

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Daniel Leal de Paula Esteves dos Reis

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE INDICADORES DE VOLATILIDADE

Juiz de Fora

2011

Daniel Leal de Paula Esteves dos Reis

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE INDICADORES DE VOLATILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Economia da Faculdade de Economia da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Silva de Mattos

Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli

Juiz de Fora

2011

Daniel Leal de Paula Esteves dos Reis

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE INDICADORES DE VOLATILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Economia da Faculdade de Economia da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Conceito final:

Aprovado em ____ de _____ de _____.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Alan de Genaro Dario
BMF&BOVESPA

Prof. Dr. Wilson Corrêa Rotatori
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli
Universidade Federal de Juiz de Fora

Orientador - Prof. Dr. Rogério Silva de Mattos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais Antônio e Rosânia pela imensa dedicação, confiança e amor, que, somente com meras palavras não é possível descrever.

Ao meu irmão e amigo Samuel pelo senso de Justiça e fibra.

Aos grandes e fiéis amigos que me acompanharam antes e durante toda essa jornada.

Ao Prof. Dr. Rogério Silva de Mattos pelo auxílio, dedicação e amizade.

À Profª. Drª. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli, pela paciência e o suporte necessários.

À Drª. Fabiana Perobelli, pela paciência e auxílio irrestrito.

À Profª. Drª. Suzana, pela confiança em minhas capacidades, pelas oportunidades que me propiciou durante minha vida acadêmica.

Ao Prof. Sandro pelo apoio absoluto e encorajador.

Muito obrigado!

"Success is the ability to go from one failure to another with no loss of enthusiasm."

Winston Churchill

RESUMO

Medidas de volatilidade se constituem numa preocupação por parte de estudiosos e profissionais do mercado financeiro. Modelos da família ARCH/GARCH a partir dos retornos diários produzem um indicador de volatilidade, mas, não conferem ao pesquisador uma medida observável do grau de variabilidade dos retornos em torno de seu valor esperado. A recente disponibilidade de dados de frequência inferior a um dia de negociação permitiu a elaboração de indicadores de volatilidade observáveis por meio de uma medida conhecida como *volatilidade realizada*. A partir de então, é possível elaborar um indicador observável de volatilidade diária com base em dados de natureza intradiária, de modo a representar uma medida mais apropriada do grau de risco de um ativo ou carteira de ativos, e, a partir de então, estimar a volatilidade por meio de processo da família ARIMA. De posse dos dados de alta-frequência de um papel preferencial da Petrobrás S.A., o presente trabalho se propõe, portanto, em construir a medida de volatilidade realizada por meio da soma dos quadrados dos retornos obtidos em intervalos regulares (5, 15 e 30 minutos) durante cada dia de negociação do papel PETR4 durante o período de 02/01/2007 à 29/10/2010. Posteriormente à criação do indicador de volatilidade realizada que se supõe como mais apropriado para se mensurar o grau de risco, pretende-se comparar a qualidade do ajustamento e a capacidade preditiva de cada um dos métodos de modelagem da volatilidade. A comparação dos modelos baseados em dados diários e intradiários dar-se-á por meio do cômputo do erro quadrático médio (EQM) e dos testes de Diebold e Mariano e de Harvey para avaliação da acurácia preditiva dos modelos. Os resultados mostraram que, em geral, os modelos da família ARIMA são mais apropriados para a avaliação do grau de ajustamento, e produz previsões mais satisfatórias que os modelos da família ARCH/GARCH.

Palavras-chave: Volatilidade, Volatilidade Realizada, Modelos ARCH/GARCH, Modelos ARIMA.

Classificação JEL: G12, G17, C58.

ABSTRACT

Volatility measures constitute a concern among scholars and professionals of the financial market. Models of the ARCH/GARCH class from the daily returns produce an indicator of volatility, but do not give the researcher an observable measure of the degree of variability of returns around their expected value. The recent availability of data at frequencies below a trading day allowed the development of indicators of volatility observable through a measurement known as realized volatility. Since then, they can build an observable indicator of daily volatility based on intraday data, so as to represent a more appropriate measure of the riskiness of an asset, and from then estimate volatility through a process of ARIMA family. Provided with the data of a high frequency preferential role of Petrobrás S. A., the present paper therefore proposes to construct a measure of realized volatility by the sum of the squares of the returns obtained at regular intervals (5, 15 and 30 minutes) during each trading day for the paper PETR4 during 02/01/2007 to 29/10/2010. After the creation of the realized volatility indicator that is supposed to be more appropriate to measure the degree of risk, the intent is to compare the goodness of fit and predictive ability of each of the methods of volatility's models. The comparison of models based on daily data and intraday give will be through the calculation of the mean square error (MSE) and tests of Diebold and Mariano and Harvey to evaluate the predictive accuracy of models. The results in general showed that the models of the ARIMA class are more suitable for assessing the degree of adjustment and produces predictions more satisfactory than the models of the ARCH/GARCH class.

Keywords: Volatility, Realized Volatility, models ARCH / GARCH, ARIMA models.

JEL Classification: G12, G17, C58.

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1.1 - Gráficos das Cotações e Retornos de Fechamento Diário.....	12
Figura 5.1 - Retornos <i>close-to-close</i> , Volatilidades Realizadas de Cinco, Quinze e Trinta Minutos.....	55
Figura 5.2 - Histogramas das Volatilidades Realizadas (Cinco, Quinze e Trinta Minutos), dos Retornos Diários e dos Quadrados dos Retornos Diários.....	56
Figura 5.3 - Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial das Séries de Volatilidades Realizadas de Cinco, Quinze e Trinta Minutos.....	59
Figura 5.4 - Teste de Ruído Branco de Bartlett's Baseado no Periodograma Acumulado	61
Figura 5.5 - Correlograma e Correlograma Parcial dos Retornos <i>close-to-close</i>	62
Figura 5.6 - Volatilidades Realizadas Observadas, Valores Preditos pelos Modelos ARMA e Valores Preditos pelo Modelo EGARCH ~ t-Student.....	67
Figura 5.7 - Volatilidade Realizada Observada (RV5), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(3,7) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente.....	69
Figura 5.8 - Volatilidade Realizada Observada (RV15), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(1,3) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente.....	70
Figura 5.9 - Volatilidade Realizada Observada (RV30), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(1,3) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente.....	70

Lista de Tabelas

	Pág.
Tabela 3.1 - Proventos Distribuídos pela Petrobrás S.A. Durante o Período de 02/01/2007 à 29/10/2010	36
Tabela 5.1 - Estatísticas Descritivas e de Teste de Normalidade para Volatilidade Realizada do Papel PETR4 por Frequência de Dados.....	56
Tabela 5.2 - Estatísticas Descritivas e de Teste de Raiz Unitária (ADF e PP) para Volatilidades Realizadas e Retornos do Papel PETR4.....	57
Tabela 5.3 - Resultados da Estimação dos Modelos ARMA para as Volatilidades Realizadas de Cinco, Quinze e Trinta Minutos.....	60
Tabela 5.4 - Teste dos Multiplicadores de Lagrange e de Bartlett's para Heterocedasticidade Condicional aplicado aos Quadrados dos Retornos Diários.....	62
Tabela 5.5 - Resultados da Estimação dos Modelos da Família GARCH.....	63
Tabela 5.6 - Valores de Prova do Teste dos Multiplicadores de Lagrange para Heterocedasticidade Condicional aplicado aos Quadrados das Observações Padronizadas.....	64
Tabela 5.7 - Erros Quadráticos Médios dos Valores Preditos pelos Modelos Baseados em Dados Intradiários e Diário.....	67
Tabela 5.8 - Erros Quadráticos Médios dos Valores Previstos 90 Passos à Frente pelos Modelos Baseados em Dados Intradiários e Diário.....	68
Tabela 5.9 - Estatísticas de Teste de Diebold e Mariano (DM) e de Harvey.....	71

Sumário

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	11
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
2.1 RISCO E RETORNOS.....	18
2.2 VOLATILIDADE.....	22
2.2.1 ARCH/GARCH.....	23
2.2.2 Volatilidade Realizada.....	25
2.2.2.1 Definição.....	26
2.2.2.2 Intervalos Intradiários.....	27
2.2.2.3 Características.....	28
2.3 DADOS INTRADIÁRIOS.....	29
2.3.1 Processos Semimartingales.....	30
2.4 MICROESTRUTURA.....	32
2.5 EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS E LITERATURA NACIONAL.....	32
3. DA BASE DE DADOS.....	35
4. METODOLOGIA	38
4.1 CONSTRUÇÃO DA VOLATILIDADE REALIZADA.....	38
4.2 MODELOS ARIMA.....	39
4.3 MODELOS ARCH.....	46
4.4 MODELOS GARCH/EGARCH/GARCH-GJR.....	50
5. ANÁLISES DOS RESULTADOS.....	55
5.1 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS.....	55
5.2 - RESULTADOS DOS MODELOS ESTIMADOS.....	57
5.2.1 - Modelos ARIMA.....	58
5.2.2 - GARCH/EGARCH/GARCH-GJR.....	61
5.3 - ANÁLISES DA CAPACIDADE DE AJUSTAMENTO E PREDIÇÃO	65
5.3.1 - AVALIAÇÃO DO AJUSTAMENTO.....	66
5.3.2 - AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE PREDITIVA.....	68
6. CONCLUSÕES.....	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

1. INTRODUÇÃO

Uma característica marcante do mercado financeiro está relacionada às condições de incerteza. Este é um mercado cuja insegurança com respeito aos movimentos dos preços é acentuada. No intuito de compreender a incerteza inerente a este mercado, desenvolveu-se a ideia de risco, e sua importância se manifesta na sua capacidade de alterar e influenciar a tomada de decisões dos agentes econômicos. De acordo com Elton *et. al.* (1995), sob condições de risco, o investidor não pode mais associar um único número ou resultado ao investimento em qualquer ativo, e, portanto, o resultado carece de uma descrição por um conjunto de valores possíveis além de suas probabilidades de ocorrência.

O conceito de risco remonta ao trabalho pioneiro de Markowitz (1952) e, portando, à Moderna Teoria das Carteiras. A questão que se coloca é como definir apropriadamente a medida do grau de variabilidade dos retornos de um ativo. A necessidade de sua mensuração implica no conceito de volatilidade, que se entende por uma medida estatística da possibilidade do preço de um ativo ou carteira cair ou subir em um determinado período de tempo.

A análise de volatilidade é um tema recorrente na literatura econômica nos estudos com respeito ao movimento dos retornos de papéis negociados no mercado financeiro, e passou nas últimas décadas por diversos desenvolvimentos teóricos e empíricos. Considerada como uma primeira aproximação, o modelo de Black-Scholes (1973), utilizado no apreamento de opções, assume o insumo volatilidade como um componente constante ao longo do tempo.¹ No entanto, as crises econômicas e financeiras mostraram que a hipótese de volatilidade constante não era consistente com a realidade.

A literatura reconhece que os retornos dos ativos financeiros são de difícil previsão. No entanto, suas volatilidades tendem a oscilar mais suavemente e, portanto, tendem a serem passíveis de previsão com maior facilidade, e este é um fenômeno com implicações importantes para a economia financeira e de gestão de risco. De acordo com Morettin (2008), volatilidade é definida como a variância **condicional** de uma variável (no presente caso, de um retorno). É uma variável que mostra a intensidade e a frequência das oscilações das

¹ Para alguns comentários ver Mandelbrot, (1963), Fama (1965).

cotações de um ativo financeiro, considerando-se um determinado período de tempo, sendo esta uma das formas mais frequentemente utilizadas na mensuração de seu risco.

Seja r_t uma série de retornos diários, sua média e sua variância condicionais são dadas respectivamente por:

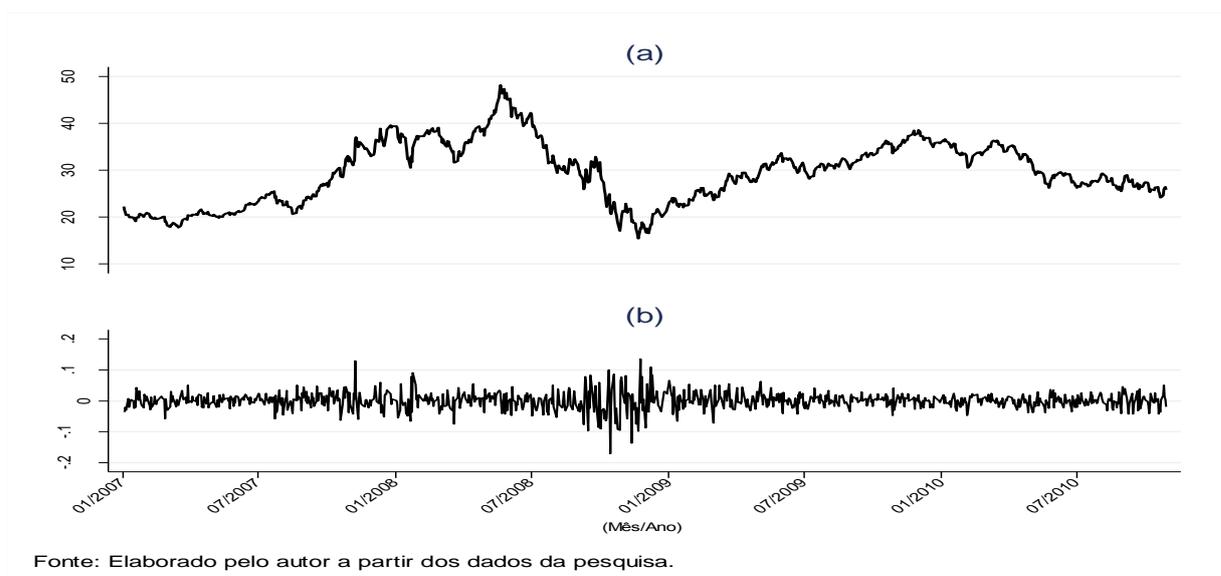
$$\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) \quad (1.1)$$

$$h_t = E[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad (1.2)$$

Ou seja, tanto a média quanto a variância estão condicionadas a toda informação passada até o instante $t - 1$ (representada por \mathcal{F}_{t-1}). Uma questão-chave se pauta no fato de que, ao contrário dos preços e dos retornos, a volatilidade e a correlação dos retornos não são diretamente observáveis no mercado, elas, portanto, somente podem ser estimadas no contexto de um modelo estatístico. Desse modo, existem algumas abordagens para se construir medidas de volatilidade.

Nesta dissertação, será tomada como objeto de estudo as informações com respeito ao papel da Petrobrás S.A. durante o período compreendido entre 02 de janeiro de 2007 e 29 de outubro de 2010. O papel PETR4 exibiu uma flutuação considerável nos seus preços cotados, atingindo a cifra de quase R\$50,00 na metade do ano de 2008 e o vale no final do mesmo ano, quando exibiu uma cotação de R\$17,00 aproximadamente.

Figura 1.1 – Gráficos das Cotações e Retornos de Fechamento Diário.



Os retornos do papel em questão aparecem no gráfico (a) da **Figura 1.1** acima, onde é possível verificar a intensa volatilidade a partir da segunda metade do ano de 2008 até o

início de 2009, que a partir de então exibiu uma volatilidade mais suave. Um importante fato estilizado com respeito aos retornos diários citado por Visser (2009), e que pode ser observado nos gráficos acima, se refere ao fato de que os mercados financeiros passam por períodos de calma e agitação. No gráfico (b) é possível verificar que a volatilidade não é, de modo algum, constante ao longo do tempo. O autor também aponta outro fato estilizado, referente à imprevisibilidade dos retornos e preços, ou seja, não é possível antever quando os preços vão subir ou descer.

Visando acomodar a volatilidade de ativos financeiros evoluindo de forma variável ao longo do tempo, Engle (1982)² propôs um modelo não-linear na variância. Aplicado à volatilidade da taxa de inflação do Reino Unido. O modelo ARCH³ introduzido pelo autor generaliza a suposição de variância constante para um horizonte de previsão de um período⁴, levando em consideração que o passado recente fornece informação relevante sobre esta previsão.

Em 1986, Bollerslev propôs uma generalização do processo ARCH, denominado modelo GARCH, que permite descrever a volatilidade com uma quantidade menor de parâmetros, permitindo que a variância condicional passada também seja levada em consideração. Taylor (1980, 1986) propõe outro modelo para a volatilidade que não depende dos retornos passados, denominado de Modelo de Volatilidade Estocástica (MVE), cuja premissa é o fato de que a volatilidade presente depende de seus valores passados, mas é independente dos retornos passados. Os modelos ARCH/GARCH serão definidos apropriadamente em capítulos posteriores.

Os modelos da família ARCH/GARCH são não-lineares na variância, cuja ideia básica é de que retornos de ativos são não-correlacionados serialmente, mas a volatilidade (variância condicional) depende de retornos passados por meio de uma função quadrática. Estes modelos são extensivamente utilizados na literatura financeira e econométrica quando se dispõe de dados regularmente espaçados, ou seja, distribuídos discretamente no tempo, quando se trata da modelagem de volatilidade. A principal premissa por trás dessa classe de modelos é a relativa homogeneidade do processo de descoberta de preços entre os participantes do mercado na origem do processo de volatilidade. Em outras palavras, a função

² Laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 2003.

³ *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*.

⁴ Um passo à frente.

densidade de probabilidade condicionada a toda informação relativa ao passado recente do processo gerador de dados de um modelo GARCH, é suposto capaz de capturar adequadamente todas as informações e notícias.

Devido ao fato de que esta classe de modelos trata apropriadamente séries financeiras que apresentam a variância condicional evoluindo no tempo (caso contrário dos modelos lineares do tipo ARIMA⁵), os modelos ARCH/GARCH passaram a constituir a estrutura básica de modelagem em estudos empíricos sobre a microestrutura de mercado, tais como o impacto de novidades, na atuação do Banco Central, na análise de mercados financeiros e cambiais⁶.

Segundo Andersen e Bollerslev (1998a), diversas pesquisas⁷ apontam que modelos da família ARCH/GARCH geram previsões insatisfatórias, quando julgadas por critérios padrões de previsão, baseados nos quadrados dos retornos (r_t^2), ou nos valores absolutos dos retornos ($|r_t|$). O motivo para tais resultados pode ser explicado do seguinte modo: seja o processo gerador de retornos, dado por:

$$r_t = h_t \cdot \varepsilon_t \quad (1.3)$$

Onde ε_t denota um processo estocástico independente e identicamente distribuído (i.i.d.), com média constante igual a zero e variância unitária. Seja h_t o fator de volatilidade latente (não-observável), definido somente no contexto de um particular modelo⁸. Segundo Andersen e Bollerslev (1998a), o julgamento da relevância prática de qualquer modelo é feita pela comparação do ajuste do modelo em relação às realizações do processo. Contudo, a volatilidade não é observada, e esta abordagem não é imediatamente aplicável na avaliação de sua previsão. Supondo que o modelo para h_t^2 (o modelo ARCH, por exemplo) está corretamente especificado, então:

$$E(r_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(h_t^2 \cdot \varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t^2 \quad (1.4)$$

⁵ *Autoregressive Integrated Moving Average*.

⁶ Bollerslev *et al.* (1992), Goodhart e Figliuoli (1991), Goodhart *et al.* (1993), Goodhart e Hesse (1993), Peiers (1997), Engle *et al.* (1990) e Baillie e Bollerslev (1990).

⁷ Para maiores detalhes ver Cumby, Figlewski e Hasbrouck (1993), Figlewski (1997), e Jorion (1995,1996).

⁸ No restante desta dissertação, h_t e h_t^2 serão consideradas, indistintamente como medidas de volatilidade sem risco de causar confusão, devido ao fato de estas medidas estão ligadas por uma simples transformação monotônica.

A expressão acima justifica o uso do quadrado dos retornos como uma *proxy* para a volatilidade *ex-post*, ao longo do horizonte relevante.

Contudo, um ponto que merece destaque da afirmação acima, e apontado por Andersen e Bollerslev (1998a), se refere ao fato de que, apesar do quadrado dos retornos (r_t^2) constituírem um estimador não-viesado da volatilidade latente, ele pode estar sujeito a ruídos elevados, oriundos do processo aleatório ε_t^2 . De fato, os autores apontam que, de observação em observação, este componente apresenta um alto grau de variação, quando comparado ao outro componente representado por h_t^2 . Em suma, o que se quer dizer é que, a variação do quadrado dos retornos é explicada preponderantemente pelo fator de inovação, dado por ε_t^2 , e não pelo fator de volatilidade construído a partir de um modelo em particular, representado por h_t^2 . Sendo assim, modelos ARCH/GARCH geram previsões insatisfatórias, simplesmente porque estão sendo julgados por um critério de previsão que usa o r_t^2 como medida de volatilidade *ex-post*, o qual é inevitavelmente dominado por um ruído, inerente ao processo gerador de retornos.

Dados os pontos levantados acima, Andersen e Bollerslev (1998) sugerem uma abordagem fundamentalmente diferente. Ao invés de procurar aperfeiçoar os procedimentos de avaliação previsão, os autores apontam que pode ser proveitoso buscar alternativas para as medidas de volatilidade *ex-post*, e demonstram que dados em frequências inferiores à um dia de negociação permitem a construção de uma vasta e melhorada classe de medidas para a volatilidade *ex-post*. Com os avanços computacionais e a recente disponibilidade de dados em alta-frequência (DAF), tornou-se possível a elaboração de tais medidas.

O que se tem disponível dos DAF é uma sequência de dados irregularmente espaçados no tempo, registrando cada negociação ao longo do dia, denominados “*ticks*”, com o preço negociado, sequências de oferta de venda e compra, volume negociado e o momento do dia da negociação.

De acordo com Dacorogna *et. al.* (2001), a análise dos dados em alta-frequência (DAF) deve ser o principal objeto de investigação para aqueles que estão interessados na compreensão dos mercados financeiros. Sobretudo porque os praticantes do mercado determinam suas decisões de negociação por meio da observação de DAF (ou dados *tick-by-tick*⁹). Visser (2008b), por exemplo, aponta que a construção de uma medida de volatilidade

⁹ A forma original dos preços de mercado é dada no formato *tick-by-tick*: cada “*tick*” é uma unidade lógica de informação, como um preço de uma transação. Para maiores detalhes, ver Dacorogna (2001).

diária, a partir de dados intradiários, são importantes para a especificação de modelos de volatilidade em tempo discreto. Muitas são as informações que podem ser extraídas dos DAF. Por exemplo, Andersen *et. al.* (2001), apontam que o desempenho da previsão é ampliado quando se incorporam dados intradiários numa medida de volatilidade, não só porque a alta-frequência acaba por ser altamente previsível, mas também porque as informações neste formato mostram-se úteis para a previsão em horizontes mais longos, como mensal ou trimestral.

A escolha feita por Andersen *et. al.* (2001) da volatilidade realizada como sendo a medida apropriada de variabilidade, se deveu ao fato de que, como apontado em Visser (2009), esta é a medida natural para processos *semimartingales*, e de que processos contínuos no tempo (como no caso de dados de alta-frequência) tipicamente se ajustam a esta classe de processos. Conseqüentemente, a escolha da modelagem da volatilidade realizada, por meio de processos lineares da classe ARIMA, se justifica pelo fato de que modelos desta natureza geram boas previsões para a volatilidade, devido a fato de que o critério de comparação seria fornecido por uma medida de volatilidade *ex-post* que não é contaminada por um ruído inerente ao processo gerador de retornos, denominada volatilidade realizada.

Desta forma, é possível construir modelos ARIMA, com base nas volatilidades realizadas, construir modelos ARCH/GARCH a partir dos retornos diários, e, compará-los nas suas capacidades de se ajustar e prever o comportamento das volatilidades realizadas apropriadamente. Em suma, os modelos da família ARCH/GARCH fornecerão estimativas de uma volatilidade não observável, representada por \hat{h}_t^2 . Em paralelo, os modelos da família ARIMA fornecerão estimativas das volatilidades realizadas dadas por \widehat{RV}_5 , \widehat{RV}_{15} e \widehat{RV}_{30} . Assim, seria possível verificar qual modelo se ajusta melhor à medida de volatilidade *ex-post* que Andersen e Bollerslev (1998a) apontaram como mais apropriada, dadas por RV_5 , RV_{15} e RV_{30} .

A dissertação se propõe primeiramente à construção das medidas de volatilidade baseadas nas cotações intradiárias para o papel PETR4 da Petrobrás S.A., por meio do cômputo da volatilidade realizada para intervalos de 5, 15 e 30 minutos durante cada dia de negociação. Gerando três processos diários distintos de volatilidades realizadas (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}). Em seguida, será realizada a modelagem destas RV_5 por meio de processos ARIMA com finalidade de avaliação da capacidade preditiva de tais modelos. Num segundo momento, de posse das cotações de fechamento diário (“*close-to-close*”), serão ajustados modelos da família ARCH/GARCH, de modo a se obter as estimativas convencionais para a volatilidade.

O ponto relevante o qual a dissertação se propõe a examinar é: ***comparar a qualidade de ajustamento e a capacidade preditiva dos modelos da família ARCH/GARCH e ARIMA para o fator de volatilidade latente, quando julgados por um critério de previsão que usa a volatilidade realizada como medida de volatilidade ex-post.***

Para avaliar a qualidade dos modelos, no que tange ao seu ajustamento e capacidade de previsão, foram calculados os erros quadráticos médios (EQM) dos valores preditos pelos modelos ARCH/GARCH e ARIMA em relação às volatilidades realizadas, de modo a verificar quais modelos se ajustam melhor aos dados, assim como geram previsões mais acertadas do fator de volatilidade latente.

Assim, a dissertação se estrutura seguinte forma: no próximo capítulo serão dadas definições mais apropriadas dos conceitos a que se faz uso, como o que se entende por risco, incerteza e mensuração do grau de risco por meio das medidas de volatilidade. Neste capítulo (Capítulo 2), será destacado como a volatilidade realizada como variável observada se constitui numa medida apropriada para a volatilidade de ativos, ou seja, como se caracteriza como uma medida apropriada para a mensuração do grau de variabilidade dos retornos que seguem um processo *semimartingale*. Além disso, será dada uma explanação das características dos dados de alta-frequência, e como estes captam informações das quais os modelos convencionais não são capazes de associar plenamente.

No Capítulo 3 será dada uma descrição da base de dados utilizada no presente trabalho. Neste capítulo será mostrado como foi realizado o ajuste das cotações do ativo preferencial da Petrobrás S.A. (PN). No Capítulo 4 será mostrado todo o procedimento metodológico adotado nesta dissertação. Num primeiro momento, será mostrado como foi computada a volatilidade realizada para intervalos regulares de 5, 15 e 30 minutos para cada dia de negociação. Posteriormente, há uma descrição dos métodos pelos quais serão modeladas as RV_s por meio de modelos da família ARIMA. Em seguida serão descritos os modelos convencionais de modelagem de volatilidade, modelos estes pertencentes à família ARCH/GARCH. Os dois últimos capítulos se propõem a descrever os resultados obtidos da estimação dos modelos propostos, e as conclusões aferidas do presente estudo, respectivamente.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Na introdução, o relacionamento entre incerteza, risco, retorno e volatilidade foi destacado, e, sendo assim, expõe-se com mais precisão neste momento os respectivos conceitos, de modo a clarificar sua importância, assim como, suas definições formais e limitações.

O presente capítulo inicia na subseção 2.1 com a relação existente entre o *trade-off* risco-retorno. Na subseção 2.2 expõe-se o que se entende por uma medida de mensuração de risco, ou seja, nesta subseção serão apresentadas algumas das formas pelas quais é possível calcular a volatilidade dos retornos de um ativo financeiro. Será mostrado como os modelos da família ARCH/GARCH geram medidas de volatilidade a partir de observações em frequência diária (subseção 2.2.1), e apresenta, como é possível, a partir de observações ao nível intradiário permitem a construção de um indicador observável, denominado volatilidade realizada (subseção 2.2.2).

Na subseção 2.3 é evidenciado o que se entende por dados em alta-frequência, assim como quais são suas qualidades e defeitos para o entendimento dos movimentos dos preços de ativos financeiros. A subseção 2.4 aborda as características pertinentes à microestrutura dos mercados financeiros. Na subseção 2.5 são apresentadas as evidências empíricas relacionadas às medidas de volatilidade trabalhadas nesta dissertação, assim como uma apresentação dos trabalhos correlatos encontrados na literatura nacional.

2.1 RISCO E RETORNOS

O risco apresenta várias definições, e, Markowitz (1952), que o trata no contexto da área financeira, o reduz ao conceito de variância ou do desvio-padrão em relação a uma média. Atualmente, o conceito de risco é utilizado diariamente na maioria das operações financeiras. Uma definição simples seria: “O risco em seu sentido fundamental pode ser definido como a probabilidade de prejuízos financeiros” (MARKOWITZ, 1952). O autor com base em um modelo estático enuncia assim a regra de decisão de seleção de carteiras com base no seu retorno descontado esperado e na sua variância, esta última considerada a medida de risco com respeito ao retorno da carteira.

Sharpe¹⁰ (1964) em seu artigo seminal (*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Market Risk*) mostra as condições de equilíbrio no mercado de capitais, demonstrando que o investidor pauta suas decisões de investimento com base em dois parâmetros: taxa de retorno esperada e o seu desvio padrão. O autor propõe que o investidor decide sob certas suposições, em como alocar seus recursos dividindo-os em duas parcelas, uma destinada ao investimento numa combinação de ativos de risco, e outra destinada à aplicação à taxa livre de risco, de modo a encontrar, em equilíbrio, uma composição ótima de uma carteira ativa que lhe proporcionaria maior taxa de retorno para um dado risco, ou um menor risco para uma dada taxa de retorno.

Segundo Markowitz (1952), no caso da seleção de um portfólio, o fato de os ativos que o compõe serem correlacionados entre si implica na não aceitabilidade da *Lei dos Grandes Números*¹¹, culminando no fato de que a diversificação de ativos não elimina todo o risco inerente a uma carteira de ativos. Este risco é considerado *não-diversificável*, também conhecido por *risco de mercado* ou *sistêmico*, e está relacionado às flutuações do sistema econômico como um todo.

Por *risco não sistêmico*, entende-se como a parcela do risco que não está associada ao comportamento da economia, isto é, depende exclusivamente das características de cada ativo, e é função de uma série de itens que podem afetar o desempenho da companhia em questão. Esse tipo de risco, por sua vez, pode ser eliminado pelo processo de diversificação de ativos.

O objetivo de Markowitz (1952) foi utilizar a noção de risco para compor carteiras para investidores que consideram o retorno esperado algo desejável, e a variância do retorno algo indesejável. De acordo com Morettin (2008), este é um dos objetivos a ser avaliado em finanças, ou seja, àquele referente ao risco de uma carteira de instrumentos financeiros.

Seja P_t o preço de fechamento de um ativo no t –ésimo dia. Supondo que não haja dividendos¹² a serem distribuídos no período, a variação dos preços entre os fechamentos do dia $t - 1$ e t é dada por:

¹⁰ William Forsyth Sharpe, laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 1990.

¹¹ Para uma definição precisa da Lei dos Grandes Números ver Hoel, Port e Stone (1971).

¹² De acordo com Securato (2005), dividendos representam a participação dos resultados numa sociedade, feita sob a forma de distribuição em dinheiro, em percentual a ser definido pela empresa, de acordo com seus resultados.

$$\Delta P_t = P_t - P_{t-1} \quad (2.1)$$

A variação relativa de preços (*retorno líquido simples*) deste ativo em questão, entre os mesmos instantes de tempo se dá na forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (2.2)$$

Dessa forma, o *retorno bruto simples* é dado por:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.3)$$

Morettin (2008) denomina R_t como sendo a *taxa de retorno*, pois é geralmente expressa em termos percentuais, relativa a um período de tempo (um mês, um ano, etc.). Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da equação anterior, temos:

$$\ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (2.4)$$

E dado que, para “ u ” pequeno:

$$\ln(1 + u) \approx u \quad (2.5)$$

E, desse modo, denotando $p_t = \ln(P_t)$ como sendo o logaritmo de P_t na base “ e ”, o *retorno composto continuamente* ou simplesmente *log – retorno* se define como:

$$r_t \approx \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (2.6)$$

E assim:

$$r_t = p_t - p_{t-1} \quad (2.7)$$

Segundo a notação adotada durante todo o restante deste trabalho, r_t representará o retorno dos fechamentos diários, ou log-retornos “*close-to-close*”. Vários são os motivos para se trabalhar com retornos em detrimento dos preços. De acordo com Morettin (2008), retornos são livres de escala, e apresentam propriedades estatísticas interessantes como ergodicidade¹³ e estacionariedade.

¹³ De acordo com Morettin (2008), um processo é ergódico se é possível estimar características de interesse, como média, autocovariância, entre outras, a partir de uma única trajetória do processo. De outra forma, um processo é ergódico na média, se a média amostral convergir, em probabilidade, para a verdadeira média do processo.

Com respeito à sua distribuição, considere uma série de retornos $\{r_t, t = 1, \dots, T\}$, com a hipótese retornos temporalmente independentes (muitas vezes formulada na literatura, ou seja, não sendo previsíveis com base em retornos passados), assim:

$$F_t(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}) = F_t(r_t) \quad (2.8)$$

De acordo com Dacorogna et. al. (2001), alguns fatos estilizados com respeito aos retornos são:

- A distribuição incondicional dos retornos apresenta “caudas mais gordas” (*fat – tailed*) que as de uma distribuição normal. Além disso, esta característica se acentua conforme o aumento da frequência dos dados;
- A presença de “caudas gordas” implica numa instabilidade¹⁴ da distribuição dos retornos, ou seja, o segundo momento da distribuição existe, enquanto o quarto momento tende a divergir;
- Leis de escala descrevem retornos médios absolutos e retornos médios ao quadrado em função de seus intervalos de tempo (variando de alguns minutos para um ou mais anos). Supõe-se então, que estas quantidades são proporcionais a uma potência do tamanho do intervalo;
- Existem evidências de heterocedasticidade sazonais sob a forma de grupos distintos de volatilidade diária e semanal, efeito este que pode explicar, em parte, a “gordura” das caudas da distribuição dos retornos;
- A distribuição dos retornos, embora aproximadamente simétrica, é, em geral, leptocúrtica.

Visser (2009) enuncia outro fato estilizado interessante com respeito à distribuição dos retornos, de que seus valores extremos e moderados tendem a se agrupar, formando *clusters*. Outro ponto interessante é que retornos podem ser analisados em multiperíodos, ou mesmo anualizados, ou agregados temporalmente, ou em “*cross-section*”¹⁵. De posse de uma

¹⁴ Blattberg e Gonedes (1974) fazem uma comparação entre a distribuição *t de Student* e as distribuições estáveis. Suponha que X seja uma variável aleatória (v.a.), e que, para cada “ t ”, existam escalares a_t, b_t de tal forma que:

$$a_t X + b_t \approx X_1 + \dots + X_t$$

Onde “ \approx ” representa que o lado esquerdo da equação acima tem a mesma distribuição do lado direito da equação, e onde os X_1, \dots, X_t são i.i.d., e mais, com a mesma distribuição de X . Para maiores detalhes ver Morettin (2008).

¹⁵ Para maiores detalhes ver Morettin (2008).

carteira de investimentos denotada por c , que contenha N instrumentos, cujos “pesos” são dados por w_1, \dots, w_N , de modo que $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. O log-retorno da carteira seria dado por:

$$r_c = \log \left(\sum_{i=1}^N w_i e^{r_i} \right)$$

Morettin (2008) enuncia outros fatos estilizados como:

- Retornos são, geralmente, não auto-correlacionados;
- Os quadrados dos retornos são auto-correlacionados, cuja correlação de *lag* “um” é pequena, e com as demais seguindo uma queda lenta;
- Algumas séries de retornos são não-lineares¹⁶.

Sendo assim, os retornos podem ser computados diretamente do conjunto de dados representados pelas cotações do papel PETR4 da Petrobrás S.A., e, como visto, é desejável trabalhar com retornos ao invés de preços.

Por meio de pressupostos e da regra de risco-retorno, Markowitz (1952) determinou a fronteira eficiente¹⁷ de ativos de risco a partir da premissa de selecionar carteiras que maximizassem a taxa de retorno para um dado nível de risco, ou minimizassem o nível de risco para uma dada taxa de retorno esperada. O foco se volta então, em como mensurar apropriadamente a medida de grau de risco, de modo a compor o *trade-off* entre risco e retorno estabelecido por Markowitz.

2.2 VOLATILIDADE

A ideia de volatilidade permeia as modernas teorias financeiras e processos de tomada de decisão. Como tal, medidas precisas e boas previsões para a volatilidade futura são críticas para a implementação e avaliação das teorias de precificação de ativos e derivativos, bem como estratégias de negociação e de cobertura. Em resposta a isso, uma volumosa literatura surgiu para modelar as dependências temporais da volatilidade do mercado

¹⁶ De acordo com Morettin (2008), a distribuição de uma séries econômica ou financeira é não-linear quando responde de maneira distinta a choques grandes ou pequenos, ou ainda, a choques negativos ou positivos.

¹⁷ De acordo com Elton *et. al.* Gruber (1995), a fronteira eficiente pode ser definida como a delineação de um subconjunto de carteiras que serão preferidas por todos os investidores que tem aversão a risco e desejam retornos mais altos.

financeiro nas frequências diárias (ou menores) fazendo-se uso de modelos tipo ARCH/GARCH e de volatilidade estocástica.

Segundo Andersen e Bollerslev (1998b), a maiorias dos estudos em volatilidade apontam para estimativas altamente significativas e para uma acentuada persistência intertemporal na volatilidade. Cabe ressaltar que a volatilidade é uma medida inerentemente não-observável, ou seja, uma variável latente (VISSER, 2009). Assim, os modelos não-lineares na variância (modelos ARCH/GARCH, por exemplo) tem, comumente, suas estimativas de volatilidade comparadas à um critério de volatilidade que não é apropriado (pois está contaminado pelo ruído inerente ao processo gerador de dados), sugerindo que estes modelos apresentam baixo poder preditivo.

Contudo, de posse de DAF é possível construir um indicador da volatilidade *ex-post* mais robusta para a volatilidade latente, permitindo verificar a qualidade do ajustamento e da capacidade preditivas dos modelos ARCH/GARCH apropriadamente. Além disso, é possível realizar estimativas diretas para a volatilidade, por meio da modelagem de processos ARIMA, e, por fim, efetuar comparações entre estes modelos apropriadamente, por meio do cálculo do erro quadrático médio (EQM).

Sendo assim, duas são as formas pelas quais será modelada a volatilidade nesta dissertação: (i) pelo ajuste paramétrico de modelos econométricos (modelos auto-regressivos de heterocedasticidade condicional da família ARCH/GARCH, gerando estimativas de volatilidade, representada por \hat{h}_t^2 ; (ii) pelo estudo de indicadores diretos de volatilidade (volatilidade realizada), representados pelos \widehat{RV}_s .

2.2.1 – MODELOS ARCH/GARCH

Como mencionado, uma medida de volatilidade é uma variável latente, que somente pode ser calculada no contexto de um modelo. Um modelo ARCH (m) é da forma (MORETTIN, 2008):

$$r_t = \sqrt{h_t} \cdot \varepsilon_t \quad (2.9)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 \quad (2.10)$$

Onde, ε_t é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída (i.i.d.) com média zero. Além disso, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, com $i = 1, \dots, m - 1$ e $\alpha_m > 0$.

Cabe ressaltar que diversas são as fraquezas concernentes aos modelos da família ARCH/GARCH. Conforme Tsay (2005), os modelos GARCH não apontam quais são as causas que poderiam determinar o comportamento da volatilidade; tendem a gerar superprevisões; respondem lentamente a choques significativos, e tratam de forma idêntica choques positivos e negativos. Esta última distorção será corrigida nesta dissertação por meio do modelo EGARCH, variação do modelo GARCH estabelecido inicialmente por Nelson (1991), e pelo modelo GARCH-GJR (GLOSTEN, JAGANNATHAN e RUNKLE, 1993), que tratam de corrigir estes efeitos assimétricos.

Contudo, o ponto mais relevante para este trabalho, se pautar no fato de que após a estimação dos parâmetros do modelo, não é possível comparar os valores ajustados pelo modelo para a volatilidade (\hat{h}_t) com seus valores efetivos, pois a volatilidade é uma medida latente. Para tanto, é preciso uma medida de volatilidade *ex-post*. Os critérios-padrão de avaliação de previsão no contexto dos modelos ARCH/GARCH são normalmente definidos pelo quadrado dos retornos (r_t^2) ou pelos valores absolutos dos retornos ($|r_t|$). Em suma, assume-se, por exemplo, r_t^2 como medida de volatilidade *ex-post* passível de observação. Estima-se, por exemplo, um modelo ARCH(m) permitindo encontrar uma medida ajustada para a volatilidade \hat{h}_t . Por fim, avalia-se a qualidade da previsão por meio da diferença $\hat{h}_t - r_t^2$.

Assim, embora o quadrado do processo de inovação venha a fornecer uma estimativa não tendenciosa para o fator de volatilidade latente, é possível que ele venha a produzir medições com ruídos elevados, devido ao termo de erro idiossincrático ε_t . Este componente normalmente exibe um elevado grau de variação de observação para observação em relação ao h_t , tornando a fração da variação do quadrado do retorno atribuível ao processo aleatório ε_t (ANDERSEN e BOLLERSLEV, 1998a). Consequentemente, o pobre poder preditivo dos modelos de volatilidade, quando julgados por critérios de previsão padrão, usando r_t^2 como medida de volatilidade *ex-post*, é uma consequência inevitável do processo de ruído inerente ao processo de geração de retornos.

A intuição por trás do poder aparente da má capacidade de previsão dos modelos bem especificados para a volatilidade é direta. Seja o processo de inovação sobre os retornos dado por $r_t = \sqrt{h_t} \cdot \varepsilon_t$, onde ε_t possui média (independente) igual à zero com variância

unitária, enquanto a volatilidade latente h_t evolui de acordo com o particular modelo. Uma abordagem comum para julgar a relevância prática de qualquer modelo é comparar as previsões implícitas com as realizações posteriores. Infelizmente, a volatilidade não é diretamente observada, e, sendo assim, esta abordagem não é imediatamente aplicável para a avaliação da qualidade da previsão da volatilidade. Ainda assim, se o modelo para h_t é corretamente especificado, então $E_{t-1}(r_t^2) = E_{t-1}(h_t \varepsilon_t^2)$, que parece justificar o uso dos retornos ao quadrado ao longo do horizonte relevante como uma *proxy* para a volatilidade *ex-post* (ANDERSEN e BOLLERSLEV, 1998a).

Assim, quando julgados por estes critérios, sobre horizontes de previsão diária, modelos padrão de volatilidade (ARCH/GARCH) fornecem previsões aparentemente pobres. Ou seja, apesar de altamente significativas em estimativas de parâmetros, numerosos estudos apontaram que modelos de volatilidade ARCH/GARCH explicam pouco da variabilidade *ex-post* dos retornos ao quadrado¹⁸, levantando um ponto de que talvez estes modelos poderiam ser de valor prático limitado.

2.2.2 – VOLATILIDADE REALIZADA

De modo a contornar o problema oriundo dos modelos de volatilidade ARCH/GARCH, Andersen e Bollerslev (1998a) apresentam novos métodos para a construção de medidas *ex-post* mais precisas e significativas para a volatilidade diária, extraídas a partir de dados de alta-frequência (intradiários). Assim, ao invés de procurar aperfeiçoar os procedimentos de avaliação de previsão, tomando as observações “ruidosas” sobre a volatilidade fornecida pelo horizonte fixo de retornos ao quadrado como dado, os autores buscaram medidas *ex-post* alternativas. Especificamente, com base no quadro de volatilidade estocástica de tempo contínuo desenvolvido por Nelson (1990a), Drost e Werker (1996), Andersen e Bollerslev (1998a) demonstram como os DAF permitem a construção de medidas de volatilidade *ex-post* vastamente melhoradas, via soma dos quadrados dos retornos intradiários.

De posse de uma medida de volatilidade observável (RV_S), é possível estimá-la diretamente, por meio de processos ARIMA. Assim, é possível modelar e prever a

¹⁸ Ver, por exemplo, Cumby, Figlewski e Hasbrouck (1993), Figlewski (1997), e Jorion (1995, 1996).

volatilidade realizada, assim como realizar comparações com os modelos ARCH/GARCH, de modo a verificar qual destes modelos são mais apropriados para a estimação e previsão da volatilidade latente. E, segundo Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2001), retornos de alta-frequência permitem analisar as volatilidades diárias, que são de importância fundamental tanto na academia quanto da indústria, pois permitem aos seus usuários captar o que ocorre no interior de um dia de negociação.

2.2.2.1 – DEFINIÇÃO

A volatilidade realizada $RV(t_i)$ no tempo t_i é computada dos dados históricos. A ideia geral é considerar a soma dos quadrados dos retornos obtidos em intervalos de alguns minutos durante um dia, visando estimar a volatilidade desse dia (DACOROGNA, 2001). O autor propõe uma definição geral para a volatilidade realizada, como sendo:

$$RV(t_i) = RV(\Delta t, m, k; t_i) = \left[\left(\frac{1}{m} \right) \sum_{j=1}^m |r(\Delta t; t_{i-m+j})|^k \right]^{\frac{1}{k}} \quad (2.11)$$

Com $r(\Delta t; t_{i-m+j})$ sendo o retorno intradiário como uma função do intervalo fixo de tempo escolhido para a formação das “janelas” intradiárias e do instante de tempo considerado. Com relação à potência da expressão (2.11), cabe ressaltar que k é não-negativo ($k > 0$), e, de acordo com Morettin (2008), os casos usualmente encontrados são aqueles em que $k = 1$ e $k = 2$.

Visser (2009) mostra que para *semimartingales* contínuos, um $k < 2$ resulta num $RV^k(\Delta) \rightarrow \infty$, e que para um $k > 2$, $RV^k(\Delta) \rightarrow 0$. Assim, para um $k = 2$, o *semimartingale* é bem definido, e, portanto, será este valor o utilizado no restante desta dissertação. Em teoria, com o aumento da frequência de observações de um dia, para um intervalo infinitesimal, esta medida converge para medição real do fator de volatilidade latente (ANDERSEN e BOLLERSLEV, 1998b).

Para um $k = 2$, Morettin (2008) sugere uma forma simplificada. Sendo $t \in [0,1]$, a variação quadrática do processo de log-retornos r_t , ao longo deste intervalo, é dado da seguinte forma: divide-se o intervalo unitário por m subintervalos de tamanho $\Delta = \frac{1}{m}$; define-se a **variância realizada** RV_{Δ}^2 como a soma dos incrementos em r_t ao quadrado, dessa forma, temos:

$$RV_{\Delta}^2 = \sum_{j=1}^m |\ln(P_{j\Delta}) - \ln(P_{(j-1)\Delta})|^2 \quad (2.12)$$

A raiz quadrada da variância realizada é denominada de **volatilidade realizada** (*RV*). Assim, a **variação quadrática** (*QV*) pode ser definida como o limite em probabilidade da variância realizada com a amostragem dos intervalos m tendendo a zero, dessa forma:

$$QV = \text{plim}_{\Delta \rightarrow 0} RV_{\Delta}^2 \quad (2.13)$$

A volatilidade para o dia t é interpretada como a raiz quadrada de QV_t , ou seja, a variação quadrática ao longo do dia t é:

$$(\text{volatilidade para o dia } t) = QV_t^{\frac{1}{2}}$$

Dacorogna et. al. (2001) propõe uma receita para seu cômputo na prática:

- a) Considere e escolha três intervalos de tempo:
 - (i) O intervalo de tempo das observações de retorno $[t - h]$;
 - (ii) O tamanho da amostra $n[t - h]$, (onde “n” é o número de observações de retornos);
- b) Escolha o expoente k da Equação 2.11 (geralmente um ou dois, conforme discutido acima), e a escala de tempo de base da computação (em vez de tempo físico, um tempo de negócios omitindo os fins de semana podem ser utilizados);
- c) Calcule a volatilidade realizada de acordo com a Equação 2.11.;

2.2.2.2 – INTERVALOS INTRADIÁRIOS

Segundo Andersen *et. al.* (2001), uma escolha razoável para a frequência de amostragem deve, em última análise, depender da liquidez do mercado, permitindo a alta-frequência de amostragem sem contaminação por efeitos de microestrutura do mercado (característica esta, presente no papel PETR4 estudado nesta dissertação).

Levou-se sob consideração estes três horizontes de previsão visando verificar se os modelos de previsão adotados mantinham seu desempenho constante em relação aos demais. A escolha de subintervalos de cinco minutos é alta o suficiente de modo que as volatilidades realizadas são, em grande parte, livres de erros de medição.

No entanto, Bhattacharyya *et. al.* (2009) comparam previsões utilizando diversos intervalos de amostragem distintos, e apontam que o intervalo de 30 minutos foi considerado ótimo para previsões diárias. O intervalo de 15 minutos foi analisado de modo a verificar o apontado em Visser (2009), de que a qualidade da volatilidade realizada apresenta uma melhoria quando se aumenta a frequência de amostragem de 30 minutos para 5 minutos. Por fim, Moreira e Lemgruber (2004) calcularam intervalos de 15 minutos para a série de retornos do IBOVESPA, e assim foi adicionado esse horizonte.

2.2.2.3 – CARACTERÍSTICAS

A mecânica da volatilidade realizada segundo Andersen *et. al.* (2001) é calculá-la simplesmente pela soma dos quadrados dos retornos intradiários. Por amostragem dos retornos intradiários, com uma frequência satisfatória, a volatilidade realizada pode ser calculada suficientemente próxima da volatilidade subjacente integrada (o integrante da volatilidade instantânea durante o intervalo de interesse, que é uma medida de volatilidade natural).

Para fins práticos, trata-se a volatilidade como observada, o que permite analisar diretamente as suas propriedades, utilizando técnicas mais simples do que aquelas propostas pelos modelos econométricos requeridos, quando a volatilidade é latente. Esta é a justificativa principal para a escolha da volatilidade realizada como referência no que tange a medidas de volatilidade mais apropriadas.

A partir do cômputo das volatilidades realizadas com base em subintervalos de cinco, quinze e trinta minutos para cada dia de negociação, seria possível ajustar modelos da família ARIMA, por exemplo, de forma a avaliar a capacidade preditiva da de tais modelos. Assim sendo, seria possível comparar modelos ARCH/GARCH com modelos da família ARIMA, e verificar quais destes (modelos baseados em retornos de fechamento diários e baseados na volatilidade realizada) geram melhores previsões para a volatilidade dos retornos de ativos financeiros.

Cabe ressaltar que a volatilidade realizada é somente uma das formas pelas quais se pode calcular a volatilidade diária a partir de dados intradiários. Visser (2009) faz uso de diversas *proxies* para a volatilidade, inclusive a volatilidade realizada calculada a partir de

subintervalos diversos, o *intraday high-low range*, além de uma medida de combinação geométrica de todas estas *proxies*.

Andersen e Bollerslev (1998a) apontam que as medidas de volatilidade realizada propostas, baseadas em retornos de alta-frequência, proporcionam uma drástica redução do ruído, e uma radical melhoria em relação à estabilidade temporal das medidas com base em retornos diários. Além disso, quando avaliadas em relação a estas medidas melhoradas para volatilidade, os autores apontam que os modelos ARCH apresentam um bom desempenho, explicando cerca de metade da variação no fator de volatilidade. Essas descobertas dotam a noção de um processo de volatilidade latente com conteúdo empírico concreto, e ressaltam a relevância prática de séries temporais com base em modelagem de volatilidade diárias e técnicas de previsão.

2.3 DADOS INTRADIÁRIOS

Segundo Dacorogna et. al. (2001), a forma original dos preços de mercado são dados “*tick-by-tick*”, ou seja, cada “*tick*” é uma unidade lógica de informação, como um preço de transação, por exemplo. Por natureza, estes dados são irregularmente espaçados no tempo. Mercados líquidos geram centenas ou milhares de *ticks* por dia útil. Assim, dados de alta-frequência devem ser objeto de investigação para aqueles que estão interessados na compreensão dos mercados financeiros, sobretudo porque os investidores determinam suas decisões de negociação por meio da observação de dados em alta-frequência ou dados “*tick-by-tick*”.

No entanto, a maioria dos estudos publicados na literatura financeira lida com dados de baixa frequência. De acordo com Dacorogna (2001) há duas razões principais para isso: primeiro porque ainda é bastante caro e demorado reunir, organizar, armazenar, recuperar e manipular dados de alta-frequência, isso porque a maioria dos dados financeiros disponíveis se apresenta numa frequência diária. A segunda razão é algo mais sutil, no entanto importante: a maioria dos aparelhos estatísticos foi pensado e concebido para dados igualmente espaçados no tempo, ou seja, para séries temporais homogêneas, caso este dos dados dispostos em termos diários.

Atualmente, com o desenvolvimento da tecnologia, a disponibilidade de dados está se tornando um problema a menos. Lentamente, os dados de alta-frequência estão se tornando

um banco experimental para a compreensão de microestrutura de mercado. Assim, devido ao desenvolvimento do comércio eletrônico e da existência de vários provedores de dados também na internet, é possível acompanhar a formação dos preços em tempo real. Como ideal, a análise e modelagem do processo de geração de preços pode produzir resultados que agreguem valor aos dados brutos.

O método experimental proposto por Dacorogna et. al. (2001) no que tange à metodologia de pesquisa concernente aos dados de alta-frequência e que tem apresentado êxito é composta de três etapas. A primeira visando explorar os dados com o intuito de descobrir as propriedades estatísticas fundamentais que apresentam certo conjunto de premissas, isto é, estabelecer os fatos estilizados encontrados na literatura econométrica ou financeira. O segundo passo é usar todos estes fatos empíricos para a formulação de modelos adequados, ou seja, aqueles inspirados diretamente pelas regularidades empíricas encontradas nos dados. O terceiro passo é verificar se esses modelos ajustados reproduzem satisfatoriamente os fatos estilizados encontrados nos dados. O objetivo final não é apenas um modelo bem descritivo, assim como, um modelo capaz de produzir previsões razoáveis dos movimentos futuros.

A próxima subseção trata de especificar apropriadamente um processo estocástico característico dos dados financeiros dispostos em alta-frequência, e que representam um caso de um processo mais geral amplamente conhecido como Movimento Browniano.

2.3.1 PROCESSOS SEMIMARTINGALES

De acordo com Visser (2009), um processo *semimartingale* é, em essência, aquele constituído por um conjunto de informações mais um ruído. Em modelos financeiros, em que o ruído é normalmente grande, o sinal é localmente sem importância em comparação com o distúrbio. Seja t o valor de um parâmetro real de tempo. O processo contínuo $r(t)$, também chamado de processo de log-retorno, é um *semimartingale* se é a soma de dois processos ($\mu(t)$), e o ruído ($M(t)$):

$$r(t) = \mu(t) + M(t) \tag{2.14}$$

Onde o processo $(\mu(t))$ tem trajetórias amostrais relativamente suaves, e o processo $(M(t))$ é um processo aleatório e imprevisível. Os incrementos em $\mu(t)$ podem ser pensados como recompensas por se investir no processo arriscado, cujo retorno é $r(t)$.

Para discussões econométricas, ver Barndorff-Nielsen e Shephard (2002b), e Andersen *et. al.* (2003). Segundo Visser (2009), *semimartingales* são matematicamente interessantes, pois constituem uma grande classe de processos relativamente aos quais a integração estocástica é bem definida. Eles apelam para a intuição econômica de como a suposição da ausência de arbitragem implica um *semimartingale*, e, é por isso que formam uma base de preços de derivativos.

A classe de *semimartingales* é grande. Modelos em finanças em tempo contínuo geralmente se enquadram nesta categoria. Exemplos são: o movimento browniano, processos de Itô, e processos de Lévy. De acordo com Delbaen e Schachermayer (1994), um resultado em análise de precificação de ativos é que para um processo estocástico $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, a existência de uma medida *martingale* equivalente é essencialmente equivalente à ausência de oportunidades de arbitragem.

Segundo Andersen *et. al.* (2010), a mensuração da volatilidade do retorno de um ativo requer a determinação da componente de um incremento no preço, dado que esta representa uma inovação ao contrário de um movimento esperado do preço. Em um ambiente em tempo discreto (caso dos modelos ARCH/GARCH), esta identificação só pode ser alcançada através de uma especificação direta da média condicional do retorno, por exemplo através de um modelo de precificação de ativos, de forma que os princípios econômicos venham a impor restrições sobre a forma pela qual está ligada o processo de formação de preços.

Se acordo com os autores, dentro de um quadro de tempo contínuo, a exigência de não-arbitragem (bastante geral) garante que, instantaneamente, a inovação sobre um retorno é de uma ordem de magnitude superior à média dos retornos. Esse resultado não é somente crítico para a caracterização de um processo de tempo contínuo livre de arbitragem, mas, também tem implicações importantes para a abordagem cujo objetivo é a medição e modelagem de volatilidade ao longo de curtos horizontes de tempo (caso dos modelos baseados na volatilidade realizada).

2.4 – MICROESTRUTURA

Este trabalho utiliza dados intradiários da ação da Petrobrás, negociada na BMF&BOVESPA no período compreendido entre 02/01/2007 até 29/10/2010. A partir destes dados são construídas medidas de volatilidade baseadas no retorno diário e na variância realizada. Diversos autores, como Zhou (1996), Bandi e Russel (2004) e Hansen e Lunde (2006), estudaram os efeitos dos ruídos de microestrutura sobre o cálculo da variância realizada. De acordo com esses autores, a presença desses ruídos pode tornar a variância realizada inconsistente e enviesada. Contudo, com o objetivo de mitigar, ou mesmo minimizar os efeitos de microestrutura, amplificados pela utilização de dados intradiários, são realizados ajustes baseados nas técnicas desenvolvidas por Martens (2002).

Ativos que não são negociados durante 24 horas por dia, como é o caso das ações negociadas na BOVESPA, não fornecem intervalos contínuos de tempo. Assim, só é possível observar os retornos intradiários durante o horário de negociação e durante um período posterior ao fechamento do pregão denominado *after-market*¹⁹. Martens (2002) afirma que é possível calcular o retorno entre o fechamento de um dia e a abertura do dia seguinte e utilizá-lo no cálculo da variância realizada deste dia. Entretanto, o mesmo autor afirma ser este retorno um estimador impreciso da volatilidade noturna. Martens (2002) sugere que, caso as negociações ocorridas no *after-market* estejam disponíveis, a volatilidade realizada pode ser calculada por meio da soma dos quadrados dos retornos intradiários e dos retornos *intranight*, ou seja, aquelas ocorridas no *after-market*. A subseção 4.1 explicitará a construção dos indicadores de volatilidade realizada, levando em consideração as questões relacionadas à microestrutura do mercado.

2.5 – EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS E LITERATURA NACIONAL

Os trabalhos envolvendo a utilização de dados financeiros a nível intradiário procuram responder questões concernentes aos ganhos de predição com seu uso, e em relação

¹⁹ O horário de funcionamento dos pregões da BOVESPA se estende de 10 horas da manhã até às 18 horas da noite durante o período de horário de verão, e de 09 da manhã até 17 horas da tarde durante horário regular. O *after-market* se inicia trinta minutos após o fechamento oficial do pregão, com duração de uma hora.

ao nível de frequência a ser utilizada, de modo que possam mitigar os efeitos de microestrutura.

Um dos primeiros trabalhos a utilizar dados intradiários para o cálculo da variância realizada foi desenvolvido por Mota e Fernandes (2002), a partir de retornos do índice IBOVESPA em intervalos de quinze minutos. Neste trabalho, os autores utilizaram modelos da família GARCH e modelos baseados no trabalho desenvolvido por Garman e Klass (1980), ambos com base na variância realizada, para criar estimadores para a volatilidade diária.

O trabalho desenvolvido por Carvalho et. al. (2006) utilizam dados intradiários, com intervalos de quinze minutos, de cinco ações do IBOVESPA para calcular suas volatilidades realizadas. Os autores apontam que a distribuição do logaritmo neperiano da variância realizada era aproximadamente gaussiana e construíram um modelo para prever a volatilidade futura. Os autores compararam o modelo que utilizava a variância realizada com outros modelos normalmente utilizados, como o GARCH, o EGARCH e o EWMA, não encontrando diferenças significativas entre eles.

Moreira e Lemgruber (2004) investigaram o uso de dados de alta-frequência na estimação das volatilidades diária e intradiária do IBOVESPA no cálculo do valor em risco (VaR²⁰). Os modelos GARCH e EGARCH foram usados em conjunto com métodos determinísticos de filtragem da sazonalidade para a previsão da volatilidade e do VaR intradiários. Os autores apontam que o uso de dados intradiários para obtenção de previsões de volatilidade diária é factível e apresenta bons resultados.

Rodrigues (2006) utiliza dados intradiários da ação da Telemar negociada na BOVESPA no período entre 01/12/2003 e 03/12/2004, e constrói medidas de volatilidade baseadas no retorno diário, na amplitude diária, na variância realizada e na amplitude realizada. O autor aponta que as medidas de variâncias construídas a partir de dados intradiários apresentaram um menor desvio-padrão. O autor também desenvolve estimadores para a variância futuros a partir de modelos ARMA (2,2) baseados na volatilidade realizada e na amplitude realizada, e comparou suas estimativas com as do modelo GARCH (1,1) construído com base nos retornos diários e aponta que este foi o que obteve os melhores resultados para todas as *proxys* da variância, com exceção das amplitudes diárias, onde nenhum dos preditores obteve bons resultados.

²⁰ *Value at Risk.*

Meres (2008) apresenta uma medida de volatilidade alternativa, a volatilidade implícita realizada. O autor realiza uma aplicação desta metodologia sob à taxa de câmbio entre Japão e Estados Unidos. Os resultados destacam a alta correlação da medida alternativa com as volatilidades implícitas de mercado, bem como as vantagens da medida alternativa em relação às convencionais.

Cappa e Pereira (2010) analisam as características empíricas de uma série de retornos de dados em alta-freqüência para as ações preferenciais da Petrobrás, e modelaram a volatilidade condicional destes retornos, testando em particular a presença de memória longa entre outros fenômenos que caracterizam este tipo de dados. O trabalho revela que além da memória longa, existe forte sazonalidade intradiária, mas não encontram evidências de um fato estilizado de retornos de ações, o efeito alavancagem.

Milach (2010) realiza um estudo da volatilidade dos retornos dos ativos onde analisa como os modelos que incorporam dados intradiários se comportam, em termos de acurácia de previsão de volatilidade diária, em relação àqueles que utilizam apenas dados diários. O autor utiliza dados dos índices Ibovespa e S&P 500 durante o período de janeiro de 2006 a junho de 2009. Os resultados apontam que o desempenho de previsão dos modelos estimados a partir de dados diários foi superior ao dos modelos de variância realizada para os dois índices. O autor compara ainda o comportamento dos modelos durante o período da crise de 2008, onde os resultados apontaram novamente para uma melhor acurácia de previsão dos modelos que utilizaram apenas dados diários.

3 – DA BASE DE DADOS

Os dados utilizados no presente trabalho foram computados pela Bloomberg e disponibilizados pela BMF&BOVESPA, contendo dados de negociações do papel PETR4 da empresa Petrobrás S.A., num formato intradiário, composto pelas negociações efetuadas (*ticks*) durante o período de 02/01/2007 à 29/10/2010. Os dados no seu formato inicial somavam 15.243.420 observações.

O pregão oficial da BMF&BOVESPA tem início às 10h00min da manhã, com fechamento às 17h00min da noite, no entanto, há negociações computadas no *after-market*²¹, cujo limite se dá às 19h00min da noite. Durante o horário de verão, o pregão se altera, iniciando às 11 horas da manhã, encerrando às 18h00min da noite, sendo o *after-market* encerrado às 20h00min. Porém, algumas restrições para operação no *after* Bovespa. Elas não são muitas e são definidas visando prevenir grandes oscilações de preços e volume, e desequilíbrios no mercado. Como o tempo total de funcionamento permaneceu o mesmo durante toda a amostra (7 horas diárias), o número de intervalos intradiários também será o mesmo, possibilitando o uso de todos os dados disponíveis. Entretanto, nas quartas-feira de cinzas, o horário de funcionamento da BOVESPA é alterado, sendo iniciado às 13h00min (duas horas após o horário normal), e assim como em Rodrigues (2006), optou-se pela exclusão da amostra nestes dias.

Dados os acontecimentos que envolvem a base acionária da empresa, e que provocam a descontinuidade no preço de suas ações, houve a necessidade de uma correção de modo captar a distribuição dos proventos²² durante o período de análise. É necessário então que as cotações anteriores a um provento sejam ajustadas de maneira a serem comparáveis às cotações pós-provento, e a refletir somente valorizações e desvalorizações puras. Tal ajuste é feito multiplicando-se as cotações desde o início do histórico até o dia antes da data EX pelo fator de ajuste.

²¹ O *after-market* da Bovespa é um período do dia em que a bolsa de valores funciona após o pregão normal (que acontece em horário comercial). Em linhas gerais, o *after* Bovespa nada mais é do que um horário extra de funcionamento da bolsa. Ele possibilita aos investidores, que não têm como acompanhar o mercado durante o horário normal de pregão, investir na bolsa neste horário extra.

²² Bonificações, desdobramentos, agrupamentos e reduções de capital com data EX entre a data do demonstrativo do qual se extraiu a quantidade de ações e a data para a qual se está calculando o indicador.

Tal ajuste é feito multiplicando-se as cotações desde o início do histórico até o dia antes da data EX pelo fator de ajuste. A **Tabela 3.1** abaixo descreve os proventos distribuídos pela Petrobrás S.A. durante o período de análise:

Tabela 3.1 - Proventos Distribuídos pela Petrobrás S.A. Durante o Período de 02/01/2007 à 29/10/2010

Data EX	Provento Distribuído
02/04/2007	Dividendo de \$0,3606 por acao
17/08/2007	Juros sobre o capital próprio de \$0,50 por ação
05/10/2007	Juros sobre o capital próprio de \$0,50 por ação
11/01/2008	Juros sobre o capital próprio de \$0,301 por ação
04/04/2008	Juros sobre o capital próprio de \$0,1539 por ação
04/04/2008	Dividendo de \$0,0513 por acao
25/04/2008	Desdobramento: Cada acao sera substituida p/ 2,00 novas acoes
26/12/2008	Juros sobre o capital próprio de \$0,80 por ação
08/04/2009	Dividendo de \$0,3404 por acao
03/07/2009	Juros sobre o capital próprio de \$0,30 por ação
30/09/2009	Juros sobre o capital próprio de \$0,20 por ação
18/12/2009	Juros sobre o capital próprio de \$0,20 por ação
22/04/2010	Dividendo de \$0,1332 por acao
22/04/2010	Juros sobre o capital próprio de \$0,1201 por ação
21/05/2010	Juros sobre o capital próprio de \$0,20 por ação
30/07/2010	Juros sobre o capital próprio de \$0,20 por ação

Fonte: Economática.

Como informado em capítulo anterior, os dados são dispostos em intervalos irregularmente espaçados no tempo, implicando na necessidade da criação das janelas de negociação visando o cálculo da volatilidade realizada. Desta forma, o que se pretende dizer é que há a necessidade da formação de intervalos de tempo bem definidos (5, 15, 30 minutos), cujos números de negociações ocorridas durante estes intervalos são, portanto, aleatórios. O primeiro problema enfrentado na formação da base de dados se mostrou neste ponto. Sendo assim, foi necessária a criação de um algoritmo computacional que identificasse as negociações para os respectivos intervalos de tempo desejados, para cada dia de negociação.

Compostas as janelas de negociação intradiárias, o segundo passo da formação da base de dados se pauta na coleta das cotações relevantes. Para o cômputo da volatilidade realizada seriam relevantes as seguintes informações segundo Visser (2009): as raízes quadradas da soma dos quadrados dos retornos para os intervalos de 5, 15 e 30 minutos²³ (o

²³ Visser (2009) sugere a extração de outras informações do processo de retornos intra-diários, mas foram omitidas no presente estudo.

processo pelo qual foram formadas as volatilidades realizadas será descrito no capítulo quatro, na subseção 4.1).

Após este processo de construção, a base de dados ficou constituída de 942 observações contendo: as volatilidades realizadas (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}), e dos retornos de fechamento (log-retornos *close-to-close*). A base de dados então foi dividida em duas partes, a primeira contendo 852 observações, destinada ao processo de ajustamento dos modelos ARIMA e da família ARCH/GARCH, e outra contendo 90 observações, de modo a constituir o horizonte de previsão, visando à avaliação da capacidade preditiva destes modelos com respeito à volatilidade do papel da Petrobrás.

4 – METODOLOGIA

Neste capítulo será apresentada inicialmente, a forma pela qual foram computadas as volatilidades realizadas a partir dos dados intradiários (*ticks*), de forma a construir os indicadores de volatilidade diária (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}). Na subseção 4.2 será mostrado como os modelos ARIMA foram estimados, de forma a permitir uma avaliação posterior do grau de ajustamento e da qualidade preditiva de tais modelos. Na subseção 4.3 são apresentados os modelos convencionalmente utilizados na literatura econométrica para a modelagem de processos que exibem heterocedasticidade condicional, ou seja, os modelos da família ARCH/GARCH.

4.1 – CONSTRUÇÃO DA VOLATILIDADE REALIZADA

Como dito, os dados intradiários são coletados num formato *tick-by-tick*, onde cada *tick* representa uma unidade lógica de informação. Seja P_{it} o preço da i -ésima negociação ocorrida durante o t -ésimo dia de pregão. O primeiro passo foi determinar as negociações ocorridas durante o *after-market*, ou seja, todas as negociações efetuadas após às 18:00 horas da noite durante o período do ano em que vigorava o horário de verão, e após às 17:00 horas da tarde, cujo funcionamento dos pregões foi regular. Em seguida, determinou-se qual intervalo intradiário seria computado, de início, o intervalo de trinta minutos ($\Delta = 30$), totalizando 16 janelas por dia (oito horas de pregão). Portanto, a cada trinta minutos de negociações registrou-se a última negociação de cada subintervalo, formando o processo $P_{1,t}, P_{2,t}, \dots, P_{16,t}$, para cada um dos 942 dias amostrados (de 02/01/2007 até 29/10/2010).

De posse dos preços registrados conforme o procedimento acima descrito foram computados os *log-retornos* intradiários

$$r_{nt} = \ln(P_{n,t}) - \ln(P_{(n-1),t}) \quad (4.1)$$

Para o retorno *overnight*:

$$r_t = \ln(P_{1,t}) - \ln(P_{16,(t-1)}) \quad (4.2)$$

Sabendo que, $n = 1, \dots, 16$ e $t = 1, \dots, 942$. A *variância realizada* de trinta minutos é calculada como:

$$VR_{\Delta=30,t}^2 = \sum_{n=1}^{16} |\ln(P_{n,t}) - \ln(P_{(n-1),t})|^2 \quad (4.3)$$

A volatilidade realizada fica:

$$RV_{\Delta=30,t} = \sqrt{VR_{\Delta=30,t}^2} \quad (4.4)$$

O mesmo procedimento foi replicado para os intervalos de cinco (96 subintervalos) e quinze minutos (32 subintervalos), gerando os processos $RV_{\Delta=5,t}^2$ e $RV_{\Delta=15,t}^2$, a partir dos quais é possível, agora, a estimação de modelos da família ARIMA.

No entanto, conforme Martens (2002), quando as negociações durante a noite estão disponíveis, a volatilidade durante a noite pode ser aproximada pela soma dos retornos *intranight* ao quadrado, da seguinte forma:

$$RV_{\Delta,t} = \sum_{n=1}^N (r_{n,t}^N)^2 + \sum_{d=1}^D (r_{d,t}^D)^2 \quad (4.5)$$

Onde $r_{n,t}^N$ é o retorno *intranight* durante o período *intranight* no dia t .

4.2 - MODELOS ARIMA:

Considere uma amostra observada de tamanho T de alguma variável, por exemplo, Y_t , dada por $\{y_1, \dots, y_T\}$. E de uma coleção de T variáveis aleatórias i.i.d. ε_t , de tal forma que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, denominada de processo de *Ruído Branco Gaussiano*. Segundo Hamilton (1994), um processo de Média Móvel de ordem q (MA(q)) pode ser caracterizado como:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (4.6)$$

Onde $(\theta_1, \dots, \theta_q)$ poderiam ser números reais quaisquer. A média da equação acima é dada por:

$$E(Y_t) = \mu + E(\varepsilon_t) + \theta_1 \cdot E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 \cdot E(\varepsilon_{t-2}) + \dots + \theta_q \cdot E(\varepsilon_{t-q}) = \mu \quad (4.7)$$

E a variância do processo MA(q) pode ser dado por:

$$\gamma_0 = E(Y_t - \mu)^2 = E\left(\theta_1 \cdot E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 \cdot E(\varepsilon_{t-2}) + \dots + \theta_q \cdot E(\varepsilon_{t-q})\right)^2 \quad (4.8)$$

A função de autocovariância é dada por:

$$\gamma_j = \begin{cases} [\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \dots + \theta_q\theta_{q-j}] \cdot \sigma^2 & \text{para } j = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{para } j > q \end{cases} \quad (4.9)$$

Alguns pontos merecem destaque como: a esperança é constante e finita para cada t ; a variância é finita e não depende de t ; e todas as autocovariâncias nas quais $j > q$ são nulas.

Segundo Bueno (2008), a ideia de um processo de médias móveis está associada aos erros do modelo, e mais, seus pesos podem ser diferentes conforme a importância das observações passadas.

De acordo com Hamilton (1994), um processo Autorregressivo de ordem p (AR(p)) satisfaz:

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.10)$$

Proporcionando as raízes dadas por:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0 \quad (4.11)$$

Se as raízes da equação estiverem todas fora do círculo unitário, é fácil verificar que uma representação convariância-estacionária da forma $Y_t = \mu + \psi(L)\varepsilon_t$ existe. Onde:

$$\psi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)^{-1} \quad (4.12)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \quad (4.13)$$

Supondo que a condição de estacionariedade é satisfeita, pode-se encontrar a média do processo:

$$\mu = c / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \quad (4.14)$$

As autocovariâncias são definidas pela multiplicação de ambos os lados da equação acima por $(Y_{t-j} - \mu)$ e tomando as esperanças:

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} & \text{para } j = 1, 2, \dots \\ \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2 & \text{para } j = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Pode-se verificar que, dado que tanto a esperança quanto autocovariâncias não são funções do tempo, implicando que o processo é *fracamente estacionário*. A ideia por trás de um modelo AR (p) é similar a um modelo de regressão múltipla, onde os valores passados de Y_t fazem o papel dos regressores. Assim, processos AR podem ser usados como modelo se for razoável assumir que o valor atual de uma série temporal depende do seu passado mais um erro aleatório.

Segundo Morettin (2008), um processo auto-regressivo de médias móveis de ordem p e q , abreviadamente ARMA²⁴(p, q) pode ser dado por uma equação de diferenças:

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (4.16)$$

De tal forma que $\varepsilon_t \sim RB^{25}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Podemos escrever a expressão acima como:

$$\phi(L)_p \tilde{Y}_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \quad (4.17)$$

Onde:

$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1L - \dots - \phi_pL^p \quad (4.18)$$

$$\theta_q(L) = 1 - \theta_1L - \dots - \theta_qL^q \quad (4.19)$$

Com $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$, e sendo L o operador de defasagem (ou retroativo).²⁶ No entanto, suporemos a partir de então, que $\mu = 0$, a menos que se faça menção em contrário. Segundo Wei (1990), para que o processo acima descrito seja invertível é necessário que $\theta_q(L) \neq 0$, ou seja, que suas raízes estejam fora do círculo unitário. Para a estacionariedade, requer-se que as raízes de $\phi_p(L) = 0$ estejam igualmente fora do círculo unitário. Segundo o autor, supõe-se também que $\theta_q(L) = 0$ e $\phi_p(L) = 0$ não compartilhem raízes comuns. Assim, p e q são as ordens dos polinômios relativos aos processos auto-regressivos e de médias móveis, respectivamente.

No entanto, várias séries econômicas e financeiras são não-estacionárias, mas, quando diferenciadas tornam-se estacionárias. A título de exemplo, Z_t é não-estacionária, mas o processo abaixo é estacionário:

$$W_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - L)Z_t = \Delta Z_t \quad (4.20)$$

Cabe ressaltar que esta dissertação trata de séries cujo comportamento seja não explosivo, particularmente, séries que apresentam alguma homogeneidade em seu “comportamento não-estacionário”. Assim, séries Z_t que, tomando-se um número finito de

²⁴ *Autoregressive Moving Average*.

²⁵ Ruído branco.

²⁶ O operador de translação para o passado, denotado por B pode ser assim definido:

$$L^m Z_t = Z_{t-m}$$

O operador de diferenças se dá no seguinte formato:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - L)Z_t.$$

diferenças (d), tornam-se estacionárias, são denominadas *não-estacionárias homogêneas*, ou ainda, portadoras de *raízes unitárias*.

Se $W_t = \Delta^d Z_t$ for estacionária, podemos representar W_t por um modelo ARMA (p, q), como mostrado na equação:

$$\phi(L)\Delta^d Z_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (4.21)$$

Sabendo que no modelo acima todas as raízes de $\phi(B)$ estão **fora do círculo unitário**, é equivalente escrever:

$$\varphi(L)Z_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (4.22)$$

Onde $\varphi(L)$ é um operador auto-regressivo não-estacionário, de ordem $p + d$, com de raízes iguais a um (sobre o círculo unitário), e as restantes p fora do círculo unitário, ou seja:

$$\varphi(L) = \phi(L)\Delta^d = \phi(L)(1 - L)^d \quad (4.23)$$

Quer dizer, o modelo acima supõe que a d -ésima diferença da série Z_t pode ser representada por um modelo ARMA, estacionário e invertível. Segundo Morettin e Tolo (2006), com $d = 1$ ou $d = 2$, é suficiente para inspecionar as primeiras 15 ou 20 autocorrelações da série e suas diferenças. Estes valores para d correspondem a dois casos interessantes e comuns de não-estacionariedade homogênea:

a) Séries não-estacionárias quanto ao nível, pois oscilam ao redor de um nível médio durante algum período de tempo e posteriormente saltam para outro nível temporário, caso em que para torna-las estacionárias é suficiente tomar uma diferença, caso este, típico de séries econômicas;

b) Séries não-estacionárias quanto à inclinação, pois oscilam por algum tempo e depois mudam a direção para outra temporária, sendo necessário tomar a segunda diferença para torna-las estacionárias.

Para a verificação da necessidade de se tomar diferenças nas séries originais (RV_5 , RV_{15} , RV_{30} e r_t^2) os testes de raízes unitárias utilizados foram o Dickey-Fuller Aumentado (ADF) e o Phillips Perron (PP).

Assim como no teste ADF, o teste de Phillips-Perron (1988) sugere que uma variável tem uma raiz unitária. A hipótese nula é que a variável contém uma raiz unitária, contra a alternativa de que a variável foi gerada por um processo estacionário. O teste de PP os erros

padrão para dar conta da correlação serial, enquanto que o teste ADF usa *lag's* adicionais da primeira variável diferenciada.

O teste Dickey-Fuller (DF) consiste em ajustar por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS²⁷) o seguinte modelo:

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \delta t + u_t \quad (4.27)$$

Contudo, a correlação serial irá se constituir num problema. Visando contornar o problema, o teste ADF inclui *lag's* das primeiras diferenças de y_t . O de PP envolve ajustar o modelo (1), e em seguida, os resultados são usados para calcular as estatísticas de teste²⁸.

Agora, sendo $\{Y_t, t \in Z\}$ seguindo um modelo ARIMA (p, d, q) se $\Delta^d Y_t$ seguir um modelo ARMA (p, q) , ou seja, temos:

$$\phi(L)\Delta^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (4.28)$$

Ao se estabelecer um modelo ARIMA para uma série de tempo, há a necessidade de se considerar três estágios:

- i) Identificação;
- ii) Estimação;
- iii) Diagnóstico.

Assim, segundo Morettin e Tolo (2006), a construção do modelo será baseada no ciclo iterativo das etapas (i)-(iii), na qual a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados. Portanto, antes de iniciar o ciclo acima, é necessário considerar uma classe geral de modelos para a posterior análise. Essa é a metodologia comumente utilizada na análise de modelos paramétricos, conhecida como abordagem de Box e Jenkins, que em suma consiste em ajustar modelos auto-regressivos integrados de médias móveis, ARIMA (p, d, q) , a um conjunto de dados.

O processo de identificação da ordem do processo ARMA se dá, principalmente por meio da análise função de autocorrelação (fac) e função de autocorrelação parcial. Contudo, dada à forma complicada da fac e da facp de um modelo ARMA, estas funções não são muito úteis para identificar tais modelos. Assim, Morettin e Tolo (2006) recomendam o ajuste de

²⁷ One Least Squares.

²⁸ Para maiores detalhes ver Hamilton (1994).

alguns modelos de ordem baixa, e fazendo uso de algum critério que permita escolher o modelo mais adequado.

Existem várias metodologias para a identificação de modelos ARIMA. São encontrados na literatura métodos baseados em uma função penalizadora, como os critérios de Akaike (1973) ou o Bayesiano. Segundo Morettin e Tolo (2006), para a comparação de modelos baseados numa mesma amostra, a forma simplificada do critério de Akaike sugere escolher o modelo cujas ordens “ k ” e “ l ” minimizam a quantidade:

$$AIC(k, l) = N \cdot \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2(k + l + 2) \quad (4.29)$$

Onde $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é o estimador de máxima verossimilhança de σ_ε^2 . O critério de informação Bayesiano, no caso de um modelo ARMA é dado por:

$$BIC(k, l) = \ln(\hat{\sigma}_{k,l}^2) + (k + l) \cdot \frac{\ln(N)}{N} \quad (4.30)$$

Onde $\hat{\sigma}_{k,l}^2$ é a estimativa de máxima verossimilhança da variância residual do modelo ARMA(k, l).

O processo de estimação foi realizado por meio do método de máxima verossimilhança. Seja um processo ARMA(p, q), estacionário e invertível dado por:

$$\varepsilon_t = Y_t - \mu - \phi_1(Y_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p(Y_{t-p} - \mu) - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (4.31)$$

Para calcular os ε_t , é necessário obter valores iniciais para os Y 's e para os ε 's. Esta questão, segundo Morettin (2006) pode ser resolvida por meio de dois procedimentos: um condicional, no qual os valores iniciais desconhecidos são substituídos por valores supostos razoáveis, e outro incondicional, no qual os valores iniciais são estimados por um procedimento denominado “*backforecasting*”²⁹. O procedimento incondicional foi o implementado nesta dissertação, e pode ser resumido como: seja o logaritmo da função de verossimilhança não-condicional dado por:

$$\ell(\xi) \cong -n \cdot \log \sigma_\varepsilon - \frac{S(\boldsymbol{\eta})}{2\sigma_\varepsilon^2} \quad (4.32)$$

Em que:

$$S(\boldsymbol{\eta}) = S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^n [\varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y})]^2 \quad (4.33)$$

É a soma de quadrados não condicional, com:

²⁹ *Previsão para trás.*

$$[\varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y})] = E(\varepsilon_t | \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}) \quad (4.34)$$

Segue que os estimadores de mínimos quadrados obtidos, minimizando-se $S(\boldsymbol{\eta})$, serão boas aproximações para os estimadores de máxima verossimilhança. O procedimento de *backforecasting* para calcular $[Y_{-j}]$ e $[\varepsilon_{-j}]$, com $j = 0, 1, 2, \dots$, é utilizado para iniciar o processo de estimação, gerando (prevendo) valores antes do início da série.

Após o processo de estimação, é necessária a realização de um diagnóstico do modelo ajustado. Segundo Morettin (2006), os resíduos de um modelo bem ajustado devem seguir um ruído branco. O teste de Bartlett's³⁰ baseado no *periodograma acumulado* é realizado de modo a constatar este fato. Assim, se y_1, \dots, y_t é a realização de um processo de ruído branco com variância σ^2 , a distribuição espectral pode ser dada por $F(\omega) = \sigma^2 \omega$, para $\omega \in [0, 1]$, e espera-se que o periodograma acumulado dos dados esteja próximo dos pontos dados por: $S_k = \frac{k}{q}$ para $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, k = 1, \dots, q$.³¹

Exceto para $\omega = 0$ e $\omega = 0,5$, a variável aleatória $2\hat{f}(\omega_k)/\sigma^2$ é assintoticamente independente e identicamente distribuída como uma X_2^2 . Devido que uma distribuição X_2^2 é a mesma de uma dupla de variáveis aleatórias distribuída exponencialmente com média um, o *periodograma acumulado* tem aproximadamente a mesma distribuição como os valores ordenados de uma distribuição uniforme (FELLER, 1948). Isso resulta em:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \Pr \left(\max_{1 \leq k \leq q} \sqrt{q} \cdot \left| U_k - \frac{k}{q} \right| \leq a \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2a^2 j^2} = G(a) \quad (4.35)$$

Onde U_k é uma quantidade uniformemente ordenada. A estatística Bartlett é computada como:

$$B = \left(\max_{1 \leq k \leq q} \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \left| \hat{F}_k - \frac{k}{q} \right| \right) \quad (4.36)$$

Onde \hat{F}_k é o *periodograma acumulado* definida em termos de uma amostra da densidade espectral \hat{f} dada por:

$$\hat{F}_k = (\sum_{j=1}^k \hat{f}(\omega_j)) / (\sum_{j=1}^q \hat{f}(\omega_j)) \quad (4.37)$$

³⁰ Para uma discussão deste teste, ver Bartlett (1955).

³¹ A quantidade $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual à $\frac{n}{2}$.

O p-valor associado para a estatística de Bartlett e os intervalos de confiança são computadas como $1 - G(B)$ usando o resultado de Feller (1948). Segundo Morettin (2006), usando a definição de espectro, é possível verificar que se u_t seguir um ruído branco, então seu espectro é constante e igual a $2\sigma_a^2$ no intervalo $\left[0, \left(\frac{1}{2}\right)\right]$.

O outro teste empregado na verificação dos resíduos para que estes sigam um processo de ruído branco foi o teste de Portmanteau. O teste se baseia no fato de que, se $y(1), \dots, y(t)$ é uma realização de um processo ruído branco, então:

$$Q = t(t + 2) \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{t-j} \hat{\rho}^2(j) \rightarrow X_m^2 \quad (4.38)$$

Onde m é o número de autocorrelações calculadas (igual ao número de defasagens especificadas). A expressão acima indica que Q converge em distribuição para uma qui-quadrado com m graus de liberdade. Além disso, $\hat{\rho}_j$ é a autocorrelação estimada para o lag “ j ”. Para maiores detalhes, ver Sperling e Baum (2001).

4.3 – MODELOS ARCH:

Após especificar o que se entende por “volatilidade”, em especial, de ativos financeiros, esta seção desenvolve alguns métodos cujo objetivo se pauta na sua mensuração. É importante ressaltar que a maioria do conhecimento empírico registrado até o presente momento, no que tange às dependências temporais da volatilidade nos mercados financeiros, provavelmente foi derivada da estimação e inferência com modelos do tipo ARCH³².

Várias pesquisas desta literatura já existem (uma lista resumida Andersen e Bollerslev (1998a, 1998b), Andersen *et. al.* (2006), Bollerslev *et. al.* (1992,1994), entre outros.

Nas palavras de Engle (1982):

“Traditional econometric models assume a constant one-period forecast variance. To generalize this implausible assumption, a new class of stochastic processes called auto-regressive conditional heteroscedastic (ARCH) processes are introduced in this paper. These are mean zero, serially

³² ARCH é a abreviação de Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

uncorrelated processes with nonconstant variances conditional on the past, but constant unconditional variances. For such processes, the recent past gives information about the one-period forecast variance.” (ENGLE, 1982, p.1)³³

A classe de modelos ARCH difere dos modelos de tempo discreto, em que as expectativas com parâmetros condicionais dependem exclusivamente de variáveis diretamente observáveis. Esse pressuposto facilita muito a inferência estatística vis-à-vis os modelos de tempo discreto, e sua utilização generalizada na aplicação em trabalhos empíricos, em parte, decorre da facilidade com que os tradicionais procedimentos de (quase) máxima verossimilhança podem ser aplicados.

Desenvolvimentos recentes em econometria financeira sugerem o uso de estruturas não lineares de séries de tempo para modelar o comportamento dos investidores em relação ao risco e ao retorno esperado. Por exemplo, Perrelli (2001), observou que "uma das grandes contribuições da literatura ARCH é a constatação de que mudanças aparentes na volatilidade das séries temporais econômicas podem ser previsíveis e resultam de um tipo específico de dependência não-linear, em vez de mudanças estruturais exógenas nas variáveis".

Há na literatura financeira diversos trabalhos que estudam modelos de volatilidade para retornos de ativos financeiros, de modo que os trabalhos se pautam na comparação das suas capacidades preditivas. Na maioria deles, o procedimento adotado é o de dividir a série em duas amostras: a primeira utilizada para estimação dos parâmetros e construção do modelo; e a segunda, utilizada para a análise da performance do modelo. Em cada um deles, as conclusões são quase as mesmas, isto é, não há nenhum modelo de previsão que se destaque em relação aos outros.

De acordo com Morettin (2008), o objetivo de tais modelos é modelar a volatilidade manifestada de várias maneiras numa série financeira:

- a) A volatilidade aparece em grupos, de maior ou menor variabilidade;
- b) A volatilidade evolui continuamente no tempo;
- c) Ela reage de modo diferente a valores positivos ou negativos da série.

³³ “Modelos econométricos tradicionais assumem uma variância de previsão de um período como constante. Visando generalizar esta hipótese implausível, uma nova classe de processos estocásticos chamada de processos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional (ARCH) são introduzidos neste trabalho. Estes são média zero, processos serialmente não-correlacionados com variações condicionais sobre o passado não-constantes, mas com variações incondicionais constantes. Para tais processos, o passado recente fornece informações sobre a previsão de variação de um período. ” (Tradução livre).

De acordo com Engle (1982), se uma variável aleatória y_t é retirada de uma função densidade do tipo $f(y_t|y_{t-1})$, o valor da previsão de hoje, baseada nas informações passadas, sob certas suposições estruturais, é simplesmente $E(y_t|y_{t-1})$, o qual depende obviamente, dos valores condicionados à y_{t-1} . Engle (1982) informa que essa expressão reconhece que a variância condicional do valor previsto de informações passadas e, portanto, pode ser uma variável aleatória. Cabe ressaltar que, para modelos econométricos convencionais, contudo, a variância condicional não depende y_{t-1} .

Sendo assim, consideremos inicialmente, um modelo auto-regressivo de primeira ordem p (denotado por $AR(p)$):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + (\dots) + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (4.39)$$

O termo u_t refere-se ao ruído branco, cujos parâmetros são:

$$E(u_t) = 0 \quad (4.40)$$

$$E(u_t, u_\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{para } t = \tau \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.41)$$

De acordo com Hamilton (1994), a previsão ótima para o nível de y_t para um processo $AR(p)$ é:

$$\hat{E}(y_t|y_{t-1} + (\dots) + y_{t-p}) = c + \phi_1 y_{t-1} + (\dots) + \phi_p y_{t-p} \quad (4.42)$$

Cabe ressaltar que o processo acima descrito é convariância-estacionário, implicando que as raízes estão fora do círculo unitário. Assim, a $\hat{E}(y_t|y_{t-1} + (\dots) + y_{t-p})$ denota a projeção linear numa constante e em $(y_{t-1} + (\dots) + y_{t-p})$. De acordo com Hamilton (1994), a média não-condicional de y_t é constante, e dada por:

$$E(y_t) = \frac{c}{1 - \phi_1 - (\dots) - \phi_p} \quad (4.43)$$

Mas, o que se deseja entender é a variância da série y_t , ou seja, de que uma variância que muda ao longo do tempo, também tem implicações para a validade e eficiência da inferência estatística sobre os parâmetros $(c, \phi_1, \dots, \phi_p)$ que descrevem a dinâmica do nível de y_t (HAMILTON, 1994). Uma abordagem para descrever o quadrado de μ_t é dada por um processo $AR(m)$:

$$\mu_t^2 = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + (\dots) + \alpha_m \mu_{t-m}^2 + w_t \quad (4.44)$$

Onde w_t representa um novo processo de ruído branco, cujos parâmetros são:

$$E(w_t) = 0 \quad (4.45)$$

$$E(w_t, w_\tau) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{para } t = \tau \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.46)$$

Desde que μ_t seja o erro de previsão de y_t , a expressão $\mu_t^2 = \zeta + \alpha_1\mu_{t-1}^2 + (\dots) + \alpha_m\mu_{t-m}^2 + w_t$ implica que a projeção linear do quadrado dos erros de uma previsão de y_t , nos m erros quadrados previstos é dada por:

$$\hat{E}(u_t^2 | u_{t-1}^2, (\dots), u_{t-m}^2) = \mu_t^2 = \zeta + \alpha_1\mu_{t-1}^2 + (\dots) + \alpha_m\mu_{t-m}^2 \quad (4.47)$$

Desde que μ_t seja aleatório e μ_t^2 não possa ser negativo, esta pode ser uma representação sensata somente se $\hat{E}(u_t^2 | u_{t-1}^2, (\dots), u_{t-m}^2)$ é positivo, e μ_t^2 é não-negativo para todas as realizações de $\{\mu_t\}$. Esta proposição pode ser assegurada se w_t é delimitada “por baixo”, isto é, se $\zeta > 0$ e $\alpha_j \geq 0, \forall j$ com $j = 1, \dots, m$. A fim de que μ_t^2 seja covariância-estacionário, requer-se que as raízes do polinômio abaixo estejam fora do círculo unitário.

$$1 - \alpha_1 Z - \alpha_2 Z^2 - \alpha_m Z^m = 0 \quad (4.48)$$

Quando todas estas condições são satisfeitas, a variância incondicional de μ_t é dada por:

$$\sigma^2 = E(\mu_t^2) = \frac{\xi}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - (\dots) - \alpha_m} \quad (4.49)$$

De acordo com Engle (1982), um modelo preferível é:

$$u_t = h_t^{\frac{1}{2}} \cdot v_t \quad (4.50)$$

$$h_t = \zeta + \alpha_1\mu_{t-1}^2 + (\dots) + \alpha_m\mu_{t-m}^2 \quad (4.51)$$

Onde $E(v_t) = 0$, e $E(v_t^2) = V(v_t) = 1$. Adicionando a suposição de normalidade, tudo isso pode ser mais diretamente expresso em termos das informações disponíveis até o tempo t , denotado por \mathcal{F}_t . Usando densidades condicionais, Engle (1982) define que:

- a) $\mu_t | \mathcal{F}_t \sim N(0, h_t)$;
- b) $h_t = \zeta + \alpha_1\mu_{t-1}^2 + (\dots) + \alpha_m\mu_{t-m}^2$.

Deve-se observar ainda que após as apropriadas substituições, o resultado é:

$$h_t \cdot v_t^2 = h_t + w_t \quad (4.52)$$

Portanto, sob a especificação (4.52), a inovação w_t numa representação $AR(m)$ para μ_t^2 pode ser expressa como:

$$w_t = h_t \cdot (v_t^2 - 1) \quad (4.53)$$

Note que, a $E(w_t^2) = \lambda^2$, e assim, a variância condicional de w_t se modifica ao longo do tempo. Segundo Hamilton (1994), a variância não-condicional de w_t reflete o quarto momento de μ_t .

O modelo de regressão em ARCH (m) tem uma variedade de características que o tornam atraente para aplicações econométricas, mesmo em áreas distintas da ciência econômica, como meteorologia, por exemplo.³⁴

Um segundo exemplo é encontrado em teoria monetária e da teoria das finanças. Por mais simples suposições, carteiras de ativos financeiros sejam detidos em função dos meios previstos e as variações das taxas de retorno. Quaisquer mudanças na demanda de ativos devem estar associados a mudanças nos meios esperados e variâncias das taxas de retorno. Se a média é assumida a seguir um padrão ou modelo de regressão de séries temporais, a variação é imediatamente obrigado a ser uma constante ao longo do tempo. O uso de uma variável exógena para explicar as mudanças na variância geralmente não é apropriado.

Outra interpretação possível, segundo Engle³⁵ (1982) é que o modelo de regressão ARCH é uma aproximação a uma regressão mais complexa, que tem distúrbios que não seguem um processo ARCH. A especificação ARCH pode captar o efeito de variáveis omitidas do modelo estimado. A existência de um efeito ARCH seria interpretada como prova de heterogeneidade. Se este for o caso, ARCH pode ser uma melhor aproximação da realidade do que se realizar suposições sobre o padrão de distúrbios, mas tentar encontrar a fonte da heterogeneidade seria ainda melhor.

4.4 - MODELOS GARCH/EGARCH/GARCH-GJR

Uma generalização natural do processo descrito na subseção anterior foi proposta por Bollerslev (1986), cuja proposta visava permitir variâncias condicionais passadas pudessem ser inclusas na equação da variância condicional atual, ou seja, o autor permitiu que a

³⁴ Ver McNees (1979) para maiores detalhes.

³⁵ O autor permite a inclusão de uma gama de outras variáveis explicativas em seu modelo ARCH (apesar de não tê-lo feito em seu seminal artigo). Para um melhor entendimento de modelos ARCH em um contexto multivariado, ver Lutkepohl (2005).

volatilidade condicional também fosse explicada pelas suas próprias defasagens além das defasagens dos quadrados dos erros.

Bollerslev (1986) aplicou o modelo GARCH para os retornos financeiros diários. Existem inúmeros artigos sobre o modelo GARCH, com sua investigação em curso até hoje. O amplo uso de modelos GARCH é devido a sua fácil aplicabilidade, e à demanda por modelos com volatilidade não constante. O modelo ARCH generalizado (GARCH – *generalized* ARCH) pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.

Seja um processo μ_t seguindo um $ARCH(p)$, caracterizado por:

$$u_t = h_t^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_t \quad (4.54)$$

$$h_t = \zeta + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i} + w_t \quad (4.55)$$

De acordo com Bollerslev (1986), seja μ_t um valor real de um processo estocástico em tempo discreto, e \mathcal{F}_t o conjunto informacional capturado até o tempo t . O processo $GARCH(p, q)$ é então, dado por:

- a) $\mu_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t)$;
- b) $h_t = \zeta + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i} = \zeta + A(L)\mu_t^2 + B(L)h_t$.³⁶

Onde $p \geq 0, q > 0, \zeta > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, q$. No processo $ARCH(q)$ a variância condicional é especificada como uma função linear apenas de variâncias amostrais passadas, enquanto processo o $GARCH(p, q)$ permite variâncias condicionais defasadas a serem também representadas. Segundo o autor, isso corresponde a algum tipo de mecanismo de *aprendizagem adaptativa*. Mas, de acordo com Hamilton (1994), alguns podem acreditar que isso advém do fato de que o processo $GARCH$ capta os movimentos da média, contudo, este não é o caso.

No caso do modelo GARCH (1,1), o tamanho dos parâmetros α e β determinam as dinâmicas de curto prazo das séries de tempo da volatilidade resultante. Valores grandes do coeficiente β das defasagens indicam que os choques da variância condicional levam um longo tempo para desaparecer, desse modo a volatilidade é “persistente”. Grandes valores α

³⁶ Podemos imaginar um processo para o qual a variância condicional depende de um número infinito de *lags* (defasagens) de μ_{t-i}^2 . Assim, uma natural parametrização $A(L)$ foi realizada como a razão de dois polinômios de ordem finita, e de forma análoga, a mesma parametrização $B(L)$ foi feita para h_t . Para maiores detalhes, ver Hamilton (1994).

do erro significam que a volatilidade reage muito intensamente aos movimentos do mercado e, desse modo, se o coeficiente alfa é relativamente elevado e o coeficiente beta é relativamente baixo, então as volatilidades tendem a ser mais “**reativas**”.

A reação das estimativas da volatilidade aos eventos de mercado é estabelecida com uma força que é determinada pelo coeficiente " α ". Independente do que acontece no mercado, *se a volatilidade foi elevada ontem, então ela permanece elevada hoje*: essa informação é obtida pelo coeficiente " β ". Nesses termos, discute-se que uma das aplicações mais úteis desses modelos encontra-se na geração das previsões das estruturas a termo da volatilidade que convergem para um nível médio de longo prazo conforme a maturidade aumenta.

Os modelos ARCH e GARCH, aplicados no mercado financeiro **tratam simetricamente os retornos**, pois a volatilidade é uma função quadrática dos mesmos. Entretanto, sabe-se que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, tendendo a ser maior para os retornos negativos.

De acordo com Nelson (1991), o modelo GARCH tem pelo menos três grandes desvantagens em aplicações de precificação de ativos: (i) a existência de uma correlação negativa entre retornos atuais e volatilidade de retornos futuros³⁷, e modelos GARCH descartam isso por suposição; (ii) os modelos GARCH impõem restrições nos parâmetros que muitas vezes são violados por coeficientes estimados e que podem restringir indevidamente a dinâmica do processo de variância condicional; (iii) com relação à interpretação com relação aos choques na variância condicional, se eles "persistem" ou não, é de difícil interpretação.

Nelson (1991) propõe uma nova abordagem ARCH que atende estas objeções, conhecido como EGARCH³⁸. O método propôs é então usado para estimar um modelo de prêmio de risco sobre o Índice de Valor Ponderado de Mercado CRSP durante o período de 1962-1987.

Segundo Morettin (2008), um modelo EGARCH (p, q) pode ser dado por:

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (4.56)$$

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}) \quad (4.57)$$

Em que ε_t são variáveis aleatórias i.i.d. com média zero e $g(\cdot)$ é chamada de *curva de impacto de informação*, dada por:

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma \{|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)\} \quad (4.58)$$

³⁷ Para maiores detalhes ver Black (1976).

³⁸ *Exponential GARCH*.

Onde θ e γ são parâmetros reais, e, além disso, $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média zero. Assim, dado que $E\{g(\varepsilon_t)\} = 0$ pode-se escrever:

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t < 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Segundo Morettin (2008), para que os retornos negativos tenham maior impacto na volatilidade, espera-se que o valor de γ seja maior que zero. Desta forma, esta assimetria permite que a volatilidade apresente uma resposta mais rápida com relação a retornos negativos do a que positivos³⁹.

Para um EGARCH (m, n) tem-se:

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} - E\left(\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}}\right) \right| + \sum_{k=1}^r \gamma_k \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sqrt{h_{t-k}}} \quad (4.60)$$

Onde b_i e a_i são escalares, e os operadores L tem raízes fora do círculo unitário. Segundo Nelson (1991), a estacionariedade estrita é dada quando $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 < \infty$. Cabe observar que foi usado no modelo o logaritmo natural de h_t , implicando que os coeficientes do modelo não necessitam ser não-negativos. Ou seja, os parâmetros do modelo podem ser negativos e que, portanto, γ ajustam a assimetria dos efeitos. Caso $\gamma_k = 0$ para todo k , então, um choque positivo tem o mesmo efeito na volatilidade que um choque negativo de mesma magnitude, ou seja, o impacto é simétrico (BUENO, 2008). Para algum $\gamma_k \neq 0$, os impactos são tratados assimetricamente. O efeito alavancagem pode ser testado se $\gamma_k < 0$, implicando que choques negativos aumentam a volatilidade do modelo em proporção superior aos choques positivos.

Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) apresentaram um modelo denominado como GJR-GARCH (1,1), dado pela equação:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.61)$$

Onde d_{t-1} é uma variável *dummy*⁴⁰, tal que se $d_{t-1} = 1$, se $\varepsilon_t < 0$ e $d_{t-1} = 0$ se $\varepsilon_t > 0$. Se $d_{t-1} = 0$, não haverá efeito assimétrico. A assimetria é capturada pelo coeficiente γ que indica a influência com que os choques negativos apresentam impactos maiores do que os positivos sobre a volatilidade. O coeficiente β_1 mede a persistência dos choques nas variâncias futuras. Segundo Bueno (2008), o modelo implica um aumento de volatilidade quando notícias ruins, representadas por $\varepsilon_t < 0$, são acompanhadas por um coeficiente

³⁹ “Efeito alavancagem”.

⁴⁰ Variável binária.

positivo, isto é, por $\gamma > 0$. Contudo, pode acontecer que $\gamma \leq 0$, mas, a restrição de que $\alpha_i + \gamma \geq 0$.

Muitos outros modelos GARCH existem, destacando-se o *Assimétrico* GARCH (A-GARCH), *Smooth Transition* GARCH (STGARCH) e *Component* GARCH (CGARCH), mas os modelos básicos GARCH, EGARCH e GARCH-GJR, são mais parcimoniosos, práticos e mais facilmente interpretados na estrutura a termo da volatilidade.

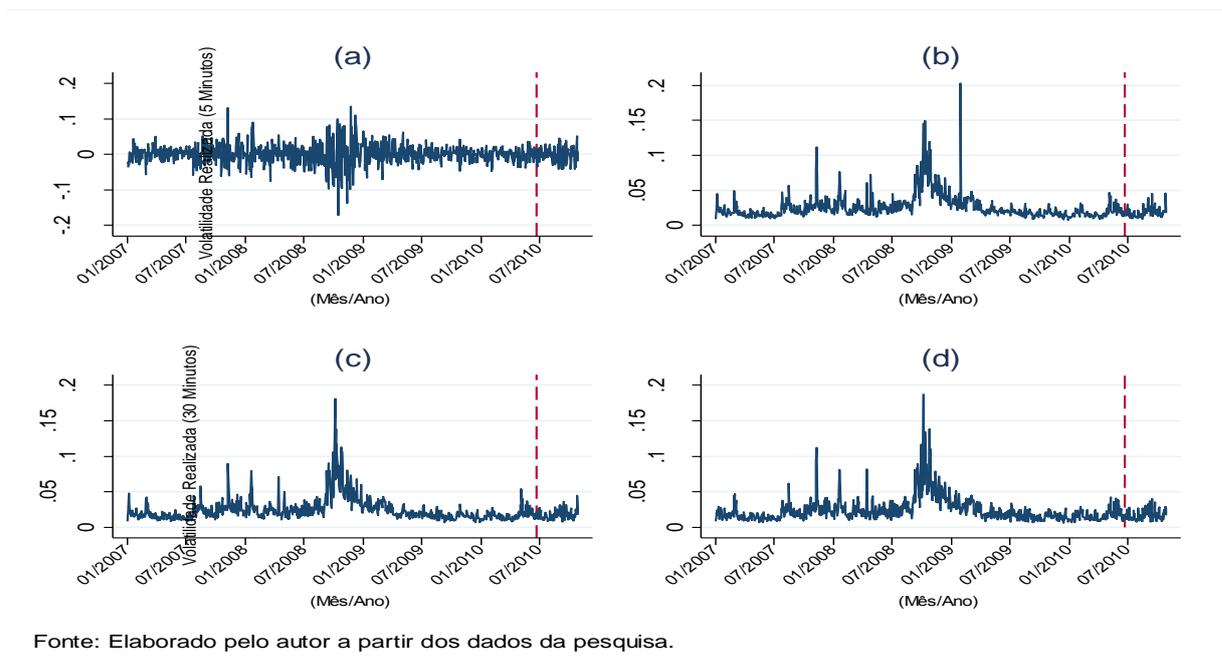
5 – ANÁLISES DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados dos modelos estimados. Em primeiro lugar, na subseção 5.1 são apresentadas algumas estatísticas descritivas relevantes. Posteriormente, os resultados dos processos de estimação dos modelos são apresentados, primeiramente para os modelos da família ARIMA (subseção 5.2.1), e em seguida para os modelos da família ARCH/GARCH (subseção 5.2.2). Na subseção 5.3, é feita uma análise da qualidade do ajustamento dos modelos estimados (subseção 5.3.1) e em seguida, na subseção 5.3.2 há uma avaliação da capacidade preditiva de tais modelos para noventa passos à frente. A comparação entre os modelos estimados foi realizada por meio do *Erro Quadrático Médio* (EQM).

5.1 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

A **Figura 5.1** abaixo relaciona os retornos e as volatilidades realizadas que constituirão as variáveis dependentes dos modelos (GARCH/EGARCH/GARCH-GJR e ARIMA, respectivamente) para o papel da Petrobrás PN (PETR4) durante o período de 02/01/2007 à 29/10/2010.

Figura 5.1 – Retornos *close-to-close* e Volatilidades Realizadas.



A **Tabela 5.1** abaixo apresenta algumas estatísticas relevantes para as volatilidades realizadas, retornos e quadrados dos retornos do ativo da Petrobrás.

Tabela 5.1 - Estatísticas Descritivas e de Teste de Normalidade para Volatilidade Realizada do Papel PETR4 por Frequência de Dados

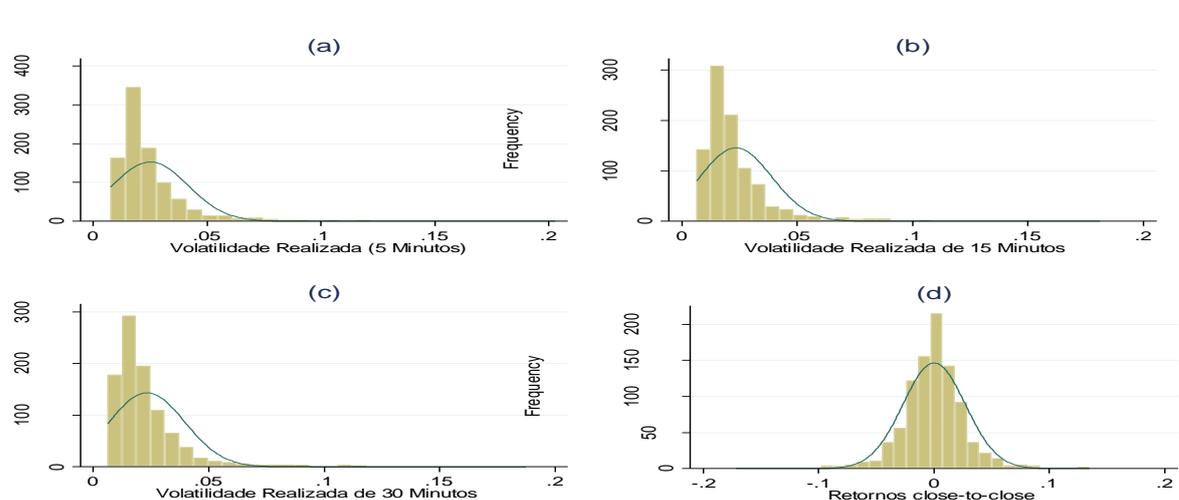
Medida Estatística	Volatilidades Realizadas			Retornos
	5 Minutos	15 Minutos	30 Minutos	<i>close-to-close</i>
Média	0.025	0.023	0.023	0.000
Desvio-Padrão	0.017	0.016	0.016	0.027
Máximo	0.203	0.181	0.187	0.135
Mínimo	0.008	0.007	0.006	-0.172
Assimetria	3.910	3.524	3.599	-0.189
Curtose	28.005	23.197	23.705	7.603
Jarque-Bera*	26941.170 (0.000)	17961.070 (0.000)	18859.470 (0.000)	836.435 (0.000)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

*Valores de Prova entre parênteses. H0: Distribuição Normal.

É possível perceber a partir da **Tabela 5.1** que a média das volatilidades realizadas decresce conforme o aumento da frequência dos dados, comportamento este em relação ao desvio-padrão. Com relação à curtose, é possível verificar que há um aumento conforme o aumento da frequência de amostragem, com a exceção da frequência de 15 minutos. O teste de normalidade Jarque-Bera indicou que nenhum dos processos acima descritos apresenta distribuição normal. Para os retornos diários, a assimetria (-0,189) revela um valor negativo, em conformidade com os fatos estilizados dos retornos de ativos financeiros, indicando que sua distribuição se estende para a esquerda.

Figura 5.2 – Histogramas das Volatilidades Realizadas (Cinco, Quinze e Trinta Minutos), dos Retornos Diários.



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Um ponto a ser destacado da **Figura 5.2** acima, se refere ao histograma (d) dos log-retornos diários. De acordo com Morettin (2008), a suposição de normalidade dos log-retornos em geral não é válida. Apesar de o histograma apresentar uma similaridade com a distribuição normal (representada pela linha azul plotada), o teste Jarque-Bera apresentado na **Tabela 5.1** permite a não aceitação da hipótese nula de que os log-retornos são normalmente distribuídos. Fato este, corroborado pela análise do excesso de curtose (= 7,603), que sinaliza a presença de um fato estilizado concernente à presença de “caudas gordas” na distribuição dos log-retornos.

Tabela 5.2 - Estatísticas Descritivas e de Teste de Raiz Unitária (ADF e PP) para Volatilidades Realizadas e Retornos do Papel PETR4

Teste de Raiz Unitária	Delta			Retornos <i>close-to-close</i>
	5	15	30	
ADF*	-315.8060 (0.000)	-180.7420 (0.000)	-135.2520 (0.000)	-32.2290 (0.000)
Phillips-Perron*	-90403.889 -317.090 (0.000)	-31230.563 -180.892 (0.000)	-17715.741 -135.149 (0.000)	-911.963 -32.437 (0.000)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Valores de prova entre parênteses. H0: há presença de raiz unitária.

A partir da **Tabela 5.2** acima, é possível verificar que os dois testes para a presença de raiz unitária indicam que tanto as volatilidades realizadas (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}) quanto os log-retornos de fechamentos diários (r_t) rejeitam a hipótese nula, indicando que estas séries não necessitam de diferenciação visando torná-las estacionárias. Deste resultado, é importante ressaltar que qualquer processo desta natureza (estacionário), mesmo não sendo linear, tem uma representação linear (BUENO, 2008). Isto implica que é possível decompor um processo estacionário qualquer em dois componentes lineares, um determinístico e um estocástico⁴¹.

5.2 – MODELOS ESTIMADOS

Foram realizadas diversas estimações, as quais podem ser divididas em dois grupos:

⁴¹ Para maiores detalhes ver Perron (1990).

a) Para as Volatilidades Realizadas calculadas para três intervalos diferentes, de cinco, quinze e trinta minutos (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}), de maneira a encontrar o melhor ajuste possível de modelos da família ARIMA, permitindo que a análise econométrica indique as ordens mais apropriadas para os modelos (subseção 5.2.1);

b) Para a volatilidade diária, por meio de modelos GARCH/EGARCH/GARCH-GJR com distribuições dos erros normais, t-Student e GED cada, procurando o melhor modelo ajustado possível, permitindo que a análise econométrica indique quais as ordens mais apropriadas para os modelos (subseção 5.2.2).

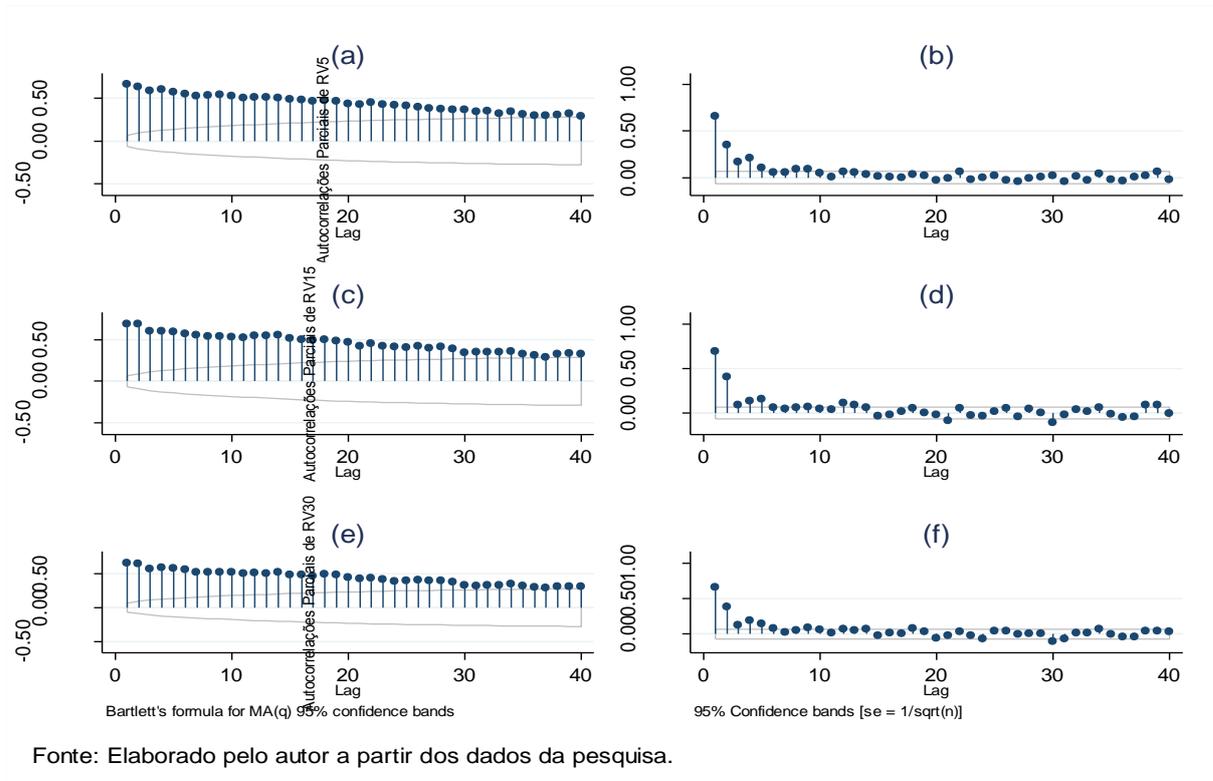
5.2.1 – MODELOS ARIMA

O processo de ajuste dos modelos da família ARIMA se iniciou com a verificação da necessidade de transformação nas séries originais, de modo a estabilizar a variância. No entanto, segundo Nelson (1976), quaisquer transformações na série original não implicariam em previsões de melhor qualidade. No que tange a verificação de estacionariedade das séries RV_5 , RV_{15} e RV_{30} , o teste ADF, DF-GLS e Phillips Perron foram aplicados de modo a averiguar a existência de raiz unitária. Os resultados da subseção anterior indicaram que não há presença de raiz unitária, de modo que não foi necessária a diferenciação da série original visando torná-la estacionária.

O primeiro estágio do ciclo iterativo proposto de Box & Jenkins se pauta nos procedimentos de identificação. O processo de escolha apropriada das ordens de um modelo ARIMA(p,q) é feita, principalmente, com base nas autocorrelações e autocorrelações parciais (fac e facp). Segundo (BUENO, 2008), a função de autocorrelação nada mais é do que o gráfico da autocorrelação contra a defasagem. A função de autocorrelação parcial permite a filtragem das correlações, de forma a manter apenas a correlação pura entre duas observações (elimina-se correlações implícitas).

A facp (b) da **Figura 5.3** abaixo indicou a presença de autocorrelação até a nona ordem para a série RV_5 , enquanto na facp (d) e (f) esse comportamento se deu até a décima quarta ordem para as séries RV_{15} e RV_{30} ao nível de significância de 5%, respectivamente. Os modelos foram estimados a partir destas informações, retirando dos modelos as variáveis não significativas à 5%.

Figura 5.3 – Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial das Séries de Volatilidades Realizadas de Cinco, Quinze e Trinta Minutos.



Contudo, nem sempre é fácil identificar as ordens de modelos univariados (Bueno, 2008). Assim, em paralelo, fez-se uso de um procedimento alternativo indicado por Morettin (2006) estimando-se modelos de baixa ordem, fazendo-se uso dos critérios de informação AIC e BIC que permitem a escolha do modelo mais adequado. Após diversas estimações, fez-se uso do teste de autocorrelação cruzada sugerido Morettin (2006).

Os modelos então ajustados ao período compreendido entre 02/01/07 à 22/06/10 (852 observações) foram: AR(1,2,3)MA(3,7) para a RV5, AR(1)MA(1,3) para RV15 e o mesmo para RV30. As formas funcionais dos modelos acima definidos são:

$$RV_t^{\Delta=5} = 0,025 + 0,288RV_{t-1}^{\Delta=5} + 0,17RV_{t-2}^{\Delta=5} + 0,5RV_{t-3}^{\Delta=5} - 0,456\varepsilon_{t-3} - 0,054\varepsilon_{t-7} + \varepsilon_t$$

$$RV_t^{\Delta=15} = 0,023 + 0,985RV_{t-1}^{\Delta=15} - 0,638\varepsilon_{t-1} - 0,152\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$RV_t^{\Delta=30} = 0,023 + 0,984RV_{t-1}^{\Delta=30} - 0,680\varepsilon_{t-1} - 0,116\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$$

Os modelos estimados exibiram, portanto, os seguintes resultados apresentados na **Tabela 5.3** abaixo.

Tabela 5.3 - Resultados da Estimação dos Modelos ARMA para as Volatilidades Realizadas de Cinco, Quinze e Trinta Minutos

Variáveis Dependentes: RV5, RV15 e RV30								
5 Minutos	Const.	AR(1)	AR(2)	AR(3)	MA(3)	MA(7)	Sigma	
AR(1,2,3)MA(3,7)	0.025 (0.000)	0.288 (0.000)	0.171 (0.000)	0.500 (0.000)	-0.456 (0.000)	-0.0540782 (0.022)	0.011 (0.000)	
	RB							
	Obs.	Wald	Chi2(5)	Log-Ver.	AIC	BIC	Bartlett's	Portmanteau
	852	7539.55 (0.000)	2597.596	-5181.191	-5147.958	0.36 (0.9995)	0.8713 0.9723	
15 Minutos	Const.	AR(1)	MA(1)	MA(3)	-	-	Sigma	
AR(1)MA(1,3)	0.023 (0.000)	0.985 (0.000)	-0.638 (0.000)	-0.152 (0.000)	-	-	0.010 (0.000)	
	RB							
	Obs.	Wald	Chi2(3)	Log-Ver.	AIC	BIC	Bartlett's	Portmanteau
	852	50017.65	2689.429	-5368.858	-5345.120	1.06 (0.213)	5.3452 (0.375)	
30 Minutos	Const.	AR(1)	MA(1)	MA(3)	-	-	Sigma	
AR(1)MA(1,3)	0.023 (0.001)	0.984 (0.000)	-0.680 (0.000)	-0.116 (0.000)	-	-	0.011 (0.000)	
	RB							
	Obs.	Wald	Chi2(3)	Log-Ver.	AIC	BIC	Bartlett's	Portmanteau
	852	45482.56	2610.550	-5211.100	-5187.362	0.590 (0.872)	3.873 (0.568)	

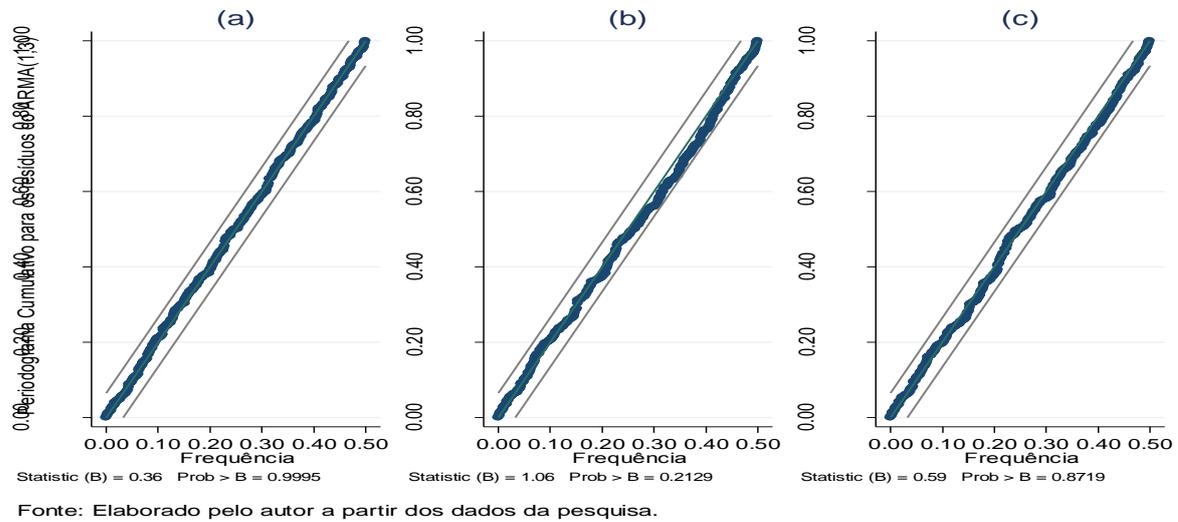
Valores de prova entre parênteses.

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

É possível verificar a partir da **Tabela 5.3** acima que todas as variáveis (autorregressivas e de médias móveis) foram significativas ao nível de significância de 5%. Os três modelos geraram resíduos que seguem um ruído branco, fato este que pode ser observado a partir da figura 5.2 abaixo que mostra o teste de Bartlett's com base no periodograma acumulado, de modo a verificar a presença de autocorrelação residual.

Segundo Morettin (2006) se o modelo for adequado, os resíduos deverão ser aproximadamente não-correlacionados. Na **Figura 5.4**, é possível verificar que não é possível rejeitar a hipótese nula de que os resíduos dos modelos estimados – AR(1,2,3)MA(3,7) para RV5, AR(1)MA(1,3) para RV15 e AR(1)MA(1,3) para RV30 – seguem um ruído branco ao nível de 5% de significância. Segundo Bueno (2008), se o modelo ajustado, e de seus resíduos obtidos não houver mais evidência de autocorrelação, o modelo estará bem estimado.

Figura 5.4 – Teste de Ruído Branco de Bartlett's Baseado no Periodograma Acumulado



5.2.2 – GARCH/EGARCH/GARCH-GJR

Com respeito aos modelos baseados em dados diários, foram estimadas três classes de modelos: GARCH, EGARCH e GARCH-GJR. Seguindo a análise feita por Milach (2010), cada um dos três modelos foi estimado assumindo-se três distribuições de erros distintas: Gaussiana, t-Student e GED.

O primeiro passo na construção de modelos GARCH é ajustá-los de modo a tentar remover a correlação serial na série, caso ela exista. A verificação da presença de heterocedasticidade condicional foi executada por meio de do teste de Bartlett's baseado no periodograma acumulado sobre o quadrado dos retornos (r_t^2) e do teste de Multiplicadores de Lagrange (ML) de Engle (1982), também sobre o quadrado dos retornos. Na **Tabela 5.2** abaixo, é possível verificar que ambos os testes apontam a presença de heterocedasticidade condicional nos retornos de fechamentos diários.

Tabela 5.4 - Teste dos Multiplicadores de Lagrange e de Bartlett's para Heterocedasticidade Condicional aplicado aos Quadrados dos Retornos Diários

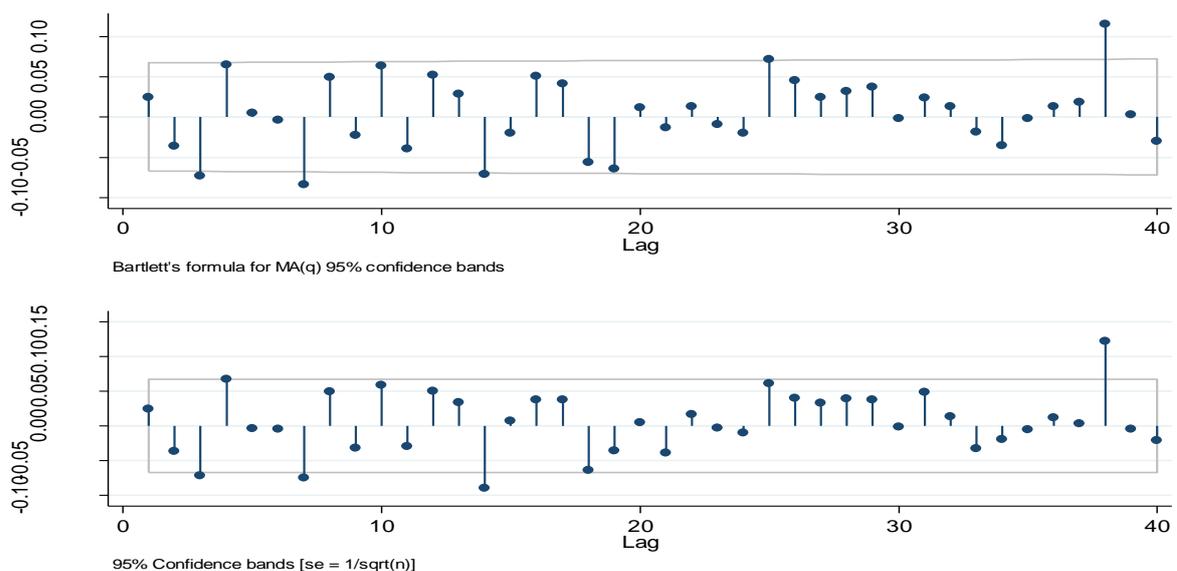
lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	10.792	1	0.0010
2	72.096	2	0.0000
3	101.721	3	0.0000
4	102.819	4	0.0000
5	106.864	5	0.0000
6	116.053	6	0.0000
7	157.122	7	0.0000
8	158.470	8	0.0000
9	160.431	9	0.0000
10	167.292	10	0.0000
Bartlett's Statistic (B) = 4.33		Prob > B = 0.0000	

H0: sem efeitos ARCH

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

O processo de identificação da ordem dos modelos da família GARCH para os retornos de fechamentos diários se assemelham, segundo Bueno (2008), ao modelo ARMA ($\max(p,q),q$). As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (fac e facp) devem sugerir se a série é heterocedástica, mas, diferentemente dos modelos ARMA, a fac fornece a ordem máxima das “médias móveis” e a facp a ordem da auto-regressão do modelo GARCH.

Figura 5.5 – Correlograma e Correlograma Parcial dos Retornos *close-to-close*



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Da **Figura 5.5** acima é possível verificar que a ordem máxima sugerida pela análise da fac e da $facp$ é 38. Devido ao excesso de defasagens, foram estimados modelos GARCH/EGARCH/GARCH-GJR de ordens mais baixas (até à décima ordem). Contudo, diversas defasagens foram não significativas (mesmo à 1% de nível de confiança). Os modelos que exibiram menores critérios de informação (AIC e BIC) foram modelos de ordem (1,1) em todos os casos.

Na **Tabela 5.5** abaixo é possível verificar os resultados obtidos da estimação dos modelos baseados nos retornos de fechamentos diários (retornos “*close-to-close*”), com os já mencionados testes de ruído branco de Bartlett’s e Pormanteau aplicados aos resíduos dos modelos estimados⁴².

Tabela 5.5 - Resultados da Estimação dos Modelos da Família GARCH

Variável Dependente: ret (retornos diários)											
Número de Observações: 851											
Modelo	Distribuição dos Erros	Constante da Equação		ARCH	GARCH	Assimetria	Log-Veros.	Critérios de Informação		Ruído Branco	
		Média	Variância					AIC	BIC	Bartlett's	Portmanteu
GARCH(1,1)	Gaussiana	0.001 (0.434)	0.000 (0.009)	0.074 (0.000)	0.915 (0.000)	- -	1985.583	-3963.165	-3944.179	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	t-Student	0.001 (0.135)	0.000 (0.071)	0.076 (0.000)	0.914 (0.000)	- -	1995.109	-3980.217	-3956.485	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	GED*	0.001 (0.103)	0.000 (0.054)	0.076 (0.000)	0.913 (0.000)	- -	1995.189	-3980.378	-3956.646	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
EGARCH(1,1)	Gaussiana	0.000 (0.983)	-0.102 (0.010)	-0.039 (0.013)	0.986 (0.000)	0.164 (0.000)	1988.952	-3967.905	-3944.173	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	t-Student	0.001 (0.406)	-0.105 (0.040)	-0.054 (0.013)	0.985 (0.000)	0.164 (0.000)	1998.143	-3984.286	-3955.807	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	GED*	0.001 (0.475)	-0.109 (0.067)	-0.046 (0.036)	0.985 (0.000)	0.164 (0.000)	1997.608	-3983.215	-3954.737	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
GARCH-GJR(1,1)	Gaussiana	0.000 (0.830)	0.000 (0.001)	0.111 (0.000)	0.911 (0.000)	-0.076 (0.002)	1989.915	-3969.830	-3946.097	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	t-Student	0.001 (0.334)	0.000 (0.028)	0.118 (0.000)	0.913 (0.000)	-0.089 (0.004)	2000.115	-3988.230	-3959.751	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)
	GED*	0.001 (0.262)	0.000 0.016	0.115 (0.000)	0.910 (0.000)	-0.083 (0.009)	1999.223	-3986.446	-3957.967	1.180 (0.124)	9.747 (0.083)

*Generalized Error Distribution.

Valores de prova entre parênteses.

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

⁴² A forma funcional dos modelos foi suprimida, devido ao elevado número de modelos da família ARCH/GARCH estimados.

Alguns pontos relacionados à Tabela 5.2 merecem destaque. Em primeiro lugar é possível verificar que as médias das equações para o nível da série de retornos (terceira coluna) foram todas não significativas, sob qualquer nível de significância. Fato este corroborado pelo fato de que retornos de ativos financeiro apresentam, em geral, média zero. As constantes, no entanto, foram mantidas, pois fizeram parte da melhor especificação dos modelos. Com relação aos coeficientes ARCH e GARCH das equações de variância, todos foram significativos ao nível de significância de 5%. Além disso, as condições de que $\beta_1 > 0$ e de que $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$ foram todas satisfeitas.

Com respeito aos modelos GARCH-GJR, é preciso destacar uma situação atípica, na qual os “ γ ” apresentaram-se todos negativos, significando que informações negativas (“ruins”) reduzem a volatilidade dos retornos do papel. Como mencionado em capítulo anterior, esta situação é incomum, porém permissível.

Após a estimação, foi feita a verificação nos resíduos, de maneira a averiguar a adequação dos modelos estimados. Em todos os casos não há presença de efeitos ARCH nos resíduos, e, como pode ser visto na Tabela 5.3, é possível verificar por meio do teste de Bartlett’s e de Portmanteau que estes seguem um ruído branco. Além disso, fez-se uso do teste dos Multiplicadores de Lagrange (LM) sobre o quadrado das observações padronizadas, dadas por:

$$\tilde{r} = \frac{r_t}{\sqrt{\hat{h}_{t-1}(1)}} \quad (5.1)$$

De forma que, se o modelo foi adequadamente ajustado, \tilde{r} é uma variável aleatória i.i.d. com distribuição Gaussiana, t-Student ou GED, conforme as suposições iniciais feitas sobre os modelos. A **Tabela 5.6** apresenta os resultados que evidenciam que não há presença de efeitos ARCH.

Tabela 5.6 - Valores de Prova do Teste dos Multiplicadores de Lagrange para Heterocedasticidade Condicional aplicado aos Quadrados das Observações Padronizadas

Lags	GARCH			EGARCH			GARCH-GJR		
	Gaussiana	t_Student	GED	Gaussiana	t_Student	GED	Gaussiana	t_Student	GED
1	0.937	0.807	0.883	0.913	0.932	0.960	0.942	0.967	0.972
2	0.994	0.946	0.979	0.988	0.994	0.998	0.995	0.998	0.999
3	0.999	0.985	0.997	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	0.995	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000

H0: sem efeitos ARCH

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

5.3 – ANÁLISES DA CAPACIDADE DE AJUSTAMENTO E PREDIÇÃO

A comparação da qualidade do ajustamento e da capacidade preditiva entre os modelos baseados nos dados intradiários (RV_S) e dos modelos baseados em dados diários ($GARCH_S$) se deu por meio da avaliação do *Erro Quadrático Médio*, assim definido:

$$EQM = \left(\frac{1}{N-N_0} \right) \sum_{n=N_0+1}^N (\hat{h}_n - RV_S)^2 \quad (5.2)$$

Sendo N o tamanho da amostra, N_0 o tamanho da amostra utilizada para a estimação do modelo, \hat{h}_n a volatilidade ajustada pelos modelos ARIMA e GARCH, e as volatilidades *ex-post*: (RV_S).

No presente caso, no entanto, tem-se a disposição duas (ou mais) as previsões concorrentes da mesma quantidade: as previsões geradas por cada um dos modelos ARMA e as previsões oriundas do modelo GARCH. De acordo com Harvey *et al.* (1997), dado os registros de desempenho observados, é inevitável o caso de que um conjunto de previsões apresentará mais sucesso do que outro, mesmo que apenas por uma pequena quantidade.

Suponha-se que um par de h -passos de previsões à frente produziram erros (e_{1t}, e_{2t}); $t = 1, \dots, N$. Segundo Harvey *et al.* (1997), a qualidade de uma previsão deve ser julgada por meio de uma função específica $g(e)$ do erro de previsão. Então, a hipótese nula da igualdade de desempenho de previsão esperada é:

$$E[g(e_{1t}) - g(e_{2t})] = 0$$

De tal forma que:

$$d_t = g(e_{1t}) - g(e_{2t}); t = 1, \dots, N$$

Em que a média amostral observada é dada por:

$$\bar{d} = n^{-1} \sum_{t=1}^n d_t$$

Contudo, os autores apontam que uma dificuldade que se apresenta é a de que a série d_t é susceptível de ser autocorrelacionada. Na verdade, em previsões ótimas para h -passos à frente, a seqüência de erros de previsão segue um processo de média móvel de ordem ($h - 1$). Portanto, no que se segue, presume-se que para h -passos à frente todas as autocorrelações

de ordem h (ou mais elevadas) da sequencia d_t são zero. Os autores mostram que a variância de \bar{d} é assintoticamente dada por:

$$V(\bar{d}) \approx n^{-1}[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \gamma_k]$$

Onde γ_k é a k -ésima autocovariância de d_t , e que pode ser estimada por:

$$\hat{\gamma}_k = n^{-1} \sum_{t=k+1}^n (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d})$$

A estatística de Diebold e Mariano (1995) é dada por:

$$S_{DM} = [\hat{V}(\bar{d})]^{-\frac{1}{2}} \cdot \bar{d}$$

Diebold e Mariano (1995) apontam que uma grande variedade de medidas de precisão pode ser utilizada, de modo que a função de perda não necessita ser quadrática, nem mesmo simétrica, e mais, os erros de previsão podem ser não-Gaussianos, com média diferente de zero, serialmente correlacionados, e contemporaneamente correlacionados.

Harvey *et al.* (1997) propõe uma modificação do teste alterando o cômputo de S_{DM} para:

$$S_H = \left[\frac{n+1-2h+n^{-1}h(h-1)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [\hat{V}(\bar{d})]^{-\frac{1}{2}} \cdot \bar{d}$$

Onde n é o número de observações e h é o número de períodos à frente para o qual serão feitas as previsões.

5.3.1 – QUALIDADE DO AJUSTAMENTO

Como dito em capítulos anteriores, o ajustamento dos modelos foi feito fazendo-se uso de 852 observações, computando-se para o período compreendido entre 02/01/2007 à 22/06/2010. A **Tabela 5.7** abaixo apresenta os EQM's nestas condições.

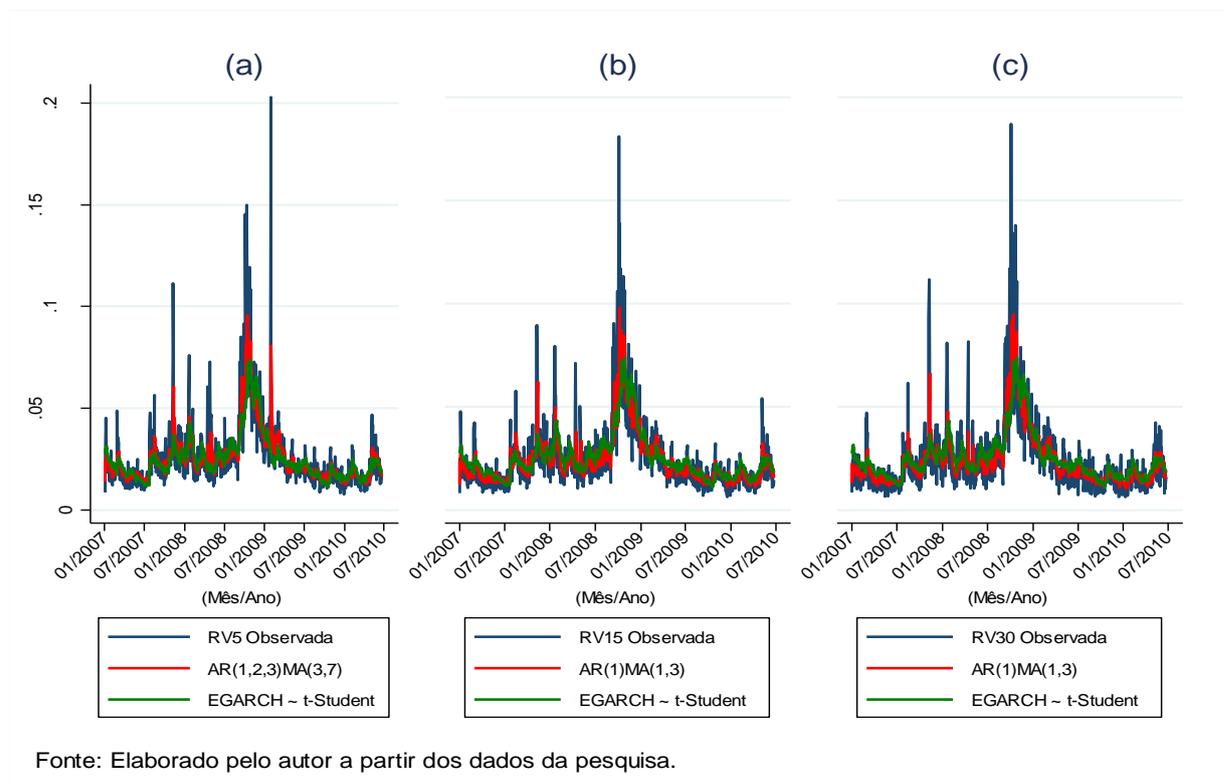
Tabela 5.7 - Erros Quadráticos Médios dos Valores Preditos pelos Modelos Baseados em Dados Intradiários e Diário

Volatilidade Realizada	Modelos Baseados nos Retornos de Fechamento Diário									Modelos Baseados nas Volatilidades Realizadas de 5, 15 e 30 Minutos		
	GARCH (1,1)			EGARCH (1,1)			GARCH-GJR (1,1)			ARMA(3,7)	ARMA(1,3)	ARMA(1,3)
	Normal	t-Student	GED	Normal	t-Student	GED	Normal	t-Student	GED			
RV5	0.13168	0.13107	0.13103	0.12467	0.12344	0.12414	0.12869	0.12737	0.12777	0.11218	-	-
RV15	0.11405	0.11376	0.11336	0.10552	0.10431	0.10473	0.11002	0.10872	0.10889	-	0.09047	-
RV30	0.13275	0.13241	0.13206	0.12413	0.12293	0.12340	0.12892	0.12764	0.12784	-	-	0.10875

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

Como já mencionado, no que tange ao ajustamento, os modelos baseados em dados intradiários da família ARMA foram os que apresentaram menores EQM's. Dentre os modelos da família GARCH, o modelo EGARCH com distribuição dos erros t-Student foi o que apresentou menor EQM em relação à todas as volatilidades *ex-post* (0,12344 para RV_5 , 0,10431 para RV_{15} e 0,12293 para RV_{30}). A **Figura 5.6** abaixo apresenta as volatilidades realizadas (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}), assim como os valores ajustados pelos modelos ARMA e o modelo ajustado aos retornos diários EGARCH com distribuição t-Student.

Figura 5.6 – Volatilidades Realizadas Observadas, Valores Preditos pelos Modelos ARMA e Valores Preditos pelo Modelo EGARCH ~ t-Student.



A partir dos gráficos exibidos na **Figura 5.1** acima é possível verificar que os modelos ARIMA captam melhor as volatilidades realizadas significativamente elevadas do que o modelo EGARCH ~ t-Student, principalmente quando se considera o período de crise do *Subprime* ocorrido em 2008.

5.3.2 – AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE PREDITIVA

Os modelos estimados também foram testados com relação à capacidade preditiva com noventa passos à frente. De 23 de junho de 2010 até 29 de outubro de 2010, num total de 90 observações. O EQM foi utilizado novamente como critério nesta avaliação.

Os modelos da família ARMA apresentaram o menor EQM em duas ocasiões: para a volatilidade realizada baseada em intervalos de quinze e trinta minutos (RV_{15} e RV_{30}). Com relação à estimação da volatilidade realizada calculada a partir de intervalos de cinco minutos (RV_5), o modelo GARCH ~ Gaussiana baseado nos retornos de fechamento diário apresentou um EQM menor do que o modelo ARMA(3,7), baseado na volatilidade realizada de cinco minutos $\widehat{RV}_{\Delta=5}$. Uma explicação possível para tal resultado estaria no fato de que o intervalo de cinco minutos possa conter ruídos de microestrutura de mercado. A Tabela 5.4 abaixo mostra os EQM's das previsões de noventa passos.

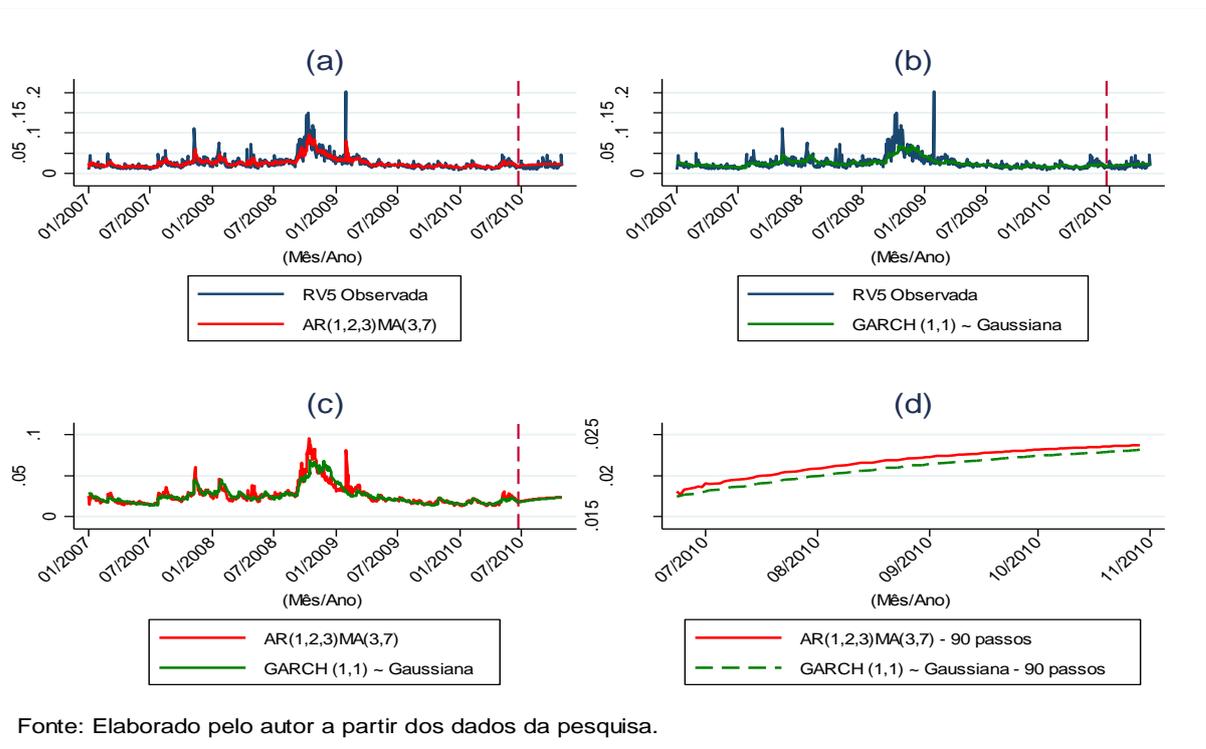
Tabela 5.8 - Erros Quadráticos Médios dos Valores Previstos 90 Passos à Frente pelos Modelos Baseados em Dados Intradiários e Diário

Volatilidade Realizada	Modelos Baseados nos Retornos de Fechamento Diário									Modelos Baseados nas Volatilidades Realizadas de 5, 15 e 30 Minutos		
	GARCH (1,1)			EGARCH (1,1)			GARCH-GJR (1,1)			ARMA(3,7)	ARMA(1,3)	ARMA(1,3)
	Normal	t-Student	GED	Normal	t-Student	GED	Normal	t-Student	GED			
RV5	0.00438354	0.00438548	0.00440450	0.00488674	0.00485495	0.00480260	0.00477045	0.00482945	0.00473651	0.00479455	-	-
RV15	0.00479966	0.00481080	0.00483294	0.00552880	0.00546794	0.00539487	0.00534947	0.00542714	0.00529078	-	0.00439019	-
RV30	0.00530506	0.00531580	0.00533796	0.00605852	0.00600633	0.00593082	0.00586265	0.00594618	0.00580803	-	-	0.00473784

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

Da **Tabela 5.8** acima é possível verificar que o modelo ARMA(3,7) exibe um EQM maior que o do modelo GARCH(1,1) ~ Gaussiana (0,00479 e 0,00438, respectivamente). No que tange às volatilidades realizadas de quinze e trinta minutos, os modelos ARIMA(1,3) exibem EQM's menores dentre todas as previsões geradas pelos modelos.

Figura 5.7 – Volatilidade Realizada Observada (RV5), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(3,7) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente



O gráfico (a) da **Figura 5.7** acima apresenta os valores observados para a volatilidade realizada de cinco minutos, bem como o ajuste e a previsão de noventa passos à frente obtida pelo modelo AR(1,2,3)MA(3,7). No gráfico (b) além da RV5, estão plotado os valores preditos pelo modelo GARCH (1,1) ~ Gaussiana a previsão gerada para noventa passos. É possível verificar que durante o período de ajuste (período demarcado pela linha vertical vermelha tracejada), o modelo ARMA(3,7) se ajusta melhor aos dados observados, captando as flutuações mais significativas, como o ocorrido em 29 e 30 de janeiro de 2009.

Contudo, no gráfico (d), onde estão plotadas somente as previsões geradas pelos modelos, é possível verificar que o modelo GARCH (1,1) ~ Gaussiana gera previsões que convergem mais suavemente para a média de RV5 (= 0,025) que as previsões geradas pelo modelo ARMA(3,7). A análise gráfica corrobora com o resultado encontrado no cômputo do EQM para previsões de noventa passos à frente: 0,004 para as previsões do modelo GARCH (1,1) ~ Gaussiana, contra 0,0048 do modelo ARMA(3,7).

No entanto, quando consideradas as volatilidade realizadas calculadas a partir de intervalos de quinze e trinta minutos, os modelos da família ARMA geram previsões de noventa passos que exibem menor EQM que as previsões geradas pelo modelo GARCH (1,1) ~ Gaussiana, como pode ser visto na Tabela 5.3. O gráfico (d) nas Figuras 5.3 e 5.4 permitem

a visualização das previsões noventa passos à frente dos modelos ARMA(1,3) para RV15 e RV30 e do modelo GARCH (1,1) ~ Gaussiana. Nos dois gráficos é possível verificar que os modelos ARMA geram previsões que convergem mais suavemente para as médias de RV15 e RV30 (0,23 para ambas as séries) que as previsões geradas pelo modelo GARCH.

Figura 5.8 – Volatilidade Realizada Observada (RV15), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(1,3) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente

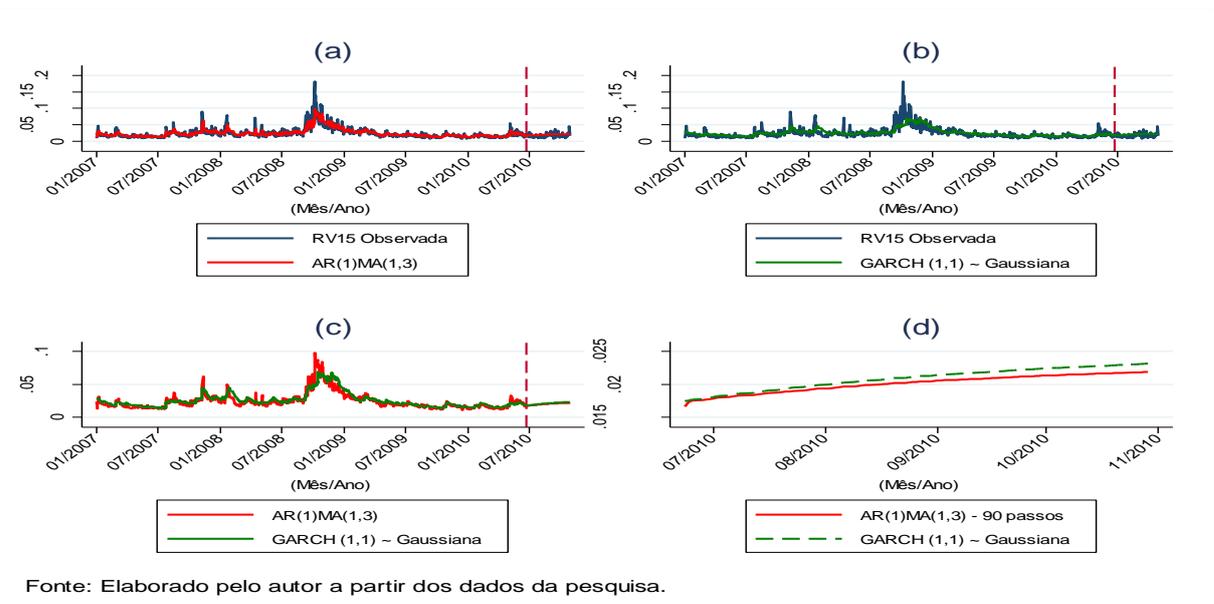
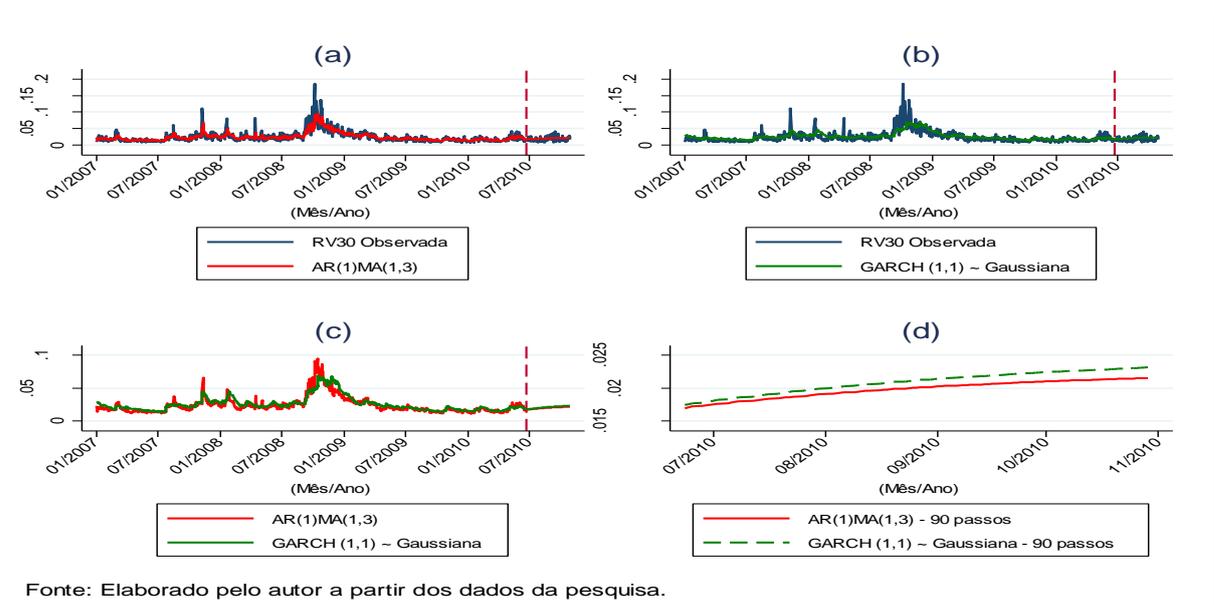


Figura 5.9 – Volatilidade Realizada Observada (RV30), Valores Preditos pelos Modelos ARMA(1,3) e GARCH (1,1) ~ Gaussiana e Previsões com Noventa Passos à Frente



Nas **Figuras 5.8 e 5.9** acima, os gráficos (d) demonstram que as previsões geradas pelos modelos ARMA(1,3) para RV_{15} e RV_{30} convergem mais suavemente para as médias que as previsões geradas pelo modelo GARCH(1,1) ~ Gaussiana.

O teste de verificação de acurácia de previsão proposto por Diebold e Mariano (1995), é feito por meio da comparação entre a previsão gerada por cada um dos modelos da família ARMA com base nas volatilidades realizadas contra as previsões geradas pelo modelo GARCH baseados nos retornos diários. O valor efetivamente observado são as volatilidades realizadas, tidas como volatilidades *ex-post* apropriadas, sendo assim, a comparação dos erros de previsão para cada processo é dada por:

$$RV_5 \begin{cases} e_{RV=5}^{ARMA} = RV_5 - \widehat{RV}_5 \\ e_{diário}^{GARCH} = RV_5 - \hat{h}^2 \end{cases}$$

$$RV_{15} \begin{cases} e_{RV=15}^{ARMA} = RV_{15} - \widehat{RV}_{15} \\ e_{diário}^{GARCH} = RV_{15} - \hat{h}^2 \end{cases}$$

$$RV_{30} \begin{cases} e_{RV=30}^{ARMA} = RV_{30} - \widehat{RV}_{30} \\ e_{diário}^{GARCH} = RV_{30} - \hat{h}^2 \end{cases}$$

Os gráficos abaixo mostram que os erros de previsão para cada uma das séries são próximos. Contudo, a tabela abaixo mostra por meio do teste DM que as previsões são significativamente diferentes entre si.

Tabela 5.9 - Estatísticas de Teste de Diebold e Mariano (DM) e de Harvey

RV's	Teste	ARMA(3,7) Vs.	ARMA(1,3) Vs.	ARMA(1,3) Vs.
		GARCH(1,1)~Gaussiana	GARCH(1,1)~Gaussiana	GARCH(1,1)~Gaussiana
RV5	DM	3.4405	-	-
	Harvey	3.4213	-	-
RV15	DM	-	-3.3398	-
	Harvey	-	-3.3212	-
RV30	DM	-	-	-3.3026
	Harvey	-	-	-3.2842

Rejeita-se a hipótese nula de que os erros são iguais entre si se $|DM| > 0,063$ e/ou se $|Harvey| > 0,063$.

Fonte: Elaborado pelo autor partir dos dados da pesquisa.

A **Tabela 5.9** mostra que as previsões geradas pelos modelos são significativamente diferentes entre si para os processos de volatilidades realizadas estudados.

6. CONCLUSÕES

O presente trabalho procurou testar a utilização de dados intradiários com o objetivo de construir métodos alternativos de medição e previsão da volatilidade de ativos financeiros. Para isto, foram utilizados os dados intradiários da ação da Petrobrás S.A., negociados na BOVESPA no período entre 02/01/2007 até 29/10/2010.

A motivação para a construção desses indicadores alternativos deve-se ao fato de que a utilização do quadrado dos retornos diários como *proxy* da volatilidade subjacente (*ex-post*) faz com que os modelos usualmente construídos na literatura, com o objetivo de prever a volatilidade futura não alcancem bons resultados. Isso se deve ao alto valor de seu componente idiossincrático na medição da volatilidade de um dia.

Em contraponto, é de conhecimento que a utilização de dados intradiários amplifica os efeitos dos ruídos de microestrutura, com o *spread* de compra e venda, a descontinuidade dos preços e a baixa frequência de negociações em determinados períodos de tempo. Com o objetivo de mensurar essa influência, foram utilizadas diferentes frequências intradiárias. Além disso, foram utilizadas técnicas que têm como objetivo a correção desses efeitos.

Inicialmente, foram construídos indicadores para a volatilidade subjacente baseados nos retornos diários e na variância realizada, sendo estas, calculadas segundo intervalos intradiários de 5, 15 e 30 minutos. Também foi testada uma metodologia desenvolvida por Martens (2002), que visa a eliminação dos efeitos de microestrutura

Conforme previsto na literatura, observou-se que a distribuição dos log-retornos é aproximadamente normal. Também foi constatado que as medidas alternativas de variância, construída com base nos dados intradiários, apresentaram um menor desvio-padrão quando comparadas aos retornos diários ao quadrado. Indicando uma maior eficiência dos estimadores construídos com base nessas medidas.

Todos os estimadores para a variância apresentaram assimetria à direita e curtose bastante elevada, em linha com os fatos estilizados característicos desses indicadores. É preciso ressaltar que as volatilidades realizadas parecem estar sob a influência dos efeitos de microestrutura quando são utilizadas frequências mais elevadas, e que estas medidas apresentam um viés para cima, provavelmente causado pela existência de um *spread* de compra e venda.

Para testar se a utilização de dados intradiários permitiria a construção de *preditores* mais precisos para a variância futura, foram construídos estimadores com base em modelos da

família ARIMA para as volatilidades realizadas. Os modelos ARMA que apresentaram os melhores resultados foram: AR(1,2,3)MA(3,7) para RV_5 ; AR(1)MA(1,3) para RV_{15} e RV_{30} .

Como parâmetro de comparação foram utilizados os modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GARCH-GJR(1,1), sob três distribuições de erros distintas: Gaussiana, t-Student e GED. Estes modelos foram construídos com base nos retornos diários, que utilizam usualmente como *proxy* da volatilidade subjacente (*ex-post*) os retornos ao quadrado (r_t^2).

Os modelos foram comparados segundo dois enfoques: primeiro visando avaliar suas capacidades de ajustamento às séries de volatilidade *ex-post* (RV_5 , RV_{15} e RV_{30}); segundo, com o objetivo de avaliar a capacidade preditiva de tais modelos, no que tange à um horizonte de 90 passo à frente. Sendo assim, a série foi dividida em dois horizontes: de 02/01/2007 até 22/06/2010 para a avaliação do grau de ajustamento; e de 23/06/2010 até 29/10/2010 como sendo o horizonte de previsão. O critério de avaliação, tanto para o ajustamento, quanto para a capacidade de previsão, foi o Erro Quadrado Médio (EQM).

No que tange à qualidade do ajustamento, os modelos baseados nos log-retornos intradiários foram o que apresentaram menor EQM, sob todas as frequências. Isso quer dizer que o ajustamento dos modelos ARMA (quando as séries de volatilidade realizadas são tomadas como *proxies* da volatilidade latente) são mais adequados que os modelos da família GARCH, calculados a partir dos retornos diários.

O modelo EGARCH(1,1) ~ t-Student foi o que se apresentou com menor EQM no que tange ao ajustamento de todas as séries de volatilidades realizadas. Cabe ressaltar um ponto levantado por Cappa e Pereira (2010), onde não foram encontradas evidências do *efeito alavancagem*. Fato este corroborado pelos resultados da estimação do modelo GARCH-GJR que também capta tal comportamento de ativos financeiros.

Com respeito à avaliação da capacidade preditiva dos modelos estimados, os resultados obtidos por meio do cômputo do EQM diferiram dos resultados obtidos quando o enfoque se pautou na qualidade do ajustamento. Na frequência intradiária de cinco minutos (processo RV_5 tomado como volatilidade *ex-post*), o modelo GARCH(1,1) ~ Gaussiana apresentou menor EQM que o modelo ARIMA(3,7) ajustado. Uma possível explicação para tal resultado seria que esta frequência de dados é elevada o suficiente para que esteja à mercê de ruídos do componente idiossincrático, oriundos da microestrutura de mercado numa magnitude superior às frequências menos elevadas. Os modelos da família ARMA, no entanto, apresentaram menor EQM para os processos RV_{15} e RV_{30} , quando comparados aos modelos da família GARCH, corroborando com os resultados obtidos na avaliação da qualidade do ajustamento.

Em suma, os modelos ARIMA se apresentaram mais apropriados para o ajustamento e previsão das volatilidades realizadas, com uma única exceção, onde o modelo GARCH(1,1) ~ Gaussiana se mostrou mais apropriado na previsão de 90 passos que o modelo ARMA(3,7). De um modo geral, pode-se inferir, portanto, que os modelos ARMA são mais apropriados para a avaliação e previsão da volatilidade de ativos financeiros.

Trabalhos futuros poderiam se concentrar em utilizar a volatilidade realizada como volatilidade subjacente em modelos de precificação de ativos como o CAPM e o APT. Outra vertente seria a criação de diversas *proxies* de volatilidade a partir dos dados intradiários, como feito em Visser (2009), e verificar o comportamento dos modelos da família ARCH/GARCH utilizando estas *proxies*, até mesmo como variável dependente dos modelos quando aplicados aos dados do mercado brasileiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. **International Economic Review**, v. 39, p. 885–905, 1998a.

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., Deutsche mark dollar volatility: Intraday activity patterns, macroeconomic announcements, and longer run dependencies. **Journal of Finance**, 53, p. 219–265, 1998b.

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD F.X., LABYS, P. The distribution of realized exchange rate volatility. **Journal of the American Statistical Association**, v. 96, p. 42–55, 2001.

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD F.X., LABYS, P. Modeling and forecasting realized volatility. **Econometrica**, v. 71, p. 579–625, 2003.

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., CHRISTOFFERSEN P., DIEBOLD F.X., “Volatility and Correlation Forecasting,” in G. Elliott, C.W.J. Granger and A. Timmermann eds., *Handbook of Economic Forecasting*, Capítulo 15, 777–878. Amsterdam: North-Holland, 2006.

ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T. DIEBOLD, F.X., Parametric and nonparametric volatility measurement. In *Handbook of Financial Econometrics* eds.: Y. Aït-Sahalia and L. Hansen, *Handbooks in Finance*, volume 1, capítulo 2. Forthcoming, 2002.

BAILLIE, R. T., Long memory processes and fractional integration in econometrics. **Journal of Econometrics**, v. 73, p. 5-59, 1996.

BAILLIE, R.T., BOLLERSLEV, T, MIKKELSEN, H.O., Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 74, p. 3-30, 1996b.

BANDI F.M.; Russell J.R., Separating Microstructure Noise from Volatility. **Working paper**, University of Chicago, 2004.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E., SHEPHARD, N., Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 64, p. 253–280, 2002a.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E., SHEPHARD, N., Estimating quadratic variation using realized variance. **Journal of Applied Econometrics**, v. 17, p. 457–477, 2002b.

BARTLETT, M. S. An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications. **Cambridge University Press**, 1955.

BHATTACHARYYA, M; KUMAR M. D.; KUMAR, R., Optimal sampling frequency for volatility forecast models for the Indian Stock Markets. **Journal of Forecasting**, v. 28, p. 38-54, 2009.

BLACK, F., Studies of stock price volatility changes. In Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association. Business and Economic Statistics, pp. 177–181, 1976.

BLACK F., SCHOLEM M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-659, 1973.

BLATTBERG R.C., GONEDDES N.J. A comparison of stable and Student distributions as statistical models for stock prices. **The Journal of Business**, v. 47, p. 244-280, 1974.

BOX, G. E. P., D. A. PIERCE., Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 65, p. 1509–1526, 1970.

BOX, G. E. P., JENKINS G. M., REINSEL G. C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall, 1994.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, p. 307–327, 1986.

BOLLERSLEV, T., ENGLE R.F., WOOLDRIDGE J.M. A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances. **Journal of Political Economy**, v. 96, p. 116–131, 1988.

BOLLERSLEV T., CHOU R.Y., KRONER K.F. ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence. **Journal of Econometrics**, v. 52, p. 5–59, 1992.

BOLLERSLEV, T., ENGLE R.F., NELSON D.B., “ARCH Models,” in R.F. Engle and D. McFadden eds., *Handbook of Econometrics*, Volume IV, 2959–3038. Amsterdam: North-Holland, 1994.

- BOLLERSLEV, T., ZHANG B.Y.B. Measuring and Modeling Systematic Risk in Factor Pricing Models Using High-Frequency Data. **Journal of Empirical Finance**, v. 10, p. 533–558, 2003.
- BUENO, R. L. S. **Econometria de Séries Temporais**. 1ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- CAPPA, L.; PEREIRA, P. L. V., Modelando a Volatilidade dos Retornos de Petrobrás Usando Dados de Alta-Frequência. Textos para Discussão 258. Fundação Getúlio Vargas, 2010.
- CARVALHO, M. C.; FREIRE, M. A. S.; MEDEIROS, M. C.; SOUZA, L. R. Modeling and Forecasting the Volatility of Brazilian Asset Returns: a realized variance approach. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 4, p. 321-343, 2006.
- CHOUDRY, F., Stock market volatility and the US consumer expenditure. **Journal of Macroeconomics**, v. 25, p. 367–385, 2003.
- CLARK, P.K., A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. **Econometrica**, v. 41, p. 135–155, 1973.
- COPELAND, T. E., WESTON, J. F. **Financial Theory and Corporate Policy**. 3 ed. California: Addison Wesley Longman, 1988.
- COSTA, P. H. S., **Séries de Retornos de Ações Brasileiras: Volatilidade e Valor em Risco**. Tese (Doutorado em Engenharia Industrial) - Departamento de Engenharia Industrial da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- CUMBY, R., FIGLEWSKI S., HASBROUCK J. Forecasting Volatility and Correlations with EGARCH Models. **Journal of Derivatives**, Winter, p. 51-63, 1993.
- DACOROGNA M. M., GENÇAY R., MÜLLER U., OLSEN R. B. **A Introduction to High-Frequency Finance**. First ed., Academic Press, 2001.
- DELBAEN F.; SCHACHERMAYER W., A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. **Mathematische Annalen**, v. 300, p. 463-520, 1994.
- DIEBOLD, F.X.; MARIANO, R.S., Comparing predictive accuracy. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 13, 1995, pp.253–263.
- DROST, F.C., WERKER, B.J.M., Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling. **Journal of Econometrics**, v. 74, p. 31–57, 1996.

- DUARTE A.M. JR. **Risco: Definições, Tipos, Medição e Recomendações para seu Gerenciamento.** Resenha BM&F, 1996.
- ELTON, E. E GRUBER, M. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.** 5 ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- ENGLE, R.F., Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. **Econometrica**, v. 50, p. 987–1008, 1982.
- ENGLE, R.F., PATTON, A.J., What good is a volatility model? **Journal of Quantitative Finance**, v. 1, p. 237–245, 2001.
- ENGLE, R.F., GALLO G. M., A multiple indicators model for volatility using intra-daily data. **Journal of Econometrics**, v. 131, p. 3–27, 2006.
- ENGLE, R.F., GHYSELS, E., SOHN, B., **On the economic sources of stock market volatility.** Working paper, 2008.
- FAMA, E. F., The Behavior of Stock-Market Prices. **The Journal of Business**, v. 38, p. 34-105, 1965.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. The cross-section of expected stock returns. **Journal of Finance**, v. 47, p. 427-465, 1992.
- FELLER, W., On the Kolmogorov–Smirnov limit theorems for empirical distributions. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 19, p. 177–189, 1948.
- FIGLEWSKI, S. Forecasting volatility. **Financial Markets, Institutions and Instruments**, v. 6, p.1-88, 1997.
- FORNARI, F., MELE, A., **Financial volatility and economic activity.** Working paper, 2008.
- FRANSES, P.H., McALEER, M., Financial Volatility: An Introduction. **Journal of Applied Econometrics**, v. 17, p. 419-424, 2002.
- GARMAN, M.B.; KLASS, M.J., On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**, v. 53, p. 67–78, 1980.
- GLOSTEN, L.R., JAGANNATHAN, R., RUNKLE, D.E., On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. **The Journal of Finance**, v. 48, p. 1779–1801, 1993.
- GRANGER, C. W. J., Some Comments on Risk. **Journal of Applied Econometrics**, v. 17, p. 447–456, 2002.

- HAMILTON J. D. **Time Series Analysis**. First ed. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- HAMILTON, J.D., LIN, G. Stock market volatility and the business cycle. **Journal of Applied Econometrics**, v. 11, p. 573–593, 1996.
- HANSEN, P.R., LUNDE, A. Realized variance and market microstructure noise. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 24, p. 127–161, 2006.
- HARRISON, J.M., KREPS D. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. **Journal of Economic Theory**, v. 20, p. 381–408, 1978.
- HARVEY, D., LEYBOURNE, S., E NEWBOLD, P. Testing the equality of prediction mean squared errors. **International Journal of Forecasting**, 13(2):281 – 291, 1997.
- HERENCIA, M. Z., HOTTA, L. K. P., PEDRO L. V., Filragem e Previsão com Modelos de Volatilidade: Volatilidade Estocástica versus GARCH. **Revista Brasileira de Economia**, v. 52(2), p. 241-278, 1998.
- HOEL, P.G., PORT, S.C., STONE, C.J., **Introduction to Stochastic Processes**. Waveland Press, Illinois, 1972.
- JORION, P., Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. **The Journal of Finance**, v. 50, p. 507-528, 1995.
- J.P. MORGAN/REUTERS. *RiskMetricsTM*, Technical Document, Fourth Edition. New York: 1996.
- MACEDO, G. R. **Análise da Volatilidade de séries financeiras segundo a modelagem da família GARCH**. Dissertação (Mestrado em Administração) – Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- MANDELBROT, B., The variation of certain speculative prices. **Journal of Business**, v. 36, p. 394–419, 1963.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, p. 77–91, 1952.
- MARTENS, C., Measuring and Forecasting S&P 500 index- futures volatility using high-frequency data. **Journal of Futures Markets**, v. 22, p. 497-518, 2002.
- McNEES, S. S. The Forecasting Record for the 1970's. **New England Economic Review**, p. 33-53, 1979.

- MERES, B. C., **Volatilidade Implícita Realizada: uma medida alternativa**. Dissertação (Mestrado em Métodos Matemáticos em Finanças). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- MOREIRA, J. M. S; LEMGRUBER, E. F. O uso de dados de alta frequência na estimação da volatilidade e do valor em risco para o IBOVESPA. **Revista Brasileira de Economia**, v. 58, p. 100-120, 2004.
- MORETTIN, P. A., TOLOI, C.M.C. **Análise de Séries Temporais**. 2ª Edição, São Paulo: Edgar Blücher, 2006.
- MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. São Paulo: Edgar Blücher, 2008.
- MOTA, B. S.; FERNANDES, M. **Desempenho de estimadores de volatilidade na Bolsa de Valores de São Paulo**. Ensaio Econômico da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro, 2002.
- MILACH, F. T., **Estimação da Volatilidade: uma aplicação utilizando dados intradiários**. Dissertação (Mestrado em Administração) – Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.
- NELSON, D.B. ARCH models as diffusion approximations. **Journal of Econometrics**, v. 45, p. 7–38, 1990a.
- NELSON, D.B., Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. **Econometric Theory**, v. 6, p. 318–334, 1990b.
- NELSON, D.B., Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. **Econometrica**, v. 59, p. 347–370, 1991.
- PERRELLI R., **Introduction to ARCH & GARCH models**. Department of Economics. University of Illinois, 2001.
- PHILLIPS, P. C. B., PERRON P., Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika**, v. 75, p. 335–346, 1988.
- PROTTER, P.E., Stochastic integration and differential equations. 2 ed. Berlin: Springer Applications of Mathematics, 2005.
- RODRIGUES, A. F. **A Utilização de Dados Intradiários para a Construção de Modelos de Previsão de Volatilidade: uma comparação entre a variância realizada e a amplitude**

realizada. Dissertação (Mestrado em Administração) – Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

SCHWERT, G.W., Why does stock market volatility change over time? **Journal of Finance**, v. 44, p. 1115–1153, 1989.

SECURATO, J. R., **Mercado Financeiro e Análise de Investimentos**. 1ª Edição, Saint Paul Editora. São Paulo, 2005.

SER-HUANG, P., GRANGER C.W.J. Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. **Journal of Economic Literature**, 2002.

SHARPE, W.F., Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of market risk. **Journal of Finance**, v. 19, p. 425–442, 1964.

SHARPE, W. F. **Portfolio Theory and Capital Markets**. New York: McGraw Hill, 1970.

SHILLER, R.J., **Market Volatility**. The MIT Press, 1989.

SHILLER, R.J., Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? **The American Economic Review**, v. 71, p. 421–436, 1981.

SOBRINHO, N. F. S. **Extração da volatilidade do IBOVESPA**. Resenha BM&F, vol. 144, p. 17-39, 2001.

SPERLING, R., BAUM C. F., Multivariate portmanteau (Q) test for white noise. **Stata Technical Bulletin**, v. 60, p. 39–41. Reprinted in *Stata Technical Bulletin Reprints*, v. 10, p. 373–375. College Station, TX: Stata Press, 2001.

TAYLOR, S.J., Conjectured models for trend in financial prices tests as forecasts. **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, v. 42, p. 338-362, 1980.

TAYLOR, S.J., **Modeling Financial Time Series**. John Wiley and Sons, Hichester, 1986.

TAYLOR, S.J., *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. Princeton University Press, 2005.

TSAY, R.S., **Analysis of Financial Time Series**. NewYork: JohnWiley & Sons, 2005.

WEI, W. W. S., **Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**. New York, Addison-Wesley, 1990.

VISSER, M.P., Forecasting S&P 500 daily volatility using a proxy for downward price pressure. **MPRA**, paper no. 11100, 2008a.

VISSER, M.P., GARCH parameter estimation using high-frequency data. **MPRA**, paper no. 9076, 2008b.

VISSER, M.P., Ranking and Combining Volatility Proxies for GARCH and Stochastic Volatility Models. **MPRA**, paper no. 11001, 2008c.

VISSER, M.P., **Volatility proxies and GARCH models**. Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica, Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde, 2009.

ZHOU B., High-frequency data and volatility in foreign exchange rates. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 14, p. 45-52, 1996.