

**A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA  
EM AMBIENTES COLABORATIVO-  
INVESTIGATIVOS DE  
APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE  
CONCEITOS DE GEOMETRIA  
ANALÍTICA PLANA**

José Milton Lopes Pinheiro

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
Pós-Graduação em Educação Matemática  
Mestrado Profissional em Educação Matemática

José Milton Lopes Pinheiro

**A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM AMBIENTES COLABORATIVO-  
INVESTIGATIVOS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE CONCEITOS  
DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA**

Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Mês, 2013

José Milton Lopes Pinheiro

**A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM AMBIENTES COLABORATIVO-  
INVESTIGATIVOS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE CONCEITOS DE  
GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**Comissão Examinadora**

---

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni - UFJF

Orientador

---

Prof. Dr. Arthur B. Powell - Rutgers University

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liamara Scortegagna - UFJF

Juiz de Fora, 21 de Dezembro de 2013.

**A todo educador matemático que pensa o ensino e a aprendizagem para/com o aluno; que se coloca humilde ao meio deles para vislumbrar e compreender as possibilidades do *como* promover um ambiente onde prevaleça a harmonia do viver com o *Outro*, mediada pela intencionalidade de uma aprendizagem que não se impõe, mas, que se dá significativamente.**

## AGRADECIMENTOS

“[...] *estar-se-no-mundo-com* oferece possibilidade de eclodir o espanto da constatação de que ao indivíduo nunca é dada a possibilidade de ser tão somente ego-sujeito, mas que em sua própria subjetividade carrega o outro e o mundo, inclusive na medida em que no próprio movimento de sua constituição *outro* e *mundo* já fazem parte.”  
Bicudo

Os primeiros contatos com outras dissertações e teses sugeriram, a *priori*, a necessidade formal de se agradecer ao outro que esteve presente ou não. No entanto, agora, ao final deste estudo, torna-se evidente que a percepção da formalidade se deu pela ingenuidade de alguém que se iniciava academicamente; o agradecer não é mera formalidade, é uma necessidade íntima do eu, movida pela vontade de tornar presente aqui, aqueles que foram fundamentais para o delineamento da pesquisa em sua totalidade, esta que vai além das páginas escritas, uma vez que cada frase foi pensada para/com o outro.

Agradeço primeiramente a Deus e minha família, pelo apoio incondicional.

Ao Adlai, pelo enriquecimento do meu *eu* enquanto pesquisador e pela amizade.

Aos sujeitos desta pesquisa, responsáveis por proporcionar a rica experiência enquanto pesquisador em campo.

Aos membros da banca de Qualificação e Defesa, por auxiliarem a constituição desta pesquisa.

Ao corpo docente do mestrado, pelo enriquecimento conceitual e pelo acolhimento.

Aos amigos de mestrado, em especial à Gisele, Elias e Débora, que se mostraram verdadeiros irmãos no decorrer desta caminhada.

À Suliane, por me ouvir e dialogar quase todos os dias acerca esta pesquisa, fazendo-se assim, presente em todo percurso da mesma.

Aos amigos Nilson e Sérgio, companheiros de sempre, pelo incentivo ao estudo.

Ao Marcelo, pela oportunidade e amizade concedida ao jovem e inexperiente professor de matemática.

Ao Thiago, pela amizade que fez o novo lar um ambiente agradável e familiar.

A todos que, mesmo não citados aqui, contribuíram para o objetivo de continuar estudando e adentrar na área da Educação Matemática, esta cuja complexidade, foi, é e continuará sendo atrativo para minha atuação e empenho.

A todos, meu muito obrigado!

## RESUMO

O presente estudo pretende lançar luz à proposta de trabalho com professores de matemática no empenho sobre atividades exploratórias e investigativas, tematizadas no tratamento de temas de Geometria Analítica Plana. Utilizamos como suporte à pesquisa, a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) concebida por David Ausubel. Direcionamos olhares qualitativos aos sujeitos ao considerarmos o espaço e a temporariedade de suas experiências vividas. Fizemos convergências da TAS à Fenomenologia e utilizamos das mesmas como suporte metodológico para tratamento de todo o processo que resultou nas análises. Utilizamos das tecnologias informatizadas para subsidiar as interações presenciais e virtuais, oportunizando o dinamismo e a colaboratividade do ambiente *Virtual Math Teams with Geogebra* (VMTwG) e do *software* Geogebra. Mediante percepção e descrição dos manifestos explícitos e implícitos dos sujeitos, é colocado em crise o *que interroga nossa questão diretriz*, buscamos e estruturamos compreensões do que se mostrou nas interações. Lançamos olhares analítico-reflexivos ao todo que tínhamos e intencionamos unidades nucleares: *manifestos característicos do empenho dos sujeitos enquanto membros de um grupo colaborativo; manifestos que indicam a postura de sujeitos que exploram e investigam; aplicação de pensamentos em Geometria Dinâmica (GD) e do software de GD, e Manifestos que sugerem a presença de aspectos tais como os da Teoria da Aprendizagem Significativa*. Apoiamo-nos nestas unidades para apresentar o que entendemos serem compreensões do fenômeno interrogado que propiciam argumentos estruturados para tratamento de nossa questão diretriz.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Significativa. Aprendizagem Colaborativa. Exploração e Investigação em aulas de matemática. Geometria Dinâmica.

## ABSTRACT

The present study aims to highlight the proposal on mathematics teachers at commitment about investigative and exploratory activities, themed in the treatment of analytic geometry topics. We use as support to research, meaningful learning theory (TAS) designed by David Ausubel. We direct qualitative looks to the subject when we consider the space and the tentativeness of their experiences. We did the convergences of TAS to Phenomenology and use thereof as methodological support for treating the whole process which resulted in the analyses. We use computer technologies to support face-to-face and virtual interactions, enabling the dynamism and the colaboratividade of the environment *Virtual Math Teams with Geogebra (VMTwG)* and the *software Geogebra*. By perception and description of explicit and implicit manifests the subjects, that is placed in the crisis that interrogates our question guideline. We seek and structure the understandings that have showed the interactions. Analytical and reflective looks launched altogether, which had and plan nuclear units: characteristic manifests the subject commitment while members of a collaborative group; manifests indicating the posture of subjects that explore and investigate; application of thoughts on Dynamic Geometry (GD) and GD software, and Manifests that suggest the presence of aspects such as the theory of meaningful learning. We support these units to present what we believe to be the understandings phenomenon questioned that provide structured arguments for treating our question guideline.

Keywords: meaningful learning. Collaborative Learning. Exploitation and research in math classes. Dynamic Geometry.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Descrição</b>	<b>Pág.</b>
Figura 1	Visão clássica da aprendizagem significativa de Ausubel.....	35
Figura 2	Ocorrência da assimilação obliteradora .....	35
Figura 3	Circunferência - exemplo de Aprendizagem Significativa Representacional .....	37
Figura 4	Circunferência: exemplo de Aprendizagem Significativa de Conceitos....	37
Figura 5	Processo de aprendizagem significativa subordinada conforme teoria ausubiana .....	38
Figura 6	Esquema para a Aprendizagem Significativa Superordenada de Ausubel .....	38
Figura 7	Esquema para a Aprendizagem Significativa Combinatória de Ausubel..	39
Figura 8	Esquema para a aprendizagem mecânica conforme apontado por Ausubel .....	42
Figura 9	Tarefa Exploratória - Propriedades verdadeiras e falsas .....	51
Figura 10	Tarefa investigativa: Determinar o perfil do aluno típico da turma .....	52
Figura 11	Imagens postas para item c da questão 1 do pré-levantamento.....	73
Figura 12	Salas criadas no VMTwG.....	78
Figura 13	Sala do VMTwG – Aba do Geogebra e <i>chat</i> .....	79
Figura 14	Metodologia de uma escavação arqueológica .....	84
Figura 15	Planta do condomínio apresentado para o tratamento da Atividade Investigativa 1 .....	125

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO I

### **PERSPECTIVAS E FUNDAMENTOS QUE JUSTIFICAM A PESQUISA ..... 11**

- 1.1 Perspectivas geradoras de um perfil e de uma linha de pesquisa ..... 11
- 1.2 Princípios teóricos e indicações que apontam a relevância da pesquisa ..... 13

## CAPÍTULO II

### **O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA E A PRESENÇA DA INFORMÁTICA NAS PRÁTICAS EDUCACIONAIS ..... 18**

- 2.1 A Geometria Analítica Plana e os desafios agregados ao seu ensino ..... 18
- 2.2 Um cenário tecnológico para/com a Educação Matemática ..... 20
  - 2.2.1 O uso do computador e as implicações no contexto escolar ..... 22
  - 2.2.2 Formação docente e a Informática na Educação ..... 24
  - 2.2.3 Dificuldades e desafios provenientes da utilização das TIC nas escolas ..... 26
- 2.3 A Geometria Dinâmica (GD) e os *softwares* que a propicia ..... 28
- 2.4 O VMTwG como recurso didático e instrumento de pesquisa ..... 30

## CAPÍTULO III

### **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ..... 32**

- 3.1 A Teoria da Aprendizagem significativa ..... 32
- 3.2 Como e quando ocorre aprendizagem significativa, segundo a TAS ..... 34
- 3.3 As aprendizagens significativas ..... 37
- 3.4 Organizadores prévios e a aprendizagem significativa ..... 39
- 3.5 Aprendizagem significativa x aprendizagem mecânica/memorística ..... 41

## CAPÍTULO IV

### **APRENDIZAGEM COLABORATIVA E AS TAREFAS EXPLORATÓRIAS E INVESTIGATIVAS ..... 44**

- 4.1 Discursos e reflexões acerca da Aprendizagem Colaborativa ..... 44
  - 4.1.2 Ambientes Colaborativos de Aprendizagem ..... 47
- 4.2 Atividades exploratórias e investigativas no ensino e na aprendizagem de matemática ..... 50
- 4.3 Postura e papéis do professor no processo investigativo dos alunos ..... 54
- 4.4 Explorar e Investigar em ambientes colaborativos ..... 56
- 4.5 Tarefas exploratórias e investigativas em ambiente de geometria dinâmica ..... 57
- 4.6 Atividades de exploração e investigação em ambientes colaborativos propícios à aprendizagem significativa ..... 59

## CAPÍTULO V

### **A PESQUISA DE CAMPO ..... 61**

5.1	A metodologia qualitativa a luz da fenomenologia e a interrogação da pesquisa .....	61
5.2	Os instrumentos pensados e elaborados para a pesquisa .....	64
5.3	O campo e os sujeitos da pesquisa .....	65
5.4	A busca da preparação de uma sequência didática coerente com as teorias fundamentadoras.....	66
5.5	Refletindo aspectos significativos provenientes dos questionários.....	67
5.6	Refletindo aspectos significativos provenientes dos Pré-levantamentos.....	71
5.7	Caracterização dos cenários para as colaborações investigativas.....	76
5.7.1	O cenário para os encontros presenciais.....	77
5.7.2	O cenário para os encontros virtuais .....	78
5.8	A elaboração das atividades .....	79

## **CAPÍTULO VI**

### **APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS EMERGENTES DAS INTERAÇÕES: A BUSCA POR CONVERGÊNCIAS À LUZ DAS TEORIAS FUNDAMENTADORAS .....**

**81**

6.1	Organizando o estudo das interações vivenciadas.....	81
6.2	Primeiro segmento: O diálogo sobre temas da Educação Matemática .....	82
6.3	Segundo segmento: Apresentação e estudo das atividades trabalhadas e do empenho sobre as mesmas.....	91
6.3.1	As Cenas .....	94
6.3.2	As atividades exploratórias e as cenas provenientes da exploração-colaborativa sobre as mesmas.....	95
6.3.3	As atividades investigativas e as cenas provenientes da investigação-colaborativa sobre as mesmas .....	124
6.4	Transcendendo reflexivamente as cenas: em busca de suportes para compreensões .....	154
6.5	Um olhar analítico às unidades nucleares: em busca por desdobramentos com potenciais de desvelar o interrogado .....	157
6.6	A compreensão da interrogação ao olhar as unidades em suas correlações... ..	157

## **CAPÍTULO VII**

### **PESQUISADOR E PESQUISADOS: BUSCANDO A TRANCENDENCIA DO VIVIDO .....**

**171**

### **ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PERTINENTES A PESQUISA REALIZADA .....**

**175**

### **BIBLIOGRAFIA .....**

**180**

### **APÊNDICES .....**

**185**

**Apêndice A** - O diálogo sobre o contexto de Exploração em sala de aula.....

**185**

**Apêndice B** - O diálogo sobre o contexto de Colaboração em sala de aula .....

**187**

**Apêndice C** - O diálogo sobre o contexto de Investigação em sala de aula .....

**189**

**Apêndice D** - Questionário respondido pelos pesquisados.....

**191**

**Apêndice E** - O Pré-levantamento aplicado .....

**193**

**Apêndice F** - As atividades propostas.....

**194**

## **CAPÍTULO I**

### **PERSPECTIVAS E FUNDAMENTOS QUE JUSTIFICAM A PESQUISA**

#### **1.1 Perspectivas geradoras de um perfil e de uma linha de pesquisa a seguir**

Em julho de 2007, iniciava-se a trajetória com destino ao mestrado voltado para a Educação Matemática, o ingresso em uma licenciatura em Matemática. A princípio, na ingenuidade de pensar apenas quantitativamente, objetivava-se atingir boas notas, uma boa média curricular. No percurso, o envolvimento com disciplinas da educação, bem como os incentivos à pesquisa, fez com que objetivos mudassem, metas ampliassem, e perspectivas surgissem. O intuito passou a ser, completar a graduação com uma formação rica em três aspectos relevantes à formação de um perfil: concepções e vivências que caracterizam um bom e verdadeiro estudante, concepções que permitem a aproximação ao ser um “bom” professor, e por fim, concepções relacionadas ao ato de criticar, ao ser crítico, que é relevante a todo pesquisador.

Nas monitorias voluntárias da faculdade, percebi a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos tanto os relacionados aos conteúdos, quanto os que dizem respeito ao ensinar e ao aprender ensinando.

A oportunidade de envolvimento com teóricos do âmbito educacional veio nas aulas de Metodologia de Pesquisa, nas quais, os alunos estavam incumbidos de desenvolver um projeto de pesquisa. As leituras em prol do desenvolvimento do projeto fizeram despertar o interesse em pesquisar sobre temas relacionados às metodologias de ensino de Matemática, e logo se expandiu ao querer saber sobre outros temas advindos da Educação Matemática.

O primeiro contato com leitura e escrita científica evidenciou a importância do pesquisador para a educação, visto que, um estudo desenvolvido e relatado, pode colocar em conflito conceitos, perspectivas, paradigmas, etc. É nesse “tumultuo”, que concepções são formadas, e através delas, situações são pensadas e repensadas, dificuldades são minimizadas ou diluídas por completo. Assim, foi desvelada a vontade de pesquisar e registrar os estudos, isto se tornou significativo.

A consolidação do significado concebido foi à primeira publicação de uma pesquisa acadêmica, que ocorreu em 2009, no Encontro Mineiro de Educação Matemática (V EMEM) na Universidade Federal de Lavras (UFLA). A conquista do

certificado de apresentação e a experiência vivenciada impulsionaram e fortaleceram o interesse em continuar pesquisando. Para isso, era necessário um embasamento mais apurado sobre os mais diversos temas da Educação Matemática, estes, que seriam futuros subsídios para uma maior objetividade no pensar, no refletir e no criticar. Esta percepção direcionou a participação em eventos regionais, nacionais e internacionais, sendo que, em alguns destes, trabalhos foram aceitos para publicação e apresentação: minicursos, comunicações, relatos e pôster.

As iniciativas anteriormente mencionadas, bem como o ser aluno de uma disciplina específica da graduação, Informática na Educação Matemática propiciaram um relacionamento agradável e construtivo com temas relacionados à utilização de tecnologias para o ensino e a aprendizagem de Matemática, linha de pesquisa pela qual optei em pesquisar no mestrado. A disciplina propiciou o envolvimento com *softwares* educativos, dentre os quais, alguns de Geometria Dinâmica, como o logo, Cabri Geometre e Geogebra, o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) Moodle, dentre outros. As discussões geradas em torno da implantação, manuseio, potencialidade de ensino e de aprendizagem, utilização, metodologias agregadas a conhecimentos significativos, em fim, diversas questões, em especial, aquelas advindas de conflitos pessoais sobre os temas, perpetuaram uma afinidade, e auxiliaram na escolha da linha.

As fundações teóricas da pesquisa que segue, também são advindas da trajetória aqui descrita. A *colaboratividade* acompanhou todo o processo de formação pessoal, acadêmico e profissional. O contato com *Investigação e Exploração Matemática*, veio com leituras, estas que trouxeram lembranças de momentos investigativos anteriormente vivenciados em sala de aula. A *Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)*, a princípio, foi vivenciada durante a graduação, oportunidade esta, creditada ao professor de Geometria Analítica, que na época era aluno do Mestrado Profissional em Educação Matemática de uma universidade pública do estado de Minas Gerais. O professor trabalhava em sua dissertação com a teoria mencionada, e como ele assim dizia, quanto mais estudava, mais se identificava. Com isto, mesmo sem intenção a aplicava muitas vezes em sala de aula. Ao viver um pouco desta teoria por intermédio do professor, e ao aprofundar na mesma com leituras, acabou por ocorrer *a priori* uma aceitação, que cresceu, e que agora possibilita a utilização da mesma nesta pesquisa.

## 1.2 Princípios teóricos e indicações que apontam a relevância da pesquisa

Serão agregados nesta pesquisa, os princípios, teóricos, metodológicos e práticos de dois campos em Educação Matemática; das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e da Investigação Matemática em sala de aula. A amplitude proveniente da utilização das TIC possibilita o paralelo da mesma com outras campos e perspectivas. Aqui, será descortinada a cumplicidade e potencialidade da interação entre TIC e Investigação Matemática. Serão oportunizados momentos investigativos mediados por computador. A abertura proveniente desta interação, no que diz respeito ao acesso e envolvimento colaborativo dos alunos, evidenciam a importância da utilização destes campos para este estudo, que opta pela Geometria Analítica Plana como o conteúdo matemático que se aplicará ao contexto do mesmo.

Com o constante avanço da tecnologia, conseqüentemente, avançam também as possibilidades de utilização da mesma no ensino e na aprendizagem. Nota-se, que temas e problemas relacionados à utilização de tecnologia informatizadas na educação, são amplos e se modificam mais rapidamente do que os relacionados aos demais campos, porém é nesta área que menos se percebe um planejamento e estrutura adequada para utilização. À medida que a tecnologia se desenvolve, implicações positivas e negativas atingem o sistema educacional; geralmente os benefícios consistem nas inúmeras possibilidades que podem proporcionar a utilização da mesma, o que ocorre de negativo refere-se em parte, às dificuldades de desenvolvimento e conquista dessas possibilidades.

A Investigação Matemática trata-se de uma nova abordagem que aqui será pautada especialmente nos preceitos de Ponte (2013), que defende a concepção do aprender investigando, perspectiva esta, que embasou a criação das atividades e dos momentos investigativos presenciados e descritos neste estudo.

Entende-se aqui, que a Investigação em sala de aula surge como uma opção metodológica, que contraria alguns objetivos da criação de tantas outras metodologias. A contradição está na intenção de “facilitar” a aprendizagem com a aplicação de algumas metodologias. O método da Investigação Matemática vem com uma carga que lhe agrega “dificuldade”, devida complexidade de conduzir uma investigação e de investigar em atividades investigativas, o que é visto aqui como pontos positivos, pois, ao investigar e/ou explorar, o aluno pode se deparar com obstáculos de diversos tipos, espera-se que os mesmos ao se sentirem desafiados, participem ativamente de

processos individuais e colaborativos que necessitem de esforços direcionados a criação de conjecturas, ao raciocínio lógico, a autonomia, a criticidade, etc. Enfim, as dificuldades recorrentes de uma investigação em sala de aula, podem contribuir para a aprendizagem com maior significação de conteúdos e também de habilidades diversas. Vale frisar que, o aluno não deve estar só no seu envolvimento com atividades investigativas, pelo menos a princípio, o grau de complexidade exige a mediação moderada do professor.

A proposta deste estudo consiste na abordagem de alguns conceitos de Geometria Analítica Plana, bem como abordagens sobre o ensino e a aprendizagem da mesma. Trata-se de um assunto discutido por alguns autores na área da Matemática e da Educação Matemática, haja vista a quantidade de propostas de textos didáticos existentes. Porém, pretendemos estabelecer e fixar um olhar para o estudo, o ensino e a aprendizagem de conceitos dessa disciplina, por meio de atividades exploratórias e investigativas, aplicadas com o auxílio de ferramentas computacionais constituídas por elementos dinâmicos, construtivos, interativos e colaborativos; o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) *Virtual Math Teams with Geogebra (VMTwG)*<sup>1</sup>, e o *software* Geogebra, em prol da concepção por parte dos sujeitos de aprendizagem significativa, para que possam melhor compreender o que/como trabalhar os conceitos do conteúdo.

Vale ressaltar, que os elementos do contexto proposto acima, como: Investigação, Exploração e Colaboração, também serão apresentadas neste estudo como conhecimentos a serem aprendidos significativamente pelos sujeitos. O levantamento bibliográfico, bem como o estudo de campo emergente desta pesquisa, será relacionado e descortinado, em uma discussão mais apurada das implicações da interação entre: *software*, professor, aluno, colaboração, investigação, exploração e aprendizagem.

A denotação “aprendizagem significativa” presente constantemente nesta pesquisa deve ser entendido conforme apontado pela Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), também conhecida por teoria ausubiana, que será discutida mais adiante; “aprendizagem significativa” nada tem a ver com aprendizagens mais ou menos importantes ou com ideias cientificamente corretas. “[...] aprendizagem significativa implica atribuição pessoal de significado para as ideias que são percebidas, processadas e representadas” (LEMOS, 2011, p. 28).

---

<sup>1</sup> Ou Equipes Virtuais de Matemática com o Geogebra

A TAS caracteriza-se em especial pela valorização do ser em sua totalidade de conhecimentos, o humano que constitui significados e é constituído pelos mesmos, que na profundidade de seu viver, concebe o mundo enquanto meio social/cultural e através de movimentos e manifestações de linguagens corporais, afetivas e cognitivas compreende e assimila significativamente as mais diversas redes de saberes. Assim, a teoria sugere o desvendar dessa totalidade do ser, para mediante um processo relacional, trabalhar a concepção de novos conhecimentos, estes que ao serem constituídos pelo indivíduo, transformam o ser e perfazem uma nova totalidade, ou seja, a totalidade não é finita, o humano a enriquece a cada experiência vivida, pelo perceber das coisas que o permite tematizar, e pelo compreender das mesmas que os permite dar e constituir significado.

A teoria, a princípio pensada para a educação e constantemente ampliada para outras áreas, defende como princípio básico, a utilização do que o aluno já sabe para tratamento de novos materiais, a relação do prévio com o novo, é dita como essencial para a ocorrência da aprendizagem significativa. À medida que o novo é assimilado e compreendido pelo aluno, ele se torna juntamente com a totalidade de seu ser, relevante para aprendizagem significativa de outros significados. A teoria foi criada em contraposição ao aprendizado mecânico, que muitas vezes despreza os conhecimentos prévios, de forma a promover a inserção de novos conhecimentos sem estabelecer vínculos entre os mesmos e os já concebidos pelo indivíduo.

Ao tomar contato com o Geogebra e com o VMTwG, percebemos um grande potencial para conquistar e atrair os alunos ao ambiente de ensino e de aprendizagem proposto pelo professor, vistas as possibilidades de proporcionar aprendizagem colaborativa, em que os alunos compartilham de um mesmo ambiente, no qual possam se comunicar, fazer conjecturas, debater, constituir significados e se constituir enquanto aprendizes colaborativos. Percebemos também, o quanto o professor da escola básica está distante até mesmo da existência destes recursos e de vários outros, na maioria das vezes por falta de atualização profissional.

Ao lecionar o conteúdo de Geometria Analítica Plana, os professores costumam valorizar os procedimentos matemáticos, sem muitas vezes atentar aos conceitos que aos mesmos embasam. Constantemente percebemos a preponderância da Álgebra sobre a Geometria, o que pode caracterizar uma marginalização de importantes conceitos. No ensino do conteúdo, a partir da teoria ausubesiana é possível inferir que, negligenciar os conceitos da Geometria, bem como o pensamento geométrico que se

abre à relações, enfatizando em maior proporção os procedimentos algébricos, é tender-se a ensinar de forma mecânica. Talvez isso caracterize a grande dificuldade de alunos, tanto do ensino básico quanto do superior, em aprender Geometria Analítica Plana.

Uma proposta apoiada nos princípios da TAS, é o ensino de Geometria Analítica Plana levando em consideração os elementos da Geometria Plana. A TAS defende como princípio básico de sua formalização a valorização do que o indivíduo já sabe, dessa forma, a Geometria Plana torna-se essencialmente relevante para aprendizagem significativa de Geometria Analítica Plana. Muitas vezes, o ensino deste conteúdo, no qual se trabalha paralelamente questões algébricas e geométricas, é realmente limitado; por exemplo, alguns elementos algébricos são difíceis de representar graficamente, a mão livre ou com ferramentas auxiliares, como régua e compasso. Porém, com a utilização do *software* Geogebra, essa limitação pode ser amenizada de maneira considerável.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, procedemos inicialmente com levantamento bibliográfico, visando encontrar referências de pesquisadores com temas que vão ao encontro das propostas deste estudo, cujos trabalhos apontavam para as intuições provenientes do mesmo, porém, com outros olhares.

Trabalhamos uma pesquisa de campo com abordagem qualitativa, ministrada conforme aponta a fenomenologia. Lançamo-nos sobre os dados obtidos atentando a detalhes relacionados ao desenvolvimento, entendimento e assimilação de conhecimentos por parte dos sujeitos, na tentativa de entender como ocorre a Aprendizagem Significativa, ou não, de determinados conceitos geométricos, com a utilização do *software* VMTwG e do Geogebra.

O saber previamente os conhecimentos dos sujeitos, conforme sugerido pela TAS, segundo a fenomenologia não nos permite explicar em completitude o manifestado em determinada experiência vivida, o que nos é possível, é entender e construir um horizonte de possibilidades que oportunize diferentes interpretações, feitas por diferentes pessoas, em função do modo de ver, perceber, e de se lançar sobre o mundo de significados que se apresenta.

Um dos intuits da pesquisa de campo foi buscar manifestos dos sujeitos que se relacionavam à pergunta geradora desta pesquisa: **Como se dá o envolvimento de professores e futuros professores de Matemática, com uma proposta que intui gerar Aprendizagem Significativa de conceitos de Geometria Analítica Plana,**

### **mediada por atividades exploratórias e investigativas em um ambiente colaborativo de Geometria Dinâmica?**

Intuíamos também propiciar a utilização do VMTwG, e despertar por parte dos sujeitos, maior interesse pelo estudo da Geometria Analítica Plana; este ambiente poderia ajudá-los a ter uma melhor compreensão dos conceitos geométricos e melhor entendimento de uma representação algébrica associada a sua equivalência gráfica.

Borba e Penteado (2001) afirmam que as atividades com utilização de *softwares*, “além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação”. Desse modo, o aluno, no papel de agente de seu próprio conhecimento, por meio de testes e observações pode descobrir conceitos, facilitando a compreensão e internalização do saber apreendido.

Para oportunizar a aprendizagem significativa, o professor é de suma importância, especialmente quando esta aprendizagem é mediada por perspectivas colaborativas e tecnológicas. Um princípio desta pesquisa relacionada ao professor é a sugestão fenomenológica de “estar próximo”, mas não de forma a direcionar incisivamente as ações e o modo de pensar dos sujeitos. Outras questões relevantes da pesquisa, como metodologia de ensino, utilização de tecnologias em sala de aula, mediação de um momento colaborativo, dentre outras, estão diretamente ligados ao professor. Assim sendo, tornou-se significativo direcionar esta pesquisa aos professores e/ou futuros professores de Matemática.

Pretendemos ao fim deste texto, apresentar asserções que desvelam compreensões de nossa questão diretriz, para isto, lançamo-nos aos manifestos dos sujeitos em um primeiro processo de estruturação de um cenário de discurso, e em seguida, efetuamos processo de análise que se iniciou na intencionalidade de interpretar o vivido e buscar convergências ao que interrogamos. Concebemos após o ir e vir aos manifestos dos sujeitos e às nossas interpretações iniciais, unidade que julgamos nuclear, a compreensão do que se mostraram nas interações, tais quais: *manifestos característicos do empenho de sujeitos enquanto membros de um grupo colaborativo; manifestos que indicam a postura de sujeitos que exploram e investigam; aplicação de pensamentos em Geometria Dinâmica (GD) e do software de GD; e manifestos que sugestionam a presença de aspectos tais como os da de TAS.* Vislumbramos compreensões mediante processo de análise da individualidade de cada unidade, seguido de uma abordagem que às relacionam em uma rede de significados.

## CAPÍTULO II

### O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA E A PRESENÇA DA INFORMÁTICA NAS PRÁTICAS EDUCACIONAIS

#### 2.1 A Geometria Analítica Plana e os desafios agregados ao seu ensino

Segundo Eves (2011), a origem da Geometria Analítica foi proveniente da busca por uma correspondência entre as investigações geométricas e as algébricas, o que só ocorreu mediante desenvolvimento do simbolismo e de processos algébricos. Sobre a constituição deste campo, assim como é vista hoje, com todos os seus aspectos que obedecem ao rigor matemático, o autor opta em concordar com a maioria dos historiadores, que apontam Descartes e Fermat como principais responsáveis por sua origem. “Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados”. (EVES, 2011, p. 383).

Santos (2011, p. 50) destaca que Descartes e Fermat foram os grandes responsáveis pela transformação de muitos elementos da Geometria Plana em elementos algébricos; a reta passou a ter uma equação correspondente, assim como a circunferência; o ponto passou a ser tratado como sendo correspondente um par de números, etc. “Eles foram importantes por mostrar outra forma de pensar Matemática e contribuir para o desenvolvimento histórico do conhecimento”.

Na Geometria Analítica, Geometria e Álgebra se relacionam, uma vez que se evidencia a possibilidades de resolução de atividades em Geometria com métodos algébricos, e a resolução de atividades em Álgebra, por métodos geométricos, o que concorda e apresenta os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). Brasil (2000), apontar que, o ensino de Geometria Analítica pode partir de dois segmentos: a concepção de figuras geométricas através de equações correspondentes, e a aprendizagem de equações por intermédio da visualização de figuras geométricas. Nesse sentido, a Geometria Analítica tem a Álgebra como forte aliada, e não como uma questão insociável, sem correlações. Devida essa associação:

[...] a Geometria Analítica se constitui a um dos alicerces do currículo básico do curso de Matemática, enquanto disciplina, tanto de licenciatura quanto de bacharelado e, como não poderia deixar de ser, ela aparece no currículo da maioria dos cursos da área de ciências exatas (Engenharia, Arquitetura, Física, Ciências da Computação). Ainda, ela tem ramificações em outras disciplinas do currículo específico destes cursos, entre elas, Cálculo Diferencial e Integral,

Álgebra Linear, Análise Matemática, Fundamentos de Geometria, Geometria Euclidiana, Física e Computação Gráfica. (RICHIT, 2005, p. 41)

No que diz respeito ao ensino de Geometria Analítica, as pesquisas nessa área, segundo Richit (2005), são recentes e escassas. Sobre isso, Di Pinto (2000) aponta que os pesquisadores acadêmicos passaram a voltar seus olhares, para o ensino e a aprendizagem da mesma no início da década de 80, tais olhares foram pouco acrescidos na década seguinte.

Alguns dos aspectos abordados em pesquisas nessa área, como os apresentados por Santos (2011), são as dificuldades dos alunos com o conteúdo. Sabe-se que muitas destas, são observáveis em alunos graduandos de diversos cursos, até mesmo das Licenciaturas em Matemática. Isso se dá em muitos casos, pela “pouca ou nenhuma” ênfase dada ao conteúdo no Ensino Médio.

Pirola (2000) e Pavanelo (1993) apontam que muitos professores do Ensino Médio justificam o pouco ou nenhum tratamento desse conteúdo, pelo fato da disciplina Matemática ser muito extensa, e pelo tempo destinado à aplicação da mesma. Indagam que, no ensino superior, na Geometria Analítica enquanto disciplina curricular, a justificativa se repete para o tratamento sem tanta profundidade e abrangência de alguns de seus conteúdos, porém, um fator é acrescido; além da ementa ser considerada densa, argumenta-se sobre o grande déficit em Geometria Analítica por parte dos alunos que ingressão no curso, o que desestabiliza as programações.

Santos (2011, p. 64), baseado em sua experiência docente, ressalta que em parte, as dificuldades e desafios na concepção de conteúdos de Geometria Analítica, são provenientes de um ensino estático, muitas vezes desarticulado com a realidade e com outros conteúdos matemáticos. “Trata-se, portanto de um ensino mecanicista, que deixa de lado o raciocínio lógico e espacial, favorecendo uma incapacidade de interpretação de uma construção gráfico-geométrico-algébrico”.

Devido a estes e outros fatores, além da ocorrência de muitas reprovações nas disciplinas da área de exatas, que segundo Di Pinto (2000) consta como um dos maiores índices, algo em torno de 39%, pode ocorrer também, de mesmo após aprovados, os alunos carregarem deficiências conceituais geradoras de um possível desgosto para com a Geometria Analítica. São professores formados nestes cursos que vão para as salas de aula, lecionar para diversos alunos, levando consigo as dificuldades e barreiras com a Geometria Analítica, e às vezes, mesmo que de forma

inconsciente, transmitem sua impressão sobre o conteúdo, podendo influenciar negativamente na relação dos alunos com o conteúdo.

[...] ha de se considerar o fato de que, para uma parcela numerosa de estudantes que ingressam na universidade, nos mais diversos cursos de Ciências Exatas, dentre eles, Licenciatura em Matemática, a Geometria Analítica Plana acaba sendo uma disciplina de contato inicial com um pensamento matemático mais elaborado e, em decorrência desse processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, acaba se tornando uma fonte de grandes dificuldades. (SANTOS, 2011, p. 55)

Andrade, Silva e Guerra (2006, p. 6) ao descreverem suas experiências enquanto professores do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Pará destacaram que, ao tratarem da Geometria Analítica, perceberam que durante o ano letivo “os alunos quase na sua totalidade, inclusive aqueles que se dedicavam e tiravam boas notas, comentavam que esta era a parte mais difícil da matemática”. Os autores se mostram preocupados com esta denominação do conteúdo como sendo difícil, e evidenciam a necessidade de se fazer algo para mudar ou amenizar o sentimento dos alunos com relação ao conteúdo, pois uma expectativa prévia negativa pode ser prejudicial ao aprendizado e conseqüentemente, pode determinar a pouca ou nenhuma utilidade do conteúdo no exercer da docente.

As dificuldades provenientes do ensino e da aprendizagem em Geometria Analítica Plana são relatadas em algumas pesquisas, como a de Andrade, Silva e Guerra (2006), Di Pinto (2000) e Pavanello (1993). Nelas, Metodologias e possibilidades são apresentadas para sanar ou minimizar os problemas. As dificuldades, facilidades e possíveis soluções apresentadas nestas pesquisas, podem subsidiar a atuação dos professores em sala de aula. No entanto, percebe-se uma lacuna entre as pesquisas acadêmicas e aplicação das mesmas no ambiente escolar. Muitos estudos de grande potencial educativo, como as dissertações de Viana (2000), Correia (2011) e outras, são muitas vezes “engavetados”, leitores não se abrem à riqueza de informações provenientes dos mesmos.

## **2.2 Um cenário tecnológico para/com a Educação Matemática**

A Informática na Educação vem sendo um tema constantemente abordado em projetos e pesquisas, que evidenciam as possibilidades e desafios na utilização das TIC no ensino e na aprendizagem. “Informática na Educação é um novo domínio da ciência que em seu próprio conceito traz embutida a ideia de pluralidade, de inter-

relações e de intercâmbio crítico entre saberes e ideias desenvolvidas por diferentes pensadores” (ALMEIDA, 2000, p. 13). A amplitude do tema, ao mesmo tempo em que sugere uma gama de possibilidades para a educação, pode propiciar, em termos de pesquisa acadêmica, dificuldades para abordar, associar e justificar tais possibilidades, uma vez que, um subtema dessa área pode facilmente se subdividir em vários outros, o que representa o dinamismo proveniente do universo de estudos possíveis, ao tratar de tecnologias na educação.

Com as primeiras iniciativas voltadas para a inserção das tecnologias no âmbito escolar, paralelamente, algumas expectativas surgiam, desde as mais tímidas, como facilitar a aprendizagem de um conteúdo específico, às mais exageradas, que viam na tecnologia, um potencial revolucionário, o qual sanaria todos os problemas da educação. Não se negam as inúmeras possibilidades positivas proporcionadas pela informática inserida no contexto educacional, sua utilização, pode de fato resolver muitos problemas, amenizar outros, mas, existe um grande “abismo” que a distancia da possibilidade de resolver todos os problemas da educação. São algumas destas expectativas; o desenvolvimento de ferramentas computacionais para auxiliar didaticamente o professor, e a possível mudança na estrutura da sala de aula, tal qual conhecemos.

São muitas e variadas propostas de incorporação das TIC no ensino e na aprendizagem de matemática, diferenciam-se quanto: metodologia de aplicação, conteúdos que favorecem a aplicação, metas e objetivos a serem alcançados, etc., mas, todas concordam no que diz respeito a objetivos especiais, tais como: auxiliar a aprendizagem, e tentar superar as problemáticas que levam ao posicionamento crítico, de que o ensino e a aprendizagem de matemática trouxeram, e ainda vem trazendo resultados negativos.

Com olhares que divergem dos pensamentos negativos relacionados ao ensino e a aprendizagem de matemática, Borba e Penteadó (2010, p. 45) frisam um ponto a favor, que diz respeito à abertura que a disciplina proporciona à utilização das TIC. As novas tecnologias podem ser aplicadas às atividades que estimulam a formação de conjecturas, como as de cunho matemático, nas quais “a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes (e, muitas vezes, do próprio professor)”.

Penteadó (2000) descreve como mídias tradicionais, o lápis e o papel, que a pouco, ditavam o que/como fazer as abordagens em sala de aula. Tais mídias

possuem seus limites, estes, que são constantemente superados por mídias oriundas das tecnologias informatizadas. A autora destaca a importância da paciência e sensibilidade no que diz respeito à transição entre estas mídias, de forma a favorecer, a princípio, uma integração entre as mesmas, e posteriormente, uma expansão das possibilidades oferecidas aos estudantes, tais quais as relacionadas ao computador.

A importância do computador e das novas tecnologias para a educação está ampliada atualmente, pois num mundo globalizado e cada vez mais complexo, embora haja muito mais o que se aprender, há muito mais e melhores maneiras de se aprender, graças às novas tecnologias. (MALTEMPI, 2005, p. 5)

As TIC favorecem o enriquecimento conceitual dos alunos, à medida que, propõem trabalhar com a matemática de forma a auxiliar na concepção e desenvolvimento de conhecimentos. Elas são criadas e desenvolvidas para comprimir deficiências e dificuldades; possibilitam uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, e apresentam métodos mais simples para resolução de problemas antes resolvidos por extensivos métodos algébricos. Portanto:

[...] os professores de Matemática devem refletir sobre a sua utilização, trabalhando em pesquisas que implementem projetos nas escolas, - Design de ambientes interativos de aprendizagem colaborativa – que possam oferecer oportunidades para que os seus alunos aprendam Matemática e ao mesmo tempo, utilizem a tecnologia de forma que a Matemática, no contexto tecnológico, torna-se um caminho que possa superar as desigualdades sociais e ainda possibilitar a formação e a inserção adequada do sujeito à uma sociedade permeada pela tecnologia. (MISKULIN, 2003, p. 222)

As escolas carregam a responsabilidade de auxiliar na construção social dos alunos, de forma a prepara-los para muitas das adversidades do cotidiano. Este fato torna inevitável a utilização das TIC; no ensino e na aprendizagem, o tratamento didático e metodológico, deve condizer com a atual realidade tecnológica, as TIC podem ser utilizadas como instrumentos metodológicos alternativos, o que concorda Litwin (2005) ao inferir que, para o melhor desenvolvimento do aluno, devem-se disponibilizar ofertas variadas, das mais antigas às atuais, de forma a favorecer sem imposição, a formação que melhor se adapte as necessidades dos alunos.

### **2.2.1 O uso do computador e as implicações no contexto escolar**

Segundo Almeida (2000), por um longo período, as inovações de âmbito educacional foram concebidas por grupos de especialistas. Conforme a autora, nesse intervalo, as novas ferramentas ou metodologias, eram impostas, ou seja, questionamentos sobre a utilização, especificidades e possíveis mudanças na estrutura

escolar, não eram feitos. Em decorrência disso, um recurso inovador, poderia ser tratado, como apenas mais um recurso, a ser utilizado, e posteriormente, arquivado.

Penteado (2000, p. 24), ao tratar das implicações da utilização de Tecnologias Informáticas (TI) no contexto escolar, aponta a necessidade de mudanças e adaptações na organização da escola, e especialmente na forma de trabalho dos professores.

Quanto à escola, é necessário ajustar e/ou eliminar práticas ou regras já existentes e concentrar esforços na criação de situações novas. Estão em jogo as normas institucionais, o currículo, a relação com os alunos, com pais e professores. Quanto ao professor, as mudanças envolvem desde questões operacionais – a organização do espaço físico e a integração do velho com o novo – até questões epistemológicas, como a produção de novos significados, para o conteúdo a ser ensinado.

Ao argumentar sobre a inclusão da informática, e ao sintetizar o papel da mesma nas escolas, Valente (1999) aponta que a informática deverá assumir perante a escola dois papéis; um deles que intui facilitar a comunicação entre os profissionais do contexto escolar, e o outro que visa contribuir para a formação dos alunos, no que diz respeito à aprendizagem de conteúdos e habilidades.

Gravina e Santarosa (1999, p. 81) destacam a importância da utilização de tecnologias para aprendizagem dos alunos, pois elas “procuram oferecer recursos que viabilizam as ações mentais; são recursos que podem ajudá-los na superação de obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem da Matemática”. Valente (1999), ao levantar e analisar os diferentes usos do computador na educação, bem como as implicações e relevância desse uso, destaca que a análise feita:

[...] permite concluir dois resultados importantes. Primeiro, que o computador pode tanto passar informações ao aprendiz quanto auxiliar o processo de construção do conhecimento e de compreensão do que fazemos. Segundo, que implantar computadores nas escolas sem o devido preparo de professores e da comunidade escolar não trará os benefícios que esperamos. (VALENTE, 1999, p. 83)

Quando o autor cita o computador como meio que *passa* informações aos alunos, se refere a *softwares* expositivos, como os tutoriais, multimídias e processadores de textos, nos quais um conteúdo pode ser posto, descrito de forma definitiva, organizada de forma agradável para melhor visualização e leitura dos alunos.

A qualidade da aprendizagem e os processos de comunicação e interação, que são essenciais para aprender e ensinar depende em maior escala de professores, coordenadores, alunos, ou seja, das pessoas envolvidas no processo, do que das ferramentas ou metodologias de ensino. O que confirma Litwin (2005), ao enfatizar que,

o contato e as práticas com novas tecnologias, possibilitam novos meios e maneiras, antes impensadas, para promover aprendizagem, no entanto, não basta a existências de tantas possibilidades, se das mesmas, não forem extraídas todas as qualidades, estas, que dependem de uma boa pedagogia, do bom estado do novo material e da ética profissional, que é fundamental para uma utilização coerente do material.

A tecnologia ocupa um espaço realmente importante, não como forte perspectiva que acabará com as problemáticas da educação, mas sim como uma ferramenta de grande potencial auxiliador, que pode contribuir para resolução de muitos conflitos.

### **2.2.2 Formação docente e a Informática na Educação**

A informática educacional consiste acima de tudo, em uma ferramenta pedagógica, cuja principal função é auxiliar o professor no desenvolvimento de conteúdos e habilidades. Portanto, nos cursos de formação de professores, as abordagens sobre as TIC devem ultrapassar a simples apresentação e manuseio de alguns *softwares*, jogos, mídias informatizadas, etc. Para o profissional Professor, a “pedagogia das coisas”, é essencial, o “como utilizar?”, “por que e para que utilizar?”, são perguntas que devem ser respondidas e esclarecidas, ao se apresentar e introduzir uma ferramenta tecnológica, assim como devem ser evidenciados os objetivos de tais ferramentas, e as metodologias possíveis para alcança-los.

A formação na área de informática educativa é mais do que simplesmente proporcionar aos professores o contato com a tecnologia. É preciso que esta seja explorada no contexto de atuação docente. Se considerarmos um professor de matemática, é preciso que eles conheçam softwares a serem utilizados no ensino de diferentes tópicos e seja capaz de reorganizar a sequência de conteúdos e metodologias apropriadas para o trabalho com a tecnologia informática em uso. (PENTEADO, 2000, p. 24)

Contrapondo o que diz Penteado (2000), o que percebe-se é uma formação direcionada a apresentação e simples exploração de alguns *softwares*; pouco se preocupa com o tratamento dos desafios e da potencialidades dos mesmos. É marginalizado o contexto pedagógico, que favorece o gerenciamento metodológico para utilização do *software*. O treinamento em alguns *softwares*, sem um delineamento pedagógico, não prepara o professor para utilização dos mesmos, pelo contrario, apenas ameniza o sentimento de “não saber”.

Para tratamento de tecnologias, bem como as abordagens condizentes com a utilização das mesmas, as universidades, ou criam uma disciplina específica para

determinado curso, ou o que é mais comum, criam um tema que é inserido em uma disciplina mais abrangente, no segundo caso, a falta de aprofundamento é presente, o que o torna menos eficaz.

A preocupação com a formação de professores é uma constante nas universidades que desenvolvem trabalhos relacionados ao uso de computador em Educação. O desenvolvimento de atividades de formação se faz por caminhos diferentes, que variam desde a criação de disciplinas específicas que tentam integrar Informática à Educação até a realização de cursos de pós-graduação. (ALMEIDA, 2000, p. 56)

Mesmo com um movimento universitário, que visa o melhor tratamento da informática em âmbito educacional, questões ainda estão pendentes, como: qual o perfil acadêmico e pessoal do professor, que será responsável por ministrar as aulas em disciplinas ou temas voltados para o ensino e a aprendizagem, sob a mediação de instrumentos tecnológicos? O que se pode definir, é que essa pergunta, e outras cabíveis, ainda não foram respondidas.

Nesse cenário, ressalta-se a necessidade de investigação para caracterizar um novo educador. Essas investigações perpassam por um redimensionamento na concepção dos cursos de formação de professores, concepção essa que deve assumir dimensões que transcendem uma formação tradicional, a qual prioriza a técnica de ensino, em detrimento de uma reflexão consciente e crítica sobre a utilização da tecnologia no processo educativo. (MISKULIN, 2003, p. 221)

Com isso, é necessário nos cursos de formação de professores, o incentivo à “leitura” das TIC de forma mais aprofundada, isso, não só apenas nos momentos coletivos ou individuais em sala, mas também em momentos extraclasse. O professor deve ser autônomo, ser um professor-pesquisador, que se preocupa com uma utilização das TIC, que realmente condiz com as necessidades da educação. “Os vários anos de prática e pesquisa nesta área indicam que o potencial da tecnologia informática para o ensino na escola será pouco utilizado se o professor não for estimulado a atuar nesse cenário de mudanças constantes.”(PENTEADO, 2000, p. 23).

Os estudos feitos por um professor-pesquisador, o respalda para identificar e criticar problemas e limitações, assim como vislumbrar os potenciais de cada tecnologia a ser ou não utilizada em sala de aula. Como consequência de formar um professor crítico, sensível às mudanças no contexto escolar e que se sujeite a sempre pesquisar, é formar um professor que negue sua prática como sendo a melhor, que constantemente, se propõe a pensar e repensar seus meios e formas de ensinar, enfim, forma-se um professor crítico-reflexivo.

### **2.2.3 Dificuldades e desafios provenientes da utilização das TIC nas escolas**

Na adesão e utilização de tecnologias em sala de aula, para os leigos, torna-se explícito apenas os inúmeros benefícios, as possibilidades do desenvolvimento tanto da estrutura escolar, quanto do conhecimento dos estudantes: laboratórios de informática, salas com data show, disciplinas à distância, conexão à internet em rede, *tablets*, acesso a *softwares* educativos, etc. No entanto, para tratamento destas possibilidades, apresentam-se muitos desafios. Devem ser pautados fatores como: afetividade, incertezas e inseguranças relacionadas ao medo do errar, o julgamento institucional e social sofrido pelos professores não familiarizados com tantas inovações.

Embora com os inúmeros benefícios proporcionados pela informática, Borba e Penteado (2010) apontam algumas considerações que se mostram como dificuldades, mas não empecilhos, para implantação da informática nas escolas: a exigência de um suporte técnico, e a dificuldade de muitos professores em trabalhar com computadores, o que os leva a utilizá-lo como armazenador de informações sequenciadas, que serão transmitidas para os alunos. Assim, o computador é utilizado conforme o idealizado por Skinner (1972), uma *maquina de ensinar*, que pode atrapalhar a relação professor-aluno, bem como, toda uma dinâmica de sala de aula.

Com relação à aquisição de computadores pelas escolas, Bairral e Abreu (2009) destacam que existem desafios, alguns relacionados ao custo, como: a compra de computadores, a assinatura com empresas responsáveis por *softwares*, a manutenção dos equipamentos, cursos de treinamento, etc. Outros desafios apontados pelos autores são relacionados à parte operacional: o manuseio, o planejamento didático vinculado ao equipamento, o acesso às conexões de banda larga, etc.

Além disso, Penteado (2000, p. 30) destaca a falta de tempo destinado à preparação, por parte do professor, das aulas mediadas por computador. Nesse caso, não só o professor com dificuldades, mas também os que possuem certo domínio precisam deste tempo. Os autores indagam que este tempo não dado ao professor pode ir “levando-o a desistir do uso da informática.”, porém, frisam que a utilização do computador não implica na redução da carga de trabalho do professor, em muitos casos pode até ampliá-la, uma vez que o planejamento de uma aula mediada por computador exige plena noção e organização do espaço e tempo em sala de aula para adaptar as pretensões. No entanto, o computador pode agilizar processos mecânicos, como a redação de textos, “elaboração de gráficos, banco de dados e desenhos”.

A disponibilidade e acessibilidade proposta pela informática, em especial a internet, implica também, em problemas. Como tais, Litwin (2005) aponta a quantidade de informações e a acessibilidade às mesmas, ao destacar que; se não houver critérios para seleção de informações mais pertinentes, os alunos podem envolver-se e deslumbrarem-se com informações que os deixariam distantes dos objetivos da aula. “A disponibilidade do equipamento e a possibilidade de conexão à rede são importantes, mas devemos prestar atenção na capacidade do usuário para utilizar o equipamento e a rede de forma social significativa” (BAIRRAL; ABREU, 2009, p. 155).

Litwin (2005) destaca também, incoerências na utilização das TIC, cita: os vídeos, que contém exatamente o que o professor acaba de dizer oralmente, fóruns de discussão em turmas presenciais, a imposição de ferramentas computacionais, sem um embasamento pedagógico coerente com a disciplina ou conteúdo.

Conforme Borba e Penteado (2010), as tecnologias em hipótese alguma, tende a substituir o professor em sala de aula, pelo contrario, a utilização destas, coloca o professor como peça fundamental. Não há como cogitar a utilização de informática em sala de aula sem a presença do professor para mediar. Os autores apontam que o professor ao assumir esse papel de destaque, deve encontrar melhores maneiras de gerenciar as mudanças, em especial as que colocam em crise suas convicções mais profundas, até então intactas e imunes às implicações das mudanças externas.

Os termos, *zona de conforto*, “a dimensão da prática docente em que estão presentes a previsibilidade e o controle” e *zona de risco* “um movimento em direção a situações imprevisíveis e com alto nível de surpresa” (PENTEADO, 2000, p. 32), caracterizam e justificam as atitudes de recusa ou indiferença aos meios tecnológicos, por parte de professores, alunos e outros membros no âmbito escolar. Todo processo de readaptação possui suas complicações, sejam elas simples ou complexas, para inovar, é necessário mudar, e nem sempre, mudar agrada a todos, uma vez que propõe que saiam de uma posição confortável, agradável, tranquila, para uma posição de risco, que pode gerar mais trabalho, dificuldades e exposição de limitações.

Perante uma necessidade de mudança, o melhor a ser feito é trabalhar de maneira colaborativa para uma adaptação mais branda. Os professores devem ter um posicionamento encorajador, criticar a si mesmos, pensar e repensar suas práticas, enfrentar os conflitos, para com isso, descobrirem a potencialidade do aprender e reaprender com estudos, tentativas, acertos e erros.

### 2.3 A Geometria Dinâmica (GD) e os *softwares* que a propicia

Silva e Penteado (2009) entendem por Geometria Dinâmica (GD), àquela que permite construir e explorar uma figura geométrica na tela de um computador através do movimento da mesma. Ela se dá em um ambiente dinâmico e interativo, o qual dispõe da possibilidade de manuseio de objetos das figuras para experimentar, visualizar, interpretar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar, validar e, conseqüentemente, conceber conhecimentos mediante implicações dessas ações.

A ampliação dos recursos disponíveis no *hardware* dos computadores, a velocidade de processamento de dados e a capacidade de armazenamento de informações, proporcionou um avanço na criação e aperfeiçoamento de *softwares* matemáticos, em especial os direcionados à Geometria, tais quais: o Cabri Geometre, Geometer's Sketchpad, Regua e Compasso, Cinderela, Geogebra. Vistas problemáticas no ensino e na aprendizagem de Geometria, estes *softwares* podem auxiliar o professor na mediação do aprendizado, uma vez que os mesmos possuem características básicas estimulantes, como o dinamismo e a interatividade.

Dentre os recursos mais interessantes e essenciais para *softwares* de GD, Alves e Soares (2003), destacam o "arrastar". Com a utilização do *mouse*, basta clicar sobre o um objeto pertencente à figura, e movimentá-lo. Inforsato et al. (2009, p. 4) credita a esta possibilidade a justificativa do nome *Software* de GD, pois o recurso de possibilitar a transformação contínua, em tempo real, ocasionada pelo "arrastar" do *mouse* que diferencia tais *softwares* dos demais *softwares* de geometria. As figuras construídas no *software*, mesmo após arrasto de seus objetos, preservam suas propriedades geradoras, pois construir consiste em transferir propriedades matemáticas para o papel, ou no caso, para o *software*.

A manipulação desse recurso permite aos alunos estabelecer e promover ações em função de alcançar objetivos, tais ações podem ser procedidas sem tanta interferência do professor. Considerações podem ser feitas ao abrir-se à percepção de invariantes em determinados movimentos deferidos. "As características de interface de alguns *softwares* de geometria dinâmica supõem que o aprendiz pode assumir o controle das representações e construções executadas, pois, é ele quem executa cada uma das etapas de uma determinada construção geométrica." (RICHIT, 2005, p. 45).

Richit (2005) constata a importância do componente visual destes *softwares*, e defende a utilização de tecnologias para auxiliar na ampliação conceitual e no

desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Com a utilização de um *software* de GD “estaremos colocando à disposição da aprendizagem dos alunos como facilitadores: a visualização de elementos algébricos, geométricos, a manipulação desses elementos, as relações e propriedades entre a Álgebra e a Geometria.” (SANTOS, 2011, p. 61) o que permite uma base importante para aprendizagem das propriedades das figuras, uma vez que as mesmas tornam-se menos abstratas.

Com as figuras expressas na tela do *software*, é possível a princípio, prever algumas propriedades, e com o arrastar de alguns objetos das mesmas, é possível confirmar ou descartar tais previsões. A confirmação das intuições poder ser feitas ao arrastar determinado(s) objetos e observar invariâncias na figura, o que segundo Alves e Soares (2003, p.285), permite que o aluno refine suas crenças e convicções, “faça conjecturas e caminhe no sentido de realizar provas de resultados geométricos, unindo os aspectos intuitivo e lógico, fundamentais para a aprendizagem da geometria”.

A possibilidade de mostrar, visualizar e mover favorece a observação de objetos e conceitos que eram difíceis ou inviáveis de serem observados na lousa ou no papel. A questão do visualizar torna-se muito importante para o ensino da Geometria. “Em educação matemática, visualizar é formar ou conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante os olhos” (ALVES; SOARES, 2003, p. 278).

Ao envolver-se em uma atividade no *software de GD*, o aluno está sujeito a conceber conhecimentos que vão além das concepções escolares. Santos (2011, p. 65) acredita que na interação com figuras e ferramentas no *software* de GD, o aluno pode “desenvolver sua potencialidade quanto à argumentação, compreensão, elaboração de críticas ou propostas e acima de tudo de desenvolvimento de uma atitude de permanente aprendizado”. Em GD, o mover de um objeto não se limita apenas à ação de arrastar, o aluno crítico, deve querer saber o porquê daquele movimento e quais as implicações do mesmo sobre a figura.

Portanto, torna-se necessário que o professor de matemática, esteja preparado o suficiente para utilizar esta ferramenta, e aproveitar ao máximo de seu potencial para o ensino e a aprendizagem. O professor deve dar liberdade aos alunos no ambiente, deixar com que se familiarizem com suas ferramentas e com as correlações das mesmas, para que o acaso aconteça, este que pode ser gerador de manifestações que ao serem lapidadas pelo professor, pode contribuir significativamente para a formação conceitual e pessoal dos alunos. No entanto, dar tal liberdade não descarta a presença e mediação do professor, e para mediar, é preciso conhecer.

## 2.4 VMTwG como recurso didático e instrumento de pesquisa

Conforme Gomes et. al (2013, p. 163), o Virtual Math Teams (VMT)<sup>2</sup> é fruto do financiamento da National Science Foundation nos EUA. O ambiente, disponibilizado ao público para acesso *online*, consiste em um projeto emergente da “colaboração de pesquisadores da Drexel University e do Math Forum.”, que se expande com iniciativas de pesquisadores do mundo todo, incluindo os filiados a “Carnegie Mellon University, a Rutgers University, a University of Hawaii, a Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro no Brasil, além de escolas de Cingapura e Romênia”.

A aprendizagem colaborativa em AVAs e o estudo significativo de como se dá essa aprendizagem são focos principais do VMT, ambiente este que, para Powell (2013), é propício ao engajamento de pequenos grupos de sujeitos, no tratamento de problemas matemáticos, intuindo a concepção de aprendizagem por meios colaborativos. “O principal objetivo do VMT é estimular e promover a reunião de pequenos grupos de alunos, professores e pesquisadores para que possam discutir matemática em um ambiente virtual *on-line*.” (GOMES et. al, 2013, p. 163).

A interação no VMT se dá em salas previamente criadas, nas quais o principal veículo de comunicação é o *chat*, outro meio de se expressar, é o quadro branco, uma vez que neles pode-se inserir um discurso mais articulado sobre a interação ocorrida no *chat*. O’Hara (2010) ao discutir sobre o envolvimento de membros de um grupo em ambiente virtual, indaga que os sujeitos neste contexto, tornam-se impossibilitados de utilizar de comunicação oral, tendo que empenhar em se fazer entender escrevendo no *chat* suas reações, inferências e questões.

O projeto VMT é constituído por ideias e intenções já amadurecidas e outras em processo de amadurecimento, no entanto, existe um empenho em fazer com que tais ideias sejam concretizadas. Uma destas, já aplicada, é o acoplamento do *software* Geogebra ao ambiente, tal união é denominada Virtual Math Teams with Geogebra (VMTwG)<sup>3</sup>. O agregar da GD, possibilita ao VMT outros meios de comunicação, o que pode ser significativo quando o *chat* não for suficientemente esclarecedor; trata-se das figuras, que podem ser movidas por um sujeito na tentativa de mostrar graficamente o que descreveu no *chat*. Isso se dá pela possibilidade da sincronia de visualização; todos veem o mesmo movimento, todos podem perceber relações, conjecturar e

---

<sup>2</sup> Ou Equipes Virtuais de Matemática. Disponível em <http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/>

discutir o que, em comum foi visto. Esta percepção pode ser confirmada no estudo de Dicker et al (2013), no qual, aponta que pequenas equipes interagindo no ambiente, ao utilizarem do Geogebra para criar figuras, contribuem para o desenvolvimento do discurso, uma vez que novas reflexões e indagações podem surgir a partir delas.

O'Hara (2010) aponta a eminência de estudos relacionados a: como grupos de alunos constituem relações no ambiente e a como eles se constituem como aprendizes colaborativos. Tais estudos podem ser fontes de reflexões potencialmente geradoras de novas perspectivas, estas que podem quebrar paradigmas, como exemplo; as indicações de manifestos, que sugerem a possibilidade de aprender com as dificuldades e facilidades do outro contraria a concepção de que só o professor ensina.

Destaca-se no VMT, o sistema de armazenamento de dados, os registos são salvos de forma a permitir o ir e vir no tempo e espaço vividos pelos aprendizes. Para coleta e análise destes dados, o VMT disponibiliza o aplicativo *Replayer*, utilizado na pesquisa de Powell e Lai (2009) e em outras como a de O'Hara (2010). O aplicativo permite o retrospecto da interação feita em determinada seção; este que pode ser visto em tempos manipuláveis, podendo ser conforme O'Hara (2010), mais rápido, mais lento e até mesmo no tempo real de interação. Tomando como exemplo o VMTwG, o aplicativo possibilita a visualização simultânea do diálogo no *chat* e dos movimentos feitos no Geogebra, muitas vezes instantaneamente ligados à uma fala.

Powell e Lai (2009) destacam que os desafios e metodologias provenientes deste ambiente, são oportunidades de se investigar as relações dos sujeitos e as implicações das mesmas no desenvolvimento de linhas de raciocínio. O VMT apresenta-se como importante ferramenta educacional, tanto para o meio profissional quanto para o acadêmico, mostra-se com objetivos e funções que vão além do facilitar a aprendizagem matemática; este ambiente está propício ao aprender significativamente, ou seja, a transformar o sujeito, uma vez que o conhecimento concebido de forma significativa nunca lhe será tirado, e ele nunca será o mesmo.

A estrutura do projeto VMT permite pensar importantes contribuições mediante sua utilização para a democratização do ensino, uma vez que a opção do estudo virtual pode levar aprendizagem a pessoas que geograficamente estão distantes de escolas e conseqüentemente de uma formação escolar. Os meios de comunicação do VMT potencializam a interação virtual, com isto, a distância física de fato pode persistir, porém, considerando a dimensão e possibilidades dadas virtualmente, os alunos ali inseridos, ocupam um mesmo espaço e se “esbarram” em vários momentos.

## CAPÍTULO III

### APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

#### 3.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa

A Teoria da Aprendizagem significativa (TAS), desenvolvida por David Ausubel, aborda a aprendizagem segundo o cognitivismo, que conforme Moreira e Masini (2007, p.12-13), enfatizam os processos de compreensão, assimilação, transformação, internalização, ações como: “ver, ouvir, cheirar, assim como lembrar” e as implicações destes, nas tomadas de decisões dos indivíduos de forma ativa e consciente. Consideram “a ação do indivíduo dirigida para algum fim; estuda, pois, a ação a partir do ato, ou seja, o que significa a ação para o agente que a pratica. Estuda as ações do indivíduo a partir da tomada de consciência que ele tem de sua ação”.

Cognição é o processo através do qual o mundo de significados tem origem, a medida que o ser se situa no mundo, estabelece relações de significação, isto é, atribui significados a realidade em que se encontra. Esses significados não são entidades estáticas, mas pontos de partida para atribuição de outros significados. (MOREIRA; MASINI, 2007, p. 13)

Assim, a aprendizagem do ponto de vista cognitivista é constante; um novo conceito, compreendido e assimilado pelo indivíduo, torna-se juntamente com outros anteriormente apreendidos, referências para a aprendizagem de novos significados. Tal conceito direciona-se a uma rede de conhecimentos, chamada pelos cognitivistas de Estrutura Cognitiva, que segundo Ausubel (apud MOREIRA e MASINI, 2007, p. 14) entende-se como “conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos”. Uma estrutura repleta de significados apreendidos no decorrer da existência do ser, que podem constantemente ser associados e organizados mediante necessidade de compreensão de novos significados.

Segundo Masini (2011, p. 17), Ausubel, em sua vivência escolar e acadêmica, constatou a ausência de condições que colaborassem para seu próprio desenvolvimento e aprendizagem, o que lhe causava insatisfação, pois essa carência implicava muitas vezes na dificuldade de compreender e assimilar novos conhecimentos. Partindo dessa inquietação, pautado em sua formação e experiências profissionais como psicólogo; Ausubel passou a atentar ao que diz o outro, de forma singular e individual, para com isso desenvolver a TAS, tendo como linhas centrais:

“fazer da escola o local para uso da capacidade de compreender e atribuir significado; focalizar a relevância do processo relacional na aquisição de conhecimentos”, ou seja, busca a concepção da escola, enquanto local no qual os alunos aprendam significativamente mediante relação entre o que já sabem, e o que estão por aprender.

Significado, segundo Ausubel, é, pois, um produto “fenomenológico” do processo de aprendizagem, no qual o significado potencial, inerente aos símbolos, converte-se em conteúdo cognitivo, diferenciado para um determinado indivíduo. O significado potencial converte-se em significado “fenomenológico”, quando um indivíduo empregando um determinado padrão de aprendizagem, incorpora um símbolo que é potencialmente significativo em sua estrutura cognitiva. (MOREIRA; MASINI, 2007, p. 14)

Entende-se, aqui, “fenomenológico” como a característica do significado enquanto produzido por alguém, e não estanque do movimento de sua produção.

O intuito de Ausubel é contrapor a denominada por ele, aprendizagem mecânica ou “memorística”, que condiz com um “processo arbitrário” de aprendizagem, caracterizado pela imposição de conceitos desconhecidos a sujeitos com estrutura cognitiva despreparada epistemologicamente para aprender significativamente os mesmos, ou seja, sem conhecimentos prévios que facilitem o aprendizado. Desta forma, pode ocorrer a pouca ou nenhuma produção de significado pelo aluno. Já a TAS é caracterizada pelo aprendizado que não é arbitrário, mas sim, agradável, volúvel e humano, e tem como principal objetivo, permitir que o aluno aprenda com significação.

Em 1963, na minha obra *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*, procedeu-se a uma [...] tentativa de apresentar uma teoria cognitiva de aprendizagem significativa em oposição a uma aprendizagem verbal por memorização. Baseava-se na proposição de que a aquisição e a retenção de conhecimento (particularmente de conhecimentos verbais, tal como, por exemplo, na escola ou na aprendizagem de matérias) são produto de um processo activo, integrador entre o material de instrução (matérias) e as ideias relevantes da estrutura cognitiva do aprendiz, com as quais as novas ideias estão relacionadas de formas particulares. (AUSUBEL, 2001, prefácio)

Segundo Ausubel (2001), o fator mais importante que interfere na aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. Os saberes prévios são denominados pela teoria de *subsunçores*; conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, que se fazem relevantes para a aprendizagem do novo. É mediante interação cognitiva espontânea entre um conhecimento novo, e os subsunçores, que a aprendizagem significativa se manifesta. Nessa perspectiva, o ensino deve ser direcionado a permitir que o aluno utilize o que já sabe para compreender e assimilar novos significados.

Note-se que para Ausubel, o conhecimento é significativo por definição, resultando de um processo psicológico que envolve a interacção entre ideias culturalmente significativas, já “ancoradas” na estrutura cognitiva particular de cada aprendiz e o seu próprio mecanismo mental para aprender de forma significativa (TEODORO, 2001, prefácio)

A interação dos múltiplos conhecimentos que envolvem a aprendizagem de novos significados depende do “mecanismo mental”, que é responsável por integrar as diferentes informações, a ponto de possibilitar com que o indivíduo, compreenda e assimile novas informações. O fato de nem todos aprenderem com as mesmas coisas, e nem da mesma forma, é devido à capacidade integrativa desse mecanismo, que variam de indivíduo para indivíduo (CORDEIRO et al., 2006, p. 261).

Possibilitar que os alunos aprendam significativamente é dar voz aos mesmos, escutá-los cuidadosamente, permitindo-lhes que sejam ativos durante seus respectivos processos de amadurecimento cognitivo, deixar com que percebam e compreendam as intrínsecas relações entre as coisas que os cercam no mundo, para que possam posteriormente, ou simultaneamente, relacionarem-nas com o que sabem *a priori*, de forma a constituírem significados e por eles serem constituídos.

### **3.2 Como e quando ocorre aprendizagem significativa, segundo a TAS**

O que constitui e alicerça a TAS de Ausubel é um *processo relacional* que envolve um conhecimento novo e um já apreendido, que se mostra relevante para aprendizagem desse novo saber. Os conhecimentos prévios, ou subsunçores, funcionam como pontes para o aprendizado de um novo conhecimento, a interação entre estes, provoca modificações cognitivas; ambos se modificam.

Entretanto, essa experiência cognitiva não se restringe à influência direta dos conhecimentos já aprendidos sobre a nova aprendizagem, mas pode também abranger modificações significativas na estrutura cognitiva preexistente. Há, pois, um processo de interação, através do qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com a nova informação funcionando como “âncoradouro”, ou seja, assimilando o novo material e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem. (MOREIRA, 2008, p. 23)

Conforme a TAS, todo conhecimento assimilado pode tornar-se subsunçor para aprendizagem de novos conceitos. Com o passar do tempo, um material compreendido e assimilado de forma significativa, pode sofrer alterações, devido a influências externas e internas que provocam o fenômeno do esquecimento, tal processo é chamado por Ausubel (1980) de *assimilação obliteradora*. O material assimilado significativamente não retroage ao ponto de igualar-se ao primeiro subsunçor a ele aplicado, mas, torna-se um novo subsunçor mais abrangente.

As figuras abaixo esquematizam a ocorrência da assimilação e da assimilação obliteradora, conforme entendimento de David Ausubel. Nelas, fica evidente que, um

conhecimento novo não se torna um fator isolado ou autossuficiente, mas sim, modifica-se e influencia a aprendizagem significativa de novos conceitos. Os símbolos,  $a$ ,  $a'$ ,  $A$ ,  $A'$  e  $a'A'$ , foram escolhidos por Ausubel (1980) para ilustrar a assimilação.

### Assimilação ausubesiana

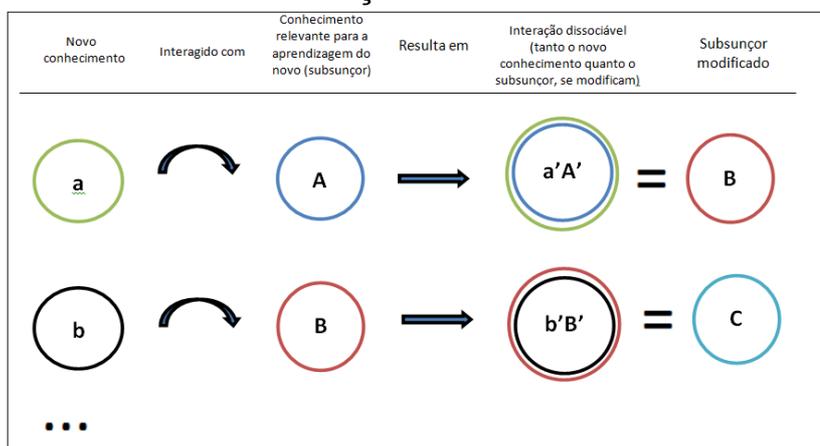


Figura 1. Visão clássica da aprendizagem significativa de Ausubel  
Fonte: o autor.

### Assimilação obliteradora

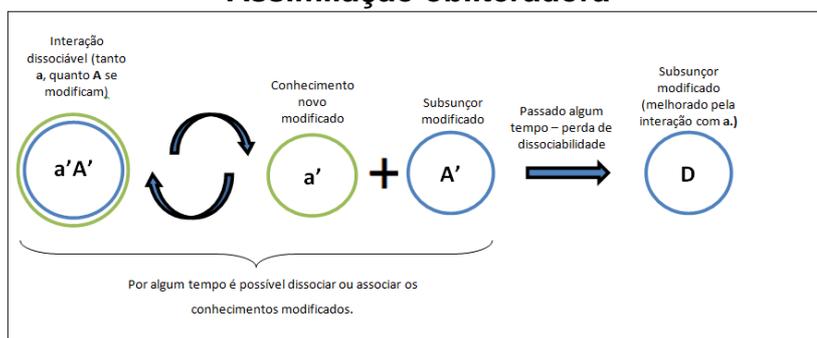


Figura 2. Ocorrência da assimilação obliteradora  
Fonte: o autor

Para melhor esclarecimento e entendimento do exposto nas figuras representativas da assimilação ausubesiana, apresenta-se abaixo, um exemplo prático da aprendizagem significativa do conceito de perpendicularismo entre retas.

*A noção de retas perpendiculares, apresentada na Geometria Plana como um caso particular de concorrência de retas torna-se subsunçor relevante para a aprendizagem do perpendicularismo de retas na Geometria Analítica Plana.*

- *Subsunçor (A): As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares quando se intersectarem em um único ponto, sendo que o ângulo formado entre elas é de  $90^\circ$ .*
- *Conhecimento novo potencialmente significativo (a): As retas  $r$  de equação  $y = m_1x+b$  e  $s$ ,  $y = m_2x+d$ , são perpendiculares se, e somente se o produto dos coeficientes angulares,  $m_1$  e  $m_2$  resulte em  $-1$ , ou seja,  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ .*

*Na interação aqui sugerida, mas pouco explorada, de  $a$  com  $A$ , ambos se desenvolvem,  $A$  torna-se mais consistente, pois é acrescido por  $a$  em termos de complexidade e,  $a$  também se modifica, uma*

vez que **A** fornece um significado simbólico relevante para o mesmo. Assim, o produto da interação de **a** com **A** é **a'A'**, um conhecimento significativo, que consiste no tratamento de duas retas perpendiculares como sendo simbolicamente representadas por uma intersecção e um ângulo reto, sendo que as mesmas possuem suas respectivas equações e coeficientes angulares que, ao serem multiplicados, resultam em -1.

Com o passar do tempo, **a'** e **A'** não voltam a ser **a** e **A**, mas **a'A'** pode ser dissociado em **a' + A'**, ou seja, ainda pode-se a pensar as definições separadamente, porém não da mesma forma que anteriormente eram pensadas, pois ambas se modificaram. Ausubel chama de assimilação obliteradora a associação seguida da perda de algumas informações de ambos os conhecimentos, **a'** e **A'**, ocasionando **D**, o que torna não mais possível a dissociação. Restando assim, apenas uma noção mais apurada de retas perpendiculares. **D** passa a ser então, subsunçor para aprendizagem de novos conhecimentos, como a conceituação de retas perpendiculares no plano tridimensional.

Segundo Masini (2011, p. 17), as condições para que ocorra aprendizagem significativa, propõem levar em consideração a “complexidade e a totalidade do ser cultural/social em suas manifestações e linguagens, corporais, efetivas, cognitivas manifestas nas relações que se estabelecem, em todas as condições existenciais”. Compreende que o aprender deve ser avaliado na individualidade de cada educando, atentando para sua relação com outros alunos, com o professor, com o ambiente de ensino, dentre outras do meio social e cultural que convive. Moreira e Masini (2007) apontam as duas condições destacadas por Ausubel como necessárias para que ocorra aprendizagem significativa:

- O aluno deve ter disposição e interesse em aprender de forma significativa, abstendo-se das meras memorizações.
- Os professores devem: pensar, planejar e aplicar o conteúdo de forma potencialmente significativa, ou seja, levando em consideração os subsunçores trazidos pelos alunos, de forma a dar um significado lógico para os mesmos.

Nessa perspectiva, as condições para aprendizagem significativa são a potencialidade significativa dos materiais educativos (i.e., devem ter significado lógico e o aprendiz deve ter subsunçores especificamente relevantes) e a pré-disposição do sujeito para aprender (i.e., intencionalmente de transformar em psicológico o significado lógico dos materiais educativos). (MOREIRA, 2006, p. 2)

Existe a possibilidade de ao ensinar determinado conteúdo, o professor se depara com o desconhecimento por parte do aluno de materiais vistos como suficientes para embasar a aprendizagem significativa do novo. Neste caso, a insistência em ensinar tal conteúdo, não levará a uma aprendizagem significativa. Assim, vale destacar também, a condição necessária de que o aluno deva ter subsunçores relevantes para aprender significativamente determinado conhecimento.

### 3.3 As aprendizagens significativas

Conforme a TAS, são três as aprendizagens significativas possíveis, sendo elas: *Aprendizagem Significativa Representacional*, *Aprendizagem Significativa de conceitos* e *Aprendizagem Significativa de Proposições*. A primeira está relacionada com a identificação e relação de símbolos; o símbolo forma um espaço equivalente ao espaço de seu referente, é sobre o novo espaço formado que o sujeito passa a atuar. A segunda é também uma aprendizagem movida por símbolos, no entanto, os mesmos são postos de forma geral, para conceituar ou categorizar características e/ou propriedades de eventos ou objetos. Em Matemática, o ensino de circunferência, pode englobar e exemplificar ambas as aprendizagens significativas; nas séries iniciais, a criança aprende e associa a palavra “circunferência” a seu objeto correspondente.

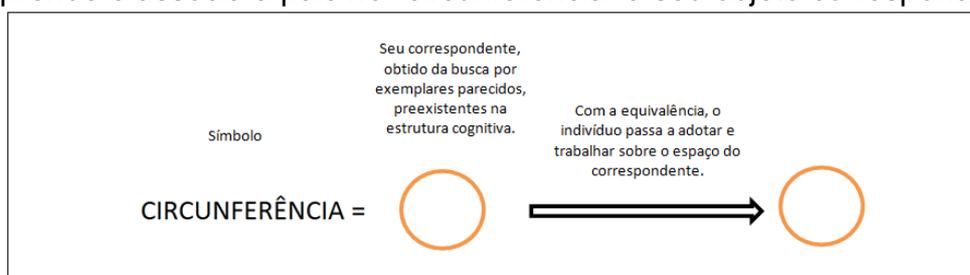


Figura 3: Circunferência - exemplo de Aprendizagem Significativa Representacional  
Fonte: o autor

No decorrer do Ensino Fundamental, para o estudo de circunferência, faz-se necessária a conceituação, também simbólica, porém mais elaborada, que defina além da forma vista no símbolo, características e propriedades que a significa. Tal definição faz com que ela possa ser posta em uma estrutura generalizada.

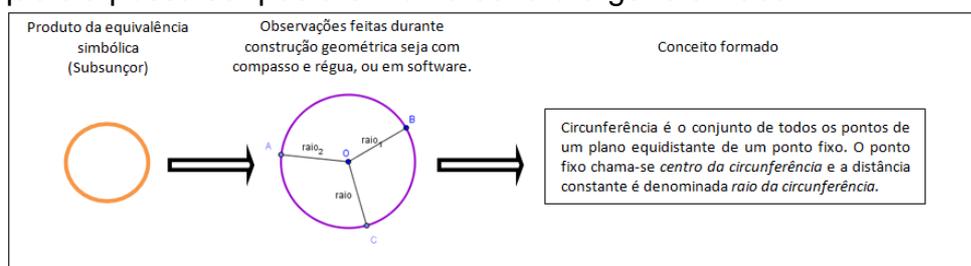


Figura 4: Circunferência: exemplo de Aprendizagem Significativa de Conceitos  
Fonte: O autor

A terceira, *Aprendizagem Significativa de Proposição*, consiste no produto da interação de uma nova proposição potencialmente significativa, com conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo, que são relevantes para o aprendizado da nova proposição. Em Ausubel (2001) e Rosa (2003), consta que a *Aprendizagem Significativa de Proposição*, pode ocorrer segundo três perspectivas:

✓ *De forma subordinada*

Acontece quando um conceito menos inclusivo é incorporado a um conceito mais geral preexistente, de forma a ambos sofrerem alterações até que seja apendido significativamente o novo conhecimento. Essa perspectiva é a mais comum, e é a que foi discutida no início do capítulo.

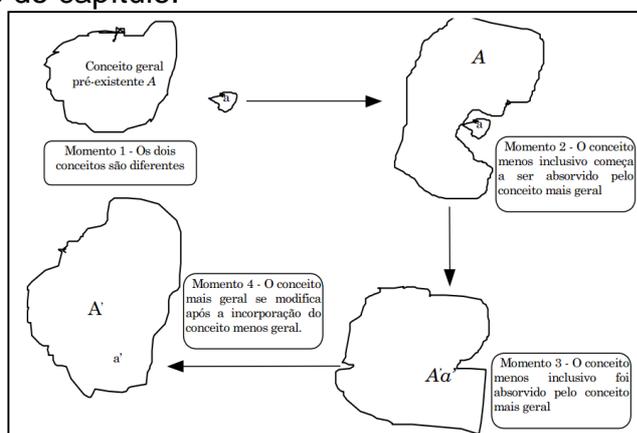


Figura 5. Processo de Aprendizagem Significativa Subordinada  
Fonte: A teoria cognitivista de David Ausubel (ROSA, 2003, p. 6)

✓ *De forma superordenada*

Corresponde ao aprendizado de um conceito mais abrangente, inclusivo e potencialmente significativo a partir da união e reorganização de conceitos mais triviais e menos inclusivos contidos na estrutura cognitiva. Por exemplo, enquanto um aluno desenvolve os conceitos de números naturais (IN), números inteiros (Z), e números racionais (Q), posteriormente ele aprende que os mesmos são subordinados aos números reais (IR). Nessa perspectiva, a aprendizagem do conceito de IR é superordenada, pois, os conceitos de IN, Z e Q, assumem posição de subordinados, que são agrupados e organizados para facilitar a aprendizagem do conceito de IR.

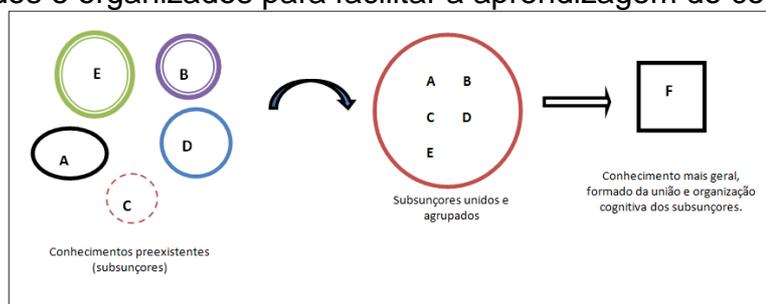


Figura 6. Esquema para a Aprendizagem Significativa Superordenada  
Fonte: O autor

✓ *De forma combinatória*

Aprendizagem na qual não ha subordinação ou superordenação; o novo conhecimento não é formado pela incorporação do mesmo a um conceito mais geral, mas sim pela interação sem ordenação ou agrupamento de conceitos preexistentes.

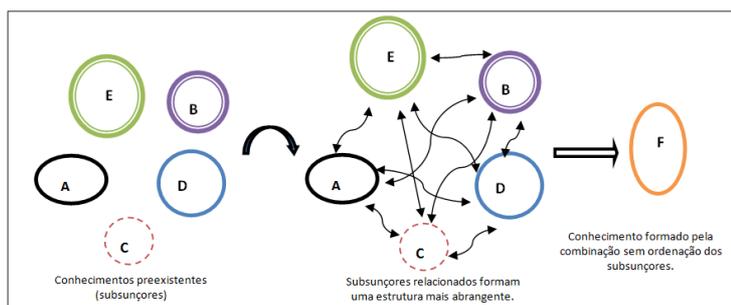


Figura 7. Esquema para a Aprendizagem Significativa Combinatória  
Fonte: O autor

Um exemplo simples é a significação de Paralelepípedo, para a qual é preciso fazer links entre elementos como, retângulo, vértice, segmento de reta, paralelismo, ângulo reto, face, aresta, base. Estes conceitos subsunoçores, não são específicos de Paralelepípedo, mas são relevantes para a conceituação do mesmo, não precisam ser ordenados, apenas lembrados e combinados, não se estabelece a subordinação entre os conceitos subsunoçores e o novo conceito.

A TAS aponta que, aprendizagem significativa, seja ela representacional, de conceito ou de proposição, ocorre de duas maneiras; por **recepção**, ou por **descoberta**.

Na aprendizagem significativa por descoberta, o aluno deve descobrir alguma relação, princípio ou lei. [...] tais descobertas podem acontecer na resolução de um problema ou em um processo de investigação. Já na aprendizagem significativa por recepção, o aluno recebe a informação pronta, e a função do aluno será atuar ativamente sobre esse material relacionando-o às ideias importantes que estejam disponíveis em sua estrutura cognitiva. (CORREIA, 2011, p. 52)

Aprendizagem por recepção ou por descoberta trata-se da maneira como o aluno recebe os conteúdos a serem aprendidos. Vale frisar que, segundo Ausubel (2001), o material apresentado em prol de uma aprendizagem por recepção deve “estar relacionada de forma não *arbitrária* (plausível, sensível e não aleatória) e não *literal* com qualquer estrutura cognitiva apropriada e relevante”.

### 3.3 Organizadores prévios e a aprendizagem significativa

O professor, ao lecionar atentando ao que diz a Teoria da Aprendizagem Significativa e professor, deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos, para que os mesmos possam aprender de forma significativa. Porém, há de refletir que, nem sempre está contido na estrutura cognitiva do aluno conhecimentos inclusivos,

relevantes, ou suficientemente necessários para aprendizagem de determinado conceito.

Nesse caso, Ausubel (2001) defende a metodologia de utilização de *organizadores prévios*, que segundo o mesmo, são mecanismos pedagógicos responsáveis por propiciar uma base que sustente a aprendizagem de um novo material. Os organizadores prévios são tratados pelo autor, como “pontes cognitivas” que ligam “o que o aprendiz já sabe e o que ele deveria saber a fim de que o novo material pudesse ser aprendido de forma significativa” (MOREIRA, 2008, p. 23)

[...] organizadores prévios são materiais instrucionais utilizados *antes* dos materiais de aprendizagem em si, sempre em um nível mais elevado de abstração, generalidade inclusividade. Podem ser um enunciado, um parágrafo, uma pergunta, uma demonstração, um filme, uma simulação ou até mesmo uma aula que funcione como pseudo-organizador para toda uma unidade de estudo ou, ainda, um capítulo que se proponha a facilitar a aprendizagem de vários outros em um livro. Não é a forma que importa, mas sim a função dessa estratégia instrucional chamada organizador prévio. (MOREIRA, 2008, p. 30)

Ausubel, Novak e Henesian (1980) destacam dois tipos principais de organizadores. Um deles é o **expositivo**, que facilmente é notado na relação professor-aluno em sala de aula, informações relevantes são expostas constantemente na lousa. O outro é o **comparativo**, um aspecto não apenas da aprendizagem escolar, mas da aprendizagem humana. Diariamente, pessoas comparam suas atitudes e formas de pensar com as de alguém ou alguns, aos quais consideram exemplos a ser seguidos. Através das comparações, as pessoas aprendem a distinguir o certo do errado, o que é essencial ou não para a vida em sociedade.

É sugerido pelos autores (1980) que, *organizadores expositivos* sejam utilizados mediante total desconhecimento por parte dos alunos do tema a ser lecionado. Um contexto mais geral deve ser exposto aos alunos, *um todo*, que sirva como subvenção para aprendizagem de temas mais específicos do mesmo.

Sugerem a utilização de *organizadores comparativos*, caso o aluno tenha familiaridade com assuntos que podem ser relacionados ao tema em questão, compara-se o novo conhecimento ou preposição com elementos já conhecidos visando uma integração. A comparação pode ser utilizada também para estabelecer critérios discriminantes entre ideias novas e já existentes, que aparentam alguma relação, porém, são essencialmente distintas.

Moreira (2008) relaciona três funções dos organizadores prévios, quanto suas utilizações, conforme princípios da TAS:

- ✓ Trazer à luz, conhecimentos submersos na estrutura cognitiva, e explicitar seus potenciais de auxílio para aprendizagem de um novo material;
- ✓ Proporcionar uma visão ampla, generalizada e mais abstrata do material que se deseja ensinar, estabelecendo e evidenciando relações com esse novo material;
- ✓ Prover um conjunto de ideias e elementos operacionais focados no conteúdo a ser ensinado, que possam ser usados para aprendizagem significativa desse novo conhecimento.

Como exemplo, para tornar possível a aprendizagem significativa do conteúdo de parábola, quando o aluno demonstra não saber sobre o assunto, o professor pode utilizar-se de organizadores prévios, algumas exposições simbólicas, tanto do contexto escolar quanto do cotidiano, pode mostrar a parábola enquanto representação gráfica de uma função quadrática expressa no eixo cartesiano. Com isso, de maneira generalizada, contornando o novo conteúdo, mas não adentrando diretamente no mesmo, o professor pode possibilitar com que o aluno constitua, ou relembre de conhecimentos que podem servir como subsunçores relevantes para a aprendizagem de propriedades de parábola, e conseqüentemente das demais cônicas.

### **3.5 Aprendizagem significativa x aprendizagem mecânica/memorística**

Ausubel utiliza das concepções da Aprendizagem Mecânica como subsídios para justificar a criação e desenvolvimento da TAS. Nas diversas leituras feitas, não se constata críticas ou apontamentos a professores que a utiliza, ou indicações de que uma rede de ensino trabalha em função dela. Ausubel, apenas enfatiza que ela existe, para assim contrapor a mesma com a TAS.

Contrariando o que foi dito até então sobre aprendizagem significativa, o ensino em prol de uma aprendizagem mecânica ou memorística, consiste no que podemos chamar de “transmissão do conhecimento”, pensando criticamente no “transmitir” como algo imposto, arbitrário, sem preocupação com o que o aluno traz consigo de conhecimentos. Essa falta de interação de um conhecimento novo com um preexistente implica na dificuldade de retenção, e conseqüentemente, na facilidade de esquecimento (MOREIRA e MASINI, 2007).

Ausubel (2001, p. 4) aponta que, “as tarefas de aprendizagem por memorização, como é óbvio, não se levam a cabo num vácuo cognitivo. Podem relacionar-se com a

estrutura cognitiva, mas apenas de forma arbitrária e literal que não resulta na aquisição de novos significados”.

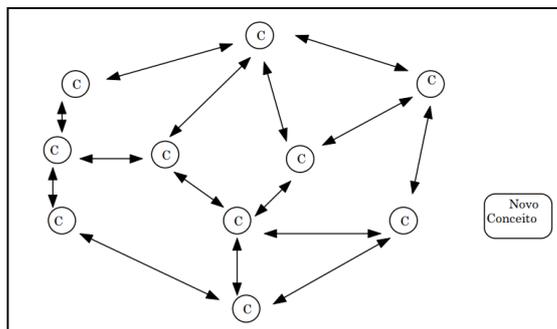


Figura 8. Esquema para a aprendizagem mecânica conforme apontado por Ausubel  
Fonte: (ROSA, 2003, p.4)

Na figura acima, os círculos com C, representam conhecimentos prévios, percebe-se que o novo conhecimento não tem ligação com nenhum deles. A partir do que se observa no esquema, vale citar um exemplo de aprendizagem mecânica, descrito por Correia (2011, p. 55):

Um professor ensina ao aluno a seguinte regra: “na equação  $y = mx + n$ ,  $m$  é o coeficiente angular e  $n$  é o coeficiente linear”. Ao solicitar ao aluno que indique no plano cartesiano o coeficiente angular e o linear da reta  $y = x + 5$ , caso a aprendizagem tenha sido apenas mecânica (memorística), sem compreensão do significado desses coeficientes, o aluno saberá apontá-los, mas não conseguirá indicá-los no plano cartesiano.

Ausubel (2001, p. 15) aponta fatores pelos quais ele defende que, a aprendizagem significativa possui maior potencial que a aprendizagem mecânica, no que diz respeito ao processo de aprendizagem:

- *Das “condições processuais”*: Na aprendizagem significativa, os significados constituídos das relações entre novos conhecimentos e subsunçores especificamente relevantes, que se ligam e aglutinam-se a estes subsunçores, ficando assim protegidas de interferências posteriores. Um conceito aprendido mecanicamente, pela falta de interação com conhecimentos prévios, torna-se vulnerável a interferências.
- *Da “não arbitrariedade e da não literariedade”*: Um ensino pautado em ações plausíveis e conscientes, não ofensivo ou desmotivador, conectado substantivamente às necessidades do aluno, considerando o que traz consigo que possa facilitar seu aprendizado, possibilita uma significação de conceitos, os quais nessa perspectiva, mantem-se ancorados por um longo tempo, contrariamente aos constituídos via memorização.
- *Do “significado per se”*: O percurso que define um aprendizado significativo é dito por Ausubel como sendo; agradável e familiar, que estimula o aluno a querer aprender, e aguça a curiosidade do mesmo. Já o percurso da aprendizagem mecânica

é visto como arbitrário, desagradável, até desmotivador, visto que, o resultado tem pouca durabilidade, é facilmente esquecido, e gera retrabalho.

Mesmo apontando características que mostram uma “superioridade” da aprendizagem significativa sobre a aprendizagem mecânica, Ausubel (2001) não a idealiza como irrelevante, pelo contrário, considera como importante para concepção de alguns significados por parte do indivíduo. Em certos casos, ambas podem atuar juntas numa relação Aprendizagem Significativa-Mecânica, ocasionando:

- *A aprendizagem mecânica como facilitadora da aprendizagem significativa:* “A aprendizagem representacional (ex.: aprendizagem de nome de conceitos), por exemplo, está muito mais próxima da extremidade memorização do que aprendizagem conceitual ou proposicional”. Saber o nome dos conceitos mecanicamente pode facilitar a assimilação significativa de seus princípios.
- *A aprendizagem significativa como facilitadora da aprendizagem mecânica:* um exemplo colocado por Ausubel (2001) é a do ator, que primeiro precisa aprender de forma significativa as falas para posteriormente decorá-las.

Um exemplo clássico do ensino de matemática, que pode ser mencionado, é o da tabuada. Grande parte dos professores sugere a memorização dela, tabelas de repetição são distribuídas, e os alunos são continuamente cobrados em sala. Uma sugestão para o ensino da tabuada, por vias mais significativas, não abandonando a memorização, é a utilização dos conceitos de dobro e triplo, anteriormente definidos pela Aprendizagem Significativa de Conceitos, como por exemplo:  $6 \times 8$  é igual ao dobro de  $3 \times 8$ , ou o triplo de  $2 \times 8$ . Assim, o produto entre números maiores, pode ser reduzido ao dobro ou triplo do produto de números menores (este, advindo da memorização), o que pode tornar a operação menos complexa.

O ensino pensado com a TAS pode levar a reflexão do *Eu* enquanto professor; e a prática repensada pode direcionar-se à um ensino mais significativo, que utilize de atividades que exijam do aluno o retrospecto de suas experiências. É nesta perspectiva, que optamos por trabalhar aqui, com a abertura advinda de atividades investigativas, que permitem o lançar da totalidade do ser para efetuar investigação. O capítulo seguinte propõe descortinar o que vem sendo estudado sobre tais atividades. Trata também da aprendizagem colaborativa, e utiliza o já discutido neste capítulo e no anterior para previamente refletir sobre um cenário que propicie a *aprendizagem significativa em ambientes colaborativo-investigativos mediada por software de GD*.

## CAPÍTULO IV

### APRENDIZAGEM COLABORATIVA E AS TAREFAS EXPLORATÓRIAS E INVESTIGATIVAS

#### 4.1 Discursos e reflexões acerca da Aprendizagem Colaborativa

Onde se aprende a ser colaborativo? As características que determinam a colaboratividade surgem da interação dialética do ser humano com seu meio sociocultural; o indivíduo a partir de influências externas e da interação com outros seres humanos apropria-se do patrimônio histórico e cultural da humanidade, estes que estão em constante desenvolvimento (VYGOTSKY, 1998). As crianças, antes mesmo da idade escolar, estão sujeitas a trabalhar associando-se a um processo de “co-criação” no ambiente familiar ou em qualquer outro ambiente social. Porém, as implicações e benefícios provenientes do produto dessa interação, não ficam tão nítidos e evidentes quanto na escola; as crianças *estão ali*, vivendo em constante colaboração, e *ali* concebem conhecimentos e são concebidos pelos mesmos, porém, de forma natural, sem alguém intencionar a apropriação de tais conhecimentos.

Segundo Torres (2007, p. 339), a “aprendizagem colaborativa pode ser definida como uma metodologia de aprendizagem, na qual, por meio do trabalho em grupo e pela troca entre os pares, as pessoas envolvidas no processo aprendem juntas”. Mas, não basta estar juntos no espaço e no tempo; a colaboração se abre a partir de uma co-elaboração, na qual os indivíduos estando juntos e em comunhão, concebem conhecimentos, e são beneficiados por estes. A produção conjunta e a consciência da existência de um ou mais que podem contribuir e receber contribuições, são questões éticas que dão base para um trabalho em equipe, que muitas vezes é essencial para tratar adequadamente a complexidade de uma tarefa ou problema.

Torres (2007, p. 341) afirma também, que nessa metodologia, “a aprendizagem é um processo ativo”. Em seus estudos, a autora percebe que os integrantes do grupo se responsabilizam pela distribuição de papéis. Muitas vezes, esta distribuição simplesmente acontece durante a interação, em outras situações, ocorre mediante percepção da necessidade da divisão antes mesmo de começar a colaboração. No processo de aprendizagem por colaboração, os alunos são convidados a assumir uma postura de agentes do conhecimento, agentes autônomos, livres para tomar suas

próprias decisões. A autonomia aqui mencionada, certamente é limitada, visto que, dizer que o aluno é 100 por cento autônomo, implica dizer que o professor é pouco ou nada relevante para a aprendizagem.

A construção social do conhecimento é uma base pedagógica do modelo de Ambiente Colaborativo adotado, pois permite dar forma conceitual e metodológica à ideia de tornar o aluno parte viva no processo de construção do conhecimento, como também tornar o centro de ensino mais uma fonte de conhecimento na circularidade absoluta da rede de informações que surgem nos coletivos educacionais. (HAGUENAUER et al, 2007, p.3)

O professor envolve-se como parceiro dos alunos na concepção e desenvolvimento de significados; mantém postura de mediador que incentiva o aprendizado, no sentido de estar próximo, em especial, quando percebido o desconforto e/ou grandes dificuldades do grupo. Ao amenizar as dificuldades, cabe ao professor monitorar-se para não descontextualizar, interromper ou acabar com a colaboração, o que ocorreria se indicasse diretamente resultados ou caminhos, tirando assim dos alunos, a oportunidade da descoberta. O aprendizado é de responsabilidade do aluno e dos colegas de grupo, assim, devem ajudar mutuamente uns aos outros.

O processo de ação colaborativa no ensino pressupõe que haja circulação intensa de informações e trocas visando o alcance de objetivos previstos. Todos auxiliam na execução das tarefas, superam os desafios e constroem colaborativamente o seu próprio conhecimento e o da coletividade. As contribuições que os participantes – alunos, professores – oferecem, são apresentadas a todos e servem para que cada um possa executar melhor seu trabalho. (KENSKI, 2008, p. 17)

Kesnki (2008), apenas pressupõe o processo colaborativo, faz uma idealização de como deveria ser, visto que nem sempre ocorre colaboração em um grupo montado; alguns alunos não sabem e não entendem o sentido de colaboração. Portanto, em alguns casos, é necessário que o professor estabeleça diálogos e práticas colaborativas com os alunos, para que se atenham ao hábito de colaborar.

Torres (2007) aponta que no ambiente colaborativo, deve existir a consciência interna de que, o sucesso do grupo, depende do sucesso dos integrantes do mesmo. O professor deve estimular a participação e intervenção ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, levando em conta a liberdade da fala e os choques de expressões, que pode fomentar o desenvolvimento da tolerância e do senso de democracia. Cabe ao professor também, propor mensagens abertas desafiadoras e estimulantes, nas quais múltiplas opções são dispostas em função de um objetivo comum; a aprendizagem do aluno.

Tais características destacam a necessidade de interação entre os alunos, e compartilhamento de informações a serem negociadas constantemente por cada um. É durante as negociações que, reflexões, críticas, discussões e ponderações são feitas até que vigore um consenso, no qual as informações desarticuladas ou vagas se completam ou sobrepõem-se proporcionando um conhecimento melhor elaborado e mais objetivo, o que corrobora com um aprendizado colaborativo, construído mediante um misto de experiências e significados que se manifestam na interação de um grupo.

As trocas entre colegas, os múltiplos posicionamentos diante das informações disponíveis, os debates e análises críticas auxiliam a compreensão e elaboração cognitiva do indivíduo e do grupo. As múltiplas interações e trocas comunicativas entre parceiros do ato de aprender possibilitam que estes conhecimentos sejam permanentemente reconstruídos e reelaborados. (KENSKI, 2008, p.12)

O cumprimento, ou não dos objetivos provenientes da Aprendizagem Colaborativa, depende de muitos fatores, um deles é a potencialidade interativa das atividades aplicadas. As mesmas devem instigar, envolver e desafiar os alunos, exigindo com que os mesmos se comuniquem para traçarem possíveis soluções, até que juntos consigam uma produção coerente e única sobre a atividade.

São as atividades que dão sentido à ação do grupo ao mesmo tempo em que o dinamizam. É no processo de gestão destas atividades que os componentes do grupo se organizam, repartem papéis, discutem ideias e posições, interagem entre si, definem subtarefas, tudo isso, dentro de uma proposta elaborada, definida e negociada coletivamente. (TORRES; ALCANTRA; IRALA, 2004, p. 12)

No modo colaborativo, a atividade deve possuir um enunciado convidativo, aberto ao diálogo, de preferência, deve ter indicativos que direcionem para um trabalho conjunto, no qual prevaleça o plural, que a princípio já sugira a colaboratividade para sua resolução ou execução. O contexto exposto no enunciado da atividade deve gerar a expectativa da descoberta, e a satisfação que justifique a união colaborativa, e até mesmo afetiva entre os membros de um grupo. “[...] Um enunciado escrito tem a vantagem de fixar a situação de partida, permitindo aos alunos regressar a ele sempre que o entenderem” (PONTE et al., 1998, p. 12). Neste contexto, as atividades:

[...] não são atividades de aprendizagem individual, mas sim nas interações do grupo, como negociação e compartilhamento. Os participantes não se isolam para realizar atividades individualmente, mas mantêm-se engajados em uma tarefa compartilhada que é construída e mantida pelo e para o grupo como tal. (STAHL; KOSCHMANN, SUTHERS, 2006, p. 3).

O professor torna-se fundamental na procura ou elaboração dessas atividades, é dele o papel de zelar pelo potencial interativo, pela complexidade das mesmas, e pela intencional percepção das vantagens de se trabalhar em grupo. Chioca e Martins

(2004, p. 91) apontam que ao trabalhar com a Aprendizagem Colaborativa, deve-se exercer “uma prática que incentive a formação de conceitos e a discussão de significados, visando levar o aluno a sentir, conhecer, perceber, compreender, conceituar, criar, relacionar e expressar os diversos saberes”.

A Colaboração em sala de aula é bem mais que uma opção pedagógica ou metodológica, não se limita apenas ao ensinar e ao aprender; o envolvimento entre discentes e/ou docentes, pode promover: respeito uns com os outros, companheirismo, afetividade, humildade, o que pode desenvolver também habilidades e percepções importantes e necessárias para a vida social e profissional dos alunos. A ação colaborativa em sala de aula pode adicionar novas possibilidades de aprendizagem ao ensino, a fim de diversificar e aperfeiçoar as metodologias vigentes.

#### **4.1.2 Ambientes Colaborativos de Aprendizagem**

Um ambiente colaborativo não é um lugar ou um espaço pré-definido. A sala de aula, três ou mais mesas agrupadas, o laboratório de informática, a tela de um *software*, um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), não são *naturalmente* ambientes colaborativos, porém, à medida que nesses lugares se estabeleçam atividades, as quais colaborativamente se debruçam um grupo de sujeitos, com o intuito maior de aprender, então estes lugares se potencializam como Ambientes Colaborativos de Aprendizagem. A prática da colaboratividade em um ambiente:

[...] se dá pela ação do aluno. Esta ação acontece por meio de uma metodologia de trabalho que possibilita ao aluno o querer aprender. Esta metodologia tem como base alguns meios que instigam o aluno a buscar o conhecimento. Isto é possível por intermédio de uma metodologia de projetos, de pesquisa de participação democráticas das discussões e de uma pedagogia dialógica. (CHIOCA; MARTINS, 2008, p. 90)

Cabral, Junior e Araújo (2010) apontam que os AVAs são “naturalmente colaborativos”, porém, é importante destacar que, por mais que esses ambientes possuam ferramentas e possibilidades para um desenvolvimento de Aprendizagem Colaborativa, eles não serão colaborativos se essas não forem utilizadas, ou se utilizadas indevidamente. Um AVA só é colaborativo se o professor direcionar atividades que se abrem à colaboração. O discente é o responsável por pensar, organizar e mediar atividades de maneira a possibilitar que os alunos interajam com ele e com os demais alunos, para desenvolverem, por colaboração, aprendizagem significativa.

Não basta apresentar tantos recursos se a motivação para usá-los e conhecê-los não estiver interligada. Isto requer flexibilidade e criatividade do professor, pois não existe “receita pronta” para atrair e assegurar o envolvimento de todos na construção do saber. Com a internet, as possibilidades de integração são variadas, pois se aprende através de imagens, sons, atualidades, fóruns, bate-papos, páginas colaborativas abrindo um imenso leque de informações. (BERNARSKI, ZYCH, 2009, p. 10)

O professor deve instigar os alunos a serem ativos, a tomarem suas próprias decisões, sejam elas individuais ou em grupo. No ambiente colaborativo, os alunos devem se sentir desafiados, isso mostra que este ambiente é adequado para o ensino e a aprendizagem de matemática, uma vez que a mesma, por si só, já é tratada como desafiadora por muitos alunos.

Com o desenvolvimento da tecnologia e inserção da mesma ao sistema educacional, emergem muitas pesquisas que tematizam ambientes colaborativos relacionados à Educação a Distância (EAD). Torres (2007), Kenski (2008), dentre outros, discutem e propõem alguns AVAs, apontando suas promissoras possibilidades de colaboração e democratização do ensino, o que também é feito por Nitzke et. al.(1999), que enfatizam o direcionamento maior dos AVAs à EAD, mediante justificativa plausível da possibilidade de expansão da aprendizagem a sujeitos sem acesso ao ensino escolar ou com dificuldade de estar presente em sala de aula.

Analisando a potencialidade dos Ambientes Colaborativos Virtuais, é relevante direcionar olhares também para os ambientes colaborativos voltados para o ensino presencial. Promover o trabalho colaborativo em sala de aula envolve vários elementos, um deles é a criação de um ambiente propício à colaboração.

A proposta central da criação do Ambiente Colaborativo consiste em proporcionar um espaço de construção coletiva do conhecimento, onde cada participante é autor e colaborador e pode usufruir o resultado do esforço de todos. Cabe aqui ressaltar que esta concepção, por si só, não está necessariamente vinculada à internet/tecnologia/espaço virtual. Trata-se mais de uma concepção filosófica de trabalho onde não existe obrigatoriamente uma hierarquia entre os participantes. (HAGUENAUER et al., 2007, p. 2)

Para Brito e Pereira (2004), em um ambiente presencial, as pessoas podem de forma natural, oralmente, expor suas ideias e diferentes pontos de vista, os conflitos gerados durante as negociações da veracidade ou relevância de informações podem também de forma natural ser gerenciados.

Percebe-se que na maioria dos trabalhos e pesquisas que se voltam para a Aprendizagem Colaborativa, pouco se enfatiza sobre critérios ou observações a serem feitas para estabelecimento de um grupo de alunos em sala de aula, para se trabalhar uma atividade atentando aos critérios da Aprendizagem Colaborativa.

No desenvolvimento de uma atividade tanto em ambientes virtuais quanto em presenciais, um grupo contendo alunos de alta capacidade pode facilmente executar ou resolver a tarefa proposta, sem que haja discussão entre os membros; um grupo formado por alunos com muita dificuldade, pode não conseguir desenvolver pensamentos e ferramentas relevantes e necessárias para atender as solicitações da atividade; se um grupo é formado por um aluno muito bom e outros “ruins” ou “medianos”, esse aluno pode sem pensar, assumir um posto de liderança e, os outros acabarem por submeter às suas colocações, sem ao menos estabelecer críticas.

[...] percebemos problemas quando ocorre a divisão horizontal do trabalho, com a divisão de tarefas; e a divisão vertical, com os papéis organizados de maneira hierárquica: pois os alunos considerados com “dificuldades de aprendizagem” ficam no nível mais baixo de hierarquia do grupo e recebem as tarefas consideradas mais simples, que, segundo o grupo, pouco contribuem para a solução da atividade. (RAMOS; QUARTEIROS, 2008, p.2)

Ramos e Quarteiros (2008, p.2) constataram também, que as formas em que se organizavam “tornou o desenvolvimento do trabalho em grupo individualizado, em que, alguns deles apenas mostraram o trabalho, sem haver uma discussão e construção coletiva”. Isso se dá muitas vezes, pela influência de uma vivência escolar pautada no individualismo, que se sobressai mesmo quando se propõe a colaboração.

A transição de uma metodologia pautada no ensino individual, para uma guiada em ambientes colaborativos, pode desestabilizar as tradicionais denominações de alunos bons, ruins ou medianos. O objetivo da aprendizagem colaborativa, é que o aluno aprenda como indivíduo, e como indivíduo membro de um contexto colaborativo. Nesta perspectiva, o aluno considerado excelente, que tira ótimas notas, se em uma atividade colaborativa, insiste em trabalhar de forma individual, sem colaborar com os demais, não é mais tão bom aluno, pois, não atua conforme a metodologia em questão. Já o aluno que mesmo tendo uma boa arguição, habilidades de negociação e boa interatividade, é considerado ruim pelo sistema individualizado de ensino, no ambiente colaborativo, torna-se peça fundamental para manter a comunicação entre os membros do grupo, ou seja, nessa metodologia, passa a ser bom ou ótimo aluno.

Trabalhar de maneira colaborativa em um ambiente aberto e agradável pode deixar o aluno mais confortável para pensar, fazer conjecturas e significar as coisas. Essa perspectiva de trabalho pode amenizar o medo e receio com algumas disciplinas, como a própria Matemática, visto que, esses sentimentos muitas vezes, são advindos da falta de companheirismo ou isolamento em uma sala de aula, que é gerida por princípios de aprendizagem individual.

## 4.2 Atividades Exploratórias e Investigativas no ensino e na aprendizagem de matemática

Quando é colocado em pauta a exploração ou investigação, logo os pensamentos se remetem a temas como: tramas policiais, pesquisas acadêmicas, exploração arqueológica. Enfim, remete-se a grandes e importantes pesquisas de cunho investigativo, as quais necessitam de envolvimento e destreza para não deslumbrar-se com falsetas, aspectos ou elementos irrelevantes para o desenvolvimento da exploração ou investigação. Parece que uma experiência investigativa não pode ser movida por algo mais simples, como “especulações de uma criança ao observar um conjunto de números escritos no quadro, ou da curiosidade acerca de uma propriedade dos números” (FROTA, 2005, p.4).

Ponte (2003, p. 27) destaca a possibilidade da transição de princípios de investigações presenciadas cotidianamente para o ambiente escolar, ao mencionar características da investigação e exploração conforme o senso comum, que podem ser vistas também na investigação para o ensino e a aprendizagem de matemática: habilidades e capacidades, “que envolvem conhecimentos de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidades de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas resolvendo problemas”, por meio da criticidade e reflexão sobre ideias e aplicabilidade das mesmas ao “lidar com situações das mais diversas”. Explorar e investigar em sala de aula permite aos alunos:

[...] a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos testes adequados para sua validação ou rejeição. Permitem ainda procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessíveis testes e levantar novas questões para investigar. (SILVA et al., 1999, p. 72)

A Investigação em aulas de matemática surge em meio a outros campos, e outras perspectivas a muito utilizadas pelos professores de matemática. Novos pontos de vista, que criam ou aperfeiçoam elementos que permeiam a educação, são relevantes quando de alguma forma provocam questionamentos, fazendo com que metodologias e práticas sejam repensadas, a fim de favorecer a aprendizagem.

Investigação introduzida na aula de matemática pode desestabilizar nosso sistema de concepções e crenças de matemática e de aula de matemática, bem como do nosso papel de professores de matemática, sistema esse resultante de uma educação escolar tradicional, sustentada nos princípios de uma visão da matemática como um corpo acabado de conhecimentos, de uma aula onde o professor, único detentor da verdade, repete para o aluno uma matemática pronta e acabada. (FROTA, 2005, p. 8)

Este campo sugere o ensino e a aprendizagem de matemática, com a utilização metodológica de atividades investigativas. Ponte (2003) preocupa-se em identificar e caracterizar os tipos de atividades vigentes em sala de aula, dentre elas as tarefas investigativas, intuindo apresentar características distintivas, que permita maior coerência e objetividade na criação e/ou escolha de diferentes atividades por parte dos professores. Em síntese, o autor (2003, p. 5) aponta quatro tipos de atividades:

<i>Atividade</i>	<i>Descrição</i>
Exercício	É uma tarefa simples, um resolve, um efetua, de rápida resolução, e de estrutura fechada. Existe uma solução exata e já esperada pelo professor.
Problema	Tarefa com alto grau de dificuldade e com estrutura fechada. Existe uma solução exata ou mais coerente, relativamente rápida, já esperada pelo professor.
Exploração	Tarefa fácil, na qual muitas vezes, é sugerido ao aluno como proceder, para assim, observar e conceber importantes informações. Possui estrutura aberta.
Investigação	Uma tarefa também de estrutura aberta, porém mais difícil que a exploração, poucas informações são dadas, e o aluno fica mais independente para formular suas próprias questões norteadoras e empenhar em respondê-las.

Quadro 1: Classificação e descrição dos tipos de atividades  
Fonte: Investigar, ensinar e aprender. (PONTE, 2003, p. 5).

É visível que nesta classificação, Ponte atém-se a necessidade de estabelecer uma classificação para melhor orientar os professores, para isto, desgarrou-se da figura do aluno, uma vez que, se o mesmo for cogitado, torna-se inviável qualquer tipo de classificação; nas tarefas investigativas, ditas por Ponte como difíceis, mas pensadas aqui como “mais complexas”; um aluno ao deparar-se com uma atividade do tipo pode não sentir-se desafiado, achar tudo muito óbvio, o que desestabilizaria a concepção de dificuldade agregada a tais atividades. Uma tarefa exploratória, considerada pelo autor mais fácil, e vista aqui como “menos complexa”, pode ser tratada por um aluno com certa dificuldade de aprendizagem, como sendo uma tarefa muito difícil. O grau de dificuldade, não se dá somente pela tarefa em si, mas também, pelo como o aluno a recebe.

Na necessidade de diferenciar as tarefas exploratórias das investigativas, Ponte (2003) optou em dá-las estes nomes distintos. Para melhor caracterizar, segue exemplo de uma tarefa exploratória e uma investigativa:

<p>1. Repara que <math>2^2 = 4</math> e que <math>2 \times 2 = 4</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Será sempre verdade que <math>a^n = a \times n</math> ?</li> <li>Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.</li> </ul> <p> <math>0^2 =</math>      <math>0 \times 2 =</math>      <math>10^2 =</math>      <math>10 \times 2 =</math>  <math>4^2 =</math>      <math>4 \times 2 =</math>      <math>\left(\frac{1}{2}\right)^3 =</math>      <math>\left(\frac{1}{2}\right) \times 3 =</math>  <math>3^3 =</math>      <math>3 \times 3 =</math>      <math>\left(\frac{5}{3}\right)^4 =</math>      <math>\left(\frac{5}{4}\right) \times 4 =</math> </p> <p>2. Determina cada uma das seguintes potências</p> <p> <math>10^3</math>      <math>1^4</math>      <math>0.45^2</math>  <math>10^5</math>      <math>1^8</math>      <math>0.45^4</math>  <math>10^6</math>      <math>1^{18}</math>      <math>0.45^7</math> </p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se calculasses <math>10^7</math>, seria maior ou menor que <math>10^6</math>?</li> <li>E se calculasses <math>0.45^9</math> seria maior ou menor que <math>0.45^7</math>?</li> <li>O que se passa com as potências de base 1?</li> <li>De todo o estudo que fizeste, podes tirar alguma conclusão?</li> </ul> <p>3. Repara que <math>4^2 = 16</math> e <math>2^4 = 16</math>. Será sempre verdade que <math>a^n = n^a</math>?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Experimenta noutros casos!</li> </ul> <p>4. Sabendo que <math>3^6 = 729</math>, és capaz de calcular imediatamente <math>3^7</math>? e <math>3^8</math>? e <math>3^{12}</math>?</p>
--	---

Figura 9: Tarefa Exploratória - Propriedades verdadeiras e falsas  
Fonte: Investigar, ensinar e aprender. (PONTE, 2003, p. 30)

Essa tarefa é dada com exploratória, devida sua a estrutura, que sugere aos alunos algumas atitudes, as quais podem nortear conjecturas e suas validações. As tarefas exploratórias são apresentadas aos alunos como um modelo pronto, o qual dever ser explorado, compreendido e analisado. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999)

Não são suas ideias que ali estão representadas e portanto existe o desafio intelectual de compreendê-las. A própria compreensão do modelo, o entendimento dos princípios de construção, já são por si só estímulo ao raciocínio, que favorecem a construção de relações e conceitos. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 81)

Elaborar uma tarefa exploratória não se trata de um caso simples, um objetivo deve ser pensado, bem como os meios necessários para alcançá-lo. O encaminhamento deve ser cuidadosamente apresentado de forma a “direcionar” os alunos à concepção de determinado conceito. O exemplo a seguir, Ponte (2003) define como uma tarefa investigativa:

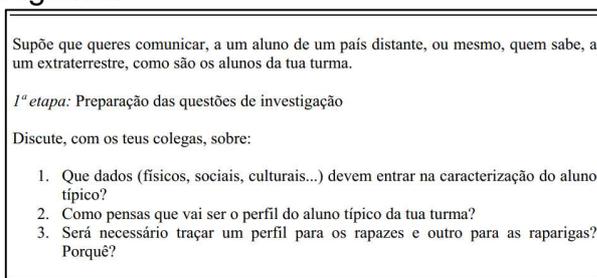


Figura 10: Tarefa investigativa: Determinar o perfil do aluno típico da turma  
Fonte: Investigações estatísticas no 6º ano (SOUSA, 2002, p. 85)

Nela, as ações e iniciativas, diferentemente da tarefa exploratória, ficam a critério dos alunos, os passos a serem tomados não são sugeridos. Porém, ainda assim, algumas perguntas são colocadas. A rigor, estas perguntas também deveriam ser elaboradas pelos alunos. Devido à falta de contato com o contexto investigativo, ao levantar algumas questões, o professor pode estimular os alunos na elaboração de novas perguntas, pensamentos e abordagens necessárias para resposta das mesmas.

As tarefas de cunho investigativo têm como característica, a abertura, propiciada por pouca formulação do enunciado, uma exposição mais generalizada, que oferece oportunidade de criar e conduzir perguntas, gerenciar dúvidas e possibilidades de saná-las, elaborar estratégias, generalizar resultados. “a ideia mais fundamental é que a investigação esteja centrada no aluno. Este no decorrer da atividade irá (re)colocar questões que o encaminharão em direções inusitadas”(PONTE et al. 1999, p.20).

Ponte (apud SILVA e CURI, 2006, p. 3), destaca que são quatro os momentos verificados na execução de uma atividade investigativa. Sendo eles:

- ✓ Compreensão do contexto, explorações prévias e formulação de questões;

- ✓ Gerenciamento de dados, elaboração de conjecturas;
- ✓ Após conjecturas testadas, as mesmas são repensadas, descartadas ou refinadas;
- ✓ Justificação das conjecturas refinadas, exposição e avaliação do raciocínio utilizado.

Com isto, é visível que a investigação em sala de aula pode: fornecer uma visão mais ampla das relações matemáticas; permitir envolvimento dos alunos de níveis de conhecimento distintos; deixar em aberto, formas e direcionamentos a serem tomados no processo de investigar; não se impõe maneiras “corretas” de aplicação. A abertura proporcionada por uma tarefa investigativa possibilita o envolvimento voluntário, ou involuntário dos alunos com muitos tópicos matemáticos, o que pode ser um problema para alguns professores, mas uma ótima oportunidade para outros; um momento oportuno de trabalhar as diversas relações das propriedades matemáticas.

Proporcionar e manter o envolvimento do aluno durante a atividade investigativa não é uma tarefa simples, elementos que favorecem ou que prejudicam o momento, devem ser identificados e considerados constantemente pelo professor. Um deles é o “cenário para investigação”, que para Skovsmose (2008), deve ser um convite, que atrai a atenção dos alunos, de maneira que os mesmos, por iniciativa própria, aceitem esse convite e queiram participar da atividade. Um cenário investigativo:

[...] é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite simbolizado pelo “O que acontece se ...T” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seu “Sim, o que acontece se ...T”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isso ...?” do professor representa um desafio e os “Sim, por que isso ...T” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e que estão procurando explicações. (SKOVSMOSE, 2008, p. 20)

O autor (2008) enfatiza que, quando os alunos passam a explorar as informações dadas, um novo ambiente de aprendizagem é construído, visto que, as ações dos alunos se modificam, tornam-se mais curiosos e espontâneos no diálogo, e mais ativos, tomando para si a responsabilidade pelo processo de investigação.

As características que estão submersas nas tarefas exploratórias e nas investigativas, evidenciam a intenção do tratamento desse tema na pesquisa. Além de proporcionarem pensamentos críticos e reflexivos aos alunos, permitem também com que os professores e futuros professores, ao voltarem seus olhares para estas, que se mostram importantes ferramentas metodológicas do âmbito escolar, repensem suas práticas educativas, somando estas perspectivas aos seus repertórios docentes, e abstendo-se de abordagens irrelevantes, sem significados, que atrapalham, ou que pouco/nada acrescentam para o aprendizado dos alunos.

### 4.3 Postura e papéis do professor no processo investigativo dos alunos

A postura do professor não se reduz as atitudes tomadas no momento da exploração e/ou investigação em sala de aula. Primeiro, deve estabelecer-se de forma crítica e reflexiva, no que diz respeito às metodologias aplicadas para tratamento dos conhecimentos matemáticos. Para isso, é necessária a iniciativa de professor-pesquisador, que, em meio aos diversos olhares teóricos do âmbito da Educação Matemática, busque informações que favoreçam a concepção de um perfil de profissional; que se dedica aos alunos, que observa o que/como estão aprendendo, que aplique e revise constantemente sua prática, para assim, atingir o objetivo maior dos professores; auxiliar os alunos na concepção significativa de conhecimentos.

Um dos maiores desafios do professor está na criação das atividades investigativas, não pela elaboração de um enunciado qualquer, mas pelos objetivos implícitos deste enunciado. Espera-se que o professor mediante criação das atividades se desvincule, mesmo que momentaneamente de sua pessoa, voltando sua atenção para os alunos, e a pensar: quais os benefícios dessas atividades para os mesmos, quais habilidades e competências podem ser desenvolvidas, quais conhecimentos podem ser concebidos, como favorecer o diálogo entre os alunos, como formar alunos críticos aos outros e a si mesmos. “Vejo a introdução de atividades investigativas na sala de aula como uma poderosa força com vistas à educação matemática de nossos estudantes e reeducação matemática de nossos professores”. (FROTA, 2005, p. 9).

Assim como as atividades devem ser abertas, os momentos de investigação também devem. No contexto: um enunciado exposto, um ambiente devidamente pensado e preparado, um professor que acompanha e media as inter-relações provenientes do momento, alunos constituídos de sua totalidade. Durante o processo vivido neste contexto, e no final do mesmo, até mesmo sem perceber, mas a todo tempo intuído pelo professor, a aprendizagem acontece, os alunos agregam significado, mesmo que não da forma esperada. O próprio professor aprende, e percebe na prática, o quão rico pode ser o momento investigativo de aprendizagem.

Ponte (1999) destaca a relevância do papel do professor no processo investigativo dos alunos, papel que vai desde criar normas para o ambiente, a servir como modelo de investigador matemático. O autor sugere que o professor deve encontrar a medida certa entre a ajuda concedida e o excesso da mesma, que pode

distorcer a investigação. Deve estimular a participação do aluno e aceitação do papel de sujeito que investiga e que é agente de seu próprio conhecimento.

Ponte (1999) enfatiza também que pertence ao momento investigativo, à confraternização final de ideias apuradas e conhecimentos apreendidos; uma oportunidade de repensar e reforçar o que foi feito, de aprender com os erros, de agregar valores ao trabalho colaborativo, visto que este momento sugere o falar e o escutar o outro. No final, o professor deve atentar as conclusões dos alunos, como as justificam e se significam as mesmas. O professor deve atentar se os alunos:

[...] compreendem a tarefa proposta, se estão a formular questões e conjecturas, se já a testaram, se são capazes de justificar seus resultados. Precisa de saber se os alunos estão a ter dificuldades por não compreenderem algum conceito importante, porque não relacionam ideias, em princípio, já suas conhecidas, ou porque não encontram uma forma de representação funcional para a informação que lhes é dada. (PONTE et al. 1998, p. 13)

Para fazer estas verificações, Ponte (1998) aponta que, o professor deve lançar algumas perguntas, sucintas, não incisivas, de pouca interferência na investigação, para colher, refletir e interpretar as diversas informações provenientes das mesmas.

Para um bom e satisfatório processo de investigação em sala de aula, o professor é peça fundamental; todo o cenário investigativo é pensado ou escolhido por ele, é o professor quem pode fornecer uma base consistente para a investigação dos alunos, que, mesmo com poucas interferências, com sua simples presença, evidencia aos alunos que aquele momento é importante, e deve assim ser tratado. É o professor quem pode mostrar aos alunos o quanto aprenderam, mesmo que de forma inconsciente. Ele quem vai refinar juntamente com os alunos os conhecimentos produzidos, evidenciando os motivos pelos quais é necessário estudar matemática.

#### **4.4 Explorar e Investigar em ambientes colaborativos**

A investigação matemática na sala de aula favorece o trabalho colaborativo, visto que, uma investigação ou exploração, em suas essências “chamam” e incentivam o trabalho em conjunto, no qual é receptivo o dinamismo das diferentes informações advindas de diferentes alunos. Frota (2005, p.1-2) infere que práticas investigativas:

[...] parecem ser cruciais para o desenvolvimento de uma postura especulativa em matemática podendo gerar também um deslocamento do foco da aula, do professor para o aluno no sentido de uma aula mais colaborativa. Atividades investigativas podem confirmar uma concepção de matemática como algo dinâmico, do conhecimento matemático como em construção através do desenvolvimento de ideias e processos, constituintes do pensar e fazer matemático.

Nessa perspectiva, cabe ao professor prever e planejar atividades que *a priori*, se mostrem atraentes e envolventes, às vezes, propondo funções aos alunos integrantes do grupo, porém, deixando que os mesmos discutam a quem caberá cada uma. Assim, a dar o primeiro incentivo para o trabalho colaborativo e, a mostrar que o diálogo é fundamental para o desenvolvimento da atividade. O professor deve propor rotinas que estimulem “a capacidade dos alunos cooperarem no seio do grupo - contribuindo e aproveitando as contribuições dos outros” (PONTE et al., 1998, p. 25).

Correa (2003) aponta três das várias características da colaboratividade, que podem ser consideradas também em um ambiente investigativo; a *interatividade*, que segundo o autor é essencial para a aprendizagem colaborativa, que é produto do intercâmbio entre ideias, opiniões e pontos de vista de dois ou mais, sobre um tema em comum. A segunda característica é a *sincronia da interação*; as indagações de determinado membro do grupo, influenciam o desenvolvimento de novas ideias e inferências dos outros membros sobre possíveis soluções, de forma constante e síncrona. A terceira característica, da *negociação*; nela os alunos negociam suas ideias, mantendo o respeito às ideias dos demais. Saber negociar é também saber ouvir, segundo o autor, a falta de negociação leva o diálogo à monotonia do individualismo, o qual transforma agentes em simples ouvintes.

Não se nega o fato de que um aluno, provido de uma boa capacidade intelectual, possa muito bem envolver-se individualmente em uma atividade investigativa. Mas, vale destacar que, um trabalho em grupo, com interação e discussão de diversas opiniões, pode agregar valor ao processo de aprendizagem. Um aluno pode aprender com as facilidades ou dificuldades dos demais membros do grupo.

Consideramos que as aulas na perspectiva das investigações matemáticas contrapõem ao isolamento docente, incentivam a colaboração entre estudantes e professores, propiciando condições para o desenvolvimento do trabalho coletivo e da autonomia dos estudantes. Dessa maneira, a interação entre professores e estudantes contribui para a formação de um novo cenário de aprendizagem, no qual os estudantes também sejam integrados ao processo de investigação com o intuito de construir sua aprendizagem. O aluno aprende como investigador e, assim, ao ser envolvido num processo de pequenos avanços e recuos, torna-se mais autônomo e gestor de sua própria aprendizagem. (PINTO; BEAN, 2012, p. 6)

Oliveira et al. (2000), refletem de forma geral, sobre experiências nas quais foram aplicadas atividades investigadas em ambientes colaborativos, construídos em sala de aula. Ao refletirem, sentiram e apontaram que:

- ✓ A estas tarefas podem envolver todos os alunos, não apenas os melhores;

- ✓ As atividades podem ser trabalhadas ativamente pelos alunos, proporcionando-lhes o sentimento de que estão se envolvendo e fazendo algo significativo;
- ✓ Uma autonomia significativa pode ser desenvolvida pelos alunos;
- ✓ É propício o estímulo à interação entre alunos, visto que as atividades investigativas sugerem o dialogar.

Os debates e discussões estabelecidos em um grupo que investiga, necessitam de tempo e espaço para serem devidamente transformados em conhecimento científico. A proposta não é substituir metodologias tradicionais por esta, ou por outras que surgirem. É relevante uma mescla, visto que, não se podem colocar as margens metodologias de grande potencial educacional, por mais desestabilizadoras que sejam.

#### **4.5 Tarefas exploratórias e investigativas em ambiente de geometria dinâmica**

Os ambientes de geometria dinâmica mostram-se abertos à elaboração e execução de atividades investigativa. *Exploração e/ou investigação* implicam nas ações de testar, observar e conjecturar, a opção de “arrastar”, oferta essa mobilidade aos alunos, permitindo-os transformar continuamente e em tempo real um objeto ou construção. “Sem dúvida, a principal característica de um *software* GD é a possibilidade do arrastar. [...] essa característica permite que estudantes explorem situações problemas e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando” (SILVA, PENTEADO, 2009, p. 1070).

O modo arrastar possibilita ao aluno estabelecer alguns pensamentos, e aplicá-los, no intuito de verificar a sensatez ou veracidade dos mesmos. O dinamismo proporcionado pelo *software* durante a investigação permite maior visualização, visto que, na comparação com as construções geométricas tradicionais, com regua e compasso, as figuras geradas no *software* podem ser movidas, podem ser tiradas de uma posição e recolocadas na mesma. O *software* de geometria dinâmica, em comparação com o plano representado pelo papel, fornece mais opções de movimento.

[...] a tela fornece a impressão de que o desenho está sendo deformado continuamente em todo processo de arrastar, enquanto mantém as relações que foram especificadas como essenciais da construção original. Isso permite agilidade na investigação, pois figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel são criadas em segundos na tela do computador. (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1069)

A autonomia dos alunos durante uma atividade investigativa, conforme sugerido por Ponte (2003), pode ser trabalhada também no ambiente de geometria dinâmica.

Possibilitando-lhes mover para ver, sem dizer-lhes quais movimentos devem ser feitos e como devem ser feitos. Dar tal liberdade aos alunos consiste em inserí-los em primeira instância ao contexto investigativo, que exige dos mesmos, curiosidade, destreza e boa percepção. Conforme Pinto e Penteado (2009, p. 9377)

A dinamicidade do software favorece uma metodologia mais centrada no aluno, pois ele fica mais livre para tomar iniciativas e explorar uma determinada situação problema, fator que contribui para a construção de um ambiente de aprendizagem que não fica centrado somente no professor. A partir desses fatores o aluno tem autonomia para explorar as atividades investigativas possibilitando um maior engajamento e motivação para aprender.

Nessa perspectiva, as atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica, devem convidar os alunos para realizarem a interação com o *software*, eles devem ser chamados a explorar propriedades e teoremas, conjecturar, testar e discutir com colegas suas ideias, por mais simples ou ingênuas que sejam, para que no decorrer do processo de investigação, possam desenvolver e refinar tais ideias, de forma a torna-las mais coerentes e próximas da formalidade matemática. Para refinamento das ideias matemáticas, as figuras e o modo como são construídas no *software*, são essenciais, o que é defendido por Silva e Penteado (2009), que apontam as figuras como sendo agentes do processo ao qual se investiga, visto que o envolver-se reflexivamente com as mesmas, pode agregar significado ao objeto investigado.

O trabalho investigativo em *software* de geometria dinâmica traz duas dificuldades iniciais: o investigar e o trabalhar com *softwares*. Como já foi dito, a pouca familiarização com ambientes investigativos, limita os alunos no que diz respeito às tomadas de decisões. A pouca familiarização com *softwares* matemáticos também dificulta o trabalho, a falta de instrução faz com que os alunos esbarrem no que/como fazer. Inforsato, Penteado e outros investigadores, conforme abaixo, apresentam observações feitas durante utilização de um *software* de geometria dinâmica em um cenário de investigação. A primeira instância, perceberam que os alunos:

[...] pareciam meio confusos, pois muitos alunos não sabiam o que era um software e qual sua utilidade. Mesmo os alunos que não apresentavam dificuldades em manusear o computador, inicialmente ficaram confusos, pois poucos haviam trabalhado antes com atividades investigativas utilizando o computador. Porém, o desenvolvimento desses alunos foi também surpreendente, eles mostraram-se desafiados e motivados com tais atividades propostas. (INFORSATO et al., 2009, p. 3)

As dificuldades não são aqui colocadas visando inviabilizar a possibilidade de investigação em ambientes de geometria dinâmica, contrariamente, visa indicar o que *a priori* pode ser pensado e aplicado para um satisfatório trabalho com os alunos. Saber

que existem barreiras, e quais são estas, é um importante passo rumo à promoção de uma aprendizagem realmente significativa. As dificuldades serão sempre eminentes, não existindo a possibilidade de acabar com tais, na medida do possível e de forma gradual, tentativas devem ser feitas para amenizá-las.

#### **4.6 Atividades de exploração e investigação em ambientes colaborativos propícios à aprendizagem significativa**

Antes de pensar em criar ou utilizar uma atividade exploratória ou investigativa em sala de aula, o professor deve situar-se do que de fato são atividades investigativas, e como se constitui um cenário para investigação, que segundo Skovsmose (2008, p. 17) é “um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação”. A atitude aqui sugerida, destinada ao professor consiste na construção e enriquecimento significativo de sua estrutura cognitiva, para, a partir disso, trabalhar coerentemente a exploração e a investigação em sala de aula.

O professor que conhece a TAS, ao conceber esse conhecimento atentando para os princípios da Aprendizagem Significativa, terá respaldo teórico (da TAS) e prático (de sua própria experiência de aprendizagem), para trabalhar as tarefas em sala de aula. Pela TAS, torna-se necessário, inserir mesmo que superficialmente os alunos no contexto investigativo, antes de envolvê-los com tarefas desse cunho. Caso contrário, os alunos podem sentir-se “perdidos”, sem saber por onde começar. Se os alunos não possuem conhecimentos prévios sobre o que é investigar, eles não saberão que devem ser curiosos e ativos, se não sabem disso, muito provavelmente, ficarão estagnados em frente à tarefa, esperando uma posição do professor.

Uma estrutura generalizada do contexto de investigação pode ser tratado como um organizador prévio, e subsequente subsunçor relevantes, para que os alunos investiguem juntos, e juntos aprendam significativamente. Um estudo prévio por parte do professor é essencial para o tratamento de tarefas de cunho investigativo em sala de aula: o professor deve estar ciente “do conteúdo matemático, dos objetivos e das competências do currículo, e da experiência anterior dos alunos. Tudo isso deve ser tido em conta e integrado numa perspectiva geral sobre o modo como prosseguir com o trabalho”. (OLIVEIRA et al., 2000, p. 8)

Ponte et al. (1998, p. 15) descrevem que, o aluno observa no professor, aspectos importantes para o trabalho investigativo, portanto, o modo como o professor

se relaciona com o contexto investigativo, é uma forma de organizar e fornecer informações importantes às estruturas cognitivas dos alunos, ou seja, a promoção de um momento investigativo executado pelo professor, que resulta em um organizador prévio, que de forma prática, respalda aos alunos no desenvolvimento de suas próprias investigações. “O facto de os alunos observarem directamente os professores a investigar é extremamente importante para aprenderem, eles próprios, o modo de conduzir uma investigação”. Essa organização prévia é importante, pois:

[...] à partida, os alunos não sabem muito bem o que se pretende numa investigação, o que é preciso fazer e como. Não dão, muitas vezes, a importância necessária à formulação de questões nem realizam uma boa organização dos dados. Outras vezes, consideram que as conjecturas que vão formulando devem ser rapidamente apresentadas à professora (para assegurarem prioridade na descoberta) e não precisam de ser por eles testadas. Ver alguém a pensar matematicamente é uma boa maneira de ganhar uma noção daquilo em que consiste, de facto, esta atividade. (PONTE, et al., 1998, p. 15)

Mediando constituição por parte dos alunos de uma estrutura cognitiva mais elaborada sobre investigação, o professor continuará com problemas, porém, certamente, menores do que os possíveis problemas que teria de lhe dar se não situasse os alunos. As tarefas investigativas, conforme princípios da Aprendizagem Colaborativa se abrem ao diálogo, no qual o aluno aprende em/com/como grupo que investiga. Para aprender significativamente nesse ambiente, “no decurso da realização de uma atividade de investigação é importante que os alunos relacionem o trabalho que estão a fazer com ideias já suas conhecidas e possam desenvolver a sua compreensão do que é Matemática” (PONTE et al., 1998, p. 21) .

Pensar nessa ligação é simples, porém, a execução da tarefa pode facilmente extrapolar as expectativas do professor; o conhecimento de que um triângulo possui três lados, é um subsunçor especificamente relevante para a aprendizagem significativa de conceitos de Triângulo Escaleno, Equilátero e Isósceles. Pedir com que os alunos investiguem estes triângulos é dar-lhes abertura para recorrerem à Geometria Plana, à Geometria Analítica, à Geometria Dinâmica, e outros elementos que não podem ser aqui descritos, pois não se pode deduzir o pensamento do indivíduo, e as implicações do mesmo no grupo colaborativo. Mesmo o processo relacional mediando à aprendizagem do aluno, seu empenho sobre as tarefas, ainda seriam um desafio, porém, um desafio construtivo, que lhes proporcionariam a oportunidade de aprenderem significativamente, e de forma colaborativa.

## CAPÍTULO V

### A PESQUISA DE CAMPO

#### 5.1 A metodologia qualitativa a luz da fenomenologia e a interrogação da pesquisa

A fim de promover a clarividência da totalidade desta pesquisa, uma totalidade que não se esgota, que está em constante processo, utilizamos uma abordagem qualitativa, mediante olhares da fenomenologia, ou seja, procuramos explicitar, da forma mais clara e coerente possível, nossas compreensões e tomadas de decisões mediante um viver e estar em um mundo, adotando postura de investigadores que interrogam o que de fato acontece, o que é concebido deste mundo e o que o concebe.

O mundo é aquilo que podemos representar como uma unidade, não se trata de um indivíduo isolado, ou de um objeto ou de vários homens ou objetos espalhados, soltos no mundo. [...] Se somos uns para os outros, ou “uns-com-os-outros”, precisamos, necessariamente, ter uma aparência mútua. Não se trata de uma aparência externa mas de uma aparência ou perspectiva um do outro. (MARTINS, J. 1992, p. 55).

Optamos pela fenomenologia como metodologia de pesquisa, pela consonância entre a concepção do ser para a mesma e para a TAS, as quais dão um tratamento qualitativo para o humano, ao concebê-lo como indivíduo que significa as coisas do mundo, de forma a ampliar e se ampliar ao enriquecer a totalidade de sua existência. O viés colaborativo desta pesquisa, também incentivou a abordagem fenomenológica, uma vez que sob a ótica de tal, o humano é concebido na totalidade de seu ser, no conjunto de experiências advindas do *estar-no-mundo*; na interação direta com o *Outro*, ou seja, com outros *mundos-vida*<sup>4</sup>. Assim, suas concepções “transcendem a idealidade solipsista de um “*Eu Puro*” que se auto-apreende e se auto-compreende.” (BICUDO, 1999, p. 29). Este olhar aponta a percepção do *Eu* e dos *Outros* enquanto cossujeitos da intenção de viver coisas mundanas.

Embora haja apenas um sujeito (*o Eu*), o *Outro* não é dado simplesmente como objeto psico-físico, mas é também um sujeito que se questiona e que age reflexivamente e, como tal, percebe o *Eu* como pertencente ao mesmo mundo dele. [...] o mundo não é apenas uma sena privada, mas uma propriedade pública. (BICUDO, 1999, p. 31).

---

<sup>4</sup> [...] entendido como a espacialidade (modo de sermos no espaço) e a temporalidade (modo de sermos no tempo) em que vivemos com outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividades e de conhecimentos humanos. (BICUDO, 2011, p. 30)

O que se torna proeminente em pesquisas de cunho fenomenológico é o tratamento dispensável de pressupostos e idealizações, como entes do que se está a investigar, ou seja, não cabe em pesquisas embasadas neste campo, o levantamento de hipóteses que ao final devem ser comprovadas. A fenomenologia defende o deixar acontecer para ver, munindo-se apenas da interrogação que norteia a pesquisa, e orienta o interrogar o fenômeno, buscando “ir-a-coisa-mesma, isto é, [...] compreender o fenômeno em sua essência, na forma como é, dado na experiência vivida, sem embasamento em teorias previamente estabelecidas, avançando no movimento de compreensão”. (SANTOS, 2013, p. 37). A fenomenologia:

Trabalha com o real tal como ele é vivido no cotidiano, o que significa que não parte de proposições lógicas ou de teorizações sobre o aluno, a escola, a atividade docente e a aprendizagem, mas toma alunos e professores no modo como estão em uma escola específica. (BICUDO, 1999, p. 12)

Ao longo da trajetória deste estudo, foi-se construindo a questão capaz de dar conta do que se entendia serem inquietações. A redação seguinte tenta revelar essa construção: **Como se dá o envolvimento de professores e futuros professores de Matemática, com uma proposta que intui gerar Aprendizagem Significativa de conceitos de Geometria Analítica Plana, mediada por atividades exploratórias e investigativas em um ambiente colaborativo de Geometria Dinâmica?**

O fenômeno aqui investigado enfatiza a interação entre o que se *mostra* no íntimo de um viver o/no mundo colaborativo-investigativo proposto, e nossa consciência<sup>5</sup> de interrogar isso que se *mostra*. Segundo Bicudo (2011), algo que se *mostra* conseqüentemente se *mostra* a alguém que o olha, esta implicação é que torna manifesto um fenômeno. Não existe uma resposta pronta para a interrogação levantada, isso se dá, *a priori* pela amplitude e complexidade do ser, que ao viver para/com o outro rompe os limites que separam o individual e o coletivo. Buscamos sob ótica fenomenológica apontada por Bicudo (2011), ir ao encontro de uma interpretação que possibilite, a partir de análises efetuadas, compreender os processos vividos e manifestados em consonância com o julgamos ser aprender significativamente.

A fenomenologia assim como a TAS, quando em pauta o estudo de um conjunto de experiências manifestadas por um ser no decorrer de um viver-significativamente<sup>6</sup>,

---

<sup>5</sup> “Para a fenomenologia, a consciência é intencionalidade. É o próprio ato de estar-se atento, dirigido para...” (BICUDO, 1999, p.17)

<sup>6</sup> Estar no mundo, munido da totalidade de seu ser, de todas suas experiências, e utilizando as mesmas como subsunçores, para em um processo relacional conceber novos significados, e por eles ser concebido.

Fonte: O autor

sugere o lançar-se sobre o mundo exposto, tentando entendê-lo em plenitude e profundidade, buscando a “essência” das coisas, as possíveis relações destas com o que está a acontecer, e suas implicações para a aprendizagem significativa. Porém, não cabe a idealização de explicar tal mundo, mesmo após entendê-lo, devemos nos munir de humildade e assumir, que tal façanha esbarra-se na complexidade do pensar e do agir de cada indivíduo. “O ponto forte da fenomenologia está na descrição, não na explicação ou análise”. (MARTINS, J. 1992, p. 53).

A compreensão do fenômeno pode ocorrer mediante *transcendência fenomenológica*, “uma retrospectiva do vivido” (BICUDO, 1999, p. 20), que é composta pelo processo de *redução fenomenológica* no qual “buscamos, atentivamente, nos individuais percebidos, descritos, analisados, aspectos mais gerais que vão sendo articulados de modo a evidenciar núcleos de compreensões” (BICUDO, 2011, p. 55), esta busca se dá na necessidade intencional de desvelar e compreender o vivido.

Esse movimento de redução implica como é denominado por Husserl (1954, p. 110) a *epoché*, o processo de “suspensão de validades natural-ingênuas e, em todo caso, de validades que já estão em efetivação”. Ao efetuar uma *epoché* o pesquisador irá abster-se de suas crenças e perspectivas sobre o fenômeno interrogado, para lançar-se aos manifestos e suas intrínsecas conexões, como um indivíduo sem pré-conceitos, regido pela humildade do *querer saber como*, ausentando-se do *querer determinar como*. Assim, cabe ao pesquisador realizar *epoché* em todo o percurso que o leva às considerações finais de sua pesquisa; deve realizar *epoché* no estar em campo, no olhar o indivíduo enquanto sujeito de pesquisa, nas tomadas de decisão, no atentar aos fatos, na tentativa de compreensão do vivido e na exposição do mesmo.

A *redução fenomenológica* atua em cumplicidade à *epoché*, uma vez que uma trata a apresentação criteriosa do vivido assim como de fato aconteceu, e a outra o debruçar sobre o mesmo. Ambos estão diretamente ligados ao intuito de compreender o mundo de experiências manifestadas em função daquilo que se interroga.

Vale frisar, que o saber previamente os conhecimentos dos sujeitos, conforme sugerido pela TAS, segundo a fenomenologia não nos permite explicar em completude o manifestado em determinada experiência vivida, o que pode ser feito é construir um horizonte de possibilidades que oportunize diferentes interpretações, feitas por diferentes pessoas, em função do modo de ver, perceber, e de se lançar sobre o mundo de significados que se apresentou. Há de se atentar ao “achar que conhece”, ou que “passou a conhecer” o ser enquanto totalidade, que se desenvolveu com a

experiência, esta concepção, muitas vezes pode ser propiciada pelo pesquisador que pensa ter conhecimentos suficientes, e assim o permite determinar e/ou categorizar as coisas, desse modo, indo de encontro à proposta do processo da *epoché*, que sugere o desliga-se de compreensões tão incisivas.

Buscamos então, apoio na fenomenologia para o *ser pesquisador*, que se preocupa qualitativamente com esta pesquisa e com todo seu entorno. Seus princípios nos acompanharam em todo processo de investigação; utilizamos os mesmos para estar: com os sujeitos, com nós mesmos e com o mundo expresso pela descrição das interações, dispostas assim como de fato se apresentaram e se desenvolveram. Adotamos uma postura aberta para conceber em amplitude tudo que este mundo pode nos oferecer, incluindo a possibilidade de compreensão do fenômeno interrogado.

## 5.2 Os instrumentos pensados e elaborados para a pesquisa

Como a TAS privilegia um ensino pautado no que o aluno já sabe, tornou-se necessário previamente, levantar informações que tornaria possível a observação de experiências vividas pelos pesquisados. Para este levantamento inicial, optamos em aplicar um *Questionário*, no qual direcionamos a exposição de informações que julgamos relevantes para a pesquisa, estas que serão postas e discutidas mais adiante.

Uma segunda ferramenta utilizada foi o ***Pré-levantamento***, que teve objetivo complementar ao do ***Questionário***; Levantar e relacionar informações específicas sobre a vivência do aluno, ou segundo a TAS, os conhecimentos prévios ou subsunçores específicos presentes em suas estruturas cognitivas.

Durante todo o processo da pesquisa de campo, foram utilizados para registro das informações correntes, o ***chat*** do VMTwG, ao qual fizemos a retrospectiva do vivido utilizando o aplicativo *Replayer*. Lançamos mão de ***aparelhos de gravação de áudio e vídeo***, tais como: filmadora e *Webcam*, no intuito de registrar o máximo de informações possível, visto que, intuíamos observar minuciosamente o diálogo, gestos e expressões que julgamos relacionáveis à nossa interrogação.

Durante os encontros e posterior aos mesmos, foram feitas ***entrevistas***, nas quais os alunos foram convidados a indagar sobre as experiências vivenciadas; observações que julgaram relevantes, possíveis colaboração para a formação docente, posicionamento sobre a metodologia vivenciada, possível aplicação da mesma, etc.

### **5.3 O campo e os sujeitos da pesquisa**

Intuindo estimular reflexões sobre as práticas docentes e a formação escolar dos estudantes do ensino básico, tornou-se relevante direcionar o desenvolvimento desta pesquisa para sujeitos vinculados à Licenciatura em Matemática. Os professores e futuros professores que participaram da pesquisa, foram convidados a pensar e repensar suas práticas e intenções, mediante apresentação de novas perspectivas para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Influenciou também na escolha especificamente deste grupo, a intenção de atingir o maior número de pessoas possível com a aplicação da pesquisa; se esta fosse executada em uma turma do ensino básico, o público alvo se limitaria apenas aquela turma. Já aplicando em uma turma constituída por professores e futuros professores, a experiência vivenciada pelos mesmos, pode tornar-se experiência aplicada nos colégios em que lecionam ou irão lecionar.

A pesquisa foi realizada em uma universidade pública do estado de Minas Gerais. A aplicação, que a princípio era definida como pesquisa de campo, depois do envio e aceite de um projeto junto à Pró-reitoria de Extensão (PROEX), ganhou o status de Curso de Extensão em Geometria Analítica Plana, houve uma institucionalização da pesquisa. Sendo assim, os alunos que participaram como sujeitos de pesquisa, foram certificados. Inscreveram-se para o curso doze alunos, estes, que mediante programação feita para/com eles participaram em totalidade.

O currículo da universidade na qual foi aplicada a pesquisa apresenta aos alunos que prestam vestibular, o Curso de Ciências Exatas, com duração de dois anos, nesse intervalo o aluno que ingressou, deve escolher qual ciência pretende continuar a estudar. Para os que escolhem a Matemática, mais uma escolha é sugerida; formar-se bacharel ou Licenciado. Sendo assim, vale frisar que dos doze pesquisados, sete cursavam o sexto ou sétimo período, já aderidos à Licenciatura em Matemática, quatro outros, cursavam o terceiro ou quarto período do curso de Ciências Exatas, no entanto, argumentaram o interesse em atuarem como professores, e um aluno já era professor formado, e no momento da pesquisa, dava andamento a seu Mestrado Profissional em Educação Matemática da mesma universidade.

### **5.4 A busca da preparação de uma sequência didática coerente com as teorias fundamentadoras**

O princípio fundamental da TAS, é que a aprendizagem de um novo conhecimento só é significativa, se este for relacionado à conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Portanto, não poderíamos iniciar a pesquisa sem antes ***levantar os conhecimentos prévios dos alunos*** sobre o conteúdo a ser aplicado, bem como, os meios e formas de aplicação do mesmo, tais como: conhecimentos sobre colaboração, exploração e investigação matemática, sobre os softwares de geometria dinâmica, e sobre conhecimentos específicos de Geometria Analítica Plana.

Uma vez observada a falta de conhecimento por parte dos alunos em alguns desses objetos, torna-se necessário, apresentar o que a TAS chama de ***Organizadores Prévios***, que são conhecimentos generalizados, menos inclusivos, responsáveis por organizar informações e ideias, que possam subsidiar a aprendizagem significativa do novo conceito:

- *Na falta de saberes sobre colaboração, atividades exploratórias e investigativas:*

É necessário, pois, em vias gerais, familiarizar os alunos com o contexto colaborativo e investigativo. Uma maneira de inserir o aluno neste contexto é promover um momento de investigação, no qual grupos de alunos debruçam-se sobre determinada atividade, e o professor, além de mediar, dedica-se a investigar junto, de forma a mostrar possíveis abordagens, apontar como um grupo colaborativo deve se portar, em especial, retratar a importância do respeito aos colegas de grupo, e consequentemente, às ideias dos mesmos.

- *No caso da falta de conhecimento sobre os softwares de geometria dinâmica*

Neste caso, cabe dar oportunidade aos alunos de envolverem-se, na prática, com um *software* de Geometria Dinâmica; deixar que utilizem suas ferramentas, a princípio, de forma espontânea, em seguida, de forma orientada. O objetivo é estabelecer um conhecimento generalizado sobre as possibilidades desses *softwares*.

Durante a aplicação das atividades, o conhecimento prévio sobre softwares de Geometria Dinâmica e suas possibilidades, auxiliará na concepção de novos conhecimentos envolvidos com o próprio *software*, e com as funções e propriedades de cada ferramenta do mesmo. Pode facilitar também, o envolvimento entre os membros do grupo, e dar melhores opções para as investidas na investigação proposta.

- *Na falta de conhecimentos prévios necessários para aprendizagem de conceitos específicos de Geometria Analítica Plana.*

É necessário, pois, abrir um horizonte, que remeta a elementos norteadores à aprendizagem significativa do que se intui ensinar. Como exemplo, para possibilitar a significação do conceito e/ou da fórmula de distância entre dois pontos, o professor pode simbolicamente e/ou por comparação, apresentar reflexões tais como: distâncias entre cidades, percurso de um carro, passos dados entre dois postes, pode mostrar como calcular a distância entre dois pontos na equivalência desta com a hipotenusa de um triângulo retângulo disposto no gráfico cartesiano, etc.

De forma geral, uma sequência para esta pesquisa sugere o seguinte:

- Levantar conhecimentos prévios através de questionário e pré-levantamento;
- Estimular um diálogo inicial sobre: Colaboração, Exploração, Investigação;
- Apresentação de organizadores prévios sobre Colaboração, Exploração, Investigação, Software de Geometria Dinâmica, e conhecimentos específicos da Geometria analítica Plana;
- Abrir um diálogo sobre os mesmos temas após a organização prévia;
- Promover em ambientes colaborativos o envolvimento com as atividades exploratórias e investigativas;
- Promover o momento de socialização das experiências vividas, faladas e registradas durante as atividades exploratórias e investigativas;
- Entrevistar os sujeitos de pesquisa.

Vale frisar que, esta sequência, foi modificada durante o processo de pesquisa. Uma vez percebido, que os alunos carregavam conhecimentos prévios relevantes para a aprendizagem de um conteúdo em questão, os momentos voltados para apresentação de organizadores prévios não seriam necessários, para o professor e/ou mediador, basta utilizar-se destes conhecimentos como bases para a aprendizagem no novo conhecimento que ele propõe ensinar.

## **5.5 Refletindo aspectos significativos provenientes dos questionários**

O questionário, conforme apresenta o Apêndice D foi composto por oito itens, sendo que, o item quatro continha dois subitens. Diferente dos outros, o oitavo item apresentava uma questão aberta. Intuímos aqui, apresentar alguns dados que justifiquem muitas das falas já feitas neste estudo. Os quadros abaixo expõem as informações retiradas diretamente dos questionários respondidos:

- *Dados relacionados à faixa etária e formação inicial*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
1.	Faixa etária	17 a 20 anos	02
		21 a 25 anos	08
		26 a 30 anos	01
		31 a 35 anos	-
		Mais de 35 anos	01
2.	Formação básica	Escola Pública Municipal	-
		Escola Pública Estadual	05
		Escola Pública Federal	01
		Escola Particular	06
		Outras	-

Quadro 2 – Faixa etária e Formação básica dos pesquisados

Fonte: o autor

Este quadro evidencia o equilíbrio no número de alunos que cursaram o ensino médio em rede particular e em rede pública. Percebe-se também que a maior parte dos pesquisados estão em idade vista como “regular” para a conclusão do ensino médio e conseqüentemente ingresso na universidade; os dois alunos mais novos cursavam o terceiro período, os alunos que possuem de 21 a 25 anos cursavam 7º ou 8º período.

- *Dados relacionados ao estudo de Geometria Analítica Plana no Ensino Médio*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
3.	Estudou Geometria Analítica Plana no Ensino Médio?	Sim, e aprendi muito	03
		Sim, mas aprendi pouco	03
		Sim, mas de forma rápida e superficial	05
		Não foi ensinado	01
		Não me lembro	-

Quadro 3 – A Geometria Analítica Plana e o Ensino Médio

Fonte: o autor

Este quadro possibilita direcionar pensamentos ao que já foi descrito nas pesquisas de Di pinto (2000), Pirola (2000). Sugere o possível descaso com o ensino de Geometria no Ensino Médio, visto que, dos doze alunos, nove assinalaram indícios de um “mau tratamento” do conteúdo. Destacamos que todos os sujeitos que assinalaram o pouco ensino e a pouca aprendizagem, cursaram o Ensino Médio na rede pública. Os três que assinalaram que “aprenderam muito” cursaram em rede particular. Isto pode corroborar com pensamentos comparativos, que podem classificar o ensino em escola particular como melhor do que o ensino em escolas públicas, o que é descrito na tese de doutorado de Pavanello (1993) e percebido até os dias atuais.

- *Dados relacionados ao envolvimento com atividades exploratórias e/ou investigativas no ensino médio*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
4.1	Se o professor trabalhou atividades Exploratórias no Ensino Médio	Sim, apresentava muitas atividades do tipo	01
		Sim, mas poucas vezes	02
		O professor não trabalhava este tipo de atividade	08
4.2	Se o professor trabalhou atividades Investigativas no Ensino Médio	Sim, apresentava muitas atividades do tipo	00
		Sim, mas poucas vezes	01
		O professor não trabalhava este tipo de atividade	11

Quadro 4 – Atividades Investigativas e Exploratórias em sala de aula

Fonte: o autor

Este quadro deixa claro o que já foi discutido nesta pesquisa; os alunos não estão familiarizados com o tratamento de atividades exploratórias e investigativas, o que corrobora com a dificuldade em envolver-se com tais atividades, em especial com as investigativas que sugerem maior liberdade e autonomia.

- *Dados que apontam as metodologias utilizadas pelos professores no Ensino Médio (podia-se assinalar mais de uma opção)*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
5	Metodologias utilizadas pelo professor	O professor introduzia o novo conteúdo com, uma definição, seguida de demonstração da fórmula, exemplos e listas de exercícios.	10
		O professor procurava fazer um levantamento de seus conhecimentos antes de aplicar um novo conteúdo.	02
		O professor relacionava o novo conteúdo a ser ensinado a conhecimentos que você já possuía, concebidos no ambiente familiar, no ambiente social, no cotidiano.	02
		O professor ensinava um novo conteúdo sem se preocupar se você possuía conhecimentos que facilitariam a aprendizagem desse novo conteúdo.	04
		O professor promovia uma introdução histórica, ou qualquer outra mais generalizada, antes de ensinar um conteúdo mais específico.	01
		O professor utilizava de tecnologias informatizadas no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos.	01

Quadro 5 – A metodologia utilizada pelo professor de Matemática do Ensino Médio

Fonte: o autor

Este quadro trata de temas importantes para esta pesquisa, tais como: a Aprendizagem Significativa, Aprendizagem Mecânica e a utilização das TIC no ensino e na aprendizagem. Nele percebem-se indícios da sobreposição da Aprendizagem Mecânica à Aprendizagem Significativa, uma vez que a maioria dos sujeitos assinalou que no Ensino Médio, nas escolas em que eles estudaram, o professor introduzia o novo conteúdo com uma definição, seguida de demonstração da fórmula, exemplos e listas de exercícios, sem se preocuparem com o que eles previamente conheciam.

Outro aspecto, diz respeito ao envolvimento com tecnologias no Ensino Médio, apenas um aluno assinalou que seu professor utilizava de tecnologias no processo de ensino e de aprendizagem. Os possíveis motivos para este dado são apontados por Borba (2010) e Bicudo (2000), um deles é o receio dos professores em se aventurar em uma novidade na qual eles não se sentem devidamente inseridos.

- *Dados sobre o envolvimento com a aprendizagem colaborativa (podia-se assinalar mais de uma opção)*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
6	Nas Atividades em grupo	Todos do grupo participavam ativamente, respeitavam e discutiam as ideias de cada membro.	02
		Alguns alunos ficavam dispersos, um ou dois empenhavam-se na atividade.	07
		O professor acompanhava a atividade incentivando a colaboração e o diálogo entre os membros do grupo.	02
		O professor não mediava a atividade em grupo.	06
		O professor não promovia atividade em grupo	02
		O professor promovia a socialização dos resultados obtidos pelos grupos.	03

Quadro 6 – Atividades em grupos colaborativos em sala de aula

Fonte: o autor

O tema implicitamente aqui, é a Aprendizagem Colaborativa. O quadro apresenta indícios de que o trabalho colaborativo vivenciado por grande parte dos sujeitos no Ensino Médio não propiciou uma aprendizagem em colaboração, como foi aqui discutido. Fica evidente que não basta estar reunido para ocorrer colaboração, visto que a maioria dos sujeitos assinalou que durante o trabalho em grupo, alguns alunos ficavam dispersos, deixando o serviço por conta de um ou dois. Sobre a atuação do professor na mediação dos trabalhos em grupo, percebe-se neste quadro, com estes sujeitos, evidências que apontam para a pouca ou nenhuma mediação, um dos motivos pelos quais muitas vezes a colaboração não se manifesta por completo.

- *Dados sobre o envolvimento dos sujeitos com softwares de geometria dinâmica.*

ITEM	MODALIDADE	QUESTIONAMENTOS	MARCADOS
7	Software de Geometria Dinâmica	Conheço bem a funcionalidade e as possibilidades técnicas e didáticas de softwares de Geometria Dinâmica.	01
		Conheço um pouco, e pouco trabalhei nestes softwares.	03
		Fui apenas apresentado às ferramentas de software(s) de geometria dinâmica.	04
		Conheço bem e trabalho com software(s) de geometria dinâmica.	00
		Não conheço.	04

Quadro 7 – O envolvimento com softwares de Geometria Dinâmica  
Fonte: o autor

Mais uma vez, consta-se o que já foi dito anteriormente, onze dos sujeitos, mesmo pertencentes ao contexto acadêmico, mesmo cursando uma licenciatura, não conhecem ou pouco conhecem *softwares* de geometria dinâmica. Apenas um dos pesquisados disse conhecer bem este tipo de *software*, e as potencialidades dos mesmos. Os demais que disseram também conhecer *softwares* de geometria dinâmica assumiram apenas conhecer algumas ferramentas, não sabem da potencialidade didática e não sabem trabalhar/aplicar os mesmos.

A questão aberta pretendia saber; **Quais objetivos pretende alcançar como professor de matemática? Dentro destes objetivos, quais contribuições intui proporcionar a seus alunos?** Muitas das respostas apontaram a intenção de mudar pensamentos e perspectivas, que fazem com que a Matemática seja tratada como algo tão difícil, que intimida e amedronta os alunos, pré-conceitos estes apontados pelos sujeitos como um dos principais motivos dos problemas recorrentes do ensino e da aprendizagem de matemática.

Alguns sujeitos evidenciaram o objetivo de serem bem sucedidos na profissão. Pretendem estar sempre atualizados e ensinar com empolgação. Alguns intuem trabalhar com novas metodologias para facilitarem o entendimento dos conteúdos

matemáticos, em especial, apontam a pretensão de trabalhar com tecnologias informatizadas. Serão abaixo descritas algumas respostas nas que se percebe a compatibilidade com a TAS, suporte maior desta pesquisa. Atentando para questões éticas, os nomes dos sujeitos expressos a seguir, são fictícios.

Bom meu objetivo como professora de Matemática, é fazer uma ligação da matemática com a vida, e mostrar para o meu futuro aluno onde a matemática está em nossa vida, depois construir um pensamento matemático ligando os conteúdos um com o outro, e até outras matérias, não criando meu aluno como uma máquina onde jogamos valores e exercícios iguais para que ele apenas reproduza. (Registro escrito de Lara)

O principal objetivo é fazer com que meus alunos passem a ver a Matemática com outros olhos e não com os conceitos negativos que têm formado da disciplina. A partir daí, é claro com atividades investigativas, jogos, atividades relacionadas ao seu dia a dia, enfim, apresentar a eles aulas mais didáticas do que as aulas tradicionais que as conhecem. [...] Assim, os alunos poderão compreender e aprender a Matemática de forma simples e mais didática. (Registro escrito de Luiza)

Pretendo alcançar como professora de matemática proporcionar uma aprendizagem mais rica de matemática e não simplesmente uma aprendizagem superficial com decoração de fórmulas e com a execução de exercícios mecânicos. Contribuindo na educação e na socialização entre os alunos com atividades diversificadas. (Registro escrito de Marta)

Estas foram algumas das respostas que apontam a intenção da fuga de métodos muitas vezes mecânicos, trabalhando a relação dos conhecimentos matemáticos com conhecimentos prévios dos alunos, muita destes, advindos da vida cotidiana.

## 5.6 Refletindo aspectos significativos provenientes dos Pré-levantamentos

Aplicamos o pré-levantamento atentando à disponibilidade dos sujeitos; estivemos presentes na universidade todos os dias e em horários expandidos para recebê-los. Durante empenho destinado à resolução, percebemos nas falas dos sujeitos, certo “constrangimento”, em especial na indagação de quase todos sobre o esquecimento de alguns conceitos básicos de Geometria Analítica Plana. Vale lembrar, que o importante aqui, não é classificar o certo ou errado, por isto a adoção do nome pré-levantamento e não pré-teste, intui-se apenas levantar informações relevantes para a pesquisa, e muitas delas estão vinculadas ao “não saber” ou “esquecer”.

Para organizar esteticamente o espaço destinado ao estudo do pré-levantamento, optamos em expor aqui, apenas os registros algébricos e gráficos, enquanto recortes autênticos do documento, e os registros em forma de texto corrente, serão transcritos exatamente como posto pelos sujeitos. Ressaltamos que todos os

pré-levantamentos serão devidamente escaneados e salvos em mídia, que está no anexo desta pesquisa para consulta. A seguir, as questões do pré-levantamento e breve reflexão acerca das respostas dadas:

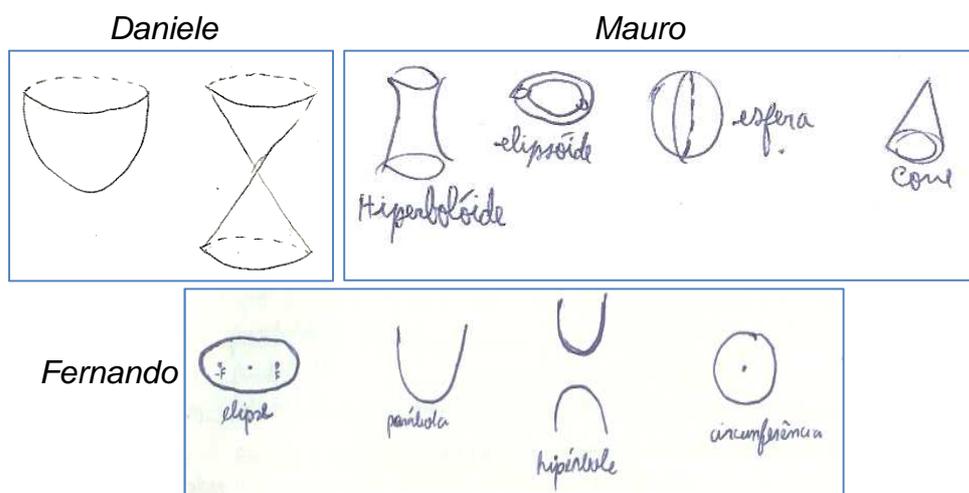
### Questão 1: As seções cônicas

#### a) *Representação gráfica:*

Pedia aos sujeitos que apenas ilustrassem as cônicas. Intuíamos levantar os conhecimentos prévios sobre a representação gráfica das mesmas. Grande parte dos sujeitos ilustraram a princípio as quádricas, alguns perceberam no decorrer, que o contexto voltava-se às figuras planas, retornaram ao “item a” e redesenharam, outros persistiram nas quádricas. Intuímos que isso se dá pela obliteração de registros cognitivos mais antigos, que são simbolicamente sobrepostos pelos mais recentes.

Quantificando, nove dos sujeitos ilustraram as cônicas, um ilustrou as quádricas e dois iniciaram uma tentativa de ilustrar quádricas, mas não deram continuidade.

Seguem alguns recortes feitos:



Este item trouxe um exemplo para o que foi anteriormente dito “não existe aqui o certo ou errado”; as quádricas ilustradas pelos pesquisados não são erros, tais desenhos mostram que os mesmos carregam conhecimentos prévios sobre os gráficos das cônicas, uma vez, que as quádricas representam as rotações das mesmas.

#### b) *Conhecimentos específicos sobre cônicas*

No item b, os sujeitos foram convidados a lançar o que sabiam sobre objetos e propriedades das cônicas. Percebemos a dificuldade dos pesquisados em tratar este item, não recordavam as propriedades e os objetos pertencentes às cônicas. Seis dos sujeitos apresentaram apenas as equações geradoras dos gráficos das seções, dois deixaram o item em branco, um dos sujeitos expressou sobre o “sólido de formato

cônico cortado por planos qualquer”. Três pesquisados argumentaram bem sobre propriedades específicas de algumas das cônicas e apontaram alguns objetos.

Daniele evidenciou o que possivelmente corroborou para a apresentação por parte da maioria de apenas equações, que também são aqui tratadas como conhecimentos prévios relevantes:

Quando estudei secções cônicas foi com um foco de resolver exercícios de cálculo, então para descobrir mais ou menos quem era a figura eu jogava valores e determinava a figura. Agora, definições e propriedades não recordo. E nem os nomes. (Registro escrito de Daniele)

Este relato sugere reflexões acerca da sobreposição da Álgebra à Geometria, recorrente muitas vezes de um ensino desarticulado, descontextualizado, que são indícios da aprendizagem memorística apontada por Ausubel (2001).

### *c) Contextualização das seções cônicas*

Aqui, o intuito foi levantar conhecimentos relacionados ao cotidiano dos sujeitos; pedimos com que relacionassem imagens vistas no dia-a-dia às seções cônicas. Os resultados deste item, em nossa concepção, podem ser classificados como satisfatórios; dez dos sujeitos relacionaram devidamente as imagens às cônicas correspondentes, alguns destes, relacionaram mais de uma seção à imagem posta. Um dos sujeitos mantendo o que havia ilustrado no item a, relacionou as imagens às quádricas. Apenas um pesquisado não fez nenhuma relação. Seguem figuras postas.



Figura 11: Imagens postas para item c da questão 1 do pré-levantamento  
Fonte: o autor

### Questão 2 – O trabalho colaborativo em sala de aula

O tratamento desta questão teve como objetivo apurar se os sujeitos conheciam sobre colaboração em sala de aula, para isto, pedimos que argumentassem em linguagem escrita sobre o assunto, e direcionassem pensamentos que relacionam a colaboração em sala de aula com eventos colaborativos do cotidiano.

A primeira descrição diz respeito a um dos dois sujeitos que trataram a colaboração apenas como ente da interação professor-aluno:

O trabalho colaborativo é aquele em que ocorre ajuda mutua de ambas as partes (professor e aluno). (Registro escrito de José)

A segunda representa um dos quatro sujeitos, que embasaram no significado e em sinônimos da palavra “colaboração” para caracterizar o tema em questão:

Não sei dizer o que é um trabalho colaborativo, mas pela palavra “colaborativo” acredito que seja trabalhos feitos em conjunto, o qual cada pessoa possa ajudar a outra. (Registro escrito de Daniele)

Apresentamos abaixo, uma das duas descrições que trataram colaboração como sendo uma atividade:

Trabalhos para fazer em casa, exercícios, uso da internet, materiais de desenho. (Registro escrito de Bruna)

Cinco sujeitos apresentaram argumentações mais elaboradas sobre o assunto, se mostraram familiarizados com o tema. Como exemplo, segue registro de Lúcia.

Trabalho colaborativo em sala de aula quando todo mundo se interage um com os outros, cada um expressa suas ideias, expõe duvidas, questionamentos, o professor acompanhando o desenvolvimento de cada processo e a formulação de conjecturas. Um trabalho colaborativo é para que no final possam ter um resultado positivo e que possa ter saído algo que foi beneficiado a todos, como um bom aprendizado do conteúdo e significados. Este trabalho envolve a participação de todos buscando um objetivo no final. (Registro escrito de Lúcia)

De todas as respostas, podem-se retirar informações importantes para o desenvolvimento da pesquisa, até mesmo das que trataram a colaboração como exercícios e atividades, pois é possível que previamente saibam que um trabalho colaborativo é sugerido para que ocorra o empenho sobre algum tipo de atividade. Em suma, a maioria dos sujeitos indagou sobre: ajuda de todos, trabalho em conjunto, cooperação e auxílio ao outro. Algumas destas respostas, embora não muito articuladas, apontaram a essência do trabalho colaborativo em sala de aula.

### Questão 3 – O tratamento de equações para se determinar os focos de uma elipse

Esta atividade, embora pareça fugir do contexto até então posto no pré-levantamento, carrega o importante objetivo de possibilitar a percepção sobre conhecimentos prévios dos sujeitos, que subsidiariam o envolvimento com equações de cônicas e com a equação da distância entre dois pontos. A atividade consistia em construir a partir de equações dadas os gráficos de uma circunferência e de uma elipse, seguido do calculo da distância entre o centro da circunferência e o foco de coordenadas positivas da elipse.

Três dos sujeitos indagaram não lembrar como tratar questões do tipo. Sendo as equações postas na forma geral, outros três sujeitos tentaram coloca-las na forma reduzida, o que indica que previamente sabem que assim, torna-se menos complexo ilustrar os gráficos, porém não reduziram a fórmula corretamente ou reduziram apenas uma delas, o que inviabilizou a construção dos gráficos. Seis pesquisados conseguiram reduzir as fórmulas que foram postas, porém não conseguiram traçar os gráficos e conseqüentemente, não encontraram a distância entre os pontos sugeridos. Apenas um destes pesquisados que conseguiram deixar as equações na forma reduzida, plotou o gráfico e aplicou a fórmula da distância entre pontos, porém devido a um erro de sinal não chegou à resposta correta. Seguem alguns recortes:

Roger:

Não lembro

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 25y^2 = 225$$

$$9x^2 + 18x + 9 + 25y^2 = 225$$

$$9x^2 + 18x + 25y^2 = 209$$

Camila:

$$1) x^2 + 4y^2 + 8x - 6y = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + 4y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Circunferência:  
C(-4,3), r=5

$$2) \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ (Elipse)} \Rightarrow a=5, b=3$$

$$a^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow 25 = 9 + d^2 \Rightarrow d = 4$$

$$F_1 = (3,0)$$

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{40} \approx 6,32$$

Letícia:

$$x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\frac{(x+4)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1$$

C = (-4, 3)

$$9(x+1)^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad F = (x_1, y_0)$$

Não lembro, como encontrar o foco da elipse

Nenhum dos pesquisados chegaram ao resultado esperado para a questão, no entanto, todos chegaram a resultados relevantes para a pesquisa; alguns mostraram a falta de conhecimentos específicos e outros manifestaram não conhecer previamente saberes relevantes para a aprendizagem de como encontrar a distância em questão.

#### Questão 4: A Investigação Matemática no ensino e na aprendizagem

Objetivávamos aqui, perceber no registro, saberes dos sujeitos acerca da utilização de investigação no processo de ensino e de aprendizagem de matemática. Percebemos que alguns não sabiam do que se tratava o assunto, outros indagaram algumas possibilidades mediante a sugestão dada pelo próprio nome “investigação”.

Um dos sujeitos argumentou sobre objetos matemáticos. Julgamos que o mesmo não apresentou um discurso articulado sobre o tema sugerido:

Podemos encontrar as formas matemáticas no nosso dia-a-dia, como um cone num chapel de aniversário, um anel uma circunferência, uma torre com hipérbole. (Registro escrito de Bruna)

Quatro sujeitos trataram o tema como um tipo de projeto que investiga o ensino e a aprendizagem de matemática. Como exemplo, segue um dos registros:

Seriam projetos realizados dentro de sala de aula, para um estudo de como é a aprendizagem de matemática e ao mesmo tempo como os alunos entendem e veem esta metodologia que nos é passada pelos educandos. (Registro escrito de Fabiana)

Quatro pesquisados apresentaram alguns elementos da investigação matemática, porém faltou a expansão de argumentos.

Fazer com que os alunos pensem, analisem, desenvolvam um pensamento sobre um determinado assunto. (Registro escrito de Letícia)

Apenas três sujeitos, já familiarizados com o tema, argumentaram bem sobre o mesmo e sobre suas características. Segue como exemplo o registrado por Fernando:

Quando se utiliza a investigação no ensino e aprendizagem de matemática, cria-se a possibilidade do próprio aluno descobrir os conceitos matemáticos que se pretende trabalhar, uma vez que este tipo de atividade geralmente é trabalhado antes da apresentação de definição, conceitos e formulas. O aluno é desafiado a encontrar regularidades conectar suas observações aos conhecimentos pré-adquiridos e, assim, poder inferir resultados formular conjecturas e tentar prová-las. Cabe ao professor mediar esta investigação, observando e questionando sobre os resultados obtidos e incentivando os alunos a seguirem adiante quando observar resultados válidos e consistentes. É uma poderosa ferramenta de ensino, que, usada corretamente, é totalmente benéfica e enriquecedora. (Registro escrito de Fernando)

Luana registrou que a atividade investigativa “é interessante para ver os conhecimentos prévios e as dificuldades”, ou seja, inconscientemente, vinculou o tema em questão com a teoria de aprendizagem aplicada nesta pesquisa. O mesmo é percebido na fala de Fernando quando diz que neste tipo de atividade, o aluno “é desafiado a encontrar regularidades conectar suas observações aos conhecimentos pré-adquiridos”.

## **5.7 Caracterização dos cenários para as colaborações investigativas**

No intuito de promover uma pesquisa, que em parte, se baseia nas perspectivas da colaboração, surgiu a necessidade de trabalharmos em ambientes nos quais a mesma torna-se possível. De forma ampla, pode-se dizer que a colaboração ocorre tanto em ambientes presenciais quanto em virtuais. Neste contexto, empenhamo-nos em elaborar um cenário que nos permitisse lançar luz ao fenômeno interrogado para deixar à mostra, manifestos que viabilizariam sua compreensão.

Cenário é uma maneira de dizer do todo que motiva a atividade. Percebe-se que os sujeitos numa situação em que nunca estão em atitudes predicativas falam, ou se expressam, como se movendo num todo. Esse todo é aberto: ao

outro, aos pré-conhecimentos do mundo cultural de cada um, a todas as experiências passadas que se retomam, e, qual um fluído em gás, aberto como abertura, como propensão, na chegada do outro e suas ofertas de significados autênticos compreendidos como coerentemente possíveis nesse todo. (DETONI; PAULO, 2011, p. 107).

A criação de um cenário favorável ao desenvolvimento da pesquisa ocorreu mediante nossas concepções, vistas como fundamentais para o bom andamento da pesquisa, e melhor tratamento da questão originária da mesma. Por se tratar de nossas concepções e intuições, sabe-se do risco de faltas e falhas. Esta é uma das premissas de um processo de pesquisar, e deve ser bem entendida pelo pesquisador. O cenário no qual ocorreu a colaboração-investigativa deveria dar conta de: Levantar discussões acerca dos temas: Colaboração, Exploração e Investigação em sala de aula; propiciar a vivência de uma metodologia que propõe a Aprendizagem Significativa mediante explorações e investigações feitas em grupos colaborativos; oportunizar a colaboração em ambientes virtuais e presenciais de aprendizagem; evidenciar o potencial das TIC para o ensino e a aprendizagem, intuindo motivar aos sujeitos a utilizarem tais tecnologias no exercício da docência.

Assim, foram programados e executados encontros presenciais e virtuais, sob a concepção de que tanto o ambiente presencial quanto o virtual, deveriam oportunizar e gerar momentos favoráveis ao envolvimento significativo dos sujeitos com temas da Educação Matemática, bem como à Aprendizagem Significativa de conceitos e proposições relacionados ao conteúdo de Geometria Analítica Plana.

### **5.7.1 O cenário para os encontros presenciais**

Nos encontros presenciais, procuramos estimular a interação entre os sujeitos, estabeleceu-se um diálogo visando modificar possíveis ideias dos sujeitos, estas que poderiam caracterizar os encontros como “rigorosos e maçantes”, ideias como a de que estariam sendo constantemente vigiados e manipulados. A promoção do diálogo objetivou então, a preparação de um ambiente agradável e convidativo, no qual os sujeitos poderiam se expressar sem receio de críticas e julgamentos.

Foram três os encontros presenciais, estes que ocorreram no laboratório de informática do departamento de Mestrado Profissional em Educação Matemática da universidade. Na primeira parte destes encontros, sujeitos e pesquisador foram dispostos em um círculo, para promoção de uma primeira discussão sobre os contextos

aos quais iriam posteriormente estar envolvidos; como os de Colaboração, Exploração e Investigação. Uma vez familiarizados com o ambiente, os sujeitos foram convidados a se reunirem em grupos menores na aplicação às atividades propostas.

### 5.7.2 O cenário para os encontros virtuais.

Foram promovidos dois encontros virtuais, nos quais cada sujeito tinha dias e horários pré-estabelecido para juntar-se aos demais do grupo. Os encontros foram mediados no VMTwG. Os grupos receberam as atividades via e-mail minutos antes do horário marcado para acessarem o ambiente. Tal iniciativa evitou uma consulta anterior à execução da atividade e conseqüentemente uma interferência que poderia distorcer o sentido da mesma. No ambiente, foram criadas e dispostas salas nas quais cada grupo deveria entrar e interagir, conforme abaixo:

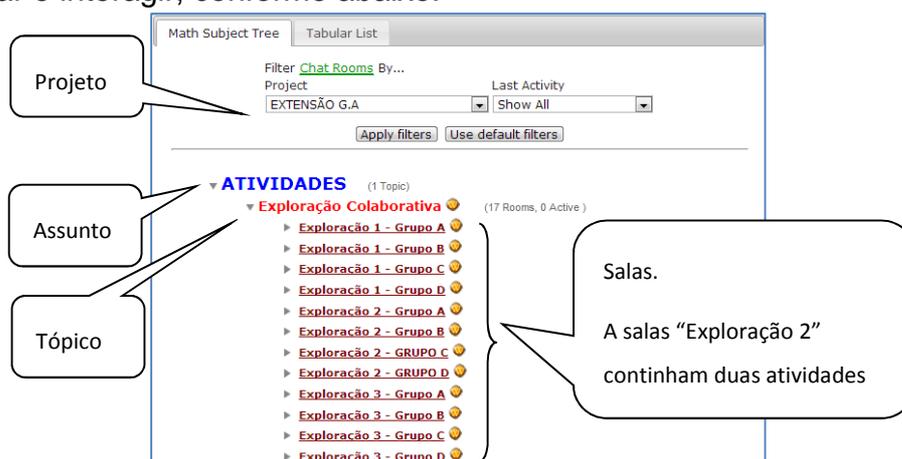


Figura 12: Salas criadas no VMTwG  
Fonte: O autor

Nas salas, os sujeitos eram recebidos pelo pesquisador-mediador, e convidados a trabalhar a atividade enviada por e-mail. Manteve-se a proposta do trabalho colaborativo feita nos encontros presenciais. O meio de comunicação no ambiente se deu através do *chat*, no qual os sujeitos foram orientados a compartilhar dúvidas, intuições, conjecturas, conhecimentos, etc., e juntos discutirem as colocações de cada membro, com o objetivo de uma aprendizagem conjunta, proveniente das certezas e incertezas postas e refletidas durante o diálogo.

No mesmo período do trabalho em campo proveniente desta pesquisa, O professor Dr. Arthur B. Powell, cedeu espaço no curso que ministrava na universidade, em que o estudo foi aplicado. Powell orientou que uma das atividades criadas para esta pesquisa fosse aplicadas aos alunos de seu curso, pois os mesmos estavam

incumbidos de criar uma atividade a ser aplicada no VMTwG. Então, o intuito era mostrar um exemplo de atividade, mostrar como inserir atividade no ambiente, e também favorecer a percepção da potencialidade do mesmo.

A Figura 13 mostra a interação dos alunos e ilustra o cenário no qual os sujeitos desta pesquisa estavam virtualmente inseridos. Na figura que segue, à direita, destaca-se o espaço reservado para a comunicação entre os membros do grupo, o *chat*, onde as observações feitas após os movimentos no Geogebra eram descritas e discutidas pelo grupo. Consta também, a aba do Geogebra; na qual os sujeitos fizeram os movimentos solicitados e atentaram para percepções provenientes dos mesmos, e a aba Resumo; onde os sujeitos foram convidados a um momento de colaboração que se destinava a reflexão e síntese do que foi discutido no *chat* sobre as percepções advindas dos movimentos na aba Geogebra.

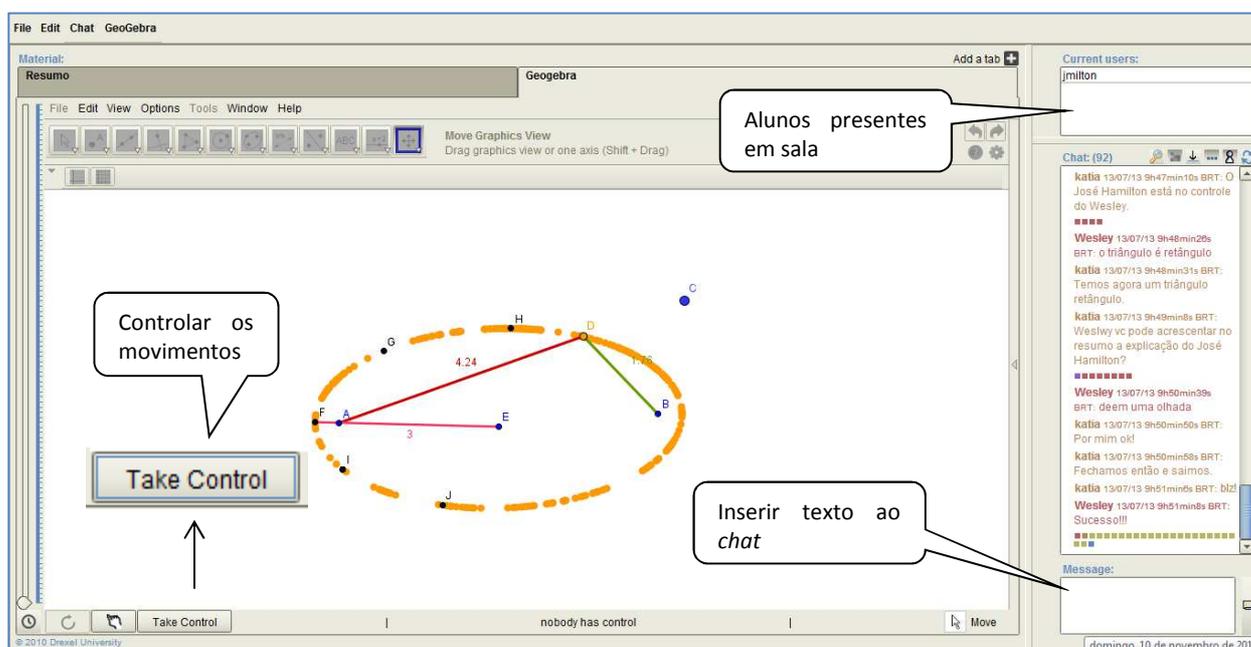


Figura 13: Sala do VMTwG – Aba do Geogebra e *chat*  
Fonte: O autor

Este padrão de cenário foi adotado para as tarefas exploratórias, sendo que a primeira delas, como dito anteriormente, foi realizada no ambiente virtual, porém presencialmente, nesse caso não se utilizou do *chat*, os discursos foram devidamente filmados e registrados.

## 5.8 A elaboração das atividades

As atividades pretendiam proporcionar a aprendizagem significativa de conceitos, habilidades provenientes do investigar e explorar em grupos colaborativos, e

de uma metodologia aplicável no ensino de novos conhecimentos. Assim, não nos apegamos à trivialidade ou a complexidade das atividades em si, mas sim, sua inserção em um ambiente com novas metodologias, aplicações e ferramentas, que podem propiciar aos sujeitos aprendizagem significativa de conhecimentos importantes, ou não, para atuação enquanto professores e futuros professores de matemática.

A presente pesquisa procurou apoiar nas definições de Ponte (2010) para elaboração das atividades. As atividades exploratórias sugerem ferramentas e ações para que a partir delas, os alunos aprendam significativamente, por descoberta ou por recepção o conceito intuído e os adjacentes ao processo de exploração. Nestas atividades, apresentamos um modelo no qual poderia desafiar os sujeitos a compreender o mesmo, e entender os princípios de sua construção.

As tarefas chamadas de investigativas em algumas pesquisas direcionam as ações e percepções dos alunos, não propiciam espaço/liberdade para que os mesmos façam inferências, elaborem conjecturas, e levantem suas próprias questões e possíveis soluções para as mesmas. A percepção da divergência destas pesquisas ajudou na elaboração das tarefas investigativas deste estudo, as quais se abrem ao processo de investigar. Um enunciado que expõe uma situação é apresentado, porém as formas como os alunos vão debruçar sobre este, não são impostas e as soluções e/ou possíveis metodologias são apenas intuídas e não definidas, o que possibilita aos sujeitos trabalharem de diversas maneiras, para encontrar diversas soluções.

Sentimentos como: incerteza, desconforto e receio, conforme Ponte (2010), são esperados em processos de investigação matemática, tais sentimentos, mesmo sendo complexos, aqui não são tratadas como inconvenientes, mas sim como possibilidades de aprendizagem, na qual o aluno possa agir efetivamente de forma a desenvolver a atividade e se desenvolver com as dificuldades provenientes da mesma, estas, neste caso, são intencionalmente pensadas para que aja superação, e como consequência, aja aprendizagem significativa.

Nossas atividades serão apresentadas no capítulo que segue, junto às descrições e interpretações dos manifestos dos sujeitos ao se empenharem no tratamento das mesmas.

## CAPÍTULO VI

### APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS EMERGENTES DAS INTERAÇÕES: A BUSCA POR CONVERGÊNCIAS À LUZ DAS TEORIAS FUNDAMENTADORAS

#### 6.1 Organizando o estudo das interações vivenciadas

A estudo das interações, visa direcionar à princípios epistemológicos que corroboram para o entendimento de: **Como se dá o envolvimento de professores e futuros professores de Matemática, com uma proposta que intui gerar Aprendizagem Significativa de conceitos de Geometria Analítica Plana, mediada por atividades exploratórias e investigativas em um ambiente colaborativo de Geometria Dinâmica?**

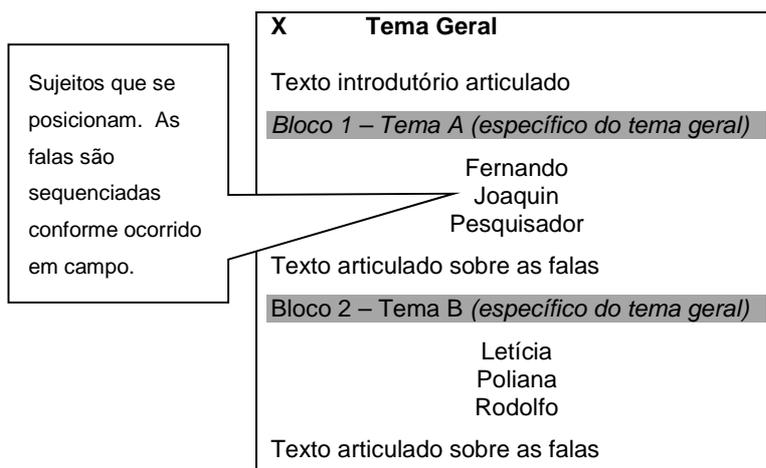
O curso foi pensado e aplicado de forma a propiciar aos pesquisados uma interação que transcende as ações individuais, direcionando-se a uma construção coletiva e significativa de conhecimentos. Foram promovidos encontros presenciais e virtuais, sendo que os encontros presenciais concebem-se por dois segmentos distintos: um direcionado à apresentação de organizadores prévios e discussão sobre os contextos de Exploração, Investigação e Colaboração em sala de aula, e o outro direcionado ao empenho dos sujeitos sobre as atividades propostas.

Ao visar melhor tratamento da totalidade de informações, a seguir, expomos e estudamos separadamente os dois segmentos aqui apresentados. À princípio, é discutido o primeiro segmento dos encontros presenciais, em seguida, o segundo segmento dos mesmos, juntamente com os encontros virtuais, por também se tratarem do envolvimento direto dos sujeitos com atividades.

Foram adotadas técnicas distintas para descrição destes segmentos; as discussões acerca das possíveis caracterizações dos cenários relacionados à Exploração, Investigação e Colaboração, por se tratarem de diálogos abertos, nas quais as falas se completam e subsidiam novas falas, foram descritas como um “texto corrido” que objetiva convergir às manifestações dos sujeitos e o tratamento das mesmas às ideias centrais dos contextos em questão.

Ainda na primeira técnica, optamos em apenas indicar no corpo deste texto os nomes dos sujeitos, na devida sequência de falas, estas que serão apresentadas por

completo nos apêndices da pesquisa. Devida densidade de análises aqui propostas, pensamos nesta opção para dar conta de satisfazer a intenção de discutir teoricamente os manifestos dos sujeitos referentes aos temas: Exploração, Investigação e Colaboração em sala de aula, sem tornar o texto extenso, e propiciar ao leitor a opção de dar continuidade à leitura sem necessidade de recorrer aos apêndices em busca das falas dos sujeitos, se estas não forem julgadas como relevantes ou necessárias. Segue ilustração do esquema:



Quadro 8: Esquema para apresentação do discurso anterior às atividades  
Fonte: o autor

Nos apêndices A, B e C, os blocos foram apresentados desta forma, porém apenas com as falas, visto que a articulação das mesmas está a seguir, no corpo do texto. Para não deixar distante um método essencial à articulação de dados deste estudo; a segunda técnica, sobre a qual serão tratados os manifestos emergentes do envolvimento com as atividades será apresentada, quando tais interações forem colocadas em pauta.

## 6.2 Primeiro segmento: O diálogo sobre temas da Educação Matemática

No primeiro contato com os sujeitos, pós-formalidade de apresentações e tentativa de preparação de um ambiente mais aberto e agradável, optamos em dar um *feedback* sobre o pré-levantamento aplicado. Mostramos aos sujeitos de forma geral, aspectos que julgamos necessário abordar, tais como; a dificuldade dos mesmos em argumentar sobre as seções cônicas, bem como evidenciar os elementos das mesmas. Vista esta dificuldade, utilizamos o que Ausubel, Novak e Henesian (1980) chamam de Organizadores Prévios Expositivos; foram expostos os gráficos das seções, agregadas das representações de seus elementos básicos, tais como: focos, vértices e centro.

O intuito desta organização prévia quanto aos elementos das seções cônicas consiste em propiciar objetos matemáticos, que poderiam permitir um tratamento mais apurados das propriedades sugeridas nas atividades exploratórias e investigativas.

Vale destacar, que um mesmo projeto de encontro foi trabalhado com grupos distintos em horários também distintos. Por se tratar da discussão de um mesmo tema, de falas que convergem para as mesmas ideias, não haverá aqui distinção destes dias e horários, será feita a descrição e análise do discurso como um todo.

***Buscando convergências que possibilitem estabelecer características ao contexto da Exploração Matemática em sala de aula***<sup>7</sup>

Visto que no primeiro encontro, os sujeitos iriam envolver-se com uma atividade exploratória, procuramos estabelecer um diálogo sobre a exploração em sala de aula.

***Bloco 1 - Um convite à intuição sobre Exploração em sala de aula***

Mesmo com um resultado previamente sugerido pelo questionário e pelo pré-levantamento, ao qual poderíamos suggestionar sobre o não conhecimento do assunto por parte dos sujeitos, iniciamos a interação perguntando aos mesmos sobre o que entendiam por exploração em sala de aula. Depois de um silêncio, Camila resolve expor um primeiro comentário, que deu início a um breve diálogo:

*Camila*  
*Pesquisador*  
*Luana*  
*Pesquisador*  
*Roger*  
*Pesquisador*

Observando a insegurança e constrangimento dos pesquisados, especialmente nas falas, optamos em apresentar um contexto mais geral e menos inclusivo, caracterizado por Ausubel (2000) como *organização prévia*. O organizador sugerido é classificado por Ausubel, Novak e Henesian (1980) como *Comparativo*, uma vez que se buscou no contexto dos sujeitos algo ao qual poderiam associar as semelhanças para compreensão do tema em pauta.

***Bloco 2 – Um convite à reflexão sobre Exploração em sala de aula mediante organização prévia***

<sup>7</sup> As falas recorrentes deste item estão em destaque no apêndice A, página 185, conforme orientação do quadro 7.

Apresentamos o contexto da exploração arqueológica, no intuito de fazer uma analogia com a exploração em sala de aula, buscando-se características comuns.

<i>Pesquisador</i>		<i>Pesquisador</i>
<i>Mauro</i>		<i>José</i>
<i>Daniele</i>		<i>Amanda</i>
<i>Pesquisador</i>	↗	<i>Pesquisador</i>
<i>Fabiana</i>		<i>Fernando</i>
<i>Mauro</i>		<i>Pesquisador</i>

Após o estímulo ao discurso sobre exploração em sala de aula em vias gerais, partimos para a uma possível caracterização de Atividade Exploratória. Para auxiliar o diálogo, apresentamos uma figura que retrata a metodologia adotada para efetuar escavação arqueológica. A figura consiste em uma *organização expositiva* e ao mesmo tempo *comparativa*, visto que expõe uma metodologia desconhecida pelos sujeitos e apresenta aspectos comparativos entre contexto arqueológico e escolar. Segue figura:



Figura 14: Metodologia de uma escavação arqueológica

Fonte: MOLINA, Thales (2012). Disponível em: <<http://thalesmolina.wordpress.com>>

Na figura observa-se uma técnica para se escavar, que intui não danificar o fóssil. Um procedimento é cuidadosamente seguido.

### *Bloco 3 - Um discurso rumo à caracterização de Atividades Exploratórias*

Inferimos aos sujeitos que a escavação representada na figura possui correlações com atividades exploratórias, e pedimos com que mediante representação, argumentassem sobre como este tipo de atividade.

*Roger*

Roger expressou o que realmente caracteriza uma atividade exploratória, sem uma conceituação teórica, ele descreve aspectos que Ponte (2010) aponta serem fundamentais para este tipo de atividade; enfatiza o percurso, que deve ser cuidadosamente preparado pelo professor, evidencia também a autonomia do aluno no tratamento destas atividades e ressalta a mediação do professor, na qual o mesmo deve sugerir materiais que permitam ao aluno se desgarrar de um entrave e/ou dar continuidade á conquista de um objetivo previamente esperado. Percebemos na fala de

Roger o que é dito por Ponte (2010); que uma atividade exploratória deve ser bem estruturada, de forma a estimular ações que convergem para um objetivo.

Daniele dá sequência à fala de Roger:

*Daniele*

Julgamos que a fala de Daniele não foi direcionada a uma caracterização de atividades exploratórias, mas, ela aponta importantes aspectos que devem ser observados, especialmente no processo de criação e/ou utilização destas atividades; ela defende um “estudo de solo” como uma pesquisa sobre as experiências dos alunos, que visa conceber dados relevantes para aplicação das atividades de forma a despertar interesse e desafiá-los. Esta abordagem possibilita conversão a TAS, que assim como Daniele, defende o levantamento de conhecimentos prévios dos alunos, para utilizar destes como pontes que levam à aprendizagem de novos conhecimentos. Convergimos também a questão do “interesse” apontado por Daniele; ela sugere, assim como a TAS, que deve existir uma troca, concebida da necessidade de antemão, querer e aplicar-se em aprender, para com isto conceber novos significados.

***Buscando convergências que possibilitem estabelecer características ao contexto da Colaboração em sala de aula***<sup>8</sup>

Após percepção no pré-levantamento das dificuldades dos sujeitos em argumentar sobre a colaboração em sala de aula, apresentamos como organizador prévio, como base para uma discussão mais específica, um vídeo com menos de dois minutos de duração; tratava-se de um trecho de uma partida de futebol, na qual jogavam Espanha versus Venezuela. Destaca-se no vídeo, a soberania da seleção Espanhola, que em um minuto e quarenta segundos, com trinta e oito toques, fez com que a bola passasse por quase todos os jogadores do time até marcar o gol.

O vídeo apresentado se encaixa na conceituação de *organizador prévio comparativo*, citada por Ausubel, Novak e Henesian (1980), ou seja, apresentamos um exemplo do contexto dos sujeitos que lhes permitiria comparar para compreender significativamente o tema em pauta.

***Bloco 4 – Um convite à reflexão sobre a Colaboração perceptível ou não no organizador prévio apresentado***

---

<sup>8</sup> As falas recorrentes deste item estão no apêndice B, página 187.

Após apresentação do vídeo, os sujeitos foram convidados a dialogar sobre possíveis manifestações de colaboração provenientes do mesmo. Rapidamente Camila se posiciona e é acompanhada por Lúcia:

*Camila*  
*Lúcia*

Percebemos que em poucas palavras, Camila e Lúcia abordaram o que há de essencial no trabalho colaborativo, enfatizaram o conjunto, que conforme nossa interpretação da fala de Camila possibilita alcançar resultados, cumprir objetivos. O diálogo continuou com algumas intervenções:

*Luana*  
*Mauro*  
*Letícia*

Destacamos nestas falas, a percepção que os mesmos tiveram sobre o trabalho em conjunto; para caracterizar esta percepção, Letícia e Mauro utilizaram de conhecimentos prévios concebidos na vivência com futebol, em especial com o futebol praticado pelo time espanhol. Destacamos também, aspectos que nos leva a pensar que os sujeitos se referiam ao respeito entre os membros do grupo como um dos elementos para se alcançar o objetivo; evidenciaram o “tocar a bola”, sem receio ou desconfiança da habilidade do companheiro, este toque foi contínuo e necessário para obter sucesso no objetivo em questão, que era marcar o gol. O respeito que intuímos estar nas falas, é essencial para o trabalho colaborativo, seja qual for o ambiente.

#### **Bloco 5 – Um convite à reflexão sobre Colaboração em sala de aula mediante organização prévia**

O diálogo passou a ter um direcionamento. Pedimos com que os sujeitos tentassem associar o que foi dito sobre colaboração mediante vídeo, com a colaboração em sala de aula.

*Letícia*

O indagado por Letícia faz-nos remeter ao questionário aplicado; a maioria deles assinalou que quando colocados para trabalhar em grupo durante o ensino médio, não ocorria de fato colaboração, pois apenas um ou dois membros do grupo trabalhavam sobre as atividades e os demais ficavam dispersos. Um dos motivos dessa dispersão pode ser devido ao egoísmo de um participante, que se julga superior e acaba por se isolar em sua individualidade e conseqüentemente isolar os demais.

Mauro em sequência faz um posicionamento:

*Mauro*

Como a fala de Mauro foi deferida logo após nosso direcionamento, pensamos que o sujeito indiretamente trata da questão de sala de aula, e inconscientemente, assim como a TAS, defende a aplicação de uma organização prévia antes de um envolvimento mais direto; ele fala em preparação e treino, estes, que relacionamos ao nosso estudo de campo, como o “falar sobre colaboração”, sobre a ajuda e respeito mútuo, para depois inserir os alunos no ambiente colaborativo.

Quando Mauro diz que “nem sempre toda equipe está preparada pra colaborar”, entendemos que em parte, ele quis dizer que os jogadores da Venezuela não colaboraram devidamente, porém, é difícil chegar a esta conclusão, no vídeo, ficou nítida a estratégia defensiva da Venezuela, jogavam em linha na defesa, o combate aos jogadores espanhóis era constante, ou seja, os jogadores da Venezuela estavam empenhados em “roubar” a bola, porém a colaboração dos mesmos não foi suficiente para bater a colaboração do time espanhol. Assim também, acontece em sala de aula, grupos diferentes trabalham sobre uma mesma atividade, por mais que colaborem, alguns não chegam a resultados mais precisos, outros chegam a resultados brilhantes e às vezes impensáveis. Este aspecto é abordado na fala de Roger:

*Roger*

Fernando faz uma análise e interveniência que julgamos ser bem elaborada:

*Fernando*

Fernando utiliza da organização prévia como subsídio alavancar pensamentos sobre a colaboração em sala de aula: fez considerações sobre o vídeo e em seguida às direciona ao contexto sobre o qual foi pedido com que falasse. De imediato, após a fala de Fernando, José completa, desencadeando outros posicionamentos:

*José*  
*Fabiana*  
*Danièle*  
*Pesquisador*  
*Roger*  
*Pesquisador*

O seguimento de posições desencadeadas, a partir da fala de José trata-se em especial, do olhar para o indivíduo enquanto membro de um grupo ao qual se espera que seja colaborativo. Os sujeitos apontam elementos que evidenciam a importância da compreensão do que é ser de fato membro de um grupo colaborativo; relatam a potencialidade de uma terceira ou quarta opinião, contestam a falta destas opiniões, que pode ser advinda da omissão, do desinteresse ou do desconhecimento.

***Buscando convergências que possibilitem uma caracterização do contexto da Investigação Matemática em sala de aula***<sup>9</sup>

Assim como nos temas anteriores, promovemos um discurso inicial sobre as intuições relacionadas à Investigação Matemática em sala de aula, seguido da apresentação de um contexto generalizado, que possibilite direcionamentos ao tema específico em questão. Apresentamos a parte três do episódio de um seriado americano, este, que é tematizado pela investigação criminal. No vídeo, os investigadores buscavam a captura de um criminoso que tinha fetiche por pés, para isto, tornaram-se evidentes muitos aspectos específicos de uma investigação, aos quais esperávamos que os sujeitos da pesquisa estivessem atentos.

***Bloco 6 – Um convite à reflexão sobre Investigação Matemática em sala de aula mediante organização prévia***

O vídeo foi apresentado com a mesma finalidade do anterior mencionado, foi exposto para subsidiar um discurso direcionado a percepção de elementos que podem ser *comparados* e associados. Pedimos aos pesquisados que apontassem e relacionassem características da investigação criminal assistida, com investigação matemática em sala de aula, isto, após falarmos da possibilidade de se fazer esse paralelo. De imediato Lúcia lançou-se:

*Lúcia  
Luana  
José*

Estes descrevem sobre o que de fato é importante em uma investigação; uma situação inicial, a qual se propõe um processo investigativo para levantar alguns aspectos que dão conta de estabelecer significado à mesma. Na fala de José, “as vezes tem outros dados em volta, tirando o tema central, que são também importantes pra resolução final”, entendemos que “outros dados” são conhecimentos prévios relevantes para o tratamento do novo, conforme defendido por Ausubel (2000). É Fernando seguido por Roger que iniciam um paralelo mais denso, porém não tão articulado sobre as situações de investigação:

*Fernando  
Roger*

Fernando e Roger concordam que na investigação algo importante a ser feito é encontrar padrões para trabalhar sobre os mesmos e descobrir algo que ajude no

<sup>9</sup> As falas recorrentes deste item estão no apêndice C, página 189.

tratamento da situação problema. Em especial, destacamos na fala de Roger as perguntas feitas durante a argumentação, ele fala sobre a situação inicial e em seguida lança perguntas, isto nos é visto como o colocar o problema em crise, o mesmo deve ser interrogado em busca de indicativos que sugiram caminhos para “finalizar” a investigação de uma situação.

**Bloco 7 – A ênfase dada ao levantamento de interrogações para delineamento de uma investigação**

Um aspecto anteriormente levantado por Fernando e Roger, porém não discutido pelos mesmos, foi posto de forma mais articulada por Bruna; se trata da importância de interrogações que direcionam uma investigação.

*Bruna*  
*Roger*

Mediante ênfase dada às perguntas dentro de uma investigação, levantamos a questão: “essas perguntas, é o professor quem às coloca?”, o que desencadeou algumas indagações.

*José*

Roger concorda com José em apontar que em uma investigação, o aluno deve se portar como investigador, ou seja, deve ser autônomo ao ponto de levantar suas próprias interrogações, estas que o nortearia ao investigar. Após o consenso, Roger, acreditamos que já imbuído de um espírito de investigador, mediante concepções advindas do diálogo até então estabelecido, questiona sobre a possibilidade do aluno não conseguir levantar uma pergunta relevante para a investigação. Fernando imediatamente responde, dentro de suas intuições e convicções.

*Roger*  
*Fernando*

A questão da mediação por parte do professor, levantada por Fernando, e confirmada por Ponte (2000) torna-se essencial em sala de aula, especialmente no contexto atual, no qual os alunos não são familiarizados com ambiente investigativo, o que pode tornar o envolvimento com atividades deste cunho difícil e sem significado.

**Bloco 8 – Comparação entre Atividades Investigativas e Atividades Exploratórias**

Nas falas de Bruna e José, observamos o que pode ser uma evidência da Aprendizagem Significativa de características que fomentam uma caracterização de Atividade Exploratória; referimos à Aprendizagem Significativa de Preposição, que julgamos ter ocorrido por *subordinação*, uma vez que um conhecimento mais específico foi concebido na relação do mesmo com um conhecimento prévio mais generalizado.

*Bruna  
José  
Pesquisador*

Julgamos que os mesmos aprenderam significativamente estas características por apresentarem argumentos tão coerentes e articulados. A aprendizagem é significativa devido a metodologia aqui utilizada; apresentamos organizadores prévios que subsidiaram um diálogo construtivo. As falas de Bruna e José possibilitam indagar que aprenderam a partir do processo relacional, e apontam indícios que destacamos aproximá-los de uma Aprendizagem Significativa de características relacionadas ao contexto da investigação, com utilização de conhecimentos prévios, em especial, conhecimentos relacionados a exploração, anteriormente discutido.

Quando os sujeitos aceitam direcionar pensamentos à vivência em sala de aula e associá-los aos contextos de Investigação, Exploração e Colaboração, conscientemente ou não, estão utilizando de conhecimentos prévios, estes que por serem relacionáveis às características presentes nos organizadores apresentados, são relevantes para a compreensão dos contextos em questão.

Percebemos durante as interações em torno dos temas propostos, aspectos importantes que distinguem uma abordagem inicial de uma abordagem mediada por um objeto que oriente e possibilite maiores arguições; tais aspectos foram observados tanto no discurso, quanto nas expressões faciais e gestos dos sujeitos ao exporem suas ideias; quando chamados inicialmente a argumentar sobre os temas, percebemos: inquietamento, insegurança, receio de se expressar, algumas falas desfocadas e, às vezes, sem coerência. Após a apresentação dos organizadores prévios, tornou-se evidente a maior segurança por parte dos sujeitos; souberam estabelecer, organizar e relacionar devidamente seus argumentos. Percebemos o resgate constante por parte dos sujeitos de suas experiências vividas, utilizaram as mesmas para melhor tratar os assuntos ainda não tão conhecidos.

A concepção de argumentos mais elaborados e consistentes, apresentados pelos sujeitos mediante processo relacional de conhecimentos, pode direcionar reflexões que sugerem com que os sujeitos tenham aprendido significativamente sobre os contextos pautados. Tal aprendizagem seria por *recepção*, uma vez que participamos efetivamente junto aos pesquisados, apresentando e dialogando informações importantes que influenciaram na concepção dos saberes.

Não queremos aqui dizer, que a primeira interação sem uma organização prévia não é ou não foi importante, a falta de uma organização inicial, muitas vezes pode melhor propiciar a descoberta e estimular reflexões mais amplas em complexidade. Na pesquisa a insegurança inicial, impulsionou o diálogo pós-organização prévia; eles apresentaram dificuldades em argumentar sobre o assunto, o que causou um ar de constrangimento, e perceberam com os organizadores, que possuíam conhecimentos relevantes para tal argumentação, porém, os mesmos não estavam organizados e precisavam de uma ponte que os convergissem. Esta percepção por parte dos sujeitos tornou a segunda interação mais rica, pois o que pensavam ser “difícil” tornou-se para a maioria, simples e claro.

O objetivo das discussões levantadas e dispostas até então, não condiz com a busca por uma conceituação para os temas: Exploração, Investigação e Colaboração em sala de aula; pedimos para que os sujeitos falassem sobre, e não definissem o que é. Esperávamos com isso, que os sujeitos percebessem e estabelecessem características específicas e fundamentais mediante as interações regidas por uma organização prévia. Julgamos a aprendizagem significativa de características fundamentais, como suficiente, para que os pesquisados saibam argumentar sobre os temas, quando convidados novamente a ponderá-los.

### **6.3 Segundo segmento: Apresentação e estudo das atividades e do empenho sobre as mesmas**

Aqui, iremos descortinar o envolvimento dos sujeitos com as atividades, para isso, atentaremos aos manifestos espontâneos e aos refletidos sobre a compressão perante o ato de envolver-se com o cenário de aprendizagem proposto<sup>10</sup>. O manifesto espontâneo é observado aqui, a partir de falas, gestos e/ou escrita provenientes do diálogo que se dá sem a necessidade de tempo e espaço, que regem e delimitam indagações. Tratamos como manifestos refletidos, as indagações decorrentes do convite a refletir, e descrever o refletido sobre o que *a priori* foi espontâneo.

Para dar conta da totalidade do construído no processo colaborativo-investigativo, é necessário atentar para o contexto geral de uma interação, para em

---

<sup>10</sup> Um ambiente colaborativo, no qual os alunos estarão envolvidos com atividades investigativas e exploratórias que tratam conceitos de Geometria Analítica Plana.

seguida, olhar atentamente manifestos que possam agregar significado à pergunta desta pesquisa. Tais manifestos podem ser evidenciados por: discurso falado, escrita, gestos corporais que indiquem indícios de: deslumbramento, descoberta, reflexão, obstáculos rompidos ou não, bem como da exposição e utilização de conhecimentos prévios que subsidiam e facilitam o desenvolvimento de novas concepções que tendem a direcionar a Aprendizagem Significativa de novos materiais.

Almejamos expor de forma contínua e clara o processo vivido pelos sujeitos, portanto, optamos em dividir as interações feitas durante as atividades em *cenas*, nas quais os pesquisados intensificam suas articulações no intuito de perceber e compreender proposições e conceitos em um intervalo percebido pelo pesquisador. Uma *cena* “se constitui e é explicitada na medida em que releva um todo de sentido dado em suas perspectivas possíveis, desvelando o nexos entre as diversas falas, manifestações e ações ocorridas” (SANTOS, 2013, p.53). Ela inicia-se na intencionalidade da busca por uma totalidade relacionada a um significado em potencial, e finaliza-se quando as percepções provenientes desta busca são dadas como suficientes para tal totalização.

Em atividades exploratórias se percebe as *cenas* com mais facilidade, visto que possuem “marcações” mais visíveis; ao sugerir uma ação ao aluno, ele empenha-se e inicia um discurso sobre as implicações da mesma. À medida que uma segunda ação é sugerida, outro discurso acontece, e assim por diante. Em uma atividade investigativa, a percepção das *cenas* é mais complexa, as ações não são sugeridas, os alunos se lançam e efetuam diversos movimentos reflexivos, estes que devem ser cuidadosamente observados e estudados, na intenção de perceber como e quando são “iniciados” e “finalizados”. Esta marcação, muitas vezes não é evidenciada pelos alunos, ela apenas acontece. Com isto, em grupos distintos que atuam sobre uma mesma atividade pode-se observar diferentes e inusitadas *cenas*.

Ao organizar os dados em *cenas*, preocupamos de antemão em propiciar uma descrição textual que agregue em significância e complexidade o que entendemos ter se revelado como abertura ao compreender, descobrir ou recepcionar conhecimentos, estes que jugamos relevantes para o tratamento da questão levantada nesta pesquisa.

Adotamos aqui, uma técnica de apresentação e análise, esta que é diferente da utilizada para abordar os discursos acerca dos temas em Educação Matemática anteriormente expostos. O estudo das *cenas* será disposto em quadros estruturados da seguinte maneira: cada quadro representa uma *cena*, que será evidenciada na primeira

linha. Abaixo desta linha, apresentam-se três colunas; a primeira propõe evidenciar a interação espontânea vivenciada na cena; a segunda expõe a síntese elaborada pelos sujeitos da interação inicial; a terceira coluna destaca nossa interpretação de unidades recorrentes da totalidade da cena; serão expostas ideias articuladas que ajudem a constituir a compreensão frente à questão de pesquisa, é uma ponte para escrever convergências que serão as categorias posteriormente construídas. O quadro que segue, visa esclarecer essa organização.

Descrição da Cena		
A interação	Síntese da Interação	Interpretação
<b>Aluno A:</b> Xxxxxx	Xxxxxxxxxxxxxx XXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXX	Xxxxxxxxxxxxxx XXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXXXX
<b>Aluno B:</b> Xxxxxx		
<b>Aluno C:</b> Xxxxxx		

O diálogo acerca da atividade

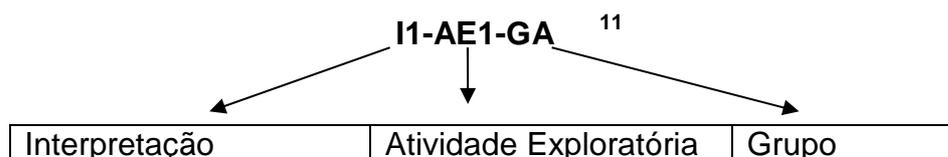
Nossa interpretação

Quadro 9: modelo de quadro para estudo dos Momentos Significativos  
Fonte: o autor

O quadro apresentado corresponde a sintetização de uma técnica para se trabalhar com dados brutos provenientes de uma pesquisa qualitativa. Esta técnica é aqui aplicada, devido as suas propostas muitas vezes não percebidas; opta-se em trabalhar com colunas pela possibilidade do movimento de análise, no qual parte-se de informações mais gerais, que são cuidadosamente filtradas, até a elaboração de uma estrutura mais articulada e formal. A exposição das colunas permite o ir e vir nas mesmas, o que possibilita a busca por dar um sentido a uma percepção ou dúvida, mediante rastro do percurso, deixado pelas informações, que mesmo postas em colunas distintas, são ligadas umas as outras.

Uma *cena* pode gerar uma rede de manifestos potencialmente significativos, o que inviabiliza ou dificulta uma interpretação para o todo da mesma; a generalização pode ocultar aspectos intrinsecamente relevantes. Portanto, em uma mesma *cena*, os manifestos podem ser aglutinados, porém, em um número indeterminado de interpretações, que somadas satisfazem nossa compreensão do vivido. Uma vez transcritas as interações, assim como de fato ele aconteceram, efetuamos a *epoché*, para mediante os manifestos e suas correlações, elaborar interpretações que visam desvelar o fenômeno investigado em cada *cena*.

Como cada atividade se repete para quatro grupos, buscamos uma organização que entendemos favorecer o desenvolvimento da pesquisa, bem como o entendimento do vivido pelos leitores. Assim, foi adotada a numeração conforme o exemplo representativo que segue:



Objetivamos com esta identificação, associar uma numeração às interpretações dos manifestos em cada atividade exercida por cada grupo, o que pode facilitar as convergências futuras, visto que, por exemplo: a I1-AE1-GA, a I1-AE1-GB, a I1-AE1-GC e a I1-AE1-GD podem convergir para uma mesma ideia. É feito isto, a fim de melhor atender a necessidade de dar sentido ao estudo da interação.

Posterior à apresentação das cenas, foi efetuado nova *epoché*, no intuito de tentar perceber no percurso vivido e exposto uma série de manifestações dos sujeitos, bem como as interpretações das mesmas que em suas compatibilidades, abrem horizontes para elaboração de unidades nucleares potencialmente favoráveis ao processo de interrogar o que se interroga nesta pesquisa.

### 6.3.1 As Cenas

As cenas emergiram do contexto de dez encontros, número este que, é fruto da duplicação dos encontros previamente pensados. Cinco encontros foram preparados, porém oportunizaram-se duas opções de horários para cada encontro. O contexto agregou o professor pesquisador e sujeitos, identificados abaixo pelos nomes fictícios e os respectivos grupos nos quais foram dispostos:

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
<i>Luana</i>	<i>Fernando</i>	<i>Daniele</i>	<i>Mauro</i>
<i>Lúcia</i>	<i>José</i>	<i>Letícia</i>	<i>Camila</i>
	<i>Bruna</i>	<i>Roger</i>	<i>Fabiana</i>
		<i>Amanda</i>	

Os encontros decorreram no período de duas semanas; os grupos A e D optaram por um dos horários disponíveis e os grupos B e C, optaram pelo outro horário. Assim, os grupos A e D participaram do primeiro encontro no dia 24 de junho e do quinto e último no dia 08 de julho; os grupos B e C iniciaram no dia 28 de junho e finalizaram no dia 12 de julho. Vale frisar que nem todos os sujeitos participaram de todos os encontros, por motivos diversos previamente ou posteriormente justificados.

A seguir, serão apresentadas as atividades e as interações dos grupos no tratamento das mesmas. Os manifestos que emergiram do trabalho colaborativo dos

<sup>11</sup> Foram quatro as atividades exploratórias. Quando apresentadas as atividades investigativas, a identificação será estabelecida conforme exemplo: I1-AI1-GB (Interpretação um – atividade *investigativa* um – grupo B).

grupos foram ricos em significados e direcionamentos relevantes ao nosso estudo da interrogação posta nesta pesquisa, tanto que, para nós, o envolvimento de apenas um grupo com as atividades aplicadas daria conta de propiciar-nos reflexões e convergências que subsidiariam a compreensão do fenômeno investigado. Com isto, vimos a não necessidade de apresentar aqui todas as interações, optamos em escolher o empenho de três grupos para cada atividade aplicada, fazendo combinações três a três, para que os manifestos dos quatro grupos fossem aqui contemplados.

### **6.3.2 As atividades exploratórias e as cenas provenientes da exploração-colaborativa sobre as mesmas**

Após a análise do pré-levantamento, percebemos a dificuldade dos alunos em apontar objetos pertencentes às cônicas, bem como estabelecer uma possível definição para as mesmas. Partiu-se desta percepção para construir quatro das seis atividades oportunizadas. Estas foram caracterizadas e apresentadas aos sujeitos como exploratórias mediante definição de Ponte (2010). Para execução das mesmas, foi entregue um “roteiro” a ser seguido, orientando os sujeitos a moverem determinado(s) ponto(s). Em tais orientações não constavam dicas ou imposições que direcionavam pensamentos e/ou modos de pensar, pelo contrário, nelas sugeria-se com que partissem dos sujeitos reflexões e discussão acerca do percebido pelo grupo mediante aos movimentos feitos.

As atividades exploratórias foram constituídas em primeira instância para tratar um tipo de Aprendizagem Significativa, a Aprendizagem Significativa de Conceito, na qual uma simbologia generalizada, que consegue caracterizar todos os objetos que possuem mesmas propriedades, tornando-se significativa para o sujeito. Esta intenção vai ao encontro da questão do *espaço espacializante*: “aquele que é concebido em abstrações intelectuais e se dirige a entidades conceituais pensadas para dar conta de uma estrutura”. Tais abstrações são possíveis mediante o conhecer *a priori* e “em consequência, com uma abordagem pedagógica que permeia a busca imediata de conceitos”. (DETONI, 2003, p. 98). Assim, propomos aqui atividades exploratórias como abordagem pedagógica, nas quais os sujeitos podem lançar mão de suas experiências vividas, arguidos de suas capacidades intelectuais de abstrair, reaver e resignificar o já apreendido.

As atividades exploratórias aqui trabalhadas propuseram que a partir de objetos previamente inseridos no ambiente VMTwG, os sujeitos enquanto membros de um grupo colaborativo efetuassem movimentos de exploração. Sugerimos um olhar crítico e reflexivo direcionado a percepção de variantes e invariantes para compreensão de objetos e propriedades, que norteia à elaboração de uma simbologia mais geral, que estruturasse um desfecho esperado por nós, porém incerto devida presença do outro, no caso a construção dos conceitos das seções cônicas, tais quais: Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole. A seguir, síntese do roteiro de exploração:

- Mover um ponto específico indicado como bem entender, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso feito.
- Mover de forma a sobrepor determinado ponto aos pontos pretos da figura, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discutido no *chat*.
- Habilitar rastro no ponto indicado, seguido da síntese do que diz o grupo sobre a figura gerada pelo rastro deixado, e quais elementos da mesma representam alguns pontos previamente postos.
- Discutir e elaborar uma definição para a figura encontrada.

Nestas atividades, o intuito de pedir para que os sujeitos “movam um ponto como bem entender”, caracteriza nosso objetivo de propiciar um primeiro contado com o dinamismo do Geogebra acoplado ao VMT, colhendo algumas indagações não tão precisas acerca do movimento muitas vezes rápido e exagerado. Quando se pede para sobrepor um ponto aos pontos pretos, espera-se um olhar mais apurado, mais crítico e preciso, uma vez que o sobrepor, equivale ao “mover e parar” repetidas vezes, precedido da reflexão sobre cada movimento, *a priori* em sua individualidade seguido da possível concepção de padrões que os tornam parte de um todo.

A seguir, apresentamos a descrição das interações ocorridas nas quatro atividades exploratórias, bem como as interpretações internas a cada cena vivenciada por nós e pelos pesquisados.

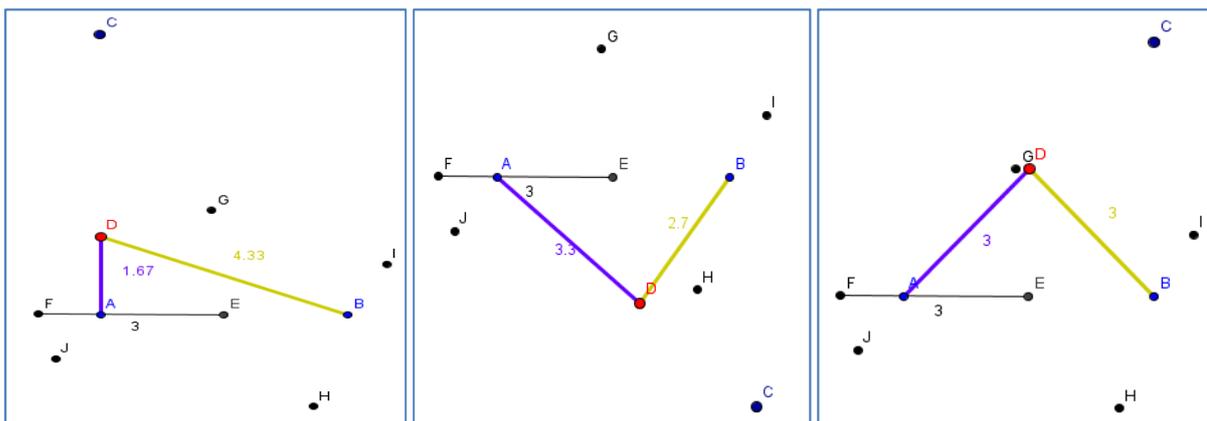
### **ATIVIDADE EXPLORATÓRIA1**

No primeiro encontro presencial, optamos em trabalhar com os sujeitos uma atividade exploratória. Mesmo sendo presencial, simulou-se um encontro virtual; os

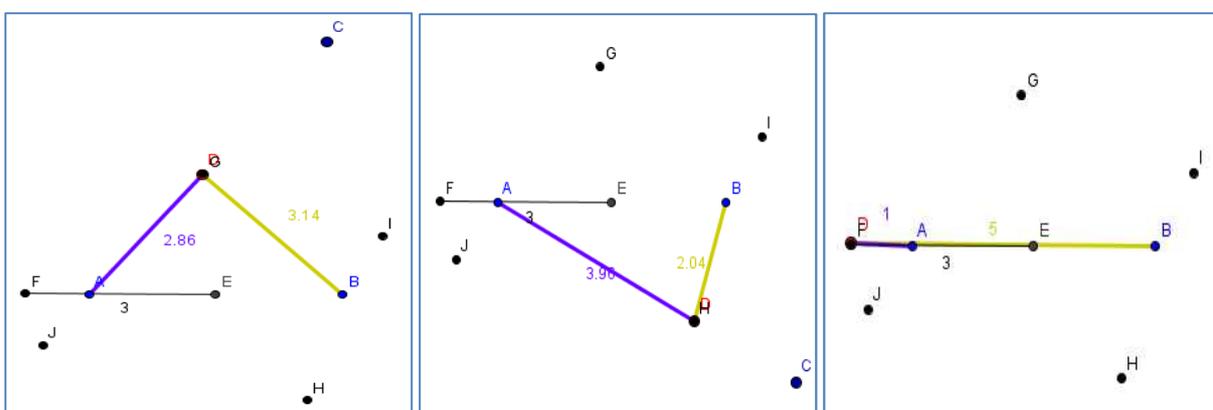
grupos trabalharam no ambiente virtual, porém lado a lado no laboratório. Isto foi feito para apresentar e iniciar os pesquisados no ambiente VMTwG. Atentamos para as falas e expressões dos sujeitos, registramos tais com auxílio de filmadora e *webcam*.

*Prévia dos movimentos deferidos em cada cena:*

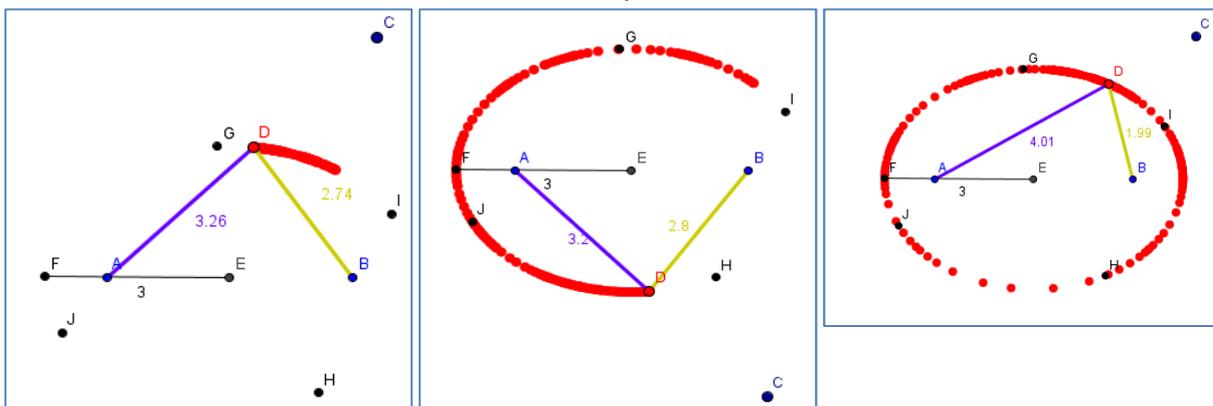
**CENA1** - Mover o ponto C como bem entender.



**CENA 2** – Mover o ponto c de forma a sobrepor D aos pontos pretos da figura



**CENA 3** – Habilitar rastro em D e mover o ponto C.



A seguir, as cenas e nossas interpretações dos manifestos recorrentes do empenho sobre a atividade.

<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1 - GRUPO A</b>		
<b>CENA1-</b> Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.		
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>LUANA:</b> Que legal! [com empolgação]. Quando movimenta o ponto C, meu ponto D vai movimentando. Ai a reta AD vai aumentando e a verdinha vai diminuindo [Vendo Lúcia arrastar o ponto C no sentido horário]</p> <p><b>LÚCIA:</b> Até ficar coincidentes. Mas, aí (...)[refletindo]. Verde é <math>AB + BD</math>.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Aí, pode ir lá também [movendo o ponto C no sentido anti-horário]</p> <p><b>LUANA:</b> Aí, a verde aumenta e a azul diminui, até coincidir também. Mesma coisa.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Vai dar a mesma coisa aqui de baixo, dá no mesmo! [afirma após movimentar o ponto C abaixo de EF]</p> <p><b>LUANA:</b> É, uma vai aumentar e a outra diminuir do mesmo jeito [reforça e concorda com a afirmação de Lúcia]</p>	<p>Quando movimentamos o ponto C no sentido horário até que os pontos A, B e D se alinhem, temos que o segmento AD (linha azul) vai aumentando e o segmento DB (linha verde) vai diminuindo. Até que o segmento <math>AD=AB+BD</math>.</p> <p>Continuando a movimentar o ponto C no sentido horário até que os pontos A, B e D se alinhem novamente, agora o segmento AD vai diminuindo e o segmento DB vai aumentando. Até que <math>BD=BA+AD</math>.</p>	<p><b>I1-AE1-GA:</b> Os sujeitos têm na atividade abertura para trazer seus conhecimentos prévios de geometria, vendo objetos se movimentar segundo orientações que propiciam a percepção de regularidade simétrica.</p> <p><b>I2-AE1-GA:</b> O dinamismo do <i>software</i> se abre à exploração ao possibilitar a concretização de movimentos pensados e orquestrados pelos sujeitos.</p>
<b>CENA 2 –</b> Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.		
<p><b>LÚCIA:</b> péraí, deixa eu ver uma coisa aqui [para e pensa], isso aqui é igual a seis, cinco mais um é seis né? Acho que é, ou não? [A dúvida não diz respeito à soma; mas sim se era esta a observação a ser feita ao sobrepor D ao ponto E]</p> <p><b>LUANA:</b> Deixa eu ver [pedindo o controle do Geogebra]. Esse mais esse é..., [somando], é, é seis também! [com empolgação]</p> <p><b>LUANA:</b> No J, também dá seis.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Então no G também vai dar seis. Olha aí. [presume e pede para Luana sobrepor]</p> <p><b>LÚCIA:</b> Então Luana [risos], a gente viu isso [risos], que a soma dos dois segmentos sempre vai dar seis.</p>	<p>Quando movimentamos o ponto C até que o ponto D se sobreponha aos pontos pretos da figura, a soma da linha azul mais a linha vermelha dá resultado sempre 6.</p>	<p><b>I3-AE1-GA:</b> Ao trazer suas experiências para envolvimento com o novo, com uma exploração regida pelo mover, parar, e o refletir para validar, os sujeitos direcionaram um olhar mais cauteloso, responsável por facilitar a aprendizagem significativa de uma de constante com potencialidade geradora de um conceito posterior.</p> <p><b>I4-AE1-GA:</b> Percebe-se no grupo, o respeito ao espaço pedido e o aceite de um manifesto individual.</p> <p><b>I5-AE1-GA:</b> Os aspectos estético-gráficos do <i>software</i> auxiliam no diálogo e síntese conjunta do mesmo.</p>
<b>CENA 3 –</b> Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos: A, B, D, E e F.		
A interação	Síntese da interação	Interpretação

<p><b>LÚCIA:</b> Alá, que lindo! [risos, ao ver o princípio do rastro]. oh! uma elipse! [surpresa ao ver o rastro completar o ciclo]  <b>LUANA:</b> Que bacana! [também surpresa]. Nem pensava em uma elipse.  <b>LÚCIA:</b> Então, o ponto A e B, deve ser o foco da elipse né?[afirma, porém um pouco insegura]  <b>LUANA:</b> É sim, o E é o centro.  <b>LÚCIA:</b> O D é um ponto da elipse né? Não sei. [contraí a voz ao afirmar]  <b>LUANA:</b> O E é o vértice da elipse né? Tem vértice a elipse? Tem! [insegurança seguida de certeza]  <b>LÚCIA:</b> Acho que tem... é tem sim.</p>	<p>O movimento do ponto D, forma uma elipse. Sendo A e B os focos da elipse, D é um ponto da elipse, F é o vértice e E é o centro.</p>	<p><b>I6-AE1-GA:</b> O rastro propicia a representação gráfica para um símbolo já conhecido “ELIPSE”, mas ainda não previsto, direcionando a percepção de outros ali postos, mas também não percebidas a priori.  <b>I7-AE1-GA:</b> As expressões de concordâncias faladas e as gesticuladas sugerem a empolgação dos sujeitos ao perceberem colaborativamente objetos mediante elipse concebida da ação deferida.</p>
--	--	--

**CENA 4** – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>LUANA:</b> Quer ver, vai lá nos pontos dos focos. [Pede a Lúcia para sair da aba resumo e voltar para a tela do Geogebra]  <b>LUANA:</b> Aqui. A distância desse ponto aqui [apontando para o ponto D] até A, mais a distância de D até B dá seis.  <b>LÚCIA:</b> sim, sim. [concorda]  <b>LUANA:</b> Então, a gente tem uma definição! [com empolgação]  <b>LÚCIA:</b> A distância de um ponto mais a distância do foco dois. É isso mesmo. [entendeu, porém expressou-se mau]  <b>LUANA:</b> Uai, dá muito bem pra introduzir elipse assim, a gente não dá no quadro a definição e deixa aluno chegar nela né, muito melhor! O aluno vai aprender melhor! [Demonstra entusiasmo ao termino da atividade]</p>	<p><b>Grupo:</b> A distância de um ponto qualquer da elipse ao foco 1 mais a distância ao foco 2 é igual ao dobro da distância do centro até o vértice da elipse.  <b>Pesquisador:</b> Quando se define algo, não se costuma colocar o nome do objeto a ser definido no meio da definição. Tentem colocar Elipse no início.  <b>Grupo:</b> Elipse é uma figura plana, em que a distância de um ponto qualquer dela ao seu foco 1 mais a distância desse ponto ao foco 2 é igual ao dobro da distância do centro até ao seu vértice.</p>	<p><b>I8-AE1-GA:</b> O ato de repensar propriedades anteriormente apreendidas permitiu aos sujeitos a percepção do relacionamento das mesmas com a conceituação do objeto manifestado.  <b>I9-AE1-GA:</b> O convite à reflexão destinado a escrita propicia ao grupo a oportunidade do melhor tratamento e articulação dos conhecimentos concebidos no diálogo proveniente das ações deferidas.  <b>I10-AE1-GA:</b> A experiência propiciou os sujeitos a percepção do potencial da relação atividade exploratória-tecnologia, para o ensino e aprendizagem de novos conceitos  <b>I11-AE1-GA:</b> Ao elaborarem uma definição, os sujeitos demonstram ter aprendido significativamente na/pela colaboração um conceito generalizado para Elipse.</p>

### **ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1 - GRUPO B**

**CENA1-** Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

<p><b>JOSÉ:</b> Sobe aí o ponto C. [pede a Fernando]  <b>FERNANDO:</b> As retas, o ponto D e os segmentos também se movem, [risos], bacana!  <b>JOSÉ:</b> Aí, dependendo, tipo, de onde eu coloco ele [se refere ao ponto D], excluindo a possibilidade da reta AD ser paralela em cima da reta DB né [se refere à projeção do segmento AD sobre o eixo maior da elipse], vai formar triângulos diferentes né. [indaga após ver os vários movimentos feitos por Fernando]  <b>FERNANDO:</b> É [concordando], e eles não crescem juntos né.  <b>JOSÉ:</b> Parece que eles vão mantendo uma proporcionalidade. [em tom de dúvida]  <b>FERNANDO:</b> Vai chegar um momento que eles vão ficar iguais, os segmentos ficam iguais a 3. [ao sobrepor D ao que seria o vértice do eixo menor da elipse]  <b>JOSÉ:</b> Alá, dá 6 uai! Joga prá lá [gesticula pedindo à Fernando que mova o ponto C para sua esquerda], para aí, viu aí? Deu seis também! [empolgado com a percepção]  <b>FERNANDO:</b> Então essas duas, é..., esses dois seguimentos vai dar sempre 6. [refere-se a soma dos segmentos]  <b>JOSÉ:</b> Isso aí, também já é o princípio da elipse. [afirma após breve reflexão]  <b>FERNANDO:</b> É verdade. [concorda, porém retraído] Á, é sim, é uma elipse! [agora concorda com mais vigor após mover o ponto C novamente]  <b>JOSÉ:</b> [risos após surpresa de Fernando] E aqui é como se fosse os focos, focos no A e B [aponta na tela os pontos]</p>	<p>percebemos que a medida que locomovemos o ponto c, obtemos diferentes medidas dos segmentos AD e BD, mas a soma desses sempre resulta no mesmo valor.</p>	<p><b>I1-AE1-GB:</b> Os sujeitos se rendem ao dinamismo do <i>software</i> ao promover, explorar, conjecturar e refletir sobre os diversos movimentos feitos.</p> <p><b>I2-AE1-GB:</b> São apresentados constantemente conhecimentos prévios mediante necessidade de compreensão de uma propriedade específica com potencial gerador de uma definição.</p> <p><b>I3-AE1-GB:</b> As expressões de contentamento que julgamos ser manifestos dos sujeitos apontam para o bem estar e a aceitação do ambiente, da atividade e da metodologia ali vivenciada.</p> <p><b>I4-AE1-GB:</b> A propriedade aprendida de forma significativa proposicional é fruto de um diálogo em que prevalece o “aprender um com o outro”, no respeito e incentivo às ideias prévias trazidas e as percebidas.</p>
<p><b>CENA 2 – Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p><b>Síntese da interação</b></p>	<p><b>Interpretação</b></p>
<p><b>JOSÉ:</b> É, acho que não tem nada de diferente. [meio inseguro]  <b>FERNANDO:</b> Sabe o que deve ser, [risos] nós adiantamos, acho que era aqui que era pra dizer que a soma é igual. [presume com certa insegurança]  <b>JOSÉ:</b> [risos] É isso mesmo, aqui era pra ser mais de vagar, então, tipo, já escrevemos antes né, não precisa mais. [concorda seguro do que diz]</p>	<p>[Indagaram já ter respondido no item anterior]</p>	<p><b>I5-AE1-GB:</b> Os sujeitos, por serem futuros professores estão mais propícios a perceber nas entrelinhas, objetivos metodológicos e processuais de atividades nas quais estão imersos.</p>
<p><b>CENA 3 – Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos: A, B, D, E e F.</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p><b>Síntese da interação</b></p>	<p><b>Interpretação</b></p>

<p><b>FERNANDO:</b> A tá, é isso [ao ver o início do rastro], aí vai dá uma elipse, olha ai [ao ver o rastro se completar]</p> <p><b>JOSÉ:</b> Massa de mais né! [surpreso com a qualidade gráfica do software]</p> <p><b>FERNANDO:</b> O A e o B, são os focos da elipse. [afirma seguro do que diz]</p> <p><b>JOSÉ:</b> É, e D e F são pontos da elipse né? O E como centro. [faz uma pergunta, mas não demonstra dúvida]</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Sim F é um ponto da Elipse, mas ele pode assumir um nome específico?</p> <p><b>JOSÉ:</b> [risos] Calma aí que eu vou lembrar, cê lembra o nome desse ponto [pergunta à Fernando]; é sobre <math>a^2</math> [apontando para o segmento EF] e <math>b^2</math> [com o dedo gesticula o que seria o eixo menor da elipse]. [uma pausa para refletir] são os vértices [risos]</p> <p><b>FERNANDO:</b> Vértices! Isso!</p>	<p>A figura formada é uma elipse tendo A e B como focos, E como centro e D e F como pontos pertencente s, sendo F um de seus vértices.</p>	<p><b>I6-AE1-GB:</b> O dinamismo do <i>software</i> bem como o potencial de suas ferramentas é justificado nas falas e expressões de contentamento dos sujeitos.</p> <p><b>I7-AE1-GB:</b> Os sujeitos utilizam de conhecimentos prévios gráficos e algébricos para classificar objetos geométricos postos previamente.</p> <p><b>I8-AE1-GB:</b> Os sujeitos demonstram confiança ao buscar apoio nos conhecimentos e habilidades do outro. Buscam o aprendizado nas percepções do outro.</p>
<p><b>CENA 4 – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p><b>Síntese da interação</b></p>	<p><b>Interpretação</b></p>
<p><b>FERNANDO:</b> A gente tem que ver o que não variou. [afirma solene]. No caso a gente tinha reparado essa distância aqui [após momento de reflexão, indaga apontando para os segmentos AD, BD].</p> <p><b>JOSÉ:</b> É, que se a gente pega um ponto da elipse, a distância dele pros focos, a distância vai ser sempre a mesma. [referindo-se a soma das distâncias]</p> <p><b>FERNANDO:</b> Eu pensei isso também, é a principal característica da elipse né.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Acho que aqui é tipo assim; é por que é como se ninguém nunca tivesse ouvido falar do que é elipse, tipo assim; “explique o que é uma elipse”, é como se você não tivesse material nenhum, “o que que é uma elipse?” Cê pega dois pontos aleatórios [gesticula com os dedos polegar e indicador erguidos] e pega um terceiro ponto, a soma desses dois pontos até o terceiro tem que dar uma constante [a partir dos dedos erguidos, indica com o dedo indicador da outra mão as distâncias até o terceiro ponto]</p> <p><b>FERNANDO:</b> É igual quando a gente pega o barbante pra construir né: põe dois pregos amarra os barbantes e com o lápis ali vai desenhando [movimenta o indicador de forma a transcrever uma elipse]. Como o tamanho do barbante nunca muda, a soma é constante né.</p> <p><b>JOSÉ:</b> É essa é a construção manual, é parecido com o que a gente fez aqui [refere à aplicação no <i>software</i>].</p>	<p><b>Grupo:</b> Elipse: Figura construída a partir da soma das distâncias de dois pontos a um terceiro ponto, sendo essa soma um valor constante.</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Eu entendi, mas, teve um tópico na atividade pedindo para vocês definirem alguns pontos, então, utilizem destes pra refinar o que escreveram. E essa constante, equivale a que?</p> <p><b>JOSÉ:</b> Entendi, os pontos são focos, os outros né. Deixa eu pensar, [pausa para reflexão] a tá, a constante é 6, que é duas vezes o 3 né, e 3 é a distância do centro ao vértice. [afirma com segurança],</p>	<p><b>I9-AE1-GB:</b> Na percepção de uma invariância que jugou-se relevante, os sujeitos buscaram a formulação de uma definição para o objeto construído.</p> <p><b>I10-AE1-GB:</b> O conhecimento prévio de outra metodologia a qual se julgou semelhante à utilizada na pesquisa, serviu como subsunçor relevante para elaboração da definição.</p> <p><b>I11-AE1-GB:</b> Mediante dificuldade em expressar oralmente, em alguns momentos, os gestos manuais mostraram-se úteis para espacializar a comunicação e melhor tratar as informações concebidas.</p> <p><b>I12-AE1-GB:</b> A interação entre pesquisados e pesquisador auxiliou na elaboração e refino da definição para a Elipse.</p>

<p><b>JOSÉ:</b> Eu achei que assim, experimentalmente assim, fica mais nítido de perceber. Pra quem nunca viu ia, “nossa aqui dá sempre a mesma coisa se somar!”. [demonstra entusiasmo como o vivido, e defende a utilização da metodologia]</p> <p><b>FERNANDO:</b> Eu acho que esse método é mais didático sacô; ao invés de só socar a formula e ir falando “a isso aqui é o foco, a distância é constante” e já ir lançando assim os dados pra você ir engolindo. É melhor o aluno descobrir as coisas, acho que ele vai aprender de verdade, e vai lembrar por mais tempo.</p>	<p><b>Grupo:</b> Elipse: Figura construída a partir da soma das distâncias de dois pontos denominados focos a um terceiro ponto que pertencerá a figura em formação, sendo essa soma igual ao dobro da distância do centro a seu vértice.</p>	<p><b>I13-AE1-GB:</b> O estar em uma metodologia possibilitou elementos para comparação e determinação de uma “boa maneira” para se ensinar sobre Elipse.</p> <p><b>I14-AE1-GB:</b> Ao Definir mediante exploração vivenciada e auxílio do pesquisador, sugere-se a Aprendizagem Significativa por recepção de um conceito para Elipse.</p>
--	---	---

### *ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1 - GRUPO C*

**CENA1-** Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>ROGER:</b> Uia o D mexe também?! Parece que E dependente. [confuso com o ocorrido]</p> <p><b>AMANDA:</b> Move rápido aí [pede a Roger]. Aí, tá vendo! O C tá girando, faz um círculo e D faz uma Elipse. [Empolgação com o observado]</p> <p><b>LETÍCIA:</b> Nossa [risos] acho que você estragou a atividade [risos], deve ser que era pra gente descobrir isso no final [risos]</p> <p><b>AMANDA:</b> Deve ser mesmo [risos], mas vamos indo pra ver o que que dá. [risos]</p> <p><b>DANIELE:</b> Vamos então. Olhei pros segmentos ó; também vão juntos, tão todos ligados; pra cá [sentido horário] o azulzim vai aumentando, pro outro lado é a vermelhinha que aumenta. [indaga com tranquilidade]</p> <p><b>ROGER:</b> O mesmo que acontece em cima acontece também em baixo, só que, aqui [refere-se à região acima de EF], no sentido horário o azul diminuía depois que passa aqui pra baixo ele aumenta e o verdim que começa a diminuir. Movendo aqui pra esquerda, o verdim que diminuía começa a crescer. [Movendo constantemente o ponto C]</p> <p><b>LETÍCIA:</b> Realmente, é isso mesmo, e o único seguimento que não se mexe é o EF. [fala em tom solene]</p> <p><b>DANIELE:</b> A atividade é exploratória, então não está ai atoa, deve servir pra algo depois. [risos]</p>	<p>Percebemos que quando se move o ponto C, o ponto D também se move. Estes pontos percorrem as extremidades de uma elipse e uma circunferência. Quando se movimenta o ponto C, a distância entre os pontos A e D (reta azul) e os pontos B e D (reta verde) variam, sendo que enquanto uma aumenta a outra diminui.</p>	<p><b>I1-AE1-GC:</b> O percurso feito por um ponto no <i>software</i> é associado a figuras não postas. Esta percepção configura uma nova forma de perceber e conceber tais figuras.</p> <p><b>I2-AE1-GC:</b> Indagações acerca do processo de resolução da atividade apontam para a aprendizagem significativa do caráter exploratório anteriormente trabalhado.</p> <p><b>I3-AE1-GC:</b> Os sujeitos utilizaram do dinamismo e efeitos estéticos do <i>software</i> para testar e analisar conjecturas sobre simetria.</p> <p><b>I4-AE1-GC:</b> O apontamento de algumas invariantes indica o aprendizado da relevância das para o trabalho com GD.</p>

**CENA 2 –** Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

<p><b>ROGER:</b> Olha, colocando D no H, esta reta fica maior que a outra [o seguimento azul fica maior do que o verde]</p> <p><b>LETÍCIA:</b> Não é reta, é segmento Roger. O resto tá certo [risos], sempre que sobrepõe isso acontece, um fica maior que a outro. [fala com tranquilidade]</p> <p><b>DANIELE:</b> Deixa eu ver uma coisa [ pede o controle do mouse]. Vê aí, o maior de que podem chegar é 5, e o menor é 1 [ Refere-se aos seguimentos AD e BD, ao sobrepor o ponto D às extremidades do eixo maior da elipse]</p> <p><b>ROGER:</b> É mesmo, quando está em F verde fica 5 e o azul fica 1, quando passa de F, a azul cresce e a verde diminui até a azul ficar 5. [girando D no sentido anti-horário]</p>	<p>No ponto H, o seguimento verde é maior que o azul. No ponto F todos os seguimentos se coincidem e o seguimento ver continua maior que o azul, um valendo 5 e o outro 1. No ponto J, o seguimento verde continua maior que o seguimento azul. No ponto G, o seguimento verde diminui e o azul aumenta.</p>	<p><b>I5-AE1-GC:</b> Os sujeitos demonstram percepção de variantes a partir do dinamismo do <i>software</i> e recorrem à equivalência entre símbolos e cores previamente conhecidas para tratar das mesmas.</p> <p><b>I6-AE1-GC:</b> As permissões concedidas, o incentivo e respeito às ideias postas facilitam o trabalho do grupo.</p> <p><b>I7-AE1-GC:</b> Os sujeitos se mostram atentos às falas do outro à ponto de corrigi-las quando necessário, de forma amistosa.</p>
<p><b>CENA 3 – Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos: A, B, D, E e F.</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p><b>Síntese da interação</b></p>	<p><b>Interpretação</b></p>
<p><b>AMANDA:</b> Olha que legal! Vai fazendo uma elipse colorida. [empolga com o rastro deixado]</p> <p><b>DANIELE:</b>[risos]era agora que era pra falar que era uma elipse[recorda o discutido na cena 1].</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Existe alguma relação entre estes seguimentos? [apontando para os seguimentos interiores à elipse formada]</p> <p><b>AMANDA:</b> Tem uma hora, deixa eu mostrar [pega o mouse] aqui ó; todos ficam iguais, três, três e três, formando um triângulo isósceles.</p> <p><b>ROGER:</b> É, analisando, se somar ali [aponta para AD e BD], dá seis, como o outro é três, tem a relação seis por três né.</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Muito bem! E quanto é seis por três? [inicia uma linha de raciocínio]</p> <p><b>ROGER e DANIELA:</b> É dois. [resposta rápida]</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Bom, então movam novamente o ponto C e vejam se percebem alguma relação.</p> <p><b>AMANDA, DANIELE, ROGER e LETÍCIA:</b> [após pausa e reflexão, indagam não ver relações]</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Recapitulando, vocês somaram este com este, deu seis. Viram que dividindo por este, dá dois, certo? Então, com calma, movimente C novamente e me digam algo sobre esta soma e a razão que vocês determinaram. [Tenta organizar o que foi feito]</p> <p><b>DANIELE:</b> [após ver Roger movimentar C] Á já sei, já sei! [risos] aqui ó, quatro vírgula dois mais dois vírgula oito, dá seis também [com empolgação]. Mexe mais [pede a Roger], de novo tá vendo, quatro vírgula nove mais um vírgula um dá sei também. [contente com a percepção]</p>	<p>Formou-se uma elipse com eixo maior valendo 6. O eixo menor pode ser calculado quando o ponto D é perpendicular ao eixo maior formando assim o eixo menor, que pode ser descoberto pela altura do triângulo isósceles de lados 3, 3 e 4 formado pelos pontos A, B,D, por fim usar teorema de Pitágoras.</p>	<p><b>I8-AE1-GC:</b> A estética proveniente do <i>software</i> propiciou o manifesto de expressões que caracterizam a satisfação e bem estar com o ambiente proposto.</p> <p><b>I9-AE1-GC:</b> O “não saber” levou o pesquisador a mediar de forma não arbitrária a aprendizagem da propriedade vista como fundamental para continuidade da atividade.</p> <p><b>I10-AE1-GC:</b> Os manifestos que evidenciaram surpresa e contentamento por parte dos sujeitos mostram que a mediação do pesquisador não tirou o “efeito novidade”, e apontam para a aprendizagem significativa uma propriedade.</p>

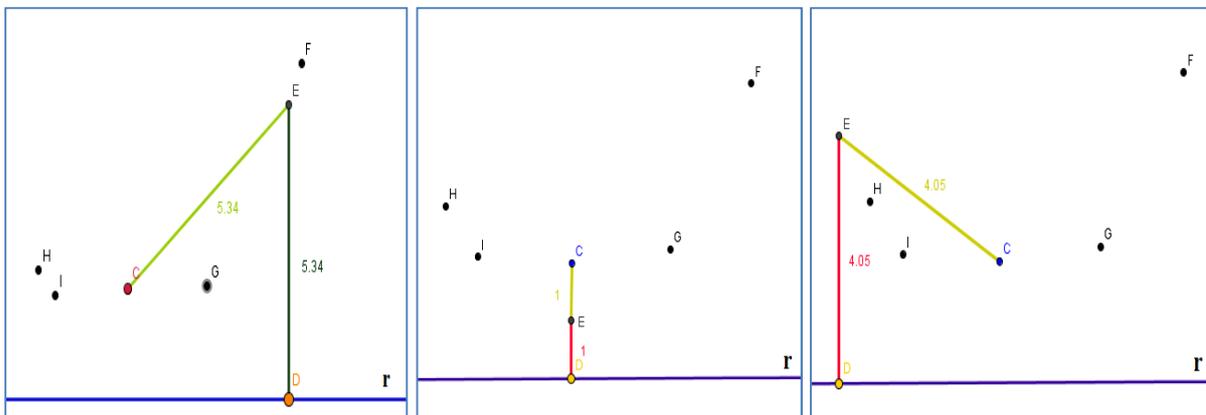
<p><b>ROGER:</b> É mesmo! Nossa não ia ver nunca [risos], então, a soma dos seguimentos sempre vai dar seis, ou seja, sempre o dobro do outro seguimento. [Resume o dito por Daniele demonstrando concordância e satisfação]</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Muito bem gente! Agora é só dar nomes aos pontos da figura. [dá crédito ao percebido e incentiva a continuidade]</p> <p><b>ROGER:</b> A e B são focos, E é o centro, e F é o que mesmo? [tranquilo ao falar]</p> <p><b>AMANDA:</b> É o vértice sô. O ponto de, acho que é um ponto que está na linha da elipse, um ponto da elipse então. [segura do que diz]</p>	<p>Deduzimos por conhecimentos prévios que é uma uma elipse, sendo o ponto E o centro dele, os pontos A e B, os focos, o ponto F o vértice e o ponto D um ponto da elipse que circula sobre a elipse, passando pelos pontos I, J, H e G.</p>	<p><b>I11-AE1-GC:</b> Os sujeitos utilizaram de conhecimentos prévios para destacar objetos e abordar propriedades específicas da figura em questão.</p> <p><b>I12-AE1-GC:</b> O deslumbre com potencial dinâmico do <i>software</i> é constante nas explorações deferidas.</p>
<p><b>CENA 4 – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p><b>Síntese da interação</b></p>	<p><b>Interpretação</b></p>
<p><b>LETICIA:</b> Aqui fala pra definir a partir de invariância [lendo o item da CENA 4]. Acho que por mais que os seguimentos ai se movem, se olhar pra tudo tem uma invariante aí né, que é a soma que é sempre seis. [solene ao falar]</p> <p><b>AMANDA:</b> Também acho. Acho aqui também, só completando aqui, o seguimento EF não varia nunca né, e essa soma tá ligado com isso. Então acho que tem que olhar pra estas duas coisas pra definir. [demonstra segurança em sua fala]</p> <p><b>ROGER:</b> Meninas inteligentes é outra coisa viu. Vamos montar então. [risos]</p>	<p><b>ELIPSE:</b> Figura plana que possui como característica fundamental a relação entre as distâncias entre seus focos e um de seus pontos: a distância de um ponto qualquer dela a um dos focos somada com a distância desse mesmo ponto ao outro foco é igual a distância entre os extremos do eixo maior.</p>	<p><b>I13-AE1-GC:</b> A relação do já vivido com o novo proposto expõe a concepção significativa do que de fato é relevante para conceituar objetos em ambientes de geometria dinâmica.</p> <p><b>14-AE1-GC:</b> A utilização de conhecimentos previamente concebidos para elaboração da definição aponta à Aprendizagem Significativa do conceito de Elipse.</p>

## ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 2

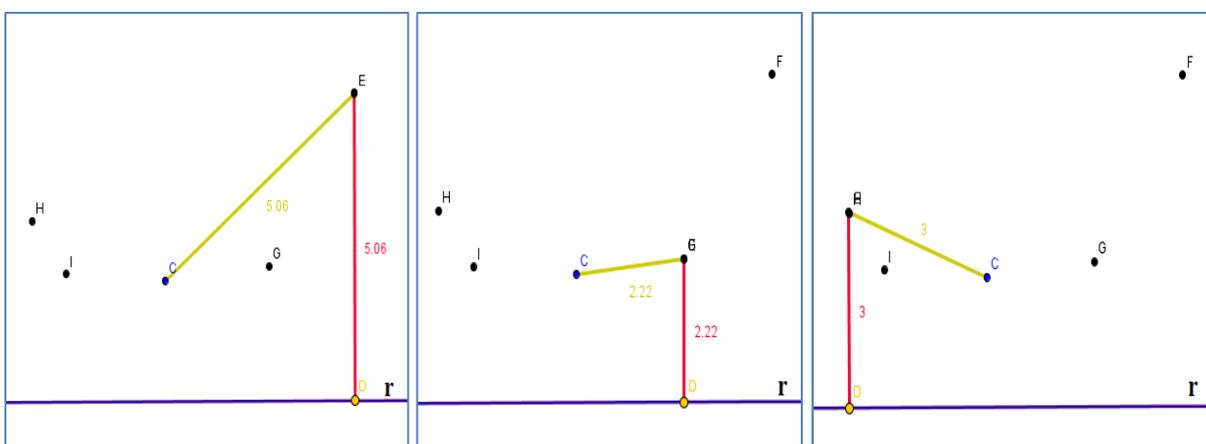
Uma vez familiarizados com o ambiente virtual proposto, os sujeitos foram convidados a participar de um encontro totalmente virtual, no qual estariam incumbidos de trabalhar as atividades exploratórias 2 e 3. Os dados aqui apresentados, bem como os decorrentes da Atividade Exploratória 4 foram retiradas diretamente do VMTwG: as falas expostas, são proveniente do discurso evidenciado no *chat*. A percepção das ações deferidas ocorreu mediante utilização do aplicativo “VMT Replayer”, que registra de forma síncrona o discurso no *chat* e os movimentos feitos no ambiente.

*Prévia dos movimentos deferidos em cada cena:*

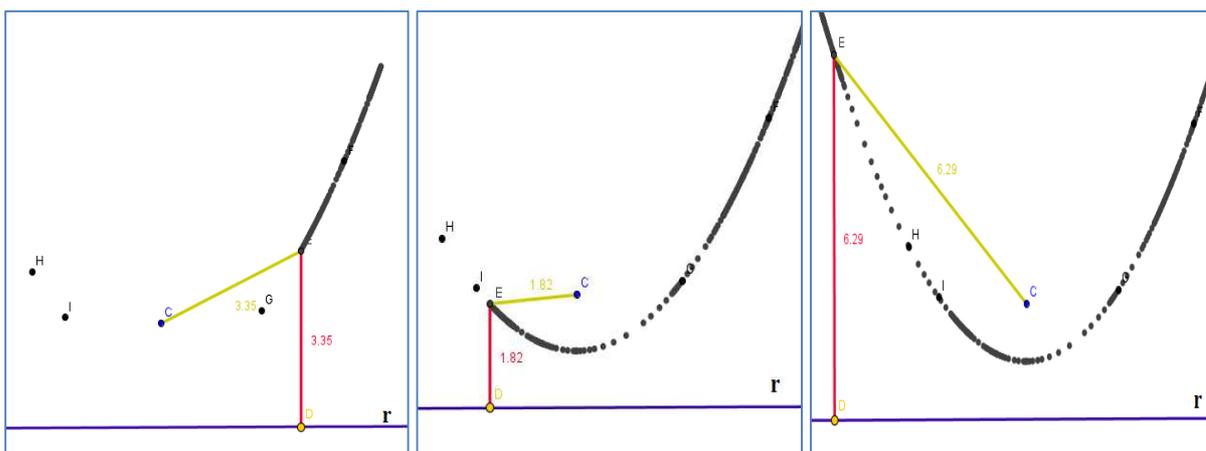
**CENA1** - Mover o ponto C como bem entender.



**CENA 2** – Mover o ponto c de forma a sobrepor D aos pontos pretos da figura



**CENA 3** – Habilitar rastro em D e mover o ponto C.



A seguir, indicamos as cenas e buscamos interpretar os manifestos que se mostraram na interação dos grupos mediante a segunda atividade exploratória.

<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 2 - GRUPO A</b>		
<b>CENA1-</b> Mover o ponto D como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>LUANA:</b> percebi q os resultados dos valores dos segmentos são sempre os mesmos</p> <p><b>LUCIA:</b> É os segmentos CE e ED tem sempre os mesmo tamanhos, o Ponto E passa pelos outros pontos (H,F,J e I). Vai com o D até onde pode ir na reta r. Vai aumentando sempre né?</p> <p><b>LUCIA:</b> [...] você percebeu também que quanto mais para a esquerda ou a direita de r os valores vão crescendo</p>	<p>Quando movimentamos o ponto D percebemos que os segmentos CE e ED sempre tem os mesmos valores e que ponto E passa pelos pontos J, F, H e G. O menor valor que os segmentos CE e ED podem assumir é 1, quanto mais movimentarmos o ponto D para a esquerda ou para a direita em r maiores são os valores assumidos por esses segmentos.</p>	<p><b>I1-AE2-GA:</b> Os sujeitos utilizam do dinamismo do <i>software</i> para explorar movimentos, testar e validar conjecturas acerca de uma constante percebida.</p> <p><b>I2-AE2-GA:</b> Apresentam uma vivência em geometria ao referirem à entes geométricos.</p>
<b>CENA 2 –</b> Mover o ponto D de forma a sobrepor o ponto E aos pontos pretos, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso.		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>LUCIA:</b> [...] o ponto E passa por todos eles</p> <p><b>LUANA:</b> Sim e os valores continuam o mesmo</p> <p><b>LUCIA:</b> luana olha o movimento do ponto é, parece uma parábola né.</p> <p><b>LUANA:</b> olha! realmente é uma parábola mesmo, tanto que vai diminuindo e aumentando a partir do meio. Que legal</p>	<p>Temos que a distância do foco C a um ponto qualquer da parábola e a mesma distância desse ponto ao eixo de simetria (reta r).</p> <p>Os elementos que não variam mesmo após o movimento de D é o foco ( Ponto C) e o eixo de simetria (reta r).</p> <p>Percebemos que a distância do foco C até o vértice E é igual a 1 que é a mesma distância do vértice E ao ponto D da reta de simetria.</p>	<p><b>I3-AE2-GA:</b> A expressão que sugere o novo percebido, e o relacionamento do percurso de um ponto que flutua em um espaço não definido com uma figura previamente conhecida, aponta para a aprendizagem significativa de uma nova forma de conceber a mesma.</p> <p><b>I4-AE2-GA:</b> O ato de perceber, seguido do convite à mesma percepção por parte do outro, fortalece vínculos e facilita o trabalho da equipe.</p>
<b>CENA 3 –</b> Habilitar rastro no ponto E, seguido do movimento do ponto D, da discussão e síntese do que diz o grupo sobre a figura gerada pelo rastro deixado pelo ponto E. Determinar quais elementos da mesma representa o ponto C e a reta r ali exposta.		
<p><b>LUCIA:</b> Pronto, ta vendo a parábola ai?</p> <p><b>LUANA:</b> consegui ver que a figura dá uma parábola linda.rsrsrs</p> <p><b>LUCIA:</b> [...] pelo que eu percebi a figura formada é uma parabolaa, e acredito que o ponto C seja um foco e a reta r um eixo de simetria. E quando CD é igual a 2 o ponto E é o vértice da parábola.</p> <p><b>LUCIA:</b> [...] então mas o que você ve sobre o ponto C, sobre a reta r e sobre E quando DC é igual a dois?</p>		<p><b>I5-AE2-GA:</b> Mediante dinamismo e efeitos visuais do <i>software</i> os sujeitos recorrem a conhecimentos prévios em Geometria para nomear a figura encontrada e classificar seus objetos.</p> <p><b>I6-AE2-GA:</b> As perguntas lançadas visam trazer ao diálogo acerca de ideias, os demais membros do grupo, o que favorece o aprender em comunhão.</p>

<p><b>LUANA:</b> o ponto C é o foco. a reta r um eixo de simetria</p> <p><b>LUCIA:</b> ok, e também temos a mesma medida para a distância do foco C a qualquer ponto da parábola e a distância do eixo de simetria ao ponto. certo?</p> <p><b>LUANA:</b> Sim, mas bateu a dúvida agora se a reta é mesmo eixo de simetria, acho que quando o <b>PESQUISADOR</b> mostrou, ele falou um outro nome. [refere-se ao primeiro encontro, no qual houve uma organização prévia sobre cônicas]</p> <p><b>LUCIA:</b> reta diretriz?</p> <p><b>LUANA:</b> Isso, isso mesmo, r é a reta diretriz, o eixo de simetria é a reta que divide a parábola em duas partes iguais.</p> <p><b>LUCIA:</b> Beleza!...Acho que os que não variam é o foco e a reta diretriz, o que você acha?</p> <p><b>LUANA:</b> Eu tbm</p>	<p>No movimento do ponto E percebemos que forma uma parábola ao arrastar o ponto D. O ponto C é o foco da parábola, a reta r é a reta diretriz da parábola e quando temos <math>DC=2</math> teremos o ponto E o vértice da parábola.</p>	<p><b>I7-AE2-GA:</b> Os pesquisados em momento de dúvida recorrente da percepção de uma possível incoerência trabalharam em conjunto buscando sanar a mesma.</p> <p><b>I8-AE2-GA:</b> O remeter-se a algo trabalhado no primeiro encontro, e aproveitamento da informação lembrada, possibilitou a correção conjunta de uma abordagem vista como incoerente ao dar como equivalentes a figura posta a figura "RETA DIRETRIZ".</p> <p><b>I9-AE2-GA:</b> A percepção de uma possível incoerência levou ao tratamento de outra informação potencialmente relevante para o tema discutido.</p> <p><b>I10-AE2-GA:</b> Uma dúvida posta gera aprendizagem para o sujeito enquanto membro do grupo, e para o grupo como um todo.</p>
--	--	---

**CENA 4** – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>LUCIA:</b> [...] acredito ser a distância que não varia, a distância de pontos da parábola aos elementos que não variam quando mexemos com D (ponto C e a reta r) o que você acha?</p> <p><b>LUANA:</b> Tbm acredito q seja isso</p>	<p>Definição: Seja o ponto C o foco de uma parábola e a reta r, uma reta diretriz dessa parábola, a distância do foco a um ponto X qualquer da parábola será sempre a mesma da distância desse ponto X a diretriz.</p>	<p><b>I11-AE2-GA:</b> Os sujeitos utilizaram da experiência vivida e conhecimentos advindos dela para definir parábola, o que pode caracterizar uma Aprendizagem significativa de uma conceituação mais generalizada.</p> <p><b>I12-AE2-GA:</b> A busca por uma aceitação do companheiro de uma ideia posta indica o saber escutar e o respeito à opinião do outro.</p>

### ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 2 - GRUPO C

**CENA1-** Mover o ponto D como bem entender, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso feito.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>ROGER:</b> provavelmente curva formada é uma parábola. É...Realmente parece uma parábola</p> <p><b>DANIELA:</b> Bom é uma parábola e os pontos realmente estão nelas</p> <p><b>ROGER:</b> C é o vértice da parábola</p> <p><b>DANIELA:</b> Então galera o que observamos quando mexemos com o ponto D?</p> <p><b>ROGER:</b> Observamos que possivelmente a figura formada é uma parábola. Os pontos pretos são pontos dessa parábola e C é o vértice. OK?</p> <p><b>DANIELA:</b> ok</p>	<p>Observamos ao movimentar o ponto D no eixo x, que o ponto E, se "arrasta" pelo plano formando uma curva. Provavelmente uma parábola, cujos pontos pretos são, pontos dessa parábola e C é o seu vértice.</p>	<p><b>I1-AE2-GC:</b> As possibilidades do software de GD em comunhão com os conhecimentos prévios dos sujeitos deu abertura à uma nova concepção para os símbolos: "Parábola" e o gráfico da mesma.</p>

**CENA 2** – Mover o ponto D de forma a sobrepor o ponto E aos pontos pretos, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

<p><b>DANIELA:</b> Eu entendo que vc ao movimentarmos o ponto D, temos um curva, que achamos que é uma parábola, e que os pontos de preto são pontos da parábola, C é o vértice.</p> <p><b>ROGER:</b> isso mesmo...na verdade é será um ponto da parábola que representará todos os pontos na verdade ele percorre ela toda</p> <p><b>DANIELE:</b> lxi..parece que ao modificarmos a posição do ponto c desconfigurou as coisas isso porque a gente mudou realmente o vértice da parábola[há uma distorção dos objetos após movimento indevido]</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> rrsrs, Roger, no item não pedia para movimentar o ponto C, mas tudo bem podem continuar normalmente.</p> <p><b>ROGER:</b> Quando sobrepomos o Ponto E Sobre os pontos pretos a gente cria um segmento de reta. Provavelmente não é só isso</p> <p><b>LETICIA:</b> é como se o E fosse um lápis</p> <p><b>ROGER:</b> Olha meninas vou movimentar D</p> <p><b>LETICIA:</b> ele cria uma linha ao passar pelos pontos que caíram de parábola</p> <p><b>ROGER:</b> os segmentos eles são iguais!</p> <p><b>DANIELE:</b> eles são de mesmo tamanho</p> <p><b>ROGER:</b> aaaaaaa...deve ser o lance do foco</p> <p><b>LETICIA:</b> então o ponto D é o foco?</p> <p><b>ROGER:</b> C não é vértice C é o foco</p> <p><b>LETICIA:</b> Mas, D é algum ponto importante da seção? Ou ela só tá ali pra mover?</p> <p><b>ROGER:</b> A distância do foco a um ponto da parábola é a mesma que a do ponto ao eixo x</p> <p><b>LETICIA:</b> Pq pelo o q reparei o segmento ED é igual ao segmento EC por isso acho que D é o foco, E C é o vértice</p> <p><b>DANIELE:</b> mas o foco é um ponto fixo como o vértice não pode ficar mudando</p> <p><b>LETICIA:</b> aaaaa realmente, não me atentei a isso, mas o ponto D não tem função?</p> <p><b>ROGER:</b> o ponto D é um ponto sobre o eixo x</p> <p><b>LETICIA:</b> não concordo pq to utilizando ele para tirar uma característica da parábola</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> o ponto D é importante por estar sobre uma reta que também é importante para a parábola, como se chama essa reta?</p> <p><b>LETICIA:</b> entendi...mas não sei o nome da reta</p> <p><b>ROGER:</b> rrsrs...esqueci o nome da reta... hahaha, mas agora lembrei... Reta diretriz? a distância do foco a um ponto é sempre igual a distância do mesmo ponto à reta diretriz</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> concordam meninas?</p> <p><b>DANIELE:</b> Sim, mas tbm não sei o nome da reta</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> o Leandro já falou</p> <p><b>ROGER:</b> então é a reta diretriz mesmo,hehe</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Sim</p> <p><b>LETICIA:</b> que chute em Roger..rrsrsrsrs</p>	<p>Fazendo o que foi proposto na questão quatro, mudamos de opinião com relação ao ponto C. Ele não é o vértice da parábola, mas sim o Foco. O que nos permite dizer isso é que a distância de C a um ponto da parábola, no caso os pretos, é a mesma do ponto C à reta diretriz, que nesse caso é o eixo x.</p>	<p><b>I2-AE2-GC:</b> O componente visual propiciado pelo <i>software</i> e saberes prévios auxilia os sujeitos na prospecção e na formação de conjecturas a serem exploradas, perfazendo o processo de validação das mesmas.</p> <p><b>I3-AE2-GC:</b> Uma distorção não abalou a interação, o grupo permaneceu unido na busca de regularidades.</p> <p><b>I4-AE2-GC:</b> O diálogo constante aponta para a abertura que o ambiente dá à exploração conjunta.</p> <p><b>I5-AE2-GC:</b> Os sujeitos demonstram preocupação em não deixar o outro com concepções incoerentes; discutem as ideias postas até estar claro para todos.</p> <p><b>I6-AE2-GC:</b> O processo de validação de conjecturas leva a percepção de incoerência das mesmas, o que dá abertura à percepção e Aprendizagem Significativa de uma propriedade de potencial gerador da concepção do conceito de parábola.</p> <p><b>I7-AE2-GC:</b> O professor atua como membro do grupo no processo de refino de informações relevantes para a sequência da exploração.</p> <p><b>I8-AE2-GC:</b> Pesquisados e pesquisador se apoiam em levantamentos de questões que visam à clarividência de informações e movimentos.</p> <p><b>I9-AE2-GC:</b> O diálogo gerado a partir da dificuldade do outro, é rico em significado, a medida possibilita a argumentação em prol de justificar o “erro” e apontar o “correto”.</p>
--	--	--

**CENA 3** – *Habilitar rastro no ponto E, seguido do movimento do ponto D, da discussão e síntese do que diz o grupo sobre a figura gerada pelo rastro deixado pelo ponto E. Determinar quais elementos da mesma representa o ponto C e a reta r ali exposta.*

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>DANIELE:</b> depois qque coloquei no E e no D deu a reta e a parábola  <b>PESQUISADOR:</b> Sim, mas foi pedido para habilitar rastro apenas em E.  <b>DANIELE:</b> ah tah....Rsrrsrsrsrsrs  <b>LETICIA:</b> E representa o vértice da parab.  <b>ROGER:</b> O Ponto E quando CD é igual a a 250 é o vértice. CD=500.Os elementos que não variam são os pontos da parábola com a particularidade mas sem nenhuma característica mais especifica de C ser o vértice o foco hauaha [os números não condizem com a o proposto na atividade devido ao movimento indevido do ponto C, o que não interferiu na percepção do vértice da parábola]</p>	<p>Realmente, após fazer o que foi pedido no item 5, não resta dúvidas de que a curva é uma parábola, e tem as características descritas acima. Isso no caso não é uma demonstração, mas intuitivamente não resta dúvidas. Ao encontramos a menor distância entra ED obtemos o vértice da parábola.</p>	<p><b>I10-AE2-GC:</b> Com os objetos expressos na tela do <i>software</i>, e com o movimento sugerido, foi possível a princípio, prever algumas propriedades, e com rastro estabelecido foi possível confirmar tal previsões.  <b>I11-AE2-GC:</b> A construção no <i>software</i> possibilitou a variação de alguns objetos, no entanto, assegurou a preservação das propriedades que os “amarram”.</p>

**CENA 4** – *A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.*

<p><b>DANIELE:</b> Qual a def. Roger?  <b>ROGER:</b> falta só a definição agora  <b>LETICIA:</b> É oq já percebemos a propriedade de que as distâncias variam mas se mantm iguais. Rsrrsrsrsrs  <b>ROGER:</b> é isso mesmo.  <b>DANIELE:</b> CONCORDO...vamo escrever então.</p>	<p>Definição: Uma parábola é a curva que possui um vértice, um foco e uma reta diretriz onde, a distância do foco a um ponto da curva, é sempre igual à distancia desse mesmo ponto à reta diretriz.</p>	<p><b>I12-AE2-GC:</b> O grupo dá ênfase à propriedade apreendida como sendo relevante para a formulação da definição para a figura gerada.  <b>I13-AE2-GC:</b> Ao aterem-se a conhecimentos a pouco aprendidos, os sujeitos aprende significativamente, uma vez que demonstram ter concebido o conceito de parábola mediante processo relacional e recepção de informações advindas do pesquisador.</p>
--	--	---

### ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 2 - GRUPO D

**CENA1-** *Mover o ponto D como bem entender, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso feito.*

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>CAMILA:</b> a medida que D se desloca, as edidas vao aumentando mas sempre DE e EC possuem mesma medida certo?  <b>FABIANA</b> então o ponto D se desloca somente na reta D e relamente os segmentos CE e ED são iguais  <b>CAMILA:</b> pode chamar reta D?  <b>MAURO:</b> Parece que o movimento do ponto E deixa um rastro que forma uma parábola concorda?  <b>FABIANA:</b> realmente  <b>CAMILA:</b> ah....to vendo aqui a reta r, e acho que concordo com oq o Mauro disse  <b>FABIANA:</b> lembrando o valor mínimo destes segmentos é 1  <b>CAMILA:</b> ham ham</p>	<p>Ao mover o ponto D sobre a reta r, temos que os segmentos de retas CE e ED aumentam tanto quanto se move o ponto para a direita quanto para a esquerda, sendo que os valores dos segmentos são iguais. Quando os segmentos ficam perpendiculares a reta r admitem medidas 1, visto que é uma medida mínima. Ao movimentar o ponto D, o rastro que o ponto E faz forma uma parábola.</p>	<p><b>I1-AE2-GD:</b> A equivalência feita entre um símbolo previamente conhecido e uma simbologia nova, aponta para um tipo de aprendizagem significativa.  <b>I2-AE2-GD:</b> O conhecimento prévio da opção “rastro” e de outras funções do <i>software</i>, leva a percepção, mesmo em tom de dúvida, do objeto não evidenciado.  <b>I3-AE2-GD:</b> A concordância com o diz o outro, é sinal do aprender colaborativamente mediante o respeito e a afinidade entre membros do grupo.</p>

<b>CENA 2 – Mover o ponto D de forma a sobrepor o ponto E aos pontos pretos da figura, seguido da discussão sobre as percepções provenientes do movimento, e da síntese do discurso.</b>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>MAURO:</b> Forma uma parábola  <b>FABIANA:</b> este é o ponto E sobreposto ao ponto B  <b>CAMILA:</b> NAO É b NÃO É g  <b>FABIANA:</b> quando sobrepoem no ponto G, vale 4,77 e ao sobrepor com os demais pontos I,H vão aumentando as medidas.  <b>CAMILA:</b> concordo  <b>MAURO:</b> movimente devagar e sobreponha o ponto E em cada um deles novamente, para observarmos de novo  <b>FABIANA:</b> no ponto I medidas 3,87, no G 5,31 e no F 6,33 certo?  <b>MAURO:</b> notei que o ponto mínimo desta parábola é o C e consequentemente os valores aumentam tanto para a direita quanto para a esquerda dele...  <b>CAMILA:</b> deu pra ver o ponto minimo da parabola não seria em E, quando o ponto encontra-se 1u.c acima da reta r?  <b>MAURO:</b> Desculpe o ponto mínimo é o ponto E alinhado com C e D</p>	<p>Notamos que o ponto de mínimo desta parábola é o ponto E alinhado com os pontos C e D, ao qual os valores aumentam tanto para a direita como para a esquerda. Ao sobrepor o ponto E no ponto H encontramos valor de 5.45, ao sobrepor o ponto E nos demais pontos I, G e H, os valores aumentam com valores respectivamente, 3.98, 6.84 e 11.2.</p>	<p><b>I4-AE2-GD:</b> Os objetos postos se abrem à exploração, na qual os sujeitos utilizaram das possibilidades do <i>software</i> para encontrar padrões e testar regularidades.</p> <p><b>I5-AE2-GD:</b> Os sujeitos se mostram atentos ao que é feito e/ou inferido pelos demais membros, o que possibilitou a correção conjunta de incoerências.</p>
<b>CENA 3 – Habilitar rastro no ponto E, seguido do movimento do ponto D, da discussão e síntese do que diz o grupo sobre a figura gerada pelo rastro deixado pelo ponto E. Determinar quais elementos da mesma representa o ponto C e a reta r ali exposta.</b>		
<p><b>FABIANA:</b> viram o que aconteceu? faz um contorno sobre a reta Reta r *  <b>CAMILA:</b> o que representa o ponto C e a reta?  <b>PESQUISADOR:</b> Pessoal vocês habilitaram o rastro em D, o que sugere a atividade?  <b>FABIANA:</b> A tá, é pra habilitar em E...Camila apareceu alguma coisa aí?  <b>CAMILA:</b> apareceu!! e uma parábola mesmo  <b>FABIANA:</b> agora tem que colocar o que representa o ponto C e a reta r  <b>MAURO:</b> o ponto C é o foco da parábol?  <b>CAMILA:</b> sim....acho que sim  <b>MAURO:</b> E é o vertice ou o ponto de mínimo  <b>CAMILA:</b>Quando CD seja igual a 2, nesse caso, o que representa o ponto E o ponto minimo da parabola, o seu vértice  <b>FABIANA:</b> Estou vendo, ponto E é o ponto médio entre CD  <b>MAURO:</b> reta r tem o ponto D e é uma reta equidistante da Parábola tanto pela direita quanto pela esquerda do ponto D  <b>FABIANA:</b> o pontoC e a reta r não varia  <b>MAURO:</b> tem mais, a própria curva que o ponto faz, que é a parábola também não varia e uma parábola voltada para cima,a &gt;0  <b>PESQUISADOR:</b> A reta r tem um nome específico, qual seria?  <b>CAMILA:</b> DIRETRIZ R?  <b>FABIANA:</b> e sim reta diretriz</p>	<p>O ponto C é o foco da parábola e a reta r, o eixo horizontal, reta diretriz por onde o ponto D se desloca. Quando CD é igual a 2, o ponto E representa o ponto médio de CD.  Após os movimentos do ponto D, os elementos que não variam são o ponto fixo C (foco da parábola) e a reta r, diretriz. O contorno da parábola passa pelos outros pontos, ao qual a reta r é equidistante da parábola. Temos também que CE e ED admitem os mesmos valores, sendo estes constantes. Uma parábola voltada para cima.</p>	<p><b>I6-AE2-GD:</b> O chamado ao coletivo à uma percepção individual, bem como as interrogações feitas evidenciam o convite ao trabalho colaborativo.</p> <p><b>I7-AE2-GD:</b> A exploração inicial subsidiou a validação do que foi previsto pelo “flutuar” de um ponto em um espaço delimitado, mas não assinalado.</p> <p><b>I8-AE2-GD:</b> Os sujeitos utilizam de termos matemáticos já conhecidos para classificar e estabelecer padrões entre os objetos expostos à exploração.</p> <p><b>I9-AE2-GD:</b> manifestos apontam o potencial das ferramentas responsáveis pelo dinamismo gerado na interação sujeitos-<i>software</i>.</p>

**CENA 4** – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.

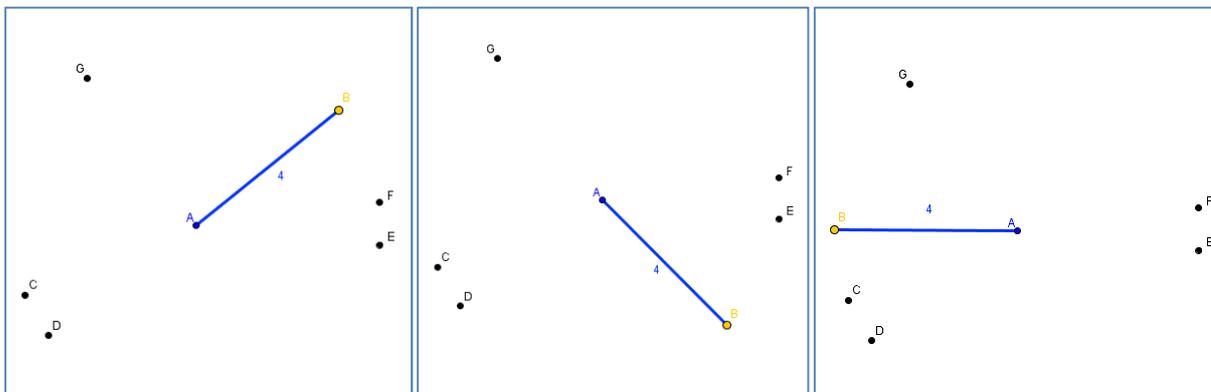
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>FABIANA:</b> falta definição  <b>CAMILA:</b> que tal essa? dados uma reta <math>r</math> no plano e um ponto <math>C</math> FORA DA RETA A PARábola construída tem foco em <math>C</math> e diretriz <math>r</math> eh o conjunto de pontos <math>x</math> pertencentes ao <math>R^2</math> tais que <math>d(x,C)=d(x,r)</math>  <b>FABIANA:</b> parábola e uma curva equidistante a reta <math>r</math> ao qual um ponto fixo não pertencente a parabola, com o ponto mínimo da parabola e igual a este ponto com a reta. melhorem ai  <b>CAMILA:</b> parabola e um conj de pontos de plano equidistantes a um ponto fixo <math>C</math> e uma reta <math>r</math>  <b>MAURO:</b> Parábola é uma curva que neste caso esta está equidistante a reta <math>r</math>, tanto a direita como a esquerda do ponto <math>D</math>.  <b>CAMILA:</b> tal q <math>\text{dist}(P,C)=\text{dist}(P,r)</math>  Ótimo  <b>FABIANA:</b> É gente...quando eu for dar aula de função quadrática, vou começar parábola com uma atividade dessa... fica muito mais legal  <b>MAURO:</b> é melhor pq quando o aluno constrói acho que ele vai aprender melhor e vai guardar as informações por mais tempo</p>	<p>Parábola é um conjunto de pontos do plano equidistante a um ponto fixo <math>C</math> (foco) e uma reta diretriz <math>r</math> tal que o segmento do foco ao ponto da parábola é igual a este ponto com a reta diretriz <math>r</math>.</p>	<p><b>I10-AE2-GD:</b> Os sujeitos trouxeram a experiência proveniente das ações anteriores para elaborar uma definição emergente das percepções durante a exploração e da reflexão sobre as mesmas.</p> <p><b>I11-AE2-GD:</b> As indagações aparentemente individuais fazem parte de um processo conjunto de reflexão e refino de ideias que se direcionam ao mesmo objetivo.</p> <p><b>I12-AE2-GD:</b> Os pesquisados mostram-se adeptos à proposta de uma atividade exploratória ministrada em ambientes de geometria dinâmica, e agregam valor significativo a sua utilização.</p> <p><b>I13-AE2-GD:</b> Manifestos relacionados ao modo de aprender, apontam para uma concordância com a Aprendizagem Significativa, que contrapõe a aprendizagem mecânica.</p>

### ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 3

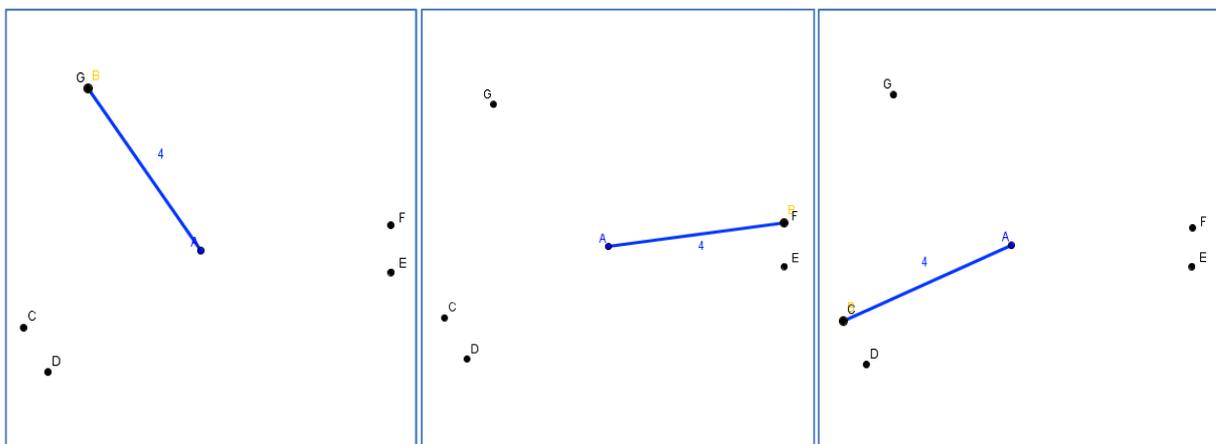
Na sequência da Atividade Exploratória 2, no mesmo encontro, os sujeitos aplicaram-se à terceira atividade exploratória.

*Prévia dos movimentos deferidos em cada cena:*

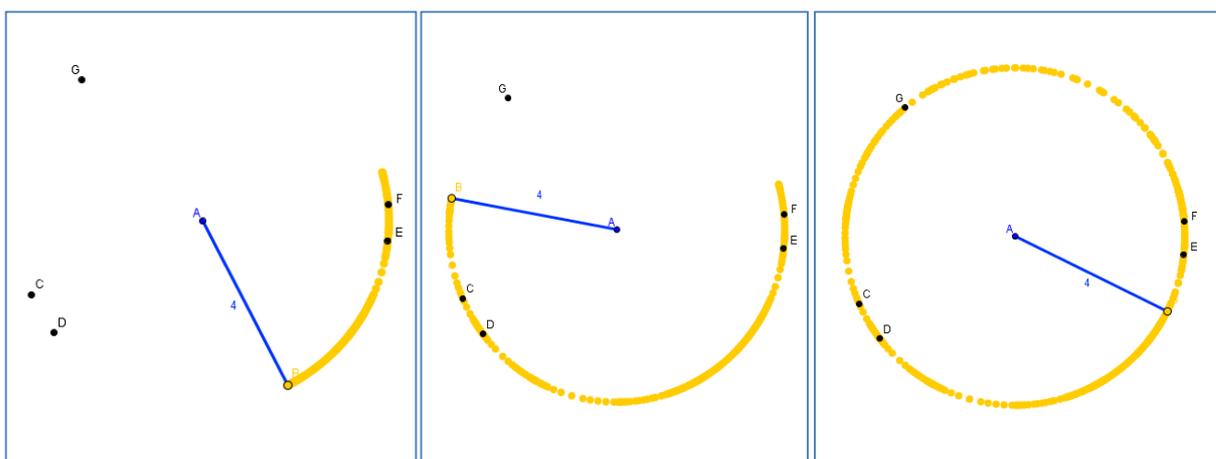
**CENA1** - Mover o ponto C como bem entender.



**CENA 2** – Mover o ponto c de forma a sobrepor D aos pontos pretos da figura



**CENA 3** – Habilitar rastro em D e mover o ponto C.



Os quadros a seguir apresentam os discursos provenientes em cada cena, bem como nossa interpretação dos mesmos.

<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 3 - GRUPO A</b>		
<b>CENA1-</b> <i>Mover o ponto B como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.</i>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>LUCIA:</b> O q percebi é q o ponto G passa por todos os outros pontos. desculpe é o ponto B</p> <p><b>LUANA:</b> AB tem sempre medida 4</p> <p><b>LUCIA:</b> essa medida não muda</p> <p><b>LUANA:</b> Exatamente</p> <p><b>LUCIA:</b> E também, que o ponto A é um ponto fixo, movimentamos B e o ponto A não se movimenta, certo?</p> <p><b>LUANA:</b> certim! então acho que é isso que percebemos inicialmente né.</p> <p><b>LUCIA:</b> sim</p>	<p>Quando movimentamos o ponto B percebemos que ele passa pelos pontos G, C, D,E e F, o segmento AB tem o ponto A fixo e sua medida que é 4 não muda.</p>	<p><b>I1-AE3-GA:</b> A opção “arrastar” se abre à exploração, a medida que possibilita a percepção de invariantes relevantes para continuidade da atividade.</p> <p><b>I2-AE3-GA:</b> A busca pela confirmação do outro, aponta para a cumplicidade entre membros do grupo na exploração.</p>
<b>CENA 2 –</b> <i>Sobrepôr o ponto B aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.</i>		
<p><b>LUANA:</b> Acho q é o q já dissemos</p> <p><b>LUCIA:</b> então a distância a distância do ponto A a qualquer desses pontos será sempre 4. Mais alguma coisa Luana?</p> <p><b>LUANA:</b> não não, acho que não</p>	<p>Quando sobrepomos o ponto B sobre os demais pontos, temos que a distância do ponto A a qualquer um desses pontos será sempre a mesma, sempre 4.</p>	<p><b>I3-AE3-GA:</b> Os sujeitos, em colaboração, determinam como finalizado um processo de análise e sintetizam o que foi percebido.</p>
<b>CENA 3 –</b> <i>Habilitar rastro no ponto B, seguido de seu movimento. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre o ponto A e o seguimento AB. Responder a pergunta: se criarmos vários outros segmentos com origem em A e comprimento 4, qual seria a localização das extremidades destes segmentos?</i>		
<p><b>LUCIA:</b> quando vc ver a figura ai me fala</p> <p><b>LUANA:</b> já vi, que legal, já imaginava mas não tinha certeza que era uma circunferência..rsrsrs</p> <p><b>LUCIA:</b> isso mesmo uma circunferência toda colorida.rsrsrs..que lindo</p> <p><b>LUANA:</b> então o ponto A é o centro e o AB o raio? É isso</p> <p><b>LUCIA:</b> SIM! rsrsrs, vamos colocar lá.</p> <p><b>LUANA:</b> e ai lucia o que acha da pergunta?</p> <p><b>LUCIA:</b> uma das extremidades desse seguimento estará em A e a outra extremidadena circunferência de raio 4</p> <p><b>LUANA:</b> sim será o valor do raio</p>	<p>A figura formada é uma circunferência, o ponto A é o centro da circunferência e AB é o raio da circunferência.</p> <p>Se criarmos varios segmentos com origem em A e comprimento 4, teremos uma das extremidades na origem A e a outra extremidade estará na circunferência de raio 4.</p>	<p><b>I4-AE3-GA:</b> Uma intuição é validada ao ganhar cor e forma no software. Tal intuição direciona para uma nova forma de ver e perceber “Circunferência”.</p> <p><b>I5-AE3-GA:</b> A figura formada dá abertura à construção e/ou imaginação de vários raios de mesma origem limitados pela curva formada.</p> <p><b>I6-AE3-GA:</b> Os sujeitos se mostram humildes ao se preocuparem com o entendimento e participação do outro.</p>
<b>CENA 4 –</b> <i>A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</i>		
<p><b>LUANA:</b> Podemos escrever q a distância do centro A a qualquer ponto da circunferência é sempre a mesma ao qual seu raio será sempre o mesmo.</p> <p><b>LUCIA:</b> tá bom mas acho que devemos começar...circunferência é uma curva..., ai tira o nome do meio do texto</p> <p><b>LUANA:</b> melhor mesmo.</p>	<p>Definição: Circunferência é uma curva na qual a distância do centro (ponto A) a qualquer ponto dela é sempre o tamanho do seu raio.</p>	<p><b>I7-AE3-GA:</b> A busca pelo compreendido pelo outro, e o empenhar-se em uma sintetização de um diálogo coletivo, é fonte de potencial gerador de uma aprendizagem para o sujeito e para o grupo ao qual pertence.</p>

<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 3 - GRUPO C</b>		
<b>CENA1-</b> <i>Mover o ponto B como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.</i>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>ROGER:</b> parece uma circunferência [indaga após mover o ponto B]  <b>LETÍCIA:</b> um círculo de raio 4  <b>ROGER:</b> que tem centro em A  <b>LETÍCIA:</b> isso  <b>ROGER:</b> os pontos pretos pertencem à circunferência  <b>LETÍCIA:</b> qual a diferença entre círculo e circunferência?  <b>ROGER:</b> pode ser qualquer um dos dois depende de cada livro. Tem livro que chama a borda de circunferência e a região de círculo. Mas tem livro que chama a região de disco e a borda de círculo ou circunferência.  <b>LETÍCIA:</b> hunnn...entendi professor. Rsrtrs</p>	<p>É um círculo de raio quatro e centro A.  Os pontos C, D, E, F e G pertencem ao círculo.</p>	<p><b>I1-AE3-GC:</b> A comparação entre um objeto conhecido e um objeto imaginado após movimento no <i>software</i>, aponta à concepção significativa de uma nova forma de ver e perceber tal objeto.</p> <p><b>I2-AE3-GC:</b> A exploração em um grupo de sujeitos com pensamentos e ideias diferentes, deu abertura ao aprendizado conjunto, proveniente das dificuldades, dúvidas e facilidades de cada um.</p> <p><b>I3-AE3-GC:</b> Os sujeitos utilizam de conhecimentos prévios para questionar e responder tais questionamentos.</p>
<b>CENA 2 –</b> <i>Sobrepôr o ponto B aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.</i>		
<p><b>ROGER:</b> aqui é o que a gente já falou mesmo, que a distância é constante.  <b>LETÍCIA:</b> sim, sim, e igual a 4. Só colocar lá né.</p>	<p>[julgaram ter feito no item anterior]</p>	<p><b>I4-AE3-GC:</b> Os sujeitos percebem equivalência com o que já foi feito e buscam a concordância entre membros do grupo para eventual continuidade da atividade.</p>
<b>CENA 3 –</b> <i>Habilitar rastro no ponto B, seguido de seu movimento. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre o ponto A e o seguimento AB. Responder a pergunta: se criarmos vários outros segmentos com origem em A e comprimento 4, qual seria a localização das extremidades destes segmentos?</i>		
<p><b>ROGER:</b> pronto, olha ai Letícia aqui a gente valida que é mesmo circunferência.  <b>LETÍCIA:</b> sim sim, mas faltou falar que o segmento AB é o raio, vamos colocar no resumo.  <b>ROGER:</b> e a pergunta, tá fácil né.  <b>LETÍCIA:</b> é, os seguimentos iam dar no círculo.  <b>ROGER:</b> isso pq partiriam do mesmo centro, e possuem o mesmo tamanho que o raio AB.hehehe. blz</p>	<p>Após realizar os passo 5 e 6. Realmente podemos chegar à conclusão intuitiva no item 7, com relativa certeza, que essa figura formada é um círculo. Cujo centro é A e o seguimento AB é o raio. Pelos seguimentos partirem do centro da circunferência e por possuírem o mesmo tamanho do raio, as extremidades destes seguimentos ficaram sobre a borda da circunferência, seriam outros raios desenhados.</p>	<p><b>I5-AE3-GC:</b> O componente visual do <i>software</i> possibilitou a validação da conjectura anterior, o que contribuiu para classificação de um objeto da figura traçada.</p> <p><b>I6-AE3-GC:</b> Os sujeitos demonstram confiança no tratamento da questão posta, o que pode ser proveniente dos conceitos aprendidos e da colaboração vivida durante a exploração.</p>
<b>CENA 4 –</b> <i>A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</i>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>

<p><b>ROGER:</b> Vamos definir então.</p> <p><b>LETÍCIA:</b> já era mais fácil, agora depois do que fizemos já sabemos as palavras que vamos utilizar né.</p> <p><b>ROGER:</b> por isso que é bom discutir, você me ajuda e eu te ajudo. Hehehe</p>	<p>A curva na qual a distância de um ponto dado à qualquer ponto da mesma é sempre igual, é chamada de círculo. O ponto é chamado de centro, e a referida distância é chamada de raio."</p>	<p><b>I7-AE3-GC:</b> Os sujeitos reconhecem o potencial de uma atividade exploratória, bem como o de uma atuação conjunta para executá-la, a qual pode propiciar crescimento e aprendizagem para os membros do grupo.</p> <p><b>I8-AE3-GC:</b> Ao aplicarem-se ao objetivo comum de definir a figura, os sujeitos buscaram os conhecimentos a pouco discutidos e sintetizados.</p>
---	---	--

### *ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 3 - GRUPO D*

**CENA1-** *Mover o ponto B como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.*

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>CAMILA:</b> vou mecher tah?... Circunferência certo?</p> <p><b>FABIANA:</b> isso mesmo...então a trajetória de uma circunferencia de raio 4</p> <p><b>MAURO:</b> Ao mexer o ponto B, traçasse uma circunferência de raio 4 e diâmetro 8</p> <p><b>CAMILA:</b> a medida que movimenta o ponto B, ele gira formando uma circunferência de raio 4 e centro no A</p> <p><b>MAUORO:</b> O cEntro é o ponto A(4,42; 1,4)</p> <p><b>CAMILA:</b> podemos colocar um ponto mais bonitinho ou não? Tipo (4,1)</p> <p><b>CAMILA:</b> opa...não fica... [move o centro (A), mas não consegue colocá-lo na coordenada desejada]</p> <p><b>FABIANA:</b> o centro é um ponto fixo, que acabou de ser mudado para (4;1,32)</p> <p><b>CAMILA:</b> hihihhi...desculpa</p> <p><b>FABIANA:</b> AB é o raio</p>	<p>Ao mover-se o ponto B, traçasse uma circunferência de raio <math>AB=4</math> e centro no ponto A (4, 1.32).</p>	<p><b>I1-AE3-GD:</b> Os sujeitos argumentam separadamente suas percepções, o que não descaracteriza a colaboração, uma vez que a mesma em muitos momentos parte de ações individuais.</p> <p><b>I2-AE3-GD:</b> Uma vez que os sujeitos disseram que um ponto que gira caracteriza uma circunferência, surge indícios de uma nova forma de se ver e perceber tal figura.</p> <p><b>I3-AE3-GD:</b> Os sujeitos utilizaram de conhecimentos prévios para dar nome aos objetos postos.</p> <p><b>I4-AE3-GD:</b> O espaço visual do <i>software</i> permite confluência de significados; a concepção do não exato, como sendo "feio", leva um dos sujeitos a buscar uma exatidão concebida como mais "bonita".</p> <p><b>I5-AE3-GD:</b> A fuga da proposta, bem como a amenização das consequências da mesma, é devida propriedades de construção geométrica do <i>software</i>.</p>

**CENA 2 –** *Sobrepôr o ponto B aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.*

<p><b>CAMILA:</b> ao sobrepormos o ponto B aos pontos dados percebemos que todos eles estão contidos na circunferência</p> <p><b>FABIANA:</b> ou seja, ou seja a distância deles até o ponto A é igual a 4</p>	<p>Ao sobrepôr o ponto B sobre os pontos C, D, E, F e G percebemos que todos eles estão contidos na circunferência e que a distância do ponto A a cada um destes pontos é igual a 4.</p>	<p><b>I6-AE3-GD:</b> O ato de mover, parar e refletir sobre o feito, leva os sujeitos à percepção de uma constante que justifica o pertencimento dos pontos pretos à curva prevista.</p>
--	--	--

**CENA 3 –** *Habilitar rastro no ponto B, seguido de seu movimento. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre o ponto A e o seguimento AB. Responder a pergunta: se criarmos vários outros segmentos com origem em A e comprimento 4, qual seria a localização das extremidades destes segmentos?*

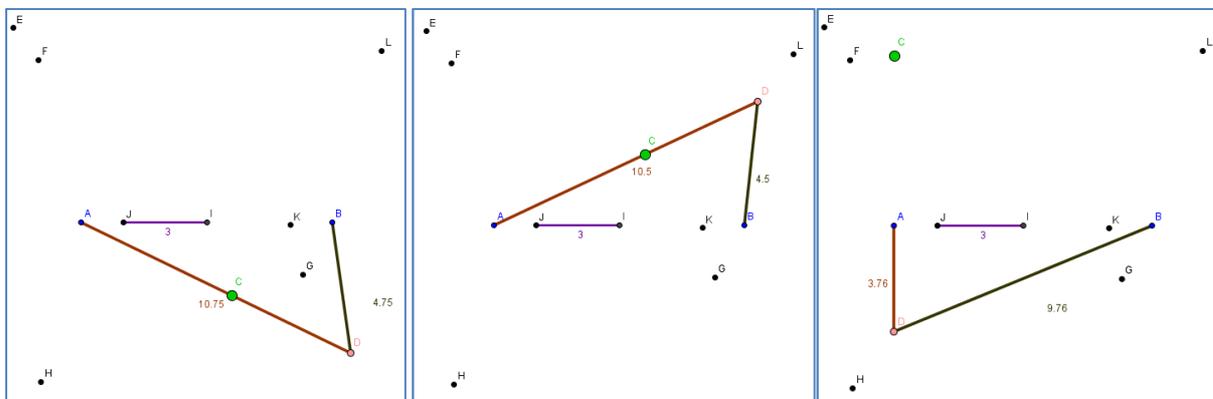
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>MAURO:</b> já vi o rastro da circunferência  <b>FABIANA:</b> eu tbm  <b>CAMILA:</b> A é centro  <b>MAURO:</b> AB ou segmento de vermelho é raio  <b>CAMILA:</b> sobre a pergunta, a extremidade dos segmentos com origem em A e comprimento 4 coincide com o contorno da circunferência  <b>FABIANA:</b> via ficar no contorno  <b>MAURO:</b> Concordo plenamente com vcs</p>	<p>A figura formada pelo arrastar do ponto B é uma circunferência. Ao qual os elementos, o ponto A é o centro da circunferência e o segmento AB é o raio desta circunferência. A invariância é o centro A e o raio formado pelo segmento AB.</p> <p>Ao criarmos vários outros segmentos com origem em A e comprimento 4, a extremidade dos segmentos coincide com o contorno da circunferência.</p>	<p><b>17-AE3-GD:</b> A percepção da circunferência não posta graficamente, fez com que os sujeitos trouxessem para o item, informações já discutidas anteriormente pelo grupo.</p> <p><b>18-AE3-GD:</b> A ação individual em decorrência da resposta à questão dada é vista e aceita pelo grupo, o que demonstra confiança e respeito às opiniões dos companheiros.</p>
<p><b>CENA 4 – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</b></p>		
<p><b>FABIANA:</b> ok: circunferência é um contorno de 360° com raio e centro da circunferência constante, sendo que o raio é perpendicular ao centro.  <b>MAURO:</b> sei não Fabiana, do centro podem sair infinitos raios, como posso falar que ele é perpendicular ao centro.  <b>CAMILA:</b> pois é, eu posso ter o caso de um raio perpendicular ao diâmetro e até a outro raio.  <b>FABIANA:</b> entendi...rsrsrs  <b>MAURO:</b> Acho que é o contorno da região circular formada sempre pela distância do raio até este contorno definida pelo raio da mesma  <b>FABIANA:</b> e o diâmetro é duas vezes o raio  <b>CAMILA:</b> circunferência é o conjunto de pontos <math>p(x,y)</math> pertencentes ao plano equidistante ao ponto A, que é o centro, essa distância é o raio da circunferência.  <b>MAURO:</b> Circunferência é o contorno da região circular formado pelo conjunto de pontos equidistantes de um ponto chamado centro.  <b>FABIANA:</b> isso, é só completar dizendo que essa distância é denominada raio.  <b>CAMILA:</b> ok, de acordo.</p>	<p>Circunferência é o contorno de região circular formado pelo conjunto de pontos equidistantes de um ponto denominado centro. O seguimento que representa esta distância é chamado de raio.</p>	<p><b>19-AE3-GD:</b> Membros do grupo manifestam a vivência em Geometria intuindo discutir amistosamente uma informação vista como incoerente.</p> <p><b>110-AE3-GD:</b> Alguns reestudam o previamente conhecido ao indagar sobre, e outros aprendem ao presenciar tais indagações.</p> <p><b>111-AE3-GD:</b> O que a priori parece ser individualismo, resulta no refinamento conjunto de uma definição para a figura gerada no software.</p>

#### ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 4

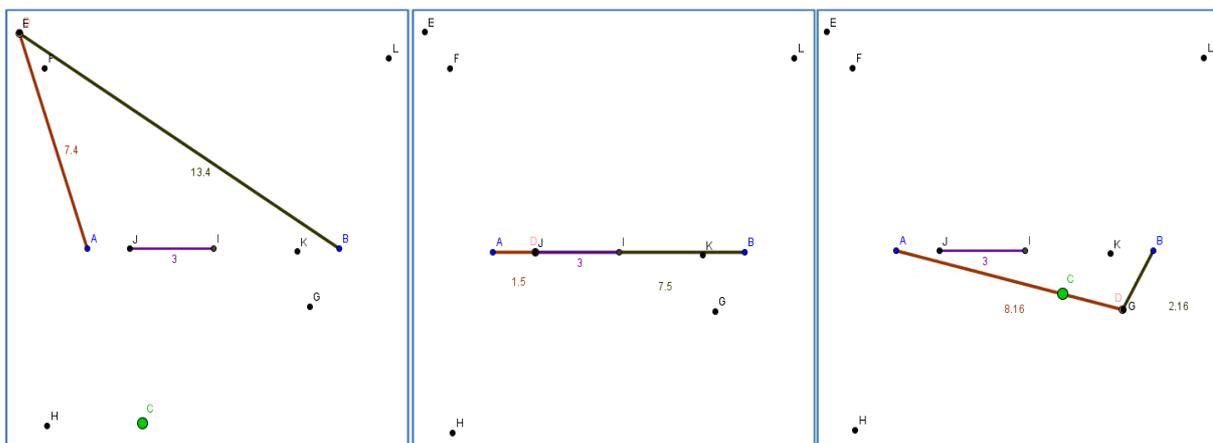
A última atividade exploratória foi apresentada para sujeitos mudados, já munidos de uma totalidade enriquecida por experiências exploratórias e colaborativas significativas. Os sujeitos conceberam e foram concebidos pelo explorar em grupo.

*Prévia dos movimentos deferidos em cada cena:*

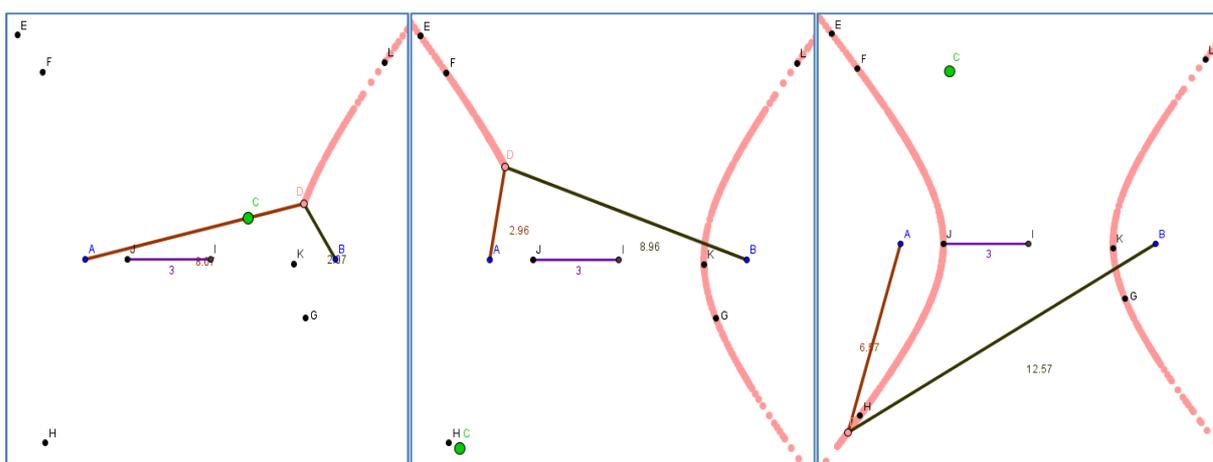
**CENA1** - Mover o ponto C como bem entender.



**CENA 2** – Mover o ponto c de forma a sobrepôr D aos pontos pretos da figura



**CENA 3** – Habilitar rastro em D e mover o ponto C.



Abaixo, descrevemos o empenho dos grupos para tratamento da quarta e última atividade exploratória.

<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 4 - GRUPO A</b>		
<b>CENA1-</b> Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.		
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>LUANA:</b> o q percebeu?  <b>LUCIA:</b> O segmento <math>AD=AB+6</math>. Percebeu o que eu falei?  <b>LUANA:</b> sim, vc percebeu q o ponto D passa por H e o ponto E?  <b>LUCIA:</b> Percebi, podemos escrever isso?  <b>LUANA:</b> sim..., temos q ver com relação aos tres segmentos, igual a de elipse eu acho.  <b>LUCIA:</b>o segmento <math>JL</math> é a metade da diferençados outros dois  <b>LUANA:</b> sim e D ybm passa pelos outros pontos  <b>LUCIA:</b> Isso mesmo...então D passa pelos pontos G,F,H e E. A diferença dos segmentos AD e BD é igual a 6.E o segmentos <math>JL</math> é a metade dessa diferença  <b>LUANA:</b> tbm por J e K  <b>LUCIA:</b> Isso ai</p>	<p>Podemos perceber ao movimentarmos o ponto C, que o segmento AD é igual ao segmento BD + 6. Isto é, <math>AD - BD = 6</math>. E o segmento <math>JL</math> é igual a metade dessa diferença.</p>	<p><b>I1-AE4-GA:</b> Os sujeitos demonstram saber previamente, o que/como olhar os objetos postos, antecedem o passo seguinte e fazem movimentos mais cautelosos e precisos em função de perceber um padrão de relacionamento.</p> <p><b>I2-AE4-GA:</b> Os <i>softwares</i> bem como os objetos postos se abrem à exploração, uma vez que ações sobre os mesmos propiciam percepções, que são expressas matematicamente.</p>
<b>CENA 2 –</b> Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.		
<p><b>LUCIA:</b> Aqui é o que a gente já viu né Luana?  <b>LUANA:</b> Acho que e sim, que as diferença é sempre a mesma.  <b>LUCIA:</b> Isso aí, vamo colocar, então</p>	<p>Quando movimentamos o ponto C de modo que o ponto D sobreponha os pontos pretos, continua acontecendo a mesma diferença entre os segmentos AD e BD.</p>	<p><b>I3-AE4-GA:</b> Em comum acordo, os sujeitos se envolvem na síntese de um diálogo já feito.</p>
<b>CENA 3 –</b> Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos A, B, J, I, K e D.		
<p><b>LUANA:</b> veja o q vc observa  <b>LUCIA:</b> Hipérbole, já previa por causa da diferença.  <b>LUANA:</b> sim, eu tbm  <b>LUCIA:</b> Acredito que A e B sejam os focos  <b>LUANA:</b> A e B são os focos, E J e I  <b>LUCIA:</b> J,K e D são os pontos da hipérbole,e I é o centro  <b>LUANA:</b> OK. I é o centro da hipérbole?  <b>LUCIA:</b> I é o centro da hipérbole</p>	<p>A figura formada pelo movimento do ponto D é uma hipérbole. A e B são os focos, e os pontos J, K e D são pontos da hipérbole e o ponto I é o centro da hipérbole. A distância <math>JL</math> é igual a distância <math>IK</math>.</p>	<p><b>I4-AE4-GA:</b> O conhecer previamente, auxiliou os sujeitos na classificação da seção cônica expressa no <i>software</i> bem como de alguns de seus elementos.</p> <p><b>I5-AE4-GA:</b> Os sujeitos buscam um no outro, confirmação para percepções individuais.</p>
<b>CENA 4 –</b> A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.		
A interação	Síntese da interação	Interpretação

<p><b>LUANA:</b> A distância de JI é a mesma de IK</p> <p><b>LUCIA:</b> é verdade, a distância do foco A a um ponto da hipérbole é igual do outro foco B mais duas vezes o segmento Ji. não consigo escrever o que estou pensando ta complicado escrever, o que você acha?</p> <p><b>LUANA:</b> eu estou pensando um bom tempo</p> <p><b>LUCIA:</b> Hipérbole é a curva em que a diferença entre um ponto e os focos e sempre constante.</p> <p><b>LUANA:</b> temos que completar a definição com o q encontramos</p> <p><b>LUCIA:</b> o que mais temos que colocar</p> <p><b>LUANA:</b> o que encontamos no começo.</p> <p>Adiferença entre um ponto e um foco é sempre constante?</p> <p><b>LUCIA:</b> A diferença da distância de um foco a um ponto e do outro foco a esse mesmo ponto é sempre constante. No nosso caso era 6</p> <p><b>LUANA:</b> Lembrando do da elipse, acho que temos que associar ao seguimento IJ, que é metade de 6.</p> <p><b>LUCIA:</b> Isso!..realmente. mas temos q nomear IJ</p> <p><b>LUANA:</b> I é o centro e J o ponto da hipérbole</p> <p><b>LUCIA:</b> e o segmento IJ?</p> <p><b>LUANA:</b> a disntacia</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Sim, I é o centro, J é um ponto fixo da hipérbole,mas J pode ser chamado de outra forma?</p> <p><b>LUCIA:</b> não sei o nome do ponto J, seria vértice?</p> <p><b>LUANA:</b> O J é o vértice.IJ é a distância do centro ao vértice..iihhuul...rsrrss</p> <p><b>LUCIA:</b> Ve o que acha da definição agora Luana?</p> <p><b>LUANA:</b> acho que esta bom</p> <p>Vamos ver a opinião do pesquisador</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Muito bom, essa distância será positiva?Exemplo, AD - BD é sempre positivo?</p> <p><b>LUANA:</b> Lucia a diferença é em módulo</p> <p><b>LUCIA:</b> sim, inteligência de mais viu.rsrsr</p> <p><b>LUANA:</b> na definição tem de entrar</p> <p><b>LUCIA:</b>escrevi</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Gostei da definição. Parabéns meninas.</p> <p><b>LUANA:</b> Obrigada.rsrsr</p> <p><b>LUCIA:</b> Obrigada</p>	<p>[1ª definição]</p> <p>Definição: Hipérbole é a curva formada pelos pontos em que a diferença entre a distância dele a um foco e a distância desse mesmo ponto ao outro foco é sempre uma constante que é igual ao dobro da distância do centro ao vértice da hipérbole.</p> <p>[2ª definição corrigida – considerando o módulo]</p> <p>Definição: Hipérbole é a curva formada pelos pontos em que a diferença em módulo entre a distância dele a um foco e a distância desse mesmo ponto ao outro foco é sempre uma constante que é igual ao dobro da distância do centro ao vértice da hipérbole.</p>	<p><b>I6-AE4-GA:</b> A busca pelo já feito indica a percepção da relevância de uma experiência vivida para concepção de novos conhecimentos.</p> <p><b>I7-AE4-GA:</b> A elaboração de uma definição se abre à colaboração; um diálogo de incentivo e apoio é construído mediante dificuldade de expressar em forma de texto a experiência vivida.</p> <p><b>I8-AE4-GA:</b> O mediador estimula o refinamento das ideias postas, convida os sujeitos a direcionar olhares mais atentos, em função de perceber e repensar o que foi dito.</p> <p><b>I9-AE4-GA:</b> A inconstância evidenciada pelo mediador e vista a posteriori no <i>software</i> pelos sujeitos, sugere a imersão à conhecimentos já apreendidos. A percepção do relacionamento entre o “prévio” e “novo” propiciou o manifesto de contentamento.</p>
<b>ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 4 - GRUPO C</b>		
<b>CENA1-</b> Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>

<p><b>ROGER:</b>pode ser que seja uma hipérbole  <b>AMANDA:</b> é tbm desconfio disso  <b>LETICIA:</b> não sei oque é não, mas ta parecendo uma hipérbole  <b>ROGER:</b> além de ser uma hiperbole os pontos A e B devem ser os focos  <b>LETICIA:</b> o JI me pasreceu ser os focos dela  <b>DANIELA:</b> o ponto C parece que está girando como se fosse uma circunferência  <b>AMANDA:</b> eu acho q não  <b>ROGER:</b> olha só gente, a diferen entre os segmentos AD e BD é sempre a mesma que é característica de uma hipérbole  <b>LETICIA:</b> o D parece que é uma hipérbole com foco em J e em I [se refere ao movimento de D]  <b>DANIELA:</b>o ponto D sim  <b>ROGER:</b> não Leticia a foco são A e B  <b>AMANDA:</b> o C movimenta formando uma circunferência  <b>LETICIA:</b> é verdade  <b>ROGER:</b> d É O PONTO SOBRE A IPÉRBOLE  <b>LETICIA:</b> D passa em J, o A eo B são os focos concordo com você Roger  <b>AMANDA:</b> o ponto C movimenta formando uma circunferência e o Dforma uma hipérbole</p>	<p>Acredito que a movimentaçã o de C , fará com que o ponto D construa uma hipérbole. Além disso, parece também que os pontos A e B são focos dessa hipérbole. Chegamos a essa suposição, pois a diferença entre ois segmentos AD e BD é sempre a mesma.</p>	<p><b>I1-AE4-GC:</b> A percepção de possível equivalência simbólica direciona a uma nova forma de conceber tal figura.</p> <p><b>I2-AE4-GC:</b> As ferramentas do <i>software</i> se mostram importantes para exploração e aprendizagem de uma constante de potencial gerador de uma definição.</p> <p><b>I3-AE4-GC:</b> Percepções vistas como incoerentes pelos membros do grupo são colocadas em pauta, discutidas e corrigidas.</p> <p><b>I4-AE4-GC:</b> A percepção da figura mediante conhecimento prévio de outra representação simbólica para a mesma, possibilita a observação e classificação de objetos pertencentes à mesma.</p>
---	--	--

**CENA 2 – Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.**

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>DANIELE:</b> Acho que já falamos tudo.  <b>LETÍCIA:</b> tbm acho.  <b>PESQUISADOR:</b> Perceberam alguma relação entre os três segmentos dados?  <b>ROGER:</b> que segmentos?  <b>PESQUISADOR:</b> AD, BD e IJ  <b>ROGER:</b> alguém vê alguma relação?  <b>LETICIA:</b> que a distância é constante?  <b>PESQUISADOR:</b> Parem em algum lugar e apenas olhe. Nada?  <b>DANIELA:</b> a Diferença de AD com BD é metade de IJ  <b>ROGER:</b> acho que não Daniele, a diferença é o próprio IJ  <b>AMANDA:</b> gente, nenhum dos dois, rsrsr... a diferença dividido por dois é IJ, assim...(AD-DB)/2=IJ  <b>ROGER:</b> isso..hehehe...agora sim, diferença é igual 2*IJ  <b>LETICIA:</b> é 1x IJ  <b>ROGER:</b> como metade da diferença é igual a IJ a constante é 2*IJ  <b>LETICIA:</b> cada um colocou uma coisa pra mim IJ cabe 3 vezes em AB  <b>ROGER:</b> mas Leticia não é aab, é a diferença  <b>DANIELA:</b> IJ é a distancia de um vertice da hiperbole ate o centro I  <b>LETICIA:</b> entendi</p>	<p>Percebemos que a diferença AD – BD é constante, e que esta constante equivale a duas vezes o comprimentos do segmento IJ, ou seja, duas vezes a distância do centro ao vértice da hipérbole.</p>	<p><b>I5-AE4-GC:</b> Na percepção de uma propriedade não percebida, o mediador utiliza do aspecto visual do <i>software</i> para levanta questões que estimulam o raciocínio acerca de alguns objetos postos.</p> <p><b>I6-AE4-GC:</b> A exploração mediada subsidiou a percepção de uma característica, previamente não percebida.</p> <p><b>I7-AE4-GC:</b> Os sujeitos manifestaram uma vivência com objetos geométricos, operações matemáticas e com o relacionamento destes.</p> <p><b>I8-AE4-GC:</b> Algumas dificuldades deram abertura ao trabalho coletivo, que conseguiu abordar e discutir conjecturas vistas como incoerentes.</p> <p><b>I9-AE4-GC:</b> O tratamento das informações levou o grupo ao aprender justificando e ao aprender com as justificativas postas.</p>

**CENA 3** – *Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos A, B, J, I, K e D.*

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>ROGER:</b> se você fizer o que ele manda fazer no passo 5 [refere-se ao habilitar rastro], para ambos os pontos [pontos C e D] vocês verão a hiperbole e a circunferência</p> <p><b>LETÍCIA:</b> Focos são A e B J K são vértices</p> <p><b>AMANDA:</b> concordo com vcs</p> <p><b>DANIELA:</b> A,B focos,J w K Vértices e I Centro</p>	<p>podemos ver que realmente é uma hipérbole onde os pontos J , K são vértices, D é um pontos da Hipérbole. E A e B, como foi dito antes, são focos. I é o centro da hiperbole. PolS é o ponto médio do segmento AB.</p> <p>Quando movimentamos o ponto C, olhando somente para ele pode perceber que ele se movimenta como uma circunferência de centro (0,2) que é o ponto A.</p>	<p><b>I10-AE4-GC:</b> As ferramentas do <i>software</i> que auxiliam o visual favoreciam a constatação de conjecturas feitas a <i>priori</i>, e classificação de objetos amarrados ao percebido.</p> <p><b>I11-AE4-GC:</b> A concordância apresentada pode carregar o intuito de incentivar o grupo, uma vez que a mesma não necessariamente precisaria ser posta.</p>

**CENA 4** – *A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.*

<p><b>ROGER:</b> vamos colocar que a diferença é duas vezes a distância do centro ao vértice?</p> <p><b>DANIELA:</b> tem um coisa que to vendo aqui, olha só quando AD tá maior que BD um menos o outro é 6, ma quando AD é menor que BD não é mais 6.</p> <p><b>ROGER:</b> fica negativo né, então acho que como é segmento estamos falando de módulo</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Muito bem pessoal. Ótima percepção</p> <p><b>DANIELA:</b> ok, só isso?</p> <p><b>ROGER:</b> vamos colocar o módulo na definição</p> <p><b>LETICIA:</b> é o módulo da diferença [viu que na definição foi escrito “a diferença dos módulos”]</p> <p><b>ROGER:</b> gente é o modulo da diferença e não a diferença dos módulos...se colocar IADI-IBDI você corre risco de ter negativo</p> <p><b>AMANDA:</b> se vc fizer a diferença dosmódulos poderá assumir valores negativos</p> <p><b>LETICIA:</b> e pq vc mudou o AD pra IAD?</p> <p><b>ROGER:</b> é módulo Leticia, I é a barrinha do módulo.</p>	<p>Definimos a hipérbole como uma curva, onde existem dois pontos chamados de foco, tal que o módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto sobre a curva até esses focos é sempre a mesma. E mais, o segmento, que vai do centro da hipérbole até um de seus vértices, é sempre igual à metade do módulo da diferença dos focos.</p> <p>Chamando esse esse segmento de K teremos:</p> $(IAD - BDI)/2 = K \Rightarrow$ $IAD - BDI = 2K$	<p><b>I12-AE4-GC:</b> A exploração executada no ambiente de GD é favorecida pelo componente visual e mecânico do arrastar, que facilitou a percepção da variância onde se via uma constante. Isto potencializou a aprendizagem mediada da propriedade.</p> <p><b>I13-AE4-GC:</b> Os sujeitos utilizaram de conhecimentos prévios para justificar a percepção e para melhor abordá-la na elaboração conjunta da definição para hipérbole aprendida no processo relacional.</p> <p><b>I14-AE4-GC:</b> Os sujeitos empenham-se em não deixar um membro perdido em meio tantas informações, atendo em responder as questões levantadas por cada um.</p>
--	--	---

#### **ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 4 - GRUPO D**

**CENA1-** *Mover o ponto C como bem entender. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento feito.*

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

<p><b>CAMILA:</b> sempre um triangulo escaleno certo?  <b>MAURO:</b> Movimente de novo.  <b>FABIANA:</b> observou as medidas do lados desse triângulo, a diferença entre elas é sempre 6 e base fixa na reta é 10 [distância de A a B]  <b>FABIANA:</b> o ponto C não é ponto fixo na reta AD. quando move-se o ponto C para a esquerda ele nao pertence mais ao lado do triangulo  <b>CAMILA:</b> e verdade...mas sera q eh a partir de que ponto que isso acontece?  <b>FABIANA:</b> move de novamente  <b>MAURO:</b> Camila depende onde o ponto C está para AD e BD mudarem essa diferença de 6 u.c  <b>CAMILA:</b> pq? em algum lugar a diferença nao seja 6?  <b>FABIANA:</b> o ponto C pertence a reta quando as retas são paralelas. A diferença dos segmentos é de 6 mesmo  <b>MAURO:</b> Movimente mais. A diferença foi pro outro lado  <b>FABIANA:</b> mas a diferença continuou sendo a mesma  <b>MAURO:</b> Então Camila coloque esta observação que as medidas variam 6 e muda de lado essa diferença quando movimenta para o outro lado  <b>MAURO:</b> E agora AD é menor que BD  <b>FABIANA:</b> iii, é mesmo ele fica menos quando os lados do trinagulo ficam a baixo da base mede o segmento G  <b>CAMILA:</b> eu acho que não...  <b>FABIANA:</b> não é não..rsrsrs  <b>MAURO:</b> <math>g=3</math>  <b>FABIANA:</b> tem necessidade de colocar isso não coloca so que a diferença de ambos os segmentos e de 6 cm  <b>MAURO:</b> <math>f=10</math> e não mudam  <b>FABIANA:</b> que <math>f=10</math> é este ai?  <b>MAURO:</b> <math>f</math> é o tamanho de AB. Ponto A (2,0) e B (12,0)  <b>FABIANA:</b> as sim, ao mover o ponto C, ele faz uma trajetória circulas em tono dos pontos A e I. O ponto K na reta CB é o ponto medio do segemento  <b>MAURO:</b> Acho que não, pois o segmento AB tem 10, o ponto I é o ponto médio desse segmento AB,  <b>FABIANA:</b> mas não é do segmento AB é do segmento CB  <b>MAURO:</b> O ponto K,J tão distantes 2 de B e A, pois JI tem 3  <b>CAMILA:</b> mas eu tenho o ponto C esta na reta  <b>MAURO:</b> e AI tem 5  <b>FABIANA:</b> isso  <b>MAURO:</b> agora de perto em cima da reta vejo o ponto K medio do segmento CB. Valendo 4  <b>PESQUISADOR:</b> Perceberam alguma relação entre os segmentos dados (AD, DB e JI) ?  <b>FABIANA:</b> eles coencidem não/  <b>CAMILA:</b> a soma dos lados AD e BD sao sempre maior que a base do triangulo  <b>FABIANA:</b> isso, mas e o segmento JI  <b>MAURO:</b> sempre, condição de existencia de um triangulo  <b>CAMILA:</b> hamham  <b>MAURO:</b> JI éo segmento <math>g=3</math>, J(4,0) e I(7,0)</p>	<p>Ao mover o ponto C podemos perceber o desenho de um triangulo escaleno que tem base <math>AB=10\text{cm}</math>, e as medidas AD e BD varim com o movimento do ponto C, tendo sempre uma diferenca de comprimento o entre eles igual a <math>6u.c</math>. O ponto <math>A=(2,0)</math> e ponto <math>B=(12,0)</math> estao na reta x e sao pontos fixos da base do triangulo ABD.</p> <p>Existe um ponto K na reta CB que e o ponto medio desse segmento quando o ponto C se encontra sobre o eixo x. Temos tambem que pela condicao de existencia de um triangulo, o segmento AB sempre e menor do que a soma dos segmentos AD e BD.</p>	<p><b>I1-AE4-GD:</b> O processo relacional entre saberes prévios e saberes instantaneamente concebidos da experiência dinâmica, visual e colaborativa vivenciada no ambiente virtual favorecia a percepção e concepção de invariantes potencialmente significativos para se definir o objeto não visto.</p> <p><b>I2-AE4-GD:</b> Os sujeitos recorrem a conhecimentos geométricos para espacializar relações, fazer conjecturas acerca de posicionamentos e validá-las com auxílio do <i>software</i>.</p> <p><b>I3-AE4-GD:</b> As discordâncias entre membros do grupo potencializam a colaboração, uma vez que dão abertura ao diálogo em busca de um consenso, no qual está propícia aprendizagem dos que discutem.</p> <p><b>I4-AE4-GD:</b> A dinâmica e comprometimento do diálogo faz com que expectativas sejam extrapoladas. Abordagens não esperadas são postas para o domínio do grupo. Isto confirma que o direcionamento em atividades exploratórias não é arbitrário e não descontextualiza o sentido de explorar para descobrir</p>
--	--	---

<b>CENA 2 – Mover o ponto C de forma a sobrepor o ponto D aos pontos pretos da figura. Discutir e sintetizar as percepções provenientes do movimento.</b>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>FABIANA:</b> vou sobrepor o ponto C nos pontos pretos</p> <p><b>MAURO:</b> Ok, seu movimento fará um desenho de um curva virada para direita do eixo x</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> ao sobrepor, tentem olhar para o conjunto de segmentos dados (AD, DB e JI).</p> <p><b>CAMILA:</b> nao to conseguindo ver essa curva</p> <p><b>MAURO:</b> I está sempre equidistante do ponto D, formando distancias iguais a essa curva ou a curva está equidistante do ponto I sendo B seu foco</p> <p><b>FABIANA:</b> olhe a mensagem do pesquisador vou parar no ponto P</p> <p><b>MAURO:</b> Use o rastro para o ponto D. nº5</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Antes do rastro, observem as medidas em conjunto dos 3 segmentos. E aí?</p> <p><b>MAURO:</b> o ponto D passa em cima dos pontos K e outros do lado direito. Pontos K,O,P e M</p> <p><b>FABIANA:</b> vamos pensar no que o pesquisador falou</p> <p><b>CAMILA:</b>e agora? e agora?</p> <p><b>MAURO:</b> JI não muda. Segmento g=3</p> <p><b>FABIANA:</b> AD=8 e DB=2, se subtrairmos estes dois segmentos, temos que o segmento JI é a metade da diferença sendo este 6 o que acham?</p> <p><b>MAURO:</b> ok</p> <p><b>CAMILA:</b> verdade</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Muito bem!</p> <p><b>FABIANA:</b> aleluia, demorou mais saiu rsrsrsrs.</p> <p><b>FABIANA:</b> subtrai AD e BD.</p> <p><b>CAMILA:</b> nao eh BD de AD não? pq eh AD-bd</p> <p><b>FABIANA:</b> a maior distancia pela menor nao?</p> <p><b>CAMILA:</b> então..</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> No movimento, hora AD estará maior, hora BD estará maior.Hora a diferença da 6, hora dá -6, e ai o que fazer?Lembrando que trabalham com distância.</p> <p><b>MAURO:</b> nao trabalho com distancia negativa</p> <p><b>FABIANA:</b> então, usa o modulo</p> <p><b>CAMILA:</b> hahah.ok.</p>	<p>AD=8cm e BD=2cm quando esses segmentos estão sobre o eixo x, mas a partir do movimento hora AD estará maior hora BD estará menor, I AD-BD I encontramos um segmento com comprimento igual a 6cm, podemos perceber que o segmento JI=3cm, ou seja, a metade da diferença encontrada quando os segmentos estão sobre o eixo x.</p>	<p><b>I5-AE4-GD:</b> O deslocamento de um ponto sugere aos sujeitos o formato de uma curva ainda não definida e a percepção de uma regularidade.</p> <p><b>I6-AE4-GD:</b> O pesquisador sugere direcionamento de olhares para percepção do ainda não visto sem indicar o que isto pode ser.</p> <p><b>I7-AE4-GD:</b> A mediação do pesquisador auxiliou na percepção e aprendizagem significativa de uma relação que se mantém. Percebe-se satisfação e contentamento nos manifestos dos sujeitos pós-percepção.</p> <p><b>I8-AE4-GD:</b> O dinamismo mecânico e visual do <i>software</i> possibilita a percepção de inconstância de sinal no percebido, o que levou pesquisador e sujeitos a remeterem a conhecimentos prévios para colaborarem intuindo refino matemático da relação percebida.</p>
<b>CENA 3 – Habilitar rastro no ponto D, seguido do movimento do ponto C. Discutir e sintetizar o que diz o grupo sobre a figura gerada e sobre os pontos A, B, J, I, K e D.</b>		
<p><b>FABIANA:</b> quando arrasta o ponto C forma-se hiperboles</p> <p><b>MAURO:</b> muito bem brilhante dedução. Mas vou arrastar aqui só pra validar.</p> <p><b>FABIANA:</b> Viu só.rsrs.os pontos A e B sao os focos</p> <p><b>MAURO:</b> I é o centro</p> <p><b>FABIANA:</b> os pontos pretos pertencem s hiperbole</p> <p><b>MAURO:</b> K e J são os vértices, B e A são os focos</p> <p><b>FABIANA:</b>entao é isso</p> <p><b>MAURO:</b> as suas curvaturas estão voltadas para o eixo x</p> <p><b>FABIANA:</b> falta os demais pontos que pertencem as hiperboles</p> <p><b>MAURO:</b> os demais estão no trajeto das curvas</p> <p><b>CAMILA:</b>nao tinha assntotas nao ne?</p>	<p>Ao arrastar o ponto C podemos perceber a formação de hiperboles. J e K são os vértices da hiperboles(que são os pontos fixos da hiperbole), A e B são os focos, I é o centro, as curvaturas estão voltadas para o eixo x e os demais pontos estão no trajeto das hiperboles.</p>	<p><b>I9-AE4-GD:</b> O <i>software</i> se abre à exploração, uma vez que permite a validação de conjectura feita.</p> <p><b>I10-AE4-GD:</b> O saber previamente entes geométricos, auxilia a caracterização de objetos e elaboração de síntese.</p>

<b>CENA 4 – A partir da percepção de invariantes que sugerem propriedades, elaborar uma definição para a figura encontrada.</b>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>FABIANA:</b> Vamos para a definição?</p> <p><b>CAMILA:</b> vamos</p> <p><b>MAURO:</b> Sendo o ponto I ponto médio de AB e d KJ</p> <p><b>CAMILA:</b> como escrevo isso...eh mais ou menos isso? mas isso ai não é definição?</p> <p><b>MAURO:</b> è centro o ponto I e como centro é ponto médio dos segmentos AB e KJ</p> <p><b>FABIANA:</b> ao qual o centro da hiperbole é o ponto medio dos focos e dos vertices</p> <p><b>MAURO:</b> SIM</p> <p><b>CAMILA:</b> blz, mas acho que temos que usar o que vimos sobre a diferença, é sempre constante, e nas outras atividades a gente usou a constante percebida pra definir.</p> <p><b>MAURO:</b> A distância entre o centro e os focos é maior que a distância entre o centro e os vértices, sendo a divisão delas 5/3 dá um resultado maior que o número 1 e menor que 2 - 1,6666...</p> <p><b>FABIANA:</b> nao é isso nao, nao tem necessidade de colocar pontos e valores não, acho que é o que a Camila falou, nas outras atividades tinha uma constante com relação a alguma coisa. Aqui a constante é a diferença dos segmentos, que é sempre 6.</p> <p><b>CAMILA:</b> e é a coisa que vc falou é o segmento IJ, dist. do centro ao vértice, a diferença é sempre o dobro desse segmento.</p> <p><b>MAURO:</b> É, vcs tem razão, então só pra completar, tem que colocar que é o módulo da diferença né, pq a distância não pode ficar negativa.</p> <p><b>CAMILA:</b> Bacana né.</p> <p><b>FABIANA:</b> É, sem livro e sem conceitos puramente matemáticos e analíticos, dá para entender muito bem a formação desta hiperbole.</p>	<p>Hiperbole é o conjunto de pontos (os pontos pretos) cujo o módulo da diferença entre as distâncias de um ponto qualquer aos focos é o dobro da distância do centro da hiperbole ao vértice.</p>	<p><b>I11-AE4-GD:</b> A colaboração se manifesta no empenho de membros do grupo em trazer para o foco o que está se destoando do mesmo.</p> <p><b>I12-AE4-GD:</b> O empenho em atividades similares e nos passos anteriores da atividade proposta faz com que se direcionem olhares ao que é invariante e potencialmente relevante, o que move atitudes dos sujeitos na busca por uma definição.</p> <p><b>I13-AE4-GD:</b> A busca por formalidade matemática em definir, causa divergências entre membros do grupo. O discurso acerca de um consenso, direciona à aprendizagem significativa dos conhecimentos que se manifestam.</p> <p><b>I14-AE4-GD:</b> O manifesto do entendimento sem necessidade de ferramentas tradicionais, aponta para o potencial didático e metodológico da atividade e do contexto informatizado ao que foi aplicada.</p>

### 6.3.3 As atividades investigativas e as *cenar*s provenientes da investigação-colaborativa sobre as mesmas

Como dito, foram seis as atividades propostas, as quais quatro já foram apresentadas, sendo que estas são chamadas de Exploratórias. Resta então, apresentar as demais atividades. As mesmas se caracterizam e se diferenciam das atividades exploratórias pela “falta” de uma estrutura direcionadora. Mediante esta falta, tais atividades são mais abertas e conseqüentemente podem se tornar mais complexas. Nas atividades investigativas, não se podem definir as metodologias adotadas, questionamentos feitos e respostas a serem encontradas. Por isto,

tomando como base a leitura de Ponte (2003), caracterizamos as duas atividades que seguem, como Atividades Investigativas.

Destacamos entre as várias cenas possíveis na vivência destas atividades, as que os sujeitos dão “início” e “fim” a interrogações inicialmente levantadas por nós, e posteriori por eles, que são capazes de inaugurar um novo horizonte de significados possíveis. O conteúdo dessas *cenas* consiste no empenho dos sujeitos sobre o tratamento das informações que levam às possíveis respostas das questões levantadas. Assim como nas atividades exploratórias, os sujeitos deixaram registros escritos, porém, apenas relacionados às interrogações levantadas e suas respectivas soluções (os sujeitos criaram e registraram perguntas de partida, as quais empenharam em responder e registrar tais respostas). Estes registros acabam por serem sínteses do discutido. No entanto, as demais *cenas* não foram sintetizadas, pois não poderíamos previamente pensa-las, o que impossibilitou o pedido de um registro escrito. Portanto, os quadros que seguem terão uma coluna de síntese apenas quando as cenas forem condizentes com o tratamento e resposta de uma questão levantada pelos sujeitos ou pelo pesquisador.

### ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1

Esta atividade baseia-se na história de Carlos, um menino que foi sorteado em uma rifa. Como prêmio, Carlos ganhou uma viagem à Walt Disney com no mínimo 3, e no máximo 4 acompanhantes. Estes deveriam ser moradores do mesmo condomínio ao qual mora Carlos. Cabia aos sujeitos se colocarem no lugar de Carlos e convidar os amigos. A planta do condomínio foi dada conforme abaixo:

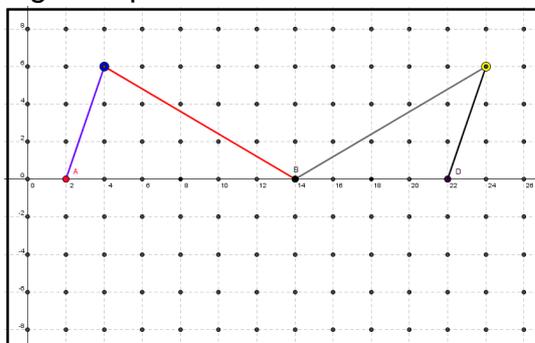


Figura 15: Planta do condomínio apresentado para o tratamento da Atividade Investigativa 1  
Fonte: O autor

Alguns critérios foram postos; Carlos deveria caminhar a partir de sua casa, em linha reta (sem fazer curva: sem desviar das outras casas) até a casa dos

acompanhantes escolhidos. Deveria passar apenas nas casas dos acompanhantes que escolherá. Os seguimentos apresentados na planta do condomínio que foi desenhada sobre o eixo cartesiano, registram o caminho percorrido por Carlos, os pontos também evidenciados na planta, representam as casas, que estão distanciadas dois centímetros uma da outra. A atividade expõe que cada centímetro na planta corresponde a quatro metros da construção real, e que Carlos, morador da casa A, certamente levaria seus dois melhores amigos, Eduardo, que mora na casa B, e Fernando, que mora na casa D.

O desafio dos sujeitos consistia na escolha e no como chegar às casas dos amigos de forma a não infligir os critérios postos, deveriam iniciar uma investigação que acarretaria na determinação de diversas possibilidades de escolha, e conseqüentemente das impossibilidades devido os critérios a serem seguidos. Aos sujeitos cabia levantar questões que norteariam a investigação, ou seja, que ao serem respondidas, forneceriam informações relevantes para convidar os amigos.

O objetivo desta atividade, foi possibilitar com que os alunos, ao investigar, se envolvessem com conhecimentos da Geometria Analítica Plana, tais como: a concepção de ponto como sendo uma coordenada expressa no eixo cartesiano, e distância entre pontos. Por se tratar de uma tarefa investigativa, novos conhecimentos além dos intuídos, poderiam ser manifestados e apreendidos.

Para realização desta atividade, proposta no segundo encontro presencial, e terceiro encontro no total, deixamos em aberto à utilização de qualquer material, no entanto, sugerimos a utilização do Geogebra e do *Word* para registro das interrogações feitas, bem como das respostas às mesmas. Visamos com isto, enfatizar que em uma investigação não se limita e nem se impõe o que deve ser feito e como ser feito.

A ideia da utilização do Geogebra e do *Word* para o tratamento da atividade surgiu da intenção de mostrar aos sujeitos, que a proposta do VMTwG, que necessita do acesso à internet, pode ser “em parte” alcançada com ferramentas que não necessitem da mesma. Isto se torna relevante, uma vez que os pesquisados vivem ou estão para viver uma realidade em que grande parte das escolas, além de enfrentarem dificuldades com a utilização de tecnologias informatizadas no geral, não possuem acesso à internet, ou possuem, porém com velocidade reduzida.

Logo abaixo, apresentamos a descrição do vivido por cada grupo no empenho sobre a Atividade Investigativa 1, juntamente com nossas interpretações do ocorrido:

**ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1 - GRUPO A**

**CENA1- Explorando o cenário posto por meio de movimentos diversos**

**A interação**

**LÚCIA:** Estranho né.

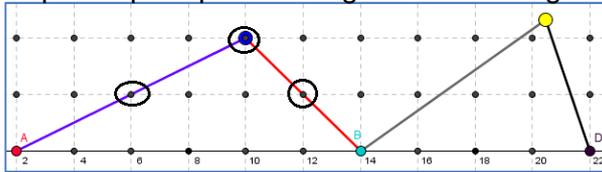
**LUANA:** Eu não to entendendo nada aqui [ao ler o enunciado e olhar para a tela do Geogebra]

**LÚCIA:** E agora? Ele pode escolher um monte de gente, olha o tanto de ponto [aponta para a planta posta no software]

**LUANA:** Vamos ver se conseguimos fazer alguma coisa [após longa pausa, começa a mover o ponto azul]

**LÚCIA:** Aí, ele pode escolher esse aí.

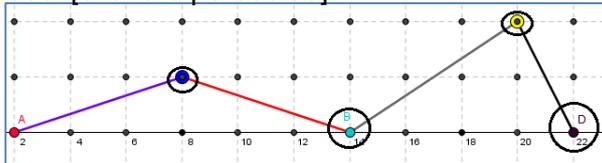
**LUANA:** pior que não aqui ele escolheu um monte, esse, esse e esse. [conta as casas pelas quais passa o seguimento de origem em A]



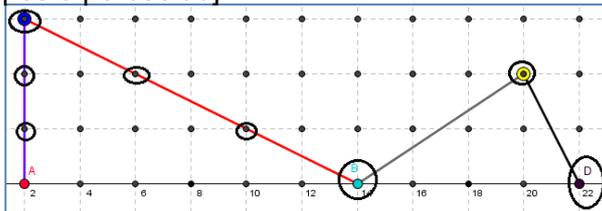
**LÚCIA:** Então ele só pode levar mais dois né, aí já ta dando cinco.

**LUANA:** Isso aqui ele pode, chama mais dois e continua levando os outros dois [refere-se aos dois melhores amigos que residem em B e D]

**LÚCIA:** Que loco! [exalta o percebido]

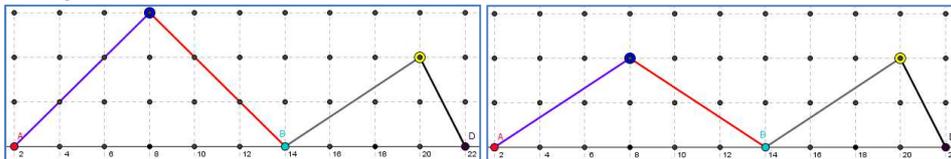


**LUANA:** Se a gente colocar aqui não pode, porque vai passar de quatro pessoas, uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nossa, gente de mais. [risos após o percebido]



**LÚCIA:** Se a gente colocar no meio certim, forma um triângulo, mas leva um tanto de gente também.

**LUANA:** Se colocar embaixo dá certo ó [pede para Lúcia olhar], são triângulos diferentes.



**Interpretação**

**I1-AI1-GA:** A sensação de não saber o que fazer, pode ser proveniente da abertura proveniente de atividades investigativas.

**I2-AI1-GA:** Os movimentos diversos sugerem uma exploração inicial que se apresenta como base para a investigação posterior.

**I3-AI1-GA:** O software se abre à exploração, uma vez que possibilita efetuar e visualizar movimentos diversos direcionados à compressão do cenário investigativo.

**I4-AI1-GA:** A exploração possibilitou a percepção de percursos possíveis e não possíveis, sujeitas a acompanhar os pesquisados no processo de investigação.

**CENA 2 – A percepção da necessidade de perguntas que facilitem e dê sentido à investigação. Criação de uma primeira questão: “De que maneira ele pode chamar as quatro pessoas?”.**

**A interação**

**Síntese da interação**

**Interpretação**

**LÚCIA:** E agora nós vamos fazer o quê? Não sei o que pensar.

**LUANA:** Acho que temos que criar perguntas que ajudem o menino a chamar os colegas né, tem que ter a ver com o objetivo da atividade.

**LÚCIA:** A gente tem que dar um norte pro menino. [risos]

**LUANA:** E se a gente perguntar de que maneira ele pode chamar as quatro pessoas?

**LÚCIA:** É bacana, pode ser também: como ele não pode chamar?

**LUANA:** Uma completa a outra. Vamo tentar responder.

**LÚCIA:** Aqui pode, aí vem aqui pode, aí aqui num pode, pode, pode. [ainda explorando, efetua diversos movimentos]

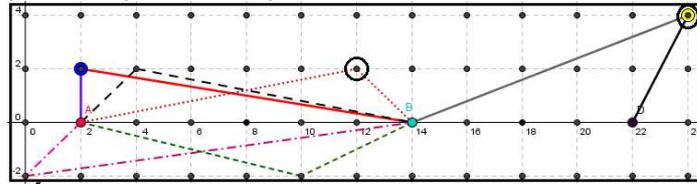
**LUANA:** Vamos começar da primeira linha né, e ver uma a uma. Começa na linha dois.[segue numeração do eixo vertical]

**LÚCIA:** É melhor mesmo, na coluna dois ele pode, na coluna quatro pode, nessa pode. [seguem numeração do eixo horizontal]

**LUANA:** pode todas né, não vai ter nenhum ponto aqui.

**LÚCIA:** na simetria aqui em baixo deve dar a mesma coisa.

**LUANA:** É, tanto de um lado quanto de outro ele chama mais dois amigos. [refere-se ao padrão percebido para a primeira paralela superior e inferior ao eixo horizontal]



**LÚCIA:** Agora, na linha quatro. Aqui ele pode chamar, aqui não né.

**LUANA:** Não, ele vai tá chamando, uma, duas, três, quatro, cinco, seis, contando com o amarelim, e só pode chamar mais dois.

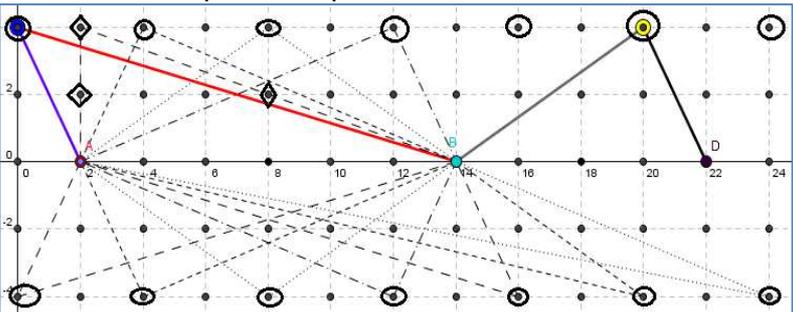
**LÚCIA:** Na outra pode.

**LUANA:** Vê a próxima aí, viu, não pode, acho então que temos um padrão, ele sempre vai poder uma casa sim, uma casa não, uma casa sim, uma casa não.

**LÚCIA:** Deixa eu ver, na coluna zero pode; essa não pode; essa pode; essa não; pode; não pode. [risos] é mesmo, você está certa [risos], que bacana.

**LUANA:** E tudo que acontece aqui, acontece lá embaixo também, na linha menos quatro.

**LÚCIA:** Unhum, concordo plenamente, e o amarelo tamo considerando que ele tá parado.



Na linha 2 e em qualquer coluna ele pode chamar mais dois acompanhantes.

Na linha 4 e na coluna 0 ele pode chamar mais dois acompanhantes, na coluna 2 ele não pode, na coluna 4 ele pode e segue essa sequencia em diante (uma sim e outra não). Acontece o mesmo na linha -2.

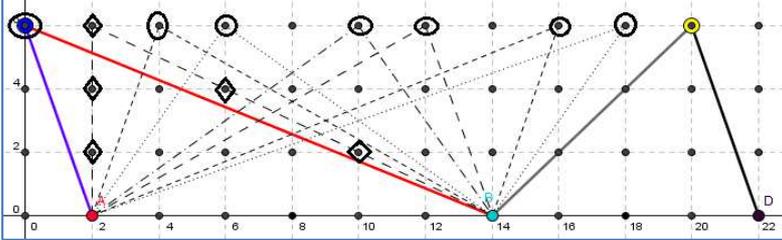
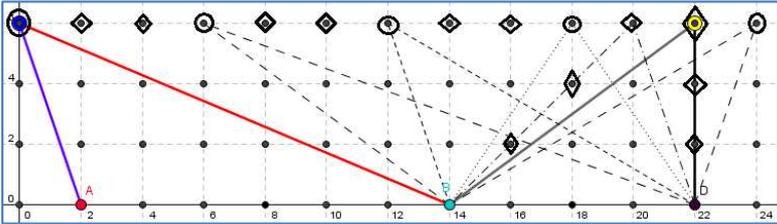
**15-A11-GA:** Mediante abertura que os deixou confusos sobre o que fazer, percebem a necessidade de uma estrutura que subsidie a investigação.

**16-A11-GA:** Os sujeitos levantam uma questão que julgam relevantes para dar significado à investigação.

**17-A11-GA:** A busca por uma organização processual para delineamento sugestiona a aprendizagem significativa do como proceder.

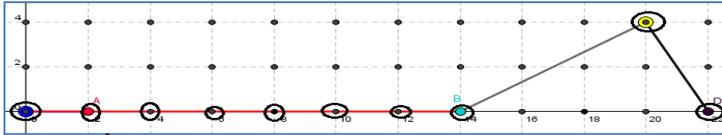
**18-A11-GA:** O software, bem como o cenário montado, se abre à investigação, uma vez que auxiliam na percepção de padrões e simetria.

**19-A11-GA:** Os sujeitos reparam constantemente o controle do software para percepção e constatação de inferências.

<p><b>LUANA:</b> Agora tem a outra, linha três.</p> <p><b>LÚCIA:</b> vamos colocar o amarelo na mesma linha só pra ver o que que dá.</p> <p><b>LUANA:</b> Beleza. Ó aqui dá [sobrepondo o ponto azul às casas da “linha 6”, a partir da primeira], aqui não; aqui pode; nossa, aqui também pode, então não é o mesmo padrão anterior.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Continua então.</p> <p><b>LUANA:</b> Aqui não pode; pode; pode; não; pode; pode; pode. Unnn [risos], viu ai Lúcia?</p> <p><b>LÚCIA:</b> vi, ele pode chamar em duas e uma não né.</p>  <p><b>LUANA:</b> Isso ai. Vamos ver com o amarelo agora. Não pode; pode; não pode; não pode; pode; não pode; não pode; pode; não e não.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Que bacana! É o contrário da outra, agora não pode duas e pode uma [entusiasmada com a percepção]</p>  <p><b>LUANA:</b> Então agora a gente escreve isso né.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Nossa que difícil.</p> <p><b>LUANA:</b> É amiga, mais acabando o de cima, o de baixo é tudo igual né. [abaixo e acima do eixo horizontal]</p> <p><b>LÚCIA:</b> É, mas estando os dois na mesma linha né, se mudar isso, vai dar mais um montão de possibilidades.</p> <p><b>LUANA:</b> É, mas vamos ver a linha oito.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Aqui pode; não pode; pede; aqui não; pode; não. É a mesma coisa da linha quatro.</p> <p><b>LUANA:</b> É isso mesmo, vamos escrever então.</p>	<p>Estando os dois pontos (azul e amarelo) na mesma linha 6, no ponto azul Carlos pode chamar uma pessoa em duas colunas seguidas, na próxima ele não pode, mais duas colunas mais duas pessoas, e na seguinte não, e assim sucessivamente. Já no ponto amarelo ele pode chamar em uma coluna, nas próximas duas não, este é o padrão.</p> <p>Na linha 8 ocorre o mesmo caso da linha 4.</p>	<p><b>I10-A11-GA:</b> Os sujeitos se aplicaram sobre a pergunta levantada fazendo movimentos que os levassem a percepção de outras constantes relevantes à investigação</p> <p><b>I11-A11-GA:</b> Uma sensação de desconforto é amenizada na interação do grupo.</p> <p><b>I12-A11-GA:</b> A percepção de uma gama de resultados evidencia o cunho investigativo da atividade e direciona a reflexão sobre padrões gerais que apontam “resultados” em blocos.</p> <p><b>I13-A11-GA:</b> A percepção de uma simetria reduziu à metade os possíveis movimentos.</p>
<p><b>CENA 3 – Percepção do fator distância como essencial para a investigação e criação da segunda questão: “Qual a menor distância que Carlos pode percorrer para chamar 4 acompanhantes?”</b></p>		
<p><b>LÚCIA:</b> Outra pergunta, tá, então, [risos] não sei, fala uma ai.</p> <p><b>LUANA:</b> Eu acho que a gente pode pensar em algo com distância, pois Carlos vai ter que caminhar né, e na atividade deu lá algumas medidas.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Então, ééé, acho que Carlos deve querer saber qual a menor distância pra chamar os amigos.</p> <p><b>LUANA:</b> [risos] é mesmo, vai que ele não quer andar muito, vai logo na menor distância [risos]</p> <p><b>LÚCIA:</b> [risos] vamos escrever então.</p>		<p><b>I14-A11-GA:</b> A percepção do contexto expresso na atividade auxiliou na elaboração de uma pergunta relevante à investigação.</p>

**LUANA:** É mais rápido na linha zero.

**LÚCIA:** Num pode na linha zero ele vai chamar todos.



**LUANA:** É mesmo, mas aqui pode [aponta para as casas da linha 2]

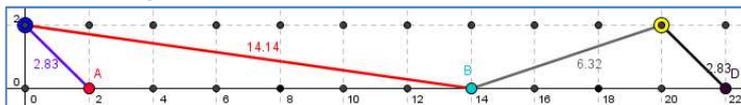
**LÚCIA:** Pode, pode em qualquer ponto aqui. Acho que a menor vai ser passando pela linha dois mesmo. Vou colocar na primeira casa aqui então [primeira da linha 2], vamos calcular a distância.

**LUANA:** Vamos usar a formula da distância entre dois pontos então.

**LÚCIA:** Acho que não, já que estamos no Geogebra, deve ter como calcular aqui [risos]. Ô Pesquisador, tem como calcular a distância entre dois pontos aqui?

**PESQUISADOR:** Tem como medir um seguimento [indaga e aponta ao grupo a ferramenta necessária]

**LÚCIA:** Aqui temos dois vírgula oitenta e três mais quatorze vírgula quatorze.



**LUANA:** E como que vamos medir a próxima casa?

**LÚCIA:** Ó, os números vão mudando [ao arrastar o ponto azul]

**LUANA:** Que legal! Eu não sabia disso. Então fica mais fácil.

**LÚCIA:** Na casa do lado vai diminuindo, um de dois, e outro doze. [se refere aos tamanhos dos seguimentos]

**LUANA:** oito com quatro dá doze [ao ver Lúcia sobrepor o ponto azul a quarta casa]

**LÚCIA:** Acho que o menor vai ser aqui né, doze vírgula sessenta e quatro.

**LUANA:** É a distância foi diminuindo até aí, e depois vai aumentar de novo, a direita dessa casa é igual a esquerda dela.

**LÚCIA:** É aqui faz um triângulo isósceles.



**LUANA:** É sim. Agora é aqui. [aponta para o ponto amarelo]

**LÚCIA:** Aqui também, vai ser menor, sei lá, oito vírgula vinte e cinco com dois, este fica nove e um poquito. É aqui não chega a nove, no meio também.

**LUANA:** Então vai ser dois triângulos isósceles. [risos]



**LÚCIA:** Agora é só somar e multiplicar por quatro, pra encontrar a distância no real.

A menor distância que Carlos pode percorrer está vinculada as casas da segunda linha, quando a distância de sua casa a casa do primeiro acompanhant e é a mesma da distância da casa do primeiro até a casa de Eduardo (casa B) e a distância da casa de Eduardo (casa B) e a distância da casa de Eduardo até a casa do segundo acompanhant e é a mesma distância da casa do segundo até a casa de Fernando (Casa D). Percorrendo um total de 21,58 cm na planta, que equivale a 86,32 metros no percurso real.

**I15-AI1-GA:**

Existe a preocupação conjunta em corrigir com justificativa, inferências vistas como incoerentes.

**I16-AI1-GA:**

O que foi previamente percebido e aprendido auxiliou na concepção de informações direcionadas a respostas à pergunta levantada.

**I17-AI1-GA:**

O potencial dinâmico e visual do *software* provoca um deslumbre que motiva a continuidade da investigação.

**I18-AI1-GA:**

Ocorre a relação entre conhecimentos prévios sobre distância e os componente visual e dinâmico do *software* em prol de determinar e argumentar uma possível resposta

**I19-AI1-GA:**

Os sujeitos se mostram atentos ao enunciado, ao retomá-lo para completar a resposta.

**CENA 4 – Empenho sobre a terceira questão elaborada: “Qual a maior distância que Carlos pode percorrer para chamar 4 acompanhantes?”**

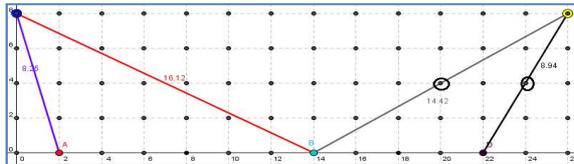
**LUANA:** Vamos formular mais uma pergunta. Acho que se é bom pra ele saber a menor distância, deve ser bom saber a maior possível.

**LÚCIA:** É, vai que ele não queira andar muito né [risos].

**LUANA:** Então vamos tentar ver qual é a maior.

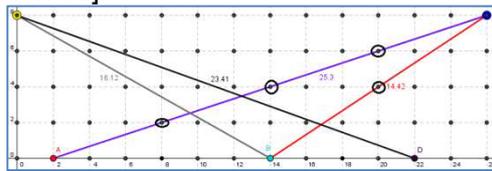
**LÚCIA:** Acho que a maior é esta.

**LUANA:** Não, não dá porque aqui chama mais gente. Tem que ser maior distância, mas deve continuar chamando só duas pessoas.

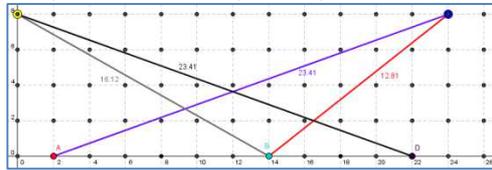


**LÚCIA:** Como a menor tava na linha dois, acho que a maior deve de tá na oito. A gente pode até cruzar aqui.

**LUANA:** Mais aí também não dá, olha só [aponta para as casas excedentes].



**LUANA:** Aí é uma sim outra não [refere-se a “linha 8”], então nessa aqui deve dar [aponta para a casa ao lado].



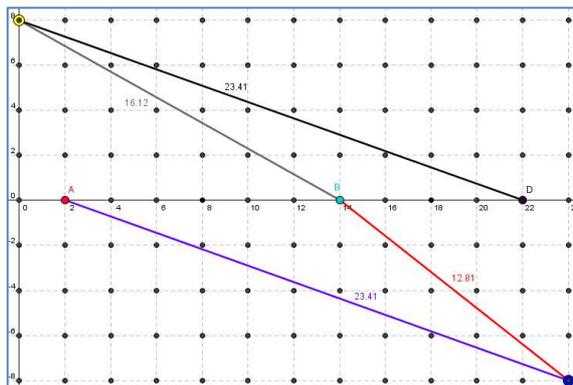
**LÚCIA:** É, parece mesmo ser o maior caminha, mas ele vai fazer papel de bobo né, ir e voltar. [risos]

**LUANA:** Há, mais vai que ele queira chamar um desses amigos que moram distante, ele vai ver se vale a pena a caminhada. [risos]

**LÚCIA:** Lá embaixo na linha menos oito é a mesma coisa, vou colocar lá, viu é simétrico e aqui ele não tem que ir e voltar [risos]

**LUANA:** [risos] Muito bem Lúcia, assim fica realmente melhor, vamos calcular e anotar então.

**LÚCIA:** Beleza.



Carlos vai de sua casa até a casa da linha -8 coluna 24, depois ele volta até a casa B, da casa B ele vai até a casa da linha 8 coluna 0 e por ultimo vai até a casa D. Percorrendo um total de 75,75 cm que equivale a 303 metros de caminhada.

**I20-A11-GA:** A segunda questão levantada é sugestiva a terceira posta; a distância a ser percorrida é posta novamente como elemento importante para investigação proposta.

**I21-A11-GA:** Os movimentos investigativos feitos são recorrentes do vivido até o momento, a soma das experiências e a coerência do empenho apontam para a concepção significativa de um perfil de investigador.

**I22-A11-GA:** A concepção prévia dos alunos de distância possibilita conjecturas, estas que são testadas e visualizadas no *software*.

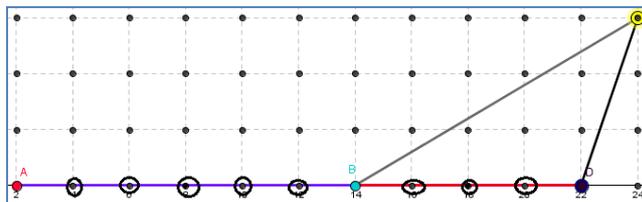
**I23-A11-GA:** Os sujeitos mostram-se críticos à pergunta, mediante resposta encontrada, e utilizam de simetria para elaborar nova possibilidade.

**ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1 - GRUPO B**

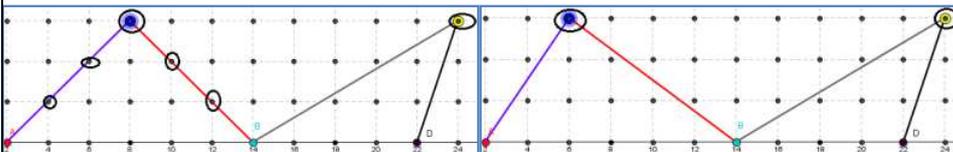
**CENA1- Interpretando e Explorando o cenário posto pelo enunciado da atividade**

**A interação**

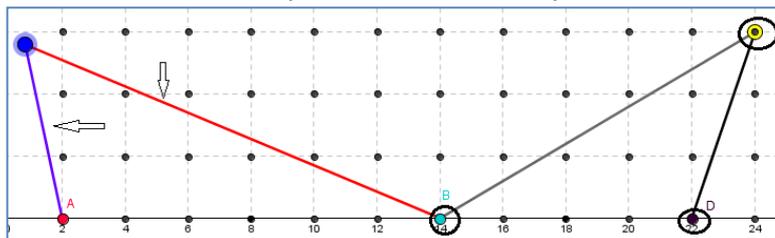
**JOSÉ:** Se ele pode chamar no máximo quatro e no mínimo três, ele pode chamar mais um ou dois amigos [interpreta o enunciado]  
**FERNANDO:** Então, nessa reta aqui ele não pode chamar nenhum.  
**JOSÉ:** Não tem como, vamo dizer então que no seguimento AD ele não vai poder chamar ninguém né.  
**FERNANDO:** Ele não pode passar em cima de casas que ele não pode chamar, aqui passa em um tanto.



**JOSÉ:** Aqui não dá; aqui também não; aqui dá ó. Os movimentos tão amarrados de alguma forma, temos tentar perceber o que é.  
**FERNANDO:** Amarrado a algum padrão, uma propriedade, sei lá.



**JOSÉ:** Pois é. Como ele mora em A, tem que escolher aqui com o ponto azul, uma casa entre A e B, sacô? O ponto D é a última casa que ele vai.  
**FERNANDO:** Mas aqui ó, ele não vai sobrepor casa nenhuma [deixa o ponto azul no vazio]  
**JOSÉ:** Pra ele chamar três pessoas ele vai ter que fazer isso.



**FERNANDO:** Mas pode? Eu acho que ele tem que passar por alguma casa com o ponto azul.  
**JOSÉ:** Mas o enunciado não coloca essa condição.  
**FERNANDO:** Tá na questão “sem desviar das casas sem fazer curva”.  
**JOSÉ:** Ele não tá fazendo curva, ele tá indo em linha reta, só que não tá indo em casa nenhuma.

**Interpretação**

**I1-AI1-GB:** A opção de explorar direciona-se ao compreender inicialmente o que se pede e como estabelecer relações mediante o que é proposto. Tal processo feito indica o aprendizado da concepção de explorar.

**I2-AI1-GB:** Os sujeitos se mostram críticos e curiosos ao tentar perceber o que/como o cenário foi criado pelo pesquisador

**I3-AI1-GB:** O lançar inferências, juntamente com o teste das mesmas via dinamismo do software, fazem que com os sujeitos retomem o enunciado de forma crítica e reflexiva.

**I4-AI1-GB:** O software, o enunciado e os sujeitos se abrem à exploração, uma vez que fazem parte de um contexto propício à concepção de conhecimento mediante ato de investigar colaborativamente.

**CENA 2 – O colocar-se como sujeitos que investigam: a criação de uma pergunta de partida: “Qual amigo fora os que residem em B e D ele poderá chamar?”**

**A interação**

**Síntese da interação**

**Interpretação**

**FERNANDO:** Beleza. Deu pra entender né, mas e agora o que temos que fazer.

**JOSÉ:** Lembra do investigador? [da investigação criminal] ele fazia perguntas relacionadas ao caso e corria atrás.

**FERNANDO:** Vamos pensar então no que o menino deve querer saber.

**JOSÉ:** A gente já viu que alguns amigos não podem ser chamados, então acho que ele vai querer saber quais podem ser chamados, não é?

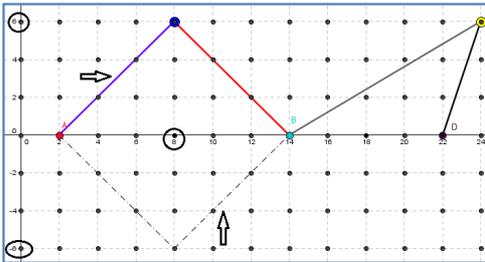
**FERNANDO:** É, realmente, vamos ver então.

**JOSÉ:** Então vamo primeiro pensar que ele vai pegar primeiro um amigo que ta entre A e B. Então que vai acontecer? Esse amigo aqui ele não vai poder chamar.

**FERNANDO:** Sim porque ele vai passar por várias casas

**JOSÉ:** Esse aqui cara, a gente taria formando dois triângulos isósceles, ta vendo?

**FERNANDO:** Aí o menino não poderia chamar o colega das coordenadas oito seis e oito menos seis [refere-se às coordenadas cartesianas (8, 6) e (8,-6)]

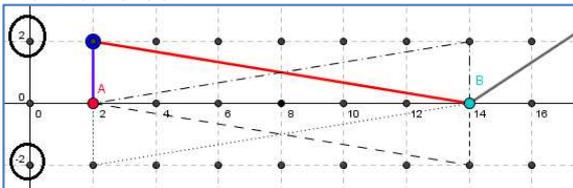


**JOSÉ:** E não pode chamar também nenhum que tem abscissa do A e abscissa do B [x da coordenada igual a 2]

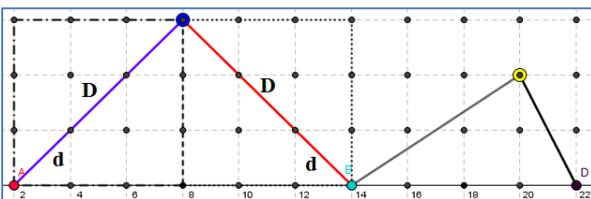
**FERNANDO:** E nem as ordenadas de A e B, né, que é constante igual a zero. Só os que já foram escolhidos né.

**JOSÉ:** Esse caso aqui que dá ó, em dois e menos dois.

**FERNANDO:** É, mais é só essas possibilidade, nas outras nenhuma dá.



**JOSÉ:** Vamo concentrar primeiro no raciocínio do triângulo, pra gente não se perder. Aqui a gente vai ter um triângulo isósceles, concorda? Quando o triângulo é isósceles os lados dele vai coincidir com a diagonal de um quadrado, sacô? Como isso aqui é feito por pequenos quadrados, a gente vai pegar sempre a diagonal de pequenos quadrados entendeu? Concorda?



[D = lados do triângulo = diagonais dos quadrados maiores – d = diagonais dos quadrados menores]

O garoto não podera chamar amigos que possuem casas na abscissa que contém A diferente da ordenada  $y=-2$  e  $y=2$ .

O garoto não poderá chamar ninguém que possui ordenada igual a sua, exceto B e D.

**I5-AI1-GB:** As concepções anteriores servem como bases para tomada de decisão.

**I6-AI1-GB:** Os sujeitos elaboram estratégias para investigar relações.

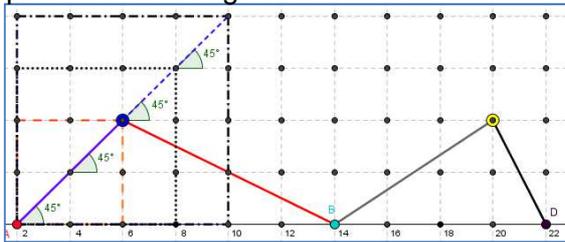
**I7-AI1-GB:** Houve uma retomada do organizador prévio sobre investigação para criar uma pergunta de partida.

**I8-AI1-GB:** Usa-se de conhecimentos prévios sobre o gráfico cartesiano e funções para articulação de ideias.

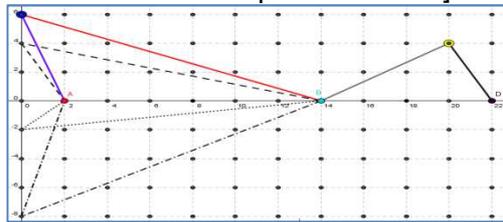
**I9-AI1-GB:** A possibilidade de mover para ver, fez do *software* importante ferramenta para perceber, testar e validar conjecturas.

**I10-AI1-GB:** A Geometria Plana mostra-se como subsunçor relevantes para delineamento da investigação em um cenário pensado analiticamente.

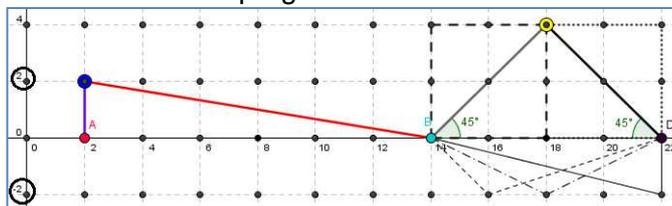
**FERNANDO:** Hunnn. [demonstra não ter entendido]  
**JOSÉ:** Porque quando eu desloco aqui, eu to saindo da diagonal de pequenos quadrados sacô? [movendo o ponto azul verticalmente para baixo]  
**FERNANDA:** Deixa eu ver se entendi, toda vez que a gente fazer um diagonal perfeita de um quadrado, ele vai ta passando por várias casas?  
**JOSÉ:** É, e a gente pode colocar que não pode os que moram a quarenta e cinco graus sacô?  
**FERNANDO:** É, diagonal de quadrado, divide o ângulo de noventa ao meio. Fica melhor mesmo, mais resumido.  
**JOSÉ:** Fica mais fácil de visualizar, ele não pode pegar rotas de quarenta e cinco graus com o eixo X.



**FERNANDO:** Acho eliminamos todos os amigos entre A e B. Mas aqui, a gente não falou fora de AB.  
**JOSÉ:** Mas aí já engloba o que falamos, fora de AB não forma diagonal, então ele poderá chamar todos, entendeu.  
**FERNANDO:** Olha só, não é que é mesmo! Legal! [movendo de forma a testar as possibilidades]



**JOSÉ:** Mas agora considerando que ele chamou um entre A e B, a gente tem que ver o outro entre B e D.  
**FERNANDO:** Não necessariamente ele tem que chamar um entre A e B, ele pode passar no vazio né, aí chamando mais um entre B e D, aí, apenas três amigos, concorda?  
**JOSÉ:** Sim, isso mesmo. Aí a gente vai ter que separar, se eu não chamar uma amigo entre AB, eu vou ter que chamar um entre BD, se eu chamar entre AB, já são três, então não precisaria chamar entre BD, mas se ele quiser pode chamar e completar quatro, socô.  
**FERNANDO:** Analisar de B pra D tem coisa que vai repetir sacô, por exemplo: no dois e menos dois ele pode chamar todos também.  
**JOSÉ:** Vai acontecer o mesmo caso para a diagonal.  
**FERNANDO:** Então aqui a gente já matou tudo. Então vamos fazer mais uma pergunta



Com exceção das ruas horizontais -2 e 2, em relação ao trajeto AB, o garoto não poderia chamar amigos que o fariam tomar rotas que formam 45° com o eixo X.

As mesmas analogias feitas para o percurso AB podem ser feitas para o percurso BD

**I11-AI1-GB:** Utilizam o componente visual e dinâmico do *software* como apoio para serem entendidos e evitar a perda de informações.

**I12-AI1-GB:** Elementos da geometria plana são postos como relevantes para o tratamento da investigação.

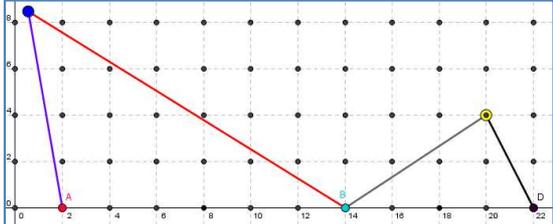
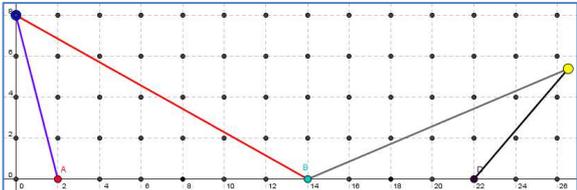
**I13-AI1-GB:** Ao dialogar, os sujeitos complementam, questionam falas, e acabam por completar um ao outro na concepção de conhecimentos.

**I14-AI1-GB:** O respeito e incentivo à ideia posta aponta a afinidade entre membros do grupo que investiga.

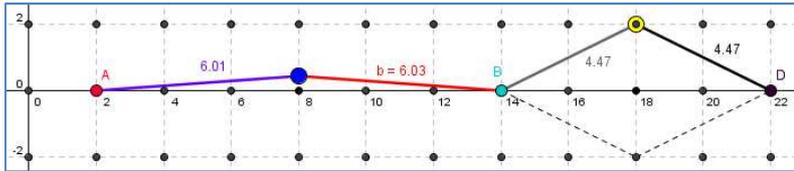
**I15-AI1-GB:** A postura investigativa, leva aos sujeitos a delimitar campos específicos a serem observados.

**I16-AI1-GB:** Os sujeitos utilizam de equivalência para tratamento de dados percebidos e discutidos.

**CENA 3 – O destaque ao fator distância como algo significativo à investigação. A criação da segunda questão: “Qual a maior distância que o garoto pode percorrer?”.**

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>JOSÉ:</b> Uma pergunta que faz sentido é “qual a maior distância que ele pode percorrer pra escolher amigos que moram distante dele?”.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Unnn, bacana mesmo. Vamos ver então.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Então não vai ter diagonal.</p> <p><b>FERNANDO:</b> É num pode, se não ele vai passar pela casa de mais nêgo.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Mas por exemplo, mas a maior distância que ele pode percorrer é muito relativa, sabe por que? Que por exemplo, me empresta ai rapidinho [pede o controle sobre o mouse], se ele vir e fizer isso, olha, ele não vai tá passando em casa nenhuma, e ele não precisa ta passando em casa nenhuma de A a B sacô?</p>  <p><b>FERNANDO:</b> Ou então ele pode fazer isso aqui, sei lá, [sobre põe o ponto azul ao primeiro ponto da “linha oito”], chegar e fazer, sei lá, deixa eu pegar um aqui, essa aqui entendeu? O amarelo também não precisa passar por uma casa.</p>  <p><b>JOSÉ:</b> Calcular essa distância desse ser muito difícil.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Á, não é difícil não, é só colocar pra aparecer a medida dos segmentos aí.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Onde?</p> <p><b>FERNANDO:</b> Clica na seta do ângulo aí e escolhe centímetro. Isso, agora é só clicar no seguimento que você quer.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Legal, legal, tava achando que ia ter que rabiscar umas continhas aqui. [risos]. Aqui no oito e zero [coordenada (8,00)] dá mais que vinte acho que é a maior.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Mas é o que a gente já disse, e se ele passar desse ponto vai ficar maior.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Então acho que vamos ter que responder de uma forma geral e deixar alguns exemplos de solução né.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Vamos fazer isso então.</p>	<p>Para calcularmos a maior distância que o menino iria percorrer teríamos que separar as explicações em vários casos, dentre eles:</p> <p>1º - O garoto levará 3 ou 4 amigos</p> <p>2º - Caso o menino chame apenas mais um amigo com exceção de B e D, ele chamaria esse amigo durante o seu percurso AB ou BD?</p> <p>Uma possível solução para quatro amigos é sair de A para a casa (0,8), passar em B e ir a casa (24,8) e finalizar com D.</p> <p>Para três amigos, basta não passar por traz da casa (0,8), voltar em B e ir a casa (24,8) e finalizar com D.</p>	<p><b>I17-AI1-GB:</b> O aprendizado sobre o investigar favorecia a percepção dos sujeitos do que é relevante ou não para conquistas de objetivos.</p> <p><b>I18-AI1-GB:</b> O que foi aprendido no percurso acompanha os sujeitos no decorrer da investigação</p> <p><b>I19-AI1-GB:</b> O <i>software</i> é utilizado como meio de comunicação, meio de se fazer entender, e de se fazer entendido.</p> <p><b>I20-AI1-GB:</b> A percepção de um caminho complexo, leva aos sujeitos a se resguardarem estrategicamente para percorrê-lo.</p> <p><b>I21-AI1-GB:</b> O manifesto de contentamento relacionado a não necessidade de cálculos complexos, aponta para o conforto e confiança na utilização de tecnologias para/com processos investigativos.</p>
<p><b>CENA 4 – A percepção da necessidade de exibição da menor distância, uma vez que já foi trabalhada a maior: “Qual a menor distância a ser percorrida?”</b></p>		
A interação	Síntese da interação	Interpretação

**JOSÉ:** Já que a gente viu sobre o maior caminho, vamo olhar o menor agora.  
**FERNANDO:** Por noção, o menor com certeza vai ser no caso de ele levar três amigos né.  
**JOSÉ:** É, aí ele não vai ter que passar na casa de um quarto.  
**FERNANDO:** Acho que seria próximo do eixo X [entre A e B], e aqui o menor caminho pra chamar o amigo daqui [entre B e D].  
**JOSÉ:** Acho que a menor aqui é dezoito e dois ou dezoito e menos dois [coordenadas (18, 2) ou (18, -2)]



Ele teria que percorrer o menor tamanho AB e chamar o amigo (18,2) ou (18,-2) de BD

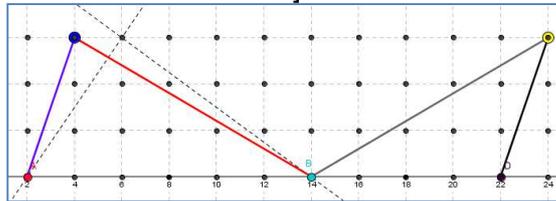
**I22-AI1-GB:** Os sujeitos, movidos pela pergunta anterior criam uma nova questão e utilização de conhecimentos concebidos no decorrer da investigação para respondê-la.

**ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1 - GRUPO C**

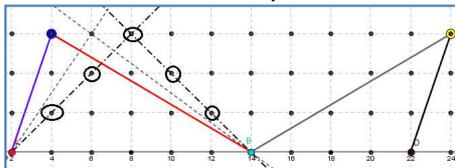
**CENA1-** A exploração em busca de percepções relevantes.

**A interação**

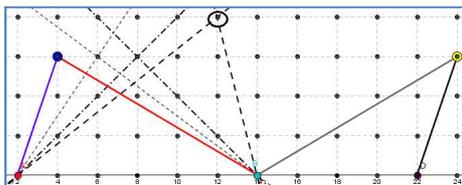
**DANIELE:** Ele só pode chamar quatro.  
**ROGER:** E ele não pode esbarrar nas bolinhas.  
**DANIELE:** Vamos desenhar as retas, tem como fazer? Pode mexer?  
**ROGER:** Pode. [cede o mouse à Daniele]  
**DANIELE:** Aqui, pode passar por essa e ir pra a casa B. [criou duas retas concorrentes conforme abaixo]



**DANIELE:** Vou fazer mais retas aqui. Olha, pode passar nessa.  
**ROGER:** Aí não, aí ele vai tá chamando cinco, aqui [no enunciado] diz que ele pode chamar no máximo quatro.



**DANIELE:** Vamo tentar passar naquela ali, olha qui, se eu pegar outra reta daqui [ponto A], opa, opa, essa deu ó, viu, ele não encostou em nenhuma [passa apenas na casa onde irá convidar um amigo]



**ROGER:** Nossa, parece que muitos vão dar e muitos não vão dar.  
**DANIELE:** Aqui também não dá; aqui vai sim; aqui também; é muita coisa. [clica apenas no ponto A e move o mouse de forma a sobrepor a reta aos pontos, sem clicar novamente, simulando vários caminhos]  
**ROGER:** É, isso aqui ta difícil viu, não sei o que temos que fazer.  
**DANIELE:** Acho que é, unn [pequena pausa], não sei também não viu.

**Interpretação**

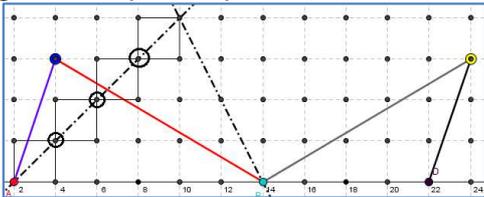
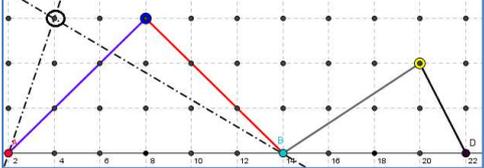
**I1-AI1-GC:** O pedido de permissão, seguido do aceite, evidencia o respeito entre os membros do grupo.

**I2-AI1-GC:** Parte-se de uma exploração inicial para melhor entendimento do cenário posto pelo enunciado da atividade.

**I3-AI1-GC:** A utilização de ferramentas construtivas do software auxiliou a percepção do que é ou não possível, e direcionou pensamentos sobre a expansão dessas possibilidades.

**I4-AI1-GC:** O cenário posto conseguiu chamar os sujeitos à investigação, dando-lhes abertura para se fazerem investigadores.

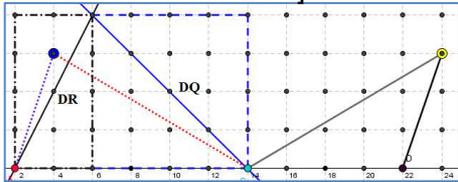
**CENA 2 – A concepção de uma pergunta de partida à investigação proposta: “Quais são os caminhos possíveis para que Carlos convide outros dois amigos sem ser os já escolhidos?”**

A interação	Interpretação
<p><b>PERQUISADOR:</b> Olha só! Que bacana. O que são estas retas aí?  <b>ROGER:</b> São as tentativas.  <b>PESQUISADOR:</b> Mas qual é o objetivo destas tentativas?  <b>DANIELE:</b> [risos] não sei, estamos só testando mesmo.  <b>PESQUISADOR:</b> Tentem pensar no que está gerando estes movimentos. Porque estão fazendo isso?  <b>ROGER:</b> A gente quer saber quais são as outras casas que ele pode chamar.  <b>PESQUISADOR:</b> Então, vocês mesmo sem querer, já começaram a investigar, levantaram uma pergunta e estão tentando encontrar respostas. Muito bem!  <b>DANIELE:</b> Á, é mesmo, na investigação a gente tem que criar questões que tem a ver com a coisa né, e tentar responder.  <b>ROGER:</b> Isso, então vamos escrever essa pergunta.  <b>DANIELE:</b> Acho que deve ter alguma particularidade, aqui, por exemplo: além de ter pra cima, tem pra baixo [refere-se ao eixo horizontal], pra baixo a gente pode fazer a mesma coisa, fazer o simétrico entendeu?  <b>DANIELE:</b> É muita possibilidade, daqui pra cá [de A até B], vai aparecer outro ponto tipo esse aqui [aponta para o ponto azul]  <b>ROGER:</b> É impossível, é quase infinito.  <b>DANIELE:</b> Vou desfazer esses desenhos todos aqui pra ficar mais limpo [começa a clicar em ctrl + z]  <b>DANIELE:</b> Eu não sei o que escrever [indaga de forma retraída, após período de reflexão]  <b>ROGER:</b> A tá! Descobri! Olha só, ele, não pode passar pela diagonal desses quadradinhos, se ele passa pela diagonal ele vai tá pegando todo mundo.  <b>DANIELE:</b> Então ele tem que ir por onde não é diagonal!![empolgada]  <b>ROGER:</b> É se ele começar daqui, pegar o próximo e ir subindo, ele vai pegar muito mais gente do que ele pode.</p>	<p><b>I5-AI1-GC:</b> O pesquisador media a percepção de algo que já está sendo feito de forma inconsciente para que uma estrutura comece a ser montada.</p> <p><b>I6-AI1-GC:</b> Criar e registrar uma pergunta que dê origem e sentido à investigação é indicativo da aprendizagem significativa de como investigar.</p> <p><b>I7-AI1-GC:</b> A busca por um padrão pode ser recorrente da vivência com a Matemática, esta que é manifestada na exposição de objetos matemáticos previamente conhecidos.</p> <p><b>I8-AI1-GC:</b> A opção da construção de retas foi questionada quando o excesso das mesmas passou a afetar o componente mecânico e visual.</p>
	
<p><b>DANIELE:</b> Vamo testar, vou fazer sem ser na diagonal, olha.</p>	
	
<p><b>ROGER:</b> Aí viu, vai passar por fora. Que que a gente pode fazer... e sempre vai tá formando triângulos, esses triângulos aqui, os vértices deles não pode cair sobre os vértices de quadradinhos que a diagonal coincide com o lado desse triângulo, né? [gesticula triângulos entre A e B]</p>	

**CENA 3 – A criação de uma nova pergunta em decorrência do envolvimento com a primeira: “É possível convidar qualquer amigo, sendo que os dois melhores continuem de acompanhantes?”**

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

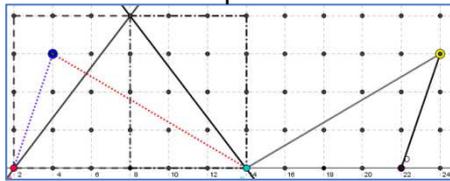
**DANIELE:** A gente tá é mais procurando amigos que ele não pode né, então acho que podemos mudar nossa pergunta.  
**ROGER:** Vamos perguntar então, se é possível convidar qualquer amigo.  
**DANIELE:** A resposta é não né, a gente já viu isso, mas vamo ver primeiro porque que não dá, matematicamente.  
**ROGER:** Á, olha o que eu vi; você pode convidar qualquer amigo, mas se convidar um que tá no ponto médio da diagonal de um quadrado ou retângulo, você não pode convidar o do vértice seguinte. Olha só, se você convidar esse aqui, cê não pode convidar esse, que se não, cê vai ter que fazer esse caminho e parar aqui [parar em B já tendo passado em outras cinco casas].



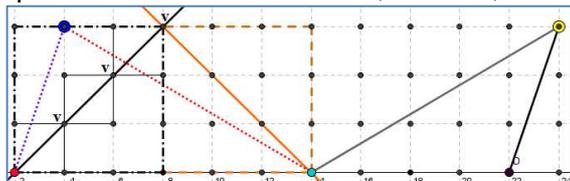
**DR:** Diagonal do retângulo  
**DQ:** Diagonal do quadrado

**DANIELE:** hunhun, não é isso [balançando a cabeça] nem sempre a diagonal passa num ponto médio, ela pode não passar em pontinhos nenhum.

**ROGER:** Mas aí o caso é outro, falei quando ele não pode chamar. Se ele não passa em pontos do caminho, quer dizer que ele pode chamar onde ele parou.



**DANIELE:** E nesse caso, aqui não pode, mas a o ponto médio da diagonal não é uma casinha...iiii, mas olha só, se ao invés de ponto médio colocar vértice, dá zero, acho que cobre.



v: vértices dos quadrados

**ROGER:** Unnn, é mesmo, de acordo, vamos escrever isso.

Não. Caso ele convide amigos que pertencem ao vertice de algum quadrado, não pode convidar o seguinte sobre a mesma diagonal.

**I9-AI1-GC:** Torna-se evidente que ao investigar, uma questão posta pode ser refinada ou mudada no processo em que se tenta encontrar respostas para a mesma.

**I10-AI1-GC:** Objetos da Geometria Plana são utilizados como fontes argumentativas tanto para expor ideias, quanto para trata-las e/ou corrigi-las.

**I11-AI1-GC:** As investidas sobre uma ideia posta proporciona a percepção conjunta de possíveis incoerências, o que salienta a relevância de deixar ideias em “crise”, criticá-las e atentar as implicações dessas críticas.

**CENA 4 – Cria-se uma nova pergunta baseada no fator distância: “Qual a menor distância para chamar quatro amigos?”**

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>DANIELE:</b> Pensando no meu irmão gordinho e preguiçoso [risos], eu tenho outra pergunta. Ele não ia querer andar muito, e ia bater no primeiro portão [risos]. Então ó: qual que ele vai escolher, o que tá mais longe ou o que tá mais perto? Poderia ser o mais perto pra ele ir mais rápido né.  <b>ROGER:</b> É, a caminhada dele a gente tem que levar em consideração, mas não acha melhor então perguntar qual o menor caminho possível, e depois a gente vê qual o maior.  <b>DANIELE:</b> Ótimo, vamo ver aqui então.  <b>ROGER:</b> Então, qual o menor caminho?  <b>DANIELE:</b> A gente vai ter que trabalhar com distância entre dois pontos, e fazer quatro vezes. [são quatro os seguimentos]</p>		<p><b>I12-AI1-GC:</b> A contextualização da atividade levou a percepção e criação de uma nova pergunta coerente com a situação posta.</p>

**ROGER:** É, mas não precisa calcular é só medir aqui no Geogebra mesmo.

**DANIELE:** O menor caminho [refletindo]. A gente vai fazer segmentos agora. [até então estavam trabalhando com retas]

**ROGER:** Tá bom. O menor acho que vai ser pra baixo, se ele vier pra cá, vai diminuir aqui, e vai diminuir essa. [corre o dedo sobre a tela simulando o baixar do ponto azul]

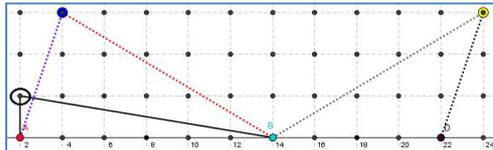
**DANIELE:** Ou não, vamo medir. [seleciona o opção de "Distância" e clica sobre uma reta construída]

**ROGER:** Não aí não consegue medir, é reta, vamo ter que fazer seguimentos agora, aí a gente consegue medir a distância de um ponto ao outro. Vamo apagar essas retas e coloca aí dois seguimentos.

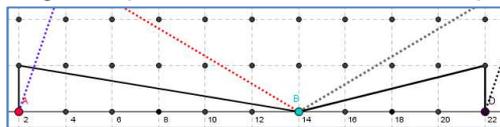
**DANIELE:** Esse aqui é o menor ó.

**ROGER:** Não, vai diminuir aqui, mas o outro vai aumentar, aí não adianta. [apontando para o seguimento azul, seguido do vermelho]

**DANIELE:** Então vamo vê uai, pronto. [conforme figura abaixo]



**ROGER:** Não, mas tem que ver tudo, tem aqui também e aqui [constrói seguimentos entre B e D]. Ele vai andar sempre nos triângulos retângulos, passa nos catetos e nas hipotenusas.



**DANIELE:** Não é possível calcular.

**ROGER:** O menor? É sim, só que a gente que não descobriu. São muitas possibilidades.

**DANIELE:** É, é possível calcular algumas, todos não dá, vamos ter que desenhar muitos seguimentos e ir apagando.

**PERQUISADOR:** É, realmente, se forem testar fazendo vários segmentos, podem sim chegar a uma resposta, mas pensem bem, vocês já sabem que o Geogebra é um software de geometria dinâmica né?

**ROGER:** É, sim.

**DANIELE:** Anhan. [assinala com a cabeça que sim]

**PESQUISADOR:** Então me falem o que faz com que esse software seja chamado de dinâmico?

**DANIELE:** Á, é porque nele a gente pode dar vida aos objetos, você pode crescer e diminuir um seguimento, e várias coisas.

**ROGER:** Pode arrastar as coisas também né.

**PESQUISADOR:** Então, pelo que percebi essas possibilidades de aumentar e arrastar, vocês ainda não utilizaram.

**ROGER:** É realmente, pra mim essa planta tá aqui e a gente não podia mexer nela.

**PESQUISADOR:** Então pensem, se vocês fossem utilizar do dinamismo do software pra ajudar na investigação, igual você falou Daniela, qual objeto você daria vida?

**DANIELE:** Uai, se esse ponto azul mexesse, ia ser bem mais tranquilo, a gente ia só colocar nas outras casas.

**I13-AI1-GC:** O conhecer previamente o software acompanhou aos sujeitos no processo de investigação.

**I14-AI1-GC:** O conhecimento individual, quando compartilhado, propicia concepção significativa de tais conhecimentos

**I15-AI1-GC:** A noção de grandeza em conjunto com o componente visual do software direcionou inferências acerca do menor caminho investigado pelos sujeitos.

**I16-AI1-GC:** A não utilização do dinamismo do *software* aparentou ser uma dificuldade para o decorrer da investigação, o que acarretou na mediação do pesquisador.

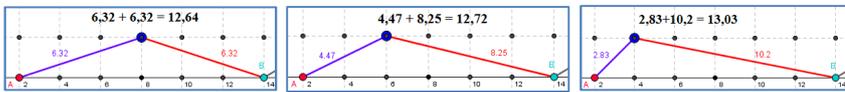
**DANIELE:** Calma aí. Á! Num brinca! Porque não falou antes, nossa, a gente desenhô e apagô um tanto de reta aqui [risos de contentamento e surpresa ao mover o ponto azul]

**ROGER:** É, acho que fazia parte da investigação né, a gente tinha que ter percebido isso.

**PESQUISADOR:** É, faz parte da investigação, se situar sobre o cenário que ele vai investigar. Agora podem continuar né.

**ROGER:** Então vamo lá. O menor caminho vai ser quando essa soma aqui for a menor possível [entre A e B]. Acho que aqui seria seis ponto trinta e dois mais seis ponto trinta e dois, dá doze ponto sessenta e quatro; e aqui dá doze ponto sessenta e dois; aqui treze e alguma coisa, é o menor é aqui, doze ponto sessenta e dois.

**DANIELE:** Pera aí. Acho que tá fazendo conta errada quatro ponto quarenta e sete mais oito ponto vinte e cinco é doze ponto setenta e dois, então no meio aqui, doze ponto sessenta e quatro é a menor.

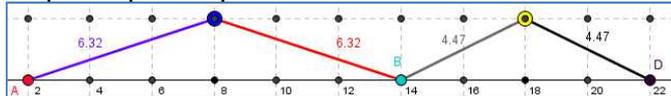


**ROGER:** É, realmente tem razão, errei continha, liga não é a idade mesmo [risos]. Então, essa aqui [entre B e D] vai ser menor, quando [movendo o ponto amarelo], mesma coisa, essa é a menor distância.

**DANIELE:** Quando as medidas são iguais.

**ROGER:** Nem sempre, posso ter medidas iguais aqui pra cima e a distância é maior.

**DANIELE:** Então a gente fala que é quando o caminho são dois triângulos isósceles, um de lados seis ponto trinta e dois, outro de lados quatro ponto quarenta e sete.



O menor caminho para se convidar 4 acompanhantes antes, é aquele onde formamos dois triângulos isósceles um de lados 6.32 cm e outro de lado 4.47 cm. São os amigos das casas na segunda linha quinta coluna, e o amigo da décima coluna e segunda linha. Além é claro dos amigos B e D.

**I17-A11-GC:** O pesquisador inicia uma linha de pensamento a qual os sujeitos desenvolveram ao ponto de perceberem o potencial do dinamismo do software e como este poderia vir auxiliar na investigação.

**I18-A11-GC:** Quando utilizado, o dinamismo do software se mostra como ferramenta relevante para testar conjecturas e buscar informações que apontem a resposta para a pergunta feita.

**CENA 5 – É manifestada uma pergunta mediante uma resposta previamente pensada para a mesma: “É possível convidar apenas mais um amigo além dos já escolhidos?”**

**Interação**

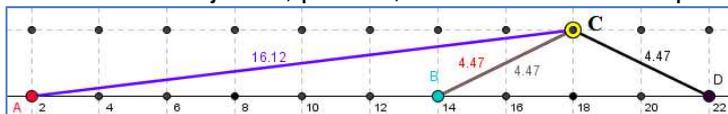
**ROGER:** Chamamos quatro aí, mas será se é possível chamar só três. Vamos ver isso?

**DANIELE:** Não, ele não consegue [afirma com veemência]

**ROGER:** Consegue sim, aqui fala no mínimo três e no máximo quatro [refere-se ao enunciado]

**DANIELE:** Então mostra uma caminho que ele consegue sair daqui e chegar aqui passando em só uma casa, se cê me achar cê me fala. [discordando de Roger]

**ROGER:** É só cê juntar, pera aí, é só cê vim direto aqui.



**DANIELE:** Ó! Não tinha visto isso. [constrangida]

**ROGER:** Mas aqui ele vai ir e voltar, será se pode. [Gesticula com o indicador subindo e descendo em BC]

**DANIELE:** Acho que sim, na atividade só fala que ele anda em linha reta, e aí ele também tá em linha reta.

**Síntese da interação**

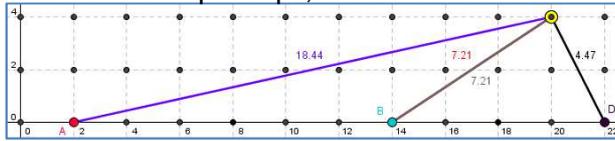
**SIM É POSSIVEL.** Ele, sai de sua casa vá para um ponto(C), de forma a não passar por outras casas, depois vai para o ponto B depois volta pro ponto (C) escolhido e dele vai para o ponto D.

**Interpretação**

**I19-A11-GC:** Um conflito inicial mostra-se relevante para a aprendizagem. Aqui, este gerou um diálogo mediado pelo componente visual do software e resultou em percepções a priori não vistas.

**ROGER:** Só que ele vai voltar na mesma casa e não vai ter que chamar de novo. É pode sim.

**DANIELE:** Vou sobrepor aqui, viu dá também.



**ROGER:** Mas tem lugares que vai passar por mais casas.

**DANIELE:** É, mas não vamos ficar procurando isso tudo né, acho que a pergunta já tá respondida.

**ROGER:** Anhan, beleza. E aqui pra baixo, no simétrico, acontece a mesma coisa também né?

**DANIELE:** É, tudo que fazer aqui podemos fazer embaixo.

Ou seja, ele passa duas vezes pelo ponto C. Uma opções é o amigo da linha 3 coluna 11.

**I20-A11-GC:** A manifestação de um cuidado com o excesso de informações indica um perfil investigativo concebido de forma significativa.

**CENA 6 – O vivido no processo investigativo subsidia o trabalho sobre nova pergunta: Qual a menor distância que Carlos pode percorrer para convidar apenas três amigos.**

**Interação**

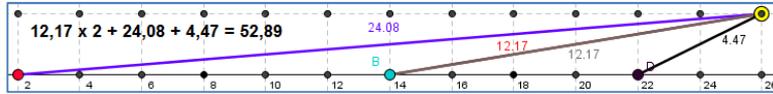
**DANIELE:** Dá pra gente achar agora a menor distância pra chamar três amigos, já fizemos pra quatro né.

**ROGER:** É, isso, isso, tá mais tranquilo, só pode tá nessa linha aqui, o que vale pra de baixo né, [y=2 e y= -2]

**DANIELA:** Vou sobrepor os pontos aqui.

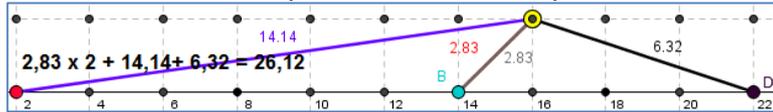
**ROGER:** Tem que lembrar que conta a ida e a volta né, ele vai tá caminhando né.

**DANIELE:** É, realmente. Olha, aqui dá, deixa eu abrir a calculadora aqui, é [somando], dá cinquenta e dois vírgula oitenta e nove anota aí.



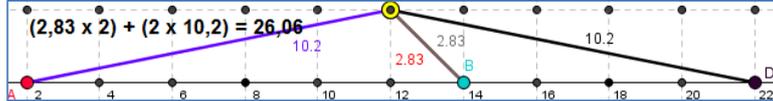
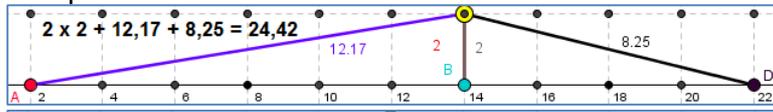
**ROGER:** Coloca com seguimentos menores.

**DANIELE:** Tá, vou aqui. Deu vinte e seis ponto doze.



**ROGER:** Viu deu muito menor. Vai em outro.

**DANIELE:** Vinte e quatro vírgula quarenta e dois; vinte e seis ponto zero meia.



**ROGER:** Viu, aí começa a aumentar, os seguimentos vão aumentando, então, o menor é vinte e quatro ponto quarenta e dois mesmo, bem na perpendicular.

**DANIELE:** Faz sentido, porque a menor distância que ele pode fazer do ponto C [nome dado ao ponto azul sobreposto ao amarelo] ao ponto B é dois.

**ROGER:** Então, pra andar menos e chamar três amigos ele vai chamar o amigo da oitava casa da linha dois.

**DANIELE:** Isso, vamos escrever.

**Síntese da interação**

Se ele optar em chamar apenas três amigos, a menor distância que ele pode percorrer é 24,42, passando na oitava casa da segunda linha, indo em B, voltando nessa casa e indo até o amigo em D.

Obs: Os simétricos também pode ser levado em conta para a resposta do caminho mais curto, para 3 ou 4 amigos.

**Interpretação**

**I21-A11-GC:** As perguntas a cada cena surgem com mais naturalidade. Isso pode ser consequência da experiência vivida no percurso da investigação.

**I22-A11-GC:** A investigação se abre à utilização de ferramentas diversas, estas que não são impostas, mas sim escolhidas pelos sujeitos para dinamizar e facilitar processos muitas vezes mecânicos.

**I23-A11-GC:** A interação entre ferramentas auxiliares sob regimento dos sujeitos facilitou a percepção de regularidades que favoreceram a concepção de uma possível resposta para a pergunta deferida.

## ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2

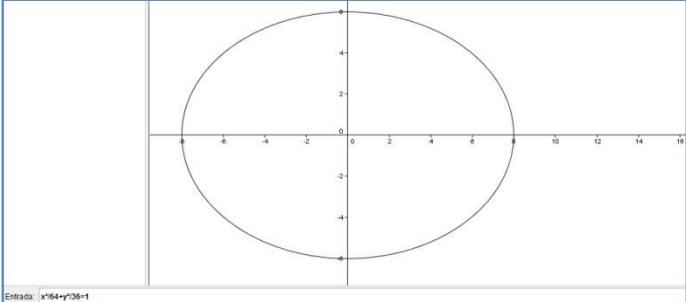
Nesta atividade foi apresentada a equação de uma elipse  $\sigma: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ , e a equação de uma reta do tipo  $y = x + b$ . Pedimos que os sujeitos investigassem as possíveis relações entre a reta e a elipse.

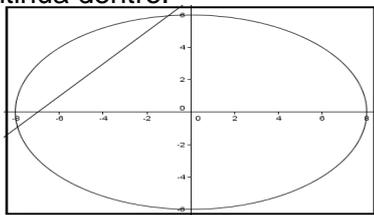
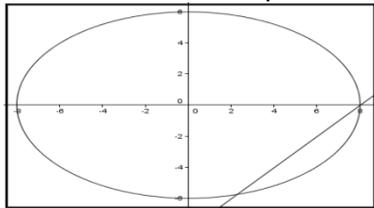
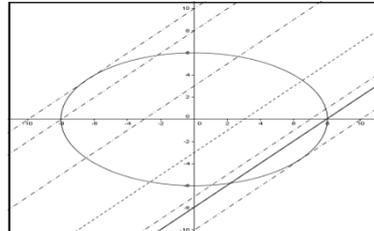
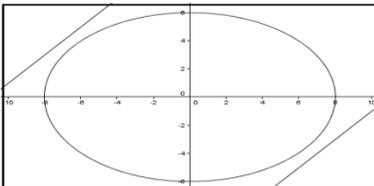
Pelos princípios teóricos abordados nesta pesquisa, como os de Ponte (1998), os alunos, seja de qual for o nível escolar, não estão familiarizados com questões tão abertas como de fato são as investigativas. Assim, optamos por criar uma estrutura mínima; algumas questões foram previamente levantadas, para que a partir delas, os sujeitos criassem novas perguntas mantendo um sentido de continuidade. Quando se pede para investigar relações entre dois objetos, não se pode definir a proporção de encaminhamentos que isso pode tomar, portanto, tentamos com algumas perguntas iniciais, diminuir na medida do possível, o campo pelo qual os sujeitos poderiam vir a trabalhar; nas perguntas iniciais estava embutido o intuito de orientar os sujeitos a refletirem as relações entre as equações, quando variados apenas os valores de **b**, conforme abaixo:

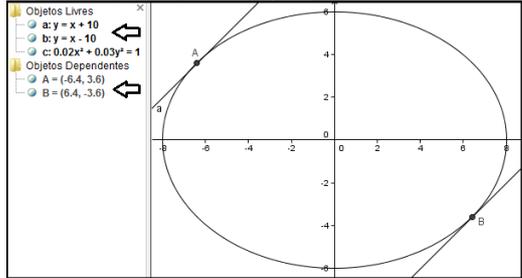
- 1.1 Qual posição relativa entre a reta e o gráfico da elipse, quando  $b = 6$ ?
- 1.2 Para quais valores de **b** a reta é tangente ao gráfico da elipse?
2. Assim como feito nos itens 1.1 e 1.2, elaborem o item 1.3 e 1.4 (se estiverem à vontade, podem elaborar mais itens), com perguntas de interesse do grupo que dê sentido de continuidade às perguntas iniciais.

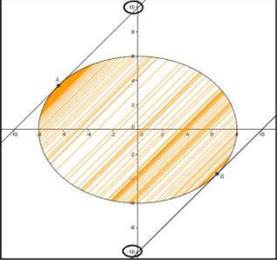
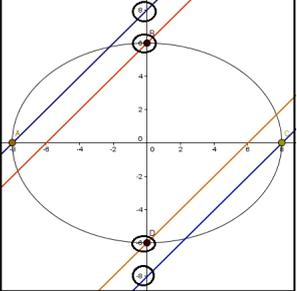
Objetivamos nesta tarefa o trabalho relacional entre objetos da Geometria Analítica Plana; a percepção e compreensão dos conceitos de posição externa, interna e tangente a algum objeto dado, o tratamento de pontos que podem ser de tangência ou não, o paralelismo entre retas, dentre outros.

Novamente frisamos que, neste contexto, objetivos e metas não podem ser postos como finitos e necessários, os mesmos podem não ser alcançados ou podem ser extrapolados, as investigações aqui apresentadas poderiam abrir uma gama de opções, que permitiriam aos sujeitos, até mesmo saírem do contexto da Geometria. Cabe-nos debruçar sobre o mundo de informações que podem ser manifestadas, por mais que elas pareçam fugir do tema ou das expectativas. Segue o mundo de informações ao qual nos referimos proveniente do terceiro encontro presencial, e último encontro, se somando aos outros dois presenciais e dois virtuais:

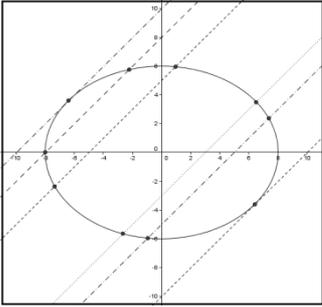
<b>ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2 - GRUPO A</b>		
<b>CENA1- A plotagem do gráfico da Elipse no Geogebra.</b>		
<b>A interação</b>		<b>Interpretação</b>
<p><b>LÚCIA:</b> Deixa eu colocar a equação aqui. [começa a digitar a equação]  <b>LUANA:</b> Não, cê tem que fechar o parêntese.  <b>LÚCIA:</b> Pela equação o centro é zero, aí fica só x ao quadrado mesmo.  <b>LUANA:</b> Hunnn, é mesmo. Aí tem que colocar o dividido, acho que é a barrinha.  <b>LÚCIA:</b> Enter, aí.  <b>LUANA:</b> Será se tá certo?  <b>LÚCIA:</b> Ela tá no centro, e aqui é oito e aqui seis, oito ao quadrado é sessenta e quatro e seis ao quadrado é trinta e seis, bate com a formulinha de elipse.  <b>LUANA:</b> É mesmo.</p>		<p><b>I1-AI2-GA:</b> O componente visual apresentado no <i>software</i> permite equivalência entre a equação reduzida de elipse previamente conhecida, e o gráfico exposto.</p>
<b>CENA 2 – O tratamento do item 1.1: Qual posição relativa entre o gráfico da Elipse e a reta quando <math>b = 6</math>?</b>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>
<p><b>LÚCIA:</b> Vamos para o um ponto um [volta ao enunciado]  <b>LUANA:</b> A reta vai aí também, tudo junto [refere-se à mesma tela do Geogebra]  <b>LÚCIA:</b> Acho que sim, olha, y é igual a x mais seis. [digita a equação na entrada do software]  <b>LUANA:</b> Ela corta a elipse.  <b>LÚCIA:</b> Passa no seis e menos seis.  <b>LUANA:</b> Como a gente responde? Ela é secante, não é?  <b>LÚCIA:</b> Isso, aí a gente bota também que ela passa, aqui ó, bem no vértice do eixo menor da elipse.  <b>LUANA:</b> beleza então.</p>	<p>A reta <math>y=x+6</math> é secante à elipse, sendo que um de seus pontos passa pela extremidade do eixo menor da elipse.</p>	<p><b>I2-AI2-GA:</b> O trabalho é conjunto, uma vez que ocorre o convite à participação dos membros do grupo.</p> <p><b>I3-AI2-GA:</b> O <i>software</i> permite visualizações responsáveis pelo manifesto de conhecimentos prévios sobre elipse e reta secante.</p>
<b>CENA 3 – O tratamento do item 1.2: Para quais valores de <math>b</math> a reta é externa ao gráfico da elipse.</b>		
<b>A interação</b>	<b>Síntese da interação</b>	<b>Interpretação</b>

<p><b>LÚCIA:</b> Pra ser exterior [refletindo], x mais sete né?  <b>LUANA:</b> Coloca aí.  <b>LÚCIA:</b> [risos] Não, não, [ao lançar <math>y=x+7</math>, talvez na expectativa da reta subir], continua dentro.</p>  <p><b>LUANA:</b> Então muda, vamos ver x-8.  <b>LÚCIA:</b> Acho que ainda não dá, tem que ser maior.</p>  <p><b>LUANA:</b> Á, esse é secante.  <b>LÚCIA:</b> É, a outra também é, depois a gente pode pergunta sobre secante, já tá vendo algumas coisas.  <b>LUANA:</b> A gente pode mexer com essa reta? tenta aí.  <b>LÚCIA:</b> [risos] Geogebra é uma mãe né, aí, nem precisamos ficar testando mais, é só mexer.  <b>LUANA:</b> É mesmo [risos]  <b>LÚCIA:</b> Aí, só vai até aqui.  <b>LUANA:</b> A tá, vai até menos dez e dez. Hunn, aí é a tangente.</p>  <p><b>LÚCIA:</b> Tá certim no dez e menos dez mesmo.  <b>LUANA:</b> Vai ser x mais dez.  <b>LÚCIA:</b> Sim, sim. Mas e aí, quando a reta será exterior então?  <b>LUANA:</b> Tenta um b igual a onze e outro igual a menos onze.  <b>LÚCIA:</b> Vai dar fora né, deixa eu colocar.</p>  <p><b>LUANA:</b> Viu, é como eu imaginei mesmo, acho que vai ficar fora, quando b for maior que dez e maior que menos dez.  <b>LÚCIA:</b> Não, mas maior que menos dez vai dar dentro, o menos oito que colocamos é maior que menos dez e foi secante.  <b>LUANA:</b> É, desculpa, confundi, é menor que menos dez.  <b>LÚCIA:</b> Vou escrever isso então.</p>	<p>Podemos observar que as retas externas não possuem nenhum ponto de interseção com a elipse. Isso ocorre quando <math>-10 &lt; b &lt; 10</math></p>	<p><b>I4-AI2-GA:</b> Os sujeitos partem de uma exploração por tentativa, em busca da percepção do posicionamento desejado para a reta.</p> <p><b>I5-AI2-GA:</b> A exploração subsidia a investigação, uma vez que a partir dela uma base parece se investigar vai se formando.</p> <p><b>I6-AI2-GA:</b> O potencial dinâmico faz manifestar o deslumbre dos sujeitos com o software.</p> <p><b>I7-AI2-GA:</b> O cunho investigativo se manifesta quando os sujeitos levantam conjecturas e utilizam do software para testá-las.</p> <p><b>I8-AI2-GA:</b> Os sujeitos se preocupam com a coerência das informações e com o entender do outro.</p>
<p><b>CENA 4 – A criação do item 1.3 e o envolvimento com o mesmo: Quais os pontos de tangencia entre a reta e a elipse?</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p>Síntese da interação</p>	<p>Interpretação</p>

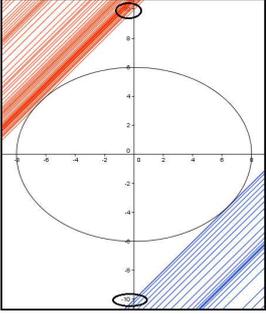
<p><b>LUANA:</b> Agora dá pra criar algumas perguntas.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Hun, o ponto de tangência né?</p> <p><b>LUANA:</b> Á, então é melhor fazer assim: o que é uma reta tangente?</p> <p><b>LÚCIA:</b> Mas isso a gente já sabe, a gente tem que usar o que a gente sabe pra investigar aqui.</p> <p><b>LUANA:</b> Mas a gente sabe, mas e lá na sala de aula? Os alunos não vão saber.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Mas aí, acho que é o que ele fez, você ia primeiro trabalhar essa ideia de tangente, pra depois passar a atividade. [refere-se aos momentos de organizações prévias feitas pelo pesquisador]</p> <p><b>LUANA:</b> É, realmente, [risos] já tá eu, só pensando em sala de aula [risos].</p> <p><b>LÚCIA:</b> [risos], mas é isso então, vamos ver qual o ponto de tangência entre a reta e a elipse.</p> <p><b>LUANA:</b> Essa pergunta é difícil, se a gente virar essa reta assim [gesticula posicionando o braço em vários ângulos sobre o gráfico da elipse na tela], são vários pontos de tangência.</p> <p><b>LÚCIA:</b> É né, como que eu giro essa reta? [<math>y=x-8</math>]. Mas olha, aqui vai mudando, mudando [refere-se ao valor de b que se altera na zona algébrica do Geogebra, ao movimentar a reta]. É x mais alguma coisa, vai mudando, mudando, se girar vai ser outra reta.</p> <p><b>LUANA:</b> A é mesmo, aqui fala: reta do tipo <math>y = x+b</math>, que é um vezes x, entendeu, se mudar a inclinação, não vai ser mais um vezes x, muda a reta mesmo.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Então tem só dois pontos de interseção; aqui em cima e em baixo. Entendeu o que eu quis dizer? É x mais dez, e x menos dez, só tem esses dois.</p> <p><b>LUANA:</b> Então vamos colocar um ponto alí pra ver.</p> <p><b>LÚCIA:</b> O ponto já fica na interseção, ó que bom. Então fica menos seis vírgula quatro, e três vírgula seis [coordenada: (-6,34; 3,6)]. Aqui em baixo [arrastando a reta], seis vírgula oitenta e quatro e menos três vírgula onze [(6,84; -3,11)].</p> <p><b>LUANA:</b> Tá esquisito, tão diferentes, acho que tinha que ser simétrico, até agora a gente só viu, oito, menos oito, dez, menos dez.</p> <p><b>LÚCIA:</b> Mas o ponto tá alí, só tem ele, é isso mesmo.</p> <p><b>PESQUISADOR:</b> Tenta construir as duas retas, e não arrastar, as vezes quando você arrasta pode ter alguma imprecisão, sua mão pode tremer. [risos].</p> <p><b>LÚCIA:</b> Tá bom, [faz <math>y= x+10</math> e <math>y=x-10</math> e coloca pontos nas interseções]. Hunn, agora sim.</p> <p><b>LUANA:</b> É, não falei que tava esquisito, o A é menos seis vírgula quatro e três vírgula seis, e o B é seis vírgula quatro e menos três vírgula seis. [contente pela percepção]</p> 	<p>São os pontos A= (-6,34,3,6) e B= (6,34,-3,6)</p>	<p><b>I9-AI2-GA:</b> Manifestos indicam a aprendizagem em do <i>como iniciar um novo conteúdo</i>; defendem o que entendemos ser uma organização prévia.</p> <p><b>I10-AI2-GA:</b> A fuga de um contexto, propiciada por uma gama de conhecimentos em comum com um cenário investigativa, foi contida no trabalho conjunto, com auxílio do <i>software</i> e de saberes geométricos</p> <p><b>I11-AI2-GA:</b> O já vivido, leva a percepção da não coerência do exposto ao arrastar. A mediação do pesquisador evidencia a importância da construção no <i>software</i>.</p>
<p><b>CENA 5 – O tratamento do item 1.4 levantado: Quais valores para b quando a reta tangencia a elipse?</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p>Síntese da interação</p>	<p><b>Interpretação</b></p>

<p><b>LÚCIA:</b> A gente pode perguntar do b agora, quando fica tangente.  <b>LUANA:</b> Quais os valores de b quando a reta é tangente, é bom que a gente já sabe né.  <b>LÚCIA:</b> quando b é igual a dez ou menos dez.</p>	<p>Os valores são, <math>b=10</math> e <math>b=-10</math></p>	<p><b>I12-AI2-GA:</b> Ao investigar uma questão, abre-se á percepção de informações de potencial gerador de perguntas posteriores, relevantes à investigação.</p>
<p><b>CENA 6 – A criação e tratamento do item 1.5: Quais valores para b quando a reta é secante à elipse?</b></p>		
<p><b>A interação</b></p>	<p>Síntese da interação</p>	<p>Interpretação</p>
<p><b>LUANA:</b> Agora as pergunta ficaram fáceis, podemos perguntar agora, quais os valores para b quando a reta é secante à elipse.  <b>LÚCIA:</b> É já falamos quando é fora e quando é tangente, só resta a secante mesmo. [risos]  <b>LUANA:</b> Pode colocar aqui, entre menos dez a dez?  <b>LÚCIA:</b> É isso mesmo, coloca que b deve ser maior que menos dez e menor que dez.  <b>LUANA:</b> Tá bom.</p> 	<p>Os valores são <math>-10 &lt; b &lt; 10</math></p>	<p><b>I13-AI2-GA:</b> A exploração inicial mostrou-se relevante para levantamento de questões, uma vez que muitas das possíveis respostas foram vistas ao explorar.</p>
<p><b>CENA 7 – A criação e resposta do item 1.6: Quais valores de b para que a reta passe pelas extremidades dos eixos da elipse?</b></p>		
<p><b>LÚCIA:</b> Acho que tá bom né.  <b>LUANA:</b> Vamos pensar em mais alguma coisa.  <b>LÚCIA:</b> É, tá bom, vamos pensar. [risos], deixa eu ver, se a gente colocar um monte de reta aqui. [risos ao brinca com a colega].  <b>LUANA:</b> A gente pode ver isso aqui, o que acontece quando b é igual a oito? Tá feia a pergunta né, num sei viu, pensa aí.  <b>LÚCIA:</b> Pode ser qual a posição da reta quando b é igual a oito? E a gente pode ver também menos oito.  <b>LUANA:</b> Ficou muito melhor [risos]  <b>LÚCIA:</b> Vai ficar melhor agora, a gente já viu que no seis e menos seis a reta passa nas extremidades do eixo menor, e olha aqui, no oito e menos oito passa no eixo maior [extremidades]. Vamos perguntar quais são os valores de b pra que a reta passe pelas extremidades dos eixos. Pode falar, arrebentei né.[risos]  <b>LUANA:</b> Muito bem, tá inspirada em. Vamo colocar então. O bom é que já perguntô e já deu a resposta.</p> 	<p>Para <math>b=8</math> e <math>b=-8</math> a reta passa pelas extremidades do eixo maior da elipse.  Para <math>b=6</math> e <math>b=-6</math>, a reta passa pelas extremidades do eixo menor.</p>	<p><b>I14-AI2-GA:</b> O querer continuar pode condizer com a adaptação e o gostar de estar investigando.  <b>I15-AI2-GA:</b> O percurso feito mostrou-se relevante, uma vez que auxiliou no refino de uma questão inicialmente posta.  <b>I16-AI2-GA:</b> As brincadeiras e elogios condizem com o bom relacionamento do grupo.</p>
<p><b>ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2 - GRUPO B</b></p>		
<p><b>CENA1-</b> O tratamento do item 1.1: Qual posição relativa entre o gráfico da Elipse e a reta quando <math>b = 6</math>?</p>		

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>FERNANDO:</b> Onde eu coloco a equação mesmo?</p> <p><b>JOSÉ:</b> Aí em entrada.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Beleza [insere a equação]</p> <p><b>JOSÉ:</b> Agora, coloca a reta aí.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Que reta? [olhando para o enunciado] A inclinação dela é quarenta e cinco né.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Oi?</p> <p><b>FERNANDO:</b> A inclinação dela é quarenta e cinco, porque é igual a x mais b.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Dependendo do, é, é, é isso aí, é quarenta e cinco mesmo.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Colocando b igual a seis, dá uma secante.</p> <p><b>JOSÉ:</b> É isso mesmo, vou anotar aqui, pode?</p> <p><b>FERNANDO:</b> Anota aí e vamos pro 1.2.</p>	<p>A inclinação da reta é fixa (<math>45^\circ</math>). Quando <math>b=6</math>, temos que a reta é secante à elipse.</p>	<p><b>I1-AI2-GB:</b> Os sujeitos remetem a conhecimentos prévios em geometria, para discutir sobre o que é visto na tela do software.</p>
<p><b>CENA 2 – O tratamento do item 1.2: Para quais valores de <math>b</math> a reta é externa ao gráfico da elipse.</b></p>		
Interação	Interpretação	
<p><b>JOSÉ:</b> Tem como mexer essa reta, transladar?</p> <p><b>FERNANDO:</b> [clica sobre a reta e a movimenta]</p> <p><b>JOSÉ:</b> Pode, tem o traslado dela aí.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Aqui pede pra dizer quando a reta é exterior à elipse.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Mas pra isso, se a gente descobre primeiro os pontos de tangência, fica fácil responder. Tá tudo amarrado, sacô? Se a gente saber a tangente, a gente vai saber a exterior e a secante.</p> <p><b>FERNANDO:</b> É, realmente, então vamos começar pela secante. Pra ser secante? [movimentando a reta]</p> <p><b>JOSÉ:</b> Essa aí é tangente.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Sim, mais secante vai ser todos os pontos aqui menos esses.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Tangente, é mais ou menos por aqui né.</p> <p><b>JOSÉ:</b> A gente pode responder que a secante, pra ser secante, para todo b, em que os pontos y e x contidos na reta estão contidos na elipse, sacô?</p> <p><b>FERNANDO:</b> Dois pontos.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Isso, isso, dois pontos.</p> <p><b>FERNANDO:</b> A interseção da reta com a elipse é dois pontos.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Aí, para aí, viu, o limite é dez.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Em baixo é menos dez, então tá entre isso.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Agora os valores pra tangente. Pra tangente, isso, coloca aí de novo. [pede a Fernando para estacionar a reta no ponto de tangência], o b é onde a reta corta a ordenada né?</p> <p><b>FERNANDO:</b> É isso mesmo, então...</p> <p><b>JOSÉ:</b> É tangente quando b é igual a dez ou menos dez, beleza?</p> <p><b>FERNANDO:</b> Anhan. [movimenta a cabeça concordando]. Só usando aquele negócio de interseção de dois objetos.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Secante, tangente, agora falta a exterior né.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Ó, qui já dá pra ver direitim, dá pra ver se tá passando só um ponto mesmo. [criou um ponto de interseção e moveu a reta]</p>	<p><b>I2-AI2-GB:</b> O software se abre à uma exploração inicial, uma vez que seu dinamismo possibilita percepções diversas.</p> <p><b>I3-AI2-GB:</b> Um conhecimento prévio generalizado orienta planejamento e estratégias.</p> <p><b>I4-AI2-GB:</b> Os sujeitos mostram conhecer a formalidade matemática, o que favorece o diálogo e tratamento de informações.</p> <p><b>I5-AI2-GB:</b> Percebe-se a atenção no que diz o outro, para melhor exposição do percebido.</p>	



**JOSÉ:** Pois é, aí a gente vê que é dez mesmo.  
**FERNANDO:** Escreve aí sobre a exterior então, é quando b é maior que dez ou menor que menos dez né, porque é essa região mais essa aqui. [conforme abaixo]



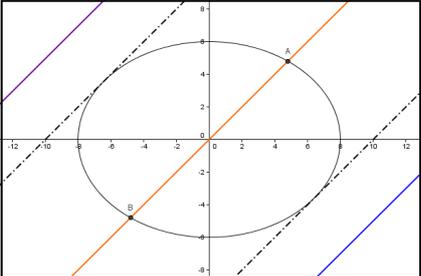
**JOSÉ:** Anhan [concordando, vou escrever]

**I6-AI2-GB:** O dinamismo do software, auxiliado pelo conhecer sobre a interseção da reta com a ordenada auxiliou as percepções.

**CENA 3 – A elaboração e tratamento do item 1.3: “Para a reta  $y=x+b$ , quais os valores de b para: a) a reta ser tangente? b) “ “ “ secante? c) “ “ “ exterior?”**

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>FERNANDO:</b> Acho que já respondemos uma boa pergunta: Para a reta <math>y=x+b</math>, quais os valores de b pra que a reta seja secante, tangente e externa.  <b>JOSÉ:</b> Vou colocar aqui então em forma de itens, sacô? a, b e c.</p>	<p>Secante: A reta será secante quando para todo par de pontos <math>(x,y)</math>, pertencente à elipse, a reta estiver definida <math>(-10 &lt; b &lt; 10)</math>                      Tangente: Através do software, percebemos que a reta será tangente em <math>b=-10</math> ou <math>b=10</math>.                      Exterior: Os pontos exteriores, serão os complementos dos 2 eventos acima <math>(b &gt; 10</math> ou <math>b &lt; -10)</math></p>	<p><b>I7-AI2-GB:</b> A exploração inicial forneceu dados relevantes para criação de perguntas mediante o apreendido.</p>

**CENA 4 – Criação e resposta do item 1.4: “Quais relações podem ser observadas entre o posicionamento das retas externas, tangentes e secantes à elipse?”**

<p><b>FERNANDO:</b> A gente pode falar aqui sobre as relações entre uma reta externa, uma tangente e a secante né.  <b>JOSÉ:</b> A gente sabe que elas tem a mesma inclinação.  <b>FERNANDO:</b> É, boa, podemos colocar também que elas são paralelas e não coincidentes.  <b>JOSÉ:</b> Isso, então como fica a pergunta?  <b>FERNANDO:</b> Pode ser: quais relações podem ser observadas sobre as retas secantes, tangentes e exteriores à elipse?  <b>JOSÉ:</b> Vamo colocar sobre o posicionamento delas.  <b>FERNANDO:</b> Beleza.</p>	<p>Todas são paralelas e não coincidentes</p>	<p><b>I8-AI2-GB:</b> Os sujeitos completam as falas um do outro, e se completam ao compartilhar suas ideias e conhecimentos .</p>
		

CENA 5 – <i>Elaboração e tratamento do item 1.5: “Quais relações podem ser observadas entre o posicionamento das retas externas, tangentes e secantes à elipse?”</i>		
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>JOSÉ:</b> Posiciona a reta aí na origem. Aí tem coisa interessante que podemos falar.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Vamos perguntar quais observações podem ser feitas quando <math>b=0</math>. Vamo ver então. A interseção é igual assim.</p> <p><b>JOSÉ;</b> É a questão da simetria né.</p> <p><b>FERNANDO;</b> A reta é a bissetriz né, dos quadrantes ímpares, então o a é igual a menos b.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Então vou colocar aqui que é bissetriz e que as interseções são simétricas né.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Mas tem que ser simétrica com relação à alguma coisa, então é simétrica com relação a origem.</p>	<p>A reta formada é bissetriz dos quadrantes ímpares, sendo seus pontos de interseção com a elipse, simétricos em relação a elipse [quis se referir à origem], ou seja, <math>P1 = -P2</math>.</p>	<p><b>I9-AI2-GB:</b> A intensão de criar uma pergunta a partir de uma ação feita pode refletir na formação de um perfil investigativo.</p> <p><b>I10-AI2-GB:</b> No intuito de refinar ideias postas, os sujeitos acabam por aprender; um ao argumentar, outro ao escutar, e muitas vezes, na troca de informações.</p>
CENA 6 – <i>Exploração inicial, seguida da elaboração e resposta dos item 1.6 e 1.7: 1.6: “Mudando a direção da reta, afetaria o ponto de tangência?”; 1.7: “Se a reta <math>y = -x</math> fosse adicionada ao estudo, as retas <math>y=x</math> e <math>y=-x</math> poderiam ser assíntotas de alguma figura? Se sim Qual?”</i>		
A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>JOSÉ:</b> Deixa eu ver um negocio rapidim.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Esconde essa reta antes.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Cumé que faz?</p> <p><b>FERNANDO:</b> Pode deletar, melhor.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Eu tava pensando em traçar uma outra reta aqui.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Qual reta você quer traçar?</p> <p><b>JOSÉ:</b> <math>y</math> é igual a menos <math>x</math>, por exemplo.</p> <p><b>FERNANDO:</b> Pronto.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Viu, elas se cruzam na origem, então é como se fosse assíntotas de uma hipérbole sacô?</p> <p><b>FERNANDO:</b> A tá, da mesmo.</p> <p><b>JOSÉ:</b> Aqui dá pra fazer duas perguntas; se os pontos de interseção mudam e se é possível que as retas sejam assíntotas de outra figura.</p> <p><b>FERNANDO:</b> É, pode ser sim.</p>	<p>1.6: Sim</p> <p>1.7: Sim, uma hipérbole.</p>	<p><b>I11-AI2-GB:</b> Os sujeitos abrem o campo previamente intuído; mudaram a inclinação da reta e trabalharam a propriedade de uma figura previamente sabida, mas não apresentada.</p> <p><b>I12-AI2-GB:</b> Um dos sujeitos embarca e auxilia o outro no tratamento da ideia posta.</p>

**ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2 - GRUPO D**

**CENA1-** O envolver-se com o item 1.1: Qual posição relativa entre o gráfico da Elipse e a reta quando  $b = 6$ ?

A interação	Síntese da interação	Interpretação
<p><b>MAURO:</b> Entendi [se refere ao enunciado], vou colocar a equação aqui.</p> <p><b>CAMILA:</b> Beleza, um ponto um então, faz uma reta aí, y é igual x mais seis. [pede a mauro]</p> <p><b>MAURO:</b> Pronto.</p> <p><b>FABIANA:</b> Que que tá pedindo mesmo?</p> <p><b>CAMILA:</b> Pra dizer qual posicionamento da reta com relação à elipse.</p> <p><b>FABIANA:</b> Não entendi, como assim posicionamento?</p> <p><b>MAURO:</b> Não sei, acho que é que a reta é na diagonal, né não?</p> <p><b>CAMILA:</b> Não gente, é as posições relativas que a gente vê lá em GA [Geometria Analítica], aí fala sobre a elipse, mas tem também sobre a circunferência, é dizer se é tangente ou secante.</p> <p><b>MAURO:</b> tangente é quando é seno sobre cosseno, mas secante não lembro.</p> <p><b>FABIANA:</b> Acho que é um sobre seno.</p> <p><b>CAMILA:</b> Secante é um sobre cosseno sô.</p> <p><b>FABIANA:</b> Entendi. Esqueci de tudo isso.</p> <p><b>CAMILA:</b> Mas acho que aqui não é pra dizer isso, as relações de seno e cosseno é pra triângulo retângulo. Acho que aqui é pra pensar nas definições, tangente passa raspando né, por apenas um ponto da figura, e secante passa por dois pontos.</p> <p><b>MAURO:</b> Será? Não sei, aqui por exemplo, quando essa reta passar aqui [desliza o dedo paralelamente ao eixo x], não vai existir tangente porque o cosseno é zero, aí não dá pra dividir por zero, é indeterminado.</p> <p><b>FABIANA:</b> Mas acho que a Camila tá certa Mauro, o que você tá falando são as relações lá do círculo trigonométrico, que usa lá o triângulo retângulo pra definir seno e cosseno. Aqui deve ser isso da reta cortar a figura mesmo.</p> <p><b>CAMILA:</b> Aqui por exemplo, essa reta corta a elipse em dois pontos, então ela é secante né Fabiana.</p> <div data-bbox="438 1585 798 1854" data-label="Figure"> </div> <p><b>FABIANA:</b> É.</p> <p><b>MAURO:</b> Então tá né [aparenta não concordar, mas aceita o que diz as colegas]</p> <p><b>FABIANA:</b> Então vou anotar aqui no Word, a reta é secante porque passa por dois pontos tá.</p> <p><b>CAMILA:</b> Certo.</p>	<p>A reta é secante à elipse pois passa por dois pontos dela.</p>	<p><b>I1-AI2-GD:</b> Um dos sujeitos recorreu à conteúdos já estudados para compreender o enunciado e fazer com que o mesmo seja entendido pelos demais membros do grupo.</p> <p><b>I2-AI2-GD:</b> No diálogo em prol de corrigir o que é visto como incoerente, o sujeito reestuda e proporciona aprendizagem para os membros do grupo.</p> <p><b>I3-AI2-GD:</b> No diálogo, percebesse concordâncias e também discordâncias, estas que foram superadas, pelo respeito e entendimento das argumentações postas.</p>

CENA 2 – O tratamento do item 1.2: <i>Para quais valores de b a reta é externa ao gráfico da elipse.</i>	
A interação	Interpretação
<p><b>MAURO:</b> Vamos para o um ponto dois então.</p> <p><b>CAMILA:</b> Aí ó, eu tinha esquecido, além de secante e tangente tem a externa também, então é isso mesmo, é pra falar dessas posições. [demonstra empolgação]</p> <p><b>FABIANA:</b> É isso mesmo Camila.</p> <p><b>MAURO:</b> Então como a gente vê isso.</p> <p><b>CAMILA:</b> Acho que não é difícil, é só determinar as tangentes igualando as duas equações analiticamente, e depois ver a região que tá antes ou depois da tangente.</p> <p><b>MAURO:</b> Mas quando iguala duas equações, a gente achou o ponto em comum entre elas né, mas e aí.</p> <p><b>FABIANA:</b> Mas mauro, é isso mesmo, igual a Camila falô, tangente passa por só um ponto, se a gente acha esse um ponto quer dizer que é a tangente.</p> <p><b>MAURO:</b> Entendi, então vamo fazer junto aqui pra não ter erro, vai você Camila que tá tudo quentim na sua cabeça [Camila havia estudado GA à menos tempo].</p> <p><b>CAMILA:</b> Então tá, não vai nem precisar igualar, é só no lugar de y colocar x mais b tá, vai ficar x mais b ao quadrado.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1, \quad y = x+b</math> <math display="block">\frac{x^2}{64} + \frac{(x+b)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{x^2+2bx+b^2}{36} = 1</math> </div> <p><b>FABIANA:</b> O mínimo aí vai ser cento e vinte e oito [resolve mentalmente]</p> <p><b>MAURO:</b> Vai ser bem chato fazer essa conta.</p> <p><b>CAMILA:</b> Nada sô vamo continuar, mmc é 128, então fica....</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">2x^2 + 3x^2 + 6bx + 3b^2 = 128</math> <math display="block">5x^2 + 6bx + 3b^2 = 128</math> </div> <p><b>MAURO:</b> Tem que achar o delta, vai ficar em função de b, aí dá pra achar as raízes.</p> <p><b>CAMILA:</b> Anhan [Concorda]. Vai dar dois mil, [pensando], dois mil quinhentos e sessenta.</p> <p><b>FABIANA:</b> Que que cê tá fazendo?</p> <p><b>CAMILA:</b> To vendo aqui, vinte vezes cento e vinte e oito, dá dois mil quinhentos e sessenta.</p> <p><b>FABIANA:</b> A tá, é isso mesmo.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\Delta = 36b^2 - 4 \cdot 5 (3b^2 - 128)</math> <math display="block">\Delta = 36b^2 - 60b^2 - 2560</math> <math display="block">\Delta = -24b^2 - 2560</math> </div> <p><b>CAMILA:</b> Agora, pro delta, pra ter só um ponto de interseção o delta tem que ser zero, se a gente igualar isso aqui a zero, vamo tá achando a tangente, entendeu?</p> <p><b>FABIANA:</b> Sim, sim.</p> <p><b>MAURO:</b> Beleza, iguala aí.</p> <p><b>CAMILA:</b> Vou fazer, mas tá estranho, será se essa conta tá certo, acho que fiz coisa errada.</p>	<p><b>I4-AI2-GD:</b> As dúvidas dos sujeitos em quanto grupo que investiga, foram sanadas em meio diálogo do grupo, sem mediação do pesquisador, o que enfatiza a autonomia dos sujeitos em pensar e <u>argumenta.</u></p> <p><b>I5-AI2-GD:</b> Sem ser solicitado, os sujeitos destinaram funções para os membros do grupo, adotando como critérios a proximidade com <u>GA.</u></p> <p><b>I6-AI2-GD:</b> Ao investigar abertamente e os sujeitos optaram em trabalhar algebricamente, sem utilização do <i>software</i>.</p>

**FABIANA:** Deixa eu olhar [pega a folha com os cálculos], b ao quadrado menos quatro a, aqui vai ficar vinte c, tá certo, c é isso mesmo [3b<sup>2</sup>-128], dá sessenta b ao quadrado menos, é, é [calculando mentalmente], dois mil quinhentos e sessenta, isso mesmo, tá certo Camila. Agora iguala o delta a zero.

**CAMILA:** Então, só que o b vai dá diferente.

**MAURO:** O b vai dá é negativo, aí não pode não né?

**CAMILA:** É, aqui tinha que dá tipo um b ao quadrado é igual a cem.

**FABIANA:** Aqui é cento e vinte e oito, cê tirou o mínimo.

**CAMILA:** Aqui não é cento e vinte e oito, [pensa um pouco], é não é cento e vinte e oito. Você que falou cento e vinte e oito [risos]

**FABIANA:** [risos] foi mal.

**CAMILA:** Tá, deixa eu só ver, o mdc desses dois aqui [64 e 36], quatro né.

**MAURO:** É, o mdc é quatro. Pode usar que o mdc vezes o mmc é o módulo do produto.

**CAMILA:** Isso mesmo Mauro, então vai ficar...

$$\begin{aligned} \text{mdc}(a,b) \cdot \text{mmc}(-a,b) &= |a \cdot b| \\ 4 \cdot \text{mmc}(a,b) &= 64 \cdot 36 \\ \text{mmc}(a,b) &= 64 \cdot 9 = 576 \end{aligned}$$

**CAMILA:** Então, quinhentos e setenta e seis né. Então quinhentos e setenta e seis por trinta e seis, dá...[pensando], dezesseis, dezesseis né?

**MAURO:** É, isso aí, dezesseis vezes trinta e seis é quinhentos e setenta e seis.

**CAMILA:** Tá então aqui vai ser...

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9x^2 + 18bx + 9b^2 &= 576 \\ 25x^2 + 18bx + 9b^2 - 576 &= 0 \end{aligned}$$

**MAURO:** Agora é só lançar na fórmula do delta, vai ser dezoito ao quadrado né, mais, é, é, quatro vezes, vai dá cem vezes, vai ter que aplicar a distributiva.

**CAMILA:** É, vou fazer aqui.

$$\begin{aligned} \Delta &= 324b^2 - 900b^2 + 57600 \\ \Delta &= -576b^2 + 57600 \end{aligned}$$

**FABIANA:** Aí, agora vai dá certo! O delta vai dar maior que zero [empolgada]

**CAMILA:** [risos] O delta menor que zero, ou seja, não tem interseção.

**MAURO:** Aqui é secante [aponto para delta igual a zero]

**CAMILA:** Não, a do meio [aponta para delta maior que zero], a primeira é tangente.

**FABIANA:** E essa daqui é a exterior. Bom de mais viu.

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &: |b| = 10 \rightarrow \text{tangente} \\ \Delta > 0 &: |b| < 10 \rightarrow \text{secante} \\ \Delta < 0 &: |b| > 10 \rightarrow \text{externas} \end{aligned}$$

**MAURO:** Pronto então? E agora, é pra fazer o que?

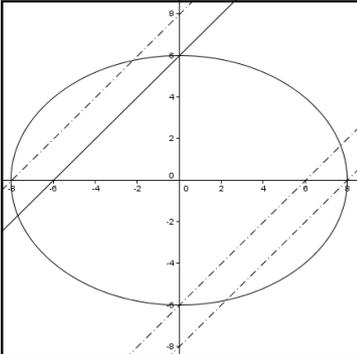
**CENA 3 – O tratamento do item 1.3: “Para quais valores de b, a reta se tornará secante, tangente ou externa à elipse?”**

**17-AI2-GD:** No manifesto de uma vivência em matemática, os sujeitos constituíram uma linha de raciocínio algébrico.

**18-AI2-GD:** Por mais que foi destinado à alguém o controle do lápis, os membros do grupo mostraram-se atentos à resolução; deram dicas e ajudaram à conferir e constatar erros

**19-AI2-GD:** O final de um percurso bem sucedido é manifestado nas expressões de contentamento (empolgação, risos) e falas dos sujeitos.

A interação	Síntese da interação	Interpretação
-------------	----------------------	---------------

<p><b>FABIANA:</b> O um ponto três tá pedindo pra gente criar mais dois itens.  <b>CAMILA:</b> Mas tem que responder o um ponto dois.  <b>FABIANA:</b> Vamo criar um item perguntando sobre as posições, aí a gente já coloca sobre a exterior aqui mesmo, já responde junto entendeu?  <b>MAURO:</b> É melhor mesmo, acho que não tem problema.  <b>PESQUISADOR:</b> Pode ser sim.  <b>CAMILA:</b> Então tá bom. Vamos perguntar quando que a reta é tangente, secante e externa.  <b>FABIANA:</b> Quais os valores de <math>b</math> pra isso acontecer.  <b>CAMILA:</b> Isso, melhor mesmo.</p>	<p>A reta será tangente quando <math>b</math> for igual a 0 (zero), secante quando <math>b</math> estiver entre 10 e -10 e externa quando <math>b</math> for maior 10 ou menor que -10.</p>	<p><b>I10-AI2-GD:</b> A proposta de um sujeito é posta, escutada, incentivada e refinada pelo conjunto, o que propiciou um tratamento mais completo para o que foi constatado.</p>
<p><b>CENA 4 – O tratamento do item 1.4: “Quais os pontos de interseção entre a reta e as extremidades dos eixos da elipse e quais valores de <math>b</math> para que essa interseção aconteça?”.</b></p>		
<p><b>MAURO:</b> E a outra pergunta?  <b>FABIANA:</b> E aí, não sei.  <b>CAMILA:</b> Podemos perguntar sobre a interseção da reta com os eixos né, aqui, quando <math>b</math> é seis, passa aqui no eixo menor.  <b>FABIANA:</b> Pra passar no maior aqui, acho que é só arrastar aqui paralelo, acho que vai passar em menos oito. [simula o movimento com o dedo]  <b>CAMILA:</b> É isso mesmo, olha aqui, é só fazer pra <math>b</math> igual a oito, quando <math>x</math> é igual a zero, <math>y</math> é igual a oito, e pra <math>y</math> igual a zero <math>x</math> é menos oito. [fazendo mentalmente]  <b>MAURO:</b> É, é isso mesmo, vai ser <math>y</math> é igual a menos <math>x</math>.  <b>CAMILA:</b> É, mas acho que nem sempre, porque, se <math>b</math> é zero, vai dar <math>x</math> igual a <math>y</math>.  <b>FABIANA:</b> E desse lado aqui [aponto para os valores positivos do eixo das abcissas] se trazer paralela, vai ficar o <math>x</math> positivo e o <math>y</math> negativo, aí vai ser menos <math>y</math> igual a <math>x</math>.  <b>MAURO:</b> Não entendi.  <b>CAMILA:</b> É por causa que esse eixo aqui [eixo das ordenadas] tá sendo o eixo de simetria, então, os valores de <math>x</math> e <math>y</math> aqui em baixo vão ser simétricos, entendeu? Se lá <math>x</math> é menos seis aqui vai ser mais seis.</p>  <p><b>MAURO:</b> Beleza! Entendi agora! Então vamos perguntar quais os pontos de interseção entre a reta e as pontas aqui.  <b>CAMILA:</b> As extremidades dos eixos.  <b>MAURO:</b> Isso.  <b>FABIANA:</b> Acho que podemos completar a pergunta com os valores de <math>b</math> né, quais que é né, os valores de <math>b</math> pra passar nesses pontos.  <b>CAMILA:</b> É, realmente, a gente já consegue ver as duas respostas porque os valores de <math>b</math> é onde a reta corta <math>y</math>.</p>	<p>Quando <math>b=6</math> a reta corta a extremidade do eixo menor no ponto <math>(0,6)</math>. A reta corta a outra extremidade do eixo menor em <math>(0, -6)</math> quando <math>b</math> é <math>-6</math>.</p> <p>A reta corta as extremidades do eixo maior quando <math>b</math> é igual a 8 e <math>-8</math>, nos pontos <math>(-8, 0)</math> e <math>(8, 0)</math> respectivamente.</p>	<p><b>I11-AI2-GD:</b> O software foi utilizado com fonte de componentes visuais, que deram origem à conjecturas.</p> <p><b>I12-AI2-GD:</b> As conjecturas, mesmo levantadas em ambiente de GD, não foram testadas e validadas pelo dinamismo do software, mas sim pelo conhecimento geométrico dos sujeitos.</p> <p><b>I13-AI2-GD:</b> A mediação feita por membros do grupo leva a propiciar aprendizagem significativa, uma vez que, argumentou-se com conhecimentos já estudados.</p>

#### 6.4 Transcendendo reflexivamente as cenas: em busca de suportes para compreensões

O processo aqui intencionado consiste na imersão ao que foi descrito acerca do empenho dos sujeitos sobre as atividades. Mediante análise dos mesmos, buscamos inaugurar horizontes para a compreensão geral do fenômeno. Direcionamos olhares cautelosos e reflexivos aos manifestos das cenas e às interpretações dos mesmos, atentando aos seus significados e suas correlações.

Uma vez feito processo de *suspensão* evidenciado nos quadros anteriores, continuamos realizando a *epoché* ao analisar as cenas e buscar grupos de convergências, estes, que ao se relacionarem ou divergirem podem trazer a tona um sentido da estrutura do fenômeno investigado, uma vez que suas características e bases sustentadoras podem ser manifestadas e gradualmente desveladas em nossa ação consciente de olhar reflexivamente o vivido.

Argumenta Bicudo (2011, p. 23) que a interrogação é o ponto crucial da pesquisa, a ela devemos constantemente ir e vir, sempre nos perguntando “o que a interrogação interroga”. “O movimento efetuado para dar conta desta busca auxilia o focar o *quê*, contribuindo para que pensemos reflexivamente no *como* proceder para corresponder ao indagado”. Munidos deste pensar, colocamos em crise constante nossa interrogação, e por fim, julgamos que ela interroga movimentos colaborativos, exploratórios, investigativos e epistemológicos em grupos distintos de sujeitos. Ao adentrarmos nisto que a interrogação interroga, vimos emergir *unidades nucleares* “onde os significados atribuídos pelos sujeitos, no momento original da experiência vivida, expressam o todo percebido num foco particular que o pesquisador está considerando” (DETONI; PAULO, 2011, p. 102).

No ir e vir aos quadros de transcrições, a todo tempo atentos a nossa interrogação, foram emergindo as *unidades nucleares*, para as quais ideias vistas como convergentes a elas se dirigiam. Tais ideias já foram articuladas ao lançarmos nossas interpretações dos manifestos das cenas, portanto, buscamos convergir às interpretações feitas às unidades nucleares. A busca por convergências acarretou em um processo rico e complexo, pois, uma mesma interpretação, além de ligar-se a outras interpretações pode relacionar-se a diferentes *unidades nucleares*. Este contexto caracterizado por um emaranhado de significados forma uma estrutura de sentidos a qual nos empenhamos em viver reflexivamente para compreendê-la.

Para exemplificar o efetuado, intencionamos a reflexão do que se mostra em três interpretações estruturadas na percepção e estudo do vivido, lembrando que algo que se mostra nestas interpretações, é derivado de algo que se mostrou no discurso descrito nas cenas:

Ao trazer a I1-AE1-GA à luz de nossa interrogação, percebemos sentidos que sugerem:

- ✓ *Utilização de conhecimentos prévios para tratamento de informações;*
- ✓ *Manifestação de autonomia no processo de busca por objetivos;*
- ✓ *Utilização do dinamismo do software de GD.*
- ✓ *Iniciativas exploratórias para compreensão do cenário posto.*

Interrogando a I3-AE4-GD, concebemos como sentidos contemplados:

- ✓ *Indicações de companheirismo e respeito mútuo;*
- ✓ *Manifestos de conhecimentos individuais compartilhados para/com o outro.*
- ✓ *Manifestos que sugestionam o aprender com o outro.*

Ao lançarmo-nos sobre a I3-AE2-GA, auxiliados e norteados pela questão diretriz, entendemos como sentidos desvelados desta interpretação:

- ✓ *Utilização de conhecimentos prévios para tratamento de informações;*
- ✓ *Indicações de um aprender significativamente: Aprendizagem Significativa Representacional;*
- ✓ *Indicações de um modo de aprender significativamente: por recepção ou descoberta;*
- ✓ *Utilização do dinamismo do software de GD;*
- ✓ *Indícios de novos modos de perceber e aprender Geometria.*

Buscamos refletir cada interpretação em busca de sentidos que se manifestam e que se direcionam ao fenômeno investigado, nos permitindo melhor argumentar o *como se dá o envolvimento de professores e futuros professores de Matemática, com uma proposta que intui gerar Aprendizagem Significativa de conceitos de Geometria Analítica Plana, mediada por atividades exploratórias e investigativas em um ambiente colaborativo de Geometria Dinâmica.*

Na busca de uma articulação mais generalizada capazes de aglutinar os sentidos aqui apontados e outros, sugestionamos quatro unidades nucleares às quais direcionamos a seguir, as 250 interpretações do que se manifestou. Segue quadro representativo da rede propiciada por tais direcionamentos.

Interpretações						Sentido desvelado	Unidade Nuclear
14-AE1-GA 17-AE1-GA 19-AE1-GA 13-AE1-GB 14-AE1-GB 18-AE1-GB 112-AE1-GB 16-AE1-GC 17-AE1-GC 14-AE2-GA 16-AE2-GA	17-AE2-GA 18-AE2-GA 112-AE2-GA 13-AE2-GC 14-AE2-GC 17-AE2-GC 18-AE2-GC 13-AE2-GD 15-AE2-GD 12-AE3-GA 13-AE3-GA	16-AE3-GA 14-AE3-GC 17-AE3-GC 18-AE3-GD 19-AE3-GD 110-AE3-GD 111-AE3-GD 15-AE4-GA 15-AE4-GC 18-AE4-GC 19-AE4-GC	111-AE4-GC 114-AE4-GC 11-AE4-GD 13-AE4-GD 16-AE4-GD 111-AE4-GD 113-AE4-GD 19-AE4-GA 111-AE1-GA 18-AE4-GC 113-AE1-GB	114-AE1-GB 11-AE1-GC 15-AE1-GC 119-AE1-GC 12-AE2-GA 18-AE2-GA 116-AE2-GA 14-AE2-GB 15-AE2-GB 18-AE2-GB 110-AE2-GB	112-AE2-GB 113-AE2-GB 12-AE2-GD 13-AE2-GD 14-AE2-GD 18-AE2-GD 19-AE2-GD 110-AE2-GD 113-AE2-GD	<i>Manifestações de divergências, concordâncias, companheirismo e respeito mútuo.</i>	<b>Manifestos característicos do empenho dos sujeitos enquanto membro de um grupo colaborativo</b>
19-AE1-GA 111-AE1-GA 14-AE1-GB 17-AE1-GB 19-AE1-GB 111-AE1-GB 12-AE1-GC 17-AE1-GC 17-AE2-GA 10-AE2-GA	14-AE2-GC 19-AE2-GC 13-AE2-GD 15-AE2-GD 16-AE2-GD 111-AE2-GD 13-AE3-GA 14-AE3-GA 17-AE3-GA 17-AE3-GA 12-AE3-GC	11-AE3-GD 18-AE3-GD 19-AE3-GD 110-AE3-GD 111-AE3-GD 13-AE4-GA 14-AE4-GA 14-AE4-GA 17-AE4-GA 18-AE4-GA 18-AE4-GC	19-AE4-GC 113-AE4-GC 11-AE4-GD 14-AE4-GD 113-AE4-GD 115-AE1-GA 120-AE1-GA 113-AE1-GB 114-AE1-GB 111-AE1-GC	114-AE1-GC 117-AE1-GC 119-AE1-GC 18-AE2-GA 110-AE2-GA 110-AE2-GA 13-AE2-GB 14-AE2-GB 15-AE2-GB 18-AE2-GB 110-AE2-GB	112-AE2-GB 11-AE2-GD 12-AE2-GD 13-AE2-GD 14-AE2-GD 18-AE2-GD 19-AE2-GD 15-AE2-GD 113-AE2-GD	<i>Manifestos de conhecimentos individuais compartilhados para/com o outro.</i>	
17-AE1-GA 13-AE1-GB	111-AE1-GB 18-AE1-GC	19-AE2-GD				<i>Manifestação de gestos e expressões corporais na mediação do diálogo colaborativo.</i>	
14-AE1-GB 17-AE1-GB 19-AE1-GC 14-AE2-GA 17-AE2-GA 18-AE2-GA 10-AE2-GA 14-AE2-GC	19-AE2-GC 13-AE2-GD 15-AE2-GD 111-AE2-GD 12-AE3-GC 17-AE3-GC 19-AE3-GD 110-AE3-GD 17-AE4-GA	18-AE4-GA 18-AE4-GC 19-AE4-GC 11-AE4-GD 13-AE4-GD 14-AE4-GD 16-AE4-GD 113-AE4-GD 115-AE1-GA	123-AE1-GA 113-AE1-GB 114-AE1-GB 15-AE1-GC 111-AE1-GC 114-AE1-GC 117-AE1-GC 119-AE1-GC 18-AE2-GA	14-AE2-GB 15-AE2-GB 18-AE2-GB 110-AE2-GB 112-AE2-GB 11-AE2-GD 12-AE2-GD 13-AE2-GD 14-AE2-GD	18-AE2-GD 19-AE2-GD 110-AE2-GD 113-AE2-GD	<i>Manifestos que sugestionam o aprender com o outro.</i>	
11-AE1-GA 13-AE1-GA 11-AE1-GB 12-AE1-GB 15-AE1-GB 14-AE1-GC 15-AE1-GC 11-AE2-GA 17-AE2-GA 18-AE2-GA 19-AE2-GA 18-AE2-GC 111-AE2-GC 14-AE2-GD 17-AE2-GD	11-AE3-GA 12-AE3-GD 16-AE3-GD 11-AE4-GA 16-AE4-GA 18-AE4-GA 12-AE4-GC 13-AE4-GC 110-AE4-GC 112-AE4-GC 113-AE4-GC 119-AE4-GC 12-AE4-GD 14-AE4-GD 15-AE4-GD	19-AE4-GD 112-AE4-GD 16-AE3-GD 12-AE1-GA 13-AE1-GA 14-AE1-GA 15-AE1-GA 16-AE1-GA 17-AE1-GA 19-AE1-GA 110-AE1-GA 113-AE1-GA 114-AE1-GA 116-AE1-GA 119-AE1-GA 120-AE1-GA	122-AE1-GA 123-AE1-GA 11-AE1-GB 11-AE1-GB 12-AE1-GB 13-AE1-GB 16-AE1-GB 19-AE1-GB 111-AE1-GB 115-AE1-GB 116-AE1-GB 117-AE1-GB 120-AE1-GB 122-AE1-GB 12-AE1-GC 13-AE1-GC	16-AE1-GC 17-AE1-GC 18-AE1-GC 110-AE1-GC 111-AE1-GC 112-AE1-GC 115-AE1-GC 118-AE1-GC 119-AE1-GC 120-AE1-GC 121-AE1-GC 122-AE1-GC 123-AE1-GC 14-AE2-GA 15-AE2-GA	17-AE2-GA 111-AE2-GA 112-AE2-GA 113-AE2-GA 115-AE2-GA 11-AE2-GB 13-AE2-GB 17-AE2-GB 19-AE2-GB 111-AE2-GB 15-AE2-GD 16-AE2-GD 18-AE2-GD 110-AE2-GD	<i>Iniciativas exploratórias e investigativas para questionamento, compreensão e tratamento de informações.</i>	<b>Manifestações que indicam a postura de sujeitos que exploram e investigam</b>
13-AE1-GA 11-AE1-GB 19-AE1-GB 13-AE1-GC 11-AE2-GA 12-AE2-GC 16-AE2-GC 17-AE2-GC 10-AE2-GC 14-AE2-GD 14-AE3-GA	15-AE3-GC 12-AE3-GD 14-AE3-GD 16-AE3-GD 13-AE4-GC 18-AE4-GC 110-AE4-GC 119-AE4-GC 12-AE4-GD 14-AE4-GD 19-AE4-GD	112-AE4-GD 13-AE1-GA 14-AE1-GA 110-AE1-GA 12-AE1-GA 113-AE1-GA 114-AE1-GA 115-AE1-GA 116-AE1-GA 117-AE1-GA 118-AE1-GA 119-AE1-GA 120-AE1-GA	123-AE1-GA 11-AE1-GB 13-AE1-GB 16-AE1-GB 19-AE1-GB 116-AE1-GB 122-AE1-GB 11-AE1-GC 13-AE1-GC 16-AE1-GC 17-AE1-GC 11-AE2-GA 115-AE2-GA 11-AE2-GB	112-AE1-GC 115-AE1-GC 119-AE1-GC 121-AE1-GC 123-AE1-GC 14-AE2-GA 17-AE2-GA 111-AE2-GA 115-AE2-GA 11-AE2-GB	13-AE2-GB 17-AE2-GB 19-AE2-GB 111-AE2-GB 18-AE2-GD 110-AE2-GD 112-AE2-GD	<i>Manifestos de planejamento, formulação de conjecturas, e do testar para validar.</i>	
110-AE1-GA 113-AE1-GB 112-AE2-GD	12-AE3-GC 16-AE3-GC 17-AE3-GC	11-AE4-GA 114-AE4-GD 11-AE1-GA	18-AE1-GA 112-AE1-GA 4-AE1-GB	14-AE1-GC 122-AE1-GC 113-AE2-GA	114-AE2-GA 19-AE2-GB 111-AE2-GB	<i>Manifestos direcionados ao aceite e familiarização com o potencial de atividades exploratórias e investigativas.</i>	
11-AE1-GA 12-AE1-GA 13-AE1-GA 13-AE1-GC 11-AE2-GA 12-AE2-GC 11-AE2-GC 111-AE2-GC 14-AE2-GD 13-AE3-GA 11-AE3-GD	11-AE4-GA 13-AE4-GC 112-AE4-GC 12-AE4-GD 15-AE4-GD 112-AE4-GD 12-AE1-GA 17-AE1-GA 14-AE1-GA 17-AE1-GA 19-AE1-GA	110-AE1-GA 114-AE1-GA 119-AE1-GA 123-AE1-GA 11-AE1-GB 12-AE1-GB 13-AE1-GB 16-AE1-GC 13-AE1-GB 110-AE1-GC 111-AE1-GC 112-AE1-GC	116-AE1-GB 120-AE1-GB 122-AE1-GB 12-AE1-GC 13-AE1-GC 16-AE1-GC 17-AE1-GC 110-AE1-GC 111-AE1-GC 112-AE1-GC	118-AE1-GC 120-AE1-GC 121-AE1-GC 122-AE1-GC 123-AE1-GC 14-AE2-GA 15-AE2-GA 17-AE2-GA 112-AE2-GA 113-AE2-GA	115-AE2-GA 11-AE2-GB 17-AE2-GB 19-AE2-GB 111-AE2-GB 14-AE2-GD 16-AE2-GD 17-AE2-GD 110-AE2-GD 112-AE2-GD	<i>Manifestação de autonomia no processo de busca por objetivos.</i>	
15-AE1-GA 16-AE1-GA 17-AE1-GA 19-AE1-GA 17-AE1-GB 15-AE1-GC	15-AE2-GA 12-AE2-GC 110-AE2-GC 15-AE3-GC 14-AE3-GD 15-AE4-GC	110-AE4-GC 112-AE4-GC 11-AE4-GD 15-AE4-GD 18-AE4-GD 112-AE4-GD	13-AE1-GA 14-AE1-GA 114-AE1-GA 117-AE1-GA 118-AE1-GA 122-AE1-GA	123-AE1-GA 19-AE1-GB 111-AE1-GB 119-AE1-GB 18-AE1-GC 115-AE1-GC	119-AE1-GC 11-AE2-GA 13-AE2-GA 113-AE2-GA 111-AE2-GD	<i>Utilização do espaço visual do software para estabelecer relações e para facilitar o diálogo.</i>	<b>Aplicação de pensamentos em Geometria Dinâmica (GD) e do Software de GD</b>
19-AE1-GB 11-AE1-GC	13-AE2-GA 11-AE2-GC	112-AE2-GC 11-AE2-GD	14-AE3-GA 11-AE3-GC	12-AE3-GD 11-AE4-GC	117-AE1-GA	<i>Indícios de novos modos de perceber e significar Geometria.</i>	
11-AE1-GA 16-AE1-GA 17-AE1-GA 11-AE1-GB 11-AE1-GC 13-AE1-GC 15-AE1-GC 112-AE1-GC 11-AE2-GA	15-AE2-GA 11-AE2-GC 13-AE2-GC 110-AE2-GC 111-AE2-GC 14-AE2-GD 11-AE3-GA 11-AE3-GC 15-AE3-GD	11-AE4-GA 12-AE4-GA 10-AE4-GC 112-AE4-GC 11-AE4-GD 15-AE4-GD 18-AE4-GD 19-AE4-GD	112-AE4-GD 12-AE1-GA 13-AE1-GA 117-AE1-GA 116-AE1-GA 121-AE1-GA 122-AE1-GA 13-AE1-GB 19-AE1-GB	111-AE1-GB 13-AE1-GC 116-AE1-GC 118-AE1-GC 123-AE1-GC 14-AE2-GA 16-AE2-GA 17-AE2-GA	110-AE2-GA 111-AE2-GA 112-AE2-GB 16-AE2-GB 19-AE2-GB 111-AE2-GD	<i>Utilização da GD e do software de GD para explorar e investigar.</i>	
110-AE1-GA 16-AE1-GB 14-AE1-GC	18-AE1-GC 19-AE1-GC 117-AE1-GC	118-AE1-GC 111-AE2-GC 19-AE2-GD	114-AE4-GD 18-AE1-GA 14-AE1-GB	19-AE1-GB 121-AE1-GB 14-AE1-GC	16-AE2-GA 111-AE2-GA	<i>Manifestos direcionados ao aceite e familiarização com softwares de GD.</i>	

I1-AE1-GA I3-AE1-GA I8-AE1-GA I2-AE1-GB I7-AE1-GB I10-AE1-GB I5-AE1-GC I10-AE1-GC I1-AE2-GA I8-AE2-GA I11-AE2-GA	I1-AE2-GC I2-AE2-GC I13-AE2-GC I2-AE2-GD I8-AE2-GD I10-AE2-GD I5-AE3-GA I1-AE3-GC I2-AE3-GC I3-AE3-GD I7-AE3-GD	I9-AE3-GD I1-AE4-GA I4-AE4-GA I6-AE4-GA I9-AE4-GA I4-AE4-GC I7-AE4-GC I10-AE4-GC I13-AE4-GC I1-AE4-GD I2-AE4-GD	I8-AE4-GD I9-AE4-GD I12-AE4-GD I16-AE4-GA I18-AE4-GA I21-AE4-GC I22-AE4-GC I11-AE1-GB I5-AE1-GB I8-AE1-GB I10-AE1-GB	I12-AE1-GB I17-AE1-GB I18-AE1-GB I22-AE1-GB I7-AE1-GC I10-AE1-GC I13-AE1-GC I15-AE1-GC I21-AE1-GC I2-AE2-GA I10-AE2-GA	I11-AE2-GA I12-AE2-GA I3-AE2-GB I4-AE2-GB I6-AE2-GB I11-AE2-GB I1-AE2-GD I6-AE2-GD I7-AE2-GD I12-AE2-GD	<i>Utilização de conhecimentos prévios (em especial os relacionados a Geometria Analítica Plana) para tratamento de informações.</i>	<b>Manifestos que sugerem a presença de aspectos tais como os da Teoria da Aprendizagem Significativa</b>
I10-AE1-GB	I6-AE4-GA	I7-AE1-GB	I10-AE1-GB	I9-AE2-GA	I3-AE2-GB	<i>Utilização ou aplicação de uma organização prévia.</i>	
I10-AE1-GA	I13-AE1-GB	I13-AE2-GD	I9-AE4-GA	I4-AE4-GC	I8-AE1-GA	<i>Manifestos possíveis sobre a potencialidade da TAS voltada ao ensino e à aprendizagem de Matemática.</i>	
I1-AE1-GC I5-AE1-GC I3-AE2-GA	I8-AE2-GA I1-AE2-GC I1-AE2-GD	I4-AE3-GA I1-AE3-GC I1-AE3-GD	I1-AE4-GC I4-AE4-GC I1-AE2-GA	I13-AE2-GD		<i>Indicações de um aprender significativamente: Aprendizagem Significativa Representacional.</i>	
I11-AE1-GA I12-AE1-GB	I14-AE1-GB I14-AE1-GC	I11-AE2-GA I13-AE2-GC	I13-AE4-GC			<i>Indicações de um aprender significativamente: Aprendizagem Significativa de Conceito.</i>	
I3-AE1-GA I4-AE1-GB I2-AE1-GC I9-AE1-GC	I10-AE1-GC I13-AE1-GC I6-AE2-GC I9-AE4-GA	I2-AE4-GC I12-AE4-GC I1-AE4-GD I7-AE4-GD	I12-AE4-GD I7-AE1-GA I21-AE1-GA I1-AE1-GB	I17-AE1-GB I6-AE1-GC I20-AE1-GC I9-AE2-GA	I9-AE2-GB I13-AE2-GD	<i>Indicações de um aprender significativamente: Aprendizagem Significativa de Proposição.</i>	
I12-AE1-GB I14-AE1-GB I2-AE1-GC I4-AE1-GC	I9-AE1-GC I10-AE1-GC I13-AE1-GC I14-AE1-GC	I6-AE2-GC I13-AE2-GC I12-AE4-GC I13-AE4-GC	I7-AE4-GD I12-AE4-GD I7-AE1-GA I21-AE1-GA	I1-AE1-GB I17-AE1-GB I6-AE1-GC I20-AE1-GC	I9-AE2-GA I9-AE2-GB	<i>Indicações de um modo de aprender significativamente: por recepção.</i>	
I3-AE1-GA I11-AE1-GA I4-AE1-GB	I1-AE1-GC I4-AE1-GC I13-AE1-GC	I14-AE1-GC I3-AE2-GA I8-AE2-GA	I11-AE2-GA I1-AE2-GC I4-AE3-GA	I1-AE3-GD I1-AE4-GC I2-AE4-GC	I1-AE4-GD	<i>Indicações de um modo de aprender significativamente: por descoberta.</i>	

As unidades nucleares que o movimento interpretativo nos legou, acabaram por dar convergências que vemos serem possíveis de nos dar vislumbre da estrutura do fenômeno focado. Desse modo, consideramos que, a partir dessas unidades, podemos articular argumentações que mostram essa estrutura segundo os vieses interpretativos. Assim, cada unidade nuclear será a partida para mostrarmos compreensões mais articuladas neste texto, à pergunta geradora da pesquisa.

Com isto, apresentamos a seguir, nossas asserções mediante análise das unidades aqui mencionadas.

## 6.5 Um olhar analítico às unidades nucleares a busca por desdobramentos com potenciais de desvelar o interrogado

Efetuamos nova *epoché* no processo de retomada analítica e reflexiva às unidades juntamente com as cenas. Procuramos articular relações, apresentando um discurso do vivido subsidiado por nossas análises interpretativas acerca das convergências, que se direcionam a elementos vistos por nós como essenciais para conceber uma significação abrangente do que propomos investigar.

As articulações que seguem, lançam olhares distintos e pontuais ao que está embrenhado em uma rede extensa e complexa de significados.

### ***Manifestos característicos do empenho dos sujeitos enquanto membro de um grupo colaborativo***

Direcionar olhares reflexivos às cenas, intencionando esta unidade nuclear, tornou possível adentrarmos no que julgamos serem concepções ligadas ao contexto colaborativo e à aprendizagem oportunizada no mesmo.

Entendemos que a colaboração se fez presente em sua característica fundamental; a coparticipação de todos em função de intenções e objetivos comuns. O empenho sobre as atividades se deu na complexidade do viver para/com o outro, este, que é intenso e ativo ao se pôr e transformar as coisas e os cenários que às contém. Os sujeitos levaram aos grupos suas totalidades; no modo de agir e expressar. A complexidade aqui, não se remete a algo ruim, mas sim, na amplitude de possibilidades que se entrelaçam no envolvimento do eu com eu mesmo, do eu como o outro, e do eu no outro.

A diversidade de experiências previamente vividas e de saberes apreendidos, resultou em divergências, devido descompasso entre ideias e argumentações. Concebemos isto como aspecto pertencente ao cenário colaborativo, uma vez que, é comum em ambientes, em que vivem dois ou mais, que o entendimento comum se realiza na vivência das incompreensões. Nas divergências de ideias, o viver colaborativamente se manifestou; os sujeitos empenharam em discutir e esclarecer com companheirismo as intenções à busca por um consenso, que propiciou uma compreensão e aceite da coerência ou não do indagado.

Em manifestos registrados nos encontros presenciais, relacionados à busca por ser entendido, percebemos a sincronia entre linguagem falada e linguagem gesticulada, usou-se das mesmas constantemente, para apresentar conjecturas e relações diversas. Tal sincronia ganhou auxílio de expressões faciais de grande potencial indicador de: aceite, entendimento e compreensão. Entendemos que na maioria dos grupos, o diálogo foi satisfatório e suficiente para delineamento das atividades. Indagamos isto, mediante constatação da pouca interferência do pesquisador durante as interações; as dificuldades e incoerências foram sanadas pelos ricos, concisos e objetivos diálogos dos grupos.

Os espaços pedidos para efetuar movimentos e apresentar articulações foram concedidos, as ideias dadas como incoerentes foram escutadas e discutidas sem intencionalidade de inferioriza-las, em muitos casos, partiu-se delas percepções e

compreensões diversas. Tornou-se constante o incentivo ao continuar; de ação em ação deferida, havia *a priori*, o convite feito por um ou mais à execução de movimentos e reflexões acerca das implicações dos mesmos, após percepção individual, o conjunto era chamado pelo companheiro a comungar dessa percepção.

As interações propiciaram redes de saberes compartilhadas, estas que se completaram e enriqueceram a totalidade de conhecimentos de cada sujeito. Inferências individuais mostraram-se potencialmente relevantes para o desenvolvimento da atividade, outras, no entanto, não tiveram o mesmo efeito, porém, quando colocadas em um contexto coletivo, que avaliou sua: veracidade, viabilidade, possíveis falhas, modos de aplicação, receberam respaldo e complementos práticos e/ou teóricos que validaram, ou não, sua aplicação no tratamento da atividade.

O que de mais significativo percebemos ao adentrar as cenas, foi à constatação de nosso objetivo de propiciar um ambiente no qual a aprendizagem se daria no âmbito da colaboração. Os conhecimentos individuais tornaram-se conhecimentos do grupo ao serem compartilhados, o que caracteriza o *aprender com o outro*. Isso deu muitas vezes na tentativa de explicar uma ideia posta; os sujeitos, à medida que argumentavam suas ideias estavam reestudando e resignificando o previamente sabido, os demais que escutavam, apreendiam o novo mediante estrutura do argumento dado.

A aprendizagem tomou direcionamentos mais significativos, uma vez que ultrapassaram a compreensão de objetos e conceitos do conteúdo aplicado; nosso envolvimento crítico-reflexivo com cenas articuladas nas seis atividades, nos propiciou a interpretação de um desenvolvimento gradual da argumentação, do respeito e do saber escutar; os sujeitos mostraram-se cada vez mais íntimos ao grupo, mostrando confiança no outro ao solicitar apoio ou ajuda, mostrando atenção e compreensão às dificuldades de cada membro. Enfim, julgamos que o trabalho colaborativo permite vislumbrar a possível aprendizagem de habilidades, que agregou aos sujeitos um perfil do *ser colaborativo*.

A mediação por parte do pesquisador também teve uma intenção colaborativa: esteve todo tempo ali, embrenhado em viver significativamente os momentos, e observar os sujeitos, porém não tão próximo ao ponto de causar desconforto aos mesmos. Quando percebido certo entrave ou desconforto com o desdobramento da atividade, foi mediado o rompimento de barreiras postas pela

proposta da atividade ou pelo próprio sujeito. Esta mediação é vista como colaborativa, pois não foram dadas informações incisivamente, foi estimulada a participação conjunta no empenho sobre linhas de raciocínio criadas. Esta iniciativa objetivou creditar os méritos das dificuldades rompidas ou amenizadas aos sujeitos.

Os manifestos que sugestionaram nossa compreensão do aspecto colaborativo presente no estudo de campo, são fontes que se abrem a outras compreensões e/ou ao reforço desta. Como exemplo, não apontamos como verdade absoluta ou única verdade a compreensão de que a aprendizagem quando propiciada em ambientes colaborativos (assim como proposto aqui), é rica em significados que extrapolam a mera concepção de conteúdos; no entanto, não é melhor ou pior que uma aprendizagem ministrada sob aspectos individuais; tratam-se de opções distintas, que podem ser somadas e convergidas para melhor tratar o ensino e a aprendizagem.

Ao dialogar sobre como se deu a colaboração de nossos sujeitos, esperamos fechar este tópico com subsídios para compreensão do *como se dá a colaboração em grupos de professores e futuros professores* proposta na questão diretriz. Desse modo, em resumo, observamos que a vivência colaborativa é um todo que a caracteriza, mas não a define. Compreendemos manifestar partes deste todo, como: divergências e concordâncias; administração de um bom diálogo; respeito e atenção às ideias do outro, o aprender com/em conjunto. Compreendemos também, que toda esta vivência tornou-se parte dos sujeitos, e ninguém pode tira-la deles, o que colabora para suas constituições, sempre mutáveis, enquanto seres colaborativos.

### ***Manifestações que indicam a postura de sujeitos que exploram e investigam***

Novamente, adentramos as cenas, agora, para encontrar suportes para compreensão de como se deu as explorações e investigações sugeridas pelas atividades. Assim, buscamos interpretações provenientes dos manifestos que entendemos serem relacionáveis a estes temas.

O ambiente colaborativo mostrou-se propício à aplicação das atividades; as explorações e investigações, bem como os resultados das mesmas, foram subsidiadas e enriquecidas pelos diversos saberes e atitudes manifestadas.

Iniciativas individuais foram acompanhadas e questionadas quanto sua aplicabilidade. Na falta do outro que questiona, tal iniciativa, quando incoerente, poderia ser mantida, desta forma prejudicando o desenvolvimento da atividade.

Nas atividades exploratórias, objetivamos uma aprendizagem “timidamente” guiada, isto porque procuramos apontar pequenos começos, aos quais os sujeitos deveriam praticá-los para sozinhos alcançarem os objetivos. Os sujeitos, mesmo não familiarizados com a proposta de atividades exploratórias, não encontraram dificuldades, cada ação sugerida propiciou aberturas as quais os mesmos conseguiram adentrar e conceber significados, vistos como relevantes para o alcance do objetivo posto como final; a conceituação das secções cônicas. Mesmo sendo orientada uma forma de mover, os sujeitos tomaram iniciativas autônomas em vislumbrar o *como mover*. As percepções e o modo como proceder com as mesmas, também são vistos por nós como autonomia de um sujeito que explora e investiga.

Ao verem objetos estáticos postos pelas atividades, os sujeitos apresentaram aos mesmos o dinamismo; partiram de movimentos já intuindo a possível relevância destes para o desenvolvimento da atividade, já que, tais movimentos condizem com o explorar o que se tinha, para perceber algo *a priori* não visto.

No que diz respeito às atividades investigativas, foram apresentadas com um enunciado amplo, porém a estrutura que indicava o que fazer e muitas vezes o como fazer, foi limitada. Esta pouca estrutura dificultou a percepção dos sujeitos do como proceder, propiciou uma abertura pela qual alguns deles demonstraram não saber a que se apoiar para melhor trabalhar a atividade. A falta de envolvimento com atividades do tipo gerou dificuldade de dialogar, desenvolver e estruturar as informações percebidas.

No desenvolvimento das atividades investigativas, percebemos atitudes iniciais de sujeitos, que podem ser vistas como exploratórias. Isto nos evidencia a possibilidade do paralelo entre explorar e investigar. Antes de criar interrogações norteadoras, ou empenharem-se às previamente postas, alguns grupos optaram em *a priori* conhecer e mapiar o cenário investigativo dado, para isto, intencionaram explorações iniciais que resultaram em importantes percepções para o empenho na investigação sugerida. Assim, a exploração inicial embasou a totalidade de ações e compreensões no decorrer da investigação destes grupos.

Para explorar, os sujeitos deferiram movimentos cautelosos para perceber relações, e movimentos rápidos e desarticulados para validar o percebido.

Entendemos a preocupação existente em confirmar uma conjectura, importante aspecto do contexto investigativo, pois, assim como ocorrido aqui, podem-se aprender novos conhecimentos, alguns importantes ao desfecho da investigação, e outros conhecimentos não direcionados ao mesmo, porém, também importantes.

O processo investigativo dos grupos, depois de superada a dificuldade de adaptação inicial, foi rico em planejamento, este que foi responsável por dar a estrutura que os enunciados das atividades investigativas não deram; os sujeitos perceberam a relevância da criação de questões norteadoras, tais, que convergiram informações ao que os membros do grupo julgaram importante conhecer. As estruturas geradas pelos grupos se coincidiram quanto à necessidade de levantamento e organização de questões, no entanto, divergiram-se: estas questões levantadas, as ferramentas e métodos para tratamento das mesmas, os conhecimentos aplicados e as respostas dadas a estas perguntas.

Durante o desenvolvimento das atividades, alguns sujeitos manifestaram o deslumbre com as mesmas e suas propostas. Apresentaram indagações que apontam a potencialidade de atividades exploratórias e investigativas para o ensino e a aprendizagem de matemática. Em especial, destacaram a intenção de deixar com que seus alunos concebam conhecimentos diversos, descobrindo relações que os levem a tais conhecimentos, sem que os mesmos sejam previamente postos na lousa. Entendemos que este potencial foi percebido e não indicado. Esta percepção deu-se na experiência vivida; a familiarização que não havia, provocou o deslumbre e contentamento com o novo praticado. Os manifestos dos sujeitos que indicam a vivência amistosa e confortável nos ambientes exploratórios e investigativos desta pesquisa vislumbraram o aceite aos mesmos, e conseqüentemente o querer aplicar em aulas de matemática.

A cada atividade a qual se aplicavam os grupos, percebemos um possível perfil de sujeitos que exploram e investigam sendo formado; as dificuldades iniciais foram sendo amenizadas ao ponto de desaparecerem nas atividades finais de cada contexto. Manifestou-se o aumento da confiança para apresentar ideias e levantar questões, estas que apontavam o norte antes complexo, que passou a ser mais facilmente intuído. O “não saber”, foi sobreposto gradualmente pela dinâmica dos grupos; eles muitas vezes, demonstraram intuir o que fazer e para onde olhar.

Os ambientes construídos nos encontros e os manifestos direcionados ao empenho dos sujeitos que investigam e exploram, nos deram abertura para articular

aqui com confiança nossa compreensão do que se manifestou. Porém, não intuímos tratar o dito aqui como aplicável, onde quer que seja. Ainda munimo-nos da insegurança mesmo que reduzida com o percebido, da proposta da exploração e investigação em salas de aula. Tal aplicação seria mais complexa, visto que neste estudo, trabalhamos com um número reduzido de alunos, sendo que estes, eram de “auto nível”; já cursavam o ensino superior.

Ao dialogar sobre os *manifestos que indicam a postura de sujeitos que exploram e investigam*; foi constatado que: os pesquisados tomaram iniciativas exploratórias mediadas pela intencionalidade do refletir sobre tais iniciativas, estabeleceram movimentos junto ao software e atentaram a observar invariâncias para conjecturar possibilidades e efetuar validação das mesmas. A dificuldade dos sujeitos ao lidar com o cenário de investigação foi amenizadas pela compreensão prévia do como explorar para perceber. O processo relacional constante do explorar e do investigar favoreceu a concepção de significados e indicou um possível perfil investigador sendo constituído.

### ***Aplicação de pensamentos em Geometria Dinâmica (GD) e do software de GD***

Na busca por compreensão do como se deu o tratamento da geometria dinâmica mediada pelo *software* que a propiciou, no caso, o Geogebra, estudamos todas as interpretações previamente articuladas juntamente com os manifestos dos sujeitos, para encontrar convergências que julgamos adequadas ao desdobramento desta unidade nuclear.

Com exceção da Atividade Investigativa 2, as atividades contavam com cenários concebidos junto ao Geogebra; na tela do *software*, apresentamos objetos criteriosamente planejados para empenho dos sujeitos. Com isto, o primeiro contato com as atividades foi o olhar para estes objetos, estabelecendo vínculos cognitivos ao aspecto visual proporcionado.

O componente visual mostrou-se essencial para delineamento das atividades; ao ver objetos se movendo, às vezes sem sentido, e muitas vezes tornando possível a significação de algo, os sujeitos perceberam relações potencialmente geradoras de conceitos e propriedades. A utilização da GD e das ferramentas do *software* que permite o dinamismo, se deu muitas vezes na tentativa de perceber estas relações e

no empenho em validar as mesmas; movimentos contínuos sob olhares atentos ao que poderia se mostrar, possibilitou levantamento de conjecturas, estas que foram confirmadas ou não, quando se estabeleceram movimentos mais cautelosos e olhares mais atentos que os lançados *a priori*.

O mover objetos, foi utilizado também, como opção para facilitar o diálogo; percebemos tanto nos *chats* quanto na transcrição do vídeo, que a linguagem escrita ou falada em algumas situações não completou o sentido pretendido pelo sujeito que indagou, assim, buscou-se apoio no dinamismo do *software* para incorporar o dito. Damos ênfase a esta mediação pós fala não entendida, porém, isto não implica que a relação entre o aspecto visual do *software* e da linguagem falada ou escrita se deu apenas neste caso; podemos indagar que em todo o empenho sobre as atividades, estes elementos estavam juntos, ou seja, o diálogo manteve sincronia com os movimentos no *software*.

O *software* mostrou-se relevante para os processos exploratórios e investigativos, nele, foi possível quantificar e qualificar movimentos e percepções mediante aos mesmos. A possibilidade do arrastar, e a intencionalidade de assim fazer, foram aspectos visíveis no empenho de todos os grupos, o que nos permite compreender, que foram fundamentos essenciais para começar e prosseguir no desenvolvimento das atividades.

Eventos vistos como característicos do cunho investigativo pensado para o contexto estruturado, como; conjecturar, planejar, estruturar, testar, refletir, etc., foram possíveis mediante utilização do dinamismo do *software*. O “mover-parar-refletir” que orientamos, é permeado de aspectos exploratórios e investigativos; os verbos indicam a necessidade da iniciativa e autonomia ao fazer, o refletir sugere a percepção de algo que se mostra na intencionalidade mover objetos. Na investigação dos sujeitos, esta dinâmica foi constante e gradativamente tornando-se mais objetiva e significativa.

Vale destacar aqui, nossa compreensão do vivido pelos sujeitos, acerca das possibilidades agregadas à geometria dinâmica no que diz respeito a novos modos de perceber e conceber conhecimentos geométricos. As investidas sobre os objetos pertencentes a figuras devidamente construídas possibilitou aos sujeitos a percepção de que mesmo após uma aparente deformação provocada pelo arrasto, algumas relações, concebidas em seguida como propriedades, se mantinham. A percepção de um objeto que não variou, e/ou conjunto de objetos cuja estrutura se

manteve, auxiliou os sujeitos no desenvolvimento das atividades, e conseqüentemente, na aprendizagem de propriedades e conceitos. Assim, apontamos o potencial do trabalho com a invariância em *softwares* de GD para o ensino e a aprendizagem de matemática.

Consideramos que os sujeitos manifestaram novas formas de se referenciar a objetos geométricos. Os símbolos “elipse”, “circunferência”, “parábola”, “hipérbole”, bem como os gráficos que representam os mesmos, ganharam outras simbologias, que condizem com o movimento de um ponto que flutua em um espaço não evidenciado. Chegamos a esta compreensão ao lançar luz a manifestos que definiram o movimento do ponto, no espaço em branco, como sendo especificamente os símbolos ditos acima.

Nossas atividades exigiram do *software* de GD, basicamente o arrastar, com isto, não persistiu dificuldades quanto à utilização do mesmo. Sabemos que o arrastar é apenas uma opção do *software*, no entanto, percebemos que esta opção é e foi tão valiosa ao ponto de dar conta de subsidiar todas as atividades, e abrir horizontes à percepção do todo que foi por nós ocultado e concebido pelos sujeitos.

O estar no contexto da GD, sem cargas negativas muitas vezes propiciadas pelas dificuldades impostas pelo *software* e pelas propostas metodológicas, que engessam a aprendizagem, facilitou a familiarização dos sujeitos com nossa proposta e fez manifestar arguições que denotam o bem estar e o contentamento em perceber relações mediante a sincronia entre o fazer e o enxergar. Os sujeitos mostraram-se adeptos a utilização do *software* de GD em aulas de matemática e dispostos a esta aplicação fazer.

Visando nortear a compreensão do *como se dá o envolvimento de professores e futuros professores com softwares de GD*, apresentamos nossa compreensão do “*como se deu*” este envolvimento em nosso estudo. Em suma, percebemos que; nossos sujeitos mostraram-se confortáveis ao ambiente de GD e ao cenário posto. Isto favoreceu a execução de movimentos diversos, estes, concebidos especialmente da possibilidade do arrastar: o arrasto mediou percepções, reflexões, validações, novas formas de perceber e compreender entes geométricos, e também o diálogo entre os membros de cada grupo. Estas possibilidades se deram devido espaço visual do *software*, constantemente presente nas ações dos sujeitos e nas implicações das mesmas.

### ***Manifestos que sugestionam a presença de aspectos tais como os da Teoria da Aprendizagem Significativa***

Pretendemos aqui, trazer nossas compreensões sem o intuito de afirmar que a aprendizagem se deu significativamente ou não. Apontamos o que julgamos serem possíveis manifestações que direcionam pensamentos e intuições à concepção dessa aprendizagem por parte dos sujeitos. Além disso, fazemos convergir aqui, percepções que julgamos ser características da TAS, mas não definitivamente entes específicos da mesma.

Ao começar, apontamos o que ocorreu de utilização de conhecimentos prévios, ou segundo Ausubel, *subsunçores*. Como já mencionado, os sujeitos trouxeram para/na interação com seus respectivos grupos, suas bagagens conceituais, incluindo as possibilidades comunicativas de seu próprio corpo. Percebemos enquanto conhecimentos prévios trazidos; os saberes sobre as Geometrias, os conhecimentos previamente trabalhados sobre colaboração, exploração e investigação, vivências anteriores com materiais concretos, e a totalidade linguística, concebida no decorrer do viver no mundo.

À medida que se aplicavam em novas ações e/ou atividades, os sujeitos se completavam com mais conhecimentos, estes que se tornaram relevantes para concepção de outros. Assim, o que tratamos aqui como prévio, subsidiados pela TAS, não é algo que está necessariamente distante e/ou estático, mas sim, algo que acaba de acontecer e que se mantém em constante movimento de transformação.

Compreendemos a TAS na utilização de conhecimentos prévios, quando os mesmos foram aplicados sob um processo relacional entre alguns conhecimentos, cujo produto, entendemos ter resultado na aprendizagem de outros saberes. Os Manifestos nos permitiram a possibilidade de tais relações, no entanto, percebemos que muitos dos conhecimentos manifestados, não eram tão novos assim, para inferirmos que o processo relacional propiciou a aprendizagem significativa de novos materiais, mas, inferimos com convicção, nestes casos, a ocorrência da *ressignificação* de conhecimentos diversos, que, mediante processo relacional, também é significativa.

Vislumbramos a ocorrência da possibilidade da aprendizagem significativa de diversas propriedades do conteúdo, e também de conhecimentos relacionados ao como colaborar, explorar e investigar, uma vez que, ao estudar as cenas,

percebemos o crescimento dos sujeitos nestes aspectos, inclusive manifestos de deslumbre com o entendimento e execução destas ações. Entendemos que esta aprendizagem pode ser significativa, pois mediante processo relacional subsidiado por organizadores prévios, trabalhamos os temas nos encontros presenciais.

As cenas trazem manifestos dos sujeitos que indicam a utilização de organizadores prévios por parte do pesquisador, quando percebido certo entrave dos sujeitos. A mediação não foi direta, foi feito um aporte generalizado em torno de dúvidas e/ou dificuldades dos sujeitos. Mediante tais mediações os sujeitos conseguiram relacionar informações e em consequência, perceber ou conceber o como se mover diante da dificuldade encontrada. As organizações prévias não foram dadas apenas pelo pesquisador, os próprios sujeitos, ao perceberem o *não saber* dos companheiros de grupo, empenharam em abrir um discurso que se iniciava de uma abordagem geral, desvelando o que está intencionado, para depois focar o que se pretendia desvelar.

Entendemos ter percebido no estudo das cenas, manifestos que se aproximam aos três tipos de aprendizagem significativa; *Aprendizagem Significativa Representacional*, *Aprendizagem Significativa de Conceito* e *Aprendizagem Significativa de Proposição*. À primeira, vinculamos às equivalências simbólicas dadas pelos sujeitos. Uma vez creditada por eles equivalência, passaram durante as atividades a substituir os símbolos previamente conhecidos pelos equivalentes colaborativamente concebidos.

Compreendemos a possibilidade de ter ocorrido a *Aprendizagem Significativa de Conceito*, mediante leitura de manifestos que julgamos relacionáveis à mesma, especialmente os advindos do estudo das cenas recorrentes das atividades exploratórias; a simbologia previamente conhecida, que ganhou um equivalente ao qual se passou a utilizar, foi concebida de forma mais generalizada. O empenho sobre estas atividades levou os sujeitos a relacionarem conhecimentos prévios aos conhecimentos simultaneamente aprendidos, ou reaprendidos no decorrer, para no final, elaborar os conceitos para as figuras geradas. O fato de os sujeitos terem construído estas simbologias generalizadas, nos leva a vislumbrar a possibilidade da ocorrência da *Aprendizagem Significativa de Conceito*.

Direcionamos a *Aprendizagem Significativa de Proposição*, manifestos que sugerem a concepção de uma proposição mediante relacionamento da mesma com conhecimentos previamente sabidos pelos sujeitos. Sugestionamos mediante

intenso estudo das cenas, que esta aprendizagem possa ter ocorrido das três formas possíveis; de forma *subordinada*, para a qual percebemos possíveis convergências de manifestos que sugeriram a aprendizagem de conhecimentos mais específicos, utilizando como ponte, conhecimentos mais generalizados já sabidos, como exemplo; a retomada à investigação criminal para compreender o como proceder na investigação no pequeno grupo montado.

Vislumbramos também, a possibilidade desta aprendizagem de forma *superordenada*, quando manifestos suggestionaram a concepção de conhecimentos mediante ordenação de outros já sabidos e os compreendidos durante a atividade. Neste caso, os conceitos concebidos das seções cônicas, resultaram da ordenação formal daquilo que os sujeitos já sabiam até o momento destinado à conceituação.

Entendemos que tal aprendizagem pode ter se dado também por *combinação*; os sujeitos combinaram diversas percepções e conhecimentos sem necessidade de uma ordenação específica para estruturar outros saberes. Tal aprendizagem, julgamos poder ser constatada quando os sujeitos utilizaram daquilo que sabiam sobre: pontos, distância entre pontos, segmentos, invariâncias, dinamismo dos pontos e segmentos, dentre outros, de forma a combiná-los sem manter uma ordem, para com isto perceber e conceber propriedades específicas.

A TAS aponta que as três aprendizagens significativas, se dão por duas maneiras, por *recepção* e por *descoberta*. Novamente, compreendemos a possível ocorrência da totalidade destas possibilidades. Quando ocorrida a organização previa durante as atividades, suggestionamos o modo de aprender *por recepção*; alguns conhecimentos conforme posto acima, intuímos terem sido concebidos com auxílio do professor ou de membros do grupo, neste caso, o sujeito aprende ao receber informações especificamente relevantes, que norteiam tal aprendizagem. Julgamos que as intervenções de sujeitos e pesquisador, manifestas nas cenas estudadas, por apresentarem informações gerais sobre algo objetivo, pôde corroborar com a aprendizagem significativa por recepção.

Percebemos um equilíbrio entre esta aprendizagem, e a *aprendizagem por descoberta*. O pouco envolvimento do pesquisador durante as atividades é um dos dados ao qual nos apoiamos para apontar a possibilidade desta forma de aprender significativamente; os sujeitos deram conta de descobrir as relações e propriedades necessárias às atividades. Como para tais descobertas, os sujeitos utilizaram o todo que tinham de conhecimentos, em especial os especificamente relacionados com o

material que trabalham, intencionamos a compreensão das possíveis aprendizagens significativas por descoberta.

Sem conhecimento da teoria, os sujeitos conceberam dos mesmos pensamentos de David Ausubel, especialmente ao contrariarem a aprendizagem mecânica; mostraram-se adeptos à metodologia das atividades que sugestionou a descoberta de objetos e conseqüentemente a aprendizagem com tratamento de tais descobertas. Evidenciaram o intuito de deixar com que seus alunos construam conceitos ao descobrirem por si mesmos, os fundamentos destes, opondo-se à aplicação direta no quadro sem um tratamento significativo.

Intuindo nortear a compreensão de *como se dá a aprendizagem significativa de professores e futuros professores de matemática*, apresentamos aqui a síntese do como se deu esta aprendizagem com nossos sujeitos de pesquisa: percebemos a possibilidade da aprendizagem significativa e da ressignificação de uma série de conhecimentos, estes que emergiram da relação entre conhecimentos prévios dos sujeitos e o que tinha de novidade em nossa metodologia e atividades.

## **6.6 A compreensão da interrogação ao olhar as unidades em suas correlações**

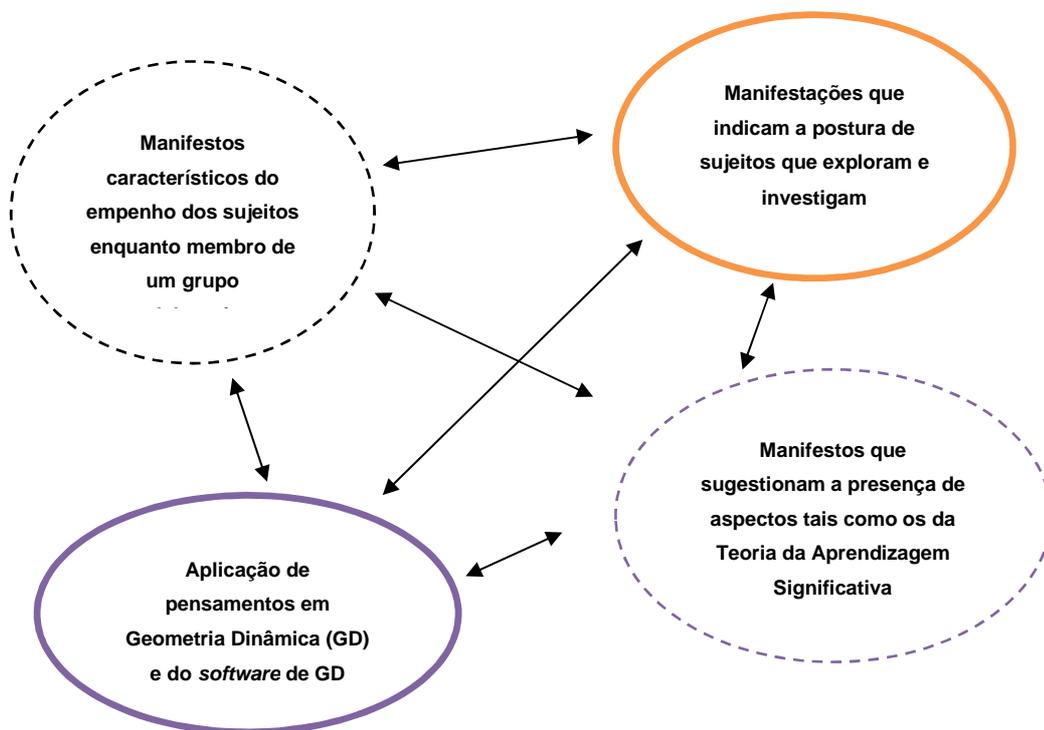
Ao dialogarmos sobre as unidades nucleares neste processo de análise, tornou-se mais evidente o quanto tais unidades estão entrelaçadas, visto que, não foi possível expor a compreensão de uma delas sem adentrar nas demais. Assim, atentamo-nos ao dialogar compreensões em cada unidade, em não exceder o limite aceitável, se é que este existe, de repetição de algo já dito.

Neste aspecto, vala frisar também, que propomos um estudo individual de cada unidade intuindo facilitar a compreensão da totalidade de nossa interrogação, no entanto, defendemos um pensar intuitivo para este todo, antes de adentrar as unidades. Como exemplo; constatamos que nossos sujeitos se adaptaram ao ambiente de GD, mas, em muitas pesquisas ocorre o contrário, esta comparação feita pelo leitor pode ocasionar certo descrédito do aqui percebido. Uma intuição do todo vivido que foi descrito pode apresentar subsídios para compreensão de que o envolvimento com o ambiente foi confortável, mediante nosso empenho em estruturar metodologia e atividades, que quando elaboradas, foram intencionalmente

contextualizadas àquilo que reflexivamente julgamos ser importante para a satisfação, contentamento e conforto dos grupos.

Os aspectos comuns das unidades nucleares que às relacionam permite-nos dispô-las em uma rede de significados, de forma entrelaçada, porém não ordenada, visto que, para uma compreensão generalizada, não tratamos como relevante a sequencia de leituras destas compreensões específicas. A seguir, a representação da rede aqui indicada:

#### REDE DE SIGNIFICADO DAS UNIDADES NUCLEARES



Nossas compreensões acerca de cada unidade intencionam o horizonte que intuímos propiciar para diversos entendimentos do todo que se mostra nesta rede de significados, que possibilita as também diversas compreensões do como se dá o empenho de sujeitos, que exploram e investigam em ambientes de geometria dinâmica pensados para oportunizar aprendizagem significativa. Assim, esperamos que os leitores ao lançarem-se sobre este texto, compreendam “o *como se dá*” indicado em nossa interrogação.

Mediante processo analítico aqui acabado em sua abertura, propomos a seguir, uma síntese do todo vivido e descrito.

## CAPÍTULO VII

### PESQUISADOR E PESQUISADOS: BUSCANDO A TRANCENDÊNCIA DO VIVIDO

Buscamos, aqui, elaborar uma síntese mediante nosso entendimento da necessidade de voltar ao todo vivido, para reforçar os vínculos e encaixes que fizeram do nosso estudo, o texto aqui apresentado. Não vislumbramos levantar em amplitude reflexões - isto já foi feito em nossas interpretações e análises -, apenas pretendemos descrever de forma articulada em nossas compreensões o ocorrido, trazendo os sujeitos para um último diálogo.

A síntese inicia-se com apontamento de nosso empenho em embasar teoricamente o que intuíamos fazer em campo e pós-campo. Assim, buscamos referências a cerca dos que julgamos serem pilares desta pesquisa: Aprendizagem Colaborativa, Exploração e Investigação Matemática, Aprendizagem Significativa.

Constituímos relações diversas sobre tais temas e fomos também constituídos pelas mesmas. Mediante tal constituição, sentimos segurança para desenvolver um material e criticá-lo a todo instante quanto à sua aplicabilidade em campo. O deixar em crise propiciou muitas correções e aprimoramentos, até termos em mãos, um material adequado aos temas que suportam a pesquisa, que entendíamos ser suficiente para trabalhar a totalidade de nossas intenções.

Inicialmente, aplicamos questionários e pré-levantamentos, intencionando, em especial, um primeiro contato com o que os sujeitos concebiam de significado a cerca dos temas acima mencionados, e de temas em Geometria Analítica Plana. Sobre o pré-levantamento apresentamos a seguir arguições de alguns sujeitos:

O pré-teste que você fez, foi interessante, porque, a gente viu que só havia escutado a falar mesmo sobre colaboração, investigação, mas na hora de a gente falar disso, quase que não saiu, eu não sabia direito, e pra você [pesquisador] foi bom também né, porque você viu essa dificuldade e trabalhou bem elas aqui com a gente. [Entrevista com José]

Eu sou a favor do que você fez [pesquisador], tentou ver o que a gente sabia, pra depois aplicar, é..., tem muito professor que planeja a aula, o cara chega no primeiro dia de aula com tudo planejado, mas não vai dar certo, se ele não souber a dificuldade que o aluno trouxe de antes. Como que ele [o aluno] vai fazer a atividade se ele não souber isso. Ele [o professor] vai lidar com turmas diferentes, um vai tá sabendo, outro sabe até mais, e outros não tem base, então ele tem que saber o conhecimento do aluno pra poder criar as atividades. [Entrevista com Fabiana]

Os sujeitos, conforme indicado nas entrevistas acima, mostraram-se adeptos à aplicação do pré-levantamento e cientes de seu potencial pedagógico para o ensino e a aprendizagem.

Pensamos e vinculamos à atuação em campo, a aprendizagem colaborativa em seus possíveis espaços. Assim, propomos encontros presenciais e virtuais, aos quais grupos de sujeitos foram convidados a interagir mediante algumas atividades. Sobre tais espaços propostos, Letícia indaga que:

A gente fez de forma virtual quase que o mesmo que no presencial, então acho que por afinidade dá pra escolher né. Eu tenho dificuldade com a informática, gostei muito, foi muito legal, deu pra fazer direitinho, mas ainda prefiro ficar no presencial, às vezes posso até me aventurar no virtual porque vi aqui que é muito interessante, mas, me sinto mais segura no presencial. [Entrevista com Letícia]

Percebe-se na fala de Letícia o que se compara ao posicionamento de muitos outros professores; existe a consciência do potencial de metodologias e meios inovadores, em especial relacionados às TIC, no entanto, o conhecimento da potencialidade, nem sempre é suficiente para convencer uma utilização.

Para os encontros virtuais utilizamos o suporte tecnológico do VMTwG, que possui ferramentas potencialmente significativa ao trabalho colaborativo, em especial, o aplicativo do *chat* e a possibilidade da sincronia de visualização de movimentos, objetos e diálogo. Aos encontros presenciais, com exceção do primeiro, ao qual os sujeitos trabalharam no VMTwG, sugerimos para tratamento das atividades, o Geogebra, *Word*, e abrimos espaço à utilização de outros materiais. Sobre algumas das tecnologias utilizadas, em entrevistas foi dito que:

Eu achei muito interessante as ferramentas, igual ao VMT que a gente utilizou, o Geogebra, acho que é uma boa maneira de o aluno ta vendo o que aconteceu, igual a questão que a gente colocou, como é pra achar as retas, externas, tangentes e secantes? Se você movimentar é bem mais fácil, você ta vendo o que ta acontecendo, eu acho interessante isso, porque o lápis e o papel não te permite isso. [Entrevista com Amanda]

Nossa interação foi bacana, a gente conseguiu comunicar bem. No virtual a gente foi conversando, não fizemos nada sozinhas, parece como se a gente tivesse junto ali entendeu, mesmo com a distancia assim, foi muito interessante. A gente tava conversando, discutindo ali. O bom é que a gente pode escrever, ela vê, eu mexo, ela vê. [Entrevista com Lúcia]

Foi isso que eu achei mais interessante, se eu mexo pra mim e ela não ver, aí ia ficar ruim, a gente escrevia no resumo, ela via e podia ir lá consertar alguma coisa. Eu gostei, gostei muito. [Entrevista com Luana]

Os sujeitos apontam acima as possibilidades do VMT que julgaram relevantes ao desempenho colaborativo no tratamento das atividades. Fica subentendido o posicionamento favorável à utilização do ambiente para o ensino e a aprendizagem de matemática.

Demos início aos três encontros presenciais, abrindo um diálogo a cerca de temas centrais: Aprendizagem Colaborativa, Exploração Matemática e Investigação

Matemática em sala de aula, em seguida, apresentamos os organizadores prévios; fizemos exposições comparativas, propiciando exemplos mais gerais para favorecer um diálogo mais específico. Após isto, voltamos ao diálogo sobre os temas. Fernando relata, conforme abaixo, seu posicionamento sobre esta metodologia.

Tem coisa na matemática que você tenta associar e não é tão obvio a relação que tem, o aluno talvez não conheça, mas tem que ir mais fundo igual cê fez [o pesquisador], no caso da atividade colaborativa, talvez o menino nunca tenha ouvido falar, aí cê foi e buscou o exemplo da Espanha, aí o cara já vê, aí o cara entende. Os conceitos matemáticos podem ser que ele nunca tenha ouvido falar, essas coisas, esses nomes, mas se cê mostrar as figuras ele “opa, essa figura eu conheço, não com esses nomes, mas conheço”. [Entrevista com Fernando]

Esta fala sugere a importância da utilização de uma organização prévia para dar suporte tanto para professor ao ensinar, quanto para o aluno ao aprender; propiciar uma base à qual subsidia compreensões contribui para o dinamismo em sala de aula, especialmente a interação entre professor, aluno e aprendizagem.

Tendo em mãos os nomes e respectivas disponibilidades, montamos os grupos, estes que, após os diálogos mediados pelos organizadores prévios, foram convidados a engajar sobre as atividades, e incentivados a trabalhar em conjunto para o tratamento das mesmas. Seguem reflexões sobre o cenário colaborativo.

A parte colaborativa é bom né, bacana, em grupo, um ajudando o outro, não é só um fazendo sozinho né. [Entrevista com Luana]

É importante trabalhar assim o colaborativo porque o professor não incentiva isso em sala de aula, então muitos daqueles que falam “á, eu não gosto de tal matéria, não gosto disso”, pode ser porque ele sempre tá isolado entendeu, o professor devia colocar esses alunos pra trabalhar em grupo, pra aprender também com os colegas, eu acho interessante. [Entrevista com Mauro]

Mas eu acho que, é aquela questão, pra aplicar isto na escola, colaboração, realmente os alunos tem que estar empenhados naquilo, todos tem que ter um papel, mesmo que menor entre estes que seja, o cara tem que se sentir importante com aquilo. [Entrevista com José]

Estes discursos evidenciam o que é núcleo de um trabalho colaborativo, o estar junto, o caminhar com o outro, atentando à participação e favorecimento dos membros em suas individualidades e do grupo colaborativo como um todo.

Optamos em propor aos grupos, o empenho nos dois primeiros encontros, sobre três atividades exploratórias. No terceiro encontro, demos início às atividades investigativas, no quarto, voltamos à exploração, e no quinto e último encontro, propomos o tratamento da segunda atividade investigativa. Sobre as atividades proposta e características das mesmas, relacionamos abaixo algumas falas postas pelos sujeitos:

As atividades foram interessantes né, assim, exploração, eu não sabia que tinha diferença com a investigação. Investigação é mais difícil né. Dentro da sala de aula acho que a investigação seria mais difícil, nas atividades exploratórias os alunos chegariam mais ao ponto né. Esta investigativa [Atividade Investigativa 2] até que a gente conseguiu fazer bem, mas a outra investigativa foi difícil, eu não sabia o que fazer. [Entrevista com Camila]

Quando a gente mexeu com exploração e depois com investigação deu pra diferenciar bastante, a investigação é mais aberta, a gente teve que bolar as questões. A primeira investigação foi mais difícil, tava muito aberta, nem todas perguntas que a gente pensava tinha resposta, e algumas não tinha uma resposta só, eram várias. Na exploração, você já tinha um objetivo onde a gente ia chegar, é mais guiada, você fala “faz isso”, aí a gente teve que ver o que que a gente acha disso, aí que buscamos as regularidades, e vai chegando à um caminho comum, agora o investigativo, a gente partiu de um ponto e saímos pra várias direções. [Entrevista com Fernando]

Pensando assim, no dia-a-dia da escola, eu achei que seria muito interessante trabalhar assim, igual a gente trabalhou, explorando pra depois trabalhar o investigativo, porque, quando a gente explorou a gente levou uma bagagem pro investigativo, você tem lá novos objetos, mas você já olha diferente, começa a mover aquilo de uma forma que você não tinha pensado antes. Se antes você tivesse dado a investigação, a gente não teria essa bagagem intendeu, ia ser mais difícil. Então, acho que tem que explorar o que o aluno sabe pra depois continuar com ele o conteúdo, o que eu acho que não acontece muito. [Entrevista com Daniele]

As falas acima demonstram a real aprendizagem de características que sugestionam o cunho exploratório e o investigativo de atividades; percebemos tal compreensão nos argumentos que apontam e diferenciam Atividades Exploratórias de Investigativas. Os sujeitos ao referirem às atividades investigativas como sendo mais difíceis, não direcionam uma crítica negativa, mas sim apontam a percepção de uma característica de tais atividades.

No último encontro, após aplicação da segunda e última atividade investigativa, promovemos uma conversa com cada grupo, dando-lhes a abertura para dialogar sobre o vivido, apontando o que de significativo conceberam ao participar do curso. Seguem algumas das arguições.

Eu gostei bastante, você não deu aqui, o conhecimento pronto pra gente. Você tem um contato mais direto com as figuras, poder ver elas de uma maneira mais dinâmica, acho que ajuda muito a entender melhor o aspecto. Na matemática a gente meio que decora que vai acontecer isso e isso, mas geometricamente a gente vê o que que tá acontecendo, e a aula ganha mais vida assim né. Não sei se é um método mais eficiente pra aplicar hoje na escola no ensino médio e tudo, porque a gente vê também que a participação dos alunos é muito pouco efetiva pra trabalhos assim, mas o que você propôs aqui é muito bom, quando a gente for aplicar, claro que não vai funcionar em toda turma mas nas turmas que dar certo vai ser diferente e muito bom pra eles também. [Fala de Daniele]

Quando nós fomos aplicar na escola, os alunos vão chegar na definição igual a gente chegou também né, essas atividades são bacanas por causa disso, você não mostra pra ele pra onde ir, tem que ir construindo né, até chegar. [Fala de Letícia]

Mas isso que é o interessante, que como eles chegam numa definição, eles não viram aquilo pronto, eles foram tentando chegar naquilo, então eles vão vendo a coisa acontecer. É diferente um professor chegar no quadro passar uma definição, o aluno não entende, vai lá pergunta outro professor, e ele explica a mesma coisa de novo, o aluno continua não entendendo. [Fala de Lúcia]

Percebe-se nessas falas o posicionamento favorável à metodologia e estrutura do curso e das atividades. Ganhou destaque nossa intenção de destinar aos sujeitos os créditos pela aprendizagem; demos abertura e credibilidades à suas ideias e conjecturas, propomos atividades que exigiam autonomia e confiança em suas articulações, incentivamos posicionamentos que fugiam de nossas intuições. Assim, pensamos os sujeitos como centro do todo que se manifestou no curso.

Finalizados os encontros, atentamo-nos a descrever o todo que ficou registrado. Para isto, recorreremos às filmagens e aos registros do *chat* do VMTwG. Voltamos olhares atentos à descrição completa do vivido, e munidos de perspectivas fenomenológicas, estruturamos o diálogo, de forma a deixar suspenso o que julgamos serem manifestos que nos auxiliaria no tratamento de nossa interrogação.

Para estruturar a descrição, adotamos duas técnicas: a primeira foi aplicada à análise dos discursos provenientes do tratamento dos temas; Aprendizagem Colaborativa, Exploração e Investigação Matemática em sala de aula. Nela, apresentamos o diálogo de forma síncrona à nossas interpretações; em um texto corrente, introduzimos situações, demos espaço às falas dos sujeitos, seguido, da interpretação das mesmas à luz de nossa questão diretriz. A segunda técnica foi utilizada para tratar o envolvimento dos sujeitos com as atividades aplicadas; consiste na divisão do discurso em cenas, as quais foram dispostas em quadros, nos quais suas colunas apresentaram o discurso dos sujeitos, nossas interpretações dos mesmos, e o dinamismo de nossa análise.

A análise do discurso a cerca dos temas em Educação Matemática, se fechou no próprio texto que o apresentou. Já a análise do empenho sobre as atividades, continuou com nossa intencionalidade de compreender o fenômeno interrogado. Para isto, adentramos as cenas expressas nos quadros e constituímos unidades nucleares, aos quais buscamos compreensões separadas, que quando somadas, vislumbram um horizonte para compreensão de nossa interrogação como um todo.

## ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PERTINENTES A PESQUISA REALIZADA

Pretendemos neste espaço, expor compreensões que completam as já indicadas anteriormente. O processo de entendimento e compreensão da vivência neste estudo se abre a indagações que vão além do mesmo, vislumbrando o que seriam percepções do que julgamos serem frutos do estar imerso neste estudo; todos os olhares, o ouvir, o falar, o escrever, o analisar e refletir completaram nossa totalidade ao enriquecer nossa estrutura cognitiva com conhecimentos que já foram por nós desconhecidos, e tornaram-se saberes nossos, e aqui, são tratados como subsunçores para dialogar considerações que não são finais, mas sim aquelas se mostraram para este texto.

Utilizamos a TAS com teoria fundamental desta pesquisa, em consequência, promovemos discursos que defendem a necessidade da utilização de conhecimentos prévios para a aprendizagem de novos materiais. Quando pesquisas deste tipo mostram que os sujeitos recorrem a todo instante a conhecimentos seus, para empenho sobre o que é proposto, fica nítida a relevância da valorização destes conhecimentos por parte do professor para o tratamento da disciplina à qual leciona.

Para a TAS, o aluno atribui relevância ou não a um determinado conhecimento, ao perceber sua utilidade no cotidiano. Assim, o conhecimento que o aluno constitui fora do ambiente escolar, como a “matemática da rua”, que por muitas vezes as escolas tratam como irrelevantes ou prejudiciais, pode ser uma rica rede de subsunçores, apta a ligações de conceitos mais evoluídos para se modificar e constituir-se. Isto vale também, para a relação dos conhecimentos constituídos nas diferentes disciplinas escolares. Assim, trabalhar a transdisciplinaridade, na perspectiva da TAS, é uma metodologia válida para se aprender significativamente.

O pensar criticamente sobre a TAS, mediante experiência da utilização da mesma, nos levou a questionar a necessidade de utilização de organizadores prévios. Ao refletir, levantamos uma questão: Seria prejudicado um aprendizado sem a organização prévia, dita por Ausubel como necessária mediante desconhecimento por parte do indivíduo, do novo objeto a ser aprendido?

Nosso estudo possibilita não uma resposta para tal pergunta, mas sim uma reflexão em torno da mesma. Ele nos levou a pensar o quão rico pode ser a interação se tal organização não fosse previamente apresentada; os alunos poderiam dar nomes aos objetos postos, nomes estes, que não inviabilizariam a

percepção de propriedades conforme ocorrido. Julgamos que os entes matemáticos não eram a princípio tão relevantes. Seria interessante, depois da interação, o professor matematizar/refinar juntamente com os alunos os nomes dados, dizendo-lhes que estes, possuem correspondentes simbólicos na Matemática.

No entanto, o conhecer previamente, manifestado nesta pesquisa foi relevante para a prática do diálogo e do empenho sobre as atividades; as bases generalizadas propiciadas pelo pesquisador ou já concebidas pelos sujeitos sustentaram a dinâmica e complexidade da totalidade da experiência vivida, e auxiliou/mediou a aprendizagem significativa de conhecimentos diversos. Então, sugerimos o sentido de *organização prévia* não como uma exigência para a aprendizagem mediante o não saber, mas como uma opção metodológica, rica em significados, que pode ser utilizada para aprendizagem de novos conhecimentos.

Vislumbramos aspectos que se mostraram característicos da TAS, com isto compreendemos a possibilidade da aprendizagem significativa de conhecimentos que se adequaram a nossa intuição, e outros que extrapolaram a mesma. Nesta possibilidade, entendemos que as concepções e ressignificações de conhecimentos se deram por *descoberta* e por *recepção*, conforme apontado pela TAS. Percebe-se, seja por leituras ou experiências próprias, que no ensino tradicional vigente, pouco se utiliza da aprendizagem por descoberta, e a aprendizagem por recepção é muitas vezes distorcida, visto que ensina-se via aulas expositivas, pautadas na transmissão do conteúdo, às quais pouco se importam com o que o aluno sabe, apresentando-lhes um material definitivo sem correlações com seus subsunçores.

Creditamos a concepção de habilidades e de saberes diversos em Geometria, à estrutura das atividades apresentadas, ao cenário construído, e especialmente ao trabalho conjunto dos sujeitos. Neste estudo, a interação destes elementos, e o produto positivo da mesma, apontam à necessidade de mudanças nas rotinas escolares, em especial em sala de aula, que muitas vezes prega um ensino acelerado, que tem como meta cumprir o esquema dos livros didáticos, ou das ementas, provocando muitas vezes, um ensino gerador de uma aprendizagem por memorização, na qual questões são apresentadas, porém, sem uma fundamentação adequada. Neste contexto, também pouco se trabalha com atividades de cunho investigativo e muito se distorce o que de fato é um trabalho colaborativo.

Os padrões e rotinas, que a muito se mantêm nas aulas de matemática, são obstáculos para a aplicação de atividades exploratórias ou investigativas. Prevalece

a dificuldade ocasionada pela pouca, ou nenhuma familiarização dos professores e alunos com o contexto investigativo em sala de aula. Para os alunos, faltam-lhes maturidade, autonomia, e coragem para aventurarem-se em ambientes tão abertos, com poucas restrições. O professor, pautado na perspectiva conteudista, e firme em achar que a aprendizagem do aluno, depende em grande parte, de “seu ensino”, encontra dificuldade em enxergar valores em pensamentos, conjecturas, ações e posturas, embrenhados nos alunos durante a investigação. Desta forma, em um processo riquíssimo, o professor só agrega significado à produção do aluno que está diretamente e/ou exatamente relacionado ao conteúdo ministrado, produção esta, que nesse ambiente pode ser pequena, ao ver que, as investigações dos alunos podem tomar direções e sentidos totalmente contrários ao que espera o professor.

As possibilidades decorrentes de uma atividade investigativa tornam pesquisas como esta, mais complexas. Aqui se pretendeu observar a aprendizagem significativa de alguns conhecimentos, com a investigação, estes podem ser até intuídos, mas não afirmados. A diversidade de caminhos seguidos e informações levantadas pode viabilizar o manifesto da possibilidade de aprendizagem significativa de outros conhecimentos, não pensados para/com a atividade. A complexidade está na percepção e tratamento destes dados; o pesquisador deve estar preparado para recepcionar os mais diversos tipos de argumentos e respostas, deve ser honesto em não descartá-las ou tratá-las como “erros” improdutivos. Se o pesquisador não está sujeito a trabalhar com a diversidade de informações, não está apto a trabalhar com tarefas de cunho investigativo. Tal complexidade não desmotivou, mas sim agregou valor conceitual e estimulou a continuidade do estudo.

É certo que, a investigação possui suas limitações, com ela, certamente não se aprende tudo; o que é concebido através da mesma por um aluno, não necessariamente é concebido da mesma forma por outro, sua potencialidade permite que se atinjam alguns objetivos, mas diversos objetivos estão aquém desta metodologia. Apesar de tais limitações, vale destacar o quão é potencialmente significativo trabalhar com atividades investigativas, existem ganhos, tanto para alunos quanto para professores; a aprendizagem significativa propiciada por intermédio de atividades exploratórias ou investigativas auxilia os alunos na aprendizagem de novos conhecimentos, e os professores na escolha, elaboração, aplicação e mediação de novos momentos permeados pelo contexto investigativo.

Com a inclusão das TIC, paralelamente com as práticas investigativas em sala de aula, torna-se eminente à necessidade de mudança na postura de professores e alunos em sala de aula. O professor, que *a priori*, assume a posição de detentor do conhecimento, e único veículo responsável por *levar* o conhecimento ao aluno, deve assumir sim, um importante papel, porém, como mediador do conhecimento. Já o aluno, anteriormente concebido como um receptor passivo deve assumir postura mais ativa, de agente responsável pelo seu próprio desenvolvimento. Nessa perspectiva, o conhecimento não é imposto pelo professor, ele é colocado à disposição do aluno, e mediado quando necessário.

Vistas dificuldades no processo de inserção das TIC no contexto educacional, é necessário que novas pesquisas venham a ser feitas. Não se pode cogitar a possibilidade de pouco tratar esse tema, a presença do computador nas escolas é inevitável, é hoje uma realidade constante, sua simples presença é responsável por mudanças no contexto escolar, as quais podem ser vistas como boas ou ruins. Os estudos devem proporcionar questões e soluções, que pesem a favor das implicações boas, ao ponto de, a medida do possível, sobrepor às implicações ruins.

Em nossa pesquisa, nos deparamos com compreensões que extrapolaram nossa proposta. Percepções que justificam as indagações de que uma pesquisa não se acaba nela mesma, mas sim se abre e subsidia novos pensamentos propulsores de novas pesquisas. Ao trabalharmos a Aprendizagem Significativa em comunhão com a Aprendizagem Colaborativa, vimos à possibilidade de constituição da *Aprendizagem Significativa Colaborativa (ACS)*, a qual o conhecimento não se dá apenas na individualidade de cada ser, o conjunto de conhecimentos que são subordinados, ordenados ou combinados para gerar novos conhecimentos, se dão em uma estrutura compartilhada, em que o pouco que um indivíduo sabe se entrelaça com outros poucos saberes de membros de um mesmo grupo.

Vale destacar também, algo que certamente não discutimos aqui, mas que percebemos importantes aspectos para se passar a discutir em pesquisas futuras; o pensamento geométrico dos alunos ao lidarem com a GD. O fato é que muito se discute sobre a GD, os movimentos, o potencial pedagógico, as possibilidades de aprendizagem nestes ambientes. Porém pouco se apresenta estudos sobre o como se dá a aprendizagem, quais as relações cognitivas dos alunos estabelecidas ao intencionar nestes ambientes movimentos geradores de percepções, como o aluno descobre e concebe aquela Geometria. Nesta pesquisa, apontamos que a GD

proporcionou novas formas de tratar e conceber algumas figuras planas; quando o sujeito indaga que um ponto flutuante em um espaço vazio é uma elipse ou outra figura qualquer, apontamos um horizonte para se investigar como ocorre a produção de conhecimento neste ambiente.

Entendemos ter trabalhado em campo todos os conceitos apresentados neste estudo sobre a TAS, com exceção do conceito de *Assimilação Obliteradora*. Para tratamento do mesmo, faz-se necessário “o passar do tempo”, que se responsabilizaria pelo esquecimento por parte dos sujeitos de arestas daquilo que foi aprendido significativamente. Sugerimos para novas pesquisas que visem tratar tal conceito, a aplicação de um *pós-levantamento* passadas algumas semanas. A intenção é perceber que o que foi aprendido não é completamente esquecido, mas sim, transformado em um conhecimento mais generalizado, um subsunçor para concepção de novos significados.

Apontamos constantemente nesta pesquisa a importância do professor para o ensino e a aprendizagem de matemática. Como muito se indaga sobre promover nos alunos habilidades investigativas, cabe também ao professor investigar, uma vez que o mesmo é um exemplo a ser seguido pelos alunos. Cabe também, certificar-se de sua condição teórica e prática, se está preparado ou não para mediar a aprendizagem dos alunos, mostrando-lhes que um problema pode ser resolvido por intermédio de diferentes instrumentos.

O professor deve conceder a oportunidade aos alunos de aprenderem significativamente, propondo momentos de investigação e reflexão, para que os mesmos possam conceber os diversos conhecimentos. Mediante a responsabilidade do professor na promoção de aprendizagem significativa, vale destacar a importância do tratamento deste tema nas licenciaturas. Os futuros professores devem aprender a como trabalhar atividades, problemas, tarefas investigativas de forma colaborativa em sala de aula, ou em qualquer ambiente escolar, utilizando dos diversos aplicativos atualmente disponíveis, ferramentas além do quadro e giz, em prol da aprendizagem significativa de seus atuais e/ou futuros alunos.

As expectativas e experiências de um licenciando irão influenciar em sua atuação profissional, em outras palavras, formar verdadeiros estudantes pode implicar na formação de bons profissionais. Torná-los atentos a como se desenvolve sua própria aprendizagem significativa pode facilitar seus momentos de mediação para a aprendizagem significativa de seus alunos.

## BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, M. E. B. **Informática e Formação de Professores**. Brasília: Ministério da Educação, 2000. 124p.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software *Tabulae***. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9., CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 23., 2003, Campinas. **Anais...** Campinas: CSBC, 2003. p. 275-286.

ANDRADE, R., SILVA, F, GUERRA, R. **Aprendizagem Significativa da Geometria Analítica e Vetores**. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2006, Recife. **Anais...** Recife: SIPEMAT, 2006. p.1-12.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva**. Tradução de Teopisto, L. Revisão científica, Teodoro, V.D. 1. ed. Lisboa: Editora Plátano. 2001. 215p.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick et al., **Educational psychology: a cognitive view**, 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana. 1980. 623p.

BAIRRAL, M. A.; ABREU, P. F. Política de inclusão digital mediante a informática educativa: um estudo com professores de matemática, refletindo sobre objetivos do Cabri, do Excel e do Powerpoint. In: **Zetetike (UNICAMPI)**, v. 17, p. 151–180. 2009.

BERNARSKI, E. L. F.; ZYCH, A. C. **Aprendizagem colaborativa aplicada numa sala de recursos**. Porto Alegre, 2009. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2052-8.pdf>>. Acesso em: 03 fev. 2013.

BICUDO, M. A. V. A contribuição da fenomenologia à educação. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Fenomenologia: uma visão abrangente da educação**. São Paulo: Olho d'Água, 1999.

\_\_\_\_\_. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

\_\_\_\_\_. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). **A informática em ação: Formação de professores, Pesquisas e extensão**. São Paulo: Olho d'Água, 2000.

BORBA, M.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 104p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2013.

BRITO, R. F.; PEREIRA, A. T. C. **Um estudo para ambientes colaborativos e suas ferramentas**. In: CONGRESSO NACIONAL DE AMBIENTES HIPERMÍDIA PARA APRENDIZAGEM, 1., 2004, Florianópolis. Anais eletrônicos... Florianópolis: UFSC, 2004.

CHIOCA, S. & MARTINS, N. Comunidade de aprendizagem investigativa: um novo paradigma para a educação. **Revista de divulgação técnico-científica do ICPG**, 4(1): 89-92. 2004.

CORDEIRO A. A. A. et al. A teoria da Lógica Mental e as Teorias Competitivas. **Revista Internacional de Psicologia/Interamerican Journal of psychology**. v. 40, n. 3, p. 257 – 266. 2006.

CORREA, L. M. Z. Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red. **Contexto educativo: Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías**. n. 28, 2003. Disponível em: < <http://contexto-educativo.com.ar/2003/4/nota-02>> Acesso em: 03 fev. 2013.

CORREIA, W. M. **Aprendizagem Significativa, explorando alguns conceitos de geometria analítica: Ponto e Reta**. 2011. 156 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: Da Teoria à prática**. 16 ed. Campinas: Papyrus, 1996. 60 p.

DETONI, A. R. Filosofia e Educação Matemática: construção de um olhar. In: BICUDO, M. A. (Orgs.). **Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimento**. São Paulo: Plano, 2003.

DETONI, A. R.; PAULO, R. M. A. Organização dos dados da pesquisa em cena: um movimento possível de análise. In: BICUDO, M. A. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

DI PINTO, M. A. **Ensino e aprendizagem de Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90**. 2000. 77f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP. 2011. 848p.

FROTA, M.C.R. **Experiência matemática e investigação matemática**. V CIBEM, Porto, Portugal, jul. 2005. Disponível em: <<http://www.matematica.pucminas.br/Grupos de Trabalho/Grupo PINEM>> Acesso em: 22 fev. 2013.

GOMES, G. H.; VICENTE, S. A. S.; POWELL, A. B. Virtual Math Teams: Discussão em um ambiente virtual no ensino de conteúdos matemáticos em um curso de engenharia. **Revista Trilha Digital**, v. 1, n. 1, p. 159-170. 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, PGIE-UFRGS, v. 2, n. 1, p. 73-88, mai. 1999.

HAGUENAUER, C. et al. Ambientes colaborativos de aprendizagem no apoio ao ensino presencial: A experiência do programa de pós-graduação em educação da UFRJ. **Colabor@-Revista Digital da CVA- Ricesu**, v. 4, n. 16, p. 1–12, nov. 2007.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental**: uma introdução à filosofia fenomenológica. Trad. Diogo Falcao Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012. p. 17 – 36.

INFORSATO, A. P.; PENTEADO, M. G.; GERALDO, W. B.; PINTO, R. M. **Atividades investigativas com software de geometria dinâmica**. 2009. Disponível em:< [http://prope.unesp.br/xxi\\_cic/27\\_36944898861.pdf](http://prope.unesp.br/xxi_cic/27_36944898861.pdf) > Acesso em: 12 mar. 2013.

KENSKI, V. M. **Novos processos de interação e comunicação no ensino mediado pela tecnologia**. Caderno de Pedagogia Universitária – Faculdade de Educação Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

LEMOS, E.S. A aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review** – v. 1, n. 1, p. 25-35, 2011.

LITWIN, E. La tecnología educativa en el debate didáctico contemporáneo. In: LITWIN, E. (Org.). **Tecnologías educativas en tempos de Internet**. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 2005. p. 13-34.

MALTEMPI, M. V. **Novas Tecnologias e Construção do Conhecimento**: reflexões e perspectivas. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Anais...** Porto: APM, 2005. p. 1-10.

MARTINS, J. **Um enfoque fenomenológico do currículo**: educação como poíesis. São Paulo: Cortez, 1992.

MASINI, E. A. F. S. Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, v. 1, n.1, p. 16-24, abr. 2011.

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de Professores de Matemática**: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003. p. 217-248.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: da visão clássica à visão crítica. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 5., **Atas...** Madrid, 2006.

\_\_\_\_\_. Organizadores prévios e aprendizagem significativa. **Revista Chilena de Educação Científica**, v. 7, n. 2, p. 23-30, 2008.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. **Aprendizagem Significativa**: A Teoria de David Ausubel. 4 ed. São Paulo: Centauro, 2007. 109 p.

O'HARA, Kate. **Tracing students' mathematical identity in an online synchronous environment**. 2010. 273p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Rutgers - Universidade Estadual de New Jersey, New Jersey, 2010.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, I.; PONTE, J. P.; CUNHA, M. H. **Investigações matemáticas na sala de aula**: um projecto colaborativo. Lisboa. 2000. Disponível em:<<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto11.PDF>> Acesso em: 03 mar. 2013

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v.1, n.1, p. 7-17, mar. 1993.

PENTEADO, M. G. Possibilidade para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. (Orgs.). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. São Paulo: Olhos D'Água, 2000. p. 23-34.

PINTO, R. L.; BEAN, D. **Atividades Investigativas Centradas no Estudo de Funções**: Exploração de Conceitos do Cálculo. ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2012, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA-RS, 2012. p. 1-9.

PINTO, R. M.; PENTEADO, M. G. **Geometria Dinâmica para sala de aula**. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 21., 2009, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: UNESP, 2009. p. 9375-9378.

PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos**: dificuldades e perspectivas. 2000. 245p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PONTE, J. P. **Investigar, Ensinar e Aprender**. Actas do ProfMat (CD-ROM, p.25-39). Lisboa: APM, 2003.

PONTE, J. P.; FERREIRA, C.; VARANDAS, J. M.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. **A relação professor - aluno na realização de investigações matemáticas**. Lisboa: Projecto MPT e APM. 1999.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C.; (1998). **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. *Quadrante*, v.7, n.2, p. 41 - 70.

POWELL, A. B. **Desafios e tecnologias nas escritas e leituras em educação matemática**. In: A. M. Nacarato & C. E. Lopes (Eds.), *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 149-168.

POWELL, A. B.; LAI, F. F. (2009). **Inscription, mathematical ideas, and reasoning in VMT**. In G. Stahl (Ed.), *Studying virtual math teams*. New York: Springer, 2009. p. 237-259

RAMOS, D. K.; QUARTEIRO, E.M. **Colaboração, problematização e redes**: um estudo com alunos do ensino fundamental. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28., 2005, Caxambu. **Anais eletrônicos...** Caxambu: ANPEd, 2005.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando o software de Geometria Dinâmica**: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

ROSA, P. R. da S. **A teoria cognitivista de David Ausubel**. Campo Grande. 2003. Disponível em: < [http://www.dfi.ufms.br/prrosa/instrumentacao/Capitulo\\_4.pdf](http://www.dfi.ufms.br/prrosa/instrumentacao/Capitulo_4.pdf)>. Acesso em: 04 jan. 2013.

SANTOS, I. N. **Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: Uma ponte do Ensino Medio para o Superior** construída na formação inicial de Professores de Matemática. 2011. 163f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SANTOS, M. R. **Um estudo fenomenológico sobre o conhecimento geométrico.** 2013. 214p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J. ABRANTES, P. **O currículo de matemática e as actividades de investigação.** In: P. Abrantes, et al. (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo.* Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 69-85.

SILVA, E. P.; CURI, E. **Atividades investigativas nas aulas de matemática: uma análise de atitudes de alunos do ensino médio e da prática profissional.** In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2006, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: FAE-UFMG, 2006. p. 1-16.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.** In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. In: **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Campinas: Papyrus. 2008, p. 15-39.

SOUSA, O. Investigações estatísticas no 6º ano. In: GTI (Ed.), **refletir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: APM. 2002. p. 75-97

TEODORO, V. D. Prefácio à edição portuguesa de matemática. In: AUSUBEL, D.P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva.** Tradução de Teopisto, L. Revisão científica, Teodoro, V.D. 1.ed. Lisboa: Editora Plátano. 2001. 215p.

TORRES, P. L. Laboratório on-line de aprendizagem: uma experiência de aprendizagem colaborativa por meio do ambiente virtual de aprendizagem. **Cad. Cedes,** Campinas, v. 27, n. 73, p. 335-352. set./dez. 2007.

TORRES, P. L.; ALCANTRA, P. R.; IRALA, E. A. F. Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional,** v. 4, n. 13, p. 1-17. set./out./dez. 2004.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: NIED/UNICAMP, 1999. p. 71-86.

\_\_\_\_\_. A. Mudanças na sociedade, mudanças na educação: o fazer e o compreender. In: VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: NIED/UNICAMP, 1999. p. 31-44.

VIANA, O. A. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais:** um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. 2000. 249f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6 ed. São Paulo, Martins Fontes, 1998.

## APÊNDICES

### Apêndice A

#### O diálogo sobre o contexto de Exploração em sala de aula

##### *Bloco 1 - Um convite à intuição sobre Exploração em sala de aula*

**Camila 1:** *Saber dos alunos até que ponto ele sabe de determinado assunto. [Diz de forma tímida e retraída]*

**Pesquisador 1:** *Esta seria uma exploração feita pelo professor que quer conhecer sobre os conhecimentos dos alunos. E o aluno, como a exploração se encaixa no contexto do aluno?*

**Luana 1:** *É ele pensar, expor os argumentos dele. [Retrai a voz ao falar]*

**Pesquisador 2:** *Muito bom! Estes são aspectos observáveis em uma exploração.*

**Roger 1:** *Aqui, eu iria pelo nome. [...] a exploração você me daria um problema e eu vou explorar os dados daquele problema. [Fala posta com certa segurança]*

**Pesquisador 3:** *Ótimo! A exploração sugere esta ideia de pegar um montante de informações e trabalhar com elas.*

##### *Bloco 2 - Convite à reflexão sobre Exploração em sala de aula mediante organização prévia*

**Pesquisador 4:** *sobre arqueologia, exploração arqueológica, vocês possuem algum tipo de conhecimento que possam expor aqui?*

**Mauro 1:** *Acho que o principal na arqueologia é pesquisar o que aconteceu e o que tem naquele local, por exemplo: de civilização antiga né, explorar o que tinha ou tentar descobrir. [argumenta com tranquilidade]*

**Daniele 1:** *Explorar seria quando você acha um campo lá, cheio de ossos, aí você tem de descobrir quais são, que corpo que é. Explorar dentro do que você achou a situação que você tinha, como que era. Igual aos filmes que já vi, que eles descobrem onde que essa pessoa viveu pelo arqueologismo. Pelo que tem de material ali, vê a idade mais ou menos que tem os ossos. [Demonstra tranquilidade na fala e conhecimento do assunto mediante experiências vividas]*

**Pesquisador 5:** *Vocês conseguem relacionar o que foi dito pela Daniele com o contexto de sala de aula?[Direcionando ao objetivo nuclear]*

**Fabiana 1:** *Acho que tem de comum é que as duas explorações possuem objetivos; a arqueológica quer encontrar antiguidades e a da sala de aula, que o aluno aprenda. [argumenta após breve reflexão]*

**Mauro 2:** *Pois é também podemos relacionar, é...[pensando], acho que por mexer com restos antigos em artefatos, tem que ter cuidado né, é um trabalho minucioso, então acho que a exploração em sala de aula deve ter essa característica. [Relaciona inicialmente inseguro, mas, dá continuidade, aparentemente certo do que estava falando]*

**Pesquisador 6:** *Bom de mais! Quanto aos objetivos, corretíssimo, quanto a este cuidado em explorar, é isto mesmo, em ambas as explorações, tudo dever ser feito como muita*

atenção, calma, para que possíveis observações possam ser feitas. Temos mais exemplos?[Evidencia a satisfação e incentiva a continuação do diálogo]

**José 1:** Vou pegar um exemplo bem grotesco: você tá explicando equação pro aluno. [...] você tá lá, resolve dar alguma coisa de balança, aí, o pessoal começa a errar, ai tem muita gente, tem muito professor que considera tudo errado e ponto, ao invés de olhar onde o aluno tá errando pra explorar o erro, ao invés de ver onde ele tava acertando pra ver o que ele entende, pra ver onde tá a dificuldade. [Com empolgação ao perceber e apontar um aspecto relacionável]

**Amanda 1:** Quando você deu aquela atividade que você aplicou, quando você apresentou algumas figuras, será que você não estava explorando? [pergunta ao pesquisador sobre atividade posta no pré-levantamento]

**Pesquisador 7:** Ótimo! vocês estão descrevendo características importantes que viabilizam a exploração por parte do professor. Mas existe também exploração por parte dos alunos, e ai, o que podem dizer sobre isto?[Demonstra empolgação com as falas postas e direciona o discurso para aspectos relacionados ao aluno]

**Fernando 1:** O uso do material dourado, por exemplo, acho que é uma atividade de exploração, você dá o material pro aluno, ele vai tentar entender. Pede pra ele montar frações com o material dourado, ele vai fazer várias frações e vai ter que entender quais peças ele vai ter que usar. [Responde imediatamente, com tranquilidade de quem aparentemente já vinha pensando neste exemplo]

**Pesquisador 8:** Exatamente! É um bom exemplo Fernando. Montando as frações com as peças do material dourado e representando os resultados também com as peças, fazendo isto repetidas vezes, com diferentes frações, eles podem perceber regularidades, padrões, e podem aprender com isso. [Elogia com empolgação]

### Bloco 3 - Um discurso rumo à caracterização de Atividades Exploratórias

**Roger 2:** Eu acredito que o primeiro momento [se referindo ao primeiro bloco evidenciado na figura] se assemelha com o problema que você dá para o aluno com algumas informações, você esperando que ele chegue a algum ponto que você esperava que ele deveria chegar, se ele chagar neste ponto, ou não chegar, você dá, não uma dica, mas mais material de exploração, que seria a segunda parte [se referindo ao segundo bloco da figura] e assim sucessivamente até ele descobrir o que você tá querendo que seja percebido, ou que quer ensinar. Se ele for caminhando sozinho; “à cheguei aqui”, sozinho ele vai pro próximo ponto. Eu acredito que seja mais ou menos este o caminho de uma atividade exploratória. [Argumenta com tranquilidade após olhar atentamente para a figura]

**Daniele 2:** Eu pensei quase o que o Roger falou, mas, antes de chegar na primeira parte, eu acho que você tem que ter um estudo do solo que você vai procurar, por exemplo: tem várias terras e nem todas tem fósseis, então acho que na primeira parte você vai se nortear pra ver se aquilo ali que você quer entra no contexto, por que as vezes você quer muito aplicar uma atividade naquela turma mas aquilo depende do interesse. Então, assim, não é só você querer levar a atividade tem que ter um interesse de volta, porque se não você vai escavar em uma coisa que não tem nada, de acordo com o interesse dele você vai nortear até chegar onde você vai refinar pra chegar, não pra você descobrir, mas pra ele descobrir. [Demonstra segurança na fala]

## Apêndice B

### O diálogo sobre o contexto de Colaboração em sala de aula

*Bloco 4 – Um convite à reflexão sobre a Colaboração perceptível ou não no organizador prévio apresentado*

**Camila 2:** *O jogo em equipe dá resultado! [risos]*

**Lúcia 1:** *Eles utilizam o time todo [aparentemente surpreendida com o que viu]*

**Luana 2:** *Teve colaboração porque um ajudou o outro. [fala com firmeza]*

**Mauro 3:** *Pois é, é até uma característica da Espanha, quando um pega na bola, outro aparece pra receber, eles confiam né, tocam pra todos sem o medo do cara perder a bola. [solene ao afirmar]*

**Letícia 1:** *Eu acho que é colaborativo! Olha só, você vê várias vezes, eu acho que no Brasil acontece muito isso, um cara deixa de marcar o gol pra falar assim: “eu fiz o gol”, deixa de passar a bola pro outro pra ele ter o mérito do gol, aí acaba perdendo o gol. No dá Espanha você não vê isso, você vê a pessoa tocando, e as vezes eles tocam, passam pro outro ainda pra só quando ter certeza que vai marcar o gol chutar sabe, coisa que você não vê na seleção brasileira. [fala tranquilamente. Ri após criticar a seleção brasileira de futebol]*

*Bloco 5 – Um convite à reflexão sobre Colaboração em sala de aula mediante organização prévia*

**Letícia 2:** *Eu vejo muito em sala de aula, muitas vezes você divide em grupos e sempre tem aquele “cabeça” do grupo, que não aceita a opinião do próximo, isso acontece muito, e é isso que a gente tem que reverter pra que aconteça de forma colaborativa. [se posiciona com certa insegurança]*

**Mauro 4:** *Nem sempre toda equipe está preparada pra colaborar né, por exemplo: o time da Venezuela nem pegava na bola. [risos] Acho que a questão da equipe tem que andar em conjunto né, antes tem que ter muita preparação pra poder ter a participação de todos, antes de começar um jogo como este é dado um treinamento anterior né. [após rápida reflexão, fala com tranquilidade]*

**Roger 3:** *[...] quando você tá mexendo com problemas [...] abertos, você vai chegar em momentos que tem problemas que tem respostas que são, entre aspas, melhores que outras; igual: um grupo pode ser mais eficaz encontrando uma resposta, mas aí, um grupo pode ser mais eficiente e encontrar uma resposta melhor, mais abrangente, e o trabalho colaborativo ajuda isso, as vezes um cara consegue ser eficaz, chegar num resultado, mas não consegue ver a grandiosidade daquele resultado pode tomar, e uma outra pessoa diz “há! Mas isso aí você pode fazer assim, é similar com este daqui também”, aí cê abre a cabeça mais, trabalhando com o trabalho colaborativo. [aparentemente afoito]*

**Fernando 2:** *Eu acho que alí [se referindo ao jogo], assim como na sala de aula eles [os jogadores] tinham um objetivo e o objetivo não foi alcançado só porque o cara chutou a bola pro gol, teve todo um trabalho, desde o zagueiro que saiu lá de traz tocando a bola, até*

*tentar abrir um espaço alí na defesa da Venezuela. Então o que é o trabalho colaborativo? Todo mundo teve uma participação importante, aquele toque de alado, o pessoal fala “não! Isso aí é desnecessário, não precisa tocar tanto”. É claro que precisa! São passos, você vai vencendo cada um pra chegar no objetivo, acho que isso é o trabalho colaborativo em sala de aula; todos participam, mesmo que seja com uma parte pequena, mas que vai ser importante para o grupo.[ Demonstra tranquilidade ao estruturar sua fala]*

**José 2:** *Essa parte também, que, por exemplo: em relação a sala de aula, que todos os toques ali, que menor que for ficar só tocando a bola na zaga e tudo, foram importantes sabe, essa troca de conhecimento que as vezes, um fala uma coisa assim, depois acha “pô, isso não sei se vai ressaltar, não sei se vai ser bom” mas que a menor troca ali que teve, já foi de importância. [fala com certa insegurança e nervosismo]*

**Fabiana 2:** *Acho que o suporte que um dá pro outro, ajuda, às vezes você não tem conhecimento, mas o outro tem, e ele ajuda você a prosseguir. [indaga com serenidade e objetividade]*

**Daniele 3:** *Até a opção assim de um aluno, “tive uma ideia”: tal, tal, tal, mesmo que essa ideia não seja uma forma correta de se pensar aquele conteúdo, aquele exercício, a exploração daquilo ali, pra mostrar que aquilo não serve naquele caso, também é válido. [se expressa em tom solene]*

**Pesquisador 9:** *Realmente! Nessas ideias que muitas vezes são tratadas como erros, existem tantas possibilidades, tantas coisas podem ser discutidas e aprendidas a partir delas. Esse tratamento em grupo de todas as ideias postas, sejam elas coerentes ou não, só eleva a possibilidade de aprendizagem e crescimento do grupo como um todo. [Dá crédito ao dito por Daniele e completa com tranquilidade]*

**Roger 4:** *No pré-levantamento você pergunta, eu acho que é sobre o trabalho colaborativo, eu respondi e tá bem dentro disso mesmo, coloquei que, [...] pra mim seria a gente no DA [Diretório Acadêmico] estudando pra uma prova, a galera, aí de repente chega um outro aluno lá, olha alguém resolvendo alguma coisa no quadro, “alá, tenta por isso” aí, “á porque que eu não pensei nisso antes”, três fazendo, nenhum pensou naquilo, aí chega um, olha pro quadro e vê uma herança que outros não tão vendo. Entendo que isso faz Parte do trabalho colaborativo também. [fala corrida, sem tanta precisão, porem bem segura]*

**Pesquisador 10:** *Exatamente! É um bom exemplo, porque muitas vezes são alunos que são classificados como ruins ou medianos, que dão este tipo de “sacada”, é na simplicidade do pensar deles que respostas não tão complexas e inesperadas são dadas. [Demonstra satisfação com o posicionamento de Roger]*

## Apêndice C

## O diálogo sobre o contexto de Investigação em sala de aula

*Bloco 6 – Um convite à reflexão sobre Investigação Matemática em sala de aula mediante organização prévia*

**Lúcia 3:** *Tem a situação inicial ali né, primeiros eles olham as fichas, pra depois ir atrás, assim, começam de uma situação inicial pra depois ir criando coisas e testando né. [inicia segura, posteriormente vai se retraindo]*

**Luana 3:** *Buscando conceitos, igual lá, viu a unha pintada, aí começa ligar as coisas. [completa timidamente a fala de Lúcia]*

**José 3:** *Eu achei importante, fazendo associação, que eles não descartaram coisas que tinham, tipo, igual aquele ioga ali, foi um dado inicial também sabe, é igual na sala de aula, as vezes tem outros dados em volta, tirando o tema central, que são também importantes pra resolução final. [argumenta solenemente]*

**Fernando 3:** *Fazendo analogia, ali tinha um crime para ser investigado, então, primeiro ele buscou o que as vítimas tinham em comum pra buscar alguma regularidade, é o que acontece também em sala de aula, os alunos devem buscar regularidades pra entender e continuar na investigação. Na criminal, eles juntam essa regularidade e vai buscar, viam o que eles tinham e vai buscar os suspeitos. Na matemática a gente reúne as regularidades e faz as conjecturas. E aí eles começam a interrogar os suspeitos, na matemática, a gente pega as conjecturas e vai verificar se realmente é válida. [Fala tranquila, porém com alguns intervalos reflexivos entre as comparações]*

**Roger 5:** *É, e no caso ali, é como se fosse assim, eu faria analogia; vamo supor: cê tem as ferramentas, vamo supor, os teoremas, definições matemáticas, e você tem o crime, que seria, vamo supor: os problemas, alguma coisa que você queira resolver em matemática, alguma atividade, alguma coisa do tipo, e ali, na hora que você busca as coisas em comum entre as vítimas, lá pra mim seriam dados, tipo: o que eu tenho? O que eu posso conseguir do problema? O que eu, é...o que esta situação, esta atividade me dá? Ai eu vou investigar. [...] investigação seria achar essas coisas em comum e saber como a partir delas eu vou responder o problema final. [demonstra segurança inicial, se retrai durante, e finaliza a fala com segurança]*

*Bloco 7 – A ênfase dada ao levantamento de interrogações para delineamento de uma investigação*

**Bruna 1:** *Eu observei a busca deles pelas informações para resolver o crime, teve uma hora que a mulher perguntou, “qual será o próximo passo dele?”, e tiveram outras perguntas que não lembro, mas acho que na investigação em sala de aula é isso, os alunos devem investigar partindo de perguntas que vão levar eles a algum lugar. [fala com tranquilidade]*

**Roger 6:** *Essa parte que Luana falou, fazendo analogia de novo, quando você fala “qual o próximo passo dele?”, seria meio como: “a essa aqui é a diagonal de um quadrado, mas o*

que que eu ganho com isso?”, esse serio o “qual é o próximo passo?”, “o que eu ganho com isso pra continuar?”, aí você vai investigar isso e vai indo e indo.[movimenta as mão para mostrar a continuidade].[fala com tranquilidade]

**José 4:** Eu acho que, por exemplo, entrando um pouco no contexto das situações, igual as online, as que a gente fez no computador, quando a gente tá procurando os métodos, é igual, sei lá, eu que participei da atividade de elipse, “a cê quer achar aquela distância, por exemplo, A e B por exemplo, pô mas como eu vou achar isso?”, então você já tem algumas ferramentas, então acho que é o próprio aluno que já chega e coloca essas perguntas, não é o professor que dá as perguntas. [demonstra-se seguro de uma intenção, mas inseguro ao expô-la]

**Roger 7:** Também acho. E se, por exemplo, o aluno não chegar nessa pergunta e ela for crucial pra resolver o problema por exemplo, “aí, como fazer?”, não sei! Você teria que fazer o aluno chegar nela. [movimentando os ombros, gesticula “não saber”]

**Fernando 4:** Na investigação acho que o professor deve ficar mediando, ficar analisando cada grupo, vendo o que eles estão fazendo. Ele deve tentar direcionar, mas não entregar o ouro, ele pode questionar: por que você usou isso aqui? Aí ele vai se perguntar: que utilidade tem aquilo? [...] O professor encaminha, mas sem direcionar claramente o que é que é. [demonstra segurança na resposta]

#### Bloco 8 – Comparação entre Atividades Investigativas e Atividades Exploratórias

**Bruna 2:** vou tentar comparar aqui; na outra atividade que fizemos, que foi a exploratória, tinha algumas informações ali que guiavam a gente até a definição, é uma atividade fechada que direciona ao aprendizado né. Pelo que eu vi do vídeo e percebi na fala de vocês, a investigação é mais...é...não sei, é mais aberta né, é o aluno que tem que correr atrás das coisas, das perguntas corretas, das metodologias.[demonstra segurança inicial e um instante de imprecisão no decorrer da fala]

**José 5:** Completando, acho também que quando o aluno vai investigar, ele, por exemplo, sei lá, vai que ele monte alguns passos, um procedimento pra chegar em uma resposta qualquer, ele estaria ai explorando né, então o aluno pode explorar enquanto investiga também, não sei, mas acho que é isso né?[fala com tranquilidade, apesar do “sei lá” demonstra estar seguro do que diz]

**Pesquisador 11:** Muito bom gente! É exatamente isso! A exploração é realmente mais direcionada, o professor sugere alguns passos, querendo promover uma aprendizagem guiada, já a investigação é um contexto mais aberto, é dada uma situação e o aluno é convidado a ser autônomo e se engajar sobre esta situação. O aluno pode até efetuar uma exploração enquanto investiga. Isso mesmo José! [com empolgação]

## Apêndice D

## Questionário respondido pelos pesquisados

Caro aluno.

Sou aluno do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Nossa proposta de pesquisa consiste em refletir, na prática, a Aprendizagem Significativa de alguns conceitos de Geometria Analítica Plana por intermédio de atividades exploratórias e investigativas aplicadas em *softwares* de Geometria Dinâmica.

O intuito deste questionário é levantar informações relevantes para o desenvolvimento da pesquisa. É solicitado que se identifique, mas, saiba que atendendo a princípios éticos, seu nome não será mencionado em momento algum. Leia atentamente os tópicos e as alternativas correspondentes.

Agradecidos.

Pesquisador: José Milton Lopes Pinheiro

Orientador: Adlai Ralph Detoni

Aluno (a):

Curso:

Período em curso:

**1 Marque a alternativa correspondente a sua faixa etária.**

( ) 17 a 20 anos

( ) 31 a 35

( ) 21 a 25 anos

( ) Mais de 35 anos

( ) 26 a 30 anos

**2 Em qual instituição escolar cursou o ensino médio?**

( ) Escola pública Municipal

( ) Escola particular

( ) Escola pública estadual

( ) outra: \_\_\_\_\_

( ) escola pública federal

**3 No Ensino Médio você estudou Geometria Analítica Plana? (Marque apenas uma opção)**

( ) Sim, e aprendi muito

( ) Não foi ensinado

( ) Sim, mas aprendi pouco

( ) Não me lembro

( ) Sim, mas de forma rápida e superficial

**4 Quanto às atividades apresentadas pelo professor nas aulas de matemática do Ensino Médio:**

4.1 *O professor apresentava atividades nas quais você tinha que seguir algumas instruções e refletir sobre as implicações das mesmas, para que no final, descobrisse por si mesmo, algum/alguns conhecimento(s) matemático(s)? (Marque apenas uma opção)*

( ) Sim, apresentava muitas atividades do tipo

( ) Sim, mas poucas vezes

( ) O professor não trabalhava este tipo de atividade

4.2 *O professor apresentava atividades com poucas informações, nas quais você tinha liberdade para fazer suposições, inferências, testes, levantar suas próprias perguntas sobre a atividade, e escolher meios e métodos para solucionar tais perguntas? (Marque apenas uma opção)*

- Sim, apresentava muitas atividades do tipo
- Sim, mas poucas vezes
- O professor não trabalhava este tipo de atividade

**5 Quanto à metodologia utilizada pelo professor de matemática no Ensino Médio: (Marcar uma ou mais opções)**

- O professor introduzia o novo conteúdo com; uma definição, seguida de demonstração da fórmula, exemplos e listas de exercícios.
- O professor procurava fazer um levantamento de seus conhecimentos antes de aplicar um novo conteúdo.
- O professor relacionava o novo conteúdo a ser ensinado a conhecimentos que você já possuía, concebidos no ambiente familiar, no ambiente social, no cotidiano.
- O professor ensinava um novo conteúdo sem se preocupar se você possuía conhecimentos que facilitariam a aprendizagem desse novo conteúdo.
- O professor promovia uma introdução histórica, ou qualquer outra mais generalizada, antes de ensinar um conteúdo mais específico.
- O professor utilizava de tecnologias informatizadas no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos.

**6 Quanto às atividades em grupo vivenciadas por você na sala de aula durante o Ensino Médio: (marque uma ou mais opções)**

- Todos do grupo participavam ativamente, respeitavam e discutiam as ideias de cada membro.
- Alguns alunos ficavam dispersos, um ou dois empenhavam-se na atividade.
- O professor acompanhava a atividade incentivando a colaboração e o diálogo entre os membros do grupo.
- O professor não mediava a atividade em grupo.
- O professor promovia a socialização dos resultados obtidos pelos grupos.

**7 Quanto ao envolvimento com softwares de geometria dinâmica (Marque apenas uma opção)**

- Conheço bem a funcionalidade e as possibilidades técnicas e didáticas de softwares de Geometria Dinâmica.
- Conheço um pouco, e pouco trabalhei nestes softwares.
- Fui apenas apresentado às ferramentas de software(s) de geometria dinâmica.
- Conheço bem e trabalho com software(s) de geometria dinâmica.
- Não conheço.

Se conhecer, cite alguns destes softwares e diga em que situação você os conheceu.

---



---

**8 Quais objetivos pretende alcançar como professor de matemática? Dentro destes objetivos, quais contribuições intui proporcionar a seus alunos?**

---



---



---



---

Apêndice E

O pré-levantamento aplicado

Caro aluno.

Pretende-se com este pré-levantamento, observar os conhecimentos prévios que você possui sobre determinados conteúdos, conceitos ou assuntos.

Os dados aqui observados não serão tratados como positivos ou negativos. Assim, uma questão: respondida, em branco, justificada, não justificada, fornecem dados relevantes para esta pesquisa.

Agradecidos.

Pesquisador: José Milton Lopes Pinheiro

Orientador: Adlai Ralph Detoni

Aluno(a) :

Período em curso:

1 Sobre as secções cônicas.

- a) No espaço abaixo, ilustre cada uma das secções cônicas.
- b) Escreva o que sabe sobre as secções cônicas, indique: elementos de cada uma, propriedades específicas, definições, etc.
- c) Relacione por semelhança, as figuras abaixo às secções cônicas. Indique a(s) secção/secções que podem ser observada(s) em cada figura.



I).....II).....III).....  
 IV).....V).....

2 Escreva o que entende por trabalho colaborativo em sala de aula. Se colocações forem feitas, tente relacioná-las a aspectos presenciados no dia-a-dia.

3 Determine a distância entre o centro da secção cônica de equação  $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$  e o foco de coordenadas positivas da secção cônica de equação  $9(x + 1)^2 + 25y^2 = 225$ .

4 Descreva o que presume quando se fala em “utilização de investigação no ensino e na aprendizagem de matemática”. Se presumir algo, argumente e relacione tais argumentos a aspectos observáveis no cotidiano.

5 O que pode dizer sobre o comportamento gráfico de uma hipérbole quando seus vértices são aproximados? E o que acontece quando os vértices são coincidentes?

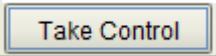
## Apêndice F

As atividades sugeridas

### **ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1 (PRESENCIAL)**

Caros alunos, o objetivo principal da atividade, é que vocês estabeleçam um diálogo colaborativo para execução da mesma.

#### **ORIENTAÇÕES RELEVANTES PARA ENVOLVIMENTO COM A ATIVIDADE.**

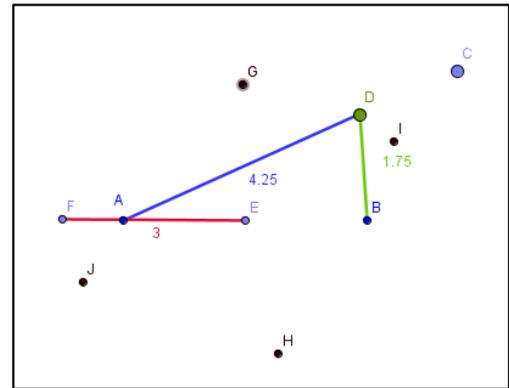
- O aluno que clicar no ícone  , terá momentaneamente controle sobre o Geogebra. Assim, os demais membros do grupo não conseguirão mexer, a menos que solicite o controle.
- Na aba “Resumo”, um de vocês deve criar caixas de texto, e nas mesmas, descrever em síntese, o que vem sendo discutido pelo grupo.
- Responsabilizem-se por garantir com que os passos indicados no folheto seja seguido corretamente. Cuidem para que os membros do grupo mantenham um diálogo constante, e que nesse diálogo, todos sejam ouvidos e respeitados.

Link de acesso ao VMTwG: <http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/>

Sucesso na atividade!

## ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1

Na aba *Geogebra*, constam os objetos:



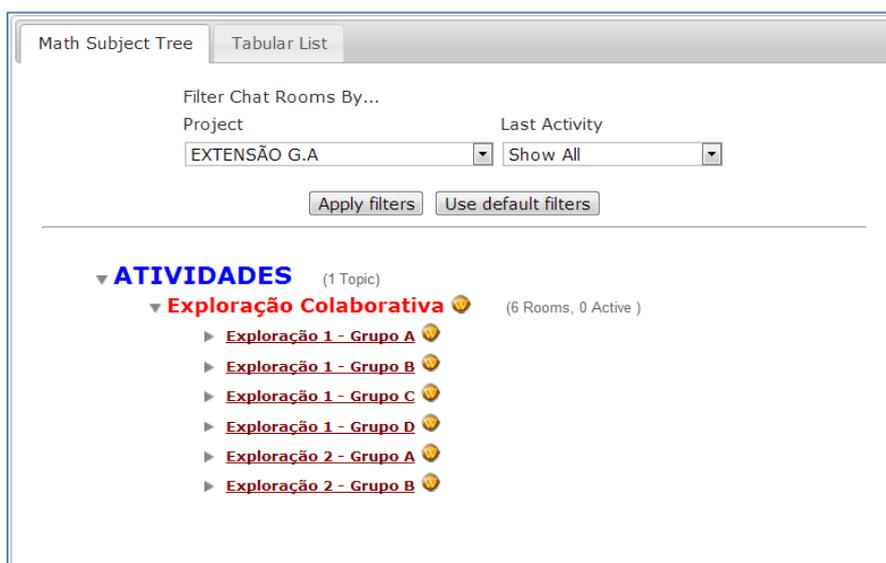
- 1 - Clique no ícone  (controlar), em seguida no ícone  (mover), selecione o ponto **C**, e movimente-o como bem entender.
- 2 - Discutam sobre o que é observável com relação aos segmentos postos quando se movimenta o ponto **C**.
- 3 - Na aba “Resumo” crie uma caixa de texto, e sintetize o que foi apresentado e discutido sobre as observações feitas.
- 4 - Movimente o ponto **C** de forma a sobrepor o ponto **D** aos pontos pretos apresentados. Discutam sobre o que observaram nessas ações. Na aba “Resumo”, apontem resumidamente as indagações do grupo.
- 5 - Clique sobre o ponto **D** com o botão direito do mouse, e selecione a opção “Trace On”. Clique novamente, agora com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto **C** e arraste-o como bem entender.
- 6 - Escreva na aba “Resumo”, o que diz o grupo, sobre: qual figura formada pelo movimento do ponto **D**, e que elementos da mesma representam os pontos, **A, B, D, E e F**.
- 7 - Uma definição é construída a partir de propriedades de um objeto. Em Geometria Dinâmica, uma definição pode ser sugerida a partir da invariância de um ou mais elementos, percebida durante alguns movimentos propiciados pelas ferramentas do *software*.
- 8 - Levando em consideração os itens anteriores, em especial o item 7, discutam uma definição para a figura encontrada. Em seguida, descrevam tal definição na aba “Resumo”.

## ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS 2, 3 e 4 (VIRTUAIS)

Caros alunos, o objetivo principal da atividade, é que vocês estabeleçam um diálogo colaborativo para execução da mesma. Por ser um encontro virtual, não teremos registros falados. Então, durante o diálogo no *chat*, tentem expor ao máximo; seus pensamentos, dúvidas, inferências, intuições, etc.

### ORIENTAÇÕES RELEVANTES PARA ENVOLVIMENTO COM A ATIVIDADE

- Acessem o link: <http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/>
- Digite usuário e senha. Já no ambiente, em Project, selecione EXTENÇÃO G.A e clique em Apply Filters.
- Clique na seta em ATIVIDADE, em seguida na seta em Exploração Colaborativa.
- Abra a sala Exploração (n<sup>o</sup>), correspondente a seu grupo. Segue procedimento.

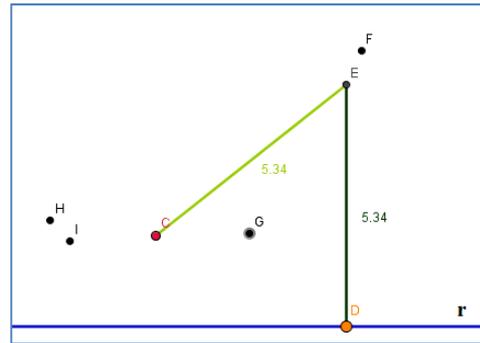


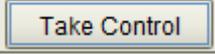
- Na aba “Resumo”, um de vocês deve criar caixas de texto, e nas mesmas, descrever em síntese, o que vem sendo discutido pelo grupo.

Sucesso nas atividades!

## ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 2

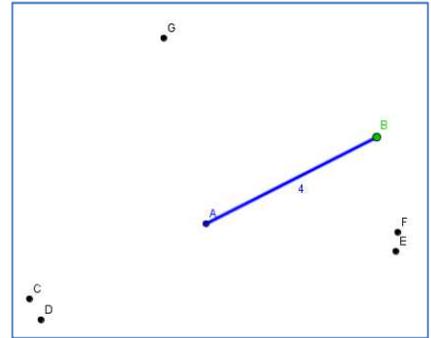
Na aba *Geogebra 1*, constam os objetos:

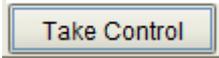


- 1 - Clique no ícone  (controlar), em seguida no ícone  (mover), selecione o ponto **D**, e movimente-o como bem entender.
- 2 - Discutam sobre o que é observável com relação aos objetos postos ao movimentar o ponto **D**.
- 3 - Resumam o que foi apresentado e discutido sobre as observações feitas na interação. Escreva este resumo na aba *Resumo 1*.
- 4 - Movimente o ponto **D** de forma a sobrepor o ponto **E** aos pontos pretos apresentados. Discutam sobre o que observaram nessas ações. Na mesma aba de resumo, descrevam uma síntese das indagações do grupo.
- 5 - Clique sobre o ponto **D** com o botão direito do mouse e selecione a opção “*Trace On*”. Clique novamente, agora com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto **D** e arraste-o como bem entender.
- 6 - Escreva na aba *Resumo 1*, o que diz o grupo, sobre: qual figura formada pelo movimento de **E**, ao arrastar o ponto **D**, e que elementos da mesma, representam o ponto **C** e a reta **r** ali exposta. Faça com que **CD** seja igual a 2, nesse caso, o que representa o ponto **E**? Descrevam na aba *Resumo 1*.
- 7- Descrevam na mesma aba, as indagações do grupo sobre elemento(s) que não variam mesmo após o movimento de **D**.
- 8 - Uma definição é construída a partir de propriedades de um objeto. Em Geometria Dinâmica, uma definição pode ser sugerida a partir da invariância de um ou mais elementos, percebida durante alguns movimentos propiciados pelas ferramentas do *software*.
- 9 - Levando em consideração os itens anteriores, em especial o item 8, discutam uma definição para a figura encontrada. Em seguida, descrevam tal definição na aba *Resumo 1*.

### ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 3

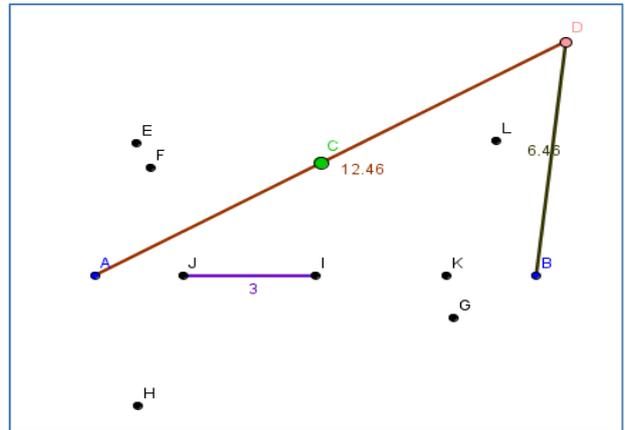
Na aba *Geogebra 2*, constam os objetos:

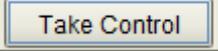


- 1 - Clique no ícone  (controlar), em seguida no ícone  (mover), selecione o ponto **B**, e movimente-o como bem entender.
- 2 - Discutam sobre o que é observável quando se movimenta do ponto **B**.
- 3 - Na aba *Resumo 2* sintetizem o que foi apresentado e discutido pelo grupo.
- 4 - Sobreponha o ponto **B** a cada um dos demais pontos. Discutam sobre o que observaram nessas ações. Na mesma aba de resumo, coloquem de forma resumida as indagações do grupo.
- 5 - Mova B para um lugar qualquer que não coincida com os demais pontos.
- 6 - Clique sobre o ponto **B** com o botão direito do mouse e selecione a opção “Trace On”. Clique novamente, agora com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto B e arraste-o como bem entender.
- 7 - Escreva na aba *Resumo 2*, o que diz o grupo sobre: qual figura formada pelo arrastro do ponto B, e quais elementos da mesma, representam: o ponto **A** e o segmento **AB**.
- 8 - Uma definição é construída a partir de propriedades de um objeto. Em Geometria Dinâmica, uma definição pode ser sugerida a partir da invariância de um ou mais elementos, percebida durante alguns movimentos propiciados pelas ferramentas do *software*.
- 9 - Levando em consideração os itens anteriores, em especial o item 8, discutam uma definição para a figura encontrada. Em seguida, descrevam tal definição na aba *Resumo 2*.
- 10- Na aba *Resumo 2*, respondam a seguinte pergunta: Se criarmos vários outros segmentos com origem em **A** e comprimento 4, qual seria a localização das extremidades destes segmentos?

## ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 4

Na aba *Geogebra*, constam os objetos:



- 1 - Clique no ícone  (controlar), em seguida no ícone  (mover), selecione o ponto **C**, e movimente-o como bem entender.
- 2 - Promovam uma discussão sobre o que é observável com relação aos segmentos postos quando movimentado o ponto **C**.
- 3 - Resumam o que foi apresentado e discutido sobre as observações feitas na interação. Escreva este resumo na aba *Resumo*.
- 4 - Movimente o ponto **C** de forma a sobrepor o ponto **D** aos pontos pretos. Discutam sobre o que observaram nessas ações. Na mesma aba de resumo, sintetizem as indagações do grupo.
- 5 - Clique sobre o ponto **D** com o botão direito do mouse e selecione a opção "Trace On". Clique novamente, agora com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto **C** e arraste-o como bem entender.
- 6 - Escrevam na aba *Resumo*, o que diz o grupo, sobre; qual figura formada pelo movimento do ponto **D**, ao arrastar o ponto **C**, e que elementos da mesma representam os pontos, **A**, **B**, **J**, **I**, **K** e **D**.
- 7 - Uma definição é construída a partir de propriedades de um objeto ou evento. Em Geometria Dinâmica, uma definição pode ser sugerida a partir da invariância de um ou mais elementos, percebida durante alguns movimentos propiciados pelas ferramentas do *software*.
- 8 - Escrevam na aba *Resumo*, uma definição para a figura encontrada, levando em consideração os itens anteriores.

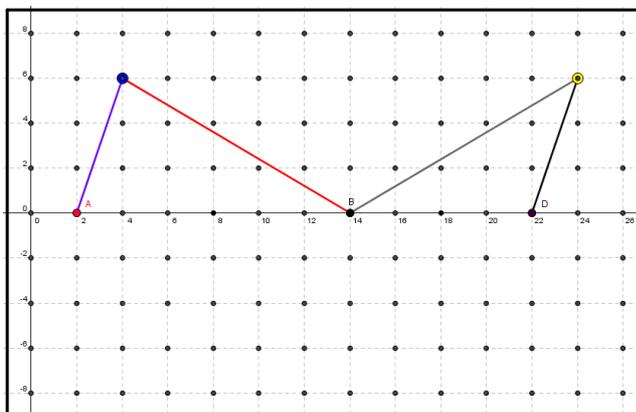
## ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1

Carlos é um menino de 15 anos, que com sua simpatia conquistou a amizade de muitos no condomínio em que reside. Certo dia, Carlos foi sorteado em uma rifa promovida pela Rede de Condomínios Abrantes, destinada a compra de cestas básicas para creches da região. O prêmio para o sorteado consistia em uma viagem a Walt Disney com no mínimo 3, e no máximo 4 acompanhantes.

O responsável pela rede de condomínio estipulou os seguintes critérios para a entrega dos convites:

- *Os acompanhantes devem ser moradores de outras casas do condomínio. (A iniciativa de chamar pessoas de outras casas objetiva aproximar as pessoas do condomínio, na tentativa de gerar um ambiente mais agradável).*
- *A pessoa sorteada deve caminhar a partir de sua casa, em linha reta (sem fazer curva: sem desviar das outras casas) até a casa dos acompanhantes escolhidos.*
- *O ganhador deve passar apenas nas casas dos acompanhantes que escolherá.*

Na planta do condomínio, conforme abaixo, as casas são representadas por pontos dispostos no eixo cartesiano, distanciados 2cm um do outro. Sabendo que cada centímetro na planta corresponde a 4 metros da construção real, e que, Carlos morador da casa A, certamente levará seus dois melhores amigos, Eduardo, que mora na casa B, e Fernando, que mora na casa D. Investiguem as possibilidades de escolha do/dos outro(s) acompanhante(s). Discutam, levantem questões, e registrem as observações provenientes de cada movimento feito.



**ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2**

- 1 Dada a elipse de equação  $\delta: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$  e a reta  $r$  do tipo  $y = x + b$ . Investigue as possíveis relações entre  $\delta$  e  $y$ .
  - 1.1 Qual posição relativa entre a reta e o gráfico da elipse, quando  $b = 6$ ?
  - 1.2 Para quais valores de  $b$  a reta é tangente ao gráfico da elipse?
2. Assim como feito nos itens 1.1 e 1.2, elaborem o item 1.3 e 1.4 (se estiverem a vontade, podem elaborar mais itens), com perguntas de interesse do grupo que dê sentido de continuidade às perguntas iniciais.