoria Quântica de Campos (TQC) correspondente, proporcionando modelos exatamente solúveis ([Belavin; Polyakov; Zamolodchikov, 1984a]). Exemplos notáveis incluem modelos estatísticos bidimensionais associados a transições de fase de segunda ordem ([Belavin; Polyakov; Zamolodchikov, 1984b; Dotsenko; Fateev, 1984]) — pontos críticos nos quais as propriedades do sistema tornam-se independentes da escala de observação — bem como a teoria de cordas, na qual a quantização da folha de mundo associada a uma corda dá origem a uma CFT ([Polyakov, 1981]).

Em razão da pluralidade de abordagens e contextualizações, “transformação conforme” tornou-se um termo guarda-chuva, empregado por diferentes autores para denotar distintas manifestações — globais ou locais — de mudança de escala⁶. Nesse sentido, o presente trabalho tem por objetivo introduzir as diferentes formas de manifestação da simetria conforme, esclarecendo possíveis ambiguidades e equívocos decorrentes das múltiplas denominações atribuídas a esse fenômeno, bem como explorar a relação entre isometrias conformes — segundo a definição adotada por Wald ([Wald, 2010]) — e transformações de Weyl, comumente referidas como transformações conformes da métrica.

Para abranger o escopo pretendido, este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo [2], as transformações conformes serão conceituadas, partindo de uma motivação de interesse teórico. Em seguida, serão descritas as isometrias conformes da métrica de Minkowski, o grupo de Lie formado por essas transformações e suas propriedades algébricas. Assumindo a forma infinitesimal da matriz de transformação, investigaremos a álgebra conforme, cujos geradores serão determinados a partir da equação de Killing conforme. Com o intuito de esclarecer seus aspectos geométricos, a forma finita das transformações conformes especiais será evidenciada, assim como a relação do grupo conforme com representações lineares em dimensão superior. O capítulo [3] será dedicado às aplicações em teoria de campos. Inicialmente, analisaremos as representações do grupo conforme, com o objetivo de determinar sua ação sobre campos clássicos. Na sequência, discutiremos as condições sob as quais as isometrias conformes constituem simetrias de uma ação clássica, bem como as leis de conservação correspondentes. Para tornar a discussão mais concreta,

⁶Uma extensa discussão realizada por Roberto Percacci pode ser encontrada em <http://www.percacci.it/roberto/physics/conformal.html>

apresentaremos exemplos do comportamento de campos escalares, vetoriais e fermiônicos sob tais transformações. No final, consequências da quantização serão brevemente abordadas, culminando na apresentação de uma definição de CFTs. No capítulo 4, as transformações conformes serão adaptadas ao contexto da teoria de campos em espaços curvos, conduzindo à caracterização das transformações de Weyl. Será estabelecida a relação entre a invariância conforme discutida anteriormente e a simetria de Weyl. Nesse sentido, a promoção da simetria de Weyl global a uma simetria local será analisada, e exemplos de teorias localmente invariantes serão fornecidos, incluindo o caso gravitacional. Por fim, a dissertação se encerra no capítulo 5, com comentários finais e possíveis direções para investigações futuras.

Capítulo 2

O grupo conforme

O grupo conforme é notavelmente uma das “violações” mais intrigantes do teorema de Coleman–Mandula (Coleman; Mandula, 1967), o qual afirma, sob condições razoáveis, a impossibilidade de haver extensões não triviais do grupo de Poincaré¹. Em outras palavras, a combinação do grupo de Poincaré com um grupo de simetrias internas resulta necessariamente em um grupo de simetria cujos elementos pertencentes a esses dois subgrupos comutam entre si e, conseqüentemente, não se misturam em novas transformações². Contudo, ao assumir a existência de uma matriz S (ou matriz de espalhamento), o teorema exclui o grupo conforme, uma vez que transformações de escala impossibilitam a construção de estados arbitrariamente distantes, através dos quais se estabelece o conceito de estados livres, não-interagentes. Desse modo, é possível estender de forma não trivial o grupo de Poincaré ao grupo conforme, incluindo as relações de comutação dos geradores de dilatações e transformações conformes especiais.

Neste capítulo, estabeleceremos o grupo conforme e suas propriedades. Inicialmente, motivaremos a discussão a partir das transformações de similaridade na mecânica clássica (Landau; Lifshitz; Sykes, 1976). Em seguida, apresentaremos as transformações conformes e obteremos seus geradores através da equação de Killing conforme. As soluções serão separadas nos casos $d = 2$ e $d > 2$, para os quais discutiremos a forma finita das respectivas transformações conformes e a realização do grupo conforme.

¹É importante ressaltar que o teorema de Coleman–Mandula foi concebido em um contexto em que se tentava unificar as simetrias do espaço-tempo com as simetrias internas associadas aos grupos de *gauge*, a partir dos quais o Modelo Padrão da física de partículas foi matematicamente estruturado.

²Em termos técnicos, o teorema estabelece que o grupo de simetria de uma teoria física consiste do produto direto entre o grupo de Poincaré e um grupo de simetrias internas ou, equivalentemente, que a álgebra de Lie correspondente é a soma direta das álgebras desses grupos.

2.1 Simetria de escala e mecânica clássica

Usualmente descrita como uma simetria aproximada, a dilatação é uma transformação de similaridade que realiza uma mudança de escala global. Caso essa simetria fosse exata, seria possível redimensionar as coordenadas do espaço-tempo sem alterar o conteúdo físico da teoria (Jackiw, 1972). Por exemplo, a magnitude de energia de fenômenos físicos estudados estão submetidos, em geral, a uma escala energética fundamental sobre a qual todos os observadores devem concordar.

Nesse sentido, consideremos um sistema não-relativístico composto por uma única partícula de massa m , submetida a uma força conservativa, descrito pela equação de movimento

$$\dot{p}_i = -\partial_i V(x), \quad (2.1)$$

onde o momento linear é definido como $p_i(t) = m\dot{x}_i(t)$ ³.

É imediato verificar que o sistema descrito pela lei acima é invariante temporalmente e, portanto, a energia é uma constante de movimento. Multiplicando (2.1) pelo fator integrante $\dot{x}^i$ e fazendo uso da regra da cadeia na expressão resultante, obtém-se uma primeira integral, correspondente à energia mecânica do sistema,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad p = \sqrt{p_i p^i}. \quad (2.2)$$

Uma outra importante propriedade de sistemas clássicos são as similaridades mecânicas, como notado por Landau e Lifshitz (Landau; Lifshitz; Sykes, 1976). Quando $V(x)$ é um potencial homogêneo de grau n , isto é, satisfaz $V(\lambda x) = \lambda^n V(x)$, as transformações de escala $x^i \mapsto \lambda x^i$ e $t \mapsto \lambda^{(1-n/2)} t$ constituem simetrias do sistema, deixando as equações de Newton invariantes. Nesse contexto, a energia (hamiltoniana) torna-se uma função homogênea de grau n .

Essa simetria alcançou um status de maior relevância física ao revelar uma conexão com o teorema do virial por meio do teorema de Noether⁴ (Andersen; Von Baeyer, 1971; Kleban, 1979). Em particular, tendo em vista que o teorema de Euler para funções homogêneas

³Nesta seção, os índices $i \in \{1, \dots, d\}$ rotulam as coordenadas de um espaço euclidiano d -dimensional, sendo também adotada a convenção de soma sobre índices repetidos.

⁴Para mais detalhe sobre o teorema de Noether, consultar o apêndice C

estabelece que

$$V(\lambda x) = \lambda^n V(x) \iff x^i \partial_i V = nV(x), \quad (2.3)$$

ao contrair os dois lados da equação (2.1) com x^i , obtém-se

$$\frac{d}{dt}(p_i x^i) = -nE + (n+2) \frac{p^2}{2m}, \quad (2.4)$$

onde $p_i x^i$ recebe o nome de virial. Considerando potenciais homogêneos na forma de leis de potência $V(r) \propto r^n$, com $r = \sqrt{x_i x^i}$, observa-se que o potencial do inverso do quadrado ($n = -2$) configura um caso especial, para o qual se determina uma segunda constante de movimento globalmente conservada,

$$D = Et - \frac{1}{2} p_i x^i. \quad (2.5)$$

É interessante destacar que a transformação de simetria associada à constante de movimento (2.5), $t \mapsto \lambda^2 t$ e $x^i \mapsto \lambda x^i$, é refletida nas transformações da energia e do momento linear, $E \mapsto \lambda^{-2} E$ e $p_i \mapsto \lambda^{-1} p_i$, como pode ser verificado diretamente a partir da expressão (2.2).

Essa é uma peculiaridade do potencial do inverso do quadrado, visto que a energia escala inversamente à coordenada temporal. De forma mais clara, somente no caso correspondente a $n = -2$ o grau de homogeneidade da energia coincide com sua dimensão física (no sistema de unidades em que $\hbar = 1$), atributo indicativo de ausência de uma escala característica de energia. Todavia, um sistema descrito por uma lei de força que decai com o cubo da distância não corresponde a modelos de interesse físico imediato.

Por outro lado, o cenário relativístico revela-se particularmente promissor. Nesse caso, todas as coordenadas do espaço-tempo escalam homogeneamente segundo $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$, enquanto a energia e o momento linear — unificados no quadrimomento p_μ — transformam-se de forma recíproca, $p_\mu \mapsto \lambda^{-1} p_\mu$. Consequentemente, infere-se que a energia cinética deve ser linear em p , ao passo que o potencial deve decair com inverso da distância.

Em outras palavras, sistemas em regime ultrarrelativístico ($pc \gg mc^2$), bem como o caso limite de partículas não massivas, submetidos a potenciais de longo alcance da forma r^{-1} , descrevem uma física invariante de escala. Efetivamente, essa simetria é uma propriedade manifestada por sistemas interagentes de partículas não massivas nos quais não existe uma escala característica de comprimento ou, equivalentemente, de massa ($L = M^{-1}$), tampouco

constantes de acoplamento dimensionais. Portanto, o contexto relativístico compreende situações físicas substancialmente mais universais e frequentes na natureza.

A partir da próxima seção, o grupo conforme e suas propriedades serão analisados.

2.2 Transformações conformes

Em linhas gerais, uma transformação f é dita conforme se, para quaisquer campos vetoriais tangentes $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$, temos

$$f : g_{\mu\nu}(x)\zeta_1^\mu(x)\zeta_2^\nu(x) \mapsto \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)\zeta_1^\mu(x)\zeta_2^\nu(x), \quad (2.6)$$

onde $\Omega(x)$, denominada fator de escala, é uma função real das coordenadas do espaço-tempo.

Como consequência da definição (2.6), as transformações conformes são caracterizadas por preservarem ângulos entre curvas⁵. Em particular, o ângulo α formado pela interseção de duas curvas $x_1^\mu(\tau)$ e $x_2^\nu(\tau)$ é definido como

$$\cos \alpha := \frac{g_{\mu\nu}(x)\zeta_1^\mu(x)\zeta_2^\nu(x)}{\|\zeta_1\| \|\zeta_2\|}. \quad (2.7)$$

Aqui, $\zeta^\mu(x(\tau))$ representa o vetor tangente a uma curva, cuja norma $\|\zeta\|$ é dada por

$$\|\zeta\| = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\zeta^\mu(x)\zeta^\nu(x)}, \quad \zeta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.8)$$

sendo τ um parâmetro arbitrário ao longo da curva.

Desse modo, seja β o ângulo formado entre as curvas após a transformação conforme. Verifica-se imediatamente que o ângulo de interseção é preservado:

$$\cos \beta = \frac{\Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)\zeta_1^\mu(x)\zeta_2^\nu(x)}{\Omega(x)\|\zeta_1\| \Omega(x)\|\zeta_2\|} = \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Em virtude do fator $\Omega^2(x)$ ser estritamente positivo, infere-se que o sinal do elemento de linha não é alterado pela mudança de escala resultante e, conseqüentemente, a estrutura causal é preservada. Em particular, o cone de luz permanece invariante, isto é, trajetórias nulas são

⁵Para auxiliar na visualização, recomenda-se visitar o site https://complex-analysis.com/content/conformal_mapping.html.

mapeadas em trajetórias nulas,

$$ds^2 = 0 \mapsto (\Omega(x)ds)^2 = 0. \quad (2.10)$$

Ademais, nota-se que as transformações f para as quais $\Omega(x) = 1$ correspondem a isometrias do espaço-tempo. Nesse caso, o elemento de linha é estritamente preservado.

De um ponto de vista alternativo, para compreender sobre quais condições transformações conformes constituem simetrias de uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$, é importante introduzir o conceito de isometrias conformes (Wald, 2010).

2.3 Isometrias conformes infinitesimais

Consideremos uma variedade física $\mathcal{M}$ e pontos $x, x' \in \mathcal{M}$, cujas coordenadas são identificadas, respectivamente, por x^μ e x'^μ . Adicionalmente, admite-se que a métrica ao redor de x' esteja relacionada à métrica em x através do fluxo gerado por um campo vetorial $\xi(x)$, tal que

$$\xi^\mu(x(\tau)) = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.11)$$

onde $x^\mu = x^\mu(\tau)$ descrevem curvas paramétricas tangentes a $\xi^\mu(x)$. Nesse cenário, portanto, um deslocamento infinitesimal $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu$ pode ser expresso localmente como $\delta x^\mu = \xi^\mu \delta\tau$.

Sendo assim, o campo vetorial $\xi(x)$ ⁶ gera isometrias conformes quando o fluxo por ele gerado preserva o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ a menos de um fator de escala,

$$ds^2|_{x'} = \Omega^2(x)ds^2|_x. \quad (2.12)$$

Infinitesimalmente, assume-se que o fator de escala pode ser escrito como $\Omega(x) \approx 1 + \sigma(x)$ ⁷, de modo que a prescrição acima reduz-se a

$$g_{\mu\nu}(x + \epsilon)dx^\mu dx^\nu \approx (1 + 2\sigma(x))g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.13)$$

onde $\epsilon^\mu(x) = \delta\tau \xi^\mu(x)$ denota o parâmetro infinitesimal da transformação.

⁶Doravante, sempre que não houver possibilidade de ambigüidade, denotaremos o campo vetorial $\xi(x)$ por suas componentes $\xi^\mu(x)$.

⁷Tal expansão do fator de escala corresponde à parametrização $\Omega(x) = \exp(\sigma(x))$.

Expandindo a métrica em série de Taylor ao redor de x , até primeira ordem, obtém-se

$$g_{\mu\nu}(x + \epsilon) \approx g_{\mu\nu}(x) + \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}(x). \quad (2.14)$$

Portanto, a equação (2.13), em primeira ordem, assume a forma

$$g_{\rho\nu} \partial_\mu \epsilon^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu \epsilon^\rho + \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} = 2\sigma(x) g_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Para expressar o lado esquerda da igualdade covariantemente, podemos utilizar as condições de metricidade e simetria da conexão de Levi-Civita⁸ (ver apêndice B),

$$g_{\rho\nu} \partial_\mu \epsilon^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu \epsilon^\rho + \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu, \quad \epsilon_\mu \equiv g_{\mu\rho} \epsilon^\rho. \quad (2.16)$$

Substituindo o resultado em (2.15), obtém-se

$$\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = 2\sigma(x) g_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

É possível determinar o fator de escala $\sigma(x)$ em função do parâmetro infinitesimal ϵ^μ tomando-se o traço da equação (2.17), contraindo-a com $g^{\mu\nu}$,

$$\sigma(x) = \frac{1}{d} (\nabla_\rho \epsilon^\rho), \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \dim(\mathcal{M}) = d. \quad (2.18)$$

Sendo assim, um espaço-tempo caracterizado pela métrica $g_{\mu\nu}(x)$ admite isometrias conformes quando existe campo vetorial não trivial ξ^μ que satisfaz a equação de Killing conforme:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} (\nabla_\rho \xi^\rho) g_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Em outras palavras, o campo vetorial ξ^μ , restrito à condição (2.19), é denominado Vetor de Killing Conforme (VKC) e constitui o gerador das isometrias conformes, tal como os vetores de Killing geram as isometrias ordinárias⁹.

Em geral, a equação de Killing conforme admite apenas a solução trivial $\xi_\mu = 0$ e, portanto, é comum buscar soluções após fixar, *a priori*, uma métrica de fundo. Ainda assim,

⁸Respectivamente, (B.12) e (B.13).

⁹O termo faz referência às isometrias mais comumente estudadas na RG, sob as quais a métrica do espaço-tempo permanece invariante.

encontrar soluções é uma tarefa hercúlea, o que limita, na prática, a determinação de VKCs aos casos particulares em que o espaço-tempo apresenta elevado grau de simetria. Neste trabalho, interessa-nos investigar as soluções associadas à métrica $\eta_{\mu\nu}$, uma vez que o espaço-tempo plano admite o maior número possível de VKCs, responsáveis por realizar o grupo conforme pertinente à teoria de campos. Nesse cenário, os geradores das isometrias conformes satisfazem

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \xi)\eta_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

onde adotamos a notação $\partial_\rho \xi^\rho \equiv \partial \cdot \xi$.

Antes de prosseguirmos para a obtenção das soluções, convém elucidar sua natureza. Primeiramente, ao considerar o caso em que $\partial \cdot \xi = 0$, a equação de Killing conforme (2.20) é reduzida à equação de Killing

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0, \quad (2.21)$$

cujas soluções correspondem às isometrias ordinárias do espaço-tempo de Minkowski. Nesse cenário, quaisquer dois observadores concordam quanto às medidas de distância, uma vez que a estrutura métrica do espaço-tempo permanece inalterada.

Como etapa intermediária, consideremos o caso em que $\partial \cdot \xi$ é constante, mas não nulo. Nesse caso, dois observadores podem discordar da escala global de medida adotada, mas ainda concordam quanto à planicidade da métrica (Gillioz, 2023). Nesse contexto, o campo vetorial ξ^μ é denominado vetor homotético (Stephani *et al.*, 2009). Em particular, no espaço-tempo de Minkowski, tais vetores são determinados pela equação

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\sigma\eta_{\mu\nu}, \quad \sigma = cte. \quad (2.22)$$

Por último, retornamos à equação (2.20), caso em que os mesmos dois observadores não apenas discordam quanto a uma escala fundamental, mas também adotam escalas de medida que variam localmente no espaço-tempo. Ainda assim, a métrica não é arbitrária: ela permanece conformalmente plana, isto é, difere da métrica de Minkowski apenas por um fator de escala local.

Para determinar a solução de (2.20), convém evidenciar algumas condições subjacentes. Inicialmente, contraindo-a com o operador $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\rho}\partial_\rho$, obtém-se

$$d(\partial^2 \xi_\nu) = -(d-2)\partial_\nu(\partial \cdot \xi), \quad \partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu. \quad (2.23)$$

Em seguida, atuando com ∂_μ , tem-se

$$d\partial^2(\partial_\mu \xi_\nu) = -(d-2)\partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \xi), \quad (2.24)$$

cuja simetrização conduz a

$$(\eta_{\mu\nu} \partial^2 + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu) (\partial \cdot \xi) = 0, \quad (2.25)$$

após utilizar a equação (2.20). Contraindo-a com $\eta^{\mu\nu}$, segue a condição

$$(d-1)\partial^2(\partial \cdot \xi) = 0. \quad (2.26)$$

Para $d = 1$, nota-se que ξ^μ é arbitrário. Tal constatação pode ser equivalentemente feita a partir de (2.20), sugerindo que não há restrições às transformações que compõem as isometrias conformes em um espaço-tempo unidimensional. Nesse sentido, qualquer transformação suave e inversível $x \mapsto f(x)$ satisfaz a equação de Killing conforme em uma dimensão.

Portanto, considerando $d > 1$, a equação (2.25) é reduzida a

$$(d-2)\partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \xi) = 0. \quad (2.27)$$

De modo similar, $d = 2$ trata-se também de um caso singular, porém contrasta substancialmente do caso unidimensional: os VKCs satisfazem condições suficientemente flexíveis para ainda sustentarem uma quantidade infinita de simetrias, mas suficientemente restritivas para refletirem uma estrutura geométrica particularmente rica. De fato, as isometrias conformes bidimensionais constituem um cenário de transição que requer uma discussão à parte (Ginsparg, 1988; Schellekens, 1995; Liniado, 2021), a qual será postergada para a seção 2.7.

Sendo assim, para $d > 2$, a equação (2.27) implica que $\partial \cdot \xi$ seja, no máximo, linear em x^μ , isto é,

$$\partial \cdot \xi = A + B_\kappa x^\kappa, \quad (2.28)$$

com A e B_κ sendo constantes arbitrárias.

Retornando à equação (2.20), vamos agora aplicar o operador ∂_ρ e considerar as seguintes permutações de índices

$$d\partial_\rho(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) = 2\partial_\rho(\partial \cdot \xi)\eta_{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

$$d\partial_\nu(\partial_\rho\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\rho) = 2\partial_\nu(\partial \cdot \xi)\eta_{\rho\mu}, \quad (2.30)$$

$$d\partial_\mu(\partial_\rho\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\rho) = 2\partial_\mu(\partial \cdot \xi)\eta_{\rho\nu}. \quad (2.31)$$

Em virtude da comutatividade das derivadas parciais e da simetria da equação de Killing conforme, uma combinação linear apropriada das equações 2.29 a 2.31 evidencia que os VKCs satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem desacoplada,

$$\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho = \frac{1}{d}(\eta_{\rho\nu}\partial_\mu + \eta_{\rho\mu}\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho)(\partial \cdot \xi) \stackrel{(2.28)}{=} \text{constante}. \quad (2.32)$$

Desse modo, conclui-se que ξ_ρ é um polinômio de grau no máximo dois em x^μ ,

$$\xi_\rho = a_\rho + b_{\rho\sigma}x^\sigma + c_{\rho\sigma\kappa}x^\sigma x^\kappa, \quad c_{\rho\sigma\kappa} = c_{\rho\kappa\sigma}, \quad (2.33)$$

onde os parâmetros a_ρ , $b_{\rho\sigma}$ e $c_{\rho\sigma\kappa}$ são constantes a princípio arbitrárias.

Substituindo (2.33) em (2.20), observa-se que os polinômios homogêneos de diferentes graus desacoplam-se, resultando em condições independentes para cada ordem polinomial,

$$b_{(\mu\nu)} = \lambda\eta_{\mu\nu}, \quad \lambda = \frac{1}{d}b^\rho{}_\rho; \quad (2.34)$$

$$c_{(\mu\nu)\kappa} = \eta_{\mu\nu}b_\kappa, \quad b_\kappa = \frac{1}{d}c^\rho{}_{\rho\kappa}. \quad (2.35)$$

A partir do resultado acima, podemos fazer uma série de inferências:

1. O termo constante não está submetido a nenhuma condição. De fato, corresponde a uma translação infinitesimal¹⁰,

$$x^\mu \mapsto (1 + \delta a^\rho \partial_\rho)x^\mu; \quad (2.36)$$

2. O termo linear pode ser decomposto em uma parte antissimétrica $b_{[\mu\nu]} = \omega_{\mu\nu}$ e uma parte simétrica $b_{(\mu\nu)}$, sujeita à condição (2.34). Consequentemente, $b_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu}$, onde $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Ou seja, $\omega_{\mu\nu}$ compõem as transformações de Lorentz infinitesimais e

¹⁰Note que $\delta a^\mu = \delta\tau a^\mu$ corresponde ao parâmetro infinitesimal das translações. Notações análogas serão empregadas para os demais parâmetros.

λ corresponde ao fator de escala infinitesimal associado a uma homotetia,

$$x^\mu \mapsto (\delta^\mu_\rho + \delta\omega^\mu_\rho)x^\rho, \quad (2.37)$$

$$x^\mu \mapsto (1 + \delta\lambda)x^\mu. \quad (2.38)$$

Quanto ao coeficiente quadrático, a equação (2.32) reduz a quantidade de componentes independentes a uma estrutura vetorial, quando considerada a condição (2.35),

$$c_{\rho\mu\nu} = \eta_{\rho\nu}b_\mu + \eta_{\rho\mu}b_\nu - \eta_{\mu\nu}b_\rho. \quad (2.39)$$

Portanto, segue do termo quadrático a transformação infinitesimal

$$x^\mu \mapsto (\delta^\mu_\rho + 2x^\mu\delta b_\rho - \delta b^\mu x_\rho)x^\rho, \quad (2.40)$$

a qual Kastrup (Kastrup, H. A., 1962) atribuiu o nome Transformação Conforme Especial (TCE). Em contraste com as demais isometrias conformes, a natureza não linear das TCEs dificulta sua interpretação geométrica. Contudo, a análise do jacobiano da transformação mostra ser possível escrevê-lo como¹¹

$$J^\mu_\nu(x; \delta b) \approx (1 + 2\delta b \cdot x)\delta^\mu_\nu + 2(x^\mu\delta b_\nu - \delta b^\mu x_\nu) \approx \Omega(x; \delta b)R^\mu_\nu(x; \delta b), \quad (2.41)$$

isto é, como o produto de um fator de escala local

$$\Omega(x; \delta b) \approx 1 + 2\delta b \cdot x, \quad (2.42)$$

e uma matriz pseudo-ortogonal dependente da posição, cujas componentes são

$$R^\mu_\nu(x; \delta b) \approx \delta^\mu_\nu - 2(\delta b^\mu x_\nu - x^\mu \delta b_\nu), \quad R^\rho_\rho R^\rho_\nu \approx \delta^\rho_\nu, \quad (2.43)$$

onde $-2(\delta b^\mu x_\nu - x^\mu \delta b_\nu)$ é um análogo local do parâmetro infinitesimal associado às transformações de Lorentz. Sendo assim, torna-se evidente que (2.42) e (2.43) caracterizam a

¹¹A fatoração na última passagem reproduz termos de ordem superior à linear em δb^μ , os quais são desprezados no regime infinitesimal e, portanto, não afetam a validade da aproximação.

ação local de uma TCE infinitesimal como a composição de uma transformação de escala e de uma transformação pseudo-ortogonal.

Para fins de comparação, o jacobiano de uma dilatação infinitesimal pode ser escrito de forma análoga,

$$\Omega(x; \delta\lambda) \approx 1 + \delta\lambda \quad \text{e} \quad R^\mu_\nu(x; \delta\lambda) = \delta^\mu_\nu. \quad (2.44)$$

O mesmo pode ser feito para translações e transformações de Lorentz infinitesimais. Nesses casos, sabe-se que $\Omega(x) = 1$, enquanto as componentes das matrizes pseudo-ortogonais associadas são, respectivamente,

$$R^\mu_\nu(x; \delta a) = \delta^\mu_\nu \quad \text{e} \quad R^\mu_\nu(x; \delta\omega) \approx \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu_\nu, \quad (2.45)$$

evidenciando que correspondem a transformações isométricas, isto é, preservam a noção de distância.

Em conjunto, as equações 2.42 a 2.45 sugerem que o jacobiano de uma isometria conforme possui, em geral, a forma

$$J^\mu_\nu(x) = \Omega(x) R^\mu_\nu(x), \quad (2.46)$$

em consonância com (2.12).

Em resumo, os vetores de Killing conformes associados ao espaço-tempo de Minkowski são

$$\xi^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu_\rho x^\rho + \lambda x^\mu + 2x^\mu(b \cdot x) - b^\mu x^2, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (2.47)$$

Assim como no caso das isometrias ordinárias do espaço-tempo de Minkowski, as isometrias conformes também combinam-se para gerar um grupo de Lie. Em particular, os geradores infinitesimais dessas simetrias constituem uma álgebra de Lie sob o comutador. A seguir, determinaremos os geradores das isometrias conformes e a álgebra de Lie por eles satisfeita.

2.4 A álgebra conforme

A fim de determinar a álgebra conforme¹², é necessário inicialmente identificar os geradores infinitesimais das isometrias conformes. Com esse propósito, passemos a interpretar a

¹²Doravante, os termos álgebra conforme e grupo conforme referem-se exclusivamente à álgebra e ao grupo das isometrias conformes do espaço-tempo de Minkowski d -dimensional.

transformação infinitesimal $\delta x^\mu = \epsilon^\mu(x)$, com $\epsilon^\mu(x) = \delta \tau \xi^\mu(x)$, como a ação de um operador infinitesimal δ sobre as coordenadas. Com efeito, segue a fatoração

$$\delta x^\mu = \epsilon^\nu(x) \delta_\nu^\mu = \epsilon^\nu(x) \partial_\nu x^\mu \iff \delta = \epsilon^\nu(x) \partial_\nu. \quad (2.48)$$

Explicitado o operador infinitesimal associado a cada uma das isometrias conformes, identifica-se o respectivo gerador infinitesimal a partir da expressão

$$\epsilon^\nu(x) = \delta \epsilon^A X_A^\nu(x), \quad (2.49)$$

onde $\delta \epsilon^A \in \{\delta a^\rho, \delta \omega^{\rho\sigma}, \delta \lambda, \delta b^\rho\}$ denota genericamente um dos parâmetros infinitesimais associados aos geradores da álgebra conforme, enquanto $X_A = X_A^\nu(x) \partial_\nu$ representa o gerador infinitesimal correspondente (Bassalo; Cattani, 2011).

Prontamente, nota-se que a translação infinitesimal (2.36) já manifesta tal propriedade,

$$\delta = \delta a^\rho \partial_\rho. \quad (2.50)$$

Esse operador pode ser interpretado como a substituição da coordenada x^μ pela componente a^μ , uma vez que $\partial_\rho x^\mu = \delta_\rho^\mu$. Desse modo, a transformação correspondente consiste em um deslocamento infinitesimal dos pontos na direção fixa do vetor a^μ .

De forma semelhante, a transformação de Lorentz infinitesimal (2.37) pode ser escrita como

$$\delta x^\mu = \delta \omega^\sigma{}_\rho x^\rho \delta_\sigma^\mu = \underbrace{(\delta \omega^\sigma{}_\rho x^\rho \partial_\sigma)}_\delta x^\mu, \quad (2.51)$$

o que implica, após antissimetrização¹³, o operador

$$\delta = -\frac{1}{2} \delta \omega^{\rho\sigma} (x_\rho \delta_\sigma^\nu - x_\sigma \delta_\rho^\nu) \partial_\nu. \quad (2.52)$$

Nesse caso, o operador associado às transformações de Lorentz infinitesimais pode ser interpretada como uma mistura entre pares de coordenadas, gerando rotações¹⁴ nos planos coordenados (x^ρ, x^σ) ($\rho \neq \sigma$) por um ângulo infinitesimal $\delta \omega_{\rho\sigma}$.

¹³Tecnicamente, o parâmetro $\omega^{\rho\sigma}$ não é estritamente arbitrário, em virtude de sua antissimetria. Consequentemente, apenas a parte antissimétrica de $x_\rho \partial_\sigma$ deve ser levada em consideração.

¹⁴Mais precisamente, rotações em planos puramente espaciais e *boosts* (rotações hiperbólicas) quando um dos eixos envolvidos é temporal.

Para transformações infinitesimais de escala associadas à dilatação (2.38), obtém-se

$$\delta x^\mu = \delta \lambda x^\rho \delta_\rho^\mu = (\delta \lambda x^\rho \partial_\rho) x^\mu \implies \delta = \delta \lambda x^\rho \partial_\rho. \quad (2.53)$$

A interpretação é clara: cada coordenada é substituída por uma cópia redimensionada de si mesma pelo fator infinitesimal $\sigma(x; \delta \lambda) = \delta \lambda$.

Dessa vez, da TCE infinitesimal (2.40), obtém-se

$$\delta x^\mu = (2x^\nu (\delta b \cdot x) - \delta b^\nu x^2) \delta_\nu^\mu = (2(\delta b \cdot x) x^\nu \partial_\nu - x^2 \delta b^\nu \partial_\nu) x^\mu, \quad (2.54)$$

o que implica o operador

$$\delta = \delta b^\rho (2x_\rho x^\nu - x^2 \delta_\rho^\nu) \partial_\nu. \quad (2.55)$$

O primeiro termo consiste em um redimensionamento local das coordenadas, com magnitude $\sigma(x; \delta b) = 2\delta b \cdot x$; o segundo termo corresponde a uma translação dependente da posição, deslocando cada ponto na direção fixa do vetor $-b^\mu$, com intensidade proporcional ao quadrado da distância à origem.

Portanto, os operadores infinitesimais associados às isometrias conformes atuam sobre as coordenadas segundo¹⁵

$$\delta x^\mu = (i\delta \epsilon^A X_A) x^\mu = \left(i\delta a^\rho P_\rho + \frac{i}{2} \delta \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} + i\delta \lambda D + i\delta b^\rho K_\rho \right) x^\mu, \quad (2.56)$$

onde $\{X_A\} = \{P_\rho, M_{\rho\sigma}, D, K_\rho\}$ constitui uma base para a álgebra conforme, cujos elementos correspondem, respectivamente, aos geradores de translações, de transformações de Lorentz (rotações e *boosts*), de dilatação e de TCEs. A forma explícita de cada um dos geradores encontra-se na tabela 2.1

De posse dos geradores infinitesimais, podemos finalmente determinar a álgebra conforme. Em geral, tais geradores constituem uma álgebra de Lie quando seus comutadores podem ser expressos como combinações lineares dos próprios geradores. Nesse caso,

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= (X_A^\rho \partial_\rho X_B^\nu - X_B^\rho \partial_\rho X_A^\nu) \partial_\nu \\ &= f_{AB}^C X_C, \end{aligned} \quad (2.57)$$

¹⁵Embora a introdução do fator imaginário i seja puramente convencional, ela garante que os geradores infinitesimais sejam representados por operadores hermitianos, propriedade fundamental para sua interpretação física.

Transformação	Gerador
Translação	$P_\rho = -i\partial_\rho$
Transformação de Lorentz	$M_{\rho\sigma} = i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)$
Dilatação	$D = -ix^\rho\partial_\rho$
Transformação conforme especial	$K_\rho = -i(2x_\rho x^\sigma\partial_\sigma - x^2\partial_\rho)$

Tabela 2.1: Geradores infinitesimais.

onde f_{AB}^C são as constantes de estrutura da álgebra.

A seguir, descreveremos a álgebra associada ao grupo de Poincaré (ou grupo de Lorentz não-homogêneo)¹⁶.

1. Devido à comutação das derivadas parciais, translações compõem uma subálgebra abeliana da álgebra de Poincaré,

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0. \quad (2.58)$$

2. Além de abeliana, a subálgebra formado pelas translações é também um ideal da álgebra de Poincaré, isto é, a composição de translações e transformações de Lorentz é um elemento dessa subálgebra,

$$\begin{aligned} [P_\alpha, M_{\rho\sigma}] &= [P_\alpha, -2x_{[\rho}P_{\sigma]}] = -2([P_\alpha, x_{[\rho}P_{\sigma]}] - x_{[\rho}[P_{\sigma]}, P_\alpha]) \\ &= 2i\eta_{\alpha[\rho}P_{\sigma]} \\ &= i(\eta_{\alpha\rho}P_\sigma - \eta_{\alpha\sigma}P_\rho). \end{aligned} \quad (2.59)$$

3. Os geradores $M_{\rho\sigma}$ compõem a subálgebra associado ao grupo de Lorentz (homogêneo):

$$\begin{aligned} [M_{\alpha\beta}, M_{\rho\sigma}] &= -2[x_{[\alpha}P_{\beta]}, M_{\rho\sigma}] = -2(x_{[\alpha}[P_{\beta]}, M_{\rho\sigma}] - [M_{\rho\sigma}, x_{[\alpha}]P_{\beta}]) \\ &= -4ix_{[\alpha}\eta_{\beta][\rho}P_{\sigma]} + 4ix_{[\rho}\eta_{\sigma][\alpha}P_{\beta]} \\ &= -i(\eta_{\alpha\rho}M_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma}M_{\beta\rho} - \eta_{\beta\rho}M_{\alpha\sigma} + \eta_{\beta\sigma}M_{\alpha\rho}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Em decorrência de (2.58), (2.59) e (2.60), é dito que a álgebra de Poincaré $\mathfrak{iso}(1, d-1)$ é produto semi-direto da subálgebra do grupo de Lorentz $\mathfrak{so}(1, d-1)$ com a subálgebra das translações $\mathfrak{t}_d$,

$$\mathfrak{iso}(1, d-1) \cong \mathfrak{so}(1, d-1) \ltimes \mathfrak{t}_d. \quad (2.61)$$

¹⁶As propriedades de comutadores a serem utilizadas podem ser encontradas no final do apêndice C.

Conclui-se, portanto, que a álgebra de Poincaré compõe uma subálgebra da álgebra conforme.

Estendendo a álgebra de Poincaré para incluir dilatações D , temos novas relações de comutação:

$$[D, D] = [x^\rho P_\rho, D] = x^\rho [P_\rho, D] + [x^\rho, D] P^\rho \quad (2.62)$$

$$= x^\rho [P_\rho, x^\sigma] P_\sigma + x^\sigma [x^\rho, P_\sigma] P^\rho$$

$$= 0.$$

$$[D, P_\rho] = [x^\sigma P_\sigma, P_\rho] = x^\sigma [P_\sigma, P_\rho] + [x^\sigma, P_\rho] P_\sigma \quad (2.63)$$

$$= iP_\rho.$$

$$[D, M_{\rho\sigma}] = [D, -2x_{[\rho} P_{\sigma]}] = -2 \left([D, x_{[\rho}] P_{\sigma]} - x_{[\rho} [P_{\sigma]}, D] \right) \quad (2.64)$$

$$= 2i \left(x_{[\rho} P_{\sigma]} - x_{[\rho} P_{\sigma]} \right)$$

$$= 0.$$

Nota-se que as dilatações comutam com a subálgebra associada ao grupo de Lorentz — isto é, D compõe o centro da composição. Em virtude desse fato, é possível inferir que as dilatações agem sobre representações do grupo de Lorentz como operadores escalares¹⁷ (um múltiplo escalar da identidade).

Ademais, em virtude da relação de comutação não trivial (2.63), a subálgebra das translações permanece sendo uma subálgebra ideal. Consequentemente, os geradores $P_\rho, M_{\rho\sigma}$ e D formam uma álgebra fechada. Todavia, sistemas de interesse físico que são invariantes sob Poincaré raramente apresentam simetria de escala sem também possuir simetria conforme¹⁸ (Nakayama, 2015).

Portanto, quando acrescida das transformações conformes especiais, para além da dilatação, a álgebra de Poincaré é estendida não trivialmente à álgebra conforme. Seguem as

¹⁷Esse resultado é conhecido como lema de Schur (Schur, 1905).

¹⁸Simetria de escala refere-se, geralmente, à simetria sob dilatação. Portanto, a afirmação diz respeito a casos físicos de interesse usualmente apresentarem simultaneamente invariância sob dilatação e transformações conformes especiais.

relações de comutação adicionais,

$$\begin{aligned} [D, K_\rho] &= [D, 2x_\rho D - x^2 P_\rho] = 2[D, x_\rho]D - (x^2[D, P_\rho] + [D, x^2]P_\rho) \\ &= -2ix_\rho D - i(x^2 P_\rho - 2x^2 P_\rho) \\ &= -iK_\rho. \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} [P_\rho, K_\sigma] &= [P_\rho, 2x_\sigma D - x^2 P_\sigma] = x_\sigma[P_\rho, D] + [P_\rho, x_\sigma]D - [P_\rho, x^2]P_\sigma \\ &= -2i(x_\sigma P_\rho + \eta_{\rho\sigma}D) + 2ix_\rho P_\sigma \\ &= -2i(\eta_{\rho\sigma}D + M_{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} [K_\rho, K_\sigma] &= [K_\rho, 2x_\sigma D - x^2 P_\sigma] \\ &= 2(x_\sigma[K_\rho, D] + [K_\rho, x_\sigma]D) - (x^2[K_\rho, P_\sigma] + [K_\rho, x^2]P_\sigma) \\ &= 2(ix_\sigma K_\rho - 2ix_\rho x_\sigma D + ix^2 \eta_{\rho\sigma}D) - 2ix^2(\eta_{\rho\sigma}D - M_{\rho\sigma}) + 2ix^2 x_\rho P_\sigma \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} [K_\alpha, M_{\rho\sigma}] &= [K_\alpha, -2x_{[\rho} P_{\sigma]}] = -2([K_\alpha, x_{[\rho}] P_{\sigma]} - x_{[\rho}] [P_{\sigma]}, K_\alpha]) \\ &= -2(-2ix_\alpha x_{[\rho} P_{\sigma]} + ix^2 \eta_{\alpha[\rho} P_{\sigma]} + 2ix_{[\rho} \eta_{\sigma]\alpha} D + 2ix_{[\rho} M_{\sigma]\alpha}) \\ &= i\eta_{\alpha[\rho} K_{\sigma]} \\ &= i(\eta_{\alpha\rho} K_\sigma - \eta_{\alpha\sigma} K_\rho). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Nota-se que o gerador das TCEs exerce papel análogo ao gerador das translações, diferindo somente por um sinal em (2.65). Mais adiante veremos como essa “pequena” diferença é fundamental para a classificação das representações do grupo conforme.

Visto que P_ρ não comuta com D , tampouco com K_ρ (2.66), surge uma aparente contradição com teorema de Coleman–Mandula (Coleman; Mandula, 1967). Todavia, essa suposta violação decorre do fato de que a massa não corresponde a um invariante conforme.

A relação de dispersão relativística é dada por $P^2 = m^2$. No entanto,

$$[D, P^2] = P_\rho [D, P^\rho] + [D, P_\rho] P^\rho = 2iP^2, \quad (2.69)$$

o que mostra que P^2 não é invariante sob dilatações.

Ou seja, se a teoria é invariante conforme, ela deve descrever partículas não massivas sujeitas a interações de longo alcance. Desse modo, como estados de espalhamento comportam-se assintoticamente como estados livres, a matriz S para teorias de partículas não

massivas não é bem definida¹⁹, pelo menos não na forma usual. De fato, a própria noção de regiões arbitrariamente distantes é conceitualmente incompatível com a simetria conforme, uma vez que é possível aproximá-las a uma distância finita por meio de transformações de escala, o que reflete a ausência de uma escala característica de comprimento. Portanto, dado que o teorema de Coleman–Mandula assume a existência de uma matriz S (no sentido usual de teoria de espalhamento), a simetria conforme não constitui um contraexemplo, mas sim uma brecha que permite estender a álgebra de Poincaré de modo não trivial²⁰.

Por fim, em d dimensões espaço-temporais, a álgebra conforme, denotada por $\text{conf}(1, d-1)$, é composta de d translações, $\frac{d(d-1)}{2}$ transformações de Lorentz, 1 dilatação e d TCEs e, portanto, a álgebra conforme constitui uma álgebra de dimensão $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

Geradores	Quantidade
Translações P_ρ	d
Transformações de Lorentz $M_{\rho\sigma}$	$\frac{d(d-1)}{2}$
Dilatação D	1
Transformações conformes especiais K_ρ	d
Dimensão total da álgebra conforme	$\frac{(d+1)(d+2)}{2}$

Tabela 2.2: Contagem de dimensões da álgebra conforme em d dimensões.

Até o momento, identificamos a atuação das isometrias conformes infinitesimais por meio de operadores lineares, os quais se combinam via comutadores para comporem uma álgebra de Lie.

Além de constituir a linguagem natural na qual simetrias variacionais são formuladas (apêndice C), simetrias infinitesimais fundamentam-se na estrutura linear dos espaços vetoriais, que dispõem de diversas ferramentas poderosas. Esse tratamento simplifica consideravelmente as leis de composição do grupo, uma vez que lidar diretamente com transformações de natureza não linear pode rapidamente tornar-se uma tarefa hercúlea.

Entretanto, certas propriedades de grupo exigem uma análise mais minuciosa de sua estrutura global. Em particular, as TCEs linearizadas diferem substancialmente de sua forma

¹⁹A dificuldade em isolar estados assintóticos manifesta-se na forma de divergência Infravermelha (IR). Discussões a respeito da interpretação de tais divergências, bem como outros aspectos relacionados, podem ser encontradas em (Strominger 2018).

²⁰Outra exceção ao teorema é fornecida pelas supersimetrias. Uma discussão acerca desse tópico pode ser encontrada em (Weinberg 2013).

finita. Na próxima seção, determinaremos a forma finita das isometrias conformes e serão discutidos alguns de seus aspectos essenciais, especialmente aqueles relacionados às TCEs.

2.5 Forma finita das isometrias conformes

A maioria das simetrias estudadas na física apresentam-se como grupos de Lie, variedades suaves que representam transformações contínuas²¹, em contraste com grupos discretos. Localmente, são caracterizadas por uma álgebra de Lie correspondente²², a qual atua como o espaço tangente associado ao elemento identidade. Essa estrutura constitui os geradores infinitesimais de transformações contínuas.

Nesse sentido, consideremos um grupo de Lie G , com $g \in G$, tal que

$$\phi : s \mapsto g = \phi(s) \quad (2.70)$$

defina uma curva paramétrica em G ²³, cuja origem $s = 0$ corresponde ao elemento identidade em G , isto é,

$$\phi_0 \phi_s = \phi_s, \quad \phi_s \equiv \phi(s). \quad (2.71)$$

Assim, compreende-se uma transformação finita como o resultado de uma progressão contínua de passos, parametrizada por s , o que permite definir a ação do grupo G em $\mathcal{M}$. Em outras palavras, uma transformação de pontos $f : x \rightarrow x'$ concretiza o modo como o grupo de transformações G age sobre pontos em $\mathcal{M}$, conforme codificado pelo mapeamento ϕ , e descrito pela relação $x(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, tal que

$$x \equiv x(0) \mapsto f(x) \equiv x(1). \quad (2.72)$$

Aqui, $x \equiv x(0)$ e $f(x) \equiv x(1)$ estabelecem a correspondência entre pontos associados a uma trajetória em G e uma transformação $f : x \rightarrow x' = f(x)$, na qual $x(s)$ conecta pontos os

²¹Nesta seção, os tópicos discutidos têm como base os livros-texto (Nakahara, 2018; Schutz, 1980; Gilmore, 2008; Fecko, 2006).

²²Caso dois grupos de Lie não necessariamente isomórficos sejam localmente isomórficos, compartilham a mesma álgebra de Lie (a menos de isomorfismo).

²³Formalmente, a coleção $\{\phi_s \in G | s \in \mathbb{R}\}$ define um subconjunto de G de dimensão um, denominado grupo uniparamétrico.

x e x' em $\mathcal{M}$ por meio da ação de G ²⁴. Em particular, ϕ_0 atua como o mapa identidade:

$$\phi_0 : x \mapsto x. \quad (2.73)$$

Desse modo, a ação de G em $\mathcal{M}$ pode ser realizada por intermédio do fluxo subentendido por ϕ , que transporta o ponto x ao longo das curvas integrais $x(s)$, culminando na transformação de pontos $f(\mathcal{M})$. Explicitamente, a relação entre as coordenadas de $x(s)$ e $x(0)$ pode ser estabelecida via expansão em série de Taylor em torno de $s = 0$,

$$\begin{aligned} x^\mu(s) &= x^\mu(0) + s \left(\frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) \right) \Big|_{\tau=0} + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) \right) \Big|_{\tau=0} + \dots \\ &= \left(1 + s \frac{d}{d\tau} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2}{d\tau^2} + \dots \right) x^\mu(\tau) \Big|_{\tau=0} \\ &= \exp \left(s \frac{d}{d\tau} \right) x^\mu(\tau) \Big|_{\tau=0}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde τ atua como uma variável auxiliar (muda), permitindo interpretar o operador exponencial como gerador de translações ao longo do fluxo, de modo que

$$\exp \left(s \frac{d}{d\tau} \right) x^\mu(\tau) \Big|_{\tau=0} = x^\mu(\tau + s) \Big|_{\tau=0} = x^\mu(s). \quad (2.75)$$

Portanto, define-se uma transformação finita $x \mapsto x'$ em $\mathcal{M}$ pela ação do elemento $g = \phi_1$ sobre as coordenadas, sendo que g configura, de forma compacta, a ação contínua do grupo, desde o elemento identidade até o valor unitário do parâmetro s ,

$$x'^\mu := \exp \left(\frac{d}{d\tau} \right) x^\mu(\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad x'^\mu = x^\mu(1). \quad (2.76)$$

No início desta seção, foi mencionado que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode ser identificada com o espaço tangente ao grupo de Lie G na vizinhança do elemento identidade. Nesse contexto, a relação entre os elementos $i\epsilon^A X_A \in \mathfrak{g}$ e a transformação finita correspondente é estabelecida por

$$-i \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon^A} \Big|_{\epsilon^A=0} = X_A. \quad (2.77)$$

Essa relação admite uma interpretação natural em termos da composição de transformações infinitesimais. De fato, uma transformação finita $g(\epsilon)$ pode ser vista como o ponto final de

²⁴Em linguagem técnica, diz-se que $x(s)$ pertence à órbita de $x(0)$ sob a ação de G .

uma curva suave em G que parte do elemento identidade $g(0) = 1$ [cf. (2.76)], cuja trajetória é gerada pela aplicação sucessiva de incrementos infinitesimais $g(\delta\epsilon)$, em que $\delta\epsilon^A = \delta\tau\epsilon^A$ desempenha o papel de parâmetro infinitesimal. Heuristicamente, essa ideia é capturada pela relação

$$g(\epsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} [g(\delta\epsilon)]^k = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} (1 + i\delta\epsilon^A X_A)^{1/\delta\tau} = \exp(i\epsilon^A X_A), \quad (2.78)$$

que fornece a reconstrução de uma transformação finita a partir de seu gerador infinitesimal²⁵.

Quando G atua sobre uma variedade $\mathcal{M}$, seus geradores infinitesimais podem ser representados por campos vetoriais. Em particular, ao longo de uma curva integral $x(\tau)$, esses campos vetoriais assumem a forma

$$X(x(\tau)) = \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu = \frac{d}{d\tau}. \quad (2.79)$$

No caso do grupo conforme atuando em $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,d-1}$, os geradores infinitesimais são representados pelos campos vetoriais

$$\xi(x) = \xi^\mu(x) \partial_\mu, \quad (2.80)$$

cujas componentes são dadas por

$$\xi^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu{}_\rho x^\rho + \lambda x^\mu + 2x^\mu(b \cdot x) - b^\mu x^2, \quad (2.81)$$

com $\xi \in \text{conf}(1, d-1)$.

Dado que a estrutura infinitesimal do grupo é conhecida em cada ponto da variedade, resta integrá-la para reconstruir as transformações finitas correspondentes. Para tanto, observa-se que o campo vetorial $\xi(x)$ determina a direção tangente às curvas de seu fluxo, de modo que as transformações finitas são obtidas pela resolução do problema de valor inicial

$$\frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \xi^\mu(x(\tau)), \quad x^\mu(0) = x^\mu. \quad (2.82)$$

²⁵Tal procedimento é denominado exponenciação da álgebra, método por meio do qual o grupo de Lie G é reconstruído localmente a partir da álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$. Na prática, reparte-se o intervalo $[0, 1]$ em k subintervalos regularmente espaçados, cada um de comprimento $\delta\tau = 1/k$. No limite $k \rightarrow \infty$ (equivalentemente, $\delta\tau \rightarrow 0$), a composição sucessiva do elemento infinitesimal $g(\delta\epsilon) \approx 1 + i\epsilon^A X_A/k$ converge para $\exp(i\epsilon^A X_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + i\epsilon^A X_A/k)^k$, reproduzindo as transformações finitas de G .

As soluções desse sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são precisamente as curvas integrais dos VKCs.

A seguir, obteremos a forma finita de cada uma das transformações separadamente e analisaremos os resultados, com maior atenção às TCEs em virtude de sua natureza intrinsecamente não linear.

A curva integral associada às translações é obtida por integração direta da equação

$$\frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau) = a^\mu, \quad x^\mu(0) = x^\mu, \quad (2.83)$$

cuja solução é dada por

$$x^\mu(s) = x^\mu + a^\mu s. \quad (2.84)$$

Portanto, uma translação finita tem o mesmo formato de sua forma infinitesimal,

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (2.85)$$

É interessante notar que a solução acima é facilmente obtida a partir da exponenciação do gerador infinitesimal (2.76), uma vez que a expansão em série de Taylor converge para uma translação finita já no termo de primeira ordem. De fato, a composição sucessiva de translações infinitesimais nada mais é que uma única translação cujo deslocamento na direção de a^μ torna-se progressivamente maior. Nesse sentido, as translações formam um grupo abeliano, denotado por T_d , isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{R}^d$.

No caso das transformações de Lorentz, é preciso resolver um sistema de equações diferenciais lineares acopladas,

$$\frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\rho x^\rho(\tau), \quad x^\mu(0) = x^\mu. \quad (2.86)$$

Como $\omega^\mu{}_\rho$ é constante, a solução geral é dada pela exponencial matricial (Boyce; DiPrima; Meade, 2017),

$$x^\mu(s) = [\exp(\omega s)]^\mu{}_\rho x^\rho. \quad (2.87)$$

Tendo em vista que $\omega_{\mu\nu}$ é antissimétrico e, conseqüentemente, possui traço nulo,

$$(\omega^T)_\rho{}^\mu = -\eta^{\mu\nu} \omega_{\rho\nu} = -\eta^{\mu\beta} \eta_{\rho\alpha} \omega^\alpha{}_\beta \quad \text{e} \quad \text{tr}(\omega) = \omega^\mu{}_\mu = 0, \quad (2.88)$$

obtem-se, a partir da identidade $[\exp(\omega)]^T = \exp(\omega^T)$,

$$\begin{aligned} (\exp(\omega^T))_{\nu}^{\mu} &= \delta_{\nu}^{\mu} + (\omega^T)_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}(\omega^T \omega^T)_{\nu}^{\mu} + \dots \\ &= \eta^{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} - \omega_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2}(\omega\omega)^{\alpha}_{\beta} - \dots \right) \\ &= \eta^{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} ([\exp(\omega)]^{-1})^{\alpha}_{\beta}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

de onde segue a condição de pseudo-ortogonalidade

$$[\exp(\omega)]^T = \eta [\exp(\omega)]^{-1} \eta^{-1}. \quad (2.90)$$

Ademais,

$$\det(\exp(\omega)) = \exp(\text{tr}(\omega)) = 1, \quad (2.91)$$

mostrando que $\exp(\omega)$ é uma matriz pseudo-ortogonal de determinante unitário. Definindo $\Lambda = \exp(\omega)$, essas propriedades são sintetizadas pela condição

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^{\mu}_{\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (2.92)$$

que caracteriza as matrizes do grupo de Lorentz ou, equivalentemente, do grupo pseudo-ortogonal especial, denotado por $\text{SO}(1, d-1)$ ²⁶. Por sua vez, a álgebra de Lie associada, denotada por $\mathfrak{so}(1, d-1)$, corresponde ao espaço vetorial das matrizes $d \times d$ antissimétricas (Frankel, 2004), cujos elementos são mapeados, via exponenciação, em matrizes pseudo-ortogonais $d \times d$ de determinante unitário.

Portanto, as transformações de Lorentz em sua forma finita podem ser escritas como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}(\omega) x^{\rho}, \quad \Lambda(\omega) = \exp(\omega) \in \text{SO}(1, d-1). \quad (2.93)$$

²⁶Vale ressaltar que o grupo ortogonal especial, denotado por $\text{SO}(d)$, constitui o conjunto de matrizes que preservam a métrica euclidiana. Além disso, por conveniência, ao longo deste trabalho utilizaremos a notação $\text{SO}(1, d-1)$ para nos referirmos à componente conexa do grupo de Lorentz (subconjunto que contém o elemento identidade) em d dimensões, também denotada por $\text{SO}^+(1, d-1)$ ou $L_+^{\uparrow}$ (grupo ortócrono próprio), uma vez que as demais componentes não serão consideradas.

No caso das dilatações, obtém-se um problema formalmente análogo, agora com a composição diagonal $\lambda \delta_\rho^\mu$ desempenhando o papel de ω_ρ^μ ,

$$\frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \lambda \delta_\rho^\mu x^\rho(\tau). \quad (2.94)$$

Por se tratar de um sistema de equações diferenciais lineares desacopladas associado a uma homotetia, a exponencial matricial é reduzida à exponencial do autovalor λ ,

$$x^\mu(s) = \exp(\lambda s) x^\mu. \quad (2.95)$$

Alternativamente, a solução pode ser facilmente obtida a partir da expansão em série de Taylor (2.76), uma vez que

$$\left(\frac{d^n}{d\tau^n} x^\mu(\tau) \right) \Big|_{\tau=0} = \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \xi^\mu(x(\tau)) \right) \Big|_{\tau=0} = \lambda^n x^\mu. \quad (2.96)$$

De todo modo, uma dilatação finita é dada por

$$x'^\mu = \exp(\lambda) x^\mu, \quad (2.97)$$

que, diferentemente das isometrias ordinárias — as quais preservam o volume do espaço-tempo —, a dilatação está associada a uma mudança de escala das coordenadas, caracterizada pelo fator $\Omega = \exp(\lambda)$.

Uma sequência de dilatações é novamente uma dilatação e, portanto, formam um grupo abeliano isomorfo ao grupo multiplicativo dos números reais positivos, denotado por $\mathbb{R}^+$.

É interessante observar que, até o momento, as transformações analisadas são relativamente simples. Em particular, o conjunto de translações, rotações²⁷ e dilatações constituem o grupo afim, isto é, composições de transformações lineares e translações. Notavelmente, transformações de Lorentz e dilatações comutam entre si, mas, quando combinadas a translações, geram novamente transformações afins²⁸, de modo que a forma geral pode ser escrita como

$$x'^\mu = \exp(\lambda) \Lambda_\rho^\mu(\omega) x^\rho + a^\mu. \quad (2.98)$$

²⁷Tanto a rotações espaciais quanto a rotações hiperbólicas, também chamadas de *boosts*.

²⁸Ou seja, o conjunto das translações formam um subgrupo normal do grupo $(\mathbb{R}^+ \times \text{SO}(1, d-1)) \ltimes T_d$.

Em constraste, as TCEs são transformações altamente não triviais. Em decorrência desse fato, elas serão examinadas separadamente.

2.5.1 Transformações conformes especiais

Diferente das demais transformações, as curvas integrais associadas às TCEs satisfazem equações diferenciais não lineares,

$$\frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau) = 2x^\mu(b \cdot x) - b^\mu x^2. \quad (2.99)$$

De imediato, a solução não é evidente, seja pela equação acima, seja diretamente pela exponenciação (2.76). Para elucidar a resolução da equação (2.99), é interessante introduzirmos as inversões.

A inversão, como o nome sugere, é uma transformação fundamentada na ideia de uma aplicação que leva um número x ao seu inverso multiplicativo, $1/x$. Tal conceito pode ser estendido a uma operação notavelmente não linear, sob a qual as coordenadas do espaço-tempo são transformadas segundo

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = c^2 \frac{x^\mu}{x^2}, \quad c = \|c\| \in \mathbb{R}. \quad (2.100)$$

De forma simplificada, a inversão atua invertendo a norma de x^μ em relação ao lugar geométrico dos pontos que equidistam de c da origem²⁹, como pode ser explicitado pela relação

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = c^2 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad x'^2 = \frac{c^4}{x^2}. \quad (2.101)$$

Sob a inversão, pontos para os quais $\|x\| = 0$ são singulares. Portanto, em virtude da estrutural causal das variedades Lorentzianas, o cone de luz deve ser excluído do domínio de (2.100). Ademais, trata-se de uma transformação que preserva ângulos: sejam x_1 e x_2 pontos mapeados respectivamente a x'_1 e x'_2 por uma inversão. Tem-se que

$$x'_1 \cdot x'_2 = \frac{c^4}{x_1^2 x_2^2} (x_1 \cdot x_2). \quad (2.102)$$

²⁹Em assinatura Lorentziana, esse conjunto define hiperboloides: de uma folha se $c^2 < 0$ e de duas folhas se $c^2 > 0$. Em assinatura euclidiana, define uma hipersfera de raio c centrada na origem.

Ainda que o produto interno seja alterado, sua razão pelo produto das normas de x_1 e x_2 é mantida fixa,

$$\cos(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\| \|x_2\|} = \cos(x'_1, x'_2), \quad (2.103)$$

assegurando que (2.100) seja uma transformação conforme. Abaixo, estão listadas outras propriedades relevantes.

Propriedade 1. A inversão é uma transformação involutiva (ou autoinversa):

$$x^\mu \mapsto c^2 \frac{x^\mu}{x^2} = x'^\mu \mapsto c^2 \frac{x'^\mu}{x'^2} = x^\mu. \quad (2.104)$$

Propriedade 2. Tratando-se de uma transformação conforme, a inversão é uma transformação cujo jacobiano pode ser decomposto como o produto de um fator de escala por uma matriz pseudo-ortogonal:

$$J^\mu_\nu(x) = \frac{c^2}{x^2} \left(\delta^\mu_\nu - 2 \frac{x^\mu x_\nu}{x^2} \right) = \Omega(x) I^\mu_\nu(x), \quad (2.105)$$

onde a matriz de inversão $I(x)$ satisfaz $I^\mu_\rho(x) I^\rho_\nu(x) = \delta^\mu_\nu$, dado que é simétrica e involutiva.

Propriedade 3. Diferentemente de matrizes das transformações de Lorentz, a matriz de inversão não é continuamente conexa à identidade, o que a caracteriza como uma transformação discreta³⁰. Em particular, a inversão trata-se de uma operação que inverte a orientação, o que se reflete no determinante negativo:

$$J(x) = -\Omega^d(x), \quad \det(I) = -1. \quad (2.106)$$

Ao compor as inversões com translações, transformações ortogonais Λ^μ_ρ e dilatações, o teorema de Liouville (Liouville, 1850) afirma que, em $d \geq 3$ ³¹, essa composição gera o conjunto de todas as transformações conformes em $\mathbb{R}^d$ (independentemente da assinatura métrica). Em particular, as TCEs podem ser vista como a composição de uma inversão e uma translação,

³⁰Matrizes singulares consituem pontos de discontinuidade que impedem a conexão contínua de elementos de determinante positivo e negativo.

³¹Esse resultado estabelece a finitude do grupo conforme em dimensão igual ou superior a três. Demonstrações do teorema mencionado e propriedades geométricas das inversões podem ser encontradas em (Blair, 2000).

seguida de outra inversão, garantindo que ela seja uma transformação continuamente conexa à identidade.

À luz do contexto apresentado, a equação (2.99) já não parece tão enigmática. Em particular, torna-se evidente que o lado direito pode ser reescrito em uma forma mais sugestiva,

$$2x^\mu(b \cdot x) - b^\mu x^2 = -b^\nu x^2 \left(\delta_\nu^\mu - 2 \frac{x^\mu x_\nu}{x^2} \right). \quad (2.107)$$

Isso motiva a introdução da mudança de variáveis

$$x^\mu = \frac{y^\mu}{y^2}, \quad (2.108)$$

a partir da qual segue que

$$-b^\nu x^2 \left(\delta_\nu^\mu - 2 \frac{x^\mu x_\nu}{x^2} \right) \stackrel{(2.108)}{=} -\frac{b^\nu}{y^2} \left(\delta_\nu^\mu - 2 \frac{y^\mu y_\nu}{y^2} \right) \stackrel{(2.105)}{=} -b^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}, \quad (2.109)$$

em decorrência da propriedade involutiva (2.104). Por outro lado, a regra da cadeia implica

$$\frac{d}{d\tau} x^\mu(y(\tau)) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \frac{d}{d\tau} y^\nu(\tau). \quad (2.110)$$

Como o jacobiano da inversão admite inversa [cf. propriedade (2.106)], a equação (2.99) reduz-se simplesmente a

$$\frac{d}{d\tau} y^\mu(\tau) = -b^\mu. \quad (2.111)$$

Sua solução é análoga àquela obtida em (2.84) e, nas variáveis originais, assume a forma

$$\frac{x^\mu(s)}{x^2(s)} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu s. \quad (2.112)$$

Portanto, a forma finita das TCEs é dada por

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu. \quad (2.113)$$

Em virtude do lado esquerdo corresponder à inversão das coordenadas x'^μ , a propriedade involutiva pode ser utilizada para reescrevê-la explicitamente:

$$x'^\mu = \left(\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu \right) \left(\frac{x^2}{1 - 2b \cdot x + x^2 b^2} \right). \quad (2.114)$$

Obtém-se, assim, a forma padrão

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - x^2 b^\mu}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}. \quad (2.115)$$

Embora complexa, a reformulação realizada evidencia uma característica intrinsecamente particular das TCEs. Ao observar atentamente o lado direito da igualdade em (2.113), vemos que resulta de uma inversão das coordenadas x^μ , seguida de uma translação na direção fixa do vetor $-b^\mu$. Ou seja, as TCEs são geradas sequencialmente por uma inversão, uma translação e outra inversão,

$$x^\mu \xrightarrow{I} c^2 \frac{x^\mu}{x^2} \xrightarrow{T_{\tilde{b}}} \tilde{x}^\mu = c^2 \frac{x^\mu}{x^2} + \tilde{b}^\mu \xrightarrow{I} c^2 \frac{\tilde{x}^\mu}{\tilde{x}^2} = x'^\mu, \quad (2.116)$$

onde I denota uma inversão e $T_{\tilde{b}}$ denota uma translação na direção fixa do vetor $\tilde{b}^\mu = -c^2 b^\mu$. Sua interpretação geométrica em assinatura euclidiana pode ser visualizada na figura 2.1.

Uma das características mais contrastantes em relação às demais transformações conformes, mas igualmente instigante, é sua notória não linearidade, a qual pode ser atribuída às inversões. Apesar desse aspecto, as TCEs retêm uma propriedade comum às transformações lineares: a fixação da origem do sistema de coordenadas. Tal propriedade decorre naturalmente de sua construção em termos de inversões, uma vez que a origem, por não pertencer ao domínio da inversão, permanece inalterada pela translação intermediária.

A partir de (2.115), é possível verificar que o jacobiano associado às TCEs corresponde ao produto entre um fator de escala e uma transformação de Lorentz. Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{(\delta_\nu^\mu - 2b^\mu x_\nu)(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2) - (x^\mu - x^2 b^\mu)(-2b_\nu + 2x_\nu b^2)}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^2} \\ &= \Omega(x) [\delta_\nu^\mu - 2(b^\mu x_\nu - x^\mu b_\nu)] - 2\Omega^2(x) [b^\mu b_\nu x^2 + x^\mu x_\nu b^2 - 2(b \cdot x)x^\mu b_\nu] \\ &\quad - 2\Omega^2(x)(b^\mu x_\nu - x^\mu b_\nu)x^2 b^2 \\ &= \Omega(x) [\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu(x) + \Omega(x)\omega^{\alpha\beta}(x)(x^\mu b_\alpha \eta_{\beta\nu} + \delta_\alpha^\mu x_\beta b_\nu - \delta_\alpha^\mu \eta_{\beta\nu} x^2 b^2)], \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde $\omega^{\alpha\beta}(x) = -4b^{[\alpha}x^{\beta]}$ e $\Omega(x) = (1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^{-1}$ denotam, respectivamente, uma parametrização da componente rotacional e o fator de escala associados às TCEs.

Infere-se, através da composição (2.116), que, além de o determinante do jacobiano ser positivo — e, mais especificamente, unitário —, as TCEs são localmente proporcionais a uma matriz pseudo-ortogonal. Por conseguinte, pode-se afirmar que as isometrias conformes consistem em transformações cujo formato geral do jacobiano segue (2.46).

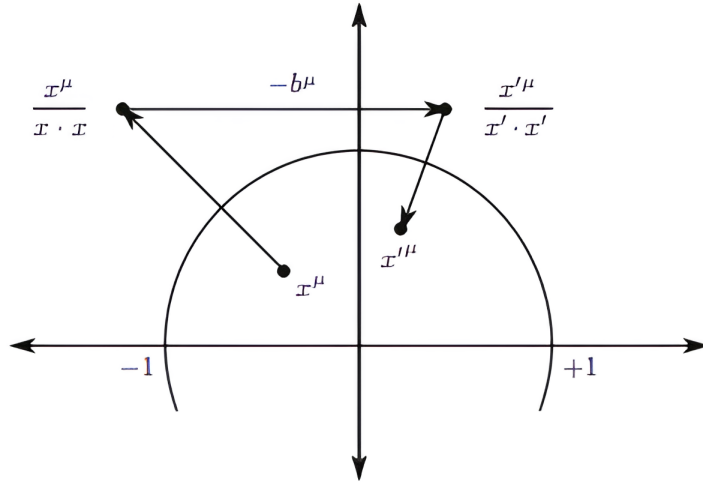


Figura 2.1: Ilustração de uma transformação conforme especial finita. Fonte: (Blumenhagen; Plauschinn, 2009).

A respeito da equação (2.113), poder-se-ia, de forma equivalente, resolvê-la para x^μ ao invés de x'^μ e, conseqüentemente, obtido a transformação inversa, na qual o sentido da translação é contrário ao de (2.115),

$$x^\mu = \frac{x'^\mu + x'^2 b^\mu}{1 + 2b \cdot x' + b^2 x'^2}. \quad (2.118)$$

Calculando os produtos x'^2 e $b \cdot x'$, obtêm-se

$$x'^2 = \frac{x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}, \quad b \cdot x' = \frac{b \cdot x - x^2 b^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}. \quad (2.119)$$

Desse modo, observa-se que o fator de escala da transformação inversa, analogamente ao caso das inversões em (2.101), é recíproco de $\Omega(x)$, e vice-versa:

$$\frac{1}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} - 2b \cdot x' - b^2 x'^2 = 1 \implies \Omega(x)\Omega(x') = 1. \quad (2.120)$$

Esse comportamento é esperado, pois, em vista de (2.112), a composição inversa implica uma translação na direção fixa do vetor $-\tilde{b}^\mu = c^2 b^\mu$.

O significado geométrico da expressão (2.115) pode ser compreendido da seguinte maneira³². Considerando $b^\mu = \frac{1}{2}(0, \mathbf{a})$ e $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, as equações (2.118) assumem o formato

$$t = \Omega(x')t' \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \Omega(x')(\mathbf{x}' + \frac{1}{2}(t'^2 - \mathbf{x}'^2)\mathbf{a}), \quad (2.121)$$

$$\text{onde} \quad \Omega(x') = (1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}' - \frac{1}{4}(t'^2 - \mathbf{x}'^2)\mathbf{a}^2)^{-1}. \quad (2.122)$$

Sejam S e S' dois referenciais, associados aos sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}$ e $\{x'^\mu\}$, respectivamente. Supondo que uma partícula permaneça em repouso na origem (espacial) do referencial S' para todo tempo t , um observador em repouso no referencial S determina as coordenadas da partícula como sendo

$$t = \frac{t'}{1 - \frac{1}{4}t'^2\mathbf{a}^2}, \quad \mathbf{x} = \frac{\frac{1}{2}t'^2\mathbf{a}}{1 - \frac{1}{4}t'^2\mathbf{a}^2} = \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}t'^2\mathbf{a}^2} \right). \quad (2.123)$$

Resolvendo a primeira equação para $t'(t)$, obtém-se uma equação de segundo grau cujas soluções resumem-se a

$$t' = \frac{1}{\frac{1}{2}\mathbf{a}^2 t} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \mathbf{a}^2 t^2} \right). \quad (2.124)$$

Substituindo essa expressão em $1 - \frac{1}{4}t'^2\mathbf{a}^2$, verifica-se a identidade

$$1 - \frac{1}{4}t'^2\mathbf{a}^2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}\mathbf{a}^2 t^2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \mathbf{a}^2 t^2} \right) = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + \mathbf{a}^2 t^2}}. \quad (2.125)$$

Desse modo, a segunda equação em (2.123) fornece a trajetória da partícula na forma paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \left(\pm \sqrt{1 + \mathbf{a}^2 t^2} - 1 \right), \quad (2.126)$$

a qual pode ser reescrita como a seguinte hipersuperfície quadrática:

$$\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \right)^2 - t^2 = \frac{1}{\mathbf{a}^2} \iff \left(x^\mu - \frac{a^\mu}{\mathbf{a}^2} \right) \eta_{\mu\nu} \left(x^\nu - \frac{a^\nu}{\mathbf{a}^2} \right) = \frac{1}{\mathbf{a}^2}. \quad (2.127)$$

Dado que hipersuperfícies isométricas em $\mathbb{R}^{1,d-1}$ correspondem a hiperboloides, é possível interpretar as TCEs como transformações que levam referenciais de repouso³³ a referenciais

³²Seguiremos as considerações apresentadas em (Fulton; Rohrlich; Witten, 1962a), detalhadas nas notas de aula (Wheeler, N., 2002). O tema também foi examinado em (Codirla; Osborn, 1997), onde as TCEs foram empregadas na determinação do campo eletromagnético de uma partícula carregada em movimento uniformemente acelerado, bem como em (Galeriu, 2025).

³³O resultado é também válido para linhas de x^μ constante.

associados a observadores uniformemente acelerados³⁴. Além disto, as TCEs também conectam observadores em movimento acelerado uniforme, mapeando hiperboloides em hiperboloides.

Sob uma TCE, o hiperboloide de semi eixos α centrado em c^μ ,

$$(x^\mu - c^\mu) \eta_{\mu\nu} (x^\nu - c^\nu) = \alpha^2, \quad (2.128)$$

é mapeado em um hiperboloide de semi eixos α' centrado em c'^μ , dados por

$$\alpha'^2 = \frac{\alpha^2}{(1 - 2b \cdot c + b^2(c^2 - \alpha^2))^2}, \quad c'_\mu = \frac{c_\mu - b_\mu(c^2 - \alpha^2)}{1 - 2b \cdot c + b^2(c^2 - \alpha^2)}. \quad (2.129)$$

A proposição é diretamente verificada por substituição das coordenadas, transformadas segundo (2.118):

$$\alpha'^2 = \frac{x'^2 - 2c'^\mu (x'^\mu + x'^2 b^\mu)}{1 + 2b \cdot x' + x'^2 b^2} + c'^2 \quad (2.130)$$

$$\implies \beta = x'^2 (1 - 2b \cdot c + b^2 \beta) - 2x'^\mu (c_\mu - b_\mu \beta), \quad \beta = c'^2 - \alpha'^2 \quad (2.131)$$

$$\implies \beta = (1 - 2b \cdot c + b^2 \beta) \left(x'^2 - 2x'^\mu \frac{c_\mu - b_\mu \beta}{1 - 2b \cdot c + b^2 \beta} \right) \quad (2.132)$$

$$\implies \beta = (1 - 2b \cdot c + b^2 \beta) \left[(x' - c')^2 - c'^2 \right] \quad (2.133)$$

$$\implies \alpha'^2 = (x' - c')^2. \quad (2.134)$$

Em conclusão, de modo análogo a como os *boosts* de Lorentz conectam a classe especial de observadores inerciais, as TCEs conectam a classe de observadores em movimento uniformemente acelerado. Contudo, são as características não compartilhadas com as demais isometrias conformes que as tornam especiais.

³⁴Tal interpretação tornou-se dominante na academia, mas ainda é alvo de críticas (Kastrup, H., 2008).

Sob TCEs, o intervalo de Minkowski entre dois pontos x_1 e x_2 , comporta-se como

$$\begin{aligned}
 (x'_1 - x'_2)^2 &= (x'^\mu_1 - x'^\mu_2)\eta_{\mu\nu}(x'^\nu_1 - x'^\nu_2) \\
 &= x'^2_1 + x'^2_2 - 2x'_1 \cdot x'_2 \\
 &= \Omega^2(x_1)(x_1 - x_1^2 b)^2 + \Omega^2(x_2)(x_2 - x_2^2 b)^2 \\
 &\quad - 2\Omega(x_1)\Omega(x_2)(x_1^\mu - x_1^2 b^\mu)\eta_{\mu\nu}(x_2^\nu - x_2^2 b^\nu) \\
 &= \Omega(x_1)\Omega(x_2) \left[\frac{x_1^2}{\Omega(x_2)} + \frac{x_2^2}{\Omega(x_1)} - 2(x_1 \cdot x_2 - b \cdot x_1 x_2^2 - b \cdot x_2 x_1^2 + b^2 x_1^2 x_2^2) \right] \\
 &= \Omega(x_1)\Omega(x_2)(x_1 - x_2)^2
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Note que, para quaisquer pares de pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1,d-1}$, as TCEs não preservam, em geral, a relação causal entre esses eventos, uma vez que podem ser encontradas TCEs para as quais o sinal do produto $\Omega(x_1)\Omega(x_2)$ é determinante no mapeamento de separações do tipo-tempo em tipo-espaço, e vice-versa (Rosen, J., 1968). Assim, embora o cone de luz seja preservado, conclui-se que as TCEs finitas³⁵ não constituem simetrias do espaço-tempo — em particular para corpos massivos — uma vez que processos fisicamente admissíveis podem ser transformados em processos fisicamente inadmissíveis.

De fato, regiões fisicamente inacessíveis remontam pontos para os quais $\Omega^{-1}(x) = 0$, isto é,

$$(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2) = b^2 \left(x - \frac{b}{b^2} \right)^2 = 0 \implies x^\mu = \frac{b^\mu}{b^2}. \tag{2.136}$$

Na situação física analisada, tal “ponto” corresponde à hipersuperfície nula $t' = \pm 2/|a|$, além da qual ocorre uma inversão na orientação temporal (Wess, 1960). Desse modo, além da região assintótica na qual $x^\mu \rightarrow \infty$, a trajetória ressurgue através do passado assintótico, evidenciando a natureza não globalmente bem comportada das TCEs do ponto de vista causal³⁶.

Essa singularidade origina-se da inversão, visto que pontos de norma nula são mapeados à origem, e vice-versa. Dada a composição (2.116), observa-se a sequência

$$\frac{b^\mu}{b^2} \xrightarrow{I} -\tilde{b}^\mu \xrightarrow{T_b} 0 \xrightarrow{I} \infty. \tag{2.137}$$

Constata-se, portanto, que, em contraste com translações, rotações e dilatações, a forma finita das TCEs não admite parâmetro globalmente definido. Em decorrência disso, o grupo

³⁵É relevante enfatizar ser finita, uma vez que, no regime infinitesimal, tem-se que $\Omega(x_1)\Omega(x_2) \rightarrow \Omega^2(x) > 0$.

³⁶Discussões acerca desse aspecto podem ser encontradas em (Wood; Papini; Cai, 1989; Gillioz, 2023).

conforme é devidamente realizado apenas em um espaço estendido, no qual pontos adicionais são incluídos de modo que ∞ ³⁷ pertença ao domínio.

A forma como esse processo é realizado será alvo de discussão da próxima seção.

2.6 O grupo conforme em três ou mais dimensões

Como mencionado na seção anterior, as TCEs não são globalmente definidas no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que existem pontos para os quais essas transformações se tornam singulares, cf. (2.137).

Embora o grupo conforme não seja integralmente realizado no espaço-tempo de Minkowski, é possível estendê-lo a um espaço compacto no qual os pontos no infinito são incorporados. Esse procedimento, denominado compactificação conforme (Penrose, 1974), ocorre por meio de um mapeamento conforme de $\mathbb{R}^{1,d-1} \cup \{\infty\}$ em uma variedade Lorentziana compacta. Efetivamente, a variedade obtida pode ser interpretada como a adição de pontos no infinito a $\mathbb{R}^{1,d-1}$.

Adicionalmente, tal construção pode ser formulada em termos de um espaço ambiente plano $\tilde{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^{2,d}$, no qual o espaço-tempo físico $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,d-1}$ é identificado projetivamente com o cone de luz. Essa identificação é realizada por meio do mapeamento

$$x^\mu \mapsto \left(\frac{1}{2}(1 - |x|^2), x^0, \dots, x^{d-1}, -\frac{1}{2}(1 + |x|^2) \right) = X^a, \quad (2.138)$$

onde $X^a = (X^{-1}, X^\mu, X^d)$ são coordenadas cartesianas de $\tilde{\mathcal{M}}$, as quais, quando restritas à imagem de (2.138), constituem uma seção projetiva do cone de luz, isto é,

$$\eta_{ab} X^a X^b = 0, \quad \eta_{ab} = \text{diag}(+1, +1, -1, \dots, -1). \quad (2.139)$$

É conveniente introduzir as coordenadas de cone de luz

$$X^\pm = X^{-1} \pm X^d. \quad (2.140)$$

³⁷No espaço de Minkowski, sua estrutura assintótica é composta por diferentes tipos de infinito — nulo, temporal e espacial — definidos pela natureza das trajetórias que o alcançam, em contraste com o caso euclidiano.

Assim, o mapeamento (2.138) pode ser invertido como

$$x^\mu = \frac{X^\mu}{X^{-1} - X^d}, \quad (2.141)$$

o qual, quando restrito a (2.139), fornece $x^\mu = X^\mu$ ³⁸.

Sejam $\text{SO}(2, d)$ o grupo de isometrias da métrica η_{ab} e $\mathfrak{so}(2, d)$ a álgebra de Lie associada³⁹, cujos geradores $J_{ab} = i \left(X_a \frac{\partial}{\partial X^b} - X_b \frac{\partial}{\partial X^a} \right)$ satisfazem as relações de comutação

$$[J_{ab}, J_{rs}] = -i(\eta_{ar}J_{bs} - \eta_{as}J_{br} - \eta_{br}J_{as} + \eta_{bs}J_{ar}). \quad (2.142)$$

Esses geradores podem ser representados matricialmente como

$$J_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & J_{-1,\rho} & J_{-1,d} \\ J_{\rho,-1} & J_{\rho\sigma} & J_{\rho,d} \\ J_{d,-1} & J_{d,\rho} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{ab} = -J_{ba}. \quad (2.143)$$

Com o auxílio do mapa inverso (2.141), as derivadas podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial X^{-1}} = \frac{-x^\rho}{X^-} \partial_\rho, \quad \frac{\partial}{\partial X^\rho} = \frac{1}{X^-} \partial_\rho, \quad \frac{\partial}{\partial X^d} = \frac{x^\rho}{X^-} \partial_\rho. \quad (2.144)$$

Desse modo, ao restringir os geradores J_{ab} ao cone de luz projetivizado, fixada a seção $X^- = 1$, recupera-se a realização da álgebra conforme em $\mathcal{M}$,

$$J_{\rho\sigma} = i \left(X_\rho \frac{\partial}{\partial X^\sigma} - X_\sigma \frac{\partial}{\partial X^\rho} \right) = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \equiv M_{\rho\sigma}, \quad (2.145)$$

$$J_{\rho,-1} = i \left(X_\rho \frac{\partial}{\partial X^{-1}} - X_{-1} \frac{\partial}{\partial X^\rho} \right) = -\frac{i}{2} (\partial_\rho + 2x_\rho x^\sigma \partial_\sigma - x^2 \partial_\rho) \equiv \frac{1}{2} (P_\rho + K_\rho), \quad (2.146)$$

$$J_{\rho,d} = i \left(X_\rho \frac{\partial}{\partial X^d} - X_d \frac{\partial}{\partial X^\rho} \right) = -\frac{i}{2} (\partial_\rho - 2x_\rho x^\sigma \partial_\sigma + x^2 \partial_\rho) \equiv \frac{1}{2} (P_\rho - K_\rho), \quad (2.147)$$

$$J_{d,-1} = i \left(X_d \frac{\partial}{\partial X^{-1}} - X_{-1} \frac{\partial}{\partial X^d} \right) = -ix^\rho \partial_\rho \equiv D, \quad (2.148)$$

³⁸Mais explicitamente, como o cone de luz é invariante sob reescalamentos $X^a \mapsto \lambda X^a$ ($\lambda \neq 0$), pode-se fixar essa liberdade de escala escolhendo $\tilde{X}^a = X^a/X^-$. Assim, os pontos (X^-, X^μ, X^+) e $(1, X^\mu/X^-, X^+/X^-)$, onde $X^\mu/X^- = x^\mu$, descrevem a mesma direção nula do cone de luz. Em particular, a seção $X^- = 1$, a condição de nulidade $X^+ X^- + x^2 = 0$ [cf. (2.139)] implica $X^+ = -x^2$, de modo que $\tilde{X}^a = (1, x^\mu, -x^2)$.

³⁹Note que, como os geradores J_{ab} são antissimétricos, o número de componentes independentes é $\binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$, em concordância com a dimensão da álgebra de Lie $\mathfrak{conf}(1, d-1)$.

ou seja, o grupo conforme, denotado por $\text{Conf}(1, d-1)$, pode ser realizado linearmente em $\tilde{\mathcal{M}}$ como o grupo de isometrias $\text{SO}(2, d)$ ⁴⁰

À luz da decomposição conferida pelas equações 2.145 a 2.148, é possível reduzir as relações de comutação (2.142) ao caso elementar $[J_{ab}, J_{ca}] \propto \eta_{aa} J_{bc}$, com a, b, c distintos, reforçando uma interpretação geométrica dos operadores J_{ab} como geradores associados aos respectivos planos coordenados (X^a, X^b) . Como cada relação de comutação permanece confinada a um subespaço tridimensional determinado por três desses planos, a trinca de índices $\{a, b, c\}$ identifica convenientemente essa correspondência entre geometria e álgebra. Ao discriminar os três tipos de índices $a \in \{-1, \mu, d\}$, essas trincas organizam-se naturalmente em três famílias distintas — além da correspondente à subálgebra de Lorentz, cuja decomposição em rotações e *boosts* segue um critério análogo de classificação dos índices —, representadas pelos ciclos triangulares destacados nas cores vermelha, verde e azul, como pode ser visto no diagrama 2.2.

Em particular, o ciclo triangular em vermelho evidencia que D , P_ρ e K_ρ desempenham um papel de destaque na álgebra conforme. Fixada uma direção x^ρ , a subálgebra gerada por esses operadores sugere uma disposição análoga à de operadores escada,

$$[D, P_\rho] = iP_\rho, \quad [D, K_\rho] = -iK_\rho, \quad [P_\rho, K_\rho] = -2i\eta_{\rho\rho}D. \quad (2.149)$$

Com efeito, introduzindo os geradores

$$L_0 = -2iD, \quad L_+ = P_\rho, \quad L_- = \eta_{\rho\rho}K_\rho, \quad (2.150)$$

torna-se manifesto que satisfazem precisamente as relações de comutação da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$,

$$[L_+, L_-] = L_0, \quad [L_0, L_\pm] = \pm 2L_\pm, \quad (2.151)$$

confirmando a interpretação de P_ρ e K_ρ como operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, associados a D ⁴¹.

⁴⁰Essa correspondência entre isometrias conformes em d dimensões e isometrias ordinárias em $d+2$ dimensões constitui o *embedding space formalism*. Esse tópico é discutido em diversos materiais (Schottenloher 1997; Mukherjee, 2026; Osborn, 2019; Gillioz, 2023; Rychkov, 2017; Weinberg, 2010; Castro; Pavšič 2003).

⁴¹Cabe mencionar que o grupo $\text{SO}(2, d)$ é isomorfo ao grupo de isometrias do espaço Anti-de Sitter (AdS) em $d+1$ dimensões, o que desempenha um papel central para formulações holográficas da gravitação AdS , especialmente a correspondência AdS/CFT .

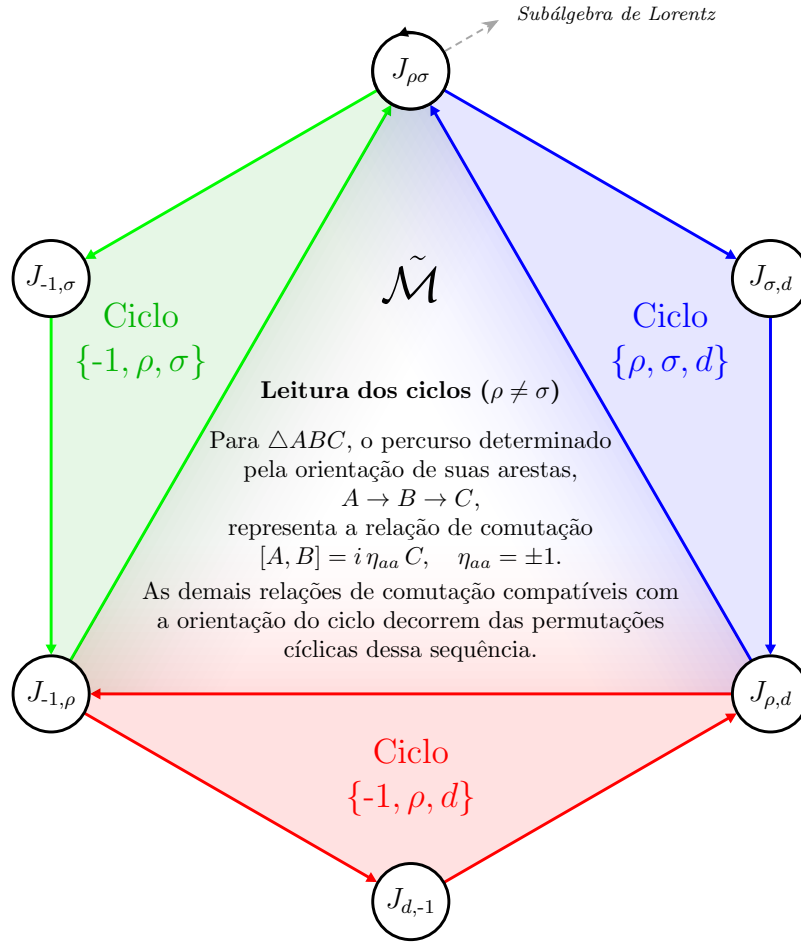


Figura 2.2: Diagrama esquemático da realização $(d + 2)$ -dimensional da álgebra de Lie $\text{conf}(1, d - 1)$, estruturada em famílias de subespaços tridimensionais de $\mathcal{M}$. Cada ciclo triangular, identificado pela trinca de índices em seu interior, representa uma dessas famílias, enquanto seu contorno codifica o correspondente fechamento algébrico dos geradores J_{ab} associados aos respectivos planos coordenados (X^a, X^b) . Fonte: Elaborada pelo autor (2026) utilizando o pacote TikZ (Tantau, 2026).

Na prática, a presença de simetrias manifesta-se por meio de restrições à descrição matemática do comportamento de sistemas físicos, limitando a forma como grandezas físicas se relacionam através do espaço-tempo. Em particular, simetrias espaço-temporais restringem a forma funcional dessas grandezas, determinando as correlações admissíveis entre observáveis definidos em diferentes pontos de $\mathcal{M}$.

Desse modo, seja $G_N(\{x_i\}) = G_N(x_1, \dots, x_N)$ uma função de N pontos cuja finalidade é quantificar o grau de associação entre variáveis físicas avaliadas em N pontos distintos do espaço-tempo, denotados por x_i . Por constituir-se a partir de propriedades observáveis, tal função deve refletir as simetrias do sistema. Nesse sentido, analisemos as restrições impostas a G_N por cada uma das simetrias espaço-temporais que compõem o grupo conforme, evidenciando a redução progressiva do número de variáveis independentes necessárias para caracterizá-la.

Começemos pela invariância translacional, que requer que funções de N pontos sejam insensíveis a deslocamentos rígidos dos pontos. Assim,

$$G_N(x_1 + a, \dots, x_N + a) = G_N(x_1, \dots, x_N). \quad (2.152)$$

Lembrando que $x_i \mapsto x_i + a$ corresponde ao deslocamento simultâneo de todos os pontos na direção arbitrária a , toma-se $a = -x_N$, de modo que as diferenças $x_i - x_N$, com $i \neq N$, são suficientes para especificar a dependência funcional das funções de N pontos,

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = G_N(x_1 - x_N, \dots, x_{N-1} - x_N), \quad (2.153)$$

limitando o número de pontos independentes de N a $N - 1$. Em particular, a função de 1 ponto tem sua forma funcional determinada a menos de uma constante, isto é,

$$G_1(x_1) = G_1(x_1 + a), \quad \forall a \iff G_1(x_1) = C_1, \quad \forall x_1, \quad (2.154)$$

onde definimos $C_1 := G_1(0)$. Portanto, infere-se que a simetria translacional elimina a dependência da posição absoluta, permitindo que qualquer ponto possa ser arbitrariamente escolhido como origem. Consequentemente, toda a informação fisicamente relevante contida em G_N depende exclusivamente das posições relativas $x_{ij} = x_i - x_j$.

Tratando-se da invariância de Lorentz, a condição análoga a (2.152) pode ser escrita como

$$G_N(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_N) = G_N(x_1, \dots, x_N), \quad \Lambda x_i \equiv \Lambda^\mu{}_\nu(\omega) x_i^\nu. \quad (2.155)$$

Tal simetria elimina a dependência funcional da orientação dos eixos espaço-temporais, limitando as funções de N pontos a depender exclusivamente de escalares de Lorentz, cuja invariância decorre da preservação da métrica de Minkowski (2.92). Nesse contexto, os invariantes elementares correspondem aos produtos internos $x_i \cdot x_j = \eta_{\mu\nu} x_i^\mu x_j^\nu$, os quais, quando combinados à simetria translacional, conduzem naturalmente à separação entre pontos

$$r_{ij} := |x_{ij}| = \sqrt{(x_i^\mu - x_j^\mu) \eta_{\mu\nu} (x_i^\nu - x_j^\nu)}, \quad i \neq j. \quad (2.156)$$

Da definição, segue imediatamente que $r_{ij} = r_{ji}$ e $r_{ii} = 0$, o que estabelece $N(N-1)/2$ como um limite superior para o número de variáveis independentes⁴². Concretamente, essa restrição à dependência funcional pode ser ilustrada pelos casos

$$G_2(x_1, x_2) = G_2(r_{12}), \quad G_3(x_1, x_2, x_3) = G_3(r_{12}, r_{13}, r_{23}), \quad \dots, \quad (2.157)$$

ou, de modo geral,

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = G_N(\{r_{ij}\}_{i < j}). \quad (2.158)$$

Ao impormos a simetria de escala, torna-se evidente que os escalares de Lorentz (2.156) deixam de constituir invariantes, uma vez que se transformam segundo $r_{ij} \mapsto \Omega r_{ij}$, cf. 2.3. Assim, apenas razões adimensionais entre esses escalares permanecem invariantes,

$$\frac{r_{ij}}{r_{kl}} \mapsto \frac{\Omega r_{ij}}{\Omega r_{kl}} = \frac{r_{ij}}{r_{kl}}. \quad (2.159)$$

⁴²Embora, para $N \geq 4$, também seja possível construir escalares de Lorentz do tipo $x_{ij} \cdot x_{kl}$, estes podem ser escritos em termos das separações (2.156) por meio da identidade de polarização. Além disso, a independência das separações entre pares de pontos também é limitada pela dimensão do espaço. Quando esta não é suficientemente alta, o número de invariantes independentes é reduzido, e as relações algébricas entre as distâncias podem ser obtidas explicitamente a partir do determinante de Cayley–Menger (ou, equivalentemente, do determinante de Gram), cuja definição associa um hipervolume $(N-1)$ -dimensional às distâncias determinadas pelos N pontos que o constituem. Caso os pontos encontrem-se confinados a um subespaço de dimensão $d < N-1$, o determinante de Cayley–Menger anula-se, evidenciando relações algébricas entre essas distâncias. Um exemplo familiar dessas relações é a trilateração no plano cartesiano, que permite reconstruir a posição de um ponto a partir de suas distâncias a três pontos de referência não colineares.

Consequentemente, a construção de invariantes passa a requerer, no mínimo, três pontos distintos, de modo que funções de N pontos — em particular, as de 2 pontos — ficam severamente restringidas. Entretanto, é importante ressaltar que, diferentemente das isometrias, a simetria de escala fundamenta-se na noção de semelhança geométrica, e não na noção mais restritiva de congruência. Em outras palavras, ao permitir que homotetias componham o grupo de simetrias do espaço-tempo, configurações geometricamente semelhantes tornam-se indistinguíveis do ponto de vista das transformações admissíveis. Nesse contexto, para que uma função de N pontos atribua o mesmo conteúdo físico a configurações correspondentes a diferentes escalas de observação, sua dependência funcional nas distâncias deve ser homogênea, o que fixa o grau de homogeneidade dessa função. Portanto, segue que⁴³

$$G_N(\{\Omega r_{ij}\}) = \Omega^{-\Delta} G_N(\{r_{ij}\}), \quad i < j, \quad (2.160)$$

com $-\Delta$ correspondendo ao grau de homogeneidade de G_N , determinando a potência com que varia sob mudanças de escala. Assim, dado que funções de N pontos apresentam uma covariância⁴⁴ que reflete a ausência de uma escala absoluta, sua dependência funcional pode ser decomposta em um fator homogêneo de grau $-\Delta$ e outro dependente apenas de razões adimensionais, de forma que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = g_N(\{r_{ij}\}) f_N(\{u_I\}), \quad g_N(\{\Omega r_{ij}\}) = \Omega^{-\Delta} g_N(\{r_{ij}\}), \quad (2.161)$$

onde $\{u_I\}$ denota um conjunto de invariantes independentes, consistindo, neste caso, em razões adimensionais construídas a partir das separações r_{ij} . Sob essa decomposição, toda a informação dimensional de G_N está contida em g_N . Em particular, para $N = 2$, observa-se que não existem razões adimensionais independentes, logo f_2 é constante, isto é,

$$g_2(\Omega r_{12}) = \Omega^{-\Delta} g_2(r_{12}), \quad \forall \Omega \iff g_2(r_{12}) = \frac{C_2}{|x_{12}|^\Delta}, \quad |x_{12}| \neq 0, \quad (2.162)$$

⁴³A justificativa heurística fornecida trata-se da antecipação de resultados que serão devidamente discutidos no próximo capítulo.

⁴⁴Convém observar que o termo *invariância* costuma sugerir que os objetos permanecem inalterados sob uma transformação. Será visto no próximo capítulo, entretanto, que a invariância de escala (e, por conseguinte, a invariância conforme) requer que esses objetos acompanhem a transformação das coordenadas, mas em uma proporção correspondente à sua própria dimensão de comprimento ou, equivalentemente, de massa. Por essa razão, sua lei de transformação aproxima-se, à primeira vista, da noção de *covariância*, embora sua origem seja distinta.

onde definimos $C_2 := G_2(1)$. Sendo assim, a função de 2 pontos pode ser escrita como

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{C_2}{|x_{12}|^{a_{12}}}, \quad \Delta = a_{12}. \quad (2.163)$$

Aplicando o mesmo procedimento ao caso $N = 3$, explora-se a liberdade de fixar globalmente o fator de escala $\Omega = r_{23}^{-1}$, de sorte que

$$G_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|x_{23}|^\Delta} f_3 \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}} \right), \quad f_3 \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}} \right) := G_3 \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}}, 1 \right), \quad (2.164)$$

em virtude de (2.160). De forma equivalente, essa expressão pode ser convenientemente reparametrizada como

$$G_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|x_{12}|^{a_{12}} |x_{13}|^{a_{13}} |x_{23}|^{a_{23}}} \bar{f} \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}} \right), \quad (2.165)$$

onde

$$\bar{f} \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}} \right) = \left(\frac{r_{12}}{r_{23}} \right)^{a_{12}} \left(\frac{r_{13}}{r_{23}} \right)^{a_{13}} f \left(\frac{r_{12}}{r_{23}}, \frac{r_{13}}{r_{23}} \right), \quad (2.166)$$

desde que $\Delta = a_{12} + a_{13} + a_{23}$. Por conseguinte, infere-se que a invariância de escala reduz em uma unidade o número de variáveis independentes, impondo apenas um vínculo algébrico entre os expoentes.

O mesmo raciocínio generaliza-se imediatamente para o caso de N pontos, conduzindo à decomposição

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = f_N(\{u_I\}) \prod_{i < j} |x_{ij}|^{-a_{ij}}, \quad (2.167)$$

com

$$\sum_{i < j} a_{ij} = \Delta \quad (2.168)$$

Enfim, ao impormos integralmente a simetria sob o grupo conforme, chega-se à conclusão de que razões adimensionais não são invariantes conformes. De fato, dado que distâncias transformam-se sob TCEs segundo $r_{ij} \mapsto \sqrt{\Omega(x_i)\Omega(x_j)} r_{ij}$, cf. (2.135), razões adimensionais resultam em

$$\frac{r_{ij}}{r_{kl}} \mapsto \sqrt{\frac{\Omega(x_i)\Omega(x_j)}{\Omega(x_k)\Omega(x_l)}} \frac{r_{ij}}{r_{kl}}. \quad (2.169)$$

Ao buscarmos por combinações para as quais os fatores de escala se cancelam, o candidato mais natural consiste em uma razão de razões. Seguindo uma concepção análoga à adotada

para os invariantes de escala, consideremos

$$\frac{r_{ij}}{r_{kl}} \Big/ \frac{r_{mn}}{r_{pq}} \mapsto \sqrt{\frac{\Omega(x_i)\Omega(x_j)\Omega(x_p)\Omega(x_q)}{\Omega(x_k)\Omega(x_l)\Omega(x_m)\Omega(x_n)}} \frac{r_{ij}}{r_{kl}} \Big/ \frac{r_{mn}}{r_{pq}}, \quad (2.170)$$

de modo que os invariantes u_I devem ser tais que

$$u_I \mapsto \sqrt{\frac{\Omega(x_i)\Omega(x_j)\Omega(x_p)\Omega(x_q)}{\Omega(x_k)\Omega(x_l)\Omega(x_m)\Omega(x_n)}} u_I = u_I \iff \sqrt{\frac{\Omega(x_i)\Omega(x_j)\Omega(x_p)\Omega(x_q)}{\Omega(x_k)\Omega(x_l)\Omega(x_m)\Omega(x_n)}} = 1. \quad (2.171)$$

Como cada distância produz precisamente dois fatores de escala, uma combinação será invariante somente quando cada ponto aparecer o mesmo número de vezes no numerador e no denominador. Assim, uma escolha conveniente para os invariantes conformes consiste nas razões cruzadas

$$u_I = \frac{r_{ij}}{r_{ik}} \Big/ \frac{r_{jl}}{r_{kl}} \equiv \frac{r_{ij}r_{kl}}{r_{il}r_{jk}}, \quad i, j, k, l \text{ distintos}, \quad (2.172)$$

também conhecidas como razões duplas ou anarmônicas, cuja construção requer, no mínimo, quatro pontos distintos. Uma vez especificada a forma geral dos invariantes conformes, resta estabelecer a lei de transformação de G_N sob TCEs.

Anteriormente, verificou-se que a invariância de escala fixa globalmente a homogeneidade da função de N pontos. Assim, é natural esperar que sua extensão local atribua fatores de escala independentes a cada ponto, de modo que a invariância sob TCEs determina a condição

$$f_N(\{u_I\}) \prod_{i < j} [\Omega(x_i)\Omega(x_j)]^{-a_{ij}/2} |x_{ij}|^{-a_{ij}} = \prod_{i=1}^N \Omega^{-\Delta_i}(x_i) G_N(x_1, \dots, x_N). \quad (2.173)$$

Como f_N permanece invariante sob TCEs por depender exclusivamente das razões cruzadas, as restrições recaem sobre o fator homogêneo g_N , cuja transformação segue de (2.135). Mais especificamente, estabelece-se uma identificação canônica entre os expoentes a_{ij} , associados às distâncias r_{ij} , e os pesos Δ_i , que codificam o grau de homogeneidade associado ao ponto x_i . Em particular, quando $\Omega(x) \equiv \Omega$, caso em que todos os pontos escalam uniformemente ao longo de $\mathcal{M}$, o fator de escala distribui-se homogeneamente, resultando na expressão

$$\prod_{i=1}^N \Omega^{-\Delta_i}(x_i) = \Omega^{-\sum_{i=1}^N \Delta_i}. \quad (2.174)$$

Portanto, a compatibilidade entre as leis de transformação local e global exige que

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \Delta_i. \quad (2.175)$$

Essa relação não constitui uma restrição adicional, mas uma condição de consistência, cujo papel é assegurar que a lei de transformação sob TCEs reduza corretamente à invariância de escala, cf. (2.161), quando o fator de escala é constante. Nesse sentido, a condição (2.168) passa a refletir a correspondência entre cada ponto x_i e as $N - 1$ distâncias r_{ij} que o conectam aos demais pontos x_j ,

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i = \sum_{i<j} a_{ij}. \quad (2.176)$$

Para o caso $N = 2$, a invariância conforme reduz-se a

$$\Omega^{-\Delta_1}(x_1)\Omega^{-\Delta_2}(x_2)G_2(x_1, x_2) = [\Omega(x_1)\Omega(x_2)]^{-a_{12}/2} \frac{C_2}{|x_{12}|^{a_{12}}}. \quad (2.177)$$

Utilizando a correspondência (2.176), a comparação dos expoentes associados aos fatores de escala resulta nas condições

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{a_{12}}{2} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \Delta = 2\Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (2.178)$$

Portanto, a função de 2 pontos invariante conforme pode ser escrita como

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{C_2}{|x_{12}|^{2\Delta_1}}. \quad (2.179)$$

Por outro lado, caso $\Delta_1 \neq \Delta_2$, as condições (2.178) não podem ser satisfeitas simultaneamente, de modo que necessariamente $G_2(x_1, x_2) = 0$.

Quanto a $N = 3$, as consequências da invariância conforme tornam-se particularmente restritivas: como não é possível formar invariantes conformes a partir de somente três pontos distintos, a função correspondente coincide com o fator homogêneo g_3 . Ademais, os expoentes a_{12} , a_{13} e a_{23} são univocamente determinados pela lei de transformação (2.173), da qual decorrem as relações

$$\Omega^{-\Delta_1}(x_1)\Omega^{-\Delta_2}(x_2)\Omega^{-\Delta_3}(x_3) = [\Omega^{a_{12}+a_{13}}(x_1)\Omega^{a_{12}+a_{23}}(x_2)\Omega^{a_{13}+a_{23}}(x_3)]^{-1/2}, \quad (2.180)$$

ou, equivalentemente,

$$a_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \quad a_{13} = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2, \quad a_{23} = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1. \quad (2.181)$$

Consequentemente, a função de 3 pontos assume a forma

$$G_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{C_3}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad (2.182)$$

onde f_3 reduz-se a uma constante, denotada por C_3 . Ou seja, a invariância conforme determina completamente a forma funcional de G_3 , restando apenas uma constante multiplicativa.

Em contraste, a função de 4 pontos, para a qual existem invariantes conformes independentes, passa a admitir liberdade funcional genuína. Nesse caso, de acordo com a construção introduzida em (2.172), as razões cruzadas independentes são

$$u = \frac{r_{12}r_{34}}{r_{14}r_{23}}, \quad v = \frac{r_{13}r_{24}}{r_{14}r_{23}}, \quad (2.183)$$

onde $\{u_I\} = \{u, v\}$ denota o conjunto dos invariantes conformes. Desse modo, a forma funcional de G_4 pode ser escrita como

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f_4(u, v)}{|x_{12}|^{a_{12}} |x_{13}|^{a_{13}} |x_{23}|^{a_{23}} |x_{14}|^{a_{14}} |x_{24}|^{a_{24}} |x_{34}|^{a_{34}}}. \quad (2.184)$$

Sob a lei de transformação (2.173), obtém-se um sistema de quatro equações lineares com seis incógnitas,

$$\Delta_1 = \frac{a_{12} + a_{13} + a_{14}}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{a_{12} + a_{23} + a_{24}}{2}, \quad (2.185)$$

$$\Delta_3 = \frac{a_{13} + a_{23} + a_{34}}{2}, \quad \Delta_4 = \frac{a_{14} + a_{24} + a_{34}}{2}, \quad (2.186)$$

o que, a princípio, impede a determinação unívoca dos expoentes a_{ij} . Contudo, em virtude da existência de dois invariantes conformes independentes, a liberdade funcional do fator invariante permite eliminar dois graus de liberdade associados aos expoentes em uma redefinição de f_4 , de modo que a dependência do fator homogêneo g_4 em relação às seis distâncias pode ser parametrizada por apenas quatro combinações independentes, como

evidenciado por

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\bar{f}_4(u, v)}{|x_{12}|^{a_{12}-a_{34}} |x_{13}|^{a_{13}-a_{24}} |x_{23}|^{a_{23}+a_{24}+a_{34}} |x_{14}|^{a_{14}+a_{24}+a_{34}}}, \quad (2.187)$$

com $\bar{f}_4(u, v) = u^{-a_{34}} v^{-a_{24}} f_4(u, v)$. Uma vez eliminada essa redundância de parametrização, torna-se possível determinar os quatro expoentes remanescentes em termos dos Δ_i :

$$a_{12} - a_{34} = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_4, \quad a_{23} + a_{24} + a_{34} = \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_1, \quad (2.188)$$

$$a_{13} - a_{24} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4, \quad a_{14} + a_{24} + a_{34} = 2\Delta_4. \quad (2.189)$$

Chama a atenção que a liberdade de eliminar a dependência em relação a dois dos parâmetros não é acidental, mas reflete exatamente o número de invariantes conformes independentes presentes na função de quatro pontos. De fato, para uma função de N pontos, a invariância conforme relaciona os Δ_i aos expoentes associados às distâncias r_{ij} , cf. (2.173), segundo a expressão

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} a_{|ij|} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} \right), \quad (2.190)$$

onde introduzimos a convenção

$$|ij| := \begin{cases} ij & \text{se } i < j \\ ji & \text{se } i > j \end{cases}, \quad (2.191)$$

de modo que toda ocorrência de $a_{|ij|}$ represente sempre os expoentes originalmente introduzidos, isto é, aqueles cujos índices satisfazem $i < j$. Como existem $N(N-1)/2$ expoentes a_{ij} distintos, enquanto as equações (2.190) impõem apenas N relações independentes, conclui-se que permanecem

$$\frac{N(N-1)}{2} - N = \frac{N(N-3)}{2} \quad (2.192)$$

graus de liberdade não fixados pela invariância conforme, correspondendo precisamente ao número de razões cruzadas independentes.

Em compensação, ao realizar a reparametrização do sistema através da liberdade funcional do fator f_N , perde-se a identificação canônica da decomposição das homogeneidades locais, codificadas pelos pesos Δ_i , em contribuições particulares associadas

aos expoentes a_{ij} . Mais especificamente, deixa de haver um critério canônico que associe cada uma das $N - 1$ contribuições que compõem o peso Δ_i aos expoentes associados às distâncias r_{ij} . Consequentemente, deixa de ser possível reconstruir a distribuição simétrica dos fatores de escala locais sobre o setor homogêneo da função de N pontos. Na prática, uma vez que cada distância envolve precisamente dois pontos, cada expoente a_{ij} é igualmente repartido entre os correspondentes fatores de escala de x_i e x_j . Assim, dado que cada ponto x_i participa de $N - 1$ distâncias r_{ij} , o fator de escala $\Omega(x_i)$ recebe contribuição de todos os expoentes associados a essas distâncias, conforme expresso na equação (2.190).

A fim de apresentar a função de N pontos em termos das homogeneidades locais, preservando, ao mesmo tempo, sua forma padrão, cf. (2.167), a estrutura analisada motiva uma expressão simétrica dos expoentes a_{ij} exclusivamente em termos dos pesos Δ_i e da homogeneidade total Δ , tal como

$$a_{ij} = A\Delta + B(\Delta_i + \Delta_j) \quad (2.193)$$

onde A e B são coeficientes a serem determinados. Para determiná-los, basta exigir que a expressão proposta satisfaça a equação (2.190), da qual se obtém

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} [A\Delta + B(\Delta_i + \Delta_j)] = \frac{1}{2} \left\{ [(N-1)A + B\Delta + (N-2)B\Delta_i] \right\}, \quad (2.194)$$

onde utilizou-se a identidade $\sum_{j \neq i} \Delta_j = \Delta - \Delta_i$. Comparando os coeficientes de Δ_i e Δ , segue que

$$A = -\frac{2}{(N-1)(N-2)}, \quad B = \frac{2}{N-2}, \quad N \geq 3. \quad (2.195)$$

Consequentemente, chega-se à expressão geral

$$a_{ij} = -\frac{2}{N-2} \left(\frac{\Delta}{N-1} - \Delta_i - \Delta_j \right), \quad N \geq 3, \quad (2.196)$$

a qual reproduz, em particular, a solução obtida para o caso $N = 3$,

$$a_{ij} = 2(\Delta_i + \Delta_j) - \Delta = \Delta_i + \Delta_j - \Delta_k, \quad i, j, k \text{ distintos}. \quad (2.197)$$

Desse modo, é possível recuperar a forma padrão (2.167),

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = f_N(\{u_I\}) \prod_{i < j} |x_{ij}|^{\frac{2}{N-2}(\frac{\Lambda}{N-1} - \Delta_i - \Delta_j)}, \quad (2.198)$$

cujas especialização para o caso $N = 4$ reproduz a conhecida função de 4 pontos invariante conforme

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_4 \left(\frac{r_{12}r_{34}}{r_{14}r_{23}}, \frac{r_{13}r_{24}}{r_{14}r_{23}} \right) \prod_{i < j} |x_{ij}|^{\left(\frac{\Lambda}{3} - \Delta_i - \Delta_j\right)}, \quad (2.199)$$

coincidindo com a forma apresentada na literatura clássica⁴⁵ (Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012).

Para finalizar, convém observar que, enquanto a invariância translacional elimina a existência de uma origem privilegiada, a invariância de Lorentz elimina orientações privilegiadas e a invariância de escala elimina escalas privilegiadas, a invariância sob TCEs elimina a dependência remanescente da posição relativa em relação ao infinito, como evidencia a construção projetiva do grupo conforme discutida no início desta seção. Em última análise, a estrutura angular retém toda a informação geométrica genuinamente fundamental, substituindo o papel anteriormente desempenhado por hastes rígidas e relógios na caracterização da geometria.

Transformação	Ação sobre x^μ	Fator de escala $\Omega(x)$
Translações	$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$	$\Omega(x) = 1$
Transformações de Lorentz	$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(\omega)x^\nu$	$\Omega(x) = 1$
Dilatações	$x'^\mu = \Omega(x)x^\mu$	$\Omega(x) = \exp(\lambda)$
TCEs	$x'^\mu = \Omega(x)(x^\mu - b^\mu x^2)$	$\Omega(x) = (1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^{-1}$

Tabela 2.3: Formas finitas das isometrias conformes no espaço-tempo de Minkowski e seus respectivos fatores de escala.

Nesta seção, investigou-se a estrutura do grupo conforme, com especial atenção à leitura geométrica das restrições impostas pela simetria conforme. Em contrapartida, no próximo capítulo, será apresentada uma análise algébrica dessa simetria, por meio da qual serão estabelecidas as leis de transformação que fundamentam as invariâncias de escala e

⁴⁵Em razão do escopo deste trabalho, optou-se por empregar a denominação mais geral *funções de N pontos*, em vez da nomenclatura mais restritiva *funções de correlação*. Estas, contudo, constituem uma das ferramentas centrais da TQC e da mecânica estatística, estabelecendo, por meio de uma caracterização estatística, a conexão entre a dinâmica microscópica e observáveis macroscópicos (Franosch, 2026). Em particular, codificam flutuações quânticas, propagação de partículas, interações fundamentais e amplitudes de espalhamento.

conforme. Antes, porém, resta-nos analisar o cenário bidimensional do grupo conforme, no qual tais restrições tornam-se ainda mais severas em virtude da presença de um número infinito de simetrias conformes.

2.7 O grupo conforme em duas dimensões

Previamente, foi mencionado que seria necessária uma discussão à parte para o caso $d = 2$. Neste trabalho, analisaremos apenas a solução em assinatura Lorentziana, uma vez que a literatura na assinatura euclidiana é extensa (Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012; Ginsparg, 1988; Belavin; Polyakov; Zamolodchikov, 1984a).

Resgatando a equação (2.25), temos

$$\partial^2(\partial \cdot \xi) = 0. \quad (2.200)$$

Agora, torna-se evidente o motivo da distinção: $\partial \cdot \xi$ satisfaz a equação de onda unidimensional⁴⁶. Desse modo, suas soluções são infinitamente numerosas.

Em particular, os geradores das isometrias conformes bidimensionais satisfazem

$$\partial_0 \xi^1 = \partial_1 \xi^0 \quad \text{e} \quad \partial_0 \xi^0 = \partial_1 \xi^1. \quad (2.201)$$

Equivalentemente, podemos escrevê-las como

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)\xi^0 = 0, \quad (\partial_0^2 - \partial_1^2)\xi^1 = 0, \quad (2.202)$$

ou seja, ξ^0 e ξ^1 satisfazem a equação de onda individualmente, o que torna as equações (2.201) análogas às equações de Cauchy–Riemann.

Para obter as soluções, é conveniente adotar as coordenadas de cone de luz,

$$x^\pm = x^0 \pm x^1. \quad (2.203)$$

Nesse caso, o operador de onda $(\partial_0^2 - \partial_1^2)$ pode ser fatorado como

$$(\partial_0 + \partial_1)(\partial_0 - \partial_1) = 4\partial_+ \partial_-, \quad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x^\pm}. \quad (2.204)$$

⁴⁶Em assinatura euclidiana, satisfaz a equação de Laplace bidimensional.

Portanto, as soluções podem ser decompostas em modos independentes à esquerda e à direita:

$$\xi^{0,1}(x^\pm) = g(x^+) + h(x^-). \quad (2.205)$$

Uma base mais adequada é dada por

$$\xi^\pm = \xi^0 \pm \xi^1, \quad (2.206)$$

de modo que as equações (2.201) são reduzidas a

$$\partial_\mp(\xi^0 \pm \xi^1) = 0. \quad (2.207)$$

Consequente, $\xi^+ = \xi^+(x^+)$ e $\xi^- = \xi^-(x^-)$ ⁴⁷. Isso implica que as isometrias conformes em $\mathbb{R}^{1,1}$ correspondem a transformações da forma

$$x^+ \mapsto f^+(x^+) \quad \text{e} \quad x^- \mapsto f^-(x^-). \quad (2.208)$$

Infinitesimalmente,

$$x^\pm \mapsto x'^\pm = x^\pm + \epsilon^\pm(x^\pm). \quad (2.209)$$

Assumindo periodicidade P nas coordenadas, conforme descrito em (Haman, 2022), podemos expandir $\epsilon^\pm(x^\pm)$ em modos de Fourier:

$$\epsilon^\pm(x^\pm) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n^\pm \exp\left(i \frac{2\pi}{P} n x^\pm\right). \quad (2.210)$$

Fica claro, portanto, que as isometrias conformes em $d = 2$ determinam uma álgebra de dimensão infinita.

Sendo $\epsilon_n^\pm$ os parâmetros infinitesimais, os geradores correspondentes são

$$l_n^\pm = \frac{iP}{2\pi} \exp\left(i \frac{2\pi}{P} n x^\pm\right) \partial_\pm, \quad (2.211)$$

onde $\frac{iP}{2\pi}$ é um fator de normalização.

⁴⁷Essa análise pode ser realizada no plano dos números *split-complex* (Emanuello; Nolder, 2015), os quais diferem dos números complex usuais por serem números da forma $a+jb$ cuja unidade imaginária satisfaz $j^2 = +1$. Nesse formalismo, a analogia com o caso euclidiano torna-se particularmente transparente.

Tomando o comutador dos geradores, têm-se

$$\begin{aligned} [l_n^\pm, l_m^\pm] &= \left(\frac{iP}{2\pi}\right)^2 \exp\left(i\frac{2\pi}{P}(n+m)x^\pm\right) \left[\left(\partial_\pm^2 + i\frac{2\pi}{P}m\right) - \left(\partial_\pm^2 + i\frac{2\pi}{P}n\right)\right] \\ &= (n-m) \left(\frac{iP}{2\pi}\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{P}nx^\pm\right) \end{aligned} \quad (2.212)$$

$$= (n-m)l_{n+m}^\pm$$

$$\begin{aligned} [l_n^\pm, l_m^\mp] &= \left(\frac{iP}{2\pi}\right)^2 \exp\left(i\frac{2\pi}{P}(nx^\pm + mx^\mp)\right) [\partial_\pm \partial_\mp - \partial_\mp \partial_\pm] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Portanto, a álgebra conforme é isomorfa à soma direta de duas álgebras de Witt reais,

$$[l_n^\pm, l_m^\pm] = (n-m)l_{n+m}^\pm, \quad [l_n^\pm, l_m^\mp] = 0. \quad (2.214)$$

Na seção anterior, foi visto que o grupo conforme impõe fortes restrições aos invariantes. No caso bidimensional, devido à presença de infinitas simetrias, essas restrições são ainda mais severas⁴⁸ resultando, inclusive, em modelos exatamente solúveis. Essa característica faz das CFTs bidimensionais uma área de estudo independente e particularmente proeminente.

Observa-se ainda que o conjunto $\{l_{\pm 1}^+, l_0^+\} \cup \{l_{\pm 1}^-, l_0^-\}$ gera uma subálgebra finita isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, correspondente às isometrias conformes globais. Ademais,

$$\mathfrak{so}(2, 2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad (2.215)$$

em conformidade com a realização do grupo conforme como $\text{SO}(2, d)$ (Schottenloher, 1997).

Por fim, uma vez estabelecido o ferramental necessário, o próximo capítulo será dedicado à análise das simetrias conformes no contexto da teoria de campos.

⁴⁸Em particular, observa-se que $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^+ dx^- \mapsto \Omega^2(x) ds^2 = \left(\frac{df^+}{dx^+} \frac{df^-}{dx^-}\right) dx^+ dx^-$, evidenciando que métricas bidimensionais são localmente conformalmente planas.

Capítulo 3

Simetria conforme

A teoria de grupos, mais especificamente a teoria de representações, tornou-se uma ferramenta essencial em teoria de campos, uma vez que, através das representações irredutíveis do grupo de Poincaré, foi possível sistematizar nossa compreensão acerca dos elementos mais fundamentais dos quais a realidade física é composta. Em geral, as representações de grupos de simetria torna viável a concepção de modelos físicos que são inerentemente invariantes sob as transformações de interesse. Nesse contexto, o primeiro teorema de Noether¹ é imprescindível, pois, além de fornecer leis de conservação, estabelecem sob quais condições uma teoria Lagrangiana é invariante sob dada simetria.

Neste capítulo, analisaremos a simetria conforme em teoria de campos e as propriedades de sistemas invariantes sob tais transformações. Primeiramente, obteremos as representações do grupo conforme (Mack; Salam, 1969), a fim de determinar a lei de transformação de um campo genérico ϕ_i . Em seguida, analisaremos a invariância conforme sob o ponto de vista de simetrias variacionais, através das quais derivaremos as condições de simetria sobre a densidade Lagrangiana da teoria e obteremos as correntes conservadas. Após discutido o caso geral, investigaremos a presença da simetria conforme nas teorias escalar, *gauge* vetorial e fermiônica. Por último, sua presença em contexto quântico será brevemente discutida. Na maior parte da discussão², seguiremos as notas *Conformal Field Theory with Boundaries and Defects*³, (Herzog, 2021), bem como o clássico grande livro amarelo (Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012).

¹Diversas das afirmações que serão feitas a respeito do teorema de Noether podem ser encontradas de forma mais detalhada no apêndice C.

²Outras referências interessantes são (Simmons-Duffin, 2017; Qualls, 2015).

³Estas são notas pertencentes a um conjunto de palestras ministradas pelo professor Chris Herzog (King's College London) na escola LACES 2021, as quais podem ser acessadas através do link <https://www.ggi.infn.it/laces/LACES21/CFTdefects21.html>. Em conjunto às notas, o conteúdo das palestras foi gravado e postado em seu canal do Youtube <https://www.youtube.com/@cphezog>.

3.1 Representações do grupo conforme

De forma sucinta, uma representação de um grupo G consiste na maneira pela qual seus elementos agem sobre um espaço vetorial. Em outras palavras, ao construir as representações do grupo conforme, determinamos como um campo $\phi_i(x)$ se transforma, de modo a avaliar sob quais condições uma teoria de campos é invariante conforme.

Até o momento, foi analisado apenas a ação dos geradores do grupo conforme sobre x^μ . Contudo, um campo $\phi_i : \mathcal{M} \rightarrow V$ não somente depende das coordenadas do espaço-tempo, como também assume valores em um espaço vetorial V , denominado espaço de representação, sobre o qual o grupo atua via multiplicação matricial.

Assim, um elemento $g \in \text{Conf}(1, d-1)$ age sobre $\phi_i(x)$ de duas maneiras: por uma ação em $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,d-1}$, induzindo a transformação $x \xrightarrow{g} x'$ — que pode ser descrita infinitesimalmente em termos de operadores diferenciais, conforme analisado previamente —, e por meio de uma ação linear em V , caracterizada por uma representação finita $\rho(g)$. Dessa forma⁴,

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') = [\rho(g)]^j_i \phi_j(x), \quad (3.1)$$

onde o elemento g pode ser parametrizado como

$$g = \exp \left\{ ia^\rho P_\rho + \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} + i\lambda D + ib^\rho K_\rho \right\}. \quad (3.2)$$

A notação $[\rho(g)]^j_i$ denota uma implementação matricial da ação de g no espaço de representação V .

A nível de álgebra, os geradores infinitesimais atuam sobre ϕ_i através de uma representação matricial T_A , segundo

$$\phi'_i(x') = \phi_i(x) + i\delta\epsilon^A T_A \phi_i(x), \quad (3.3)$$

onde $T_A \phi_i = (T_A)^j_i \phi_j(x)$ denota uma convenção de supressão dos índices que será amplamente utilizada ao longo do texto. Por sua vez, considerando uma transformação de coordenadas infinitesimal $x \mapsto x + \epsilon$, a expansão em série de Taylor do lado esquerdo da igualdade fornece-

⁴Na interpretação passiva, o mapeamento $x \xrightarrow{g} x'$ corresponde a uma mudança de coordenadas, de modo que o campo ϕ'_i avaliado em $\{x'^\mu\}$ coincide com o campo original ϕ_i avaliado em $\{x^\mu\}$, isto é, $\phi'_i(x') = [\rho(g)]^j_i \phi_j(x)$. Na interpretação ativa, o campo ϕ_i é transformado no campo ϕ'_i , mantendo-se fixo o sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$. Nesse caso, identifica-se $\phi_i(x')$ com $\phi_i(g^{-1}x)$, de modo que $\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x) = [\rho(g)]^j_i \phi_j(g^{-1}x)$.

nos

$$\phi'_i(x') = \phi'_i(x) + \epsilon^\rho \partial_\rho \phi_i(x). \quad (3.4)$$

Portanto, o campo $\phi_i(x)$ transforma-se infinitesimalmente segundo

$$\bar{\delta}\phi_i(x) = -\epsilon^\rho \partial_\rho \phi_i(x) + i\delta\epsilon^A T_A \phi_i(x), \quad \bar{\delta}\phi_i = \phi'_i(x') - \phi_i(x). \quad (3.5)$$

Ao discutir representações irredutíveis de um grupo de Lie que contém o subgrupo das translações, é importante destacar o papel particular exercido por tais transformações. Diferentemente das demais isometrias conformes, as translações atuam trivialmente sobre o espaço interno V , isto é, não induzem transformações matriciais sobre os índices do campo. Desse modo, $\rho(g)$ é composto apenas por representações do subgrupo de Lorentz, das dilatações e das TCEs, que formam o chamado subgrupo estabilizador de $x = 0$ ⁵, consistindo das transformações que mantêm a origem fixa.

Nessas condições, a ação das translações reduz-se ao deslocamento de pontos no espaço-tempo,

$$\phi_i(x+a) = \left(1 + a^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2} a^\rho a^\sigma \partial_\rho \partial_\sigma + \dots\right) \phi_i(x) = \exp(i a^\rho P_\rho) \phi_i(x). \quad (3.6)$$

Ou seja, o gerador infinitesimal P_ρ atua sobre $\phi_i(x)$ como

$$P_\rho \phi_i(x) = -i \partial_\rho \phi_i(x) \quad (3.7)$$

Para determinar a ação do subgrupo completo, é conveniente representar $\phi_i(x)$ como a translação do campo na origem,

$$\phi_i(x) = \exp(ix \cdot P) \phi_i(0), \quad (3.8)$$

de modo que a determinação das representações do grupo conforme delimita-se à determinação das representações do subgrupo estabilizador.

Definimos, portanto, sua ação na origem como

$$M_{\rho\sigma} \phi_i(0) = \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i(0), \quad D \phi_i(0) = i \Delta \phi_i(0), \quad K_\rho \phi_i(0) = \kappa_\rho \phi_i(0), \quad (3.9)$$

⁵Na física, esse subgrupo é conhecido como *little group*, conceito introduzido por Wigner no contexto da classificação das representações do grupo de Poincaré (Wigner 1939).

onde $\Sigma_{\rho\sigma}$ é o gerador infinitesimal associado ao spin de ϕ_i , enquanto Δ e κ_ρ caracterizam a ação das dilatações e das TCEs sobre o espaço interno. Esses geradores satisfazem

$$[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\alpha\rho}\Sigma_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma}\Sigma_{\beta\rho} - \eta_{\beta\rho}\Sigma_{\alpha\sigma} + \eta_{\beta\sigma}\Sigma_{\alpha\rho}), \quad [\Delta, \Sigma_{\rho\sigma}] = 0 \quad (3.10)$$

$$[\kappa_\rho, \kappa_\sigma] = 0, \quad [\Delta, \kappa_\rho] = -\kappa_\rho, \quad [\kappa_\alpha, \Sigma_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\alpha\rho}\kappa_\sigma - \eta_{\alpha\sigma}\kappa_\rho). \quad (3.11)$$

No caso do subgrupo de Lorentz, temos

$$M_{\rho\sigma}\phi_i(x) = M_{\rho\sigma} \exp(ix \cdot P)\phi_i(0) = \exp(ix \cdot P)\hat{M}_{\rho\sigma}\phi_i(0), \quad (3.12)$$

onde $\hat{M}_{\rho\sigma} = [\exp(-ix \cdot P)M_{\rho\sigma}\exp(ix \cdot P)]$ representa o gerador $M_{\rho\sigma}$ transladado. Para calculá-lo explicitamente, utilizamos o lema de Hadamard, através do qual se pode afirmar que

$$\hat{A} = \exp(-ix \cdot P)A \exp(ix \cdot P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} [P_{\mu_1}, [\dots [P_{\mu_{n-1}}, [P_{\mu_n}, A]] \dots]]. \quad (3.13)$$

Como $[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = 2i\eta_{\mu[\rho}P_{\sigma]}$ e $[P_\rho, P_\sigma] = 0$, os termos de ordem superior à primeira anulam-se, deixando-nos com

$$\hat{M}_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma} - ix^\mu [P_\mu, M_{\rho\sigma}] - \frac{1}{2!} x^\mu x^\nu [P_\mu, [P_\nu, M_{\rho\sigma}]] + \dots = M_{\rho\sigma} + x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho \quad (3.14)$$

Substituindo em (3.12), obtém-se

$$M_{\rho\sigma}\phi_i(x) = \left\{ -i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) + \Sigma_{\rho\sigma} \right\} \phi_i(x). \quad (3.15)$$

A forma explícita de $\Sigma_{\rho\sigma}$ depende da representação de Lorentz à qual o campo ϕ_i pertence:

- **Campo escalar:** caracterizados pela invariância sob transformações de Lorentz, $\varphi \xrightarrow{\Lambda} 1\varphi = \varphi$, campos de spin 0 transformam-se na representação trivial e, conseqüentemente,

$$\Sigma^{\rho\sigma} = 0. \quad (3.16)$$

- **Campo vetorial:** o grupo de Lorentz age sobre o espaço interno do campo vetorial por meio das matrizes de Lorentz $d \times d$, $\Lambda^\mu_\nu(\omega) = [\exp(i\omega^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma}/2)]^\mu_\nu$, de acordo com

$A_\mu \xrightarrow{\Lambda} \Lambda^\nu{}_\mu(\omega) A_\nu$. Na representação vetorial, os geradores são dados por

$$(\Sigma^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta^{\mu\rho} \delta^\sigma_\nu - \eta^{\mu\sigma} \delta^\rho_\nu), \quad (3.17)$$

de modo que a ação de $\Sigma_{\rho\sigma}$ mistura os índices do vetor.

- **Campo espinorial:** férmions ψ transformam-se em uma representação de spin semi-inteiro da cobertura universal do grupo de Lorentz d -dimensional⁶. Em particular, espinores de Dirac transformam-se segundo $\psi \xrightarrow{\Lambda} \Lambda_D \psi$, onde $\Lambda_D = \exp(i\omega_{\rho\sigma} \Sigma^{\rho\sigma}/2)$ é a matriz de transformação na representação espinorial, cujos geradores são

$$\Sigma^{\rho\sigma} = \frac{i}{4} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]. \quad (3.18)$$

γ^μ são as matrizes gama de Dirac, satisfazendo a álgebra de Clifford d -dimensional $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I$.

De forma análoga aos geradores de rotação, o operador D transladado é dado por

$$\hat{D} = D - ix^\mu [P_\mu, D] - \frac{1}{2} x^\mu x^\nu [P_\mu, [P_\nu, D]] + \dots = D - x^\mu P_\mu, \quad (3.19)$$

em virtude das relações de comutação (2.63) e (2.58). Portanto, ação infinitesimal da dilatação fornece

$$D\phi_i(x) = \{ix^\mu \partial_\mu + i\Delta\} \phi_i(x). \quad (3.20)$$

O papel do gerador Δ pode ser elucidado através da relação de comutação

$$[\Delta, \Sigma_{\rho\sigma}] = 0. \quad (3.21)$$

Segundo o lema de Schur (Schur, 1905), matrizes que comutam com as matrizes de spin são múltiplos escalares da identidade 1, caso $\Sigma_{\rho\sigma}$ forme uma representação irredutível do grupo de Lorentz. Nos casos de interesse, em que $\Sigma_{\rho\sigma}$ define uma representação irredutível, segue que $\Delta = \Delta 1$, onde Δ é um número real denominado dimensão de escala, que coincide com a dimensão física do campo ϕ_i em uma teoria livre. Em particular, essa característica condiz

⁶Em $d = 4$, a cobertura universal de $SO(1, 3)$ é o grupo especial linear das matrizes complexas 2×2 de determinante 1, denotado por $SL(2, \mathbb{C})$. Tal conceito pode ser estendido a $\mathbb{R}^{1, d-1}$, onde os espinores (férmions) de Dirac têm dimensão $2^{d/2}$ para d par — decompondo-se em dois espinores de Weyl, cada um de dimensão $2^{d/2-1}$ — e $2^{(d-1)/2}$ para d ímpar, caso em que a representação é irredutível.

com as propriedades de similaridade para sistemas mecânicos analisadas na introdução do capítulo anterior. Nas próximas seções, voltaremos a discutir a respeito da dimensão de escala, especialmente para os campos escalar, vetorial e espinorial.

Assim, além do spin do campo, a dimensão de escala Δ também classifica representações irredutíveis do grupo conforme.

Por último, utiliza-se (2.66), (2.63), (2.59) e (2.58), a fim de obter

$$\begin{aligned}\hat{K}_\rho &= K_\rho - ix^\mu [P_\mu, K_\rho] - \frac{1}{2} x^\mu x^\nu [P_\mu, [P_\nu, K_\rho]] + \dots \\ &= K_\rho - 2x^\mu (\eta_{\mu\rho} D + M_{\mu\rho}) + ix^\mu x^\nu (\eta_{\nu\rho} [P_\mu, D] + [P_\mu, M_{\nu\rho}]) + \dots \\ &= K_\rho - 2x^\mu (\eta_{\mu\rho} D + M_{\mu\rho}) + (2x_\rho x^\mu P_\mu - x^2 P_\rho).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Enfim, a ação infinitesimal das TCEs é dada por

$$K_\rho \phi_i(x) = \left\{ -i(2x_\rho x^\mu \partial_\mu - x^2 \partial_\rho) - 2ix^\sigma (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) + \kappa_\rho \right\} \phi_i(x).\tag{3.23}$$

Para representações irredutíveis, o gerador κ_ρ deve se anular, uma vez que

$$[\Delta 1, \kappa_\rho] = -\kappa_\rho \implies \kappa_\rho = 0.\tag{3.24}$$

Essa característica está intimamente relacionada ao papel dos geradores P_ρ e K_ρ como operadores de elevação e abaixamento para D . Tendo em vista que $[D, P_\rho] = iP_\rho$ e $[D, K_\rho] = -iK_\rho$, observa-se que

$$D(P_\rho \phi_i(0)) = i(\Delta + 1)P_\rho \phi_i(0) \quad \text{e} \quad D(K_\rho \phi_i(0)) = i(\Delta - 1)K_\rho \phi_i(0).\tag{3.25}$$

Dado que Δ informa a dimensão física do campo ϕ_i , deve haver um valor mínimo permitido para a dimensão de escala, de modo que esse processo de descida eventualmente seja interrompido. Essa é propriedade definidora dos chamados campos “primários” (Campos Delgado, 2022), que satisfazem as condições

$$D\phi_i(0) = i\Delta\phi_i(0), \quad K_\rho\phi_i(0) = 0.\tag{3.26}$$

Ou seja, um campo primário é aquele de menor dimensão dentro de uma dada representação do grupo conforme.

Na direção oposta, ao atuar repetidamente com P_ρ , produz-se os chamados “descendentes” na linguagem de CFTs⁷. Desse modo, é possível gerar descendentes de ϕ_i de dimensão arbitrariamente alta aplicando sucessivamente o gerador de translações,

$$\phi_i(0) \longrightarrow P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \phi_i(0), \quad \Delta \longrightarrow \Delta + n. \quad (3.27)$$

Como a ação de P_ρ corresponde à derivação, um campo primário é aquele que não pode ser escrito como derivada de outro campo. Assim, embora P_ρ não tenha a posição privilegiada que possui no grupo de Poincaré, cf. (2.69), D cumpre papel análogo na organização das representações.

Determinadas todas as ações infinitesimais, façamos as seguintes identificações⁸:

$$\bar{\delta}_T \phi_i(x) = -ia^\rho P_\rho \phi_i(x) = -a^\rho \partial_\rho \phi_i(x), \quad (3.28)$$

$$\bar{\delta}_L \phi_i(x) = \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \phi_i(x) = -\omega^{\rho\sigma} x_\sigma \partial_\rho \phi_i(x) + \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i(x), \quad (3.29)$$

$$\bar{\delta}_D \phi_i(x) = i\lambda D \phi_i(x) = -\lambda x^\rho \partial_\rho \phi_i(x) - \lambda \Delta \phi_i(x), \quad (3.30)$$

$$\bar{\delta}_C \phi_i(x) = -ib^\rho K_\rho \phi_i(x) = -b^\rho (2x_\rho x^\sigma - x^2 \delta_\rho^\sigma) \partial_\sigma \phi_i(x) - 2b^\rho x^\sigma (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i(x). \quad (3.31)$$

Desse modo, a ação infinitesimal completa do grupo conforme sobre o campo mostra-se consistente com (3.5),

$$\bar{\delta} \phi_i(x) = \left\{ -\epsilon^\rho \partial_\rho + \frac{i}{2} \tilde{\omega}^{\rho\sigma}(x) \Sigma_{\rho\sigma} - \sigma(x) \Delta \right\} \phi_i(x), \quad (3.32)$$

onde $\tilde{\omega}^{\rho\sigma}(x) = \omega^{\rho\sigma} - 4b^{[\rho} x^{\sigma]}$ representa o parâmetro local de Lorentz induzido pela isometria conforme e $\sigma(x) = \lambda + 2(b \cdot x)$. Ainda, é possível reescrever os termos dependentes da representação em função de ϵ^ρ ,

$$\bar{\delta} \phi_i(x) = \left\{ -\epsilon^\rho \partial_\rho - \frac{i}{2} \partial_\rho \epsilon_\sigma \Sigma^{\rho\sigma} - \frac{\Delta}{d} (\partial \cdot \epsilon) \right\} \phi_i(x). \quad (3.33)$$

⁷Tanto primários quanto descendentes compõem parte do vocabulário de CFTs. No caso de CFTs bidimensionais, define-se, adicionalmente, o conceito de campos *quasi*-primários: diferentemente dos primários, que são aniquilados por todos os operadores de abaixamento da álgebra conforme, campos *quasi*-primários são aniquilados apenas pelos geradores K_ρ das TCEs associados à subálgebra global, $\mathfrak{so}(2, 2)$. Campos *quasi*-primários são o análogo direto de campos primários em $d > 2$.

⁸A fim de não sobrecarregar a notação, passaremos a denotar os parâmetros infinitesimais $\delta \epsilon^A$ simplesmente por ϵ^A .

O formato encontrado em (3.32) evidencia que ação do grupo conforme é composta por matrizes localmente $SO(1, d-1)$ e uma transformação de escala dependente da posição. Desse modo, a forma finita obtida via exponenciação equivale a

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') = \Omega^{-\Delta}(x) [\rho(\Lambda(x))]^j_i \phi_j(x), \quad \Lambda^\mu_\nu(x) \in SO(1, d-1). \quad (3.34)$$

Alternativamente, o formato encontrado em (3.33) destaca a lei de transformação do campo $\phi_i(x)$ sob um recorte mais geral. Em particular, ao analisarmos a forma finita das isometrias conformes, constatou-se que seu jacobiano é da forma

$$J^\mu_\nu(x) = \Omega(x) \Lambda^\mu_\nu(x). \quad (3.35)$$

De fato, a condição conforme (2.12) no espaço-tempo de Minkowski pode ser expressa equivalentemente como

$$\eta_{\mu\nu} J^\mu_\sigma(x) J^\nu_\rho(x) = \Omega^2(x) \eta_{\rho\sigma}, \quad (3.36)$$

uma vez que $\Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho = \eta_{\rho\sigma}$ caracteriza as transformações de Lorentz. Por outro lado, ao tomar o determinante de (3.36), obtém-se que fator de escala está relacionado ao determinante do jacobiano segundo

$$\Omega(x) = |J(x)|^{1/d}. \quad (3.37)$$

Em geral, a transformação do tensor invariante conforme é

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta+n-m}{d}} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}(x). \quad (3.38)$$

Desse modo, os campos transformam-se como densidades tensoriais de peso $(\Delta + n - m)/d$ sob o grupo conforme, os quais coincidem com as representações do grupo de Poincaré nos casos em que $\Delta = m - n$.

Na próxima seção, serão discutidas as propriedades da simetria conforme em teoria de campos.

3.2 Simetria conforme em teoria de campos

Nesta seção, analisaremos quais condições a invariância sob isometrias conformes infinitesimais impõe à densidade Lagrangiana associada ao campo $\phi_i(x)$, bem como investigaremos as leis de conservação via o primeiro teorema de Noether. Posteriormente, aplicaremos os resultados obtidos a alguns exemplos.

Seja uma teoria descrita pelo funcional de ação⁹

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\nu). \quad (3.39)$$

A princípio, consideraremos uma densidade Lagrangiana dependente dos campos $\phi_i(x)$, de suas primeiras derivadas $\partial_\mu \phi_i$ e, possivelmente, das coordenadas x^ν .

Sabe-se que uma transformação infinitesimal $\bar{\delta}\phi_i$ corresponde a uma simetria da ação desde que seja satisfeita a condição

$$\bar{\delta}\mathcal{L} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\bar{\delta}(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu\bar{\Lambda}^\mu, \quad (3.40)$$

isto é, a variação de forma da densidade Lagrangiana deve ser igual a um termo de derivada total.

Sob tal condição, o teorema de Noether para simetrias globais afirma que, para cada simetria contínua, existe uma corrente conservada *on-shell*, cuja expressão, cf. (C.24), é dada por

$$\partial_\mu \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\bar{\delta}\phi_i + \bar{\Lambda}^\mu \right) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\bar{\delta}\phi_i, \quad (3.41)$$

onde o vocábulo *on-shell* denota a imposição das equações de Euler–Lagrange,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Dito isto, analisaremos, caso a caso, os vínculos impostos à densidade Lagrangiana¹⁰, a fim de verificar a condição (3.40).

⁹A dependência funcional dos campos será omitida ao longo desta seção.

¹⁰Esta análise tem como base (Callan Jr; Coleman; Jackiw, 1970; Coleman; Jackiw, 1971).

Translações No caso de translações (3.28), temos

$$\delta_T \mathcal{L} = -a^\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \partial_\rho \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \partial_\mu \phi_i \right) = \partial_\rho (-a^\rho \mathcal{L}) + a^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho}. \quad (3.43)$$

Observa-se que a simetria translacional impõe à densidade Lagrangiana independência explícita nas coordenadas x^ν . Desse modo, a condição de simetria *off-shell* é dada por

$$\partial_\rho \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \partial_\rho \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \partial_\mu \phi_i \iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} = 0. \quad (3.44)$$

Equivalentemente, a condição acima pode ser reescrita na forma (3.41), como a conservação *on-shell* do tensor de energia-momento canônico,

$$\partial_\rho T_c^{\rho\sigma} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \partial^\sigma \phi_i, \quad T_c^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi_i)} \partial^\sigma \phi_i - \eta^{\rho\sigma} \mathcal{L}. \quad (3.45)$$

A carga de Noether associada, (C.34), corresponde ao momento linear:

$$P_c^\rho = \int_{\Sigma_t} d^{d-1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \partial^\rho \phi_i - \eta^{0\rho} \mathcal{L} \right). \quad (3.46)$$

Transformações de Lorentz Sob transformações de Lorentz infinitesimais (3.29), temos

$$\begin{aligned} \delta_L \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \left(-\omega^{\rho\sigma} x_\sigma \partial_\rho \phi_i + \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \left(-\omega^{\rho\sigma} x_\sigma \partial_\rho \phi_i + \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i \right) \\ &= \partial_\rho (-\omega^{\rho\sigma} x_\sigma \mathcal{L}) + \omega^{\rho\sigma} x_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\eta_{\mu\rho} \partial_\sigma - \eta_{\mu\sigma} \partial_\rho) \phi_i + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Sigma_{\rho\sigma} \partial_\mu \phi_i \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Essa expressão evidencia que a invariância sob transformações de Lorentz requer invariância sob translações e, adicionalmente, que seja satisfeita a condição *off-shell*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\eta_{\mu\rho} \partial_\sigma - \eta_{\mu\sigma} \partial_\rho) \phi_i = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Sigma_{\rho\sigma} \partial_\mu \phi_i. \quad (3.48)$$

Ao reescrevê-la em um formato mais sugestivo,

$$T_c^{\rho\sigma} - T_c^{\sigma\rho} = -\partial_\mu \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Sigma^{\rho\sigma} \phi_i \right) - i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \Sigma^{\rho\sigma} \phi_i, \quad \Sigma^{\rho\sigma} = \eta^{\alpha\rho} \eta^{\sigma\beta} \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (3.49)$$

conclui-se que teorias invariantes sob transformações de Lorentz possuem tensor de energia-momento com parte antissimétrica proporcional à matriz de spin (*on-shell*). Em particular, o termo entre parênteses é denominado tensor de spin,

$$S^{\mu\rho\sigma} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \Sigma^{\rho\sigma} \phi_i. \quad (3.50)$$

Analogamente ao caso das translações, as condições *off-shell* podem ser utilizadas para obter a corrente de Noether. Neste caso, utilizando (3.44) em conjunto com (3.49), obtém-se a conservação do tensor de momento angular:

$$\partial_\mu M_c^{\mu\rho\sigma} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} (x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho + i \Sigma^{\rho\sigma}) \phi_i, \quad M_c^{\mu\rho\sigma} = x^\rho T_c^{\mu\sigma} - x^\sigma T_c^{\mu\rho} + S^{\mu\rho\sigma}. \quad (3.51)$$

A carga de Noether associado é dada por

$$M_c^{\rho\sigma} = \int_{\Sigma_t} d^{d-1}x \left(x^\rho T_c^{0\sigma} - x^\sigma T_c^{0\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} i \Sigma^{\rho\sigma} \phi_i \right). \quad (3.52)$$

Procedimento de Belinfante–Rosenfeld Para um sistema invariante sob a ação infinitesimal do grupo de Poincaré (3.49), é possível simetrizar o tensor de energia-momento canônico a partir da melhoria de Belinfante–Rosenfeld (Belinfante, 1940; Rosenfeld, 1940).

Inicialmente, nota-se que a conservação do tensor de energia-momento não é alterada mediante adição de um termo de derivada total $\partial_\mu X^{\mu\rho\sigma}$, desde que $X^{\mu\rho\sigma} = -X^{\rho\mu\sigma}$. Assim, define-se o tensor simétrico de Belinfante como

$$\theta_B^{\rho\sigma} = T_c^{\rho\sigma} + \partial_\mu X^{\mu\rho\sigma}. \quad (3.53)$$

Tendo em vista que $\theta_B^{\rho\sigma} = \theta_B^{\sigma\rho}$, utiliza-se (3.49) a fim de obter

$$X^{\mu\rho\sigma} - X^{\mu\sigma\rho} = S^{\mu\rho\sigma}. \quad (3.54)$$

Permutando os índices ciclicamente e somando as permutações de forma apropriada, chega-se a

$$X^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (S^{\mu\rho\sigma} + S^{\rho\sigma\mu} - S^{\sigma\mu\rho}). \quad (3.55)$$

Portanto, determina-se um tensor de energia-momento manifestamente simétrico:

$$\theta_B^{\rho\sigma} = T_c^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\mu (S^{\mu\rho\sigma} + S^{\rho\sigma\mu} - S^{\sigma\mu\rho}). \quad (3.56)$$

Substituindo em $M_c^{\mu\rho\sigma}$, obtém-se

$$M^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \theta_B^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta_B^{\mu\rho} - \partial_\nu (x^\rho X^{\nu\mu\sigma} - x^\sigma X^{\nu\mu\rho}), \quad (3.57)$$

do qual se define um novo tensor de momento angular,

$$M_B^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \theta_B^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta_B^{\mu\rho}. \quad (3.58)$$

A nova corrente é conservada e as cargas associadas são mantidas.

Dilatação Para dilatações, tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_D \mathcal{L} &= -\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} (x^\rho \partial_\rho \phi_i + \Delta \phi_i) - \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (x^\rho \partial_\rho \phi_i + \Delta \phi_i) \\ &= \partial_\rho (-\lambda x^\rho \mathcal{L}) + \lambda x^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} - \lambda \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\Delta + 1) \partial_\mu \phi_i - d \mathcal{L} \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Assim como no caso anterior, a invariância sob dilatações requer invariância translacional — uma característica ubíqua quando se trata de transformações de coordenadas. Adicionalmente, deve-se satisfazer a condição *off-shell*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\Delta + 1) \partial_\mu \phi_i - d \mathcal{L} = 0. \quad (3.60)$$

Tal condição constitui a realização, em teoria de campos, das similaridades mecânicas: a densidade Lagrangiana deve ser uma função homogênea generalizada¹¹ de ϕ_i e $\partial_\mu \phi_i$. Em particular, o campo ϕ_i escala com sua dimensão de massa, isto é,

$$[\phi_i] = M^\Delta, \quad [\partial_\mu \phi_i] = M^{\Delta+1}, \quad (3.61)$$

¹¹Funções homogêneas generalizadas (Hankey; Stanley, 1972) diferem das funções homogêneas mencionadas na discussão inicial deste trabalho por permitirem que cada um de seus argumentos se transforme com um expoente distinto, denominados *pesos*, cuja soma determina o grau de homogeneidade da função. Na literatura, são mais comumente encontradas sob a denominação de funções *quasi-homogêneas* (Anosov, D. V.; Arnold; Anosov, D., 1988).

de modo que $[\mathcal{L}] = M^{-d}$.

Como o elemento de volume $d^d x$ transforma-se como uma densidade escalar, cf. (C.4), dilatações modificam-no segundo

$$d^d x \mapsto \Omega^d d^d x, \quad \Omega = \exp(\lambda). \quad (3.62)$$

Assim, caso a densidade Lagrangiana transforme-se como uma densidade escalar de peso -1 , o produto $\mathcal{L} d^d x$ comporta-se como um escalar, assegurando que transformações de escala constituam simetrias da ação.

Aqui, fica evidente que a dimensão de escala Δ corresponde, de fato, à dimensão do campo, expressa em unidades de massa no sistema de medidas em que $c = \hbar = 1$. Ademais, conforme discutido na seção anterior, a derivação atua como um operador de levantamento, $\partial_\mu \xrightarrow{\lambda} \lambda^{-1} \partial_\mu$, elevando a dimensão do campo em uma unidade.

Dado que a homogeneidade da densidade Lagrangiana, sob transformação de escala, é assegurada quando a dimensionalidade dos termos que a compõem decorre exclusivamente dos campos ϕ_i e suas derivadas¹², a presença de constantes de acoplamento dimensionais ou coeficientes de massa introduz escalas características e, conseqüentemente, acarreta a quebra da simetria de escala. Desse modo, essa forma de invariância revela-se altamente sensível a perturbações quânticas.

A condição (3.60) pode ser reescrita como

$$\eta_{\mu\nu} T_c^{\mu\nu} = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \Delta \phi_i \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \Delta \phi_i, \quad (3.63)$$

ou seja, a invariância de escala equivale a dizer que o traço do tensor de energia-momento canônica corresponde, *on-shell*, a uma derivada total, especificamente um termo de divergência.

Ao juntar (3.63) à condição de invariância translacional, obtém-se a lei de conservação associada à corrente de dilatação,

$$\partial_\mu D_c^\mu = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} (x^\rho \partial_\rho \phi_i + \Delta \phi_i), \quad D^\mu = x_\rho T_c^{\mu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \Delta \phi_i, \quad (3.64)$$

¹²Neste momento, torna-se mais nítida a razão pela qual as funções de N pontos obedecem às leis de transformação (2.160) e (2.173) sob dilatações e TCEs, respectivamente: tais leis decorrem diretamente das dimensões de escala atribuídas aos campos que as compõem.

cuja carga de Noether é dada por

$$D_c^0 = \int_{\Sigma_t} d^{d-1}x \left(x_\rho T_c^{0\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \Delta \phi_i \right). \quad (3.65)$$

Caso o sistema seja também invariante sob transformações de Lorentz, a corrente de dilatação escrita em termos do tensor de energia-momento simétrico assume a forma

$$D_B^\mu = x_\rho \theta_B^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho} V_\rho, \quad V_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \phi_i)} (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i \Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i, \quad (3.66)$$

de modo que

$$\partial_\mu D_B^\mu = 0 \implies \eta_{\mu\rho} \theta_B^{\mu\rho} = -\partial_\mu V^\mu. \quad (3.67)$$

Portanto, a conservação da corrente de dilatação implica o traço do tensor de energia-momento simétrico ser o divergente da quantidade V^μ , denominada corrente do virial (Coleman; Jackiw, 1971) em virtude de ser o análogo da expressão (2.5) no contexto de teoria de campos¹³.

Tensor de energia-momento de Callan–Coleman–Jackiw (CCJ) O traço do tensor de energia-momento ser um termo de derivada sugere a possibilidade de eliminá-lo por meio da adição de um termo de melhoria, à semelhança do procedimento de Belinfante–Rosenfeld (Callan Jr; Coleman; Jackiw, 1970). Propõe-se, portanto, a modificação

$$\theta_{CCJ}^{\rho\sigma} = \theta_B^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu Y^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.68)$$

da qual se obtém

$$\partial_\mu V^\mu = \partial_\mu \partial_\nu L^{\mu\nu}, \quad L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Y^{\mu\nu\rho}{}_\rho. \quad (3.69)$$

A fim de que a conservação e a simetria do tensor de energia-momento sejam preservadas, a modificação deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu Y^{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \partial_\nu Y^{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu \partial_\nu Y^{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (3.70)$$

¹³Note que ao considerar um campo ϕ_i de spin zero em $(0+1)$ -dimensão espaço-temporal, a corrente do virial é reduzido a $V_0 = \Delta p x$, onde identificamos o campo escalar com a coordenada espacial e o momento conjugado com o momento linear.

Sob essas condições, a forma mais geral de escrever $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$ em termos de $L^{\mu\nu}$ é dada por¹⁴

$$Y^{\mu\nu\rho\sigma} = a \left(\eta^{\rho\sigma} L^{(\mu\nu)} - \eta^{\nu\sigma} L^{(\mu\rho)} - \eta^{\mu\rho} L^{(\nu\sigma)} + \eta^{\mu\nu} L^{(\rho\sigma)} \right) + b \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \right) L^\alpha_\alpha, \quad (3.71)$$

onde a e b são coeficientes a serem determinados. Contraindo a expressão com $\eta_{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu$, determina-se¹⁵

$$a = \frac{2}{d-2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{2}{(d-2)(d-1)}, \quad (d > 2). \quad (3.72)$$

Em termos do tensor de energia-momento melhorado, o tensor de momento angular $M_B^{\mu\rho\sigma}$ é escrito como

$$M_B^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \theta_{CCJ}^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta_{CCJ}^{\mu\rho} - \frac{1}{2} \left[\partial_\alpha \partial_\beta \left(x^\rho Y^{\alpha\beta\mu\sigma} - x^\sigma Y^{\alpha\beta\mu\rho} \right) - 3 \partial_\alpha Y^{\alpha\rho\sigma\mu} \right]. \quad (3.73)$$

Os termos adicionais não modificam sua conservação nem suas propriedades de simetria. Desse modo, pode-se substituir $M_B^{\mu\rho\sigma}$ por $M^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \theta_{CCJ}^{\mu\sigma} - x^\sigma \theta_{CCJ}^{\mu\rho}$ na construção dos geradores de momento angular (3.52).

Por sua vez, a corrente de dilatação também pode ser reescrita em termos de $\theta_{CCJ}^{\rho\sigma}$ como

$$D_B^\mu = x_\rho \theta_{CCJ}^{\mu\rho} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \left(Y^{\alpha\beta\mu\rho} x_\rho \right) - \partial_\rho L^{(\mu\rho)} + V^\mu. \quad (3.74)$$

Uma vez que segunda parcela não interfere na conservação, ela pode ser descartada. Já os dois últimos termos podem ser reorganizados da seguinte maneira:

$$V^\mu - \frac{1}{2} \partial_\rho (L^{\mu\rho} + L^{\rho\mu}) = (V^\mu - \partial_\rho L^{\mu\rho}) - \partial_\rho L^{[\mu\rho]}. \quad (3.75)$$

Nessa forma, observa-se que a segunda parcela é uma derivada total de um termo antissimétrico e, portanto, não contribui para a carga de Noether. Da primeira parcela, obtém-se a condição de consistência

$$V^\mu = \partial_\rho L^{\mu\rho}. \quad (3.76)$$

¹⁴Uma maneira de obter tal expressão consiste em iniciar por um termo simétrico nos índices $(\rho\sigma)$, como $\eta^{\rho\sigma} L^{\mu\nu}$, e adicionar iterativamente novos termos de modo que as propriedades (3.70) sejam sempre satisfeitas para cada par de termos sucessivos. Esse mesmo raciocínio aplica-se ao traço L^α_α . Ao final, esse procedimento conduz a um ciclo fechado sob as simetrias impostas, selecionando naturalmente a parte simétrica de $L^{\mu\nu}$ como condição de consistência do método. Cabe ressaltar que a expressão obtida não é única, havendo outras que satisfazem tais requisitos, como pode ser encontrada em (Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012; Callan Jr; Coleman; Jackiw, 1970; Coleman; Jackiw, 1971).

¹⁵Em $d = 2$, temos a restrição adicional $L^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} L^\alpha_\alpha$, sob a qual obtém-se $Y^{\mu\nu\rho\sigma} = (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}) L^\alpha_\alpha$.

Isto é, apenas nos casos em que a corrente do virial pode ser escrita como a divergência de uma função local $L^{\mu\rho}$ o traço do tensor de energia-momento se anula,

$$\partial_\mu D^\mu = 0 \implies \eta_{\rho\sigma} \theta_{CCJ}^{\rho\sigma} = 0, \quad D^\mu = x_\rho \theta_{CCJ}^{\mu\rho}. \quad (3.77)$$

O significado preciso da condição (3.76) será elucidado a seguir, no contexto da invariância sob TCEs.

Transformações conformes especiais Sob TCE (2.99), a densidade Lagrangiana transforma-se segundo

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_C \mathcal{L} &= -b^\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \left[(2x_\rho x^\sigma - x^2 \delta_\rho^\sigma) \partial_\sigma \phi_i + 2x^\sigma (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i \right] \right\} \\ &\quad - b^\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \left[(2x_\rho x^\sigma - x^2 \delta_\rho^\sigma) \partial_\sigma \phi_i + 2x^\sigma (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i \right] \right\} \\ &= \partial_\sigma \left[-b^\rho (2x_\rho x^\sigma - x^2 \delta_\rho^\sigma) \mathcal{L} \right] - 2b^\rho V_\rho + b^\rho (2x_\rho x^\sigma - x^2 \delta_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} \\ &\quad - 4b^{[\rho} x^{\sigma]} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\eta_{\mu\rho} \partial_\sigma - \eta_{\mu\sigma} \partial_\rho) \phi_i + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Sigma_{\rho\sigma} \phi_i + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Sigma_{\rho\sigma} \partial_\mu \phi_i \right] \\ &\quad - 2b \cdot x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\Delta + 1) \partial_\mu \phi_i - d\mathcal{L} \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Em total conformidade com análises anteriores acerca do grupo conforme e suas representações, nota-se que a transformação da densidade Lagrangiana abrange um deslocamento infinitesimal em $\mathcal{M}$, uma transformação de escala dependente das coordenadas e uma transformação pseudo-ortogonal local. Em decorrência de tais propriedades, a simetria sob TCEs implica que o sistema é invariante sob translações, transformação de Lorentz e dilatações, enquanto a recíproca não necessariamente é verdadeira.

Utilizando-se das relações (3.44), (3.49) e (3.63), as três condições de simetria *off-shell* resultam conjuntamente na expressão de conservação

$$\partial_\mu \tilde{K}_c^{\mu\rho} - 2V^\rho = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \left[(x^\rho x^\sigma - x^2 \eta^{\rho\sigma}) \partial_\sigma + 2x_\sigma (\eta^{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma^{\rho\sigma}) \right] \phi_i, \quad (3.79)$$

onde $\tilde{K}_c^{\mu\rho}$ é uma quantidade definida como

$$\tilde{K}_c^{\mu\rho} = (2x^\rho x_\sigma - 2x^2 \delta_\sigma^\rho) T_c^{\mu\sigma} + 2x^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i. \quad (3.80)$$

Evidentemente, essa quantidade não é conservada. Em particular, nota-se que, para além da invariância sob o subgrupo de Poincaré estendido às dilatações, TCEs constituem simetrias do sistema apenas quando a corrente do virial é nula ou quando corresponde a um termo de derivada total, isto é, a condição de simetria (3.40) aplicada em (3.78) é satisfeita de modo não trivial quando $V^\mu = \partial_\rho L^{\mu\rho}$. Desse modo, define-se a corrente canônica associada às TCEs, denominada corrente conforme (Polchinski, 1988), como

$$K_c^{\mu\rho} = \tilde{K}_c^{\mu\rho} - 2L^{\rho\mu}, \quad (3.81)$$

a qual é devidamente conservada *on-shell*, como evidencia (3.79).

A carga de Noether associada é obtida da integral espacial da componente $\mu = 0$,

$$K_c^\rho = \int_{\Sigma_t} d^{d-1}x \left[(2x^\rho x_\sigma - 2x^2 \delta_\sigma^\rho) T_c^{0\sigma} + 2x^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} (\eta_{\rho\sigma} \Delta + i\Sigma_{\rho\sigma}) \phi_i - 2L^{\rho 0} \right]. \quad (3.82)$$

Juntamente ao momento linear (3.46), momento angular (3.52) e a carga associada às dilatações (3.65), essas quantidades satisfazem a álgebra conforme sob os parênteses de Poisson, cf. (C.49).

A propriedade de traço nulo do tensor de energia-momento decorre diretamente da simetria sob TCEs, sendo a recíproca também verdadeira. Em particular, se

$$\eta_{\rho\sigma} \theta_B^{\rho\sigma} = -\partial_\mu V^\mu, \quad (3.83)$$

o sistema possui invariância de escala. Adicionalmente, se

$$\eta_{\rho\sigma} \theta_B^{\rho\sigma} = -\partial_\mu \partial_\nu L^{\mu\nu}, \quad (3.84)$$

o sistema é invariante conforme e, consequentemente, o tensor de energia-momento $\theta_{CCJ}^{\rho\sigma}$, para o qual $\eta_{\rho\sigma} \theta_{CCJ}^{\rho\sigma} = 0$, existe.

De fato, as condições de simetria associadas às TCEs desempenham, em certo sentido, um papel distinto: reforçam o caráter de traço nulo do tensor de energia-momento como propriedade caracterizadora de sistemas invariantes sob a ação infinitesimal do grupo conforme. Com efeito, a “lei de conservação” associada a $K_c^{\mu\rho}$ decorre das conservações previamente estabelecidas, em conjunto com a condição (3.76), não constituindo, essencialmente, uma lei de conservação independente.

Tal aspecto pode ser evidenciando ao expressar a corrente conforme em termos do tensor de energia-momento $\theta_{CCJ}^{\rho\sigma}$. Primeiramente, escrevendo-a em termos do tensor simétrico de Belinfante, tem-se

$$K_c^{\mu\rho} = (2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) \theta_B^{\mu\sigma} + 2x^\rho \partial_\sigma L^{(\mu\sigma)} - 2L^{(\mu\rho)} + 2\partial_\sigma (x^\rho L^{[\mu\sigma]}) - \partial_\alpha [(2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) X^{\alpha\mu\sigma}], \quad (3.85)$$

onde utilizou-se a decomposição $L^{\mu\sigma} = L^{(\mu\sigma)} + L^{[\mu\sigma]}$.

Uma vez que termos superficiais não alteram o conteúdo físico das cargas, define-se a corrente conforme de Belinfante como

$$K_B^{\mu\rho} = (2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) \theta_B^{\mu\sigma} + 2x^\rho \partial_\sigma L^{(\mu\sigma)} - 2L^{(\mu\rho)}. \quad (3.86)$$

Assim, a expressão geral da corrente de Noether associada às isometrias conformes, cf. (3.41), escrita em termos do tensor de energia-momento simétrico, é dada por

$$\mathcal{J}_{conf}^\mu = \epsilon_\rho \theta_B^{\mu\rho} + (\partial \cdot \epsilon) V^\mu - \partial_\rho (\partial \cdot \epsilon) L^{(\mu\rho)}. \quad (3.87)$$

Em seguida, utilizando a modificação de CCJ (3.68), obtém-se

$$K_B^{\mu\rho} = (2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) \theta_{CCJ}^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta [(2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) Y^{\alpha\beta\mu\sigma}] - \partial_\alpha (Y^{\rho\alpha\mu\sigma} x_\sigma). \quad (3.88)$$

Mais uma vez, os últimos dois termos são fisicamente irrelevantes e, portanto, a corrente conforme reduz-se à forma

$$K^{\mu\rho} = (2x^\rho x_\sigma - x^2 \delta_\sigma^\rho) \theta_{CCJ}^{\mu\sigma}. \quad (3.89)$$

Evidentemente, sua conservação decorre do fato do tensor de energia-momento $\theta_{CCJ}^{\mu\sigma}$ possuir traço nulo.

A fim de tornar a discussão mais concreta, analisaremos a invariância conforme na teoria escalar, na teoria de *gauge* vetorial e na teoria fermiônica de spin 1/2.

3.2.1 Campo escalar

Consideremos a ação de um campo escalar real autointeragente

$$S_0[\varphi] = \int d^d x \mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad \mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi), \quad (3.90)$$

da qual seguem as equações de movimento do tipo Klein–Gordon na presença do potencial $V(\varphi)$,

$$\partial^2 \varphi + m^2 \varphi + \frac{d}{d\varphi} V(\varphi) = 0. \quad (3.91)$$

Previamente, foi inferido que a condição de homogeneidade pertinente à invariância sob dilatações é assegurada quando a dimensionalidade da densidade Lagrangiana decorre exclusivamente dos campos e de suas derivadas. Desse modo, o termo cinético é particularmente adequado para a determinação da dimensão de escala. Assim,

$$\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \xrightarrow{\Omega} \Omega^{-2(\Delta+1)} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (3.92)$$

Dado que uma transformação de escala finita é uma simetria da ação quando a densidade Lagrangiana corresponde a uma função homogênea generalizada de grau $-d$, isto é,

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \xrightarrow{\Omega} \mathcal{L}(\Omega^{-\Delta} \phi_i, \Omega^{-(\Delta+1)} \partial_\mu \phi_i) = \Omega^{-d} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (3.93)$$

conclui-se que a dimensão de escala do campo escalar, denotada por Δ_φ , é avaliado como

$$\Delta_\varphi = \frac{d-2}{2}. \quad (3.94)$$

Tendo em vista que $M = L^{-1}$ ($c = \hbar = 1$), a dimensão de escala Δ_φ concorda com a dimensão de massa do campo escalar em d dimensões. Nesse sentido, termos massivos presentes na densidade Lagrangiana quebram a invariância de escala, uma vez que o termo φ^2 não possui a dimensão adequada e, portanto, deve ser acompanhado por um parâmetro massivo m , mais especificamente m^2 . Quanto ao termo de potencial $V(\varphi)$, a condição de simetria *off-shell*, cf. (3.60), fornece

$$\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} V(\varphi) = \frac{d}{\Delta_\varphi} V(\varphi), \quad d \neq 2. \quad (3.95)$$

Infere-se que $V(\varphi)$ deve ser uma função homogênea generalizada de grau d com peso Δ_φ , isto é, $V(\varphi) \xrightarrow{\Omega} V(\Omega^{-\Delta_\varphi} \varphi) = [V(\varphi)]^{-d}$, cuja forma geral corresponde ao monômio¹⁶

$$V(\varphi) = g_n \varphi^n, \quad n = \frac{2d}{d-2} \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (3.96)$$

Aqui, g_n é uma constante de acoplamento adimensional.

Note que os possíveis pares (n, d) são aqueles para os quais $d - 2$ divide 4, isto é,

$$\frac{2d}{d-2} = 2 + \frac{4}{d-2}. \quad (3.97)$$

Ou seja, os únicos pares disponíveis são $\{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$ ¹⁷

Em resumo, a simetria sob dilatações demanda as condições

$$V(\varphi) = g_n \varphi^n \quad \text{e} \quad m = 0, \quad n = \frac{2d}{d-2}. \quad (3.98)$$

Embora o cenário apresentado seja favorável à simetria conforme — respeitadas as limitações impostas pela invariância de escala —, ainda é preciso analisar o traço do tensor de energia-momento. Segundo (3.45), obtém-se

$$T_c^{\rho\sigma} = \partial^\rho \varphi \partial^\sigma \varphi - \eta^{\rho\sigma} \mathcal{L}_0. \quad (3.99)$$

¹⁶Embora um termo de auto-interação polinomial invariante conforme, como em (3.96), não esteja disponível em $d = 2$, é possível construir teorias dinâmicas não triviais e invariantes conformes por meio de redefinições não lineares do campo escalar, o que conduz a modelos como a teoria de Liouville (Jackiw, 2006).

¹⁷Fora os inteiros positivos, $n = -2$ é o único valor inteiro para o qual $d > 0$. Nesse caso, a teoria escalar em $\mathbb{R}^{1,0}$, a partir da identificação $x(t) = \phi(t)/\sqrt{m}$, corresponde ao sistema mecânico exatamente solúvel de uma partícula não relativística submetida a um potencial inversamente proporcional ao quadrado da distância, analisada em (Alfaro; Fubini; Furlan, 1976) e, mais recentemente, em (Andrzejewski, 2016). Esse sistema coincide com o caso especial discutido no início deste trabalho, acerca das similaridades mecânicas.

Devido à ausência de spin, o tensor de energia-momento canônico é manifestamente simétrico, não requerendo a melhoria de Belinfante–Rosenfeld. Ao tomar o traço, segue que

$$\begin{aligned}
 \eta_{\rho\sigma} T_c^{\rho\sigma} &= -\frac{1}{2}(d-2)\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi + d\left(\frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi)\right) \\
 &\stackrel{(3.91)}{=} -\frac{1}{2}(d-2)\partial_\rho(\eta^{\rho\sigma}\varphi\partial_\sigma\varphi) + m^2\varphi^2 - \frac{1}{n}\left(\varphi\frac{d}{d\varphi}V(\varphi) - nV(\varphi)\right) \\
 &\stackrel{(3.98)}{=} -\partial_\rho\partial_\sigma\left(\frac{d-2}{4}\eta^{\rho\sigma}\varphi^2\right) \\
 &\stackrel{(3.67)}{=} -\partial_\rho V^\rho.
 \end{aligned}$$

Exceto no caso $d = 2$, no qual o campo φ transforma-se como um escalar de Lorentz sob a ação do grupo conforme, infere-se que a teoria escalar não é manifestamente invariante conforme ao nível do tensor canônico. Todavia, a condição (3.76) é satisfeita e, conseqüentemente, existe $\theta_{CCJ}^{\rho\sigma}$. Em particular, a função $L^{\rho\sigma}$, primitiva da corrente do virial, corresponde a

$$L^{\rho\sigma} = \frac{d-2}{4}\eta^{\rho\sigma}\varphi^2. \quad (3.100)$$

Sendo assim, o termo de melhoria de CCJ, obtido via (3.71), é dado por

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu Y^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{d-2}{4(d-1)}(\eta^{\rho\sigma}\partial^2 - \partial^\rho\partial^\sigma)\varphi^2. \quad (3.101)$$

Portanto, a teoria escalar (3.90), cujo tensor de energia-momento melhorado é igual a

$$\theta_{CCJ}^{\rho\sigma} = T_c^{\rho\sigma} + \frac{d-2}{4(d-1)}(\eta^{\rho\sigma}\partial^2 - \partial^\rho\partial^\sigma)\varphi^2, \quad (3.102)$$

é invariante conforme a nível clássico, dadas as condições (3.98).

Alternativamente, pode-se verificar a invariância conforme a partir da variação infinitesimal da densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_0$,

$$\bar{\delta}\mathcal{L}_0 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\bar{\delta}\varphi - m^2\varphi\bar{\delta}\varphi - \frac{d}{d\varphi}V(\varphi)\bar{\delta}\varphi. \quad (3.103)$$

Dado que se trata de uma representação de spin 0, a transformação conforme (3.33) reduz-se a

$$\bar{\delta}\varphi = -\epsilon^\rho\partial_\rho\varphi - \frac{\Delta_\varphi}{d}(\partial\cdot\epsilon)\varphi. \quad (3.104)$$

Substituindo em (3.103), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\mathcal{L}_0 = \partial_\sigma \left[\epsilon^\sigma \mathcal{L}_0 + \left(\frac{d-2}{4} \eta^{\rho\sigma} \varphi^2 \right) \partial_\rho \sigma(x) \right] + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu - 2\sigma(x) \eta^{\mu\nu}) \\ - \sigma(x) \left[\frac{d}{2} m^2 \varphi^2 + \Delta_\varphi \left(\varphi \frac{d}{d\varphi} V(\varphi) - n V(\varphi) \right) \right] - \frac{d-2}{4} \varphi^2 \partial^2 \sigma(x). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Na situação em que a transformação (3.103) é dada sem contexto prévio, a expressão acima torna evidente as condições sob as quais a teoria escalar analisada possui simetria conforme:

1. O vetor ϵ_ρ deve satisfazer a equação de Killing conforme (2.17);
2. O campo escalar deve ser não massivo;
3. O potencial de autointeração deve corresponder a um monômio de grau $n = d/\Delta_\varphi$ em φ , em conformidade com (3.96).

3.2.2 Campo de *gauge* vetorial

Por simplicidade, consideremos a teoria de Maxwell, cuja ação é dada por

$$S_1[A] = \int d^d x \mathcal{L}_1(\partial_\mu A_\nu), \quad \mathcal{L}_1(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} \eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}, \quad (3.106)$$

onde $F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho$ é tensor de intensidade de campo.

Da variação da ação, seguem as equações de Maxwell não-homogêneas:

$$\partial_\rho F^{\rho\sigma} = 0. \quad (3.107)$$

Note que o termo cinético do campo de *gauge* vetorial é quadrático nas primeiras derivadas do campo A_μ . Por se tratar de uma estrutura análoga à do campo escalar, é esperado que a dimensão de escala do campo vetorial, denotada por Δ_A , seja igual a Δ_φ . De fato, sob uma transformação de escala, temos

$$F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \xrightarrow{\Omega} \Omega^{-2(\Delta_A+1)} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}. \quad (3.108)$$

Portanto, pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, o fator de escala do campo vetorial é

$$\Delta_A = \frac{d-2}{2}. \quad (3.109)$$

É importante evidenciar que, devido ao fator de escala global proveniente das dilatações, cada um dos termos que constituem a densidade Lagrangiana de uma teoria invariante por escala corresponde, individualmente, a uma função homogênea generalizada de grau $-d$.

Desse modo, supondo um termo de interação $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I(\varphi, \partial_\mu \varphi, A_\nu)$, a condição (3.60) fornece

$$\sum_{a=1}^3 \chi_a \Psi_a \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \Psi_a} = d \mathcal{L}_I, \quad (3.110)$$

onde $\Psi_a \in \{\varphi, \partial_\mu \varphi, A_\mu\}$ são as variáveis e $\chi_a \in \{\Delta_\varphi, \Delta_\varphi + 1, \Delta_A\}$ é denominado vetor peso.

Nos moldes de (3.96), as soluções mais simples e locais são polinômios de grau homogêneo d , onde cada monômio pode ser escrito, de forma esquemática, como¹⁸

$$\mathcal{L}_I = c \varphi^{n_\varphi} (\partial \varphi)^{n_{\partial \varphi}} (A)^{n_A}, \quad \sum_{a=1}^3 n_a \chi_a = d, \quad (3.111)$$

respeitando a covariância de Lorentz e a simetria de *gauge*. Aqui, c é uma constante de acoplamento apropriada e $n_a = (n_\varphi, n_{\partial \varphi}, n_A)$.

Dado que $\chi_1 = \Delta_\varphi$, $\chi_2 = \Delta_\varphi + 1$ e $\chi_3 = \Delta_A = \Delta_\varphi$, a condição de homogeneidade pode ser resolvida para d ,

$$(n_\varphi + n_{\partial \varphi} + n_A) \frac{d-2}{2} + n_{\partial \varphi} = d \iff -2(n_\varphi + n_A) = -d(n_\varphi + n_{\partial \varphi} + n_A - 2) \quad (3.112)$$

$$\implies d = 2 \frac{n_\varphi + n_A}{n_\varphi + n_{\partial \varphi} + n_A - 2}. \quad (3.113)$$

Considerando a Eletrodinâmica Escalar (SED), nota-se que os termos de interação que a compõem são invariantes sob transformações de escala em $d = 4$,

$$\mathcal{L}_I^{SED} = -ie(\partial_\mu \varphi^* \varphi - \varphi^* \partial_\mu \varphi) A^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi, \quad (3.114)$$

onde φ^* denota o conjugado complexo de φ , cujo fator de escala é também Δ_φ , e e simboliza a carga elétrica.

Para o primeiro termo, a contagem dimensional corresponde a $n_\varphi = 1$, $n_{\partial \varphi} = 1$ e $n_A = 1$, enquanto para o segundo termo tem-se $n_\varphi = 2$, $n_{\partial \varphi} = 0$ e $n_A = 2$. Em ambos os casos, a condição de homogeneidade é satisfeita em $d = 4$ e, portanto, não introduzem escalas na teoria,

¹⁸Deve-se ressaltar que os expoentes n_a são meramente indicativos da contagem dimensional, de modo que os fatores presentes em (3.111) não constituem estruturas independentes, mas organizam-se em combinações compatíveis com as simetrias fundamentais da teoria.

a nível clássico. Em decorrência disso, torna-se evidente que o modelo de Higgs abeliano não massivo é classicamente invariante sob dilatações.

Cabe ainda salientar que a teoria de Yang-Mills também possui simetria de escala em $d = 4$. Em comparação à teoria abeliana, surgem termos de autointeração quárticos, cuja estrutura é análoga à da interação quártica (3.96), bem como termos cúbicos, da forma $2\partial_{[\mu}A_{\nu]}A^\mu A^\nu$, que possui contagem dimensional análoga ao primeiro termo em (3.114).

A fim de verificar se, adicionalmente, a teoria de *gauge* vetorial é invariante conforme, consideremos a ação infinitesimal do grupo conforme (3.33), a qual, no caso vetorial (3.17), é reduzida a

$$\begin{aligned}\bar{\delta}A_\mu &= -\epsilon^\rho \partial_\rho A_\mu - \frac{i}{2} \partial_\rho \epsilon_\sigma (\Sigma^{\rho\sigma})^\nu{}_\mu A_\nu - \frac{\Delta_A}{d} (\partial \cdot \epsilon) A_\mu \\ &\stackrel{(2.17)}{=} -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \epsilon^\nu A_\nu - \frac{(\Delta_A - 1)}{d} (\partial \cdot \epsilon) A_\mu.\end{aligned}\quad (3.115)$$

É sabido que a implementação da transformação $\delta_\epsilon A_\mu = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \epsilon^\nu A_\nu$ conduz ao tensor de energia-momento canônico, não simétrico. No início do século XX, Bessel-Hagen (Bessel-Hagen, 1921) já havia notado que esse “problema” decorria do uso incompleto das simetrias da teoria de *gauge* vetorial, resultando em uma transformação *gauge*-dependente. A fim de manifestar a invariância de *gauge*, essa transformação deve ser suplementada por

$$\bar{\delta}_g A_\mu = \partial_\mu (\epsilon^\nu A_\nu). \quad (3.116)$$

Assim, a transformação (3.115) pode ser reescrita de forma *gauge*-covariante como

$$\bar{\delta}_F A_\mu = \epsilon^\nu F_{\mu\nu}, \quad (3.117)$$

de modo que a ação infinitesimal do grupo conforme assume o formato

$$\bar{\delta}A_\mu = \epsilon^\nu F_{\mu\nu} - \frac{d-4}{2d} (\partial \cdot \epsilon) A_\mu. \quad (3.118)$$

Portanto, ao invés de recorrer à melhoria de Belinfante–Rosenfeld, é possível diretamente obter o tensor de energia-momento simétrico $\theta_B^{\rho\sigma}$ a partir da transformação melhorada acima (Banados; Reyes, 2016).

Substituindo a transformação melhorada na expressão da corrente conservada em (3.41), obtém-se

$$\mathcal{J}^\mu = \epsilon_\nu \left(-F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) - (\partial \cdot \epsilon) \frac{d-4}{2d} F^{\mu\rho} A_\rho \quad (3.119)$$

Enquanto o termo entre parênteses é reconhecidamente $\theta_B^{\mu\nu}$, o segundo termo, em comparação a (3.87), corresponde à corrente do virial

$$V^\rho = -\frac{d-4}{2} F^{\rho\mu} A_\mu. \quad (3.120)$$

A expressão da corrente conservada (3.119), correspondente à transformação da teoria de *gauge* vetorial sob ação das isometrias conformes, não reproduz integralmente a corrente (3.87). Consequentemente, evidencia a impossibilidade de reescrever (3.120) em termos de uma função primitiva $L^{\rho\sigma}$ — isto é, $V^\rho \neq \partial_\sigma L^{\rho\sigma}$ —, o que impede a eliminação do traço por meio do termo de melhoria de CCJ.

Portanto, exceto em $d = 4$, a teoria de *gauge* vetorial não possui simetria conforme¹⁹. Assim como no exemplo do campo escalar, a corrente do virial nula é condição para que o campo transforme-se na representação correspondente do grupo de Lorentz, sob ação infinitesimal do grupo conforme. Desse ponto de vista, a corrente do virial é também denominada *conformal vector deficiency* (Srivastava, 1973), uma vez que sua presença impede que o campo transforme-se como um tensor de Lorentz.

Ademais, note que a observação acima sugere um padrão a respeito da invariância de um campo particular em dimensões específicas do espaço-tempo:

$$d = 2 \longrightarrow \varphi \quad (3.121)$$

$$d = 4 \longrightarrow A_\mu \quad (3.122)$$

$$d = 6 \longrightarrow ? \quad (3.123)$$

⋮

De fato, esse padrão é naturalmente compreendido no contexto de campos de p -formas, os quais são invariantes conformes em $d = 2p+2$ dimensões (Thierry-Mieg; Jarvis, 2025). Ou seja,

¹⁹Nesse caso, a expressão geral da corrente conservada (3.119) não contempla a corrente conforme. Consequentemente, o termo de borda Λ^μ não poderá ser associado a $L^{\rho\sigma}$, sendo nulo para as demais simetrias analisadas.

em $d = 6$, o campo de Kalb–Ramond $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ é invariante conforme e, conseqüentemente, a teoria de *gauge* usualmente associada também herda tal propriedade (Pons, 2011).

Em dimensões ímpares, mais especificamente em três dimensões, Jackiw e Pi (Jackiw; Pi, 2011) evidenciaram que a invariância conforme pode ser realizada por meio da dualidade de Hodge entre $F_{\mu\nu}$ e um campo escalar.

3.2.3 Campo de Dirac

Para o caso fermiônico de spin $1/2$, consideremos a ação

$$S_{1/2}[\psi] = \int d^d x \mathcal{L}_D(\psi, \partial_\mu \psi), \quad \mathcal{L}_D(\psi, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (3.124)$$

A respectiva equação de Euler–Lagrange corresponde à equação de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (3.125)$$

Diferentemente dos exemplos analisados previamente, a densidade Lagrangiana de Dirac $\mathcal{L}_D$ é linear nas derivadas do campo ψ e, portanto, seu fator de escala, denotado por Δ_ψ , não segue o padrão anteriormente observado. De fato, sob uma transformação de escala, temos

$$\partial_\mu \psi \xrightarrow{\Omega} \Omega^{-(\Delta_\psi+1)} \partial_\mu \psi. \quad (3.126)$$

Desse modo, assumindo que o adjunto de Dirac $\bar{\psi}$ transforma-se com o mesmo fator de escala que ψ , obtém-se

$$\Delta_\psi = \frac{d-1}{2}. \quad (3.127)$$

Ainda assim, a invariância de escala é garantida apenas no caso não massivo, uma vez que a equidimensionalidade entre os termos cinético e massivo não pode ser satisfeita sem a introdução de um parâmetro de massa.

No que diz respeito aos termos de interação possíveis, a análise se restringirá a interações férmion–férmion, escalar–férmion e vetor–férmion, segundo a dependência funcional $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I(\psi, \varphi, A_\mu)$. Assim, sob considerações análogas a (3.111), a análise dimensional adaptada para

os coeficientes n_ψ , n_φ e n_A resulta em

$$d = \frac{n_\psi + 2(n_\varphi + n_A)}{n_\psi + n_\varphi + n_A - 2}. \quad (3.128)$$

Alguns modelos pertinentes à discussão estão dispostos na tabela abaixo.

Modelo	Yukawa	tipo Yukawa	QED	Thirring	Gross–Neveu
$\mathcal{L}_I$	$\bar{\psi}\psi\varphi$	$\bar{\psi}\psi\varphi^2$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$	$(\bar{\psi}\psi)^2$
(n_ψ, n_φ, n_A)	(2, 1, 0)	(2, 2, 0)	(2, 0, 1)	(4, 0, 0)	(4, 0, 0)
d	4	3	4	2	2

Tabela 3.1: Classificação de interações segundo sua estrutura e dimensão crítica de invariância de escala.

Verificada a simetria de escala dos férmions de spin 1/2, investiguemos a possibilidade da invariância conforme completa.

Para férmions de Dirac, a transformação infinitesimal induzida pela ação das isometrias conformes é dada por

$$\delta\psi = -\epsilon^\rho\partial_\rho\psi + \frac{1}{8}\partial_\rho\epsilon_\sigma[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\psi - \frac{d-1}{2d}(\partial\cdot\epsilon)\psi. \quad (3.129)$$

Para obter o tensor de energia-momento correto (conservado), é preciso escrever a densidade Lagrangiana (3.124) na forma explicitamente hermitiana,

$$\mathcal{L}_{1/2} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.130)$$

Ao calcular o tensor de energia-momento canônica, percebe-se a ausência de simetria,

$$T_c^{\rho\sigma} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\rho\partial^\sigma\psi - \frac{i}{2}(\partial^\sigma\bar{\psi})\gamma^\rho\psi - \eta^{\rho\sigma}\mathcal{L}_{1/2}, \quad (3.131)$$

a qual pode ser restaurada por uma simetrização direta dos índices, isto é,

$$\theta_B^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(T_c^{\rho\sigma} + T_c^{\sigma\rho}) = \frac{i}{4} [\bar{\psi}\gamma^\rho\partial^\sigma\psi - (\partial^\sigma\bar{\psi})\gamma^\rho\psi + \bar{\psi}\gamma^\sigma\partial^\rho\psi - (\partial^\rho\bar{\psi})\gamma^\sigma\psi] - \eta^{\rho\sigma}\mathcal{L}_{1/2}. \quad (3.132)$$

Tomando o traço, obtém-se

$$\eta_{\rho\sigma}\theta_B^{\rho\sigma} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\rho\partial_\rho\psi - (\partial_\rho\bar{\psi})\gamma^\rho\psi] - d\mathcal{L}_{1/2} = -(d-1)\mathcal{L}_{1/2} + d m\bar{\psi}\psi. \quad (3.133)$$

Desse modo, quando $m = 0$, o traço do tensor de energia-momento simétrico é nulo *on-shell* e, portanto, a teoria de férmions não massivos é invariante conforme para qualquer $d \neq 0$. Alternativamente, tal afirmação pode ser inferida notando que $V^\rho = 0$.

A partir da tabela 3.1 e de resultados previamente discutidos, conclui-se que o modelo padrão não massivo é classicamente invariante por transformações de escala e, em particular, invariante conforme em $d = 4$.

Embora seja uma observação interessante, o modelo padrão é uma teoria quântica e, portanto, é necessário compreender a invariância conforme além do contexto clássico.

3.3 Simetria conforme no regime quântico

Até o presente momento, a simetria conforme foi analisada sob a perspectiva de teorias de campos clássicas. Em particular, verificou-se que tal simetria é caracterizada por um tensor de energia-momento que é: 1) conservado, 2) simétrico e 3) sem traço. Essa última propriedade decorre de um cenário no qual a simetria de escala é complementada por uma corrente do virial V^ρ expressa como um termo de divergência, $\partial_\sigma L^{\rho\sigma}$.

No entanto, a maior parte das teorias de campos físicas é melhor compreendida no âmbito quântico, sendo a segunda quantização essencial para a descrição consistente de fenômenos em escalas microscópicas.

Nesse contexto, novas estruturas emergem, em particular aquelas associadas aos procedimentos de regularização e renormalização, os quais introduzem uma dependência explícita em uma escala de energia. Como consequência, simetrias clássicas — especialmente a invariância de escala e, por extensão, a invariância conforme — podem ser quebradas a nível quântico.

De fato, na presença de interações, o tratamento perturbativo conduz a divergências Ultravioleta (UV) — manifestas por integrais divergentes —, sinalizando a necessidade de introdução de procedimentos sistemáticos que permitam a obtenção de previsões fisicamente sensíveis. Assim, a fim de restaurar a finitude dos resultados, foram desenvolvidas técnicas para lidar com tais divergências. Em um primeiro momento, por meio da regularização, insere-se um parâmetro auxiliar — o regulador — que delimita o regime de validade de um modelo físico e controla o comportamento das divergências. Em seguida, através da

renormalização, essas divergências são absorvidas por uma redefinição das quantidades físicas, tais como massa, cargas e outras constantes de acoplamento.

Como resultado, essas constantes passam a depender da escala de energia μ , exibindo comportamento dinâmico. Diz-se, então, que os acoplamentos “fluem” com a escala, caracterizando a quebra explícita da invariância de escala presente no regime clássico.

A ferramenta que permite descrever esse comportamento é o Grupo de Renormalização (GR), o qual organiza sistematicamente a dependência dos parâmetros da teoria com a escala de energia. Nesse formalismo, a evolução dos acoplamentos é governada pelas funções beta, definidas como

$$\beta_I(g) = \mu \frac{dg_I}{d\mu}, \quad (3.134)$$

as quais codificam o fluxo dos acoplamentos $g_I = g_I(\mu)$ no espaço de parâmetros.

O comportamento de uma TQC ao longo de diferentes escalas é classificada de acordo com o sinal da função beta.

1. $\beta(g) > 0$: o acoplamento torna-se mais forte à medida em que a energia aumenta.
2. $\beta(g) < 0$: o acoplamento torna-se mais fraco à medida em que a energia aumenta.
3. $\beta(g) = 0$: o acoplamento independe da escala.

Uma função beta positiva descreve um modelo no qual o acoplamento eventualmente diverge a uma energia finita, indicando o regime em que a teoria perde sua validade preditiva. Essa é uma característica presente na Eletrodinâmica Quântica (QED), onde ocorre um polo de Landau no regime UV.

Uma função beta negativa, por sua vez, corresponde a uma teoria assintoticamente livre. No caso da Cromodinâmica Quântica (QCD), esse comportamento está acompanhado do fenômeno de confinamento.

Por último, e o mais relevante para este trabalho, uma função beta nula corresponde a um ponto crítico, isto é, um ponto fixo $g(\mu) = g^*$ do GR é alcançado. Nesse regime, o acoplamento torna-se independente da escala e, portanto, a teoria é invariante sob dilatações (em muitos casos, acompanhada de invariância conforme)²⁰.

²⁰Geralmente, a presença de invariância de escala implica simetria conforme (Nakayama, 2015). Contudo, uma prova formal existe apenas no caso $d = 2$ (Zamolodchikov, 1986; Polchinski, 1988). No caso em que ocorre somente invariância por escala, observou-se que as trajetórias do GR são periódicas ou quase-periódicas (Fortin; Grinstein; Stergiou, 2012).

Por exemplo, as transições de fase de segunda ordem correspondem a pontos críticos do GR. Nesse regime, o comprimento de correlação — que caracteriza o tamanho de regiões correlacionadas — diverge, e as flutuações são observadas em todas as escalas²¹. Em particular, o limite crítico do modelo de Ising bidimensional (Ising, 1925) exibe simetria conforme.

Nesse sentido, é possível compreender as CFTs como regimes particulares de QFTs, caracterizados por um ajuste fino dos parâmetros para o qual as funções beta se anulam²², isto é,

$$\eta_{\mu\nu} \theta_{CCJ}^{\mu\nu} = \beta_I(g) \mathcal{O}^I(\phi) = 0. \quad (3.135)$$

Com esta seção, encerra-se a discussão acerca das simetrias conformes em espaço-tempo plano. No próximo capítulo, veremos como essa simetria pode ser adaptada à teoria de campos em espaços curvos.

²¹Outros exemplos de pontos fixos incluem teorias livres no regime UV e cenários de segurança assintótica.

²²Quando a invariância conforme é perdida no regime quântico, essa simetria é dita anômala. Em razão de (3.135), a perda da simetria conforme ao nível quântico é conhecida como anomalia do traço ou anomalia conforme.

Capítulo 4

Simetria de Weyl

No contexto de sistemas gravitacionais, nos quais a curvatura torna-se uma propriedade intrínseca na descrição do espaço-tempo, grupos de simetria globais — tais como o grupo de Poincaré e o grupo conforme — deixam de desempenhar papel preponderantes, passando a ocupar uma posição, de certo modo, marginal. Ao tornar a métrica dinâmica, isto é, ao promovê-la a um campo físico determinado por equações de movimento, o formalismo através do qual se descrevem os sistemas de interesse passa a configurar-se como independentes do fundo. Consequentemente, torna-se imprescindível adaptar o conceito de “invariância a menos de um fator de escala” a esse novo contexto, de modo a implementar a simetria conforme de maneira não trivial.

Assim, o objetivo deste capítulo é reorganizar as propriedades anteriormente discutidas acerca do grupo conforme em termos de uma transformação que reproduza resultados análogos aos obtidos para isometrias conformes no espaço-tempo de Minkowski. Com esse intuito, a primeira seção motivará a definição de uma transformação conforme da métrica — denominada transformação de Weyl —, esclarecendo como o papel das coordenadas pode ser transposto para a própria métrica do espaço-tempo. Em seguida, apresentaremos a relação entre as isometrias conformes e as transformações de Weyl, no contexto em que estas últimas constituem simetrias do sistema. Posteriormente, a equivalência entre as diferentes realizações da simetria conforme será analisada no âmbito da teoria escalar e da teoria de *gauge* vetorial, onde será mostrado que a implementação da simetria de Weyl recupera os resultados obtidos para o grupo conforme no limite plano. Por fim, essa “estrutura” conforme será brevemente discutida no contexto da teoria de *gauge* de Weyl.

4.1 Transformação conforme em espaços-tempos curvos

Anteriormente, vimos que o grupo conforme consiste, em geral, em um grupo finito de simetrias do espaço-tempo plano, composto por transformações globalmente definidas. Contudo, ao acoplarmos teorias físicas a uma métrica dinâmica, deixa de ser possível determinar um grupo de simetrias fixo em relação ao qual as leis físicas possam ser expressas covariantemente. Esse papel passa a ser desempenhado pelo grupo de difeomorfismos do espaço-tempo, um grupo de simetrias locais inespecíficas que sustenta uma forma de “neutralidade descritiva”, segundo a qual as leis físicas assumem a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas, princípio este conhecido como covariância geral.

Nesse contexto, as isometrias conformes analisadas deixam de possuir um papel privilegiado, pois, enquanto simetrias específicas do espaço-tempo de Minkowski, não determinam, em geral, configurações compatíveis com uma métrica arbitrária. Em outras palavras, na ausência de VKCs, o conceito de “invariância a menos de um fator de escala” não pode ser diretamente aplicado a uma métrica genérica. Consequentemente, tais transformações não possuem, em geral, caráter distintivo no conjunto das simetrias do sistema, constituindo apenas casos particulares de difeomorfismos.

Assim, dado que a métrica dinâmica define uma estrutura independente do fundo, a ação das isometrias conformes sobre as coordenadas passa a corresponder a uma redundância descritiva das leis físicas, na forma de simetrias locais — usualmente denominadas de simetrias de *gauge*. Desse modo, a definição de transformações conformes como transformações de coordenadas adquire um caráter essencialmente trivial, uma vez que a invariância sob difeomorfismo constitui uma propriedade fundamental de teoria de campos em espaços-tempos curvos.

Para ilustrar essa questão, consideremos uma transformação de coordenadas geral, possivelmente abrangendo as isometrias conformes:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}, \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)x^{\nu}, \quad (4.1)$$

$$x'^{\mu} = \exp(\lambda)x^{\mu}, \quad x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - x^2 b^{\mu}}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}. \quad (4.2)$$

Em geral, sob transformação de coordenadas, o elemento de linha $ds^2 = g_{\rho\sigma}(x)dx^\rho dx^\sigma$ transforma-se segundo

$$ds^2 \mapsto ds'^2 = g'_{\rho\sigma}(x')dx'^\rho dx'^\sigma = ds^2, \quad (4.3)$$

de modo que sua forma permanece inalterada. Portanto, quando interpretadas apenas do ponto de vista de transformações de coordenadas, tais transformações não produzem efeito físico não trivial.

Uma forma não trivial de implementar transformações conformes consiste em considerar transformações da métrica que não sejam induzidas por transformações de coordenadas, isto é, transformações ativas que alteram a escala da métrica por meio da qual se mede a distância entre pontos (Forger; Römer, 2004). Assim, torna-se possível descrever o mesmo efeito de uma dilatação das coordenadas através de uma transformação de escala da métrica.

Nesse sentido, define-se a transformação de Weyl como uma transformação da métrica, tal que

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad g^{\mu\nu}(x) \mapsto \Omega^{-2}(x)g^{\mu\nu}(x), \quad (4.4)$$

onde $\Omega(x)$ é uma função positiva das coordenadas do espaço-tempo, denominada fator de escala de Weyl ou, de forma abreviada, fator de Weyl.

A partir dessa definição, as isometrias conformes podem ser reinterpretadas como isometrias genuínas associadas à métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Consideremos uma transformação de coordenadas tal que $g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(x')$. As isometrias conformes de $g_{\mu\nu}(x)$ podem ser definidas como difeomorfismos cujo efeito sobre a métrica é compensado por uma transformação de Weyl apropriada, de modo que a combinação dessas transformações preserva a forma da métrica (Schellekens, 1995), isto é,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \mapsto \Omega^2(x') \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(x'). \quad (4.5)$$

Equivalentemente, pode-se afirmar que a última igualdade em (4.5) comunica o subconjunto das transformações de Weyl que podem ser induzidas por transformações de coordenadas. No caso do espaço-tempo de Minkowski, esse subconjunto é gerado pelas transformações conformes (4.1).

Nesse sentido, a ação infinitesimal das isometrias conformes nos campos ϕ_i decorre da combinação dessas transformações de coordenadas — sugestivamente referidas como difeomorfismos conformes — com uma transformação de Weyl apropriada.

De modo geral, define-se a transformação de Weyl dos campos de matéria ϕ_i como

$$\phi_i(x) \mapsto \Omega^{-w_\phi}(x)\phi_i(x), \quad (4.6)$$

onde w_ϕ é o peso de Weyl do campo.

A partir da lei de transformação do grupo conforme (3.38), infere-se que o peso de Weyl w_ϕ e a dimensão de escala correspondente Δ_ϕ estão relacionados por

$$w_\phi = \Delta_\phi - s_\phi, \quad (4.7)$$

onde $s_\phi = m - n$ corresponde ao número índices covariantes menos o número de índices contravariantes.

Na próxima seção, a fim de concretizar a equivalência entre transformações de Weyl e isometrias conformes, mostraremos que a simetria de Weyl reproduz a simetria conforme no limite plano.

4.2 Simetria de Weyl e simetria conforme

Nesta seção, será argumentado que a simetria de Weyl implica simetria conforme no espaço-tempo de Minkowski, segundo apresentado em (Osborn, 2019; Karananas; Monin, 2016)¹.

Para iniciar a discussão a respeito da relação entre simetria de Weyl e simetria conforme, consideremos uma parametrização alternativa do fator de Weyl,

$$\Omega(x) = \exp(\omega(x)). \quad (4.8)$$

Nessa parametrização, a métrica e os campos de matéria ϕ_i transformam-se, respectivamente, como

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \exp(2\omega(x))g_{\mu\nu}(x), \quad \phi_i(x) \mapsto \tilde{\phi}_i(x) = \exp(-w_i\omega(x))\phi_i(x), \quad (4.9)$$

¹Uma outra argumentação foi utilizada em (Faci, 2013), onde o autor demonstra que a restrição de teorias invariantes sob difeomorfismos e transformações de Weyl a espaços-tempos conformalmente planos é invariante sob ação do grupo $SO(2, d)$.

cuja forma infinitesimal é dada por

$$\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega(x)g_{\mu\nu}(x), \quad \delta_\omega \phi_i = -w_i \omega(x)\phi_i(x), \quad (4.10)$$

onde $\delta_\omega g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$ e $\delta_\omega \phi_i = \tilde{\phi}_i(x) - \phi_i(x)$.

Consideremos uma teoria de campos acoplada a uma métrica de fundo genérica $g_{\mu\nu}(x)$. A invariância sob difeomorfismos infinitesimais demanda que

$$\delta_d S[\phi, g] = \int d^d x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta_d \phi_i + \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_d g_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (4.11)$$

onde $\delta_d \phi_i$ denota a transformação infinitesimal dos campos de matéria sob difeomorfismos e $\delta_d g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \epsilon_\nu - \nabla_\nu \epsilon_\mu$ corresponde à transformação da métrica.

Adicionalmente, se as transformações de Weyl (4.10) constituem simetrias da ação $S[\phi, g]$, temos que

$$\begin{aligned} \delta_\omega S[\phi, g] &= \int d^d x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta_\omega \phi_i + \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_\omega g_{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^d x \omega(x) \left(-w_i \phi_i(x) \frac{\delta S}{\delta \phi_i} + 2g_{\mu\nu}(x) \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Supondo agora que a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ admite VKCs, a equação de Killing conforme (2.17) é satisfeita. Nesse caso, existem difeomorfismos conformes infinitesimais tais que

$$\delta_d g_{\mu\nu} = -2\sigma(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (4.13)$$

Tomando $\omega(x) = \sigma(x)$, a transformação de Weyl compensa exatamente a variação da métrica induzida pelo difeomorfismo conforme. Desse modo, a variação total da ação reduz-se a

$$\delta_\sigma S[\phi, g] = \int d^d x (\delta_d \phi_i - w_i \sigma(x)\phi_i(x)) \frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0. \quad (4.14)$$

Sendo o peso de Weyl e a dimensão de escala relacionados por (4.7), a expressão entre parênteses reproduz precisamente a transformação conforme infinitesimal dos campos ϕ_i , cf. (3.38), no limite em que a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ é reduzida à métrica plana, evidenciando a equivalência entre simetria de Weyl e simetria conforme nesse regime.

Cabe salientar que o argumentado utilizado para estabelecer a equivalência baseia-se na reinterpretação das isometrias conformes discutidas na seção anterior.

Diante dessa equivalência, a próxima seção será dedicada à exposição de algumas propriedades da simetria de Weyl.

4.3 Simetria de Weyl global e local

A partir daqui, é conveniente distinguir entre transformações de Weyl globais — restritas a fatores de escala constantes — e transformações locais, nas quais o fator de escala pode depender arbitrariamente das coordenadas.

Adicionalmente, vale recordar que o tensor de energia-momento para sistemas acoplados à gravidade² corresponde à resposta linear do sistema a pequenas perturbações locais da métrica, isto é,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[\phi, g]}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (4.15)$$

onde $\sqrt{-g}$ denota a raiz do valor absoluto do determinante da métrica.

É de conhecimento geral que a invariância sob difeomorfismos resulta na conservação covariante do tensor de energia momento:

$$\begin{aligned} \delta_d S[\phi, g] &= \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta_d \phi_i - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta_d g_{\mu\nu} \right) \\ &\stackrel{(3.42)}{=} \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} (\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu) \\ &= - \int d^d x \sqrt{-g} \epsilon_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

o que implica $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, uma vez que ϵ_ν é arbitrário.

Quanto à simetria de Weyl, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta_\omega S[\phi, g] &= \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta_\omega \phi_i - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta_\omega g_{\mu\nu} \right) \\ &\stackrel{(3.42)}{=} \int d^d x \sqrt{-g} \omega(x) g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aparentemente, tanto no caso global quanto no local, a invariância sob transformações de Weyl implica que o tensor de energia-momento tenha traço nulo. De fato, se $g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0$, a

²Também chamados de tensor de energia-momento métrico ou gravitacional, $T^{\mu\nu}$ reproduz, em geral, o tensor de energia-momento simetrizado no limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ (Fleming, 1994).

simetria independe do fator de escala ser constantes ou função das coordenadas. Contudo, a recíproca é válida apenas a menos de termos de borda.

Desse modo, analogamente ao caso das dilatações, a simetria sob transformações de Weyl globais constitui uma condição mais fraca, implicando que o traço do tensor de energia-momento seja um termo de divergência. Nesse regime, no qual o fator de Weyl é constante — isto é, $\omega(x) = \omega$ —, a simetria de Weyl não introduz novas restrições além daquelas já impostas pela invariância de escala.

Em particular, ao analisarmos a variação da ação de um campo de matéria ϕ_i sob tais transformações, nota-se que o fator de $\sqrt{-g}$ transforma-se analogamente ao elemento de volume,

$$\sqrt{-g} \mapsto \sqrt{-g \exp(2d\omega)} = \exp(d\omega) \sqrt{-g}. \quad (4.18)$$

Nesse sentido, ao investigar o termo cinético do campo escalar,

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi, \quad (4.19)$$

verifica-se que a métrica inversa compensa exatamente a contribuição dimensional das derivadas, de modo que o peso de Weyl do campo escalar coincide com sua dimensão de escala,

$$w_\varphi = \Delta_\varphi. \quad (4.20)$$

Em decorrência disso, o termo de potencial apresenta o mesmo comportamento sob transformações de Weyl globais que no caso da análise em espaço plano, cf. (3.96).

No caso do campo de *gauge* vetorial³ cujo termo cinético é dado por

$$-\frac{1}{4} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

cada métrica inversa contribui com peso -2 , resultando em uma contribuição total de -4 . Assim, a condição de homogeneidade implica

$$2(\omega_A + 2) = d \implies \omega_A = \frac{d-4}{2}, \quad (4.22)$$

³Note que as derivadas covariantes são forçadas a terem o mesmo peso de Weyl que as derivadas ordinárias. Podemos analisar verificar tal afirmação pela forma explícita da conexão de Levi-Civita, cf. (B.14), quanto pelo fato de termos que $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$. Em decorrência, os tensores de curvatura possuem peso de Weyl nulo.

isto é,

$$w_A = \Delta_A - 1, \quad (4.23)$$

em conformidade com a relação geral (4.7).

Essa análise pode ser generalizada para campos de p -formas: como o tensor de intensidade de campo envolve $p + 1$ índices, o termo cinético contém $p + 1$ métricas inversas, cada uma contribuindo com peso -2 , totalizando $-2(p + 1)$. Desse modo, a invariância de Weyl global é satisfeita em

$$d = 2(p + 1), \quad (4.24)$$

reproduzindo o padrão observado anteriormente para invariância conforme em espaço plano.

Portanto, no regime global, a simetria de Weyl não difere substancialmente da invariância de escala. Em contrapartida, ao promover essa simetria a uma simetria local, surgem obstruções não triviais. A dependência funcional do fator de Weyl introduz termos adicionais provenientes da ação das derivadas, os quais, em geral, quebram a invariância da ação.

No caso escalar, a transformação do termo cinético produz, a menos de derivadas totais,

$$\sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\varphi} \nabla_\nu \tilde{\varphi} \right) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{\omega_\varphi}{2} (\omega_{\mu\nu} + w_\varphi \omega_\mu \omega_\nu) \varphi^2 \right], \quad (4.25)$$

onde $\omega_{\mu_1 \dots \mu_n} = \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} \omega$.

A simetria local pode ser alcançada mediante a introdução de um campo compensador W_μ , definindo-se a derivada covariante de *gauge*

$$D_\mu \varphi = (\nabla_\mu - w_\varphi W_\mu) \varphi, \quad (4.26)$$

acompanhada pela transformação

$$W_\mu \mapsto W_\mu + \omega_\mu. \quad (4.27)$$

Segundo a prescrição de acoplamento mínimo (Utiyama, 1956), substitui-se ∇_μ por D_μ , de modo que novos termos de interação são gerados,

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{w_\varphi}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu W_\nu - w_\varphi W^2) \varphi^2. \quad (4.28)$$

Aqui, é importante resgatar uma propriedade fundamental a respeito do termo de melhoria de CCJ. Sua expressão apresenta estrutura análoga à decomposição em componentes irreduzíveis do tensor de Riemann, cf. (B.23). De fato, o termo de melhoria não apenas possui forma similar, como também satisfaz as propriedades algébricas (B.17), (B.18) e (B.19). Essa correspondência indica que sua origem pode ser interpretada como decorrente de um acoplamento à curvatura do espaço-tempo (Polchinski, 1988). Por outro lado, foi discutido anteriormente que a invariância sob transformações de Weyl locais implica que o tensor de energia-momento simétrico (4.15) possui traço nulo.

Assim, uma vez estabelecida a equivalência entre as diferentes manifestações da invariância conforme, torna-se plausível interpretar certas combinações dos termos envolvendo o campo compensador W_μ — segundo consta em (4.28) — na forma de um acoplamento específico com a curvatura.

Com efeito, de acordo com a transformação (B.32), identifica-se

$$-\frac{R}{2(d-1)} = g^{\mu\nu} \nabla_\mu W_\nu - w_\varphi W^2, \quad (4.29)$$

o que conduz à ação conforme escalar, caracterizada por um acoplamento não mínimo com o escalar de curvatura,

$$S_0[\varphi, g] = \int d^d x \sqrt{-g} \underbrace{\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{2} \xi R \varphi^2 - \frac{g_n}{n!} \varphi^n \right)}_{\mathcal{L}_0(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu \varphi)}, \quad \xi = \frac{d-2}{4(d-1)}. \quad (4.30)$$

Em particular, verifica-se que o tensor de energia-momento (4.15), na restrição para o espaço-tempo de Minkowski, reproduz o tensor $\theta_{CCJ}^{\rho\sigma}$, cf. (3.102),

$$T^{\mu\nu} \stackrel{(B.26)}{=} \nabla^\mu \varphi \nabla^\nu \varphi + \xi \left(R^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla^\mu \nabla^\nu \right) \varphi^2 - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_0(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (4.31)$$

Esse resultado evidencia a origem geométrica do termo de melhoria.

Segundo Iorio e colaboradores (Iorio *et al.*, 1997), o *Ricci gauging* — denominação atribuída à compensação da contribuição não homogênea do termo cinético por meio de acoplamentos com a curvatura — é possível sempre que a ação, invariante sob transformações de Weyl locais, apresente simetria conforme quando restrita ao limite plano e sob a condição de desacoplamento $W_\mu \rightarrow 0$.

Desse modo, infere-se que transformações de Weyl locais não constituem, em geral, simetrias da ação do campo de *gauge* vetorial, exceto no caso $d = 4$. Na prática, o termo cinético transforma-se segundo

$$g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \mapsto g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \left[F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + 2w_A F_{\mu\nu} A_\rho \omega_\sigma + 2w_A^2 (A_\mu \omega_\nu - A_\nu \omega_\mu) A_\rho \omega_\sigma \right]. \quad (4.32)$$

Constata-se que o termo linear em ω_μ coincide com a corrente do virial, o que impede o fator de Weyl de ser fatorado. Por conseguinte, não é possível reinterpretar geometricamente a transformação como proveniente de um acoplamento à curvatura⁴

Por fim, a análise acima sugere que a introdução do campo compensador possui implicações de ordem estruturante, cujos desdobramentos serão discutidos a seguir.

4.4 Teoria de *gauge* de Weyl

Na seção anterior, vimos que nem toda teoria admite a possibilidade de substituir o campo compensador W_μ por um acoplamento adequado com a curvatura. Portanto, esse campo vetorial não pode ser visto apenas como um artifício técnico para restaurar a invariância local, mas como a manifestação de uma estrutura de *gauge* associada às transformações de Weyl. De fato, a transformação da conexão de Levi-Civita,

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \mapsto \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + g^{\lambda\rho} (g_{\mu\sigma} \omega_\nu + g_{\nu\sigma} \omega_\mu - g_{\mu\nu} \omega_\sigma), \quad (4.33)$$

juntamente à transformação (4.27) motiva a introdução de uma conexão alternativa, ainda simétrica, dada por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - g^{\rho\sigma} (g_{\mu\sigma} W_\nu + g_{\nu\sigma} W_\mu - g_{\mu\nu} W_\sigma), \quad (4.34)$$

cuja forma é invariante sob o emprego simultâneo de uma transformação de Weyl local e a transformação de *gauge* (4.27).

Tal característica aponta para uma estrutura geométrica subjacente, distinta da geometria pseudo-riemanniana a qual estamos acostumados. Efetivamente, define-se a derivada

⁴Como o acoplamento de férmions à gravidade requer um ferramental específico, esse caso foge ao escopo do trabalho. Ainda assim, a invariância de Weyl para férmions pode ser encontrada em (Shapiro, 2022; Forger; Römer, 2004).

covariante $\tilde{\nabla}_\mu$, da qual resulta a condição de compatibilidade

$$\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} g_{\rho\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} g_{\mu\rho} + 2g_{\mu\nu} W_\alpha, \quad (4.35)$$

isto é,

$$\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu} W_\alpha. \quad (4.36)$$

Portanto, a estrutura geométrica fundamentada na dupla transformação envolvendo a métrica $g_{\mu\nu}$ e o campo de *gauge* W_μ ,

$$g_{\mu\nu} \mapsto \exp(2\omega(x))g_{\mu\nu}, \quad W_\mu \mapsto W_\mu + \partial_\mu \omega, \quad (4.37)$$

é compatível com uma forma particular de não-metricidade, denominada condição de compatibilidade de Weyl.

Em 1918, Weyl concebeu essa nova geometria — hoje denominada geometria de Weyl — na tentativa de unificar geometricamente fenômenos eletromagnéticos e gravitacionais (Weyl, 1918). Em particular, ao identificar o campo de Weyl W_μ com o potencial eletromagnético, o matemático alemão foi o responsável por enfatizar o papel da invariância de *gauge* como princípio construtivo do qual o eletromagnetismo pode ser obtido.

Na prática, além da mudança de direção por transporte paralelo em razão da curvatura comunicada por $g_{\mu\nu}$, o vetor de Weyl controla a variação do comprimento de vetores, cuja intensidade é determinada pelo tensor de curvatura

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu. \quad (4.38)$$

Para ilustrar, consideremos um vetor de componentes contravariantes v^ρ e comprimento $L = \sqrt{g_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma}$. Ao transportar um vetor paralelamente ao longo da curva $x^\nu(\tau)$, a mudança infinitesimal de suas componentes é dada segundo

$$dv^\rho = -\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho v^\mu dx^\nu. \quad (4.39)$$

Em decorrência do transporte paralelo, o seu comprimento é alterado de acordo com

$$dL^2 = (\partial_\alpha g_{\mu\nu})dx^\alpha - 2g_{\rho\sigma}v^\rho dv^\sigma \stackrel{(4.39)}{=} (\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu})v^\mu v^\nu dx^\alpha \stackrel{(4.36)}{=} 2L^2 W_\alpha dx^\alpha. \quad (4.40)$$

Considerando integração sobre uma curva fechada, obtém-se

$$L = L_0 \exp \left(\oint W_\alpha dx^\alpha \right), \quad (4.41)$$

onde L_0 denota o comprimento inicial.

Para Weyl, a ausência de integrabilidade da magnitude de um vetor seria tão esperada quanto a ausência de integrabilidade de sua direção (O’Raifeartaigh; Straumann, 2000). Essas características, de acordo com o próprio, revelam a essência de uma geometria verdadeiramente infinitesimal: comparações de comprimentos têm significância local somente. De modo geral, Weyl advogava pela independência, não somente da escolha de sistemas de coordenadas — como apresenta a RG —, mas também da arbitrariedade das unidades de medida (Weyl, 1919a).

Contudo, ao tornar o comprimento não-integrável, o comportamento de relógios dependeria de suas trajetórias no espaço-tempo. Desse modo, linhas espectrais de frequência definida não seriam viáveis nessa geometria, o que constitui uma contradição empírica flagrante, como Einstein prontamente observou⁵.

Assim, embora Weyl não tenha obtido sucesso na sua tentativa de unificação puramente geométrica da gravitação e do eletromagnetismo a partir da identificação do campo de *gauge* W_μ com o potencial eletromagnético, as ideias de Weyl foram imprescindíveis para o avanço da física teórica. Em particular, parte dessa herança se encontra nas teorias escalares-tensoriais (Scholz, 2018).

Notadamente, a condição necessária e suficiente para que um vetor tenha seu comprimento original L_0 preservado é que $W_{\mu\nu} = 0$. Consequentemente, podemos realizar o campo de Weyl W_μ como uma forma exata, isto é,

$$W_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (4.42)$$

onde ϕ é um campo escalar.

Nesse contexto, o espaço da geometria de Weyl é dito integrável e torna-se equivalente a um espaço pseudo-riemanniano (Fulton; Rohrlich; Witten, 1962b).

Um dos expoentes das teorias escalares-tensoriais é a teoria de Jordan–Brans–Dickie (JBD) (Jordan, 1955; Brans; Dicke, 1961), cuja estrutura subjacente pode ser compreendida do ponto de vista de uma geometria de Weyl integrável.

⁵Detalhes históricos mais apurados acerca das críticas enfrentadas por Weyl podem ser encontradas em (De Bianchi; Kiefer *et al.*, 2020).

É válido ressaltar que a teoria de JBD resgatou a perspectiva de Weyl a respeito das transformações conformes. Em particular, Dickie interpretava as transformações de Weyl locais como um redimensionamento arbitrariamente dependente da posição de quantidades físicas, justificada pela arbitrariedade da escolha de unidades localmente (Dicke, 1962). Essa simetria, portanto, denota uma segunda forma na qual as leis físicas são invariantes.

Nesse cenário, existe a liberdade de escolher um *gauge*, isto é, uma escala, de modo que a Relatividade Geral é recuperada. Com esse intuito, basta selecionar $\phi = -\omega$, para obter⁶

$$\partial_\mu \phi \mapsto \partial_\mu \phi + \partial_\mu \omega = 0. \quad (4.43)$$

Sob essa escolha, a condição de não-metricidade (4.36) torna-se riemanniana e a métrica é determinada a menos de um fator de Weyl. Consequentemente, a conexão (4.33) é recuperada.

A partir dessa interpretação “passiva” da transformação de Weyl, é possível compreender a quebra da simetria conforme pela presença de parâmetros massivos ou, no geral, dimensionais, de forma alternativa. Ao passo que na interpretação “ativa” constantes dimensionais constituem uma escala fenomenológica absoluta (fixa) — em contraste com a reconfiguração dinâmica de estruturas materiais —, na interpretação “passiva” alteram-se as unidades de medida e, portanto, compreende-se que essas constantes também têm sua escala modificada⁷. Sob essa ótica, a massa de uma partícula elementar, por exemplo, é redimensionada⁸ sob transformação de escala, de modo que a densidade Lagrangiana da teoria torna-se invariante. Na geometria de Weyl, em particular, como a invariância conforme⁹ é um de seus princípios, torna-se evidente que não somente as geodésicas nulas são invariantes sob transformações de Weyl como também são as geodésicas de partículas massivas (Fulton; Rohrlich; Witten, 1962b).

Discutidos os aspectos mais estruturantes, é preciso escolher invariantes para construir uma teoria dinâmica associada à geometria de Weyl. Contudo, formular uma teoria geométrica nesse espaço pode ser uma tarefa um tanto quanto extenuante, uma vez que sua dimensionalidade é um fator crucial para determinar se um invariante escalar é também

⁶Essa escolha é denominada referencial de Riemann ou referencial de Einstein, como é comumente referido na literatura da teoria de JBD.

⁷Embora matematicamente equivalentes, admitem interpretações físicas potencialmente incompatíveis.

⁸Nesse contexto, as únicas constantes verdadeiramente invariantes são razões adimensionais de constantes físicas dimensionais, tal como a constante de estrutura fina, uma vez que seu valor independe do sistema de unidades adotado.

⁹Usada no sentido amplo do termo.

invariante conforme, sendo que quanto maior a dimensão mais possibilidades surgem. Desse modo, somente o caso $d = 4$ será comentado e, em exclusividade, o setor gravitacional.

Em quatro dimensões, os invariantes de curvatura mais simples são termos quadráticos:

$$\sqrt{-g}\tilde{R}^2, \quad \sqrt{-g}\tilde{R}_{\rho\sigma}\tilde{R}^{\rho\sigma}, \quad \sqrt{-g}\tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu}\tilde{R}^{\rho\sigma\mu\nu}, \quad (4.44)$$

onde $\tilde{R}$, $\tilde{R}_{\rho\sigma}$ e $\tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu}$ são, respectivamente, o escalar de curvatura, o tensor de Ricci e o tensor de Riemann no espaço de Weyl. Juntos, constituem a gravitação quadrática de Weyl.

Outro importante invariante de curvatura quadrático é o quadrado do tensor de Weyl,

$$\sqrt{-g}\tilde{C}_{\rho\sigma\mu\nu}\tilde{C}^{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (4.45)$$

Esse termo é especialmente relevante, pois torna possível construir uma teoria gravitacional invariante conforme diretamente na geometria riemanniana. Nesse caso, recebe o nome de gravitação conforme (Mannheim, 2012), cuja ação é dada por

$$S_w[g] = \int d^4x \sqrt{-g} C_{\rho\sigma\mu\nu} C^{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (4.46)$$

Como uma teoria de *gauge* associada ao grupo das transformações locais $g_{\mu\nu}(x) \mapsto \exp\{2\omega(x)\}g_{\mu\nu}(x)$, a ação da gravitação conforme constitui um análogo gravitacional da ação de Maxwell $S_1[A]$.

Assim, a teoria de Weyl evidencia que a invariância conforme pode ser compreendida de forma unificada em teorias de campos, tanto em espaço-tempo plano quanto curvo, bem como em teorias gravitacionais.

Com isso, encerra-se a análise das diferentes realizações da simetria conforme, desde sua formulação clássica até sua incorporação em estruturas geométricas mais gerais.

Capítulo 5

Comentários finais

Neste trabalho, a simetria conforme foi amplamente explorada no âmbito da teoria clássica de campos. Em particular, a análise foi estruturada de modo a permitir que o leitor acompanhasse a construção da invariância conforme desde sua concepção matemática, passando pela representação do grupo conforme, até sua aplicação em teoria de campos. Ademais, no último capítulo, buscou-se estabelecer de forma clara a relação entre as isometrias conformes e as transformações de Weyl, evidenciando que estas constituem uma extensão natural das transformações conformes para espaços-tempos curvos.

Contudo, este estudo está longe de esgotar as possibilidades associadas às transformações conformes. Em duas dimensões, o alto grau de simetria conforme do plano é amplamente explorado na obtenção de soluções em problemas de eletrostática e escoamento de fluidos ideais (Olver, 2017). Ademais, na mecânica clássica, as transformações conformes podem ser empregadas para mapear órbitas em um potencial linear em seções cônicas, conectando o oscilador harmônico bidimensional ao problema de Kepler em duas dimensões — uma forma de dualidade desenvolvida por K. Bohlin em 1911 e redescoberta em diversas ocasiões (Grandati; Berard; Mohrbach, 2008; Saggio, 2013). Por uma ampla margem, a gravitação — juntamente à cosmologia — constitui a área da física em que as transformações conformes são mais empregadas (Kroon, 2017), não apenas em quantidade, mas também em diversidade de aplicações:

1. Na análise das relações causais entre pontos do espaço-tempo por meio de diagramas de Penrose (Penrose, 1963);
2. No mapeamento entre diferentes teorias gravitacionais (Faraoni; Gunzig; Nardone, 1998; Shapiro; Takata, 1995);
3. No estudo da estrutura assintótica do espaço-tempo (Geroch, 1977);

4. Na correspondência AdS/CFT (Aharony *et al.*, 2000) e outras realizações do princípio holográfico, como a holografia celestial (Raclariu, 2021).

Desse modo, torna-se evidente que essas transformações ainda reservam uma ampla gama de possibilidades, conectando diferentes domínios da física teórica — desde sistemas clássicos até teorias quânticas e gravitacionais — sob a égide de um mesmo princípio de invariância. Entre os diversos encaminhamentos possíveis, destacam-se o estudo das teorias de campos conformes (CFTs) (Francesco; Mathieu; Sénéchal, 2012) e da gravitação conforme de Weyl (Wheeler, J. T., 2013), ambos constituindo direções naturais para a continuidade desta investigação.

Referências bibliográficas

Aharony, O. *et al.* Large N field theories, string theory and gravity. **Physics Reports**, Elsevier, v. 323, n. 3-4, p. 183–386, 2000.

Alfaro, V. de; Fubini, S.; Furlan, G. Conformal invariance in quantum mechanics. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, Springer, v. 34, n. 4, p. 569–612, 1976.

Andersen, C.; Von Baeyer, H. C. Scaling and the virial theorem in mechanics and action-at-a-distance electrodynamics. **American Journal of Physics**, AIP Publishing, v. 39, n. 8, p. 914–919, 1971.

Andrzejewski, K. Quantum conformal mechanics emerging from unitary representations of $SL(2, \mathbb{R})$. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 367, p. 227–250, 2016.

Anosov, D. V.; Arnold, V. I.; Anosov, D. **Dynamical systems I: ordinary differential equations and smooth dynamical systems**. [S. l.]: Springer, 1988.

Banados, M.; Reyes, I. A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 25, n. 10, p. 1630021, 2016.

Barut, A.; Haugen, R. B. Theory of the conformally invariant mass. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 519–541, 1972.

Bassalo, J. M. F.; Cattani, M. S. D. Teoria de Grupos para Físicos. **Publicação IF E-BOOK**, v. 1661, 2011.

Bateman, H. The transformation of the electrodynamical equations. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 223–264, 1910.

Belavin, A. A.; Polyakov, A. M.; Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 241, n. 2, p. 333–380, 1984.

Belavin, A. A.; Polyakov, A. M.; Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 34, n. 5, p. 763–774, 1984.

Belinfante, F. J. On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. **Physica**, Elsevier, v. 7, n. 5, p. 449–474, 1940.

- Bessel-Hagen, E. Über die erhaltungssätze der elektrodynamik. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 84, n. 3, p. 258–276, 1921.
- Bishop, R. L.; Goldberg, S. I. **Tensor analysis on manifolds**. [S. l.]: Courier Corporation, 2012.
- Blair, D. E. **Inversion theory and conformal mapping**. [S. l.]: American Mathematical Soc., 2000. v. 9.
- Blumenhagen, R.; Plauschinn, E. **Introduction to conformal field theory: with applications to String theory**. [S. l.]: Springer, 2009.
- Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. **Elementary differential equations and boundary value problems**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- Brans, C.; Dicke, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. **Physical review**, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961.
- Callan Jr, C. G.; Coleman, S.; Jackiw, R. A new improved energy-momentum tensor. **Annals of physics**, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 42–73, 1970.
- Campos Delgado, R. On the equivalence of two definitions of conformal primary fields in $d > 2$ dimensions. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 137, n. 9, p. 1–12, 2022.
- Carroll, S. M. **Spacetime and geometry**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2019.
- Castro, C.; Pavšič, M. Clifford algebra of spacetime and the conformal group. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 42, n. 8, p. 1693–1705, 2003.
- Codirla, C.; Osborn, H. Conformal invariance and electrodynamics: applications and general formalism. **annals of physics**, Elsevier, v. 260, n. 1, p. 91–116, 1997.
- Coleman, S.; Jackiw, R. Why dilatation generators do not generate dilatations. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 67, n. 2, p. 552–598, 1971.
- Coleman, S.; Mandula, J. All possible symmetries of the S matrix. **Physical Review**, APS, v. 159, n. 5, p. 1251, 1967.
- Cunningham, E. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 77–98, 1910.
- Daudé, T.; Häfner, D.; Nicolas, J.-P. **Asymptotic Analysis in General Relativity**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2018. v. 443.
- De Bianchi, S.; Kiefer, C. *et al.* **One Hundred Years of Gauge Theory**. [S. l.]: Springer, 2020. v. 199.

- Dicke, R. H. Mach's principle and invariance under transformation of units. **Physical review**, APS, v. 125, n. 6, p. 2163, 1962.
- Dotsenko, V. S.; Fateev, V. A. Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 240, n. 3, p. 312–348, 1984.
- Dubovik, V. M. Application of scale invariance to elementary particle physics. **Soviet Physics Uspekhi**, v. 16, n. 2, p. 275–278, 1973.
- Emanuello, J. A.; Nolder, C. A. Projective compactification of $R^{1,1}$ and its Möbius geometry. **Complex Analysis and Operator Theory**, Springer, v. 9, n. 2, p. 329–354, 2015.
- Faci, S. Conformal invariance: from Weyl to $SO(2, d)$. **Europhysics Letters**, EDP Sciences, IOP Publishing e Società Italiana di Fisica, v. 101, n. 3, p. 31002, 2013.
- Faraoni, V.; Gunzig, E.; Nardone, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. **arXiv preprint gr-qc/9811047**, 1998.
- Fecko, M. **Differential geometry and Lie groups for physicists**. [S. l.]: Cambridge university press, 2006.
- Fleming, H. O Tensor de Momento-Energia Métrico, e Canônico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 16, 1994.
- Forger, M.; Römer, H. Currents and the energy-momentum tensor in classical field theory: a fresh look at an old problem. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 306–389, 2004.
- Fortin, J.-F.; Grinstein, B.; Stergiou, A. Scale without conformal invariance: theoretical foundations. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2012, n. 7, p. 25, 2012.
- Francesco, P.; Mathieu, P.; Sénéchal, D. **Conformal field theory**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- Frankel, T. **The geometry of physics: an introduction**. [S. l.]: Cambridge university press, 2004.
- Franosch, T. Fundamental problems in Statistical Physics XIV: Lecture on Correlation and response functions in statistical physics. **arXiv preprint arXiv:2603.29481**, 2026.
- Fulton, T.; Rohrlich, F.; Witten, L. Physical consequences of a co-ordinate transformation to a uniformly accelerating frame. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 26, n. 4, p. 652–671, 1962.
- Fulton, T.; Rohrlich, F.; Witten, L. Conformal invariance in physics. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 34, n. 3, p. 442, 1962.
- Galeriu, C. Special conformal transformations in electrodynamics: mathematical foundations. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 47, e20240396, 2025.

Geroch, R. Asymptotic structure of space-time. *In: ASYMPTOTIC structure of space-time.* [S. l.]: Springer, 1977. p. 1–105.

Gillioz, M. **Conformal field theory for particle physicists.** [S. l.]: Springer, 2023.

Gilmore, R. **Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists.** [S. l.]: Cambridge University Press, 2008.

Ginsparg, P. Applied conformal field theory. **arXiv preprint hep-th/9108028**, 1988.

Grandati, Y.; Berard, A.; Mohrbach, H. Bohlin-Arnold-Vassiliev's duality and conserved quantities. **arXiv preprint arXiv:0803.2610**, 2008.

Haman, P. **Classical anomalies.** 2022. Diss. (Mestrado) – Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.

Hankey, A.; Stanley, H. E. Systematic application of generalized homogeneous functions to static scaling, dynamic scaling, and universality. **Physical Review B**, APS, v. 6, n. 9, p. 3515, 1972.

Herzog, C. P. Conformal field theory with boundaries and defects. **Lectures at the Lezioni Avanzate di Campi E Stringhe (LACES), Arcetri, Italy**, v. 29, 2021.

Iorio, A.; O’Raifeartaigh, L.; Sachs, I.; Wiesendanger, C. Weyl gauging and conformal invariance. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 495, n. 1-2, p. 433–450, 1997.

Ising, E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 31, n. 1, p. 253–258, 1925.

Jackiw, R.; Pi, S. -. Tutorial on Scale and Conformal Symmetries in Diverse Dimensions. **J. Phys. A**, v. 44, p. 223001, 2011.

Jackiw, R. Introducing scale symmetry. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 25, n. 1, p. 23–27, 1972.

Jackiw, R. Weyl symmetry and the Liouville theory. **Theoretical and mathematical physics**, Springer, v. 148, n. 1, p. 941–947, 2006.

Jordan, P. Schwerkraft und weltall: Grundlagen der theoretischen kosmologie. **Die Wissenschaft**, Vieweg, 1955.

Karananas, G. K.; Monin, A. Weyl vs. conformal. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 757, p. 257–260, 2016.

Kastrup, H. On the advancements of conformal transformations and their associated symmetries in geometry and theoretical physics. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 520, n. 9-10, p. 631–690, 2008.

Kastrup, H. A. Zur physikalischen Deutung und darstellungstheoretischen Analyse der konformen Transformationen von Raum und Zeit. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 464, n. 7-8, p. 388–428, 1962.

Kleban, P. Virial theorem and scale transformations. **American Journal of Physics**, AIP Publishing, v. 47, n. 10, p. 883–886, 1979.

Kroon, J. A. V. **Conformal methods in general relativity**. [S. l.]: Cambridge university press, 2017.

Landau, L.; Lifshitz, E.; Sykes, J. **Mechanics: Volume 1**. [S. l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. (Course of theoretical physics). ISBN 9780750628969.

Lemos, N. A. **Mecânica analítica**. [S. l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

Liniado, J. Two Dimensional Conformal Field Theory and a Primer to Chiral Algebras. **arXiv preprint arXiv:2110.15164**, 2021.

Liouville, J. Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique. **Note VI**, p. 609–617, 1850.

Mack, G.; Salam, A. Finite-component field representations of the conformal group. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 53, n. 1, p. 174–202, 1969.

Mannheim, P. D. Making the case for conformal gravity. **Foundations of Physics**, Springer, v. 42, n. 3, p. 388–420, 2012.

McLeod, R. J. A Brief Review Noether's Theorems and their Application to General Relativity. **arXiv preprint arXiv:2106.04393**, 2021.

Mukherjee, S. **Embedding Space Construction of Conformal Field Theory From First Principles**. [S. l.: s. n.], 2026.

Nakahara, M. **Geometry, topology and physics**. [S. l.]: CRC Press, 2018.

Nakayama, Y. Scale invariance vs conformal invariance. **Physics Reports**, Elsevier, v. 569, p. 1–93, 2015.

Noether, E. Invariante variationsprobleme. In: GESAMMELTE abhandlungen-collected papers. [S. l.]: Springer, 1983. p. 231–239.

O'Raifeartaigh, L.; Straumann, N. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 72, n. 1, p. 1, 2000.

Olver, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 1993. v. 107.

Olver, P. J. Complex analysis and conformal mapping. **University of Minnesota**, v. 806, 2017.

Osborn, H. **Lectures on conformal field theories**. [S. l.]: University of Cambridge, Cambridge, UK, 2019.

Penrose, R. Asymptotic properties of fields and space-times. **Physical Review Letters**, APS, v. 10, n. 2, p. 66, 1963.

Penrose, R. Relativistic symmetry groups. *In*: GROUP Theory in Non-Linear Problems: Lectures Presented at the NATO Advanced Study Institute on Mathematical Physics, held in Istanbul, Turkey, August 7–18, 1972. [S. l.]: Springer, 1974. p. 1–58.

Plybon, B. F. Observations on the Bessel-Hagen conservation laws for electromagnetic fields. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 42, n. 11, p. 998–1001, 1974.

Polchinski, J. Scale and conformal invariance in quantum field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 303, n. 2, p. 226–236, 1988.

Polyakov, A. M. Quantum geometry of bosonic strings. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 103, n. 3, p. 207–210, 1981.

Pons, J. M. Noether symmetries, energy–momentum tensors, and conformal invariance in classical field theory. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 52, n. 1, 2011.

Qualls, J. D. Lectures on conformal field theory. **arXiv preprint arXiv:1511.04074**, 2015.

Raclariu, A.-M. Lectures on celestial holography. **arXiv preprint arXiv:2107.02075**, 2021.

Renteln, P. **Manifolds, tensors, and forms: an introduction for mathematicians and physicists**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2013.

Rosen, G. Conformal invariance of Maxwell's equations. **American Journal of Physics**, AIP Publishing, v. 40, n. 7, p. 1023–1027, 1972.

Rosen, J. The conformal group and causality. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 468–480, 1968.

Rosenfeld, L. On the energy-momentum tensor. **Mem. Acad. Royal Belg**, v. 18, n6, 1940.

Rychkov, S. **EPFL lectures on conformal field theory in D 3 dimensions**. [S. l.]: Springer, 2017. v. 10.

Saggio, M. L. Bohlin transformation: the hidden symmetry that connects Hooke to Newton. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 34, n. 1, p. 129–137, 2013.

Santos, W. C. dos. Notes on the Weyl tensor, decomposition of Riemann tensor, Ruse-Lanczos identity and duality of the curvature tensor. **Zenodo**. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3814369>, 2020.

Schellekens, A. Conformal field theory. **Lecture Notes. NIKHEF% E/95**, 1995.

Scholz, E. The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20th-century physics. *In: BEYOND Einstein: Perspectives on geometry, gravitation, and cosmology in the twentieth century*. [S. l.]: Springer, 2018. p. 261–360.

Schottenloher, M. **A mathematical introduction to conformal field theory: Based on a series of lectures given at the Mathematisches Institut der Universitaet Hamburg**. [S. l.]: Springer, 1997.

Schur, I. Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, v. 406, 1905.

Schutz, B. F. **Geometrical methods of mathematical physics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 1980.

Shapiro, I. L. Covariant derivative of fermions and all that. **Universe**, MDPI, v. 8, n. 11, p. 586, 2022.

Shapiro, I. L.; Takata, H. Conformal transformation in gravity. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 361, n. 1-4, p. 31–37, 1995.

Simmons-Duffin, D. The conformal bootstrap. *In: NEW Frontiers in Fields and Strings: TASI 2015 Proceedings of the 2015 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*. [S. l.]: World Scientific, 2017. p. 1–74.

Srivastava, P. P. Conformal symmetry in Lagrangian field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 64, p. 499–510, 1973.

Stephani, H. *et al.* **Exact solutions of Einstein's field equations**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2009.

Strominger, A. **Lectures on the infrared structure of gravity and gauge theory**. [S. l.]: Princeton University Press, 2018.

Sundermeyer, K. **Symmetries in fundamental physics**. [S. l.]: Springer, 2014. v. 176.

Tantau, T. **The TikZ and PGF Packages: Manual for version 3.1.11**. Lübeck, Germany, 2026. Disponível em: <https://ctan.org/pkg/pgf>.

Thierry-Mieg, J.; Jarvis, P. Conformal invariance of antisymmetric tensor field theories in any even dimension. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 58, n. 5, p. 055402, 2025.

Utiyama, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. **Physical Review**, APS, v. 101, n. 5, p. 1597, 1956.

Wald, R. M. **General relativity**. [S. l.]: University of Chicago Press, 2010.

Weinberg, S. Six-dimensional methods for four-dimensional conformal field theories. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 82, n. 4, p. 045031, 2010.

Weinberg, S. **The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2013.

Wess, J. The conformal invariance in quantum field theory. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 18, n. 6, p. 1086–1107, 1960.

Weyl, H. A new extension of the theory of relativity. **Ann. Physik**, v. 364, p. 101–133, 1919.

Weyl, H. Eine neue erweiterung der relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 364, n. 10, p. 101–133, 1919.

Weyl, H. Gravitation und elektrizität. *In*: DAS Relativitätsprinzip: Eine Sammlung von Abhandlungen. [S. l.]: Springer, 1918. p. 147–159.

Wheeler, J. T. Weyl gravity as general relativity. **arXiv preprint arXiv:1310.0526**, 2013.

Wheeler, N. **Electrodynamics**. [S. l.]: Reed College Physics Department, 2002. Disponível em: <https://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/>.

Wigner, E. P. On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group. **Annals Math.**, v. 40, p. 149–204, 1939.

Wood, W.; Papini, G.; Cai, Y. Conformal transformations and maximal acceleration. **Il Nuovo Cimento B (1971-1996)**, Springer, v. 104, n. 6, p. 653–663, 1989.

Zamolodchikov, A. B. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. **JETP lett**, v. 43, n. 12, p. 730–732, 1986.

Apêndice A

Análise tensorial

A.1 Espaço vetorial e espaço dual

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ é um conjunto de objetos (vetores) que podem ser combinados através de adição e multiplicados por escalares reais, obedecendo a um conjunto de axiomas bem definidos, como consta em (Nakahara, 2018). Assim, dado um espaço vetorial V d -dimensional e vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ pertencentes a V , temos

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \beta\mathbf{u} \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \quad (\text{A.1})$$

Uma base $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, d$) de um espaço vetorial é um conjunto de d vetores linearmente independentes que gera todo $\mathbf{v} \in V$. Dessa forma, podemos escrever qualquer $\mathbf{v}$ como a combinação linear $\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i$. Em outras palavras, $\mathbf{v}$ é unicamente determinado por suas componentes v^i . Apesar de $\mathbf{v}$ em si ser um objeto geométrico invariante, uma vez que existem infinitas bases geradores de V , muitas vezes é conveniente definir vetores a partir de sua lei de transformações sob mudança de coordenadas¹:

$$v^{i'} = \Lambda^{i'}_i v^i, \quad \hat{\mathbf{e}}_{i'} = \Lambda^i_{i'} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.2})$$

onde $\Lambda^{i'}_i$ são as componentes da matriz de transformação de coordenadas e $\Lambda^i_{i'}$ são as componentes de sua inversa.

Associado a todo espaço vetorial de dimensão finita existe um outro espaço vetorial de mesma dimensão chamado de espaço dual, denotado por V^* , que consiste dos funcionais lineares $\omega \in V^* : V \rightarrow \mathbb{F}$. Os vetores duais, como são chamados os elementos de V^* , podem

¹A notação i' , presente em (Carroll, 2019), será usada especificamente neste apêndice, a fim denotar uma mudança de bases. A notação usual para transformações de coordenadas será reservada ao contexto de variedades diferenciáveis.

ser expressados a partir de uma combinação linear de uma base dual $\hat{\theta}^i$ como $\omega = \omega_i \hat{\theta}^i$. A base dual é tal que $\hat{\theta}^i(\hat{\mathbf{e}}_j) = \delta_j^i$. Uma consequência direta dessa propriedade é a ação de vetores duais sobre vetores, a qual é dada por

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega_i v^j \hat{\theta}^i(\hat{\mathbf{e}}_j) = \omega_i v^j \delta_j^i = \omega_i v^i \in \mathbb{F}. \quad (\text{A.3})$$

Perceba que devido à comutatividade do resultado, também é possível definir vetores como aplicações lineares do tipo $\mathbf{v} \in V : V^* \rightarrow \mathbb{F}$, o que reflete a dualidade entre esses dois espaços. Portanto, nesse contexto, podemos visualizar V como $(V^*)^*$, o dual do dual de V .

Também, como objetos geométricos invariantes, é conveniente definir os vetores duais com base em leis de transformação:

$$\omega_{i'} = \Lambda_{i'}^i \omega_i, \quad \hat{\theta}^{i'} = \Lambda^{i'}_i \hat{\theta}^i. \quad (\text{A.4})$$

Note que a operação realizada entre os objetos geométricos em si é refletida na disposição do índice das componentes. Por conta disso, é comum nos referirmos às componentes de um certo vetor como o objeto matemático em si.

A.2 Tensores

Tensores são uma extensão natural dos conceitos abordados anteriormente. Um tensor de tipo (r, s) , para r e s inteiros não negativos, é definido como uma aplicação multilinear que toma como argumento r vetores duais e s vetores (Schutz, 1980) segundo a aplicação T ,

$$T : V^* \underbrace{\times \cdots \times}_{(r-1 \text{ vezes})} V^* \times V \underbrace{\times \cdots \times}_{(s-1 \text{ vezes})} V \rightarrow \mathbb{F}. \quad (\text{A.5})$$

Em particular, escalares são tensores de tipo $(0, 0)$, vetores são tensores de tipo $(1, 0)$ e vetores duais, tensores de tipo $(0, 1)$. Por serem lineares em cada um de seus argumentos, esses objetos são também chamados de aplicações multilineares.

O espaço de todos os tensores de tipo (r, s) forma o espaço vetorial dos tensores de ordem $r + s$. Para construirmos uma base para esse espaço, definamos uma nova operação chamada

de produto tensorial, denotado pelo símbolo $\otimes$. Assim, uma base deste espaço é da forma

$$\hat{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{i_r} \otimes \hat{\theta}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{j_s}. \quad (\text{A.6})$$

No caso em que V é um espaço vetorial d -dimensional, o espaço tensorial dos tensores de ordem $r + s$ terá dimensão d^{r+s} . Um tensor arbitrário desse espaço é escrito como

$$T = T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \hat{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{i_r} \otimes \hat{\theta}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{j_s}. \quad (\text{A.7})$$

Tendo em vista que $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = T(\hat{\theta}^{i_1}, \dots, \hat{\theta}^{i_r}, \hat{\mathbf{e}}_{j_1}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{j_s})$, pode-se mostrar que a lei de transformação de um tensor arbitrário de tipo (r, s) é uma composição das transformações vistas:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s} = \Lambda^{i'_1}_{i_1} \cdots \Lambda^{i'_r}_{i_r} \Lambda^{j_1}_{j'_1} \cdots \Lambda^{j_s}_{j'_s} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}. \quad (\text{A.8})$$

Em essência, o produto tensorial é utilizado para construirmos tensores de ordem superior: dado um tensor de tipo (r, s) e um outro tensor de tipo (p, q) , o produto tensorial entre eles resulta num tensor de tipo $(r + p, s + q)$. Sob este produto, define-se a álgebra tensorial², uma álgebra associativa, distributiva sobre a soma e, em geral, não comutativa.

²Discussões mais detalhadas podem ser encontradas em (Bishop; Goldberg, 2012; Renteln, 2013).

Apêndice B

Variedades pseudo-Riemannianas

B.1 Campos tensoriais

Na física, o espaço-tempo é modelado por uma variedade real $\mathcal{M}$, a qual se assemelha localmente ao espaço de Minkowski. Desse modo, trata-se de uma estrutura dotada, ponto a ponto, de um espaço vetorial $V = T_p\mathcal{M}$, denominado espaço tangente à variedade no ponto p . Sendo $\{x^\mu\}$ um sistema de coordenadas locais, o espaço tangente admite uma base coordenada $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. De forma análoga, seja $T_p^*\mathcal{M}$ o espaço dual a $T_p\mathcal{M}$ associado ao ponto p — também chamado de espaço cotangente — uma base coordenada correspondente é dada em termos das diferenciais dx^μ , as quais satisfazem a relação de dualidade $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Portanto, a partir da união desses espaços tangentes (e cotangentes), podemos definirmos campos tensoriais sobre uma variedade diferenciável.

Nesse contexto, a métrica codifica uma escolha local de produto interno, isto é, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ corresponde, em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, a uma forma bilinear simétrica e não degenerada,

$$\mathbf{g} : \begin{cases} T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \longmapsto g_{\mu\nu}v^\mu u^\nu. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

De forma equivalente, a métrica induz

$$\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_p^*\mathcal{M}, \quad (\text{B.2})$$

cujo efeito em componentes é $v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu$, em virtude de (A.3). Desse modo, estabelece-se, por intermédio de v_μ , um isomorfismo canônico entre elementos do espaço tangente, $\mathbf{v} = v^\mu \partial_\mu$, e elementos do espaço cotangente, $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. As componentes v^μ são denominadas contravariantes, ao passo que v_μ são covariantes.

Sendo (B.2) um isomorfismo, sua inversa é igualmente bem definida por meio da métrica inversa $g^{\mu\nu}$,

$$g^{-1} : T_p^* \mathcal{M} \longrightarrow T_p \mathcal{M}, \quad v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu. \quad (\text{B.3})$$

Por conta do caráter qualitativo de g e g^{-1} , (B.2) e (B.3) são identificadas, respectivamente, como operações de abaixamento e elevação de índices. Tais operações podem ser respectivamente estendidas a tensores de ordem superior,

$$(r, s) \longmapsto (r - 1, s + 1), \quad \text{e} \quad (p, q) \longmapsto (p + 1, q - 1), \quad (\text{B.4})$$

para r e q inteiros positivos e não-nulos. Os mapeamentos associados a (B.4) correspondem, respectivamente, ao abaixamento de um índice contravariante com g e ao levantamento de um índice covariante com g^{-1} .

Seja $\{x'^\mu\}$ um sistema de coordenadas arbitrário, localmente equivalente a $\{x^\mu\}$, e seja $f = \{f^\mu\}$ uma aplicação suave bijetiva, com inversa suave, tal que

$$f : x \longrightarrow x' = f(x). \quad (\text{B.5})$$

Embora f seja, em geral, uma aplicação não linear, as matrizes jacobianas J^μ_{ν} fornecem a melhor aproximação linear da transformação de coordenadas (B.5). Assim, localmente, a matriz de mudança de coordenadas é dada por

$$J^\mu_{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{B.6})$$

Desse modo, dado que as componentes da métrica transformam-se segundo

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.7})$$

a transformação de coordenadas $x^\mu \longmapsto x'^\nu$ induz os índices contravariantes e covariantes a se transformarem, respectivamente, segundo

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \quad \text{e} \quad v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu, \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (J^{-1})^\nu_{\mu}. \quad (\text{B.8})$$

Nota-se, então, que os vetores de base ∂_μ transformam-se covariantemente, isto é, seguem a mesma lei de transformação dos vetores covariantes v_μ . Por outro lado, as diferenciais dx^μ transformam-se contravariantemente, segundo v^μ .

De todo modo, em uma variedade diferenciável geral, a derivada parcial não define um operador tensorial intrínseco, pois a quantidade obtida depende do sistema de coordenadas adotado e não se transforma tensorialmente sob mudanças gerais de coordenadas. Consequentemente, ela não define um mapa bem definido entre tensores de tipo (r, s) e $(r, s + 1)$. De fato, a quantidade $\partial_\mu v^\nu$ não se transforma como um tensor de tipo $(1, 1)$:

$$\partial'_\mu v'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\alpha v^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} v^\beta. \quad (\text{B.9})$$

Para compensar o termo não-tensorial, introduz-se um objeto denominado **conexão** afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, o qual codifica a variação da base coordenada ao longo da variedade. Desse modo, a conexão satisfaz uma lei de transformação não-homogênea, dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (\text{B.10})$$

A partir desse objeto, define-se um operador diferencial ∇_μ denominado **derivada covariante**, o qual constitui um operador geométrico bem definido sobre campos tensoriais. Por exemplo, para tensores de tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$, definem-se

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho, \quad \nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho. \quad (\text{B.11})$$

As quantidades acima transformam-se, respectivamente, como tensores de tipo $(1, 1)$ e $(0, 2)$. Para tensores de ordem 0, isto é, campos escalares, a derivada covariante coincide com a derivada parcial, de modo que $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$.

B.2 Tensores de curvatura

Dado que $\mathcal{M}$ é dotada de uma estrutura métrica, uma escolha particular de conexão afim é a conexão de Levi-Civita, a única que, simultaneamente,

1. preserva a métrica, isto é,

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} g_{\rho\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} g_{\mu\rho} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Condição conhecida como compatibilidade métrica ou metricidade;

2. e não apresenta torção,

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} := \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Consequentemente, a conexão de Levi-Civita é simétrica nos índices inferiores.

Portanto, sob as condições citadas, a conexão de Levi-Civita é exclusivamente determinada pela métrica, e suas componentes na base coordenada correspondem aos símbolos de Christoffel:

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{B.14})$$

Um das questões centrais ao se estudar um espaço-tempo curvo é caracterizar sua curvatura de maneira intrínseca. Para tanto, define-se um objeto geométrico denominado tensor de curvatura de Riemann cujo significado está associado à não comutatividade da derivada covariante. Em particular,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (\text{B.15})$$

em contraste com o caso plano, no qual $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

O tensor de curvatura pode ser expresso em termos dos símbolos de conexão como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Para explicitar suas propriedades de simetria, utilizaremos a forma completamente covariante do tensor de Riemann, $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$.

Suas propriedades algébricas são:

1. Antissimétrico no primeiro par de índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}; \quad (\text{B.17})$$

2. Antissimétrico no segundo par de índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}; \quad (\text{B.18})$$

3. Simétrico por permutação entre o primeiro par de índices e o segundo:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.19})$$

Em adição, o tensor de Riemann obedece às seguintes identidades:

1. Primeira identidade de Bianchi (algébrica):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0. \quad (\text{B.20})$$

2. Segunda identidade de Bianchi (diferencial):

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] = 0. \quad (\text{B.21})$$

Em função das propriedades algébricas (B.17)–(B.20), o número de componentes independentes do tensor de curvatura de Riemann em d dimensões é

$$\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1). \quad (\text{B.22})$$

Outro aspecto fundamental do tensor de Riemann é sua decomposição em componentes irredutíveis (Santos, 2020). Em geral, ele pode ser escrito como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{d-2} (g_{\sigma\nu}R_{\rho\mu} + g_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu}R_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}R_{\sigma\mu}) + \frac{R}{(d-2)(d-1)} (g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}). \quad (\text{B.23})$$

Os tensores

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} = R_{\nu\mu} \quad \text{e} \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.24})$$

denominados, respectivamente, tensor de Ricci e escalar de curvatura, codificam toda a informação relativa aos traços do tensor de Riemann. Como $R_{\mu\nu}$ é simétrico, ele possui $\frac{1}{2}d(d+1)$ componentes independentes. Os graus de liberdade restantes estão associado à

componente de traço nulo do tensor de curvatura, o tensor de Weyl $C_{\rho\sigma\mu\nu}$, o qual satisfaz as mesmas propriedades algébricas do tensor de Riemann.

B.3 Transformações

Nesta seção, encontram-se listadas algumas transformações da conexão de Levi-Civita e dos tensores de curvatura.

- Variações infinitesimais:

1. Símbolos de Christoffel

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_{\mu}h_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}h_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}h_{\mu\nu}); \quad (\text{B.25})$$

2. Escalar de curvatura

$$\delta R = \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}h, \quad h = g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}. \quad (\text{B.26})$$

- Transformações de Weyl:

1. Métrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \exp(2\omega(x))g_{\mu\nu}(x); \quad (\text{B.27})$$

2. Conexão de Levi-Civita

$$\widetilde{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho}\omega_{\nu} + g_{\nu\rho}\omega_{\mu} - g_{\mu\nu}\omega_{\rho}); \quad (\text{B.28})$$

3. Tensor de curvatura de Riemann

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} - \omega_{\beta\alpha}[\delta^{\alpha}_{\sigma}(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}) + (\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\mu})g^{\rho\beta}] \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} & + \omega_{\alpha}\omega_{\beta}[\delta^{\alpha}_{\mu}(\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\beta}_{\sigma} - \delta^{\rho}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\nu}) + (\delta^{\alpha}_{\nu}g_{\sigma\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu}g_{\sigma\nu})g^{\rho\beta}] \\ & - \omega_{\alpha}\omega_{\beta}g^{\alpha\beta}(\delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu\sigma} - \delta^{\rho}_{\nu}g_{\mu\sigma}); \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

4. Tensor de curvatura de Ricci

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma} - (d-2)(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\mu}\omega_{\nu} + g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\omega_{\rho}\omega_{\sigma}); \quad (\text{B.31})$$

5. Escalar de curvatura

$$\tilde{R} = \exp(-2\omega) \left(R - (d-1)g^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - (d-1)(d-2)g^{\mu\nu}\omega_{\mu}\omega_{\nu} \right); \quad (\text{B.32})$$

6. Tensor de curvatura de Weyl

$$C^{\rho}_{\sigma\mu\nu} \mapsto \tilde{C}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}. \quad (\text{B.33})$$

Apêndice C

Simetrias variacionais

C.1 Problema variacional de Noether

Consideremos uma densidade Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$, dependente de campos de Lorentz ϕ_i e de suas primeiras derivadas. A integral dessa função sobre $\mathcal{M}$ define o funcional de ação

$$S[\phi_i] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} d^d x. \quad (\text{C.1})$$

Sob transformações arbitrárias da forma

$$x \longrightarrow x' = f(x), \quad \phi_i \longrightarrow \phi'_i(x') = \Psi(\phi, x), \quad (\text{C.2})$$

cuja versão infinitesimal é dada por

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \delta \phi_i(\phi, x), \quad (\text{C.3})$$

a ação (C.1) transforma-se como

$$S \rightarrow S' = \int_{\mathcal{M}'} \mathcal{L}(\phi'_i, \partial'_\mu \phi'_i(x')) d^d x', \quad d^d x' = d^d x \left| \det \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right) \right|. \quad (\text{C.4})$$

Infinitesimalmente, a lei de transformação do elemento de volume assume a forma

$$d^d x' = d^d x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \implies \delta(d^d x) := d^d x' - d^d x = (\partial_\mu \delta x^\mu) d^d x. \quad (\text{C.5})$$

Por sua vez, a variação da densidade Lagrangiana é dada, em primeira ordem, por

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} + \delta \phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} + \delta(\partial_\mu \phi_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \quad (\text{C.6})$$

onde

$$\delta \mathcal{L} := \mathcal{L}(\phi'_i, \partial'_\mu \phi'_i(x')) - \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (\text{C.7})$$

Define-se, então, a primeira variação da ação, $\delta S := S' - S$, que pode ser escrita como

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^d x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \delta(d^d x) = \int_{\mathcal{M}} (\delta \mathcal{L} - \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}) d^d x + \int_{\mathcal{M}} \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) d^d x. \quad (\text{C.8})$$

Essa expressão pode ser reorganizada de modo a motivar a introdução da variação de forma

$$\bar{\delta} := \delta - \delta x^\mu \partial_\mu. \quad (\text{C.9})$$

A variação $\bar{\delta}$, por definir uma variação a coordenadas fixas, comuta com o operador derivada parcial, enquanto a variação total não o faz. Em particular,

$$\partial'_\mu \phi'_i(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\rho \phi'_i(x') \implies [\delta, \partial_\mu] \phi_i = -(\partial_\mu \delta x^\rho) \partial_\rho \phi_i, \quad (\text{C.10})$$

ao passo que, manipulando adequadamente o termo induzido pela variação das coordenadas,

$$[\bar{\delta}, \partial_\mu] \phi_i = 0. \quad (\text{C.11})$$

Retornando à expressão (C.8), e utilizando $\bar{\delta} \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} - \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, obtém-se

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \bar{\delta} \phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} + \bar{\delta}(\partial_\mu \phi_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}. \quad (\text{C.12})$$

Integrando por partes, segue

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \bar{\delta} \phi_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right), \quad (\text{C.13})$$

onde definimos a expressão de Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right). \quad (\text{C.14})$$

Substituindo na variação da ação, obtemos

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \bar{\delta} \phi_i \right) d^d x + \int_{\mathcal{M}} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d^d x \quad (\text{C.15})$$

A expressão acima pode ser equivalentemente escrita como

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \bar{\delta} \phi_i \right) d^d x + \int_{\mathcal{M}} \partial_\mu \left(T_{c_v}^\mu \delta x^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right) d^d x \quad (\text{C.16})$$

onde $T_{c_v}^\mu$ denota o tensor de energia-momento canônico,

$$T_{c_v}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_v^\mu \mathcal{L}. \quad (\text{C.17})$$

Conclui-se, a partir de (C.15), que se a densidade Lagrangiana for invariante em forma, isto é, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, então S e S' conduzem ao mesmo conjunto de soluções físicas (a menos de termos superficiais) (McLeod, 2021). De forma análoga, pode-se dizer que ambas as ações produzem as mesmas equações de Euler–Lagrange, ainda que decorram de descrições Lagrangianas distintas, porém equivalentes.

Assim, embora as ações abranjam a mesma teoria física na região de *bulk*, há uma liberdade na escolha de condições de contorno, de modo que

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \partial_\mu \Lambda^\mu d^d x, \quad (\text{C.18})$$

onde Λ^μ é uma função linear arbitrária das variações $\delta \phi_i$, codificando o comportamento dos campos na fronteira da região que delimita o domínio de validade da solução.

Dessa forma, o problema variacional de Noether, em sua formulação mais geral, pode ser escrito como

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \bar{\delta} \phi_i = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (\text{C.19})$$

onde definimos

$$\mathcal{J}^\mu := - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i - \mathcal{L} \delta x^\mu + \Lambda^\mu. \quad (\text{C.20})$$

Alternativamente, o mesmo problema variacional pode ser formulado exclusivamente em termos de transformações dos campos, deixando as coordenadas inalteradas. Ou seja, simetrias

variacionais podem ser enquadradas como variações de forma $\bar{\delta}\phi_i$, tais que

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \bar{\delta}\phi_i(x). \quad (\text{C.21})$$

Nesse sentido, em virtude de (C.8) e (C.18), observa-se que

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \partial_\mu (\Lambda^\mu - \mathcal{L}\delta x^\mu). \quad (\text{C.22})$$

Assim, o termo de borda associado à variação da ação a coordenadas fixas $\bar{\delta}$ é

$$\bar{\delta}S = \int_{\mathcal{M}} \partial_\mu \bar{\Lambda}^\mu d^d x, \quad \bar{\Lambda}^\mu := \Lambda^\mu - \mathcal{L}\delta x^\mu. \quad (\text{C.23})$$

Logo, o problema variacional de Noether pode ser equivalentemente reelaborado como

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \bar{\delta}\phi_i = \partial_\mu \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \bar{\delta}\phi_i + \bar{\Lambda}^\mu \right). \quad (\text{C.24})$$

Nesse formato, torna-se evidente que a contribuição associada à transformação de coordenadas é inteiramente absorvida na redefinição do termo de derivada total, sendo automaticamente recuperada ao se avaliar a variação da ação sob (C.21), conforme expresso em (C.23).

Desse modo, o princípio variacional é formulado integralmente em termos de variações de forma, uma vez que as coordenadas do espaço-tempo podem ser tratadas como variáveis passivas (ou mudas), assumindo papel descritivo secundário. Essa reformulação é particularmente vantajosa por tornar transformações gerais de coordenadas e transformações internas, tais como transformações de *gauge*, descritivamente compatíveis.

O contato entre as duas formulações é estabelecido pela decomposição

$$\bar{\delta}\phi_i = (\phi'_i(x') - \phi_i(x)) - (\phi'_i(x') - \phi'_i(x)) = \delta\phi_i(x) - \delta_\epsilon\phi_i(x), \quad (\text{C.25})$$

onde o primeiro termo é a variação total, denotada por $\delta\phi_i(x)$, e o segundo termo corresponde à variação dos campos induzida por transformações de coordenadas, $\delta_\epsilon\phi_i$. Enquanto a variação total está atrelada às leis de transformação tensoriais, a variação induzida por uma transformação de coordenadas arbitrária ϵ^μ pode ser explicitamente fixada ao considerarmos uma expansão em primeira ordem em série de Taylor em torno de x^μ , isto

é,

$$\phi'_i(x + \epsilon) = \phi'_i(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi'_i(x), \quad (\text{C.26})$$

Retendo apenas termos lineares em ϵ^μ , obtém-se $\delta_\epsilon \phi_i(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_i(x)$. Assim, o mesmo resultado de (C.9) é recuperado,

$$\delta_0 \phi_i = \delta \phi_i(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_i(x). \quad (\text{C.27})$$

C.2 Simetrias globais e o primeiro teorema de Noether

O primeiro teorema de Noether (Noether, 1983) afirma que a invariância da ação sob um grupo de transformações contínuas associadas a N parâmetros constantes independentes ϵ^A ($A = 1, 2, \dots, N$),

$$\delta x^\mu = \epsilon^A \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial \epsilon^A}, \quad \delta \phi_i = \epsilon^A \frac{\partial(\delta \phi_i)}{\partial \epsilon^A}, \quad (\text{C.28})$$

implica a existência de N correntes de Noether, que são conservadas *on-shell*.

Como anteriormente, pode-se reescrever (C.28) como uma única variação a coordenadas fixas,

$$\bar{\delta} \phi_i = \epsilon^A \left(\frac{\partial(\delta \phi_i)}{\partial \epsilon^A} - \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial \epsilon^A} \partial_\mu \phi_i \right) = \epsilon^A \frac{\partial(\bar{\delta} \phi_i)}{\partial \epsilon^A} \quad (\text{C.29})$$

Substituindo (C.28) e (C.29) em (C.19), obtemos

$$\epsilon^A \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\partial(\bar{\delta} \phi_i)}{\partial \epsilon^A} = \epsilon^A \partial_\mu \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial(\bar{\delta} \phi_i)}{\partial \epsilon^A} + \frac{\partial \bar{\Lambda}^\mu}{\partial \epsilon^A} \right). \quad (\text{C.30})$$

Uma vez que os parâmetros ϵ^A são constantes e arbitrários, a expressão acima fornece N leis de conservação independentes válidas *on-shell*, na forma de equações de continuidade,

$$\partial_\mu j_A^\mu = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = 0, \quad (\text{C.31})$$

onde as correntes de Noether j_A^μ são definidas como

$$j_A^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial(\bar{\delta} \phi_i)}{\partial \epsilon^A} + \frac{\partial \bar{\Lambda}^\mu}{\partial \epsilon^A}. \quad (\text{C.32})$$

Assim, associadas às simetrias globais geradas por ϵ^A , o primeiro teorema de Noether garante a existência de N correntes conservadas. Em geral, ao se tratar de simetrias globais, o termo Λ_A^μ não contribui para a corrente.

Ao integrar a equação (C.31) sobre uma hipersuperfície espacial $(d-1)$ -dimensional Σ de tempo constante, obtém-se¹ *on-shell*,

$$\int_{\Sigma} \partial_\mu j_A^\mu d^{d-1}\mathbf{x} = \int_{\Sigma} \partial_0 j_A^0 d^{d-1}\mathbf{x} + \int_{\Sigma} \partial_i j_A^i d^{d-1}\mathbf{x} = \partial_0 \int_{\Sigma} j_A^0 d^{d-1}\mathbf{x} + \int_{\partial\Sigma} j_A^i dS_i = 0. \quad (\text{C.33})$$

Sob condições de contorno apropriadas sobre os campos em $\partial\Sigma$, conduz a cargas conservadas, também conhecidas como cargas de Noether:

$$Q_A := \int_{\Sigma} j_A^0 d^{d-1}\mathbf{x}, \quad \partial_0 Q_A = 0. \quad (\text{C.34})$$

C.3 Formalismo Hamiltoniano

Na representação Hamiltoniana (Lemos, 2007), definem-se os parênteses de Poisson de dois funcionais locais dos campos ϕ_i e os respectivos momentos canonicamente conjugados π^i como²

$$\{F, G\} := \int_{\Sigma} d^{d-1}\mathbf{z} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_i(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta G}{\delta \pi^i(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta G}{\delta \phi_i(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta F}{\delta \pi^i(\mathbf{z}, t)} \right), \quad \pi^i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)}. \quad (\text{C.35})$$

Da definição acima seguem os parênteses fundamentais não nulos (a tempo constante),

$$\{ \phi_i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t) \} = \delta_i^j \delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = - \{ \pi^j(\mathbf{y}, t), \phi_i(\mathbf{x}, t) \}. \quad (\text{C.36})$$

A delta de Dirac $\delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ satisfaz

$$\delta_i^j \delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\delta \phi_i(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi_j(\mathbf{y}, t)} = \frac{\delta \pi^j(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi^i(\mathbf{y}, t)} \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma} f(\mathbf{x}, t) \delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^{d-1}\mathbf{x} = f(\mathbf{y}, t), \quad (\text{C.37})$$

onde $f(\mathbf{x}, t)$ é uma função-teste arbitrária.

¹As coordenadas em negrito denotam uma parametrização de Σ .

²Deve-se ler F como $F[\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi^i(\mathbf{x}, t)](t)$.

Ao requerer um princípio variacional bem definido³ e utilizando-se das propriedades (C.37), obtêm-se as equações de Hamilton,

$$\partial_0 \phi_i = \{ \phi_i, H \}, \quad \partial_0 \pi^i = \{ \pi^i, H \}. \quad (\text{C.39})$$

Desse modo, a evolução temporal de um funcional F no espaço de fase pode ser escrita em termos de parênteses de Poisson segundo⁴

$$\{ F, H \} + \frac{\partial F}{\partial t} = \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_i(\mathbf{z}, t)} (\partial_0 \phi_i) + \frac{\delta F}{\delta \pi^i(\mathbf{z}, t)} (\partial_0 \pi^i) \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (\text{C.41})$$

Ou seja, a conservação temporal da carga de Noether equivale a

$$\{ Q_A, H \} + \frac{\partial Q_A}{\partial t} = 0, \quad Q_A = \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{x} \left(\pi^i \frac{\partial(\bar{\delta} \phi_i)}{\partial \epsilon^A} - \frac{\partial \bar{\Lambda}^0}{\partial \epsilon^A} \right). \quad (\text{C.42})$$

C.4 Teorema recíproco de Noether e álgebra das cargas

Sob os parênteses de Poisson, podemos concretizar a carga de Noether como geradora das simetrias globais (C.29) (Sundermeyer, 2014).

Partindo da expressão de conservação da carga de Noether (C.33), podemos reescrevê-la como

$$\partial_0 (Q_A \epsilon^A) = \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \partial_{\mu} \left(\bar{\delta} \phi_i \frac{\partial}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} ((\partial_0 \phi_i) \pi^i - \mathcal{H}) - \bar{\Lambda}^{\mu} \right). \quad (\text{C.43})$$

³Sob condições de contorno apropriadas, a variação da Hamiltoniana adquire o formato

$$\delta H = \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{x} \left(\frac{\delta H}{\delta \phi_i(\mathbf{x}, t)} \bar{\delta} \phi_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta H}{\delta \pi^i(\mathbf{x}, t)} \bar{\delta} \pi^i(\mathbf{x}, t) \right). \quad (\text{C.38})$$

⁴Vale a propriedade

$$\{ F, H \} = \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_i(\mathbf{z}, t)} \{ \phi_i(\mathbf{z}, t), H \} + \frac{\delta F}{\delta \pi^i(\mathbf{z}, t)} \{ \pi^i(\mathbf{z}, t), H \} \right). \quad (\text{C.40})$$

Em virtude de (C.23), obtém-se que $\partial_\mu \bar{\Lambda}^\mu = \bar{\delta} \left((\partial_0 \phi_i) \pi^i - \mathcal{H} \right)$. Logo,

$$\begin{aligned} \partial_0(Q_A \epsilon^A) &= \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left[(\partial_0 \pi^i) \bar{\delta} \phi_i - (\partial_0 \phi_i) \bar{\delta} \pi^i - \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right) + \bar{\delta} \mathcal{H} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left[\bar{\delta} \phi_i (\partial_0 \pi^i - \{ \pi^i, H \}) - \bar{\delta} \pi^i (\partial_0 \phi_i - \{ \phi_i, H \}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

De forma equivalente, podemos escrever, por intermédio de (C.42) e (C.40), a conservação da carga como

$$\begin{aligned} \partial_0 Q_A &= \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left[\frac{\delta Q_A}{\delta \phi_i(\mathbf{z}, t)} (\partial_0 \phi_i - \{ \phi_i, H \}) + \frac{\delta Q_A}{\delta \pi^i(\mathbf{z}, t)} (\partial_0 \pi^i - \{ \pi^i, H \}) \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^{d-1} \mathbf{z} \left[\{ \phi_i, Q_A \} (\partial_0 \pi^i - \{ \pi^i, H \}) - \{ \pi^i, Q_A \} (\partial_0 \phi_i - \{ \phi_i, H \}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Comparando com (C.44), conclui-se que a carga de Noether Q_A é geradora de simetrias globais,

$$\bar{\delta} \phi_i = \epsilon^A \{ \phi_i, Q_A \}, \quad \bar{\delta} \pi^i = \epsilon^A \{ \pi^i, Q_A \}. \quad (\text{C.46})$$

Adicionalmente, nota-se que a lei de composição $(\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_1) \phi_i$ define uma nova transformação $\bar{\delta}_3 \phi_i$,

$$\bar{\delta}_3 \phi_i = -\epsilon_1^A \epsilon_2^B (\{ Q_A, \{ Q_B, \phi_i \} \} - \{ Q_B, \{ \phi_i, Q_A \} \}) = \epsilon_1^A \epsilon_2^B \{ \phi_i, \{ Q_A, Q_B \} \}, \quad (\text{C.47})$$

onde a identidade de Jacobi foi utilizada na passagem para a última igualdade, tal que a carga Q_C associada a $\bar{\delta}_3 \phi_i$ relaciona-se às anteriores por

$$\epsilon_3^C Q_C = \epsilon_1^A \epsilon_2^B \{ Q_A, Q_B \}, \quad \partial_0 Q_C = 0. \quad (\text{C.48})$$

Desse modo, as cargas de Noether fecham uma álgebra de Lie sob os parênteses de Poisson,

$$\{ Q_A, Q_B \} = f_{AB}^C Q_C, \quad \epsilon_3^C = f_{AB}^C \epsilon_1^A \epsilon_2^B. \quad (\text{C.49})$$

A partir da correspondência de Dirac, é possível estabelecer a conexão entre parênteses de Poisson e comutadores, segundo o mapeamento

$$\{\bullet, \bullet\} \mapsto \frac{1}{i}[\bullet, \bullet]. \quad (\text{C.50})$$

Sob essa correspondência, os comutadores satisfazem as seguintes propriedades:

1. Linearidade:

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C], \quad [A, \alpha B + \beta C] = \alpha[A, B] + \beta[A, C]. \quad (\text{C.51})$$

2. Antissimetria:

$$[A, B] = -[B, A]. \quad (\text{C.52})$$

3. Identidade de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (\text{C.53})$$

4. Regra de Leibniz:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (\text{C.54})$$

5. Comutador envolvendo coordenadas e derivadas:

$$[x^\alpha, \partial_\rho] = -\delta_\rho^\alpha, \quad [x^\alpha x_\beta, \partial_\rho] = -(\delta_\rho^\alpha x_\beta + x^\alpha \eta_{\beta\rho}). \quad (\text{C.55})$$