

Oscar Augusto Policeni Parrot

**INTRODUÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA:
Interpretações e Formalismo**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Departamento de Física

**INTRODUÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA:
INTERPRETAÇÕES E FORMALISMO**

Oscar Augusto Policeni Parrot

Dissertação redigida para a defesa do curso de Mestrado em Física
Pelo Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Wilson Oliveira (orientador)

Prof. Ms. José Roberto Tagliati (co-orientador)

Juiz de Fora

2007

TERMO DE APROVAÇÃO

Oscar Augusto Policeni Parrot

INTRODUÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA: Interpretações e Formalismo

Dissertação de conclusão de curso submetida à Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wilson Oliveira (orientador): _____
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Ms. José Roberto Tagliati (co-orientador): _____
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Clifford Neves Pinto: _____
UNIFOA – Centro Universitário de Volta Redonda

Prof. Dr. José Luiz Matheus do Valle: _____
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu. _____
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Juiz de Fora, 09 de janeiro de 2007

*Dedico este trabalho a
Márcia, Tammy, Tales e Thais:
minha motivação e inspiração.*

AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo a meu amigo Prof. Dr. Paulo Monteiro Vieira Braga Barone que deu a primeira força que me motivou e encorajou nesta jornada. A seguir a meu orientador Prof. Dr. Wilson Oliveira por ter sido, durante todo este tempo, não só orientador, mas amigo e colega. Em nenhum momento perdeu a simplicidade dos sábios.

Agradeço ao Prof. Ms. José Roberto Tagliati, meu co-orientador e a todos os professores com quem trabalhei desde o período do nivelamento até hoje.

Um sincero agradecimento a meus colegas com quem, apesar da grande diferença de idade, revivi meus bons tempos de escola com o companheirismo tão necessário à vida acadêmica.

Muito obrigado a meus familiares: esposa, filhos, mãe, irmãos, cunhados, cunhadas, sogra, tia e sobrinhos, pelas inumeráveis horas de lazer que tiveram que sacrificar, até mesmo férias, e por suportarem o mau humor de algumas horas, para que esse momento pudesse agora se concretizar.

Mas neste ponto não posso perder a oportunidade de mais do que agradecer, mas consagrar este trabalho e todas as demoras que tive que aguardar para chegar até aqui. Mais que reconhecer, encontrar neste momento a oportunidade de louvá-lo por tudo que passei e consegui realizar.

A você Deus de amor e bondade. Motivo da minha alegria. Fonte da minha existência. Nem todo saber humano vai, a tempo algum, ao menos tangenciar a sua sabedoria infinita. O homem nem sonhava com a Mecânica Quântica e você já se manifestava a nós na dualidade de um Jesus, historicamente localizado e um Espírito Santo se espalhando como um rio de água viva. Muito obrigado!

RESUMO

Neste trabalho faz-se uma pesquisa de confirmação daquela realizada por Roberto Montenegro, investigando as interpretações utilizadas pelos alunos de Mecânica Quântica do Departamento de Física da UFJF. Introduce-se o aluno iniciante nas definições das quatro interpretações mais conhecidas (a ondulatória, a do “ensemble” estatístico, a da onda piloto e a da complementaridade) mostrando a terminologia filosófica. Em seguida, inicia-se o formalismo matemático descrevendo o significado de cada um dos símbolos e conceitos, tais como, amplitude de probabilidade, operadores e vetores de estado.

ABSTRACT

In this dissertation we have made a study that confirms the research realized by Roberto Montenegro. We have investigated the interpretations used by students of Quantum Mechanics from Physics Department of UFJF. This work introduces the initiating students in the definitions of the four most known interpretations of the Quantum Mechanics (of the waves, of the statistical “ensemble”, of the pilot wave and of the complementarity) showing the philosophical terminology. After that, we present the mathematical formalism and describe the meaning of each symbol and concept, like, probability amplitude, operators and state vectors.

A verdadeira dificuldade
Não está em aceitar idéias novas.
Está em escapar das idéias antigas.

KEYNES

“Não sei o que se passa com as pessoas.
Não aprendem compreendendo.
Aprendem de qualquer outro modo
– decorando, ou qualquer coisa assim.
O seu conhecimento é tão frágil!”.

RICHARD P. FEYNMAN

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAP. 1 - O EXPERIMENTO DE DUPLA FENDA	
1.1 – Com Projéteis Lançados Aleatoriamente por uma Arma	12
1.2 – Com Ondas Geradas por Fonte Puntiforme	13
1.3 – Com Elétrons Emitidos de um Fio de Tungstênio	16
1.4 – Olhando os Elétrons	21
CAP. 2 – AS QUATRO INTERPRETAÇÕES BÁSICAS DA MQ	
2.1 – Idéias Filosóficas	27
2.2 – Interpretação Ondulatória Realista	29
2.3 – Interpretação Corpuscular Realista	30
2.4 – Interpretação Dualista Realista	30
2.5 – Interpretação Dualista Positivista	31
CAP. 3 – A INTERPRETAÇÃO DE COPENHAGUE	
3.1 – Contexto Histórico	32
3.2 – Princípio da Complementaridade	33
3.3 – Princípio da Incerteza	
3.3.1 – Princípio da “Indefinição”	34
3.3.2 – Princípio da “Incerteza”	39
3.3.3 – Princípio da “Dispersão Estatística”	43
CAP. 4 – CONTRADIÇÕES E PARADOXOS DAS INTERPRETAÇÕES	
4.1 – Retrodição	46
4.2 – O Problema da Medição	48
4.2.1 – Paradoxo da Quantidade	48
4.2.2 – Paradoxo da Qualidade	49
4.3 – O Interferômetro de Mach-Zehnder	51

CAP. 5 – PESQUISANDO AS INTERPRETAÇÕES	56
CAP. 6 – AMPLITUDES DE PROBABILIDADE	
6.1 – Calculando para a Dupla Fenda	63
6.2 – 1º Princípio Geral da MQ	64
6.3 - 2º Princípio Geral da MQ	65
6.4 - 3º Princípio Geral da MQ	66
6.5 – Padrão de Interferência da Dupla Fenda	69
CAP. 7 – OPERADORES E VETORES DE ESTADO	
7.1 – Vetores de Estado	75
7.2 – Produto Escalar	80
7.3 – Operadores	82
7.4 – Hamiltoniano: Calculando o Valor Médio da Energia	91
7.5 – Valor Médio de um Observável	97
7.6 – Operador Evolução	97
7.7 – Hamiltoniano: Descrevendo a Dinâmica dos Vetores de Estado	102
CONCLUSÃO	104
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	106
BIBLIOGRAFIA	107
APÊNDICE 1 - O Experimento de Stern-Gerlach	110
APÊNDICE 2 - O Espaço de Hilbert Complexo	119
APÊNDICE 3 - Questionários	128

INTRODUÇÃO

Desde sempre ouvimos falar das dificuldades na aprendizagem de Mecânica Quântica. Não deve haver um único aluno que já tenha cursado esta disciplina e não tenha tido sérias dores de cabeça com o seu formalismo matemático e com as interpretações quanto à natureza do objeto quântico (ontológica) e da forma como os físicos têm abordado este estudo (epistemológica).

Quando da escolha do tema para esta dissertação chegou-me às mãos o artigo sobre a dissertação de mestrado do Prof. Dr. Roberto Montenegro, que pesquisou as interpretações privadas dos alunos de Mecânica Quântica da UFPR e IFUSP, onde se constatou o desconhecimento destes quanto ao importante debate que ocorre, desde o nascimento da MQ, quanto às interpretações oficiais. Em suas conclusões Montenegro fala do risco que corremos com um ensino de MQ muito centrado na matemática levando a erros conceituais importante. Dos conceitos hegemônicos como “dualidade” ou “probabilidade”, que leva o aluno a desprezar o “script” interpretativo que utilizaria. (Por exemplo, o aluno descreve todo o fenômeno como corpuscular, mas se for perguntado quanto à natureza deste dirá que é dual pela hegemonia deste conceito no seu acervo interpretativo).

Resolvi repetir esta pesquisa nos alunos do Departamento de Física da UFJF confirmando coisas como a hegemonia da interpretação da complementaridade, pelo menos no que diz respeito à nomenclatura, e identificando particularidades locais, e, com isto, propor um texto clareando as explicações de cada interpretação para os vários fenômenos quânticos assim como identificando alguns paradoxos que colocam em cheque cada uma delas. A idéia foi conseguir, com o mínimo de matemática, apresentar aos iniciantes em MQ uma introdução

às idéias mais importantes com precisão, porém com simplicidade, para que seja apropriada até para aquele interessado que não curse física ou química.

Na segunda parte do trabalho, baseado principalmente no Lectures on Physics, vol III, de Richard Feynman, desenvolvi, num ordenamento didático e de fácil consulta, os conceitos de amplitude de probabilidade, espaço de Hilbert, operadores, dinâmica da MQ e outros.

Foi intencional conseguir tornar mais palatável para os iniciantes e mesmo para os curiosos desta disciplina, que têm suas dificuldades inegáveis, mas que ao mesmo tempo exerce imenso fascínio por sua precisão e elegância em descrever a natureza.

O fio condutor de toda a dissertação é o experimento de dupla fenda, descrito em detalhes logo no início do trabalho. A partir dele apresentamos as diversas interpretações e, mais tarde, quando estivermos trabalhando os elementos do formalismo matemático, também será este o experimento no qual definiremos vetor de estado, autoestados, etc.

CAPÍTULO 1

O EXPERIMENTO DE DUPLA FENDA

Didaticamente uma maneira muito especial de introduzirmos as principais idéias da mecânica quântica é via o *experimento de dupla fenda* (FEYNMAN, 1964):

1.1 - COM PROJÉTEIS LANÇADOS ALEATORIAMENTE POR UMA ARMA:

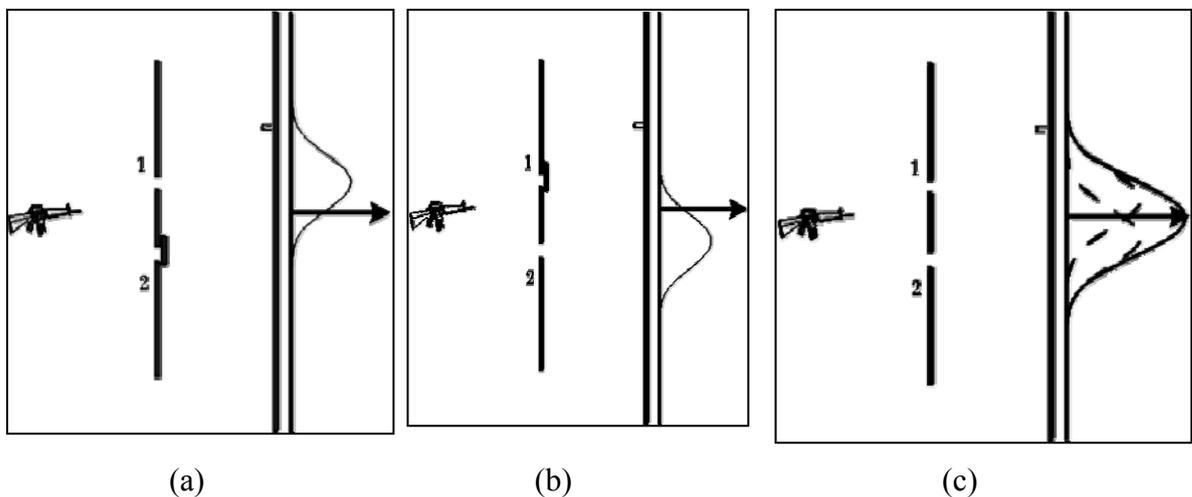


Figura 1

- (a) Curva de distribuição de freqüências de detecção com fenda 2 fechada.
- (b) Curva de distribuição de freqüências de detecção com fenda 1 fechada.
- (c) Curva de distribuição de freqüências de detecção com fendas 1 e 2 abertas.

Primeiramente, no desenho acima, fazemos o experimento da dupla fenda com uma série de *balas lançadas pela arma*, posicionada à esquerda, que pelas suas dimensões e velocidades de propagação está longe de ter um comportamento quântico.

A arma de lançamento atira aleatoriamente em todas as direções. A parede frente à arma tem dois orifícios, largos apenas o suficiente para deixar a bala passar através. Em frente

a esta parede há uma outra onde posiciona-se um detector de projéteis que pode mover-se ao longo da direção vertical (pode ser, por exemplo, uma caixa de areia). As balas que alcançarem o detector serão armazenadas nesta areia. Quando quisermos paramos o experimento e contamos as balas.

O que queremos responder é:

“Qual a probabilidade da bala que passa através dos buracos na parede chegar ao anteparo à distância x do centro?”.

Posicionando o detector nas várias posições x em intervalos de tempos iguais, mantendo o ritmo de tiros da arma sempre o mesmo, encontraremos as curvas (b) de distribuição de freqüência para: P_1 - apenas o orifício 1 aberto, P_2 - apenas o orifício 2 aberto e na curva (c) temos a distribuição de freqüência para 1 e 2 abertos. A curva P_{12} pode ser obtida simplesmente pela soma $P_1 + P_2$. Podemos chamar este resultado de observação sem interferência.

$$P_{12} = P_1 + P_2$$

1.2 - COM ONDAS GERADAS POR FONTE PUNTIFORME:

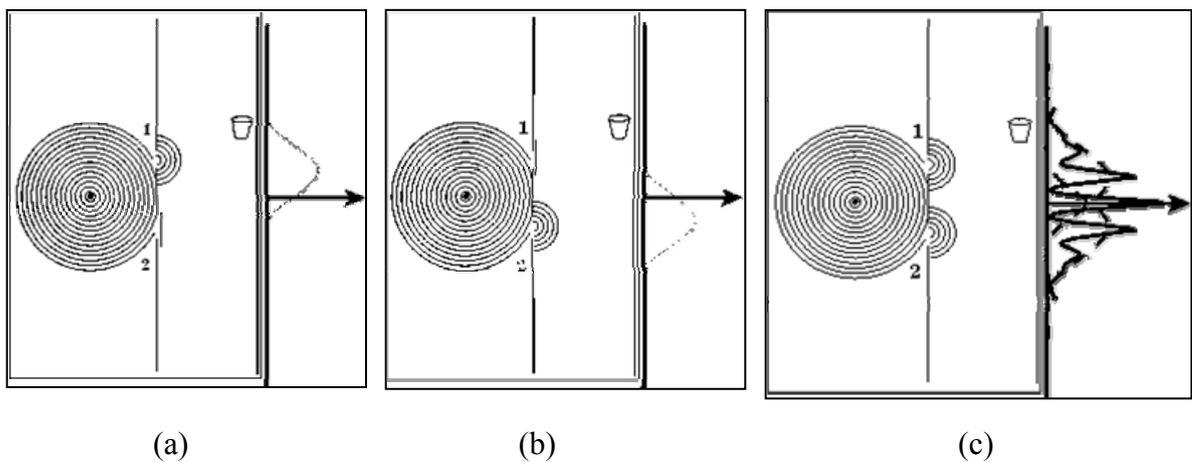


Figura 2

(a) Distribuição de intensidade da onda detectada no anteparo com 1 aberto.

- (b) Distribuição de intensidade da onda detectada no anteparo com 2 aberto.
- (c) Onda atravessa simultaneamente orifícios 1 e 2 e gráfico representando as intensidades da figura de interferência.

O aparato usado é basicamente o mesmo que foi usado no experimento com projéteis. Uma pequena agulha, posta a oscilar verticalmente em vai e vem (MHS) e tendo no extremo inferior do seu deslocamento um recipiente com água que é “batida” periodicamente, gerando uma onda periódica circular conforme a figura 2. O detector, mostrado no anteparo de absorção, é tal que de toda energia nele incidente nada reflete, tudo é absorvido. As figuras 2 (b) e 2(c) mostram I_1 e I_2 que são as distribuições de intensidades absorvidas pelo detector nas diversas posições de x , respectivamente para quando o orifício 1 está aberto e o 2 fechado e vice-versa. Quando os dois orifícios se encontram abertos, pelo Princípio de Huyghens, que diz que cada ponto de uma frente de onda funciona como uma nova fonte de mesma frequência da original, cada um deles funcionará como uma nova fonte de mesma frequência da original. Passamos a ter nos dois orifícios duas fontes em concordância de fase. É natural esperarmos que em alguns pontos tenhamos encontro das cristas (ou vales) geradas por uma fonte com as cristas (ou vales) da outra, produzindo *interferência construtiva*. Por outro lado, em outros pontos as cristas geradas por uma vão encontrar os vales da outra produzindo *interferência destrutiva*. Por isto o gráfico (c) mostra que a intensidade registrada no anteparo, quando os dois orifícios estão abertos, tem a forma oscilante indicando alternância entre regiões de grande intensidade (REGIÃO CLARA) e outras de pouca intensidade (REGIÃO ESCURA). A este efeito damos o nome de *franja de interferência*, fenômeno este considerado, classicamente, exclusivo das ondas (foi esta experiência, inclusive, que deu, no século XIX, o provisório ganho de causa ao modelo ondulatório para a luz de Huyghens em

detrimento ao modelo corpuscular de Newton. Só com a teoria dos Quanta recuperou-se, em parte, o modelo de Newton (GREENE, 2001)).

Lembremos que a relação quantitativa entre I_1 , I_2 e I_{12} pode ser expressa da seguinte maneira: as intensidades podem ser escritas como diretamente proporcionais ao quadrado da amplitude da onda. A equação de onda por sua vez é uma combinação linear de termos em seno e cosseno, que pode ser expresso como uma exponencial do tipo:

$$e^{i\tau} = \cos\tau + i.\text{sen } \tau$$

onde $\tau = \omega.t$

Então:

$$\psi_1 = h_1. e^{i.\tilde{\omega}.t} \quad \text{e} \quad \psi_2 = h_2. e^{i.\tilde{\omega}.t}$$

onde ω é a freqüência angular, i é $\sqrt{-1}$ e h_1 e h_2 são as amplitudes das ondas (que são, em geral, números complexos). A intensidade será dada pelo módulo do quadrado das amplitudes. Portanto:

$$I_1 = |h_1|^2 \quad , \quad I_2 = |h_2|^2 \quad \text{e} \quad I_{12} = |h_1 + h_2|^2$$

Vamos notar que este resultado é muito diferente daquele obtido com projéteis.

Se expandirmos $|h_1 + h_2|^2$ teremos:

$$|h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2 |h_1| |h_2| \cos \gamma$$

onde γ é a diferença de fase entre ψ_1 e ψ_2 . Como dissemos que a partir dos orifícios as ondas estariam em concordância de fase, γ é igual a zero e então $\cos \gamma = 1$.

Em termos das intensidades podemos escrever:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 \cdot I_2}$$

onde o último termo é o *Termo de Interferência*. A intensidade, devido a este termo, pode ter qualquer valor, e isto mostra interferência.

1.3 - COM ELÉTRONS EMITIDOS DE UM FIO DE TUNGSTÊNIO:

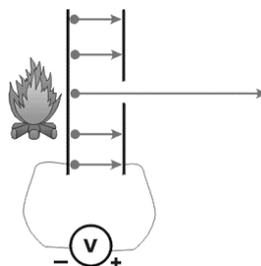


Figura 3

Tomemos um canhão de elétrons que consiste de um fio de tungstênio aquecido por uma corrente elétrica e circundado por uma caixa de metal com um orifício. Se o fio está num potencial abaixo do da caixa, elétrons emitidos pelo fio serão acelerados em direção às paredes e alguns irão passar através do orifício, conforme figura 3.

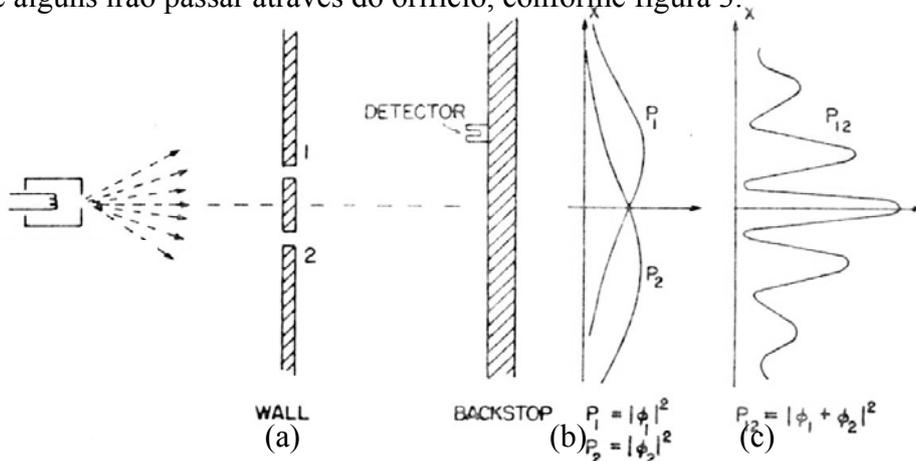


Figura 4

Todos os elétrons que saem do canhão terão aproximadamente a mesma energia. Em frente do canhão está de novo uma parede com dois orifícios. Além da parede há um outro anteparo conforme figura 4 acima. Na parte da frente do anteparo posicionamos um detector móvel que pode ser um contador geiger ou um detector de elétrons conectado a um alto-falante.

O problema é que este aparato precisa ser feito numa escala impossivelmente pequena para mostrar os efeitos em que estamos interessados. Estamos realizando, portanto, um “experimento de pensamento”. A primeira coisa que notamos com nosso experimento é que ouvimos nítidos “clicks” provenientes do alto-falante. E todos os “clicks” são iguais. Não existe “meio-click”.

Temos que notar também que os “clicks” vêm muito irregularmente como já ouvimos num contador geiger. Se contarmos os “clicks” que chegam num tempo suficientemente longo, isto é, por alguns minutos, e então contarmos de novo por um igual período de tempo acharemos que os dois números são aproximadamente iguais. A taxa média com que os “clicks” são ouvidos é constante.

Ao movermos o detector ao longo do eixo x a taxa com que os “clicks” aparecem é mais alta ou mais baixa, mas o ruído de cada “click” é sempre o mesmo. Se reduzirmos a temperatura do fio no canhão, a taxa de “clicks” diminui, mas cada “click” é ouvido com a mesma intensidade.

Temos que notar também que se pusermos dois detectores separados no anteparo, um ou o outro deve “clickar”, mas nunca os dois ao mesmo tempo.

Concluimos, portanto, que tudo que chegar ao anteparo chega em “caroços”. Todos os “caroços” são do mesmo tamanho: apenas “caroços” inteiros chegam, e eles chegam um por um no anteparo. Podemos dizer: *“elétrons sempre chegam em ‘caroços’ idênticos”*.

Assim como fizemos no experimento com projéteis podemos agora prosseguir para encontrar a resposta para a pergunta:

“Qual a probabilidade relativa com que um elétron ‘caroço’ chegará ao anteparo em várias distâncias x no anteparo ?”.

Como antes, obtemos a probabilidade relativa observando a taxa de “clicks”, mantendo o ritmo de emissões do canhão constante. A probabilidade com que aqueles caroços chegarão a um particular x é proporcional à taxa média de “clicks” em x .

O resultado do nosso experimento é a interessante curva P_{12} na parte (c) da figura 4. Esta é a maneira com que os elétrons chegam.

Agora tentemos analisar a curva (c) da figura 4 para ver até onde podemos entender o comportamento dos elétrons. A primeira coisa que podemos dizer é que eles vêm em “caroços”, e que cada “caroço” pode ser chamado de elétron.

PROPOSIÇÃO A: os elétrons ou passam por 1 ou por 2.

Consideraremos, agora, que todos os elétrons que chegam ao anteparo podem ser divididos em duas classes:

(1) Aqueles que vêm através do buraco 1 e (2) aqueles que vêm pelo buraco 2.

Chequemos esta idéia pelo experimento.

Primeiro fazemos medidas para aqueles elétrons que vêm pelo buraco (1). Bloqueamos o buraco (2) e contamos os “clicks” do detector. Da taxa de “clicks”, tomamos P_1 [figura (b)]. Fazemos o mesmo para P_2 .

O resultado P_{12} obtido com ambos os orifícios abertos é claramente diferente da soma de $P_1 + P_2$, que são as probabilidades para cada orifício sozinho. Em analogia com nossa experiência com as ondas na água dizemos:

“Há interferência!”.

Para elétrons: $P_{12} \neq P_1 + P_2$

Como pode semelhante interferência ocorrer? Talvez possamos dizer:

“Isto significa, possivelmente, que não é verdade que os ‘caroços’ sigam ou pelo orifício 1 ou pelo 2, porque se o fizessem, as probabilidades se somariam. Talvez eles passem de uma maneira mais complicada. Eles se dividem ao meio e ...”.

Mas não. Eles não podem. Eles sempre chegam em “caroços”.

“Bem, talvez alguns deles passem por (1), e então eles vão retornar por (2), e então de volta por (1) mais algumas vezes, ou por algum outro caminho complicado, então fechando (2), mudamos a chance de um elétron que passou inicialmente por (1) possa finalmente chegar no anteparo...”.

Repare que há alguns pontos no anteparo onde pouquíssimos elétrons chegam quando ambos os buracos estão abertos, mas que recebe vários elétrons quando fechamos um dos buracos. Então fechando um buraco aumenta o número através do outro. Note, contudo, que no centro do padrão de interferência, P_{12} , é mais que o dobro de $P_1 + P_2$. É como se fechando

um buraco diminuísse o número de elétrons que passa através do outro. Parece difícil explicar ambos os efeitos propondo que os elétrons viajem em complicadas trajetórias.¹

Várias idéias foram criadas para tentar explicar a curva para P_{12} em termos de elétrons individuais passando em torno de (1) e (2) em complicados caminhos. Nenhuma obteve sucesso. Nenhuma chega na correta curva P_{12} em termos de P_1 e P_2 .

Surpreendentemente a matemática relacionando P_1 e P_2 a P_{12} é extremamente simples. A curva P_{12} é exatamente a curva I_{12} da figura 2.c, e esta é muito simples. O que está acontecendo no anteparo pode ser descrito por dois números complexos que chamamos ϕ_1 e ϕ_2 (que são funções de x). O quadrado de ϕ_1 dá o efeito com apenas uma fenda aberta [a (1)]. Isto é $P_1 = |\phi_1|^2$. E estes efeitos das duas fendas abertas é apenas $P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$. A matemática é a mesma que temos para ondas na água. (É difícil ver como podemos ter um resultado tão simples de um complicado jogo de elétrons vindo e atravessando o prato com fendas em alguma estranha trajetória).

Concluimos o seguinte:

Os elétrons chegam em “caroços”, como partículas, e a probabilidade de chegada desses “caroços” são distribuídas como a distribuição da intensidade de uma onda. Isto é, no sentido de que um elétron se comporta “às vezes como partícula, às vezes como onda”.

Eventualmente, quando estivermos lidando com ondas clássicas definimos a intensidade como a média em torno do tempo do quadrado da amplitude da onda, e usamos números complexos como um truque matemático para simplificar a análise. Mas na mecânica

¹ Note que esta hipótese dos caminhos complicados e aleatórios deu origem anos mais tarde à formulação de Feynman para a mecânica quântica (**integrais de trajetória**), formulação esta que leva em consideração todas as trajetórias possíveis para a viagem de um elétron da fonte ao anteparo.

quântica isto determina que as amplitudes precisam ser representadas por números complexos. A parte real sozinha não consegue fazer esta representação.

Enquanto a probabilidade de chegada através das duas fendas é dada de maneira tão simples, por outro lado não é igual a $(P_1 + P_2)$. Mas temos um grande número de sutilezas envolvendo o fato da natureza lidar desta forma. Devemos ilustrar algumas dessas sutilezas. Primeiro, enquanto o número de chegadas a um ponto particular não é igual ao número que chega através de $1 + 2$, podemos concluir que a proposição A é FALSA. Não é verdade que elétrons passem ou através de 1 ou através de 2. Mas esta conclusão pode ser testada por outro experimento.

1.4 - OLHANDO OS ELÉTRONS:

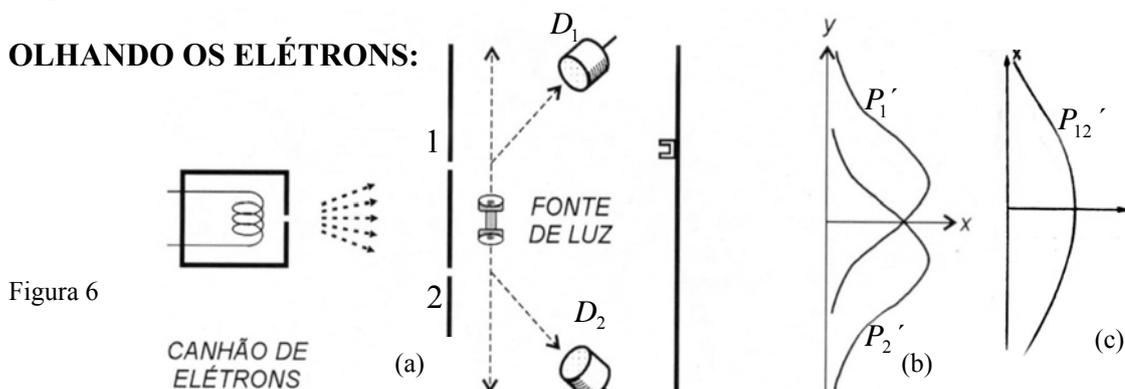


Figura 6

Podemos agora tentar o seguinte experimento: ao nosso aparato adicionaremos uma fonte luminosa forte, posicionada atrás da parede com fendas e entre estas duas fendas, como mostra a figura 6. Sabemos que cargas elétricas espalham a luz (uma vez que são, estas, ondas eletromagnéticas). Quando o elétron passa, ele vai espalhar alguma luz para nossos olhos e poderemos ver aonde o elétron vai. Se um elétron tomar o caminho via orifício 2 poderemos ver um flash de luz vindo de uma vizinhança do lugar marcado pelo detector de cima na figura. Se um elétron passa por 1, podemos esperar ver a luz de uma vizinhança do buraco de cima. Vamos ao experimento.

O que vemos: a cada instante quando ouvimos um “click” do detector, também vemos um flash de luz ou do ponto do buraco 1 ou do 2, detectados por D_1 ou D_2 , mas nunca dos

dois ao mesmo tempo. E observamos o mesmo resultado não importa onde ponhamos o detector. Desta observação concluímos que quando vemos os elétrons constatamos que vão ou por um ou outro orifício (ou 1 ou 2). Experimentalmente, a proposição A é VERDADEIRA.

O que, então, está errado com nosso argumento contra a proposição A? Porque P_{12} não é igual a $P_1 + P_2$? De volta ao experimento. Vamos tomar a trilha dos elétrons e encontrar o que estão fazendo. Para cada posição x do detector contamos os elétrons que chegam e também tomamos o caminho por qual buraco eles passaram atentando para os flashes. Podemos tomar o caminho dos eventos desta maneira: sempre que ouvirmos um “click” poremos um ponto na coluna 1 se virmos o flash perto do buraco 1 (detectado por D_1), e se virmos perto do buraco 2, na coluna 2 (detectado por D_2). Todo elétron que chegar estará marcado em uma das duas classes. Do número de marcas da coluna 1 temos P_1' e da coluna 2, P_2' . Repetindo para várias posições de x , tomamos as curvas para P_1' e P_2' mostradas em (b) da figura 6.

Tomamos para P_1' algo muito similar ao que tomamos antes para P_1 bloqueando o buraco 2, e P_2' similarmente bloqueando 1.

Qual a probabilidade total de um elétron chegar ao detector por qualquer caminho? Já temos esta informação. Para a probabilidade com que um elétron chegará ao anteparo passando por 1 ou 2 temos $P_{12}' = P_1' + P_2'$. Isto é, uma vez que assistimos por quais orifícios nossos elétrons passaram temos a nova curva P_{12}' , mostrando nenhuma interferência. Se desligarmos a luz P_{12} é restaurada.

Concluimos que quando olhamos os elétrons a distribuição deles no anteparo é diferente daquela de quando não olhamos (GAMOW, 1990).

Talvez seja nossa fonte de luz que cause o distúrbio?

Deve ser pois elétrons são muito sensíveis e a luz, quando dispersada pelos elétrons, dá a eles um “solavanco” que muda o momento linear destes. Sabemos que o campo elétrico

da luz agindo numa carga vai exercer uma força nesta. Então talvez possamos esperar que o momento linear seja alterado. De toda forma, a luz exerce uma grande influência nos elétrons. Tentando “ver” os elétrons alteramos seus movimentos. Isto é, o “solavanco” dado aos elétrons quando o fóton é dispersado por este é tal que a mudança no movimento do elétron foi suficiente para mudar seu movimento de onde P_{12} era máximo para onde P_{12} era mínimo. Este é o porque da interferência ondulatória.

Poderíamos pensar:

“Não use a fonte de luz! Diminua o brilho! As ondas luminosas vão ser então mais fracas e, eventualmente, a onda será fraca o suficiente e terá um efeito negligenciável sobre o elétron.”

Vamos testar. A primeira coisa a observar é que os flashes de luz espalhados pelos elétrons quando eles passam através dos orifícios não se tornam mais fracos. É sempre do mesmo tamanho o efeito do flash. A única coisa que acontece enquanto a luz é feita mais fraca é que às vezes ouvimos um “click” vindo do detector mas não vemos o flash. O elétron veio sem ser “visto”. O que estamos observando mostra que a luz também age como os elétrons. Sabemos que ela é ondulatória, mas agora descobrimos que é também corpuscular. Ela sempre chega, ou é espalhada, em “caroços” aos quais chamamos “fótons”. Ao tornarmos a intensidade da fonte mais fraca não mudamos o tamanho dos fótons. Mudamos apenas a taxa com que são emitidos. Isto explica porque, quando nossa fonte é diminuída em intensidade, alguns elétrons passam sem serem vistos. Não havia fóton por perto quando o elétron passa pela fenda.

Se isto é verdade, ou seja, que sempre que “vemos” o elétron vemos o flash de mesmo tamanho, então aqueles elétrons que vemos são sempre perturbados. Tentemos o experimento

com uma luz enfraquecida. Agora sempre que ouvirmos um “click” no detector tomamos a contagem em três colunas: na coluna (1) → fenda 1, coluna (2) → fenda (2) e coluna (3) → não visto. Encontraremos os seguintes resultados: aqueles vistos em 1 têm distribuição como P_1' , aqueles vistos em 2, P_2' (então aqueles que são vistos por 1 ou 2 têm distribuição igual a P_{12}') e aqueles que não são vistos têm uma distribuição ondulatória como em P_{12} da figura 4 (c). Se os elétrons não são vistos, temos interferência.

Quando não “vemos” o elétron, nenhum fóton o perturbou, e quando o vemos um fóton o perturbou. Teremos sempre o mesmo montante de perturbação porque os fótons de luz produzem efeitos sempre do mesmo tamanho e o efeito dos fótons sendo dispersos é suficiente para apagar qualquer efeito de interferência.

Não há uma maneira de vermos os elétrons sem perturbá-los?

Aprendemos em física moderna básica que o momento linear carregado por um fóton é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda ($p = h/\lambda$). Certamente o “solavanco” dado ao elétron quando o fóton é dispersado em direção aos nossos olhos depende do momento linear que os fótons carregam. Portanto:

Se desejamos perturbar o elétron apenas ligeiramente não devemos diminuir a intensidade mas sim a frequência dos fótons.

Vamos, então, usar luz vermelha. Podemos usar a luz infravermelha, micro-ondas (como radar), e “ver” onde o elétron passou com o auxílio de algum equipamento que pode “ver” luz desses grandes comprimentos de onda.

Tentemos o experimento com ondas de grande comprimento de onda. Podemos ir repetindo nosso experimento, a cada instante com luz de menores comprimentos de onda. A princípio, nada parece mudar. Os resultados são os mesmos. Então uma coisa incrível acontece:

A partir de um certo valor de comprimento de onda e distância entre fendas se torna impossível determinar por qual delas o elétron passou. Esta distância é da ordem de um comprimento de onda da luz.

Então, quando fazemos o comprimento de onda maior que a distância entre nossos orifícios da parede, vemos um grande borrão de luz quando a luz é espalhada pelos elétrons, Não podemos, portanto, dizer de qual orifício veio o elétron. Sabemos apenas que veio de algum dos dois orifícios. E é exatamente com luz desta cor que encontramos que os “solavancos” dados aos elétrons são pequenos o suficiente para que P_{12}' seja como P_{12} , ou seja, começamos a ter efeito de interferência. E isto é apenas para comprimentos de onda muito maiores que a separação dos dois orifícios, quando não temos nenhuma chance de dizer por onde o elétron passou, que a perturbação dada pela luz fica tão pequena que de novo temos P_{12} da figura 4.c.

Em nossa experiência vimos que:

É impossível arranjar uma luz que diga por qual orifício passou o elétron e não perturbe o padrão

.

Foi sugerido por Heisenberg (1981) que as novas leis da natureza poderiam ser consistentes se tivéssemos alguma limitação básica nas nossas capacidades experimentais, não

previamente conhecidas. Ele propôs, como um princípio geral, seu Princípio da Incerteza, o qual pode ser posto, em termos do nosso experimento, como se segue:

“É impossível montar um aparato para determinar por qual orifício o elétron passa, que não irá ao mesmo tempo perturbar os elétrons o suficiente para destruir o padrão de interferência”.

Se um aparato é capaz de determinar por qual orifício o elétron passa, ele não pode ser tão delicado que não perturbe o padrão de interferência.

CAPÍTULO 2

AS QUATRO INTERPRETAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA QUÂNTICA

2.1 – IDÉIAS FILOSÓFICAS

Neste ponto iremos tratar das quatro principais interpretações da Mecânica Quântica.

É surpreendente que a Teoria Quântica, devido a propriedades contraditórias tais como o mesmo objeto quântico se comportar ora como partícula ora como onda, possa ser interpretada de diversas maneiras, sendo que cada uma dessas interpretações é “internamente consistente e, de modo geral, consistente com os experimentos quânticos.” (PESSOA JR., 2003)

Veja que a noção de *interpretação* significa um conjunto de teses que se junta ao formalismo mínimo do que chamamos teoria, em nada afetando-a e explicando satisfatoriamente as previsões observadas na teoria. Uma mesma teoria pode ter, portanto, uma infinidade de interpretações. Apenas havendo previsões novas ou discordantes podemos falar de uma “teoria diferente.”

A princípio faz-se importante definirmos dois termos da Filosofia da Ciência necessários para a classificação que faremos das principais interpretações:

ONTOLOGIA: “Parte mais geral da metafísica, que trata do ‘ser enquanto ser’ [...]”(ARANHA, 1993). Define-se, ainda, *metafísica* como sendo “parte da filosofia que estuda o ‘ser enquanto ser’, isto é, o ser independentemente de suas determinações particulares; estudo do ser absoluto e dos primeiros princípios. [...] (Exemplos de conceitos

metafísicos: identidade, oposição, diferença, todo, perfeição, necessidade, realidade, etc.) [...]”.(ARANHA, 1993).

A partir destas definições, o que poderiam ser os objetos quânticos com relação à ontologia? Baseados nos experimentos de dupla fenda poderíamos conceber, quanto a ontologia, três possíveis “naturezas” para o objeto quântico (no caso a luz): natureza ondulatória, natureza corpuscular ou natureza dual.

EPISTEMOLOGIA: “A epistemologia, também chamada teoria do conhecimento, é o ramo da filosofia interessado na investigação da natureza, fontes e validade do conhecimento. Entre as questões principais que ela tenta responder estão as seguintes. O que é o conhecimento? Como nós o alcançamos? [...]” (GRAYLING, 2006).

Basicamente são duas as atitudes epistemológicas, ou seja, os caminhos filosóficos percorridos na construção do conhecimento, que deram origem às quatro principais interpretações da Teoria Quântica:

REALISMO: “Essa posição filosófica é, em termos simples, a de que, embora falíveis, as teorias científicas devem ser entendidas como tentativas sérias, e cada vez melhores, de descrever uma realidade *objetiva*, ainda quando transcenda o nível dos fenômenos, ou seja, aquilo que é diretamente perceptível aos sentidos. O empreendimento científico continua, nessa perspectiva realista, dando vazão da melhor forma possível ao nosso arraigado desejo de compreender o mundo real, de descobrir como e por que funciona.” (CHIBENI, 2006).

POSITIVISMO: O antropólogo estrutural Edmund Leach descreveu o positivismo como:

"Positivismo é a visão de que o inquérito científico sério não deveria procurar causas últimas que derivem de alguma fonte externa mas sim confinar-se ao estudo de relações existentes entre fatos que são diretamente acessíveis pela observação."

Vemos que a diferença entre a visão realista e a positivista é que a esta importa o que é observado e àquela, mesmo as coisas que não são observadas tem que ser concebidas uma vez que falam da realidade objetiva das coisas.

Nesta diferença de visões filosóficas se encontra o nascedouro da célebre celeuma, que teve seu ponto alto nas Conferências de Solvay, entre, principalmente, Bohr e Einstein.

Iniciaremos, agora, a apresentação das diversas interpretações. A nomenclatura de cada uma delas começa pela palavra correspondente à concepção ontológica da interpretação e finaliza com o termo que identifica sua opção epistemológica. Estas classificações estão baseadas no livro de Pessoa Junior (2003) e no artigo de Montenegro e Pessoa Jr. (2006):

2.2 - INTERPRETAÇÃO ONDULATÓRIA REALISTA:

Principais defensores: Erwin Schrödinger e John Von Neumann.

Nesta interpretação o objeto quântico é identificado com ondas. A função de onda quântica corresponde a uma realidade: ondulatória ou de “potencialidade” (ondas de probabilidade).

Esta interpretação, inicialmente devida a Schrödinger, foi aprimorada por John Von Neumann que introduziu o conceito de *colapso de onda*, teorizando que sempre que uma medição é feita sobre o objeto quântico a onda Ψ , que estava espalhada a princípio, sofre uma redução súbita, passando a localizar-se próxima do local da medida formando um *pacote*

de onda que é a entidade mais próxima de uma partícula, mas ainda com natureza ondulatória

2.3 - INTERPRETAÇÃO CORPUSCULAR REALISTA:

Principais defensores: Alfred Landé e Leslie Ballentine

As entidades microscópicas, com ou sem massa de repouso, são partículas, sem uma onda a elas associada.

Sua grande dificuldade é explicar, por exemplo, os padrões de interferência no experimento de dupla fenda. Lançam mão, neste caso, do *ensemble estatístico* que considera o feixe de elétrons colidindo partícula a partícula nas fendas do primeiro anteparo e sendo estas colisões aleatórias que produziram as imagens do padrão de interferência no anteparo de projeção.

2.4 - INTERPRETAÇÃO DUALISTA REALISTA:

Principais defensores: Louis de Broglie e David Bohm.

Proposta original de de Broglie nos anos 20. O objeto quântico é dividido em duas partes: um corpúsculo que tem trajetória bem definida, apesar de desconhecida, e uma onda, que será chamada *onda piloto*, cuja amplitude nas várias partes do espaço define a probabilidade da trajetória da partícula ali passar. Um ponto de amplitude zero da onda piloto corresponde a uma posição impossível de ser ocupada pela partícula.

Foi aprimorada na década de 50 por David Bohm que introduziu as chamadas “variáveis ocultas”.

2.5 - INTERPRETAÇÃO DUALISTA POSITIVISTA:

(COMPLEMENTARIDADE)

Principal defensor: Niels Bohr

Caracteriza-se por constatar a limitação em nossa capacidade de representar os fenômenos na escala microscópica. Diante disto, conforme o experimento, a entidade quântica será descrita com o caráter ondulatório ou o corpuscular. Nunca os dois simultaneamente. Isto não significa, porém, que o objeto quântico seja uma partícula ou seja uma onda. Na abordagem positivista só podemos afirmar a existência das coisas observadas. Nesta visão afirmar que “um elétron não-observado sofreu redução de estado” não tem sentido.

CAPÍTULO 3

A INTERPRETAÇÃO DE COPENHAGUE

3.1 – CONTEXTO HISTÓRICO

Por sua importância histórica e por ser a interpretação hegemônica destacamos a interpretação da complementaridade num capítulo separado juntamente com o Princípio da Incerteza por formar com este a Interpretação de Copenhagen.

A base da interpretação de Copenhagen está no Princípio da Incerteza, devido a Heisenberg, e no Princípio da Complementaridade, devido a Niels Bohr. Estes dois princípios, que juntos formam a Interpretação de Copenhagen, foram desenvolvidos, pode-se dizer, simultaneamente.

Era início do ano de 1927 (SILVA, 2000), momento em que Bohr e Heisenberg passavam uma temporada em Copenhagen onde discutiam uma interpretação que conciliasse as questões de ordem epistemológicas e ontológicas da Mecânica Quântica.

Nas palavras de Heisenberg (1981):

Lembro-me de discussões de muitas horas com Bohr, até altas horas da noite, que acabavam quase em desespero. E quando, ao final de uma dessas discussões, eu saí para uma caminhada pelo parque vizinho, fiquei repetindo a mim mesmo a mesma pergunta: pode a Natureza ser tão absurda como nos tem parecido nessas experiências com átomos?

Heisenberg se referia ao paradoxo da dualidade onda partícula, especialmente em exemplos com a perfeita descrição matemática, via equações de Schroedinger, dos estados

estacionários de um átomo, mas sua incapacidade em descrever algo muito mais simples: um elétron passando através de uma câmara de Wilson (redução de estado).

Para Heisenberg tanto a linguagem corpuscular quanto a linguagem ondulatória eram satisfatórias, indistintamente, para descrever os objetos, mas Bohr insistia que ambas eram necessárias.

Em fevereiro de 1927, Bohr foi esquiar na Noruega e Heisenberg permaneceu em Copenhague. Este imaginou o célebre experimento de pensamento do microscópio de raios gama enquanto que, nas neves norueguesas, Bohr elaborou seu Princípio da Complementaridade.

3.2 -PRINCÍPIO DA COMPLEMENTARIDADE:

Partícula ou Onda:

Para Bohr, pelo Princípio da Complementaridade um objeto quântico (fóton, elétron, próton, etc.) não pode ser compreendido dentro de um “quadro único”. Pelo contrário necessita de descrições usando ondas ou partículas, que juntas se complementam para descrever o objeto (SILVA, 2000).

Uma analogia interessante que podemos fazer para clarear o Princípio da Complementaridade é com uma moeda. A moeda é composta de cara e coroa. Sua totalidade inclui estas duas realidades. No entanto estas duas faces não podem se manifestar simultaneamente. Ou vemos a face cara ou a face coroa. Cada uma se manifesta excluindo a manifestação da outra. Mas cada uma das faces complementa a outra, formando a moeda.

Como critério para sabermos quando o objeto quântico está tendo comportamento de onda ou de partícula usamos:

- **ONDA:** quando se evidenciam os fenômenos de interferência.
- **PARTÍCULA:** quando é possível determinar a trajetória seguida pelo objeto quântico².

Por exemplo: no experimento de dupla fenda para elétrons quando abrimos as duas fendas e o padrão de interferência é formado no anteparo temos um comportamento de onda. No entanto quando a fonte luminosa foi instalada entre as duas fendas para determinar por qual delas o elétron passou destruimos o padrão e determinamos o orifício de passagem, evidenciando assim o caráter corpuscular.

3.3 - PRINCÍPIO DA INCERTEZA

A Relação entre os Pontos de Vista Ondulatório, Corpuscular e Estatístico

3.3.1 – PRINCÍPIO DA “INDEFINIÇÃO” – Abordagem Ondulatória

Consideramos já serem conhecidas as relações de Planck e de de Broglie. São elas:

$E = \hbar \cdot \omega$ (Relação de Planck) e $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$ (Relação de de Broglie) onde E é a energia e \vec{p} o momento linear do objeto quântico. Já ω é a frequência angular ($2\pi \cdot \nu$) e \vec{k} o vetor de onda (cujo módulo é chamado número de onda e dado pelo comprimento de onda dividido por 2π [$\lambda/2\pi$]) da onda relacionada ao objeto quântico (onda de matéria para os elétrons e prótons e onda eletromagnética para os fótons). Finalmente, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , lembrando que esta também pode ser chamada de ação mínima.

² Esta é a chamada VERSÃO FORTE do Princípio da Complementaridade (PESSOA JR, 2003). Na VERSÃO FRACA diz-se que o objeto quântico é detectável no obstáculo em “clicks” distintos do contador geiger, por exemplo.

Isto significa que no mundo quântico a idéia de partícula é limitada. A idéia de uma partícula – sua posição, seu momento linear, etc. – o qual usamos muito, é de certo modo insatisfatório. Por exemplo: construiremos a descrição quântica de uma partícula livre através de um *pacote de ondas* (COHEN, 1977).³

Figura 7



Para construirmos um pacote de onda como o da figura 7 não podemos fazê-lo com um único comprimento de onda uma vez que a incerteza quanto à posição da partícula seria infinita (com um único comprimento de onda, $\Psi = A.e^{-i(\omega.t - kx)}$ onde a probabilidade de encontrar a partícula é $|A^2|$ que é um valor positivo e constante para todo x, denotando uma total ignorância sobre a posição da partícula uma vez que ela pode ser encontrada com a mesma probabilidade em qualquer lugar do eixo-x, por onde se propaga esta onda).

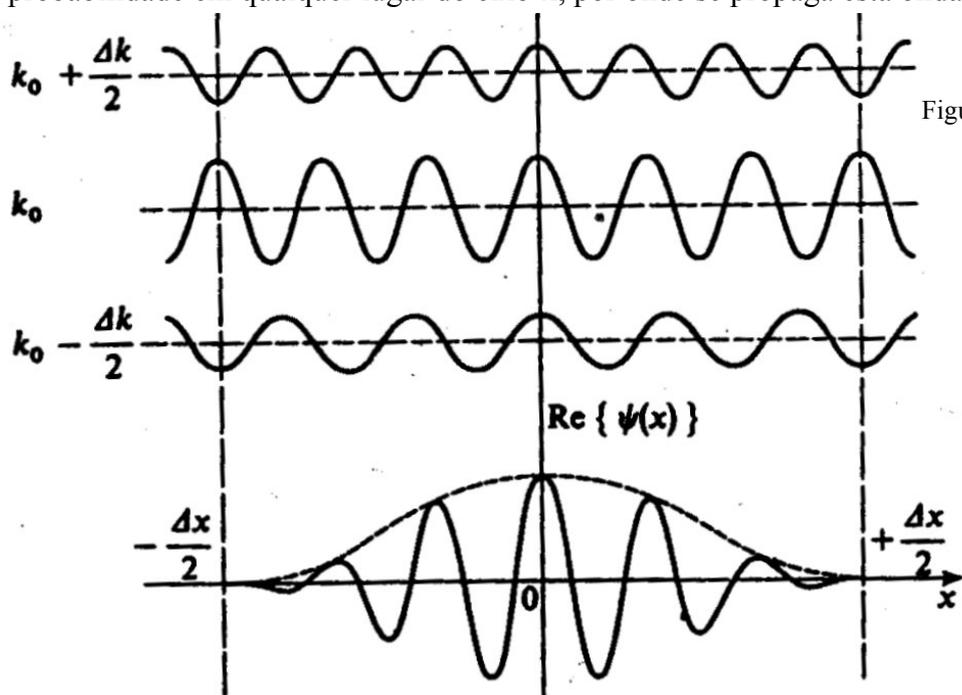


Figura 8

Fica evidente que o nosso pacote de onda só pode ser construído com ondas de comprimentos que interfiram de forma a termos amplitudes diferentes de zero num certo

³ Deste ponto em diante trataremos os vetores de onda e momento linear indistintamente com ou sem a representação vetorial, uma vez que trataremos com interferências exclusivamente unidimensionais.

intervalo ΔX (que define a incerteza na posição) e em todo o resto do espaço amplitude zero, conforme a figura acima. Então nosso pacote de onda não terá um comprimento de onda (e número de onda) bem definido, uma vez que ΔX para ser finito no nosso pacote de onda tem que ser gerado pela interferência de vários comprimentos de onda.

Uma vez que o momento linear é definido, pela relação de de Broglie, através do comprimento de onda, vemos que esta interferência introduz uma incerteza no momento linear pois o pacote não é mais definido por um único comprimento de onda e sim por um conjunto de comprimentos de onda.

Tomemos o seguinte exemplo para chegarmos à Relação de Incerteza de Heisenberg:

Façamos a interferência entre a onda Ψ já citada e Ψ_1 e Ψ_2 cujos números de onda estão defasados de Ψ por, respectivamente, $\pm \Delta k/2$. Apenas, por uma questão de simplicidade, façamos $t_0 = 0$ o que faz $\Psi = A.e^{i.k_o.x}$, $\Psi_1 = (A/2).e^{i.(k_o + \Delta k/2).x}$ e $\Psi_2 = (A/2).e^{i.(k_o - \Delta k/2).x}$. Fizemos as amplitudes de Ψ_1 e Ψ_2 iguais a $A/2$ para que nas extremidades de Δx haja interferência destrutiva completa.

Vamos construir o pacote de onda somando as três ondas interferentes:

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \Psi_1(x) + \Psi_2(x)$$

$$\Phi(x) = A.e^{i.k_o.x} + (A/2).e^{i.(k_o + \Delta k/2).x} + (A/2).e^{i.(k_o - \Delta k/2).x}$$

$$\Phi(x) = A.e^{i.k_o.x} . [1 + (1/2) e^{i(\Delta k/2).x} + (1/2) e^{-i(\Delta k/2).x}]$$

Sabemos que

$$\frac{e^{i.(\Delta k / 2).x} + e^{-i.(\Delta k / 2).x}}{2} = \cos (\Delta k.x/2)$$

Nos extremos de Δx a amplitude resultante de $\Phi(x)$ é nula.

Portanto:

$$1 + \cos (\Delta k.x/2) = 0$$

$$\cos (\Delta k.x/2) = - 1$$

Como $x = 0$ coincide com o eixo de simetria do pacote de ondas entendemos que nos pontos de amplitude zero, extremos do pacote de ondas, temos

$$x = (\Delta x)/2$$

Então:

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) = - 1$$

Logo

$$\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) = \pi$$

Sendo

$$\Delta k = 2\pi / \Delta\lambda \quad \text{e} \quad \Delta\lambda = h / \Delta p,$$

Da última relação chegamos a

$$\frac{\pi \cdot \Delta p}{h} \cdot \frac{\Delta x}{2} = \pi$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 2 \cdot h$$

Vimos que quando o comprimento de onda (e com isto o momento linear p do objeto quântico que define esta onda, eletromagnética ou de matéria) estava muito bem definido (a onda Ψ sozinha) a posição x estava completamente indeterminada. No entanto, fazendo apenas o somatório de três ondas que interferem mutuamente diminuimos a incerteza na posição para apenas Δx . Em contrapartida o valor de p que era correto passa agora a ter uma incerteza Δp .

Imagine agora o que aconteceria se pudéssemos (e podemos, com uma matemática mais poderosa das integrais e transformadas de Fourier) montar a interferência de uma infinidade de ondas periódicas formando um pacote de onda com o Δx menor o possível. Bastaria somarmos (através de uma integral) uma infinidade de ondas semelhantes a Ψ_1 e Ψ_2 . Chegar-se-ia enfim à relação de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

É interessante notar que esta relação numérica estabelece um vínculo entre os princípios da Incerteza e da Complementaridade. Quando aumentamos a certeza na posição ($\Delta x \rightarrow 0$) o caráter corpuscular se evidencia. Mas para respeitar a relação de Heisenberg Δp cresce imensamente, destruindo seu caráter ondulatório. Caso contrário ($\Delta p \rightarrow 0$) a onda toma

seu formato original com frequência e comprimento de onda bem definidos. No entanto, como vimos, o caráter corpuscular desaparece uma vez que é impossível determinar a posição.

Na figura 9 abaixo mostramos esta relação de incerteza, alterando-se conforme o crescimento da incerteza de x ou a de k (que pela relação de de Broglie corresponde a uma incerteza em p).

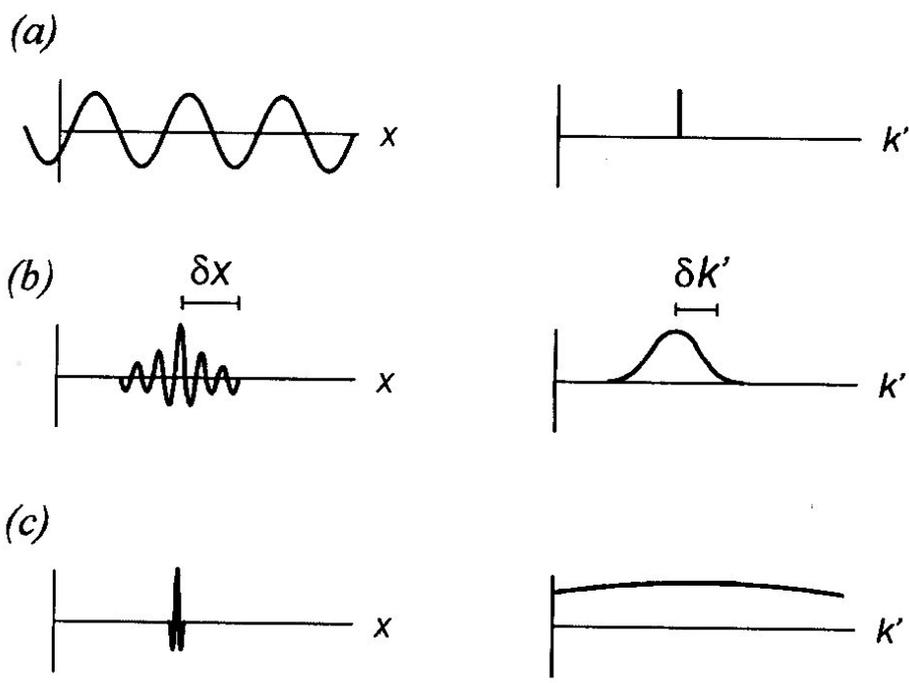


Figura 9

3.3.2 -PRINCÍPIO DA “INCERTEZA” – Abordagem Corpuscular:

No tópico precedente vimos uma justificação matemática e física para o Princípio da Incerteza numa abordagem estritamente ondulatória. Agora faremos o mesmo só que numa abordagem corpuscular almejando chegar a um resultado coerente com o primeiro.

Utilizaremos para isto o experimento de pensamento, introduzido por Heisenberg, do *Microscópio de Raios Gama* (EISBERG, 1979, p. 99).

Veja o diagrama a seguir:

Figura 10

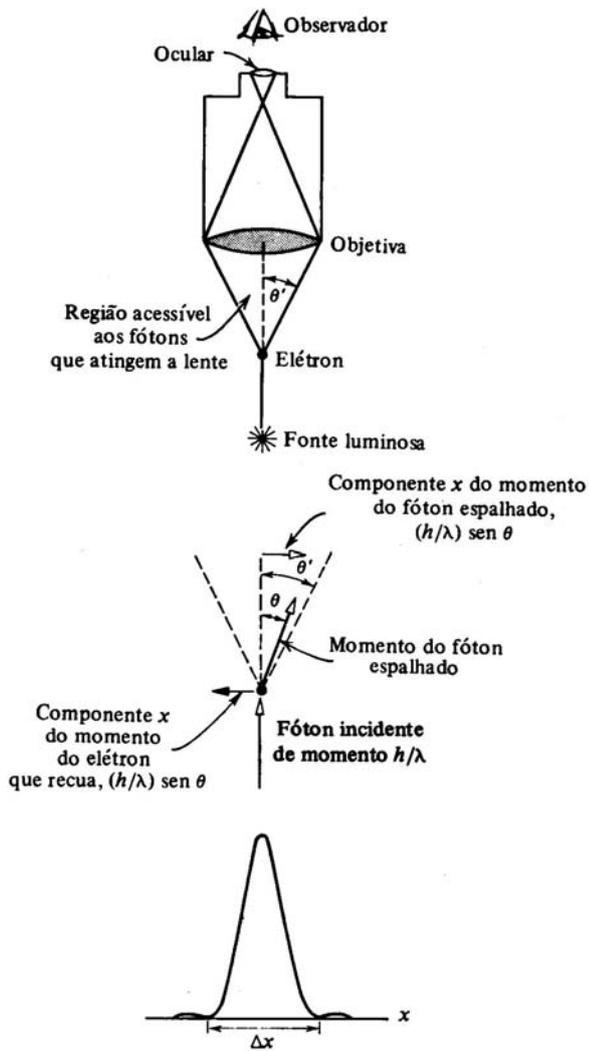
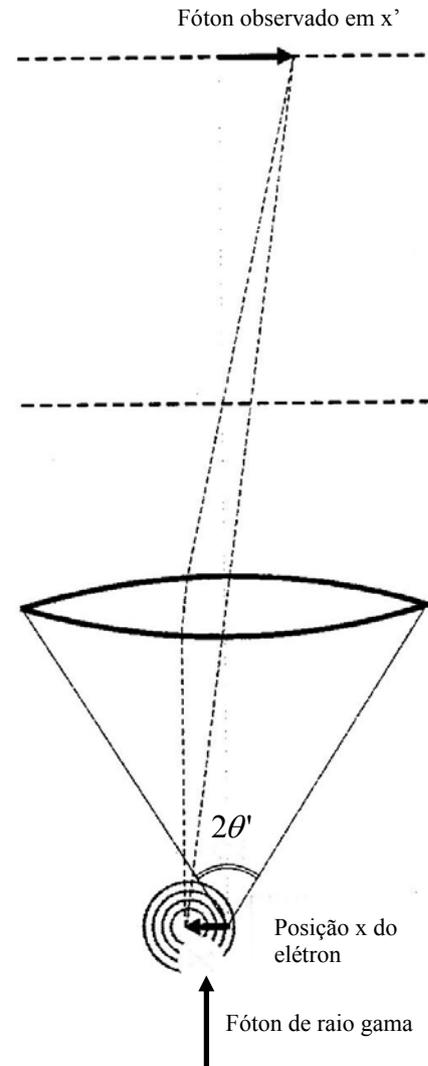


Figura 11



O que se quer é determinar a posição de um elétron livre, considerado inicialmente em repouso. Sabe-se que a precisão de uma medida será tanto maior quanto menor for o comprimento de onda λ da radiação utilizada. Por isto foi sugerida a radiação gama.

Seja então a partícula iluminada por um feixe de raios gama na direção y , conforme indicado na figura 10. Eventualmente, um fóton de raio gama será espalhado pelo elétron e capturado pela lente do microscópio fato que consideraremos suficiente para “vermos” o

elétron. Da relação de de Broglie temos que o momento do fóton antes da colisão com o elétron é $p_y = h / \lambda$. Este fóton, depois de colidir, pode ter sido espalhado em qualquer direção dentro da região angular $2\theta'$ subtendida pela lente objetiva do microscópio, uma vez que a hipótese inicial é que o elétron foi “visto” devido à detecção do fóton espalhado. Vamos supor também que a energia deste fóton foi pouco afetada na colisão com o elétron o que conservou seu comprimento de onda para depois do choque.

A componente x do momento linear do fóton espalhado pode variar de $+ p_y \text{ sen } \theta'$ a $- p_y \text{ sen } \theta'$. Então a incerteza depois do espalhamento é:

$$\Delta p_x = 2p_y \text{ sen } \theta' = (2h/\lambda) \text{ sen } \theta'. \quad (3.1)$$

Para que haja conservação do momento linear do sistema fóton-elétron o elétron tem que adquirir um momento na direção x de mesmo módulo da variação da componente x do momento do fóton espalhado, em outras palavras, *a componente x do momento do elétron tem a mesma incerteza da componente x do momento do fóton.*

Da expressão (3.1) vemos que a incerteza da componente x do momento da partícula é inversamente proporcional ao comprimento de onda do fóton incidente. Com isto podemos diminuir a incerteza neste momento aumentando o comprimento de onda do fóton incidente. Ou seja, usando fótons de maior comprimento de onda, e conseqüentemente, menores momento linear e energia, diminuiríamos a incerteza do momento do elétron depois da interação.

Agora, o que aconteceria com a coordenada x da posição do elétron? Lembremos que a imagem de um objeto pontual, vista através de um microscópio, não é um ponto e sim uma figura de difração. A imagem é “borrada”. A resolução do microscópio determina a precisão máxima com a qual o elétron pode ser localizado.

Se tomarmos a largura do máximo central da difração como sendo uma medida da incerteza em x , uma expressão bem conhecida para o poder de resolução de um microscópio nos dá em conformidade com a figura 11 (HALLIDAY, 1968, p.1264):

$$\Delta x = \lambda / (\text{sen } \theta') . \quad (3.2)$$

De (3.2) depreendemos que a incerteza da posição aumenta com o aumento do comprimento de onda. Isto quer dizer que a maior precisão na determinação da posição se dará mesmo com a incidência dos raios gama pois sendo a menor das frequências de onda manipulável em laboratório praticamente não teríamos difração o que nos daria a imagem, da qual inferiríamos a posição x do elétron o menos “borrada” possível.

Multiplicando membro a membro (3.1) por (3.2) vem:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{2h}{\lambda} \text{sen } \theta' \cdot \frac{\lambda}{\text{sen } \theta'} .$$

Com as devidas simplificações vem:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = 2h .$$

Resultado este que concorda plenamente com aquele encontrado na discussão ondulatória de onde, mais uma vez:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar .$$

3.3.3 - PRINCÍPIO DA “DISPERSÃO ESTATÍSTICA” – *Abordagem do Ensemble*

Estatístico

Nas duas abordagens precedentes têm-se um elemento em comum: nos dois casos nos referimos a um objeto ou situação experimental individual (a partícula ou o pacote de ondas). Nesta interpretação, ao invés, considera-se não um objeto individual, mas um conjunto, um *ensemble*, de objetos preparados num mesmo estado quântico.

Medidas realizadas sobre cada um dos membros do ensemble revelarão valores diferentes devido a dispersões estatísticas, mas que se distribuem segundo uma curva dada pela função de onda (CHIBENI, 2006a) que por sua vez tem o formato de uma distribuição gaussiana.

Exemplificando: se tomássemos o experimento de dupla fenda mais uma vez e estabelecêssemos a emissão de elétrons no regime quântico (um elétron de cada vez) e fizéssemos a detecção no anteparo, a princípio com a fenda 1 aberta e a 2 fechada, conforme figura 1 (a) do primeiro capítulo, teríamos uma distribuição de frequência, ou seja, o número de detecções ponto a ponto do anteparo.

Evidentemente o ponto diretamente em frente à fenda, na direção da propagação anterior à passagem pela fenda, há de detectar um número maior que todos os outros pontos evidenciando o máximo de nossa distribuição. Os outros pontos ao redor vão tendo, a medida que afastamo-nos do ponto de detecção máxima, probabilidades de serem atingidos cada vez menores. Isto se dá porque os pontos são atingidos pelos elétrons que ao atravessar a fenda podem “resvalar” nas quinas deste orifício e serem, com isto, desviados de uma direção mais coincidente com aquela de seu movimento anterior à passagem pela fenda.

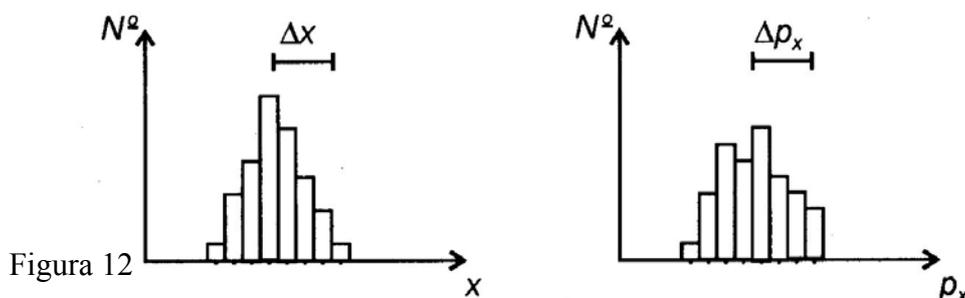
Isto tem total correspondência com a difração de onda. Imagine que a fenda fosse feita menor. Isto seria, relativamente, o mesmo que aumentarmos o comprimento da onda que difrata. Os elétrons que passassem pela fenda, no regime quântico, teriam, cada um, maior

probabilidade de alcançarem pontos mais distantes do ponto de detecção máximo, uma vez que pelo estreitamento da fenda maior seria a probabilidade deste elétron ser desviado pelas quinas das fendas.

Por isto esta distribuição de frequências, que evidencia a probabilidade do elétron ser detectado nos vários pontos do anteparo, se identifica com a função de onda de Schrödinger.

Esta terceira versão das relações foi, em linhas gerais, desenvolvida pelo próprio Heisenberg mas foi sistematizada pelo filósofo da ciência Karl Popper em seu livro de 1934 *Logik der Forschung* (A Lógica da Investigação). Segundo Popper, essa interpretação mostra que “a teoria ondulatória pode também ser tomada como uma teoria de partículas; pois a equação de ondas de Schrödinger pode ser interpretada como fornecendo a *probabilidade de encontrar a partícula* em uma dada região qualquer do espaço” (apud CHIBENI, 2006a, p.186).

A figura abaixo evidencia a distribuição de frequências de detecções das posições e momentos dos elétrons no anteparo.



Vemos que se fizéssemos uma linha contínua ligando os pontos médios da cada retângulo que evidencia uma posição x (ou um momento p_x) teríamos uma curva com o formato de um **seno**. Por isto identificamos estas distribuições com a distribuição normal gaussiana $|\psi(x,0)|^2$ que identifica a densidade de probabilidade de encontrarmos a partícula numa posição x onde o centro da distribuição esteja no ponto $x = 0$.

Definamos agora *desvio da raiz média quadrática* (“root-mean-square deviation”) ou simplesmente *desvio padrão* de uma distribuição gaussiana.

Segundo Cohen (1977, p. 230):

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} .$$

Que literalmente pode ser lido como *o desvio padrão do observável A é dado pela raiz quadrada da média dos quadrados de suas medidas menos sua média ao quadrado.*

Para provarmos a relação de Heisenberg no modelo estatístico faremos a seguinte simplificação: imaginemos que a curva gaussiana da distribuição de freqüências de x seja $e^{-x^2/2}$ pois sua transformada de Fourier é exatamente $e^{-k^2/2}$. Tomando a conclusão do Cohen (1977, p.63) que indica que para uma função gaussiana $f(x) = e^{-x^2/b^2}$, onde b é um número real qualquer, define-se Δx precisamente como sendo:

$$\Delta x = b/\sqrt{2} .$$

E para sua grandeza conjugada k:

$$\Delta k = 1/\sqrt{2} b .$$

Logo

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot b} = \frac{1}{2} .$$

Como $k = \hbar \cdot p$, então

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} .$$

Que é compatível com a relação de Heisenberg.⁴

⁴ Numa relação devida a Schrödinger mostra-se que para dois operadores auto-adjuntos quaisquer: $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq |\langle \frac{1}{2}(AB - BA) \rangle|^2 + (\frac{1}{2} \langle AB + BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle)^2$ onde $AB - BA$ vale $i\hbar/2\pi$.

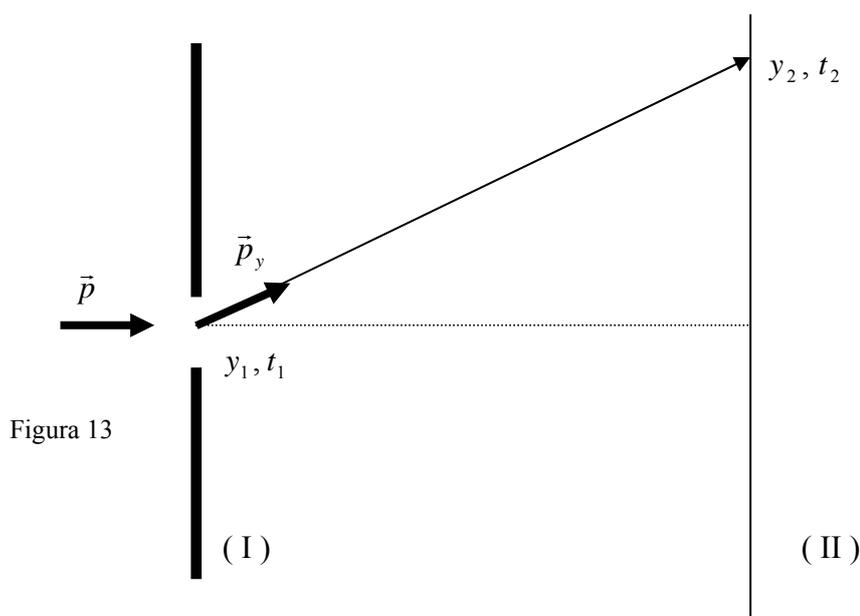
CAPÍTULO 4

CONTRADIÇÕES E PARADOXOS DAS INTERPRETAÇÕES

4.1 - RETRODIÇÃO

O termo *Retrodição* diz respeito à crença ou não em um valor bem definido, apesar de desconhecido, de um observável do objeto quântico, como posição ou momento linear, por exemplo, antes de ele ser medido.

Para iniciar esta discussão descrevemos um experimento imaginado por Ballentine (MONTENEGRO, 2000) para demonstrar a possível falha no princípio da incerteza:



Suponhamos que o objeto quântico tenha passado pela fenda (y_1) em um instante bem determinado t_1 e tenha sido detectado também num instante bem determinado t_2 em y_2 . Concordamos que tanto uma determinação quanto a outra (instantes e posições) são possíveis de serem obtidas com imprecisões mínimas.

Se aceitarmos a retrodição será possível realizarmos o seguinte cálculo:

$$p_y = m \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}.$$

Este cálculo nos dá uma determinação simultânea e exata de posição e momento linear logo após o instante t_1 o que violaria o princípio da incerteza.

A questão é que este valor só pode ser obtido depois da medição no anteparo II no instante t_2 . Ou seja: a medição do futuro determinou com exatidão as grandezas no passado. Seria válido dizermos que antes da detecção podemos inferir que o objeto quântico tinha um comportamento corpuscular o que nos permitiu inferir tudo que foi calculado acima?

Na interpretação ondulatória naturalmente que não. Como o objeto quântico se conforma a uma onda, por natureza não localizada, mesmo que no instante t_1 de sua passagem pela fenda ela se localize em um único ponto, pelo princípio de Huyghens este ponto funcionaria como uma nova fonte de mesma frequência da original a partir da qual a onda veio a espalhar-se por todo o espaço até ser detectada no instante t_2 quando ocorre o colapso da onda mas não num ponto previsível.

Pela interpretação da complementaridade, por sua visão epistemológica (positivista), não seria válida a retrodição uma vez que só o que é medido tem existência real. Não faz sentido daí inferir o passado ou a natureza do objeto quântico.

Segundo Heisenberg (*apud* CHIBENI, 2006a, p.189):

“É de caráter puramente especulativo, visto que nunca pode (em razão da alteração desconhecida do momento causada pela mensuração da posição) ser usado como condição inicial em nenhum cálculo da progressão futura do elétron, não podendo portanto ser objeto de verificação experimental. É uma questão de pura crença pessoal se ao cálculo relativo à história passada do elétron pode-se ou não atribuir realidade física”.

No entanto quando Bohr diz em sua interpretação que este fenômeno é corpuscular pois pôde determinar a trajetória do corpúsculo cai, assim, em contradição.

4.2 - O PROBLEMA DA MEDIÇÃO

Porque efetuar medidas em Mecânica Quântica constitui um problema?

Um sistema fechado é descrito por um "estado" que evolui no tempo de maneira *determinista* (de acordo com o operador de evolução que apresentaremos à frente e que equivale à equação de Schrödinger). Ao contrário do que acontece na mecânica clássica, este estado em geral fornece apenas as "probabilidades" de obtermos diferentes resultados de uma medição.

Após a medição, o sistema passa a se encontrar em um novo estado, estado este que depende do resultado obtido. Assim, pode-se dizer que no decorrer da medição o sistema evoluiu de maneira *indeterminista*. Esta transição tem sido chamada de "**colapso do pacote de onda**" ou "**redução de estado**", sendo descrita pelo postulado da projeção de VON NEUMANN⁵.

As críticas ao postulado da projeção são especialmente as seguintes (*apud* PESSOA JR., 2006b, p.179):

4.2.1 - PARADOXO DA QUANTIDADE:

Levantado em 1897 por J.J. Thompson questionando porque apenas uma parcela mínima dos átomos de um gás é ionizada por raios X já que era de se esperar que todas as

⁵ O Postulado da Projeção, enunciado por John Von Neuman em 1932, diz que se a medição de um observável \hat{A} em um sistema no estado $|\psi\rangle$ dá como resultado o valor a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada de $|\psi\rangle$ no auto-estado associado com a_n .

partículas alcançadas no instante da ionização fossem afetadas igualmente pela frente de onda?

4.2.2 - PARADOXO DA QUALIDADE:

Proposto em 1906 por W. H. Bragg perguntando por que razão, sabendo que a frente de onda de um pulso de raio X espalha sua energia por uma grande extensão, o que faz com que chegue a cada molécula do gás apenas uma pequena parcela da energia total, como é possível toda a energia do pulso ser absorvida por uma única partícula?

Talvez o experimento que manifeste estes dois paradoxos de maneira mais radical seja o da *Câmara de Wilson*.

A Câmara de Wilson, também chamada câmara de nuvens, consiste em um eficiente método de identificação de partículas subatômicas inventado por Charles Thomson Rees Wilson na Universidade de Cambridge em 1897.

Trata-se de uma câmara com interior saturado de vapor d'água. Ao se bombardear o interior da câmara com partículas provenientes de um feixe de raios X ou uma fonte de raios gama, estas ionizam o gás presente na câmara. Os íons gasosos funcionam como núcleos de condensação do vapor. Portanto ao se notar condensação, é verificada a existência das partículas.

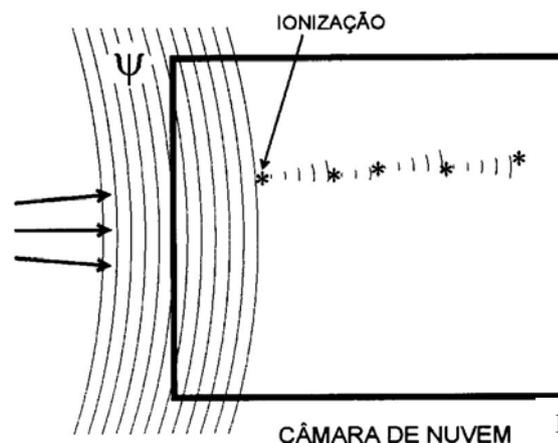


Figura 14

Veja que explicar este fenômeno pela interpretação corpuscular realista (ensemble estatístico) não é problema. O objeto quântico identificado a um ensemble de partículas identicamente preparadas leva à explicação de que uma destas partículas ionizaria o ar naqueles pontos apenas produzindo a trilha.

Também pela interpretação da Complementaridade a explicação é imediata. A trilha deixada pela ionização das partículas de ar e posterior condensação de vapor identifica um caráter de partícula para o objeto quântico.

O mesmo se aplica à interpretação dualista realista (onda piloto). A onda piloto só identifica os possíveis caminhos onde a partícula pode ser encontrada. Uma vez ionizando a partícula do gás esta posição se revelou.

O problema é mesmo da interpretação ondulatória.

Dois esquemas interpretativos forneceram a ligação entre esse aspecto corpuscular e o ato da medição. BORN interpretou a função de onda de uma radiação espalhada como sendo uma "onda de probabilidade", uma amplitude cujo quadrado fornece as probabilidades de detecção; HEISENBERG introduziu a noção de que medições de posição reduzem o pacote de onda que representa a partícula, dando conta assim das trajetórias lineares observadas em uma câmara de Wilson.

Com isto podemos dizer que a função de onda como onda de probabilidade dá com seu módulo ao quadrado as probabilidades de detecção em cada ponto do espaço por onde se espalha a onda. Uma vez acontecendo a detecção a probabilidade vai imediatamente a 100% na posição da detecção e dizemos que houve um colapso da onda e esta passa a se identificar, a partir do momento desta medição, com um pacote de onda estreito.

4.3 - O INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER

O equipamento e experimento que passamos a descrever agora foi desenvolvido simultaneamente, por volta do ano de 1892, pelo físico alemão Zehnder e seu colega austríaco Ludwig Mach.

Veja nas figuras abaixo a estrutura do IMZ (Interferômetro de Mach-Zehnder). Elas foram tiradas das diversas situações que podemos montar no interferômetro virtual desenvolvido por Ostermann e Prado (2006):

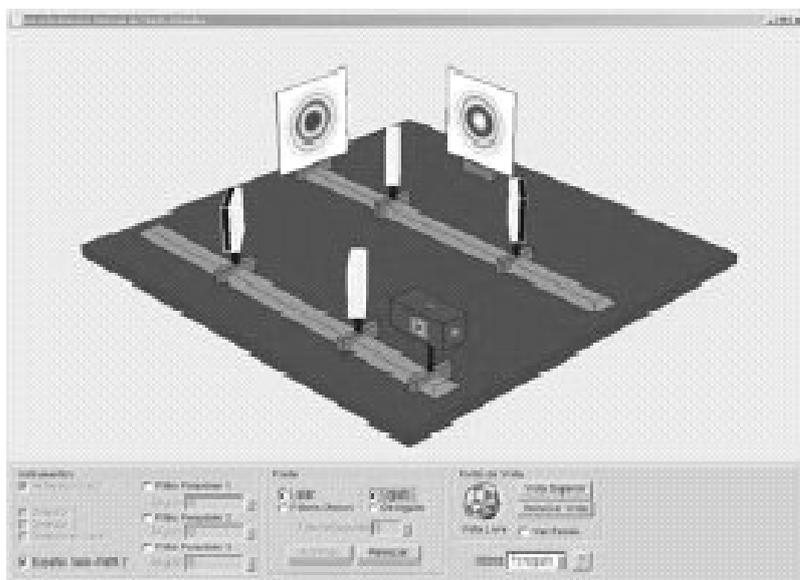
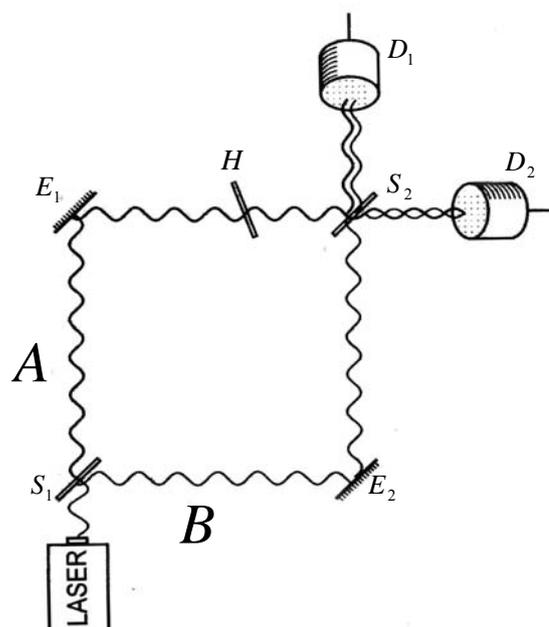


Figura 16

Figura 15



O equipamento básico é constituído de dois espelhos semi-refletores (S_1 e S_2), daqueles cuja metade da intensidade incidente vai ser transmitida e a outra metade será refletida. Com isto se a amplitude do feixe inicial oriundo da fonte laser é ψ_0 , a do feixe transmitido bem como a do refletido será $\psi_0/\sqrt{2}$, uma vez que a intensidade da onda é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude ($I \propto \psi^2$).

No regime quântico (onde é emitido um fóton de cada vez) a intensidade corresponde ao número de fótons detectados. Se numa região delimitada do espaço, o número de quanta detectados será proporcional ao quadrado da amplitude da onda associada àquela região. Se tivermos preparado apenas um fóton, a *probabilidade* de detectá-lo em uma certa região será proporcional ao quadrado da amplitude ψ da onda associada àquela região (Prob. $\propto \psi^2$). Esta é a regra proposta por Max Born, em 1926.

A composição do equipamento segue com dois espelhos de reflexão total, indicados na figura 15 por E_1 e E_2 e dois anteparos D_1 e D_2 (ou detectores D_3 e D_4). Têm-se ainda uma lâmina de vidro H a qual não utilizaremos de imediato.

Por simplicidade suponhamos que a luz ao atravessar o semi-espelho sofra, na sua parcela refratada, uma defasagem de $\lambda/4$ devido ao retardamento ocorrido na velocidade da luz ao atravessar um meio mais refringente (onde sua velocidade se torna menor).

O feixe que vai pelo caminho A é refratado em S_1 sofrendo aí uma defasagem de $\lambda/4$. Em S_2 este mesmo feixe sofrerá nova defasagem de $\lambda/4$ para chegar a D_2 totalizando uma defasagem de $\lambda/2$.

A parcela da luz que caminhou por B refletiu em S_1 , outra vez em E_2 e em S_2 sofre nova reflexão para chegar a D_2 . Vimos que por este caminho nenhuma defasagem foi acrescentada ao movimento da onda. Com isto o raio que veio por A e o que veio por B

apresentam, de um para o outro, uma diferença de fases de $\lambda / 2$ obtendo uma interferência destrutiva. Em D_1 a onda que veio por B chega também defasada de $\lambda / 4$ pois ao passar por D_2 sofre refração. Com isto as ondas provenientes dos dois caminhos chegam em D_1 em concordância de fase produzindo interferência construtiva.

Note que na figura 16, como o estudo que aqui realizamos só levou em conta uma dimensão, exatamente aquela que irá passar pelo centro do anteparo, isto fica evidente pois o centro do anteparo 1 ficou escuro (onde a luz incidiu, como no negativo de um filme fotográfico) e em 2 ficou claro (não houve incidência de luz).

Tomemos agora a figura 17 onde em relação à montagem anterior retiramos o semi-espelho S_2 . Então o raio que vai pelo caminho A sofrerá reflexão em E_1 e chegará no anteparo D_2 . Veja que pela ausência do semi-espelho S_2 não teremos mistura dos feixes provenientes dos dois caminhos. Com isto o raio vindo de A só pode chegar a D_2 e o proveniente de B só pode ter destino final no anteparo D_1 devido ao princípio da independência de propagação (lembre-se que ainda estamos lidando com o regime clássico).

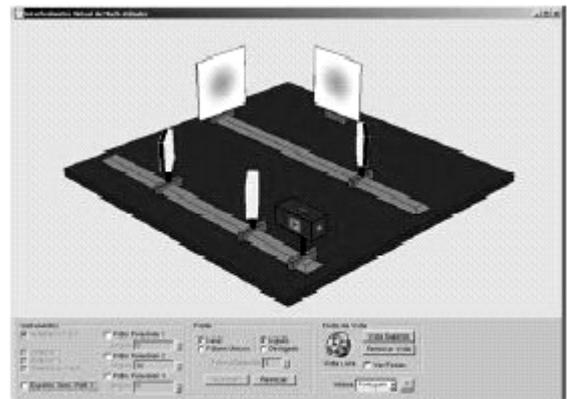


Figura 17

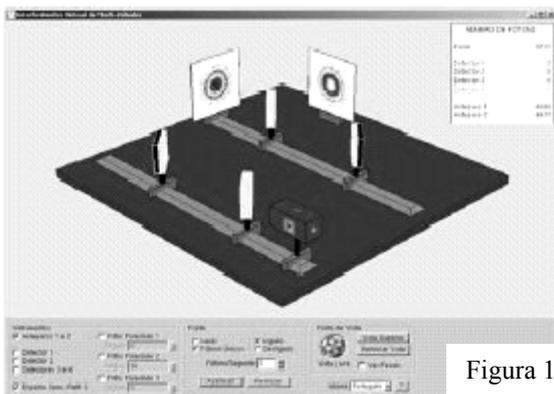


Figura 18

Vamos agora realizar os experimentos no regime quântico (monofotônico). A obtenção de um único fóton, tornada viável a partir de 1985, pode ser vista com detalhes no livro de Pessoa Jr. (2003).

Na figura 4 percebemos que mesmo no regime monofotônico, após várias e várias detecções, vamos obter a mesma figura de interferência obtida no regime clássico. Então nenhuma detecção de fótons é constatada em D₂ (centro claro). Mas como a propagação é feita um a um fóton será que podemos dizer que cada fóton interfere consigo mesmo?

Na figura 19 isto fica evidenciado fóton a fóton. D₃, que substitui o anteparo D₁, recebe a incidência de todos os fótons enquanto D₄, nenhuma.

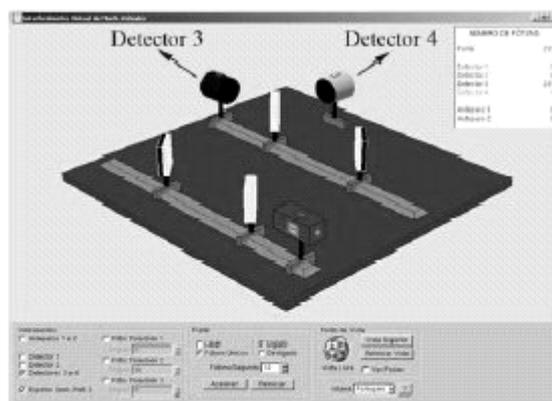


Figura 19

No entanto se retirarmos o semi-espelho S₂ e o fóton vindo da fonte laser terá 50% de chance de refletir para D₃ e 50% de refratar até D₄ (figura 20).

Estes fenômenos, assim descritos pela interpretação da complementaridade, dariam, no caso do surgimento da figura de interferência (figura 18), a evidência necessária para que o comportamento manifesto fosse considerado

ondulatório. No entanto quando não se identifica figura de interferência no regime quântico (figura 20) e podemos determinar a trajetória do fóton (por A até D₄ ou por B até D₃) temos o comportamento de partícula, nada podendo dizer sobre este fóton até que ele tenha sido detectado.

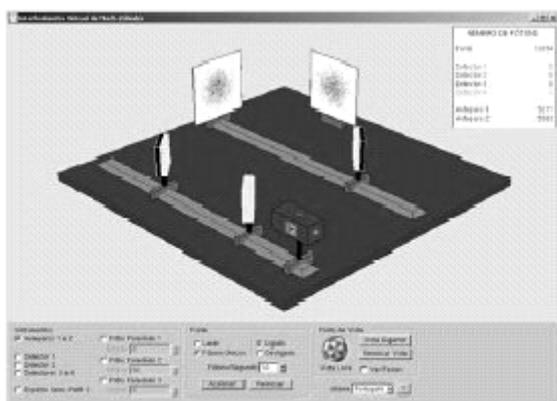


Figura 20

Pela interpretação ondulatória teríamos um pacote de ondas que ao chegar em S₁ se dividiria em dois cada um com metade da energia total e conforme ocorresse a detecção em D₃ ou D₄ nesta detecção ocorreria o colapso da onda e toda probabilidade se concentraria apenas naquela posição (figura 20). Para a

interferência descrita na figura 18 a interpretação ondulatória se dá muitíssimo bem pois é assim, como onda, que ela descreve o objeto quântico.

A interpretação corpuscular fica aqui numa grande “sinuca de bico”. O efeito de interferência para o ensemble estatístico é facilmente explicável no experimento de dupla fenda. Mas quando pensamos fóton a fóton vamos nos deparar com um paradoxo. Quando na figura 18 o fóton nunca é detectado pelo detector D_4 o que justifica, numa lógica com a qual estamos habituados, isto? Porque depois, na figura 20, este comportamento torna-se o esperado para uma partícula, ou seja, metade reflete e metade refrata? Os defensores desta interpretação defendem-se que aí entraria uma lógica do tipo “não-clássica” não muito clara, ainda.

Falta ainda a interpretação da onda piloto. A onda piloto se dividiria em duas quando ocorrendo as semi-reflexões e refrações e a partícula “surfaria” por uma delas. Na situação da figura 18 as ondas piloto produziriam interferência destrutiva na direção que vai a D_4 e construtiva na que vai a D_3 . A partícula só poderia rumar, portanto, para o detector D_3 . Continua aqui a grande contradição de ter-se uma onda vazia (desprovida de energia uma vez que toda a energia estará com a partícula, e, portanto, com a parte da onda por onde ela seguiu).

CAPÍTULO 5

PESQUISANDO AS INTERPRETAÇÕES

Este trabalho de pesquisa reproduziu, com um universo de 15 alunos graduandos e pós-graduandos do Departamento de Física da UFJF, o trabalho realizado por Roberto Luiz Montenegro (2000) com 80 alunos também graduandos e pós-graduandos da USP e UFPR entre 1995 e 1998.

Os questionários I e III, que são de questões abertas (discursivas), não trazem qualquer problema quanto à comparação de espaços amostrais uma vez que nós, assim como Montenegro, só utilizamos suas respostas para corroborar as conclusões das questões de múltipla escolha dirigida do questionário II.

Pela diversidade de turmas, períodos e instituições (MONTENEGRO, 2000, p.81) com que trabalharam, a pesquisa original conseguiu retratar uma condição média dos alunos de física quanto às interpretações oficiais da MQ. No nosso caso o que conseguimos foi uma fotografia que açambarca alunos que diferem entre si cerca de apenas três períodos letivos quando todos cursaram a mesma disciplina, talvez até com o mesmo professor. O interessante disto é vermos qual tem sido a interpretação preponderante em nosso departamento uma vez que é esperado que os alunos sigam a visão de seus professores.

Os questionários, cuja reprodução se encontra no apêndice deste trabalho, versam sobre os seguintes temas que têm a intenção de revelar a interpretação intuitiva de cada pesquisado:

QUESTIONÁRIO I	QUESTIONÁRIO II	QUESTIONÁRIO III
I.1 – Experimento da Dupla Fenda	II.1 – Experimento da Dupla Fenda	III.1 – Retrodição
I.2 – Princípio de Incerteza	II.2 - Princípio de Incerteza	III.2 – Princípio de Incerteza
I.3 – Retrodição	II.3 – Superposição/Retrod.	III.3 – Postulado da Projeção

Então, conforme dissemos acima ser a nossa intenção na abordagem dos resultados das pesquisas, vejamos um fluxograma comparativo entre os resultados da pesquisa de Montenegro (aos quais chamaremos MONT) e os do nosso departamento (aos quais chamaremos UFJF) nas três questões do questionário II que se encontram, para facilitar a consulta, nas próximas três páginas desta dissertação.

O primeiro dado comparativo que chama a atenção é o percentual dos pesquisados UFJF que seguiu um modelo corpuscular, provavelmente do ensemble, nas três questões:

- 34% na questão 1 (caixa 12) enquanto apenas 6% na pesquisa de Montenegro.
- 33% na questão 2 (caixa 2) enquanto apenas 7% em MONT.
- 27% na questão 3 (caixa 5) enquanto apenas 9% em MONT.

Tentando confirmar esta linha de raciocínio construiremos uma tabela abaixo mostrando as respostas dos nossos quinze pesquisados. Esperamos, além de confirmar nossas impressões acima, que mostrem coerência ou não com uma das interpretações nas diversas respostas.⁶

Usaremos as seguintes abreviações:

- Inconc: inconclusivo
- Comut: explicou baseado nos comutadores
- Ond Cl: interpretação ondulatória clássica
- On Pilo: onda piloto

- Ond: interpretação ondulatória
- Corp: interpretação corpuscular
- Ensemb: Interpretação do ensemble estatístico

Aluno	Questionário I			Questionário II			Questionár. III		Conclusões
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	
	DUPLA	INCERT	STERN	DUPLA	INCERT	STERN	RETRO	INCERT	
A	Inconc	Comut	Não	1bdfi	2bd	3bc	Não	c	<i>Compl+Ond</i>
B	Corp	Inconc	Não	1bdeh	2ade	3bc	Não	a, d	<i>Ense+Ond+Com</i>
C	Inconc	Comut	Não	1bdfh	2bd	3ad	Não	c	<i>Ense+Ond</i>
D	Ensemb	Comut	-	1bdeh	2bd	3bc	Não	c	<i>Ense+Ond</i>
E	Ond Cl	Inconc	Não	1adg	2bd	3ad	Não	c	<i>Ond+Ense</i>
F	On Pilo	-	Sim	1bdfi	2bc	3bc	Não	b	<i>Compl+Ond</i>
G	On Pilo	Inconc	-	1bcei	2bd	3bc	Não	e	<i>Compl+Ond+En</i>
H	Ond	Inconc	Não	1adg	2bd	3bd	Não	c	<i>Ond+Compl</i>
I	Ond Cl	Inconc	Não	1aci	2adf	3ac	Não	b, e	<i>Ense+Ond</i>
J	Corp	Inconc	Não	1bdeh	2acg	3bc	Não	b, e	<i>Ense+Ond</i>
K	Ensemb	Inconc	Não	1bdei	2bd	3bd	Não	e	<i>Compl+Ense</i>
L	Ond	Comut	Não	1adg	2adf	3bd	Não	a, d, e	<i>Ond+Ense+Com</i>
M	Ensemb	Inconc	Não	1bcfh	2ade	3bd	Depen	a, e	<i>Ense+Compl</i>
N	Ond Cl	Comut	Não	1adg	2bc	3ad	Inconc	b	<i>Ond+Corp</i>
O	Corp	Comut	Não	1bdfh	2bd	3ad	Não	c, d	<i>Ense+Ond</i>

Utilizamos os seguintes critérios para chegar às conclusões da última coluna:

- A partir da questão 1 do questionário II colocamos aquela que nos pareceu ser a interpretação escolhida pelo pesquisado.
- Se ao responder às outras questões, outras interpretações foram sendo usadas, fomos lançando na ordem em que apareceram.
- A primeira coluna confirma, ou não, a última por tratar-se de questão discursiva onde o aluno posicionou-se sobre o experimento de dupla fenda.
- A penúltima coluna também serve para confirmar as escolhas de interpretações nas outras questões pois o aluno, numa escolha múltipla, identificou para nós quais as frases que para ele seriam verdadeiras.

⁶ Não incluímos, a propósito, os resultados do questionário III, questão 3 por todos terem respondido de maneira correta mas

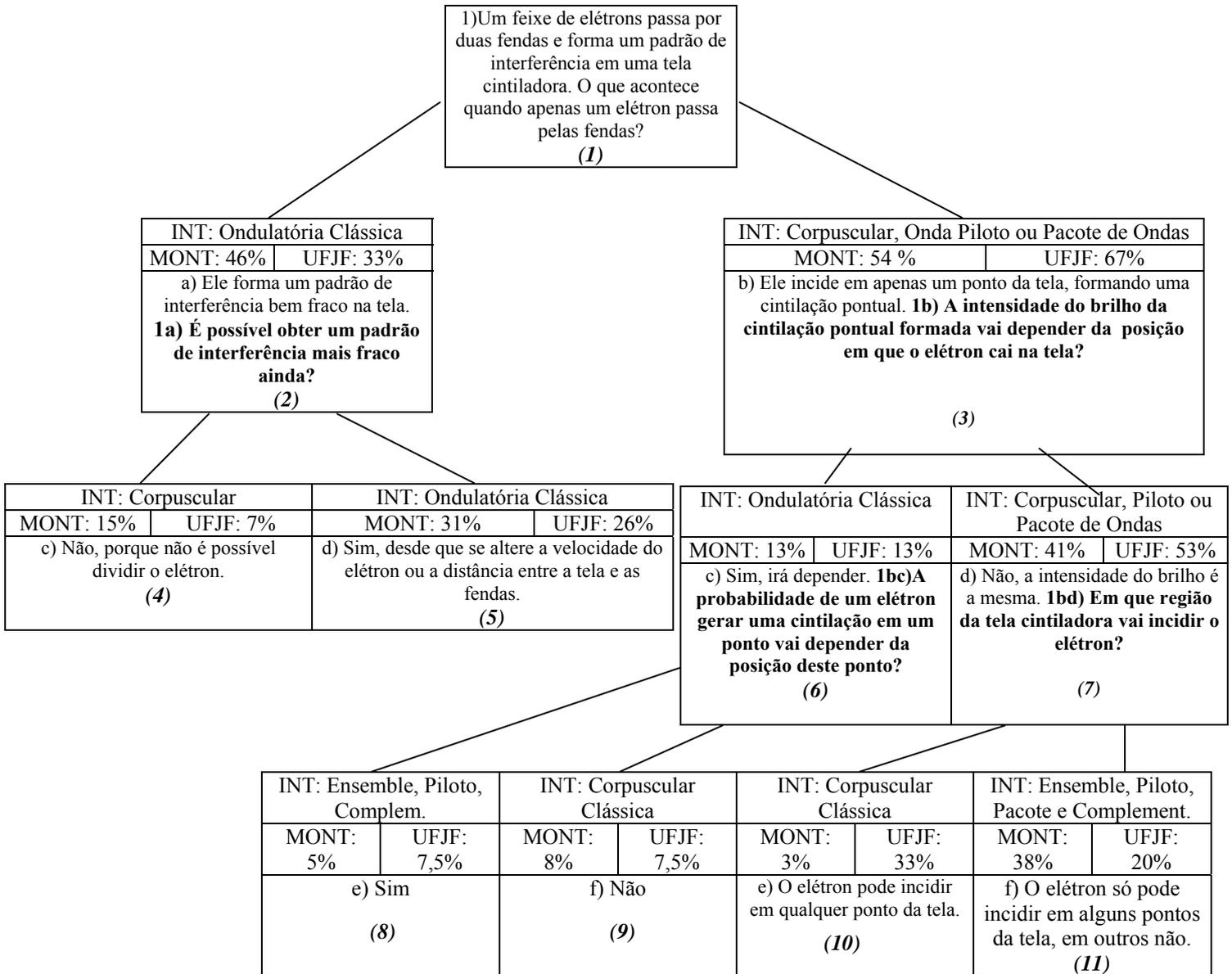
Podemos concluir que os pesquisados não tem qualquer preocupação em manter uma coerência com uma das interpretações talvez até porque não identifiquem importância nisto.

Ainda assim a unanimidade nas respostas da questão 3 do questionário I e da questão 1 do questionário III mostram que o discurso da interpretação da complementaridade, que é sem dúvida a mais famosa, tem grande força em alguns fenômenos, mesmo que errando, como foi o caso na questão da retrodição. As respostas, quase todas, se basearam na visão positivista deste modelo para negarem a retrodição. No entanto o próprio Niels Bohr lança mão deste fenômeno para identificar o caráter corpuscular do objeto quântico quando este não forma padrão de interferência.

Vemos ainda que, confirmando o que já podíamos supor da análise dos fluxogramas, a interpretação do ensemble é muito presente em nosso departamento. Mesmo que não assumindo esta interpretação exclusivamente ela aparece nas respostas de praticamente todos os entrevistados.

FLUXOGRAMA

QUESTIONÁRIO II – Questão 1



Este experimento em particular (com um elétron) é um exemplo de: (12)			
<input type="checkbox"/> g) Fenômeno ondulatório. [FIM]	MONT: 19%	UFJF: 26%	
<input type="checkbox"/> h) Fenômeno corpuscular. [FIM]	MONT: 6%	UFJF: 34%	
<input type="checkbox"/> i) Fenômeno dual onda e partícula. [FIM]	MONT: 75%	UFJF: 40%	

FLUXOGRAMA

QUESTIONÁRIO II – Questão 2

A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?
(1)

INT: Ensemble Estatístico	
MONT: 7%	UFJF: 33%
<p>a) Apenas estatística. É possível medir x e p_x, de um único sistema com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) é que os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza. 2a) Na prática, é possível montar um experimento que meça simultaneamente x e p_x com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza?</p> <p style="text-align: center;">(2)</p>	

INT: Ondulatória e Corpuscular	
MONT: 93%	UFJF: 66%
<p>b) A relação vale também no caso individual. Ela impõe um limite na resolução de δx e δp_x. 2b) Podemos dizer que o sistema tem sempre valores simultaneamente bem definidos para x e p_x, mas que nós não temos acesso a esses valores através de experimentos?</p> <p style="text-align: center;">(3)</p>	

INT: Corpuscular		INT: Ondulatória	
MONT: 31%	UFJF: 13%	MONT: 62%	UFJF: 53%
<p>c) Sim. Se meço x, passo a ignorar qual é o valor possuído por p_x.</p> <p style="text-align: center;">(6)</p>		<p>d) Não. Se x for bem definido, p_x não terá valor bem definido.</p> <p style="text-align: center;">(7)</p>	

INT: Ensemble		INT: Ensemble	
MONT: 0	UFJF: 6%	MONT: 7%	UFJF: 27%
<p>c) Sim. 2ac) Podemos dizer que esses valores medidos eram simultaneamente possuídos pelo sistema antes da medição?</p> <p style="text-align: center;">(4)</p>		<p>d) Não. Na prática não. 2ad) Podemos dizer que o elétron possui simultaneamente valores de x e p_x bem definidos (com boa resolução) antes da medição?</p> <p style="text-align: center;">(5)</p>	

INT: Corpuscular Clás.		INT: Corpuscular Quânt.		INT: Ondulatória/Positiv.		INT: Variáveis Ocultas		INT: Ondulatória/Positiv.	
MONT: 0	UFJF: 0	MONT: 0	UFJF: 0	MONT: 0	UFJF: 6%	MONT: 0	UFJF: 6%	MONT: 7%	UFJF: 21%
<p>e) Sim. Uma boa medição <i>revela</i> os valores pré-existentes.</p> <p style="text-align: center;">(8)</p>		<p>f) Não. A medição altera os valores (que antes já eram bem definidos, mas desconhecidos) de maneira imprevisível.</p> <p style="text-align: center;">(9)</p>		<p>g) Não. Não podemos dizer que o sistema possuía simultaneamente valores bem definidos para x e p_x antes da medição.</p> <p style="text-align: center;">(10)</p>		<p>e) Sim. Porém, não podemos revelar estes valores através de uma medição.</p> <p style="text-align: center;">(11)</p>		<p>f) Não. Não podemos dizer que possuía simultaneamente valores bem definidos para x e p_x antes da medição.</p> <p style="text-align: center;">(12)</p>	

FLUXOGRAMA
QUESTIONÁRIO II – Questão 3

Considere o experimento de Stern-Gerlach para um único átomo de prata, inicialmente no estado $|+x\rangle$. Após passar pelo imã, podemos representar seu estado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle.$$

Antes de medir a posição do átomo, podemos dizer que ele está *ou* com o componente de spin $+z$ na posição A, ou com componente $-z$ na posição B?

(1)

INT: Realista	
MONT: 40%	UFJF: 33%
a) Sim. Após passar pelo imã, o átomo está em A (e não tem nada em B), ou está em B (e não tem nada em A). Só que ainda ignoramos onde ele está. 3a) Devemos dizer que o átomo está em A ou em B, e que há uma onda associada distribuída entre A e B?	
(2)	

INT: Complementaridade/Ondulatória	
MONT: 60%	UFJF: 67%
b) Não. Não podemos dizer que o átomo está em A (e não em nada em B), ou está em B (e não tem nada em A). 3b) Podemos dizer que há uma onda (ou uma amplitude de probabilidade) simetricamente distribuída entre A e B, e que o átomo não está nem em A, nem em B?	
(3)	

INT: Onda Piloto		INT: Corpuscular	
MONT: 31%	UFJF: 6%	MONT: 9%	UFJF: 27%
c) Sim. (4)		d) Não (5)	

INT: Ondulatória		INT: Complementaridade	
MONT: 41%	UFJF: 33%	MONT: 19%	UFJF: 27%
c) Sim. (6)		d) Não. Só podemos falar alguma coisa depois que o experimento estiver completado. (7)	

CAPÍTULO 6

AMPLITUDES DE PROBABILIDADE

Neste capítulo, capítulo 7 e Apêndices 1 e 2 procurei apresentar alguns conceitos da MQ, os quais foram utilizados nesta dissertação, de maneira bem didática, objetivando ajudar à compreensão dos alunos iniciantes.

6.1 – CALCULANDO A DUPLA FENDA

Schrödinger escreveu sua equação que descreve a amplitude de probabilidade de encontrar uma partícula em vários lugares. Esta equação é muito similar às equações que já são conhecidas de fenômenos clássicos. Equações que eram usadas para descrever o movimento do som no ar, a transmissão da luz, etc.

Grande parte do esforço do início da MQ foi gasto em resolver estas equações. Mas, ao mesmo tempo, um entendimento era desenvolvido, particularmente por Born e Dirac, das novas idéias básicas a respeito da MQ. À medida que a MQ desenvolveu-se mais, viu-se que havia um grande número de coisas que não eram diretamente descritas na equação de Schrödinger, tais como o spin do elétron, e vários fenômenos relativísticos.

Começaremos discutindo a superposição da amplitude de probabilidades. Como um exemplo vamos nos referir ao experimento da dupla fenda (fig. 21). Há uma fonte S de partículas, digamos elétrons. Temos, então, uma parede com duas fendas. Para além da parede, há um anteparo com um detector.

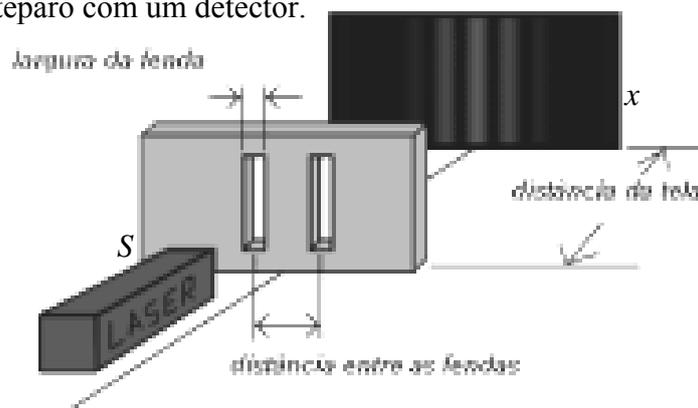


Figura 21

Perguntamos pela probabilidade da partícula ser encontrada em x . Teremos então o nosso:

6.2 - 1º PRINCÍPIO GERAL DA MECÂNICA QUÂNTICA:

A probabilidade de a partícula chegar em x , quando sai da fonte S , pode ser representada quantitativamente pela norma ao quadrado de um número complexo chamado AMPLITUDE DE PROBABILIDADE.

Neste caso, costuma-se dizer, a “*amplitude com que uma partícula vinda de S chegue em x* ”. Usaremos tão freqüentemente isto que lançaremos mão de uma notação simplificada, inventada por Dirac e geralmente usada em MQ, para representar esta idéia.

Escreveremos a amplitude de probabilidade da seguinte maneira:

$$\left\langle \begin{array}{l} \textit{Partícula} \\ \textit{chega} \\ a \\ x \end{array} \middle| \begin{array}{l} \textit{Partícula} \\ \textit{deixa} \\ S \end{array} \right\rangle \quad (6.1)$$

Pela ordem, os dois colchetes $\langle \rangle$ são um sinal equivalente a “*a amplitude com que*”. A expressão à direita da linha vertical dá a condição inicial e a da esquerda, a condição final. Algumas vezes será conveniente descrever as condições inicial e final por letras sozinhas. Por exemplo, podemos escrever a amplitude (6.1) como:

$$\langle x|S \rangle . \quad (6.2)$$

Queremos enfatizar que uma amplitude é apenas um número complexo, ou seja, ela não tem significado físico real.

Quando temos dois caminhos para uma partícula achar o detector, a probabilidade resultante não é a soma das duas probabilidades, mas precisa ser escrito como o módulo do quadrado da soma das duas amplitudes. Temos que a probabilidade de um elétron chegar no detector quando ambos os caminhos estão abertos:

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2. \quad (6.3)$$

Queremos agora colocar este resultado nos termos da nova notação. Primeiro vamos estabelecer o:

6.3 - 2º PRINCÍPIO GERAL DA MECÂNICA QUÂNTICA:

Quando uma partícula pode chegar a um dado estado por duas possíveis passagens, a amplitude total para o processo é a soma das amplitudes para as duas rotas consideradas separadamente.

Na nossa notação escrevemos que:

$$\langle x | S \rangle_{\text{ambas as fendas abertas}} = \langle x | S \rangle_{\text{através de 1}} + \langle x | S \rangle_{\text{através de 2}}. \quad (6.4)$$

Eventualmente, vamos supor que os orifícios 1 e 2 são pequenos o suficiente para que quando dissermos que um elétron passou pelo orifício, não precisemos discorrer por qual parte do orifício. Num caso de precisarmos, podemos, é claro, dividir cada fenda em pedaços

com uma certa largura tal que o elétron vá ou ao topo do buraco, ou à base do mesmo e assim por diante. Suponhamos que o buraco é suficientemente pequeno de forma que não precisemos nos preocupar com estes pormenores.

Agora queremos escrever em mais detalhes o que podemos falar sobre a amplitude para o processo em que cada elétron encontra x pelo orifício 1. Podemos fazer isto usando o:

6.4 - 3º PRINCÍPIO GERAL DA MECÂNICA QUÂNTICA:

Quando uma partícula vai por alguma rota, a amplitude de probabilidade (a qual chamaremos, daqui em diante, apenas de amplitude) para cada rota pode ser escrita como o produto da amplitude de ir parte do caminho com a amplitude de ir pelo resto do caminho.

Para a configuração da figura 21 a amplitude para ir de S para x pelo buraco 1 é calculada como a amplitude de ir de S a 1, multiplicado pela amplitude de ir de 1 a x .

$$\langle x|S \rangle_{\text{via 1}} = \langle x|1 \rangle \langle 1|S \rangle. \quad (6.5)$$

Você poderá notar que a equação (6.5) parece estar escrita na ordem inversa. Isto porque ela deve ser lida da direita para a esquerda: o elétron vai de S para 1 e então de 1 para x . Em resumo: se eventos ocorrem em sucessão, ou seja, se você pode analisar uma das rotas da partícula dizendo que primeiro ela fez isto, depois fez aquilo, a amplitude resultante para aquela rota é calculada multiplicando-se, em sucessão, as amplitudes de cada evento sucessivo. Usando o 3º princípio podemos reescrever (6.4) como:

$$\langle x|S \rangle_{\text{via ambos}} = \langle x|1 \rangle \langle 1|S \rangle + \langle x|2 \rangle \langle 2|S \rangle. \quad (6.6)$$

Vemos que a barra (|) entre $\langle x|$ e $|S\rangle$ foi substituída por $\sum_{i=1}^2 |i\rangle\langle i|$ a qual chamaremos *relação de completudeza* pois projetou o estado S antes de ir até x no subespaço $\{|i\rangle\}$ que por ser *completo* (é subespaço de Hilbert) dá este nome à relação. Mais tarde, quando definirmos operadores, ela passará a se chamar *projetor num subespaço*. (COHEN, 1977, p. 116).

Agora desejamos mostrar que apenas usando estes princípios podemos calcular algo mais complicado como na figura 22

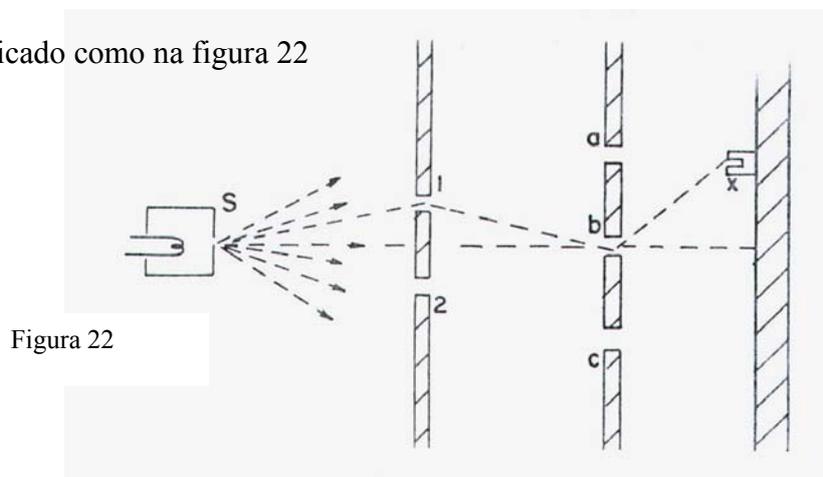


Figura 22

Aqui temos duas paredes: uma com dois orifícios (1 e 2) e outra com três (a, b e c). Ao lado da 2ª parede há um detector em x, e queremos saber a amplitude para uma partícula chegar lá. Bem, uma maneira pode ser encontrada se calcularmos a superposição ou interferências das ondas que passam através das paredes. Podemos fazer isto dizendo que há seis possibilidades de rotas e superpondo uma amplitude para cada. O elétron pode ir através de 1, então por a, então chega a x; ou pode ir por 1, então por b e então x; e assim por diante. De acordo com o 2º PRINCÍPIO, as amplitudes por rota alternativa somam-se, então podemos escrever a amplitude de chegar de S a x como a soma de seis alternativas separadas. Por outro lado, usando o 3º PRINCÍPIO, cada uma destas amplitudes separadas pode ser escrita como um produto de três amplitudes. Por exemplo, uma delas é a amplitude de S a 1. Tomamos a amplitude de 1 a a e de a a x. Usando a notação de Dirac:

$$\langle x|S \rangle = \langle x|a \rangle \langle a|1 \rangle \langle 1|S \rangle + \langle x|b \rangle \langle b|1 \rangle \langle 1|S \rangle + \dots + \langle x|c \rangle \langle c|2 \rangle \langle 2|S \rangle.$$

Podemos reescrever usando somatórios:

$$\langle x|S \rangle = \sum_{\substack{i=1,2 \\ \alpha=a,b,c}} \langle x|\alpha \rangle \langle \alpha|i \rangle \langle i|S \rangle. \quad (6.7)$$

Para efetuar qualquer cálculo usando estes métodos é necessário saber a amplitude de ir de um lugar a outro.

A título de exemplo, tencionando facilitar a compreensão dos princípios 2º e 3º, tratemos de um problema clássico no ensino de probabilidades do nível médio (DANTE, 2000).

Tomemos duas moedas que serão lançadas sucessivamente. Se representarmos o evento “CARA” por K e o evento “COROA” por Q, teremos: (usaremos o símbolo \wp para identificar: a probabilidade com que aparece...)

$$\left. \begin{array}{l} - \wp(K) = p = 1/2 \\ - \wp(Q) = q = 1/2 \end{array} \right\} p + q = 1$$

O espaço amostral, ou seja, o conjunto de possibilidades de resultados é:

$$\Omega = \{KK, KQ, QK, QQ\}$$

Sabemos que cada lançamento é independente do outro. Então:

- $\wp(KK) = \wp(K) \cdot \wp(K) = p \cdot p = p^2 = 1/4$ (aplicação do 3º princípio).

- $\wp(KQ) = \wp(K) \cdot \wp(Q) = p \cdot q = 1/4$ (idem)

- $\wp(QK) = \wp(Q) \cdot \wp(K) = q \cdot p = 1/4$ (idem)

- $\wp(QQ) = \wp(Q) \cdot \wp(Q) = q \cdot q = 1/4$ (idem).

A probabilidade total, ou seja, a soma das probabilidades pelos diversos caminhos possíveis (aplicação do 2º Princípio) será:

$$\wp_{\text{TOTAL}} = \wp(KK) + \wp(KQ) + \wp(QK) + \wp(QQ)$$

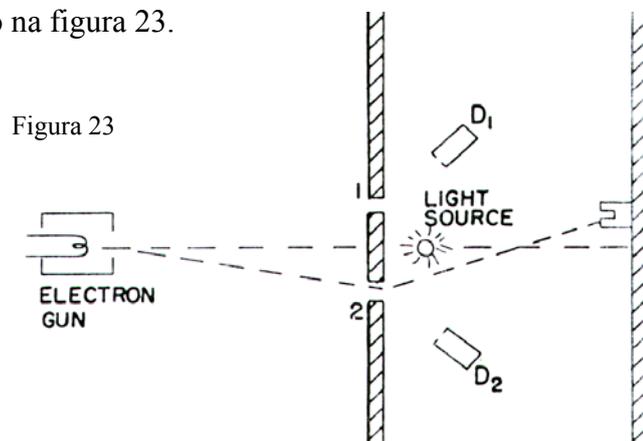
$$\wp_{\text{TOTAL}} = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$$

$$\wp_{\text{TOTAL}} = 1.$$

Apliquemos estas idéias ao estudo do:

6.5 - PADRÃO DE INTERFERÊNCIA DA DUPLA FENDA

Agora consideremos um assunto que foi discutido no capítulo do experimento de dupla fenda. Façamos, agora, com a idéia da amplitude para mostrar como funciona. Tomamos o mesmo experimento da fig. 21, mas agora com a adição de uma fonte de luz entre os dois orifícios, como na figura 23.



No capítulo do experimento de dupla fenda, descobrimos o seguinte resultado: se olharmos entre a fenda 1 e virmos um fóton dispersado por ela, então a distribuição obtida para os elétrons em x em coincidência com estes fótons, é o mesmo que pensar que o orifício 2 estava fechado. A distribuição total dos elétrons que foram detectados ou por 1 ou 2 era a soma das distribuições separadas e era completamente diferente da distribuição com a luz desligada. Isto era verdade mesmo se usássemos luz de comprimento de onda suficientemente pequeno. Se o comprimento de onda fosse maior, não teríamos certeza por qual orifício o espalhamento ocorreu. A distribuição ficaria mais parecida com aquela que se tem com a luz desligada.

Vamos examinar o que está acontecendo usando nossa nova notação e os princípios de combinar amplitudes. Para simplificar a escrita, podemos de novo tomar ϕ_1 para a amplitude com que um elétron vai chegar em x pelo buraco 1,

$$\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle,$$

ϕ_2 é o mesmo para o elétron chegar ao detector vindo de 2:

$$\phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle.$$

Estas são as amplitudes de passar pelas duas fendas e chegar em x se não temos nenhuma fonte de luz. Agora, se houver luz, perguntamos:

Qual é amplitude para o processo no qual os elétrons iniciem em S e um fóton é liberado pela fonte de luz L , com o elétron chegando em x e um fóton aparecendo acima de 1?

Suponha que observamos o fóton acima de 1 pelo detector D_1 (fig 23) e D_2 para o espalhamento em 2. Haverá uma amplitude para um fóton chegar em D_1 e um elétron em x , e também uma amplitude para um fóton chegar em D_2 e um elétron em x . Vamos calcular isto.

Primeiro há a amplitude $\langle 1|S \rangle$ de um elétron ir de S para 1. Então suponhamos que há uma certa amplitude de que enquanto o elétron está em 1 ele espalha um fóton para o detector D_1 . Vamos representar esta amplitude por a . Então há uma amplitude $\langle x|1 \rangle$ do elétron ir de 1 para x . A amplitude do elétron ir de S para x via fenda 1 e espalhar um fóton para D_1 é então:

$$\langle x|1 \rangle a \langle 1|S \rangle = a \langle x|1 \rangle \langle 1|S \rangle = a \cdot \phi_1$$

Há também uma amplitude de um elétron ir por 2 e espalhar um fóton para o detector D_1 . Você vai dizer:

“Isto é impossível! Como pode espalhar-se por D_1 se ela está olhando apenas para o orifício 2?”.

Se o comprimento de onda é longo o suficiente, há efeitos de difração e isto será certamente possível. Se o aparato é bem construído e se usarmos fótons de comprimento de onda pequeno, então a amplitude com que um fóton será espalhado para D_1 vindo de 2 será muito pequena. Mas para fazer a discussão geral queremos levar em conta que sempre haverá alguma amplitude, a qual chamaremos b . Então a amplitude de um elétron vindo por 2 e espalhar um fóton para D_1 é:

$$\langle x|2 \rangle b \langle 2|S \rangle = b \cdot \phi_2$$

A amplitude para achar o elétron em x e o fóton em D_1 é a soma de dois termos, um para cada possível trajeto do elétron. Cada termo é feito de dois fatores:

1º - o elétron vindo através de um orifício

2º - o fóton é espalhado por cada elétron para o detector D_1

$$\begin{array}{c}
 \text{Elétron} \\
 \text{em} \\
 x \\
 \text{Fóton} \\
 \text{em} \\
 D_1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \text{Elétron} \\
 \text{de} \\
 S \\
 \text{Fóton} \\
 \text{de} \\
 L
 \end{array}
 \right.
 = a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2 \quad (6.8)$$

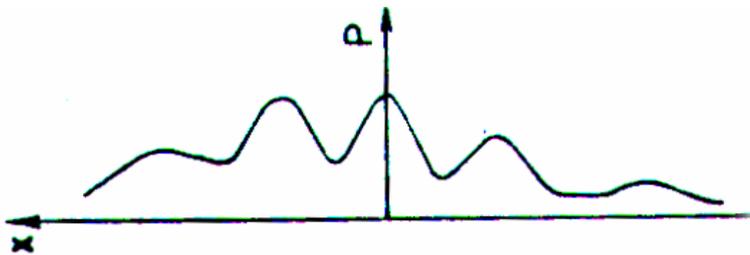
Para o fóton encontrado em D_2 . Assumindo, por simplicidade, o sistema simétrico, então a é também a amplitude para um fóton em D_2 quando um elétron passa através de 1:

$$\begin{array}{c}
 \text{Elétron} \\
 \text{em} \\
 x \\
 \text{Fóton} \\
 \text{em} \\
 D_2
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \text{Elétron} \\
 \text{de} \\
 S \\
 \text{Fóton} \\
 \text{de} \\
 L
 \end{array}
 \right.
 = a \cdot \phi_2 + b \cdot \phi_1 \quad (6.9)$$

Podemos facilmente calcular a probabilidade para várias situações. Suponha que queiramos saber com qual probabilidade temos uma detecção em D_1 e um elétron em x . Isto será o módulo ao quadrado da amplitude dada em (6.8) :

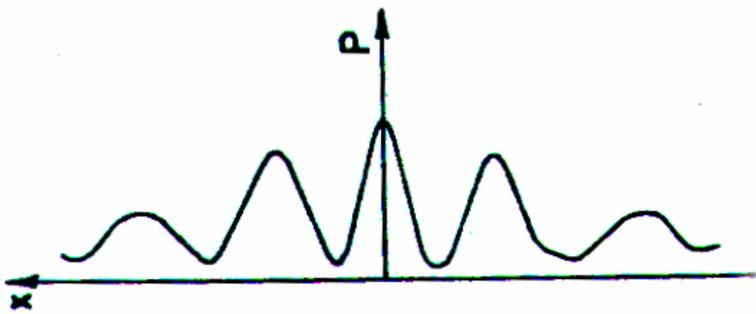
$$| a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2 |^2$$

Olhemos com cuidado. Primeiramente se b é zero, então a resposta é simplesmente $|\phi_1|^2$ subtraído da amplitude total pelo fator $|a|^2$. Esta é a distribuição de probabilidade que acharemos se houver apenas um orifício, como no gráfico da figura 24.c.

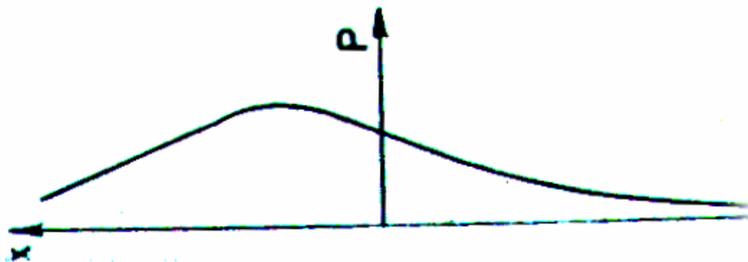


A probabilidade de encontrar um elétron em x em coincidência com um fóton em D:

(a): para $0 < b < a$.



(b): para $b = a$.



(c): para $b = 0$

Figura 24

Por outro lado, se λ é muito longo o espalhamento próximo a 2 em D_1 pode ser igual ao que foi para 1. De toda forma haverá alguma fase envolvendo a e b , então a probabilidade total fica $|\phi_1 + \phi_2|^2$ multiplicada por $|a|^2$, enquanto o fator comum a pode ser tirado fora. Isto, de toda forma, dá apenas a distribuição de probabilidade que tivemos sem os fótons. Portanto, neste caso onde λ é muito longo e a detecção de fótons ineficaz, retornamos à curva de distribuição original como na figura 24 (b). No caso em que a detecção é parcialmente

efetiva, há uma interferência entre muito de ϕ_1 e pouco de ϕ_2 , e podemos obter uma distribuição intermediária como em figura 24 (a). Se olharmos a coincidência entre a contagem de fótons em D_2 e elétrons em x , teremos os mesmos resultados.

Queremos agora enfatizar um ponto importante para evitar um erro comum. Suponha que você quer apenas a amplitude dos elétrons chegarem em x , sem se importar se o fóton foi contado em D_1 ou D_2 . Precisamos somar as amplitudes dadas em (6.8) e (6.9)? Não, pois:

Não podemos jamais somar amplitudes para diferentes e distintos estados finais.

Cada alternativa tem uma probabilidade completamente independente da outra. Podemos adicionar apenas alternativas indistinguíveis dentro do experimento antes do processo completo ser finalizado. No final do processo podemos dizer que “não queremos olhar para o fóton”. A natureza não sabe o que estamos observando e ela se comporta de maneira que:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \begin{array}{l} \text{Elétron em } x \\ \text{Fóton em } D_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Elétron vindo de } S \\ \text{Fóton vindo de } L \end{array} \right\rangle \right|^2 &+ \left| \left\langle \begin{array}{l} \text{Elétron em } x \\ \text{Fóton em } D_2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Elétron vindo de } S \\ \text{Fóton vindo de } L \end{array} \right\rangle \right|^2 = \\ &= |a\phi_1 + b\phi_2|^2 + |a\phi_2 + b\phi_1|^2. \quad (6.10) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 7

OPERADORES E VETORES DE ESTADO

7.1 - VETORES DE ESTADO: *Representando os Estados Quânticos*

Antes de começarmos este capítulo queremos descrever um número de idéias matemáticas que são muito usadas na literatura de MQ e que, em parte, já foram analisadas quando estudamos o Espaço de Hilbert.

A primeira idéia é a semelhança matemática entre as equações de MQ e aquelas do produto escalar entre dois vetores. Você lembra que se χ e ϕ são dois estados quânticos, a amplitude de probabilidade do objeto quântico iniciar em ϕ e terminar em χ , pode ser escrita como a soma, sobre um conjunto completo de estados da base, da amplitude de ir de ϕ para um dos estados da base e, então, deste estado da base ir para χ :

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\substack{\text{todos} \\ i}} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (7.1)$$

Podemos pensar em (7.1) simplesmente como a fórmula para a amplitude $\langle \chi | \phi \rangle$.

Queremos comparar a equação (7.1) com a fórmula do produto escalar entre dois vetores \vec{B} e \vec{A} . Se \vec{B} e \vec{A} são vetores ordinários em 3D, podemos escrever seu produto escalar da seguinte forma:

$$\sum_i (\vec{B} \cdot \hat{e}_i) \cdot (\hat{e}_i \cdot \vec{A}), \quad (7.2)$$

entendendo que o símbolo \hat{e}_i indica os três vetores unitários em x, y e z. Então $\vec{B} \cdot \hat{e}_i$ é o que chamamos de B_x e assim por diante. Então a equação (7.2) é equivalente a:

$$B_x \cdot A_x + B_y \cdot A_y + B_z \cdot A_z .$$

Comparando as equações (7.1) e (7.2) podemos fazer a seguinte analogia:

Os estados da base $\{i\}$ correspondem aos vetores \hat{e}_i em relação aos quais nos referimos a todos os outros vetores. Qualquer vetor, pertencente ao espaço R^3 , pode ser representado como uma combinação linear de três “vetores da base” \hat{e}_i . Além disso, se você souber os coeficientes de cada vetor da base nesta combinação, isto é, suas três componentes, você sabe tudo sobre o vetor. Similarmente, cada estado quântico pode ser descrito completamente pela amplitude de probabilidade $\langle i | \phi \rangle$ para ir do estado inicial ϕ para cada um dos estados da base; e se você conhece estes coeficientes, você sabe tudo que há para conhecer a respeito do estado.

Por causa desta analogia, o que havíamos chamado de “estado” é geralmente também chamado de “vetor de estado”.

Como os vetores da base \hat{e}_i são todos perpendiculares entre si, temos a relação:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} , \quad (7.3)$$

(onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

Isto corresponde a:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (7.4)$$

Podemos ver agora porque dizemos que os estados da base são ortogonais. Assim como para os vetores da base no espaço \mathbb{R}^2 (\hat{e}_i e \hat{e}_j) ao ser feito seu produto escalar, que num campo vetorial usual é definido como:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = |\hat{e}_i| \cdot |\hat{e}_j| \cdot \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores. Como os vetores da base são unitários (base normalizada) temos:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta;$$

se $i = j$: os vetores são colineares e θ é igual a zero e $\cos \theta$ é igual a 1,

se $i \neq j$: os vetores terão $\cos \theta$ igual a 0 o que implica em $\theta = 90^\circ$.

Como o significado geométrico do produto escalar é que seu valor é igual ao módulo da componente de um dos vetores na direção do outro. Ou seja, com os vetores da base, se $i = j$, um vetor já está completamente sobreposto ao outro o que equivale a dizer que 100% dele está “projetado” na direção do outro o que dá o produto escalar igual a 1 (100%). No entanto quando eles são perpendiculares um ao outro, um não tem projeção na direção do outro. Daí o produto escalar quando $i \neq j$ ser igual a 0.

O significado disto para os vetores de estado é que os vetores da base são autovetores do objeto quântico, representando autoestados deste. (Por exemplo, quando o objeto quântico

atravessa o anteparo com duas fendas temos dois autoestados que vão definir os dois autovetores da base: o autovetor que identifica “passar pela fenda 1” $\{|1\rangle\}$ e o que identifica “passar pela fenda 2” $\{|2\rangle\}$. Eles são ortogonais porque **ou** o objeto quântico passa pela fenda 1, **ou** pela fenda 2. Um autoestado, identificado como sendo o ocupado pelo objeto quântico, exclui o outro. Não existe “componente” do vetor “passar pela fenda 1” no vetor “passar pela fenda 2”. Então, mesmo não havendo qualquer correspondência no aspecto geométrico, pelas razões acima expostas fazemos analogia do produto escalar para os diversos espaços vetoriais.

Há, no entanto, uma sutil diferença entre o produto escalar num subespaço de Hilbert no campo dos reais e outro no campo dos imaginários. Teremos:

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*. \quad (7.5)$$

Como veremos com detalhes no capítulo onde é estudado o experimento de Stern-Gerlach o campo vetorial representado por uma base formada pelos autoestados de um experimento quântico é um subespaço de Hilbert no campo dos números complexos. Daí a diferença na definição do produto escalar. Isto não é necessário no espaço real mas no imaginário dizemos que o produto escalar é o produto de um funcional (vetor $\langle Bra|$) pertencente ao espaço dual ε^* e o vetor de estado com o qual vínhamos lidando até agora (vetor $|Ket\rangle$) cujo espaço vetorial correspondente chamaremos ε .

Considere agora:

$$\vec{A} = \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot \vec{A}). \quad (7.6)$$

Isto não é muito usual num espaço vetorial sobre os reais, no entanto é correto.

Significa a mesma coisa que:

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z. \quad (7.7)$$

Note que a equação (7.6) envolve uma quantidade que é diferente de um produto escalar. Um produto escalar é apenas um número enquanto a equação (7.6) é uma equação vetorial. Um dos maiores truques da análise vetorial é ampliar, a partir das equações, a idéia de vetor. Removemos dos dois lados de (7.1) $\langle \chi |$ e escrevemos a seguinte equação:

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \phi\rangle. \quad (7.8)$$

Pense no “bra-ket” $\langle \chi | \phi\rangle$ dividido em dois pedaços: o segundo pedaço $|\phi\rangle$ é chamado de ket e o primeiro $\langle \chi |$ é chamado bra. Estes símbolos também representam os vetores de estado.

É importante notar que mesmo na álgebra vetorial ordinária podemos fazer todas as equações envolvendo apenas números. Por exemplo: ao invés de uma equação vetorial como:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Podemos sempre escrever:

$$\vec{C} \cdot \vec{F} = \vec{C} \cdot (m \cdot \vec{a}). \quad (7.9)$$

Temos então uma equação entre produtos escalares que é verdadeira para qualquer vetor \vec{C} .

7.2 - PRODUTO ESCALAR: *Resolvendo os Vetores de Estado:*

Veamos a equação (7.8) de novo: podemos pensar nela da seguinte forma. O vetor de estado $|\phi\rangle$ pode ser representado como a combinação linear com coeficientes apropriados de um conjunto de vetores de base – ou, se preferir, com a superposição de vetores unitários e ortogonais em adequadas proporções. Para enfatizar que os coeficientes $\langle i|\phi\rangle$ são apenas números complexos:

$$\langle i|\phi\rangle = C_i. \quad (7.10)$$

Podemos escrever uma equação similar para qualquer outro vetor de estado $|\chi\rangle$, com, é claro, diferentes coeficientes D_i . Então, temos:

$$|\chi\rangle = \sum_i |i\rangle D_i, \quad (7.11)$$

$$\text{onde } D_i = \langle i|\chi\rangle.$$

Começemos tirando ϕ da equação (7.1). Teremos:

$$\langle \chi| = \sum_i \langle \chi|i\rangle \langle i|. \quad (7.12)$$

Lembrando que $\langle \chi | i \rangle = \langle i | \chi \rangle^*$ podemos escrever (7.12)

como:

$$\langle \chi | = \sum_i D_i^* \cdot \langle i |. \quad (7.13)$$

Agora o interessante é que podemos apenas multiplicando a equação (7.13) pela equação (7.10) voltamos a $\langle \chi | \phi \rangle$. Quando fazemos isto, temos que ter cuidado com o índice do somatório porque eles são muito distintos nas duas equações. Vamos reescrever a equação (7.13) como:

$$\langle \chi | = \sum_j D_j^* \cdot \langle j |,$$

o que não muda substancialmente nada. Então colocando isto junto com a equação (7.10), temos:

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{i,j} D_j^* \cdot \langle j | i \rangle \cdot C_i. \quad (7.14)$$

Lembre-se que $\langle j | i \rangle = \delta_{ij}$ então na soma apenas sobrevivem os termos onde i e j são iguais

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_i D_i^* \cdot C_i, \quad (7.15)$$

onde, é claro, $D_i^* = \langle i | \chi \rangle^* = \langle \chi | i \rangle$ e $C_i = \langle i | \phi \rangle$. Novamente vemos a analogia com o produto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i \cdot B_i.$$

A única diferença é o complexo conjugado em D_i . Então a equação (7.15) mostra que se os vetores de estado $|\chi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são expandidos em termos dos vetores da base $|i\rangle$ ou seus correspondentes funcionais do espaço dual $\langle i|$, a amplitude de ir de ϕ a χ é dado pelo produto escalar da equação (7.15). Esta equação é, claro, apenas a equação (7.1) escrita com diferentes símbolos.

Podemos enfatizar que enquanto os vetores de estado em 3D são descrições em termos dos três vetores unitários ortogonais (ortonormais), os vetores da base $|i\rangle$ dos estados da MQ são definidos sobre um conjunto completo aplicável a um problema particular. Dependendo da situação, dois ou três, ou cinco ou um número infinito de estados da base pode ser envolvido.

7.3 – OPERADORES: Modificando os Vetores de Estado

Falamos também a respeito do que acontece quando partículas vão através de um aparato

Se começamos com as partículas num certo estado ϕ , então levando-as a passar pelo aparato e depois fazendo uma medida para ver se elas estão num estado χ , o resultado é descrito por:

$$\langle \chi | A | \phi \rangle. \quad (7.16)$$

Podemos escrever (7.16) como:

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \chi | i \rangle \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle. \quad (7.17)$$

Que é um exemplo da regra fundamental (inserção da relação de completeza) aplicada duas vezes.

Se outro aparato B for adicionado em série com A, então podemos escrever:

$$\langle \chi | BA | \phi \rangle = \sum_{i,j,k} \langle \chi | i \rangle \langle i | B | j \rangle \langle j | A | k \rangle \langle k | \phi \rangle. \quad (7.18)$$

Podemos pensar na equação (7.17) de outro modo. Suponhamos a partícula entrando no aparato A no estado ϕ e saindo de A no estado ψ . Em outras palavras, podemos questionar o seguinte:

Podemos achar um ψ tal que a amplitude de achar ψ para χ é sempre idêntico e em toda parte tem a mesma amplitude de probabilidade $\langle \chi | A | \phi \rangle$?

A resposta é sim. Queremos a equação (7.17) para ser reescrita como:

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \psi \rangle. \quad (7.19)$$

Podemos fazer isto se:

$$\langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle = \langle i | A | \phi \rangle. \quad (7.20)$$

Que determina ψ .

“Mas isto não determina ψ ”, você diz, “Isto apenas determina $\langle i | \psi \rangle$ ”. De toda forma $\langle i | \psi \rangle$ determina ψ , porque se você tem todos os coeficientes que relacionam ψ aos estados da base i , então, ψ é unicamente definido.

Semelhantemente ao que ocorre com um vetor no espaço \mathbb{R}^2 descrito por vetores da base cartesiana (\hat{e}_i, \hat{e}_j) ou em coordenadas polares (\hat{r} e $\hat{\theta}$). Por serem diferentes vetores da base teremos diferentes coeficientes. No entanto as definições levarão exatamente ao mesmo vetor (unicidade da descrição).

De fato, podemos escrever o último termo de (7.20) como:

$$\langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | j \rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (7.21)$$

Então, enquanto esta equação é verdadeira para todo i , escrevemos simplesmente:

$$|\psi\rangle = \sum_j |j\rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (7.22)$$

Podemos dizer:

“O estado ψ é aquele que tomamos se começarmos com ϕ e passarmos através do aparato A ”.

Começamos novamente com a equação (7.17). Enquanto isto é verdade para qualquer ψ e ϕ :

$$A = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|. \quad (7.23)$$

Se multiplicarmos pela esquerda por $|\phi\rangle$, vem:

$$A|\phi\rangle = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\phi\rangle. \quad (7.24)$$

Que é uma repetição de (7.22). De fato podemos tirar fora a relação de completeza com índice j (já que esta é igual à unidade) e comparando com (7.22) escrever:

$$|\psi\rangle = A|\phi\rangle. \quad (7.25)$$

O símbolo A é uma nova entidade do formalismo usado na MQ chamado OPERADOR. Ele é algo que “opera sobre um estado para produzir um novo estado”. A equação (7.25), por exemplo, diz que $|\psi\rangle$ é o resultado se A opera em $|\phi\rangle$. Como poderíamos descrever textualmente a seguinte equação:

$$\langle\chi|\psi\rangle = \langle\chi|A|\phi\rangle. \quad (7.26)$$

“A amplitude de probabilidade do objeto quântico, inicialmente no estado ψ , ser encontrado no estado χ é igual à amplitude de probabilidade de, tendo iniciado o experimento no estado ϕ , em seguida passado pela operação denotada por A , ser encontrado no estado χ ”.

O operador A é descrito completamente se escrevermos a matriz de amplitudes $\langle i|A|j\rangle$, também escrita A_{ij} , em termos de algum conjunto de vetores de base.

Se você toma algum estado físico e faz alguma coisa com ele, alguma rotação, por exemplo, ou aguarda por um intervalo de tempo Δt , você chega a um estado diferente.

Dizemos:

“Executando uma operação num estado produzimos um novo estado”.

Podemos expressar esta mesma idéia por uma equação:

$$|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle. \quad (7.27)$$

Uma operação em um estado produz outro estado. O operador \hat{A} representa alguma operação. Quando esta operação é executada em um estado, digamos $|\psi\rangle$, ele produz outro estado $|\phi\rangle$.

O que (7.27) significa? Significa que se você multiplicar a equação citada por $\langle i|$ e expandir $|\psi\rangle$ temos:

$$\langle i|\phi\rangle = \sum_j \langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\psi\rangle, \quad (7.28)$$

(os estados $|j\rangle$ são do mesmo conjunto de $|i\rangle$).

Isto agora é apenas uma equação algébrica. O número $\langle i|\phi\rangle$ dá o montante de cada estado da base que você encontrará em $|\phi\rangle$, e isto fornece, em termos de uma superposição linear de amplitudes $\langle j|\psi\rangle$ que você achará em cada estado da base. Os números $\langle i|\hat{A}|j\rangle$ são apenas os coeficientes que dizem quanto de $\langle j|\psi\rangle$ vai para cada soma. O operador \hat{A} é descrito numericamente pelo conjunto de números, ou “matriz”:

$$A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle. \quad (7.29)$$

A equação (7.27) não faz nenhuma referência a um conjunto de estados da base. Mas, como sabemos, podemos usar qualquer conjunto que quisermos. E esta idéia está em (7.27). Aquela maneira de escrever o operador evita termos de fazer uma escolha particular. Então a equação do operador (7.27) é a maneira mais abstrata de escrever a equação algébrica (7.28). Isto é similar à diferença entre escrever:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

ao invés de:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y ,$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z ,$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x .$$

A primeira maneira é mais manipulável. No entanto quando queremos resultados vamos ter que escrever as componentes com respeito a algum conjunto de eixos.

Similarmente, se quisermos ser capazes de dizer o que realmente significa \hat{A} , vamos estar prontos para escrever a matriz A_{ij} em termos de algum conjunto de estados da base. Tendo em mente algum conjunto A_{ij} , a equação (7.27) significa o mesmo que (7.28). Precisamos lembrar que uma vez que conhecemos a matriz para um conjunto particular de estados da base podemos sempre calcular a matriz correspondente que vai com qualquer outra base. Podemos transformar a matriz de uma “representação” para outra.

A equação do operador em (7.27) também permite uma nova maneira de pensar. Se imaginarmos algum operador \hat{A} , podemos usar qualquer estado $|\psi\rangle$ para criar um novo estado $\hat{A}|\psi\rangle$. Às vezes um “estado” que tomamos desta maneira pode ser muito peculiar. Ele pode não representar alguma situação física que podemos encontrar na natureza. Em outras palavras, podemos certas vezes tomar “estados” que são artifícios matemáticos. Cada estado “artificial” pode ser útil, talvez, como passagem de um cálculo.

Já mostramos a você alguns exemplos de operador em MQ. Temos o operador rotação $\hat{R}_y(\theta)$ o qual toma um estado $|\psi\rangle$ e produz um estado novo, o qual é o estado antigo girado

em torno de um dos eixos coordenados. Temos o operador paridade (ou inversão) \hat{P} , o qual cria um novo estado invertendo todas as coordenadas.

Um outro exemplo. Tem-se um operador \hat{p}_x o qual chamamos de operador componente x do momento linear. Se $\hat{D}_x(L)$ é o operador que desloca um estado ao longo do eixo x pela distância L, então \hat{p}_x é definido por:

$$\hat{D}_x(\delta) = 1 + \frac{i}{\hbar} \delta \hat{p}_x, \quad (7.32)$$

onde δ é um deslocamento infinitesimal. Deslocando o estado $|\psi\rangle$ ao longo de x por um pequeno deslocamento δ temos um novo estado $|\psi'\rangle$. Estamos falando que este novo estado é o estado anterior mais um pequeno pedaço:

$$\frac{i}{\hbar} \delta \hat{p}_x |\psi\rangle.$$

Os operadores dos quais estamos falando trabalham sobre um vetor de estado $|\psi\rangle$, o qual é uma descrição abstrata de uma situação física. Eles são muito diferentes de operadores algébricos os quais trabalham na função matemática. Por exemplo: d/dx é um operador que trabalha sobre a função $f(x)$ transformando-a em uma nova função $f'(x) = df/dx$. Um outro exemplo é o operador algébrico ∇^2 . Você pode ver que a mesma palavra é usada em ambos os casos, mas pode-se ter em mente que os dois tipos de operadores são diferentes. Um

operador de MQ \hat{A} não opera sobre uma equação algébrica, mas sobre um vetor de estado como $|\psi\rangle$. Ambos operadores são usados em MQ.

Vamos, de agora em diante, ver algumas coisas úteis que podemos fazer usando os operadores. Suponha que tenhamos um operador \hat{A} cuja matriz em alguma base é

$A_{ij} \equiv \langle i|\hat{A}|j\rangle$. A amplitude de que o estado $|\psi\rangle$ esteja também em algum outro estado $|\phi\rangle$

é $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$. Há algum significado para o complexo conjugado desta amplitude? Precisamos mostrar que:

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}^+|\phi\rangle \quad (7.33)$$

onde \hat{A}^+ (lê-se A “dagger” que significa “punhal” em inglês) é um operador cujos elementos de matriz são:

$$A_{ij}^+ = (A_{ji})^* \quad (7.34)$$

Para termos os elementos i, j de A^+ tomamos os elementos j, i de \hat{A} (tomamos a matriz transposta de \hat{A}) e em seguida o complexo conjugado de cada um dos seus elementos. A amplitude do estado $\hat{A}^+|\phi\rangle$ estar em $|\psi\rangle$ é o complexo conjugado da amplitude com que $\hat{A}|\psi\rangle$ esteja em $|\phi\rangle$.

O operador \hat{A}^+ é chamado “Hermitiano adjunto” de \hat{A} . Vários operadores em MQ de grande importância têm a propriedade especial de que quando você toma o hermitiano adjunto, chega-se ao mesmo operador inicial. Se \hat{B} é um operador onde:

$$\hat{B}^+ = \hat{B},$$

\hat{B} então é chamado operador “Hermitiano” ou “Autoadjunto”.

7.4 - HAMILTONIANO: Calculando o Valor Médio da Energia

Como podemos achar a energia média de um sistema? Se um átomo está em um estado particular de energia definida e medimos a energia, encontraremos, por exemplo, E . Se tomarmos repetidas medidas em cada uma de todas as séries de átomos, os quais são selecionados para estar no mesmo estado, todas as medidas resultarão em E .

Agora o que acontecerá se fizermos a medida em algum estado $|\psi\rangle$, o qual não é estacionário? Enquanto o sistema não tem uma energia definida, uma medida pode resultar em uma energia, a mesma medida em outro átomo, no mesmo estado, pode resultar em uma energia diferente. O que tomamos para a média de uma série completa de medidas de energia?

Podemos responder a questão projetando o estado $|\psi\rangle$ em um conjunto de estados de energia definida. Para recordá-lo este é um conjunto especial da base, o que chamaremos de estados $|\eta_i\rangle$. Cada um dos estados $|\eta_i\rangle$ tem uma energia definida E_i . Nesta representação:

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |\eta_i\rangle \quad (7.35)$$

Quando fazemos uma medida de energia e obtemos algum número E_i , achamos que o sistema estava no estado η_i . Mas podemos obter um número diferente para cada medida. As vezes obtemos E_1 , outras vezes E_2 , outras vezes E_3 , e assim por diante. A probabilidade de que observemos a energia E_i é apenas a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\eta_i\rangle$, o qual é, obviamente, apenas o quadrado absoluto da amplitude $C_i = \langle \eta_i | \psi \rangle$. A probabilidade de encontrar cada uma das possíveis energias é:

$$p_i = |C_i|^2. \quad (7.36)$$

Como estas probabilidades estão relacionadas ao valor médio de uma seqüência completa de medidas da energia? Vamos imaginar que tomamos uma série de medidas como estas: $E_1, E_7, E_{11}, E_9, E_1, E_{10}, E_7, E_2, E_3, E_9, E_6, E_4$, e assim por diante. Continuamos por mil medidas. Quando terminamos somamos todas as energias e dividimos por mil. Este é o significado de média. Há um caminho mais curto para adicionar todos os números. Podemos contar quantas vezes cada energia foi medida. Então a soma de todas as energias é:

$$N_1.E_1 + N_2.E_2 + N_3.E_3 + \dots = \sum_i N_i.E_i$$

A energia média é esta soma dividida pelo total do número de medidas o qual é apenas a soma de todos os N_i 's, a qual chamaremos N :

$$E_{MÉDIA} = \frac{\sum_i N_i \cdot E_i}{N} \quad (7.37)$$

Que significado damos à probabilidade de alguma coisa acontecer é apenas o número de vezes que esperamos isto acontecer dividido pelo número total de tentativas. A razão N_i/N pode, para um grande N , estar muito perto de ρ_i , a probabilidade de achar o estado $|\eta_i\rangle$, embora ela não seja exatamente ρ_i , por causa das flutuações estatísticas. Vamos escrever a predição (ou expectativa) para a energia média como $\langle E \rangle_{MÉDIA}$, então podemos dizer que:

$$\langle E \rangle_{MÉDIA} = \sum_i \rho_i \cdot E_i \quad (7.38)$$

Os mesmos argumentos aplicam-se a qualquer medida. O valor médio de uma medida da grandeza será igual a:

$$\langle A \rangle_{MÉDIO} = \sum_i \rho_i \cdot A_i$$

Onde A_i são os valores possíveis da grandeza observada, e ρ_i é a probabilidade de obter aquele valor.

Vamos voltar ao nosso estado quântico $|\psi\rangle$. Sua energia média é:

$$\langle E \rangle_{MÉDIA} = \sum_i |C_i|^2 \cdot E_i = \sum_i C_i^* C_i E_i \quad (7.39)$$

Agora veja o seguinte. Primeiro escrevemos a soma como:

$$\sum_i \langle \psi | \eta_i \rangle E_i \langle \eta_i | \psi \rangle.$$

Tratemos o $\langle \psi |$ da mão esquerda como um “fator” comum. Podemos tirar este fator da soma e escrever como:

$$\langle \psi | \{ \sum_i | \eta_i \rangle E_i \langle \eta_i | \psi \} \}.$$

Esta expressão tem a forma $\langle \psi | \phi \rangle$, onde $|\phi\rangle$ é algum estado “preparado” definido por

$$|\phi\rangle = \sum_i | \eta_i \rangle E_i \langle \eta_i | \psi \rangle. \quad (7.40)$$

Este é, em outras palavras, o estado que obtemos se tomarmos cada estado da base $|\eta_i\rangle$ na quantidade $E_i \langle \eta_i | \psi \rangle$.

Agora lembremos qual o significado dos estado $|\eta_i\rangle$. Eles são supostos estados estacionários onde:

$$\hat{H} |\eta_i\rangle = E_i |\eta_i\rangle.$$

Como E_i é apenas um número, o lado direito é o mesmo que $|\eta_i\rangle E_i$ e a soma em (7.40)

é a mesma que:

$$\sum_i \hat{H} |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle.$$

Agora i aparece apenas na combinação que contrai à unidade (relação de completudeza ou clausura), então:

$$\sum_i \hat{H} |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle = \hat{H} \sum_i |\eta_i\rangle \langle \eta_i | \psi \rangle = \hat{H} | \psi \rangle.$$

A equação (7.40) é idêntica a:

$$|\phi\rangle = \hat{H} | \psi \rangle. \quad (7.41)$$

A energia média do estado $| \psi \rangle$ pode ser escrita como:

$$\langle E \rangle_{MÉDIA} = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (7.42)$$

Nossa nova fórmula para a energia média é bastante útil porque agora não precisamos dizer algo sobre o conjunto particular de estados da base que estamos adotando. Nem mesmo precisamos saber todos os possíveis níveis de energia. Quando formos calcular, precisaremos descrever nosso estado em termos de algum conjunto de estados da base, mas se conhecermos

o hamiltoniano H_{ij} para este conjunto podemos determinar a energia. A equação (7.42) diz que para qualquer conjunto de estados da base $|i\rangle$, a energia média pode ser calculada por:

$$\langle E \rangle_{MÉDIA} = \sum_{i,j} \langle \psi | i \rangle \langle i | \hat{H} | j \rangle \langle j | \psi \rangle, \quad (7.43)$$

onde as amplitudes $\langle i | \hat{H} | j \rangle$ são os elementos da matriz H_{ij} .

Vamos checar este resultado para o caso especial onde os estados $|i\rangle$ são os estados de energia definida. Para eles, $\hat{H} | j \rangle = E_j | j \rangle$, então $\langle i | \hat{H} | j \rangle = E_j \delta_{ij}$ e:

$$\langle E \rangle_{MÉDIA} = \sum_{i,j} \langle \psi | i \rangle E_i \delta_{ij} \langle j | \psi \rangle = \sum_i E_i \langle \psi | i \rangle \langle i | \psi \rangle.$$

7.5 - VALOR MÉDIO DE UM OBSERVÁVEL

A equação (7.43) pode ser estendida para outras medidas físicas que podem ser expressas por um operador. Por exemplo, \hat{L}_z é o operador da componente Z do momento angular \vec{L} . A média da componente Z para o estado $|\psi\rangle$ é:

$$\langle L_z \rangle_{MÉDIO} = \langle \psi | \hat{L}_z | \psi \rangle.$$

Uma maneira de provar isto é pensar em alguma situação na qual a energia é proporcional ao momento angular. Então todos os argumentos vão pelo mesmo caminho.

Em resumo, se um observável A é relacionado a um operador quântico \hat{A} adequado, o valor médio de A para o estado $|\psi\rangle$ é dado por:

$$\langle A \rangle_{\text{MÉDIO}} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (7.44)$$

7.6 - OPERADOR EVOLUÇÃO: Como os Estados Quânticos Mudam com o Tempo

Já falamos a respeito de como representarmos uma situação na qual colocamos um objeto quântico passando através de um aparato. Agora vamos introduzir um interessante e simples “aparato”: *apenas aguardar certo intervalo de tempo*, isto é, preparamos um estado ϕ , e então, antes de analisá-lo, deixamos passar um certo intervalo de tempo.

Suponha que um objeto quântico encontra-se no estado ϕ no instante t_1 . Então o objeto vai “passar através” do “aparato”. No entanto *o aparato consiste apenas em aguardarmos até o instante t_2* . Durante o intervalo várias coisas podem ocorrer, tais como, forças externas aplicadas. No fim do intervalo, a amplitude de encontrar o objeto quântico em algum estado χ não é exatamente a mesma que poderíamos ter sem que deixássemos passar o intervalo de tempo. Enquanto “aguardar” é apenas um caso especial de “aparato”, e de grande importância, vamos chamar seu operador de U (*operador evolução* [COHEN, 1977]) ao invés de A , e para especificar os instantes final e inicial vamos escrever $U(t_2, t_1)$. A amplitude que queremos é:

$$\langle \chi | U(t_2, t_1) | \phi \rangle. \quad (7.45)$$

Como outra qualquer amplitude, ela pode ser representada em qualquer sistema de vetores da base escrevendo-o:

$$\sum_{i,j} \langle \chi | i \rangle \langle i | U(t_1, t_2) | j \rangle \langle j | \phi \rangle. \quad (7.46)$$

Então U é completamente descrito dado o conjunto completo de amplitudes, isto é, é a matriz:

$$\langle i | U(t_1, t_2) | j \rangle. \quad (7.47)$$

Nosso problema, então, é entender a matriz U (t₂, t₁) para um intervalo infinitesimal, ou seja, para t₂ igual a t₁ + Δt.

Perguntamos: *se tivermos um estado φ o que ocorrerá a ele transcorridos Δt?*

Chame o estado com dependência temporal $|\psi(t)\rangle$. Qual é a condição depois de um pequeno intervalo de tempo Δt? A resposta é:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (7.48)$$

A amplitude para encontrar ψ no instante t + Δt, é, escrevendo com os vetores da base sua representação:

$$\langle i | \psi(t + \Delta t) \rangle = \langle i | U(t + \Delta t, t) | \psi(t) \rangle. \quad (7.49)$$

Vamos resolver $|\psi(t)\rangle$ dentro dos estados da base e escrever:

$$\langle i|\psi(t + \Delta t)\rangle = \sum_j \langle i|U(t + \Delta t, t)|j\rangle \langle j|\psi(t)\rangle. \quad (7.50)$$

Podemos entender a equação (7.50) desta forma: se chamarmos $C_i(t) = \langle i|\psi(t)\rangle$ para representar a amplitude de estar no estado da base i no tempo t , então podemos pensar na amplitude variando no tempo. Cada C_i torna-se uma função de t . E também temos alguma informação de como as amplitudes C_i variam com o tempo. Cada amplitude em $(t+\Delta t)$ é proporcional a todas as outras amplitudes em t multiplicadas por um conjunto de coeficientes. Vamos chamar a matriz U de U_{ij} , o que significa:

$$U_{ij} = \langle i|U|j\rangle.$$

Então escrevemos a equação (7.50) como:

$$C_i(t+\Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) \cdot C_j(t). \quad (7.51)$$

Esta é a maneira com que a dinâmica da MQ será vista.

Não sabemos muito a respeito de U_{ij} , ainda, exceto por uma coisa. Sabemos que se Δt vai a zero, nada pode acontecer. Portanto teremos o estado original.

Então, $U_{ii} = 1$ e $U_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Em outras palavras, $U_{ij} = \delta_{ij}$ para $\Delta t \rightarrow 0$.

Também podemos supor que para pequenos Δt , cada coeficiente U_{ij} precisa diferir de δ_{ij} por quantidades proporcionais a Δt . Então podemos escrever:

$$U_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} \cdot \Delta t. \quad (7.52)$$

Veja que esta equação tem a mesma forma das equações horária da posição de um M.U. ($S = S_0 + vt$) e das velocidades do M.U.V. ($v = v_0 + at$). Isto significa que o estado inicial do operador de evolução temporal será adicionado de variações proporcionais a pequenos intervalos de tempo.

O coeficiente K_{ij} que vai indicar como o passar do tempo foi modificando U_{ij} usualmente aparece com o fator $(-i/\hbar)$ fatorado. Escrevemos então:

$$U_{ij}(t+\Delta t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} \cdot H_{ij}(t) \cdot \Delta t \quad (7.53)$$

Isto é, claro, o mesmo de (7.52) e, se quiser, apenas defina os coeficientes $H_{ij}(t)$.⁷ Os termos H_{ij} são apenas as derivadas em relação a t_2 dos coeficientes $U_{ij}(t_2, t_1)$:

$$C_i(t+\Delta t) = \sum_j \left[\delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} \cdot H_{ij}(t) \cdot \Delta t \right] \cdot C_j(t). \quad (7.54)$$

Tomando a soma sobre o termo δ_{ij} , teremos apenas $C_i(t)$, o qual pode ser posto no outro lado da equação. Então dividindo membro a membro por Δt , teremos o que se reconhece como a derivada temporal:

⁷ Veja de 7.50 que o operador de evolução é adimensional. Como a constante \hbar tem a dimensão da AÇÃO (J.s) vemos que H_{ij} são mesmo os elementos da matriz hamiltoniana (dimensão de energia).

$$\frac{C_i(t + \Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) \cdot C_j(t),$$

ou

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) \cdot C_j(t). \quad (7.55)$$

Você lembra que $C_i(t)$ é a amplitude $\langle i | \psi \rangle$ para achar o estado ψ em um dos estados da base i (no tempo t). Então a equação (7.55) nos diz como cada coeficiente $\langle i | \psi \rangle$ varia no tempo. Mas isto é o mesmo que dizer que a equação (7.55) nos diz como o estado ψ varia com o tempo, enquanto estamos descrevendo ψ em termos das amplitudes $\langle i | \psi \rangle$.

A variação de ψ no tempo é descrita em termos da matriz H_{ij} , a qual tem que incluir, é claro, os fatos que estão acontecendo com o sistema para causar sua mudança.

Se conhecermos H_{ij} , que contém a física da situação e pode, em geral, depender do tempo, teremos uma completa descrição do comportamento no tempo do sistema. A equação (7.55) é então a lei da MQ para a dinâmica.

7.7 - HAMILTONIANO: Descrevendo a Dinâmica dos Vetores de Estado

A idéia é: para descrever a dinâmica da MQ precisamos escolher um conjunto de estados da base, isto é, escrever as leis físicas dando a matriz dos coeficientes H_{ij} . Poderemos responder qualquer questão a respeito do que vai acontecer.

Precisamos aprender que regras usar para achar H 's em qualquer situação física. O que corresponde a um campo magnético, ou um campo elétrico, etc. E esta é a parte mais difícil.

Os coeficientes H_{ij} compõem a chamada matriz hamiltoniana ou simplesmente hamiltoniano. O hamiltoniano tem a seguinte propriedade:

$$H_{ij}^* = H_{ij} . \quad (7.56)$$

Isto vem da condição de que a probabilidade total de que o sistema esteja em algum estado não vai mudar. Se você começa com a partícula, um objeto ou o mundo, então você continuará tendo-a. A total probabilidade de encontrá-la em algum lugar é:

$$\sum_i |C_i(t)|^2 ,$$

que não pode variar com o tempo. Se isto for verdade para qualquer condição inicial, então a equação (7.56) será verdadeira.

Como nosso primeiro exemplo, tomemos a situação na qual as circunstâncias físicas não mudam no tempo. Dizemos que H é independente do tempo. Escolheremos um sistema para o qual apenas um estado da base é requerido para a descrição.

A equação (7.55) então diz:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11} \cdot C_1 . \quad (7.57)$$

Basta apenas uma equação. E se H_{11} é constante, esta equação diferencial é resolvida:

$$C_1 = (\text{constante}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} H_{11} \cdot t} \quad (7.58)$$

Esta é a dependência temporal de um estado com uma energia definida $E = H_{11}$.

Você vê porque H_{ij} poderia se chamar matriz das energias. Ela é uma generalização da energia para situações mais complexas.

Para compreender um pouco mais a respeito do significado das equações, vejamos um sistema com dois estados da base. Então (7.55) fica:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11} \cdot C_1 + H_{12} \cdot C_2$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{21} \cdot C_1 + H_{22} \cdot C_2$$

$$(8.43)$$

Se os H 's são novamente independentes do tempo, podemos facilmente resolver esta equação.

A matriz composta pelo coeficientes H 's (hamiltoniano) é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Cujos valores são os autovalores de energia para as diversas medições. Se H é autoadjunto naturalmente que esta matriz é diagonal.

CONCLUSÃO

Como esperávamos, a pesquisa no nosso universo de alunos confirmou o estudo de Montenegro: as diferenças entre as diversas interpretações são conhecidas de maneira completamente desconexas e não há a mínima preocupação do aluno em descrever suas idéias coerentemente com uma delas.

A princípio isto poderia não ter nenhum mal não fosse essa decisão essencialmente política. Um físico que comunga com a idéia positivista da interpretação da complementaridade assume uma incapacidade ontológica de descrever realmente a natureza. Ele estaria, portanto, abdicando de um papel que o chamado filósofo natural de outros tempos cumpria. A tendência é a de tornar-se um físico que apenas usa sua ciência instrumentalizando-a, ou seja, uma vez que os resultados do modelo atendam pouco importa a natureza última dos fenômenos.

É no cerne desta questão que se encontra a luta intelectual de Einstein contra os defensores da interpretação de Copenhague. Não vai aqui defesa de uma ou outra interpretação até porque nenhuma delas, como o trabalho mostrou, é inatacável. A questão ainda está em aberto. O que parece necessário é que o aprendiz de MQ tenha acesso a estas interpretações, pois é nelas que reside o debate importante. O formalismo matemático é tão poderoso e elegante que interpretações tão díspares do objeto quântico são todas acolhidas num mesmo modelo de vetores de estado.

Olhando outro aspecto do trabalho, pesquisas desta natureza, que buscam as imagens que os alunos têm de algum assunto da física, talvez sejam importantes de serem realizadas não só em MQ mas em Física Estatística, Teoria Eletromagnética e outras. Com certeza coisas interessantes vão se revelar tais como qual é verdadeiramente a imagem que o estudante tem do ensemble estatístico, do que seja estado do sistema, de um campo rotacional? São

conceitos que sem dúvida estão nos livros, nas notas de aula, mas estarão na mente dos nossos estudantes? Por que se não estiverem não duvide que a permanência destas idéias neles será apenas até a próxima avaliação. A definição matemática não substitui a definição descritiva. O que aquela faz, com precisão e beleza, é confirmar esta última. Até que o objeto de estudo não tenha sido incorporado ao arsenal cognitivo do aluno como uma imagem, um conceito, a luta contra a matemática é terrível. Quem está calculando está calculando não sabendo o que. Com isto no momento de armazenamento na memória mais profunda e permanente, o que acontece no sono segundo as principais escolas da psicopedagogia, o cérebro identificando que aquele cálculo realizado não tem significado, apaga-o. Daí alguns alunos descreverem a experiência de estudar, estudar e não aprender. E como isto é comum em nossos alunos.

Finalmente, é momento do Ensino Médio e séries iniciais dos cursos de Engenharia, Física, Química, Filosofia, Ciência das Religiões tomarem contato com a MQ num nível mais profundo que apenas o da descrição histórica dos experimentos com corpo negro, efeito fotoelétrico e efeito Compton. A discussão sobre as interpretações é fascinante e simples o suficiente para não precisar ficar restrita exclusivamente às séries finais dos cursos de física e química.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figuras 1 a 3..... Dupla fenda <www.upscale.utoronto.ca/.../DoubleSlit.html>
- Figura 4 Dupla fenda com canhão de elétrons (FEYNMAN, 1964, fig. 1-3)
- Figura 5 Integrais de trajetória (GREENE, 2001, p. 131)
- Figura 6 Olhando os elétrons (PESSOA JR., 2003, p.156)
- Figura 7 Pacote de ondas (SILVA, 2000, p.80)
- Figura 8 Construção do pacote de ondas (COHEN, 1977, p.24)
- Figura 9 Gráfico x e k (PESSOA JR, 2003, p.74)
- Figura 10 Microscópio de raios gama (EISBERG, 1979, p. 99)
- Figura 11 Idem (PESSOA JR, 2003, p.78)
- Figura 12 Desvios padrão de x e k (PESSOA JR, 2003, p. 75)
- Figura 13 Retrodição de Ballentine (PESSOA JR, 2003, p. 81) adaptado
- Figura 14 Câmara de nuvens (PESSOA JR, 2003, p. 38)
- Figura 15 Mach-Zehnder (PESSOA JR, 2003, p. 10) adaptado
- Figuras 16 a 20 Interferômetro Virtual de MZ (OSTERMANN, 2006)
- Figura 21 Dupla fenda - <www.if.ufrgs.br/tex/fisica-4/Interferencia70.GIF>
- Figura 22 Dupla fenda mais tripla fenda (FEYNMAN, 1964, fig. 3-2)
- Figura 23 Dupla fenda com luz (FEYNMAN, 1964, fig. 3-3)
- Figura 24 Distribuições de probabilidades (FEYNMAN, 1964, fig. 3-4)
- Figura 25 Aparato de Stern-Gerlach educar.sc.usp.br/.../2003/of/difracao.gif
- Figura 26 Idem (COHEN, 1977, p. 388)
- Figuras 27 a 29 (PESSOA JR., 2003, p. 41-44)

BIBLIOGRAFIA

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **Filosofando**: introdução à filosofia/ Maria Lúcia de Arruda, Maria Helena Pires Martins. 2. ed. rev. Atual., São Paulo: Moderna, 1993.

CHIBENI, Sílvio Seno. **Certezas e incertezas sobre as relações de Heisenberg**. Disponível em: < http://www.sbfisica.org.br/rbef/Vol27/Num2/v27_181.pdf >. Acesso em: 16 de novembro de 2006a.

_____. **Observações sobre as relações entre a ciência e a filosofia**. Disponível em: < <http://www.unicamp.br/~chibeni/texdid/cienfilo.doc> >. Acesso em: 01 set. 2006b.

COHEN-TANNOUJDI, Claude, **Quantum Mechanics**, Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, Nova York: Wiley, 1977

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações – Volume II, São Paulo: Editora Ática, 2000

DEMMER, M.; FONSECA, R.; KOUSHANFAR, F. **Richard Feynman: Simulating Physics with Computers**. Disponível em: < http://www.fisica.net/computacaoquantica/richard_feynman_simulating_physics_with_computers.pdf >. Acesso em 26 de novembro de 2006.

EISBERG, Robert. **Física Quântica**: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. Robert Eisberg e Robert Resnick. Tradução de Paulo Costa Ribeiro, Enio Frota da Silveira e Marta Feijó Barroso. Rio de Janeiro: Campus, 1979

FEYNMAN, Richard. **“Está a brincar, Sr. Feynman!”**: retrato de um físico enquanto homem. Tradução: Isabel Neves. 1ª edição. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda., 1988

_____. **“Nem sempre a brincar, Sr. Feynman!”**: novos elementos para o retrato de um físico enquanto homem. Tradução: Maria Georgina Segurado. 1ª edição. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda., 1989

_____. **The Feynman Lectures on Physics -Vol III: Quantum Mechanics** Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, Reading, MA: Addison-Wesley, 1964.

GAMOW, George. **As aventuras do Sr. Tompkins**. Tradução: A. M. Nunes dos Santos, Christopher Aurretta. 1ª edição. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 1990

GASPAR, Alberto. **Física Vol 3**: Eletromagnetismo e Física Moderna. 1ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2000

GRAYLING, A. C.. **Epistemologia**. Disponível em:
<<http://www.odialetico.hpg.ig.com.br/filosofia/epistemologia.htm>>. Acesso em: 01 set. 2006

GREENE, Brian. **O Universo Elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva**. São Paulo: Companhia das Letras, 2001

HALLIDAY, David. **Física II**, David Halliday, Robert Resnick, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, 1968

HEISENBERG, Werner. **Física e Filosofia**. Tradução: Jorge Leal Ferreira. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1981

_____ **A Parte e o todo: encontros e conversas sobre física, filosofia, religião e política**. Tradução: Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996

ILEANA, Ileana Maria; MOREIRA, Marco Antonio. **Uma Revisão da Literatura sobre Estudos Relativos ao Ensino da Mecânica Quântica Introdutória**. Disponível em:
<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol6/n1/v6_n1_a1.htm>. Acesso em: 01 set. 2006

LANG, Serge. **Álgebra Linear**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003

LESCHE, Bernhard Johannes. **Notas de aula**, Curso de Mecânica Quântica III, Mestrado em Física, Universidade Federal de Juiz de Fora, 1º período letivo, 2006

MONTENEGRO, Roberto Luiz. **Interpretações da Mecânica Quântica e as Concepções dos Alunos do Curso de Física**. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências – Modalidade Física) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000

MONTENEGRO, Roberto Luiz; PESSOA JR., Osvaldo. **Interpretações da Teoria Quântica e as concepções dos alunos do curso de Física**. Disponível em:
<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n2/v7_n2_al.html> .Acesso em: 14 fev. 2006

OLIVEIRA, Ivan S. **Física Moderna: para iniciados, interessados e aficionados**. Vol 1 e 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005

OSTERMANN, Fernanda; PRADO, Sandra Denise. **Interpretações da Mecânica Quântica em um Interferômetro virtual de Mach-Zehnder**. Disponível em
<http://www.sbfisica.org.br/rbef/Vol27/Num2/v27_193.pdf>,
<<http://sbfisica.org.br/fne/Vol7/Num1/v12a07.pdf>> e
<<http://www.if.ufrgs.br/~fernanda/>>(simulador). Acesso em 26 de novembro de 2006.

PESSOA JUNIOR, Osvaldo. **Conceitos de Física Quântica -Vol I**. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2003

_____ **Conceitos de Física Quântica -Vol II**. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006a.

O Problema da Medição em Mecânica Quântica: Um Exame Atualizado.

Disponível em <<http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/Prob-Med-1.pdf>> Acesso em 25 de novembro de 2006b.

PIZA, A. F. R. De Toledo. **Mecânica Quântica**, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**, Reading, MA: Addison-Wesley, 1967

SILVA, José Alves da. **Projeto Escola e Cidadania: O nascimento da Física Quântica** / José Alves da Silva, Alexandre Custódio Pinto, Cristina Leite. São Paulo: Editora do Brasil, 2000

SILVA, José Maria da. **Apresentação de Trabalhos Acadêmicos: normas e técnicas** / José Maria da Silva, Emerson Sena da Silveira, Juiz de Fora: Juizforana, 2002

SPIEGEL, Murray R. **Estatística - Coleção Schaum**, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1970

VALADARES, Eduardo de Campos. **Aplicações da física quântica: do transistor à nanotecnologia** / Eduardo de Campos Valadares, Alaor S. Chaves, Esdras Garcia Alves. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005

WEINBERG, Steven. **Os Três Primeiros Minutos: uma análise moderna da Origem do Universo**. 1ª edição. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 1987

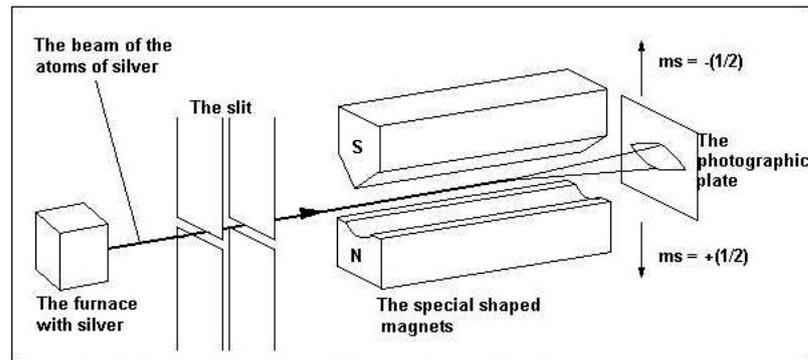
ZEILINGER, Anton. **A face oculta da natureza: o novo mundo da física quântica**. Tradução: Luiz Repa. São Paulo: Editora Globo, 2005

APÊNDICE 1

O EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH

Experimento idealizado por Otto Stern e Walter Gerlach em 1921 na Universidade de Frankfurt.

Figura 25



The Stern-Gerlach experiment. On the photographic plate are two clear tracks.

Um feixe de átomos de prata é produzido por evaporação em um forno e colimado por duas fendas em série, passando então, em alto vácuo, entre os dois pólos de um eletro-ímã que gera um campo magnético não-homogêneo (PESSOA JR., 2003). Num anteparo diante do ímã formaram-se duas manchas bem separadas, ao invés de uma mancha contínua. É a quantização espacial do spin. Aproximadamente 50 % dos átomos incidem “*em cima*”

($S_z = \frac{1}{2} \hbar$) e os outros 50 % “*em baixo*” ($S_z = -\frac{1}{2} \hbar$)

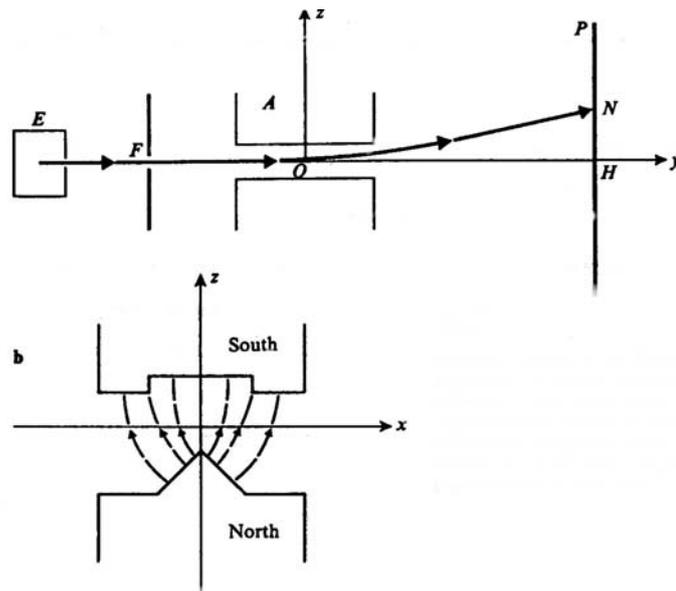
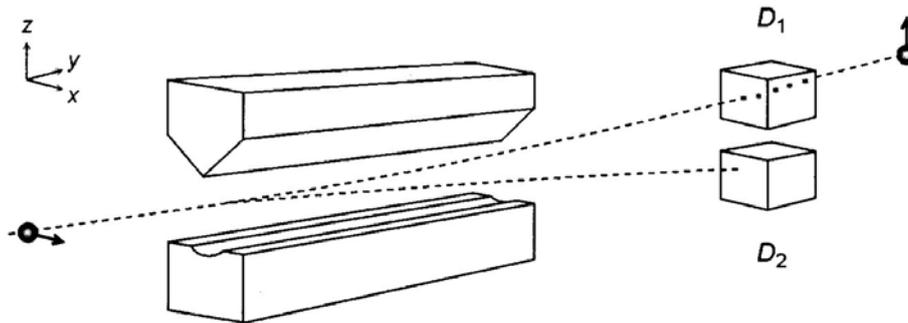


Figura 26

Coloquemos dois detectores de não demolição (não absorvem mas são sensíveis à passagem até de um único fóton).

Figura 27



Se o átomo for detectado em D_1 podemos dizer que a pergunta $[Z \uparrow]$ foi respondida, conforme Lesche (2006), com um “SIM” e a pergunta $[Z \downarrow]$ com um “NÃO”. Se em D_2 , o contrário.

Se o feixe for não polarizado, após um grande número de repetições do experimento teremos aproximadamente:

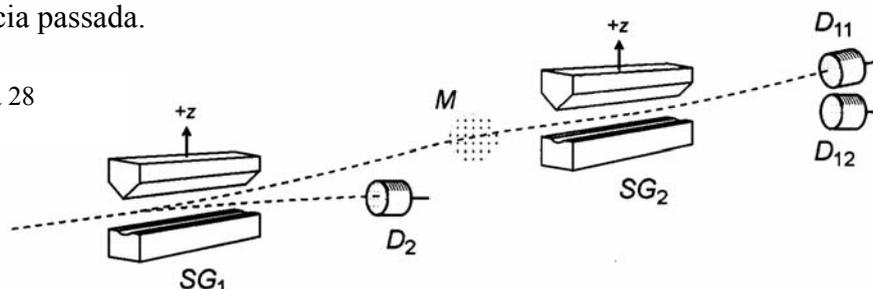
50 % $\rightarrow [Z \uparrow]$ com resposta “SIM”

50 % $\rightarrow [Z \downarrow]$ com resposta “NÃO”

Estas flutuações são devidas à ausência de filtragem (tal qual na figura 28 no primeiro SG).

Usamos em seguida dois aparatos de Stern-Gerlach (SG) em série. No primeiro bloqueamos a posição D_2 (por exemplo) e no outro colocamos dois detectores como na experiência passada.

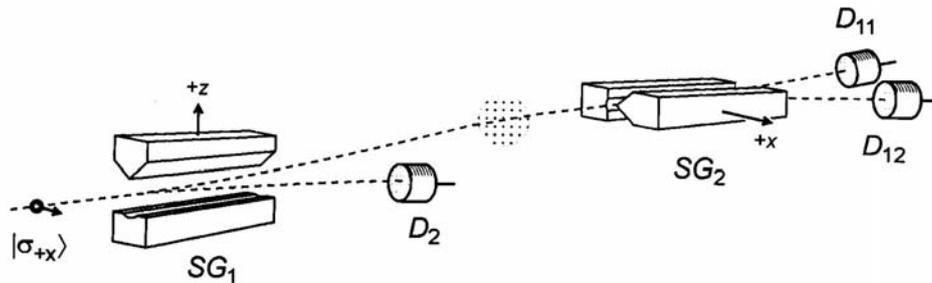
Figura 28



Com isto garantimos que todos os átomos que passam pelo SG_2 estão no estado $[Z \uparrow]$.
 Nosso sistema em SG_2 tem a propriedade $[Z \uparrow]$. (D_{11} receberá 100 % das detecções).

Agora montemos os dois aparatos SG em série conforme a figura abaixo.

Figura 29

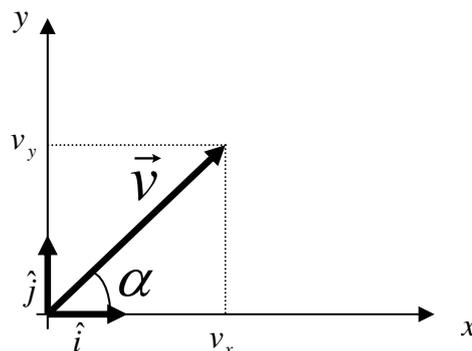


Apesar da preparação feita no estado inicial $|\sigma_{+x}\rangle$ após SG_1 vemos que é feita uma polarização em $[Z \uparrow]$. Colocando um segundo aparelho SG_2 em série com este primeiro mostra que a polarização destruiria a propriedade inicial $[X \uparrow]$. Isto implica em que:

“É impossível preparar um estado de maneira que as propriedades $[Z \uparrow]$ e $[X \uparrow]$ sejam simultâneas”.

A descrição matemática deste experimento será tal que no espaço de Hilbert para a representação do spin destes átomos de prata teremos o seguinte:

Usemos uma analogia com o espaço de Hilbert \mathbf{R}^2 euclidiano:



$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}.$$

o produto escalar:

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = v_x \quad \rightarrow \quad \text{componente de } \vec{v} \text{ na direção de } x.$$

$$\vec{v} \cdot \hat{j} = v_y \quad \rightarrow \quad \text{componente de } \vec{v} \text{ na direção de } y.$$

Para entendermos esta analogia suponha que \vec{v} seja um vetor deslocamento. A figura mostra que \vec{v} é tal que o corpo cujo deslocamento está sendo representado desloca-se simultaneamente “para cima” e “para frente” e que cada uma destas partes são as componentes v_x e v_y .

Isto definido vamos às características do vetor \vec{v} :

MÓDULO: determinado pelo produto escalar de $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ ou em termos de suas

componentes: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Significado: tamanho do deslocamento total.

DIREÇÃO: é dada pela tangente do ângulo α onde $\alpha = v_x / v_y$.

Significado: quantas vezes o deslocamento é maior na direção y que na direção x.

BASE: \hat{i} e \hat{j} formam uma base ortonormal pois são linearmente independentes e:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \delta_{ij}.$$

Significado: qualquer vetor \vec{v} na direção x só precisa do vetor \hat{i} para ser determinado.

Como seria o espaço de Hilbert (ver também Apêndice 2) dos estados quânticos de spin?

Apenas por simplicidade comparemos o vetor em \mathbf{R}^2 com os estados quânticos em x.

Os dois estados quânticos que formarão a base do espaço de Hilbert serão, conforme notação do Cohen (1977):

$|+\rangle_z \rightarrow$ preparação do objeto quântico que se move no eixo x com spin $+\frac{1}{2}\hbar$
(desviado, ao passar pelo imã, no sentido Z +)

$|-\rangle_z \rightarrow$ preparação do objeto quântico que se move no eixo x com spin $-\frac{1}{2}\hbar$
(desviado, ao passar pelo imã, no sentido Z -)

Suponhamos um feixe de átomos de prata não polarizado. Vimos que depois de um grande número de repetições do experimento o resultado será:

$|+\rangle_z \rightarrow$ 50% dos resultados

$|-\rangle_z \rightarrow$ 50% dos resultados

Representaremos esta situação por um vetor de estado escrito assim:

$$|\psi\rangle = a \cdot |+\rangle_z + a \cdot |-\rangle_z.$$

A igualdade dos coeficientes dos dois auto-vetores se deve ao fato do objeto quântico encontrar-se numa superposição desses dois auto-estados sendo 50% de chance de estar em cada um deles. Agora identifiquemos as características deste vetor de estado:

MÓDULO: (será chamado neste caso de NORMA) é dado pelo produto escalar do vetor de estado por ele mesmo, ou seja, por tratar-se de espaço complexo, é o produto do Bra pelo Ket do vetor de estado:

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = (a^* \langle + |_z + a^* \langle - |_z) \cdot (a | + \rangle_z + a | - \rangle_z),$$

$$\|\psi\|^2 = a^*a + a^*a = |a|^2 + |a|^2 = 2 \cdot |a|^2.$$

Significado: a norma de ψ ao quadrado é a probabilidade de encontrarmos o átomo de prata **ou** em $|+\rangle_z$ **ou** em $|-\rangle_z$. Como estas são as duas únicas possibilidades nesta preparação:

$$\|\psi\|^2 = 1 \rightarrow \text{probabilidade de 100\% de encontrar o objeto quântico num **ou** noutro auto-estado.}$$

Portanto:

$$1 = 2 \cdot |a|^2,$$

e logo

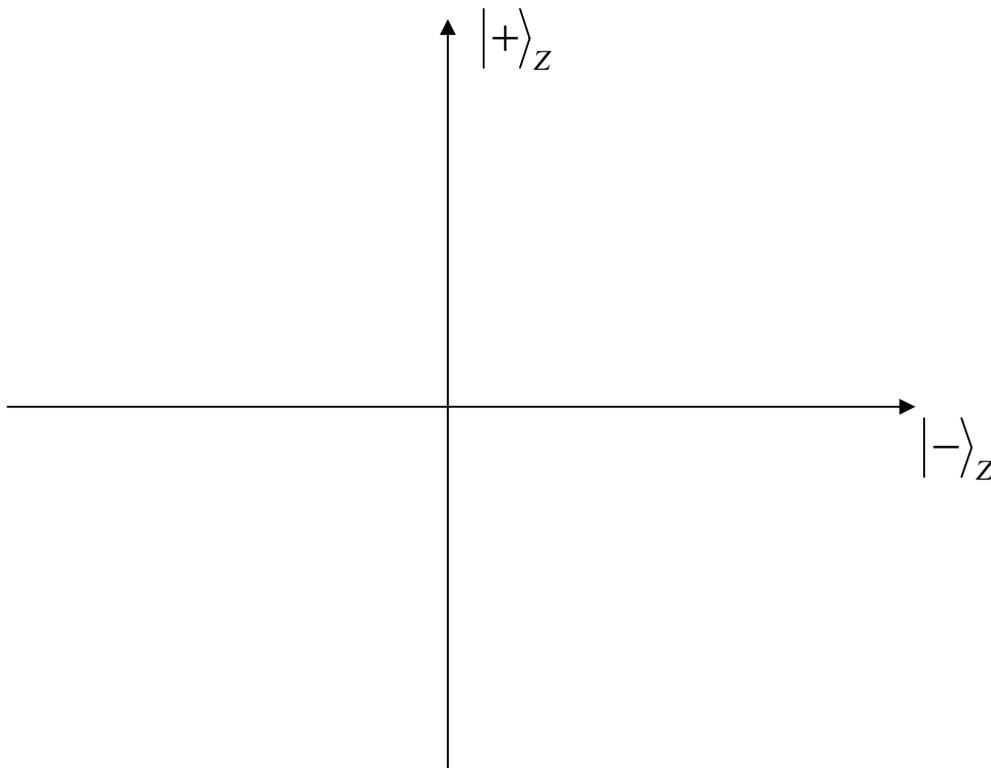
$$|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dai:

$$|\psi\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z.$$

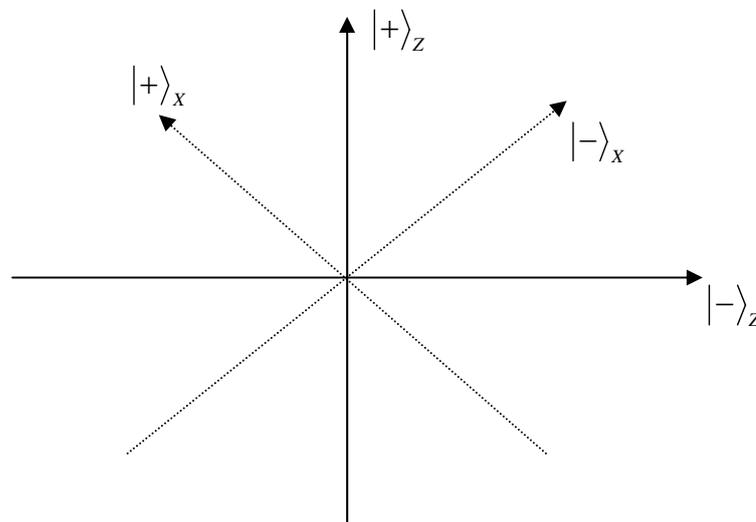
Os coeficientes dos auto-vetores são chamados AMPLITUDES DE PROBABILIDADE.

Nos casos em que o espaço de Hilbert for contínuo, como para estudarmos o espaço das posições e dos momentos, falamos de uma DENSIDADE DE PROBABILIDADE.



BASE: os auto-estados $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$ formam uma base ortonormal num espaço de Hilbert pois um estado puro onde $|\psi\rangle = |+\rangle_z$ é completamente descrito apenas por $|+\rangle_z$, assim como um vetor no espaço euclidiano que tenha a direção de um dos vetores da base.

No mesmo diagrama temos ainda que traçar os eixos $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$, ortogonais entre si e simétricos em relação a $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$, conforme esquema abaixo (LESCHE, 2006):



Mas também podemos ter uma polarização em y. Isto só será possível de ser representado se lançarmos mão de um espaço de Hilbert complexo pois não teremos mais um subespaço real, onde colocar o par de eixos $|+\rangle_y$ e $|-\rangle_y$ simétricos aos de x e aos de z e ortogonais um ao outro. Daí a necessidade do espaço complexo.

No espaço \mathbf{C}^2 teremos:

$$|+\rangle_z = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ 0 \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\},$$

$$|-\rangle_z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\},$$

$$|+\rangle_x = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\},$$

$$|-\rangle_x = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\},$$

$$|+\rangle_y = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ i\mathbf{C} \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\},$$

$$|-\rangle_y = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -i\mathbf{C} \end{pmatrix} / \mathbf{C} \in \mathcal{C} \right\}.$$

onde \mathcal{C} simboliza o conjunto dos números complexos.

Não há qualquer impedimento para que o espaço use números complexos pois aquilo que tem existência real que é a probabilidade de encontrarmos o átomo em determinado estado esta é real uma vez que é definida pelo produto escalar $\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$.

APÊNDICE 2

O ESPAÇO DE HILBERT COMPLEXO

Por definição é **um espaço vetorial linear complexo completo com produto escalar**.

O que quer dizer cada uma destas características?

- ESPAÇO VETORIAL:

Para clarear a compreensão de espaço vetorial definimos, segundo Lang (2003):

Seja K um subconjunto dos números complexos \mathbf{C} . Diremos que K é um CORPO se satisfeitas as seguintes condições:

- (a) Se x e y são elementos de K então $x + y$ e $x.y$ são também elementos de K .
- (b) Se $x \in K$ então $-x$ também é elemento de K . Se além disso $x \neq 0$, então x^{-1} é um elemento de K .
- (c) Os elementos 0 e 1 são elementos de K .
- (d) Observemos que \mathbf{R} e \mathbf{C} são ambos corpos.

Sejam K e L corpos e suponha que K esteja contido em L (isto é, K é subconjunto de L). Então dizemos que K é um SUBCORPO de L . Conseqüentemente, cada um dos

corpos que estamos considerando é um subcorpo de \mathbf{C} . Em particular, podemos dizer que \mathbf{R} é um subcorpo de \mathbf{C} , e que \mathbf{R} é um subcorpo de \mathbf{R} . Os elementos de \mathbf{K} serão chamados de NÚMEROS ou ESCALARES.

- ESPAÇO VETORIAL LINEAR COMPLEXO:

(LESCHE, 2006) e (PIZA, 2003)

Um espaço vetorial linear complexo V sobre o corpo \mathbf{K} é um conjunto de objetos que podem ser somados e multiplicados por elementos de \mathbf{K} , de forma que a soma de dois elementos de V ainda é um elemento de V , e são satisfeitas as seguintes propriedades e operações:

(a) A soma de dois vetores, associada a dois vetores quaisquer $|\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$ dados, é um terceiro vetor $|\chi\rangle = |\varphi\rangle + |\psi\rangle$ que satisfaz as propriedades:

a.1) ASSOCIATIVA: $|\varphi\rangle + (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = (|\varphi\rangle + |\psi_1\rangle) + |\psi_2\rangle$.

a.2) COMUTATIVA: $|\varphi\rangle + |\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle + |\varphi\rangle$.

a.3) Existe um vetor nulo $|\emptyset\rangle$ tal que $|\varphi\rangle + |\emptyset\rangle = |\varphi\rangle$ para todo vetor $|\varphi\rangle$.

a.4) Para todo vetor $|\varphi\rangle$ existe um outro vetor $|- \varphi\rangle$ tal que $|\varphi\rangle + |- \varphi\rangle = |\emptyset\rangle$.

(b) O produto de um vetor $|\varphi\rangle$ por um número complexo Z tem como resultado um vetor $Z \cdot |\varphi\rangle$ e satisfaz as propriedades:

b.1) ASSOCIATIVA: $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot |\varphi\rangle = Z_1 \cdot (Z_2 \cdot |\varphi\rangle)$.

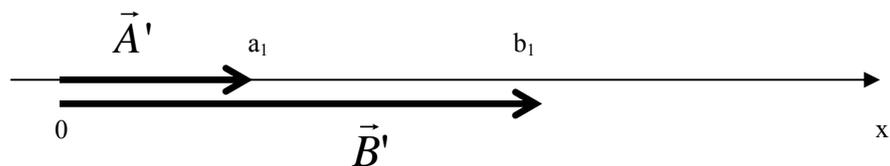
b.2) e b.3) DISTRIBUTIVAS:

$$(Z_1 + Z_2) \cdot |\varphi\rangle = Z_1 |\varphi\rangle + Z_2 |\varphi\rangle \quad \text{e} \quad Z (|\varphi\rangle + |\psi\rangle) = Z |\varphi\rangle + Z |\psi\rangle \quad (\text{Linearidade}).$$

b.4) O produto de qualquer vetor por $Z = 1$ reproduz o mesmo vetor: $1 \cdot |\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ para $\forall |\varphi\rangle$.

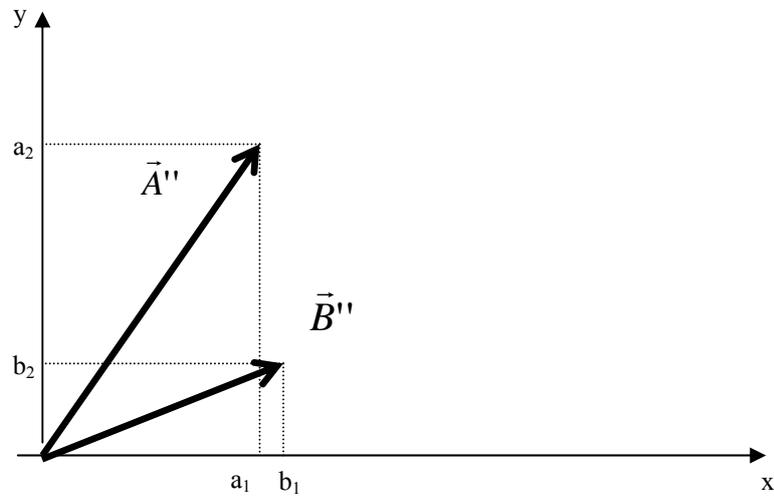
Exemplo 1: Seja $V' = \mathbf{R}^1$ o conjunto de elementos de \mathbf{R} .

$$\vec{A}' = (a_1) \qquad \vec{B}' = (b_1)$$



Exemplo 2: Seja $V'' = \mathbf{R}^2$ o conjunto de duplas (pares ordenados) de elementos de \mathbf{R} .

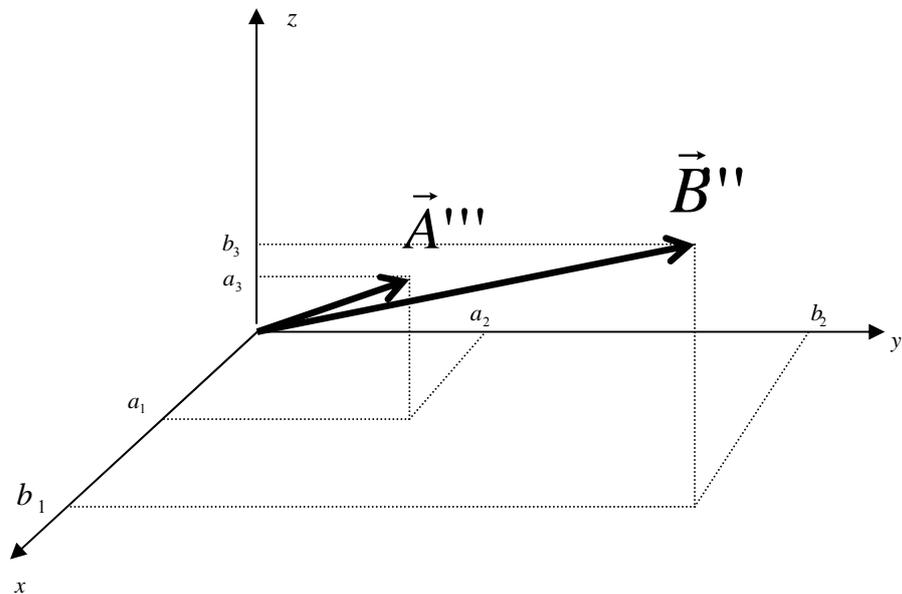
$$\vec{A}'' = (a_1, a_2) \qquad \vec{B}'' = (b_1, b_2)$$



Exemplo 3: Seja $V''' = \mathbf{R}^3$ o conjunto de trincas de elementos de \mathbf{R} .

$$\vec{A}''' = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{B}''' = (b_1, b_2, b_3)$$



Generalizando: Seja $V = \mathbf{R}^N$ o conjunto de N-uplas de elementos de \mathbf{R} .

$$\vec{A}^N = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{e} \quad \vec{B}^N = (b_1, \dots, b_n)$$

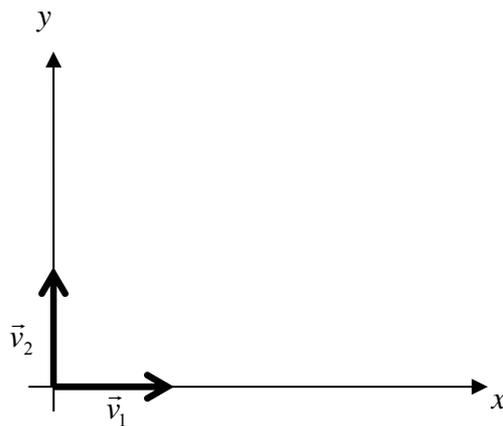
Vamos definir agora CONJUNTOS LINEARMENTE INDEPENDENTES:

Seja V um espaço vetorial linear complexo sobre um corpo K , e sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ elementos de V . Diremos que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são **linearmente independentes** sobre K se:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Exemplo 1: Seja $V = \mathbf{R}^2$ e considere:

$$\vec{v}_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (0, 1)$$



Então \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são linearmente independentes (L I). De fato, sejam a_1 e a_2 números tais que:

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

$$a_1 \cdot (1, 0) + a_2 \cdot (0, 1) = (a_1, a_2),$$

e

$$a_1 \cdot (1, 0) + a_2 \cdot (0, 1) = (0, 0).$$

Portanto

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Exemplo 2: Seja V o espaço vetorial de todas as funções de uma variável t . Sejam

$f_1 = e^t$ e $f_2 = e^{2t}$. Para provar que são L I, suponha que existam números a e b tais que:

$$a \cdot e^t + b \cdot e^{2t} = 0, \quad (1)$$

para todos os valores de t . Derivemos esta relação obtendo:

$$a \cdot e^t + 2b \cdot e^{2t} = 0. \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) obtemos

$$b \cdot e^{2t} = 0,$$

e, portanto $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. De (1):

$$a \cdot e^t = 0$$

Daí, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Logo e^t e e^{2t} são linearmente independentes.

Se os elementos $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ de V geram V e são L I, então $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ constitui uma BASE de V se e somente se ele for MAXIMAL, isto é, se for impossível acrescentar um vetor ao conjunto B sem destruir a independência linear.

- ESPAÇO VETORIAL LINEAR COMPLEXO COM PRODUTO ESCALAR:

PRODUTO ESCALAR: (LESCHE, 2006)

Um produto escalar vetorial complexo é um mapeamento $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ (que escrevemos com parênteses $(\ , \)$) tal que:

$$(1) \forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall a, b \in \mathbb{C}: \quad (\gamma, \alpha.a + \beta.b) = (\gamma, \alpha).a + (\gamma, \beta).b$$

$$(2) \forall \alpha \in V \quad (\alpha, \alpha) \geq 0$$

$$(3) \forall \alpha \in V \quad (\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \vec{0}$$

$$(4) \forall \alpha \text{ e } \beta \in V \quad (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)^* \text{ onde } * \text{ significa complexo conjugado}$$

$$(5) \text{ Combinando (1) com (4) obtemos ainda: } (\alpha.b + \beta.b, \gamma) = a^* (\alpha, \gamma) + b^* (\beta, \gamma)$$

Então o produto escalar é *linear* no fator da direita e *anti-linear* no fator da esquerda.

Com o produto escalar podemos definir a NORMA de um vetor

$$\| \alpha \| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} .$$

Como primeiro exemplo veremos um produto escalar no \mathbf{C}^N . No espaço complexo definimos como produto escalar o seguinte:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{define-se} \quad (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i^* \cdot b_i .$$

Na notação de Dirac, a qual já começamos a apresentar neste capítulo, o vetor do espaço de Hilbert (ε) é indicado por $|\alpha\rangle$ (espaço de kets). O elemento que vai compor o produto escalar com este vetor é um FUNCIONAL LINEAR (COHEN, 1977), pertencente ao ESPAÇO DUAL (ε^*), cujos elementos são representados por $\langle\beta|$ (espaço de bras).

“[...] Temos uma correspondência um a um entre o espaço de kets e um espaço de bras:

$$|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha| \quad \dots$$

onde DC simboliza CORRESPONDÊNCIA DUAL. [...]

O bra dual a $c|\alpha\rangle$ é requerido que seja $c^*\langle\alpha|$, não $c\langle\alpha|$, o que constitui um ponto muito importante.” (SAKURAI, 1967, p. 13).

Esta diferença em relação à definição de produto escalar no espaço real deve-se à necessidade da norma do vetor no espaço complexo ser um valor real.

- ESPAÇO VETORIAL LINEAR COMPLEXO COM PRODUTO ESCALAR COMPLETO.

Como cada elemento do espaço de Hilbert (\vec{v}) é dado como uma combinação linear de um número finito (ou infinito) de vetores linearmente independentes da base (\vec{v}_n), para que ele seja caracterizado como COMPLETO a série assim gerada:

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{v}_n,$$

tem que ser convergente, ou seja, o limite do somatório acima tem que convergir para um valor finito.

Finalmente definimos BASE ORTONORMAL como sendo um conjunto de vetores cujo produto escalar entre cada dois vetores deste conjunto chega a um resultado conforme descrevemos a seguir:

Seja $B = \{\hat{i}, \hat{j}\}$ uma base ortonormal em determinado espaço de Hilbert de duas dimensões. Então:

$$\langle \hat{i} | \hat{j} \rangle = 0 \quad \text{se } \hat{i} \neq \hat{j} \quad \text{e} \quad \langle \hat{i} | \hat{j} \rangle = 1 \quad \text{se } \hat{i} = \hat{j}.$$

Usando o delta de Kronecker, que sintetiza o acima exposto:

$$\langle \hat{i} | \hat{j} \rangle = \delta_{ij}.$$

Ortonormal significa que além dos vetores da base serem, por exemplo no espaço euclidiano de 2 dimensões, perpendiculares um ao outro cada um deles tem módulo igual a um (1).

APÊNDICE 3

QUESTIONÁRIOS

QUESTIONÁRIO I

- (1) Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas **um** (1) elétron passa pelas fendas?

- (2) Enuncie o Princípio da Incerteza. Procure dar um exemplo.

- (3) O estado de um sistema é dado por $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_2\rangle$, onde $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são autoestados de um observável, com autovalores q_1 e q_2 . Suponha que este observável seja medido, e o resultado obtido seja q_1 . Você pode então dizer que o valor do observável *antes* da medição era q_1 , ou não pode? Explique.

QUESTIONÁRIO II

- Instruções:** - Comece na página 1.
- Marque uma das alternativas, e em seguida vá **somente** para a página indicada ao final da alternativa escolhida. (Solicite ao examinador).
 - Você **não** poderá retornar à letra ou questão respondida após trocar a página.

Questão 1

- 1) **Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas um elétron passa pelas fendas?**

- a) Ele forma um padrão de interferência bem fraco na tela.

[VÁ PARA A PÁGINA 2]

- b) Ele incide em apenas um ponto da tela, formando uma cintilação pontual.

[VÁ PARA A PÁGINA 3]

= 1 =

- 2) *Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas **um** elétron passa pelas fendas?*
- a) *Ele forma um padrão de interferência bem fraco na tela.*

1a) É possível obter um padrão de interferência mais fraco ainda?

- c) Não, porque não é possível dividir o elétron.

[Vá para a página 6]

- d) Sim, desde que se altere a velocidade do elétron ou a distância entre a tela e as fendas.

[Vá para a página 6]

= 2 =

- 3) *Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas **um** elétron passa pelas fendas?*
- b) Ele incide em apenas um ponto da tela, formando uma cintilação pontual.*

1b) A intensidade do brilho da cintilação pontual formada vai depender da posição em que o elétron cai na tela?

c) Sim, irá depender.

[Vá para a página 4]

d) Não, a intensidade do brilho é a mesma.

[Vá para a página 5]

= 3 =

1) *Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas um elétron passa pelas fendas?*

b) *Ele incide em apenas um ponto da tela, formando uma cintilação pontual.*

1b) *A intensidade do brilho da cintilação pontual formada vai depender da posição em que o elétron cai na tela?*

c) *Sim, irá depender.*

1bc) A probabilidade de um elétron gerar uma cintilação em um ponto vai depender da posição deste ponto?

e) Sim.

[Vá para a página 6]

f) Não.

[Vá para a página 6]

= 4 =

1) *Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas um elétron passa pelas fendas?*

b) *Ele incide em apenas um ponto da tela, formando uma cintilação pontual.*

1b) *A intensidade do brilho da cintilação pontual formada vai depender da posição em que o elétron cai na tela?*

d) *Não, a intensidade do brilho é a mesma.*

1bd) Em que região da tela cintiladora vai incidir o elétron?

e) O elétron pode incidir em qualquer ponto da tela.

[Vá para a página 6].

f) O elétron só pode incidir em alguns pontos da tela, em outros não.

[Vá para a página 6]

= 5 =

4) *Um feixe de elétrons passa por duas fendas e forma um padrão de interferência em uma tela cintiladora. O que acontece quando apenas um elétron passa pelas fendas?*

Este experimento em particular (com um elétron) é um exemplo de:

g) Fenômeno ondulatório. **[FIM]**

h) Fenômeno corpuscular. **[FIM]**

i) Fenômeno dual onda e partícula. **[FIM]**

= 6 =

QUESTÃO 2

2) A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?

a) Apenas estatística. É possível medir x e p_x , de um único sistema com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) porque os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza.

[Vá para a página 2].

b) A relação vale também no caso individual. Ela impõe um limite na resolução de δx e δp_x . [Vá para a página 3]

= 1 =

2) A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?

a) Apenas estatística. É possível medir x e p_x de um único sistema com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) pe que os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza.

2a) Na prática, é possível montar um experimento que meça simultaneamente x e p_x com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza?

c) Sim. [Vá para a página 4]

d) Não. Na prática não. [Vá para a página 5]

= 2 =

2) A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?

b) A relação vale também no caso individual. Ela impõe um limite na resolução de δx e δp_x .

2b) Podemos dizer que o sistema tem sempre valores simultaneamente bem definidos para x e p_x , mas que nós não temos acesso a esses valores através de experimentos?

c) Sim. Se meço x , passo a ignorar qual é o valor possuído por p_x . [FIM]

d) Não. Se x for bem definido, p_x não terá valor bem definido. [FIM]

= 3 =

2) A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?

a) Apenas estatística. É possível medir x e p_x de um único sistema com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) pe que os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza.

2a) Na prática, é possível montar um experimento que meça simultaneamente x e p_x com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza?

c) Sim.

2ac) Podemos dizer que esses valores medidos eram simultaneamente possuídos pelo sistema antes da medição?

e) Sim. Uma boa medição *revela* os valores pré-existentes. [FIM]

f) Não. A medição altera os valores (que antes já eram bem definidos, mas desconhecidos)

de maneira imprevisível. [FIM]

g) Não. Não podemos dizer que o sistema possuía simultaneamente valores bem definidos

para x e p_x antes da medição. [FIM] = 4 =

2) *A relação de incerteza (por exemplo, para posição x e momento p_x) é uma limitação estatística ou ela também se aplica a sistemas individuais?*

a) *Apenas estatística. É possível medir x e p_x de um único sistema com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza. Apenas para várias medições (caso estatístico) pe que os desvios padrão dos resultados obedecem à relação de incerteza.*

2a) *Na prática, é possível montar um experimento que meça simultaneamente x e p_x com resoluções δx e δp_x que violem a relação de incerteza?*

d) *Não. Na prática, não.*

2ad) **Podemos dizer que o elétron possui simultaneamente valores de x e p_x bem definidos (com boa resolução) antes da medição?**

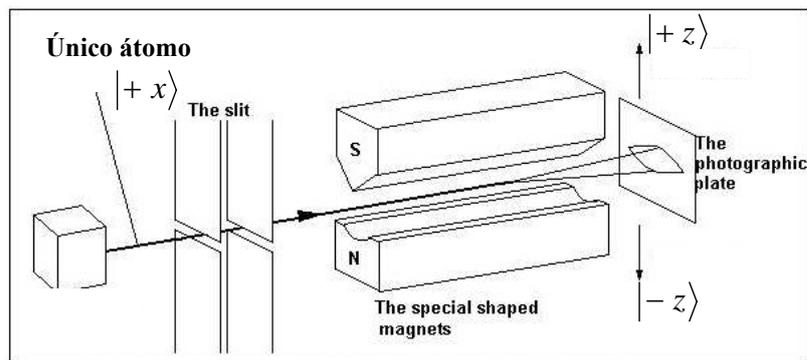
e) Sim. Porém, não podemos revelar estes valores através de uma medição. [FIM]

f) Não. Não podemos dizer que possuía simultaneamente valores bem definidos para x e p_x antes da medição. [FIM] = 5 =

QUESTÃO 3

Considere o experimento de Stern-Gerlach para um único átomo de prata, inicialmente no estado $|+x\rangle$. Após passar pelo imã, podemos representar seu estado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle.$$



Antes de medir a posição do átomo, podemos dizer que ele está *ou* com o componente de spin $+z$ na posição A, ou com componente $-z$ na posição B?

a) Sim. Após passar pelo imã, o átomo está em A (e não tem nada em B), ou está em B (e não tem nada em A). Só que ainda ignoramos onde ele está. [Vá para a página 2].

b) Não. Não podemos dizer que o átomo está em A (e não em nada em B), ou está em B (e não tem nada em A). [Vá para a página 3].

= 1 =

1) Considere o experimento de Stern-Gerlach para um único átomo de prata, inicialmente no estado $|+x\rangle$. Após passar pelo imã, podemos representar seu estado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle.$$

Antes de medir a posição do átomo, podemos dizer que ele está ou com o componente de spin $+z$ na posição A, ou com componente $-z$ na posição B?

a) Sim. Após passar pelo imã, o átomo está em A (e não tem nada em B), ou está em B (e não tem nada em A). Só que ainda ignoramos onde ele está.

3a) Devemos dizer que o átomo está em A ou em B, e que há uma onda

associada distribuída entre A e B?

c) Sim. [FIM]

d) Não. [FIM]

= 2 =

3) Considere o experimento de Stern-Gerlach para um único átomo de prata, inicialmente no estado $|+x\rangle$. Após passar pelo imã, podemos representar seu estado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle.$$

Antes de medir a posição do átomo, podemos dizer que ele está ou com o componente de spin $+z$ na posição A, ou com componente $-z$ na posição B?

b) Não. Não podemos dizer que o átomo está em A (e não em nada em B), ou está em B (e não tem nada em A).

3b) Podemos dizer que há uma onda (ou uma amplitude de probabilidade) simetricamente distribuída entre A e B, e que o átomo não está nem em A, nem em B?

c) Sim. [FIM]

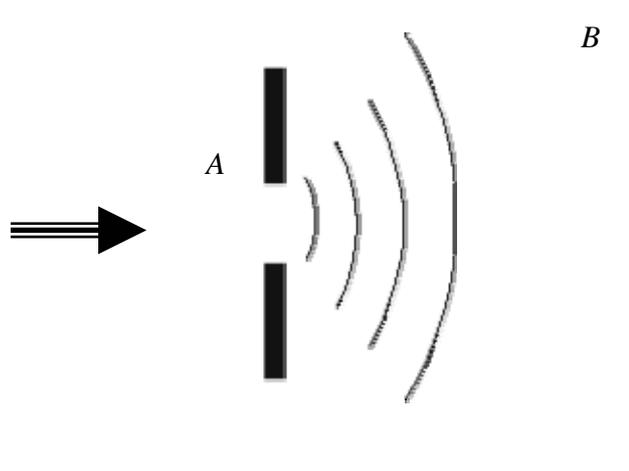
d) Não. Só podemos falar alguma coisa depois que o experimento estiver completado.

[FIM]

= 3 =

QUESTIONÁRIO III

- 1) Um elétron passa por uma fenda pontual *A*, sofrendo difração, e depois é detectado em *B*. Após a detecção em *B*, podemos dizer que o elétron seguiu a trajetória retilínea *AB*? Explique.



= 1 =

2) Considere um átomo inicialmente isolado. Medimos então sua posição com excelente resolução ($\delta x \rightarrow 0$). Levando em conta o princípio de incerteza, o que podemos dizer sobre o momento do átomo (logo após a medição)?

(Marcar **uma ou mais** das alternativas abaixo)

- (a) O átomo **tem** um momento bem definido, mas ignoramos qual é o seu valor. Este valor pode ser revelado por uma medição subsequente.
- (b) O átomo **tem** um momento bem definido, mas ignoramos qual é o seu valor. Uma medição subsequente não revela este valor porque o ato da medição altera o valor do momento.
- (c) O átomo **não tem** um valor bem definido de momento.
- (d) **Não faz sentido** falar de um valor para o momento. Só podemos falar sobre isso após uma medição de momento.
- (e) A Mecânica Quântica não faz afirmações sobre eventos individuais, apenas sobre **ensembles estatísticos**.

= 2 =

3) Um único átomo de hidrogênio é preparado no estado $\frac{\sqrt{3}}{2} |\psi_{200}\rangle + \frac{1}{2} |\psi_{210}\rangle$, onde os índices do autoestados correspondem respectivamente aos números quânticos $n = 2$, ℓ , $m_\ell = 0$. Note que a única diferença entre os autoestados corresponde ao valor do número ℓ .

(a) Se medirmos o observável cujo autovalor é ℓ , qual é a probabilidade de obtermos o valor $\ell = 0$?

(b) Suponha que de fato fizemos a medição e obtivemos o autovalor $\ell = 0$. Agora, se medíssemos novamente o mesmo observável, qual seria a probabilidade de obter o valor $\ell = 0$?