

Jonathan Esteban Arroyo Silva

**Uma Técnica Explícita de Marcha no Tempo para Ondas Elásticas Baseada  
em Funções de Green Calculadas Localmente pelo MEF**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Felipe dos Santos Loureiro

Coorientador: Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva Barra

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Jonathan Esteban Arroyo.

Uma técnica explícita de marcha no tempo para ondas elásticas baseada em funções de Green calculadas localmente pelo MEF / Jonathan Esteban Arroyo Silva. -- 2014.

101 p. : il.

Orientador: Felipe dos Santos Loureiro

Coorientador: Luis Paulo da Silva Barra

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2014.

1. Funções de Green locais. 2. Princípio da causalidade. 3. Marcha no tempo. 4. MEF. 5. Ondas elásticas. I. Loureiro, Felipe dos Santos , orient. II. Barra, Luis Paulo da Silva , coorient. III. Título.

Jonathan Esteban Arroyo Silva

**Uma Técnica Explícita de Marcha no Tempo para Ondas Elásticas Baseada  
em Funções de Green Calculadas Localmente pelo MEF**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 24 de Fevereiro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. D.Sc. Felipe dos Santos Loureiro - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva Barra - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. D.Sc. Elson Magalhães Toledo  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Ph.D. Webe João Mansur  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

*Dedico este trabalho aos meus  
pais, irmã e irmãos.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, sendo ele quem for. Aos meus pais, irmã e irmãos pelo apoio, amor e incentivo ao longo destes anos. Ao meu orientador Felipe pela excelente orientação e por todo o conhecimento transmitido. Gostaria de agradecer também ao meu coorientador Luis Paulo, aos demais professores e aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, sem os quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

Agradeço a FAPEMIG pelo apoio financeiro durante o curso.

*'A alegria está na luta, na  
tentativa, no sofrimento  
envolvido e não na vitória  
propriamente dita.'*  
*Mahatma Gandhi*

## RESUMO

Este trabalho apresenta um novo esquema de marcha no tempo capaz de reduzir oscilações espúrias através de amortecimento numérico para problemas de propagação de ondas elásticas no âmbito da Aproximação Explícita de Green (“Explicit Green’s Approach” (ExGA)) [1]. A expressão integral referente ao ExGA é escrita em termos das funções de Green e Degrau. Seus cálculos são realizados de forma independente por meio da formulação semi-discreta do MEF e o método Diferença Central. Devido ao princípio da causalidade, as funções de Green e Degrau possuem um suporte compacto ao redor dos pontos fonte para um intervalo de tempo suficientemente pequeno que é usualmente empregado nos métodos explícitos clássicos de integração temporal aplicados à modelagem de propagação de ondas. Neste sentido, as funções de Green e Degrau em  $t = \Delta t$  podem ser eficientemente calculadas localmente através de subdomínios pequenos. Cada subdomínio local com sua respectiva submalha cobre somente pontos nodais onde os valores das funções de Green e Degrau são não nulos. A precisão e eficiência da metodologia proposta é demonstrada ao analisar três exemplos numéricos.

**Palavras-chave:** Funções de Green locais. Princípio da causalidade. Marcha no tempo. MEF. Ondas elásticas.

## ABSTRACT

This work presents a new time-marching scheme able to reduce spurious oscillations by means of numerical damping for elastic wave propagation problems in the framework of the Explicit Green's Approach (ExGA) [1]. The integral expression concerned with the ExGA is written in terms of the Green's and the Step response functions. Their computations are carried out independently by means of the semidiscrete FEM and the Central difference method. Due to the principle of causality, the Green's and Step response functions admit a compact support surround the source points for a small enough time step that is usually employed in common explicit time integration methods applied to wave propagation modeling. In this sense, the Green's and Step response functions at  $t = \Delta t$  can be efficiently computed locally through small subdomains. Each local subdomain with its respective submesh covers only nodes whose Green's and Step response function values do not vanish. The accuracy and efficiency of the proposed methodology are demonstrated by analyzing three numerical examples.

**Keywords:** Local Green's functions. Principle of causality. Time stepping. FEM. Elastic waves.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	Aspectos gerais da propagação de ondas .....	11
1.2	Aplicações dos fenômenos de onda .....	12
1.3	Objetivos do trabalho .....	13
1.4	Organização da dissertação .....	15
2	TEORIA GERAL DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS....	16
2.1	Introdução .....	16
2.2	A equação da onda elástica .....	17
2.2.1	<i>Conservação da quantidade de movimento .....</i>	17
2.2.2	<i>Conservação da quantidade de movimento angular.....</i>	18
2.2.3	<i>Sólido elástico linear e Tensor de elasticidade.....</i>	20
2.2.4	<i>Caso isotrópico .....</i>	20
2.3	Termo fonte, condições iniciais e de contorno .....	21
2.3.1	<i>Termo fonte .....</i>	21
2.3.2	<i>Condições iniciais e de contorno .....</i>	25
3	MÉTODO DA APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN: EQUAÇÃO ELASTODINÂMICA.....	32
3.1	Introdução .....	32
3.2	Equações governantes .....	32
3.3	Formulação fraca e Método de elementos finitos (MEF) .....	35
3.3.1	<i>Aproximação por elementos finitos .....</i>	37
3.3.2	<i>Matriz de massa diagonal.....</i>	40
3.3.3	<i>Condição não-reflexiva do cone.....</i>	41
3.3.4	<i>Elementos finitos isoparamétricos.....</i>	42
3.3.5	<i>Integração numérica – Quadratura Gaussiana.....</i>	44
3.3.6	<i>Métodos de integração temporal direta .....</i>	45
3.4	Expressão integral do método da aproximação Explícita de Green ..	47
3.5	Funções de Green locais .....	49

3.5.1	<i>Princípio da Causalidade (sistema contínuo)</i> .....	50
3.5.2	<i>Sistema discreto</i> .....	51
3.5.3	<i>Propriedades da função de Green e implementação computacional</i>	55
3.6	Análise de convergência .....	59
3.6.1	<i>Estabilidade e Precisão</i> .....	59
3.6.2	<i>Erro de truncamento local</i> .....	63
4	RESULTADOS NUMÉRICOS .....	65
4.1	Barra homogênea .....	65
4.2	Condição não-reflexiva do cone .....	69
4.3	Meio geofísico .....	77
4.3.1	<i>Fonte na superfície</i> .....	78
4.3.2	<i>Fonte no interior da primeira camada</i> .....	84
5	CONCLUSÕES .....	89
	REFERÊNCIAS .....	91
	APÊNDICES .....	95

# 1 INTRODUÇÃO

Primeiro será feita uma breve apresentação do fenômeno denominado *propagação de onda* e de algumas das suas muitas aplicações, para em seguida, apresentar os objetivos deste trabalho assim como sua organização.

## 1.1 Aspectos gerais da propagação de ondas

O simples fato de que uma perturbação localizada num meio se transmita, ou se propague, para outras partes deste, constitui a base para o estudo do fascinante fenômeno conhecido como propagação da onda. A manifestação deste fenômeno é familiar a todos de alguma maneira, como por exemplo a transmissão do som no ar, a propagação de ondas em um tanque de água, a transmissão de abalos sísmicos na terra, ou a transmissão de ondas de rádio. Estes e muitos outros exemplos poderiam ser citados para ilustrar a propagação de ondas através de diversos meios<sup>1</sup> [2].

A propagação de perturbações nos diversos meios mencionados compartilham muitas características, de modo que uma pessoa versada na ciência de um, entende muito sobre os outros, porém ao mesmo tempo cada uma destas ciências tem suas particularidades. É por causa destas particularidades este trabalho estará focado na propagação de ondas em sólidos, ou seja, será considerado exclusivamente perturbações mecânicas.

A base física para a propagação de uma perturbação, se encontra na interação dos átomos discretos do sólido. Porém as investigações ao longo dessas linhas são mais do interesse da física do que da mecânica. Na mecânica dos sólidos e dos fluidos, o meio é considerado contínuo, de forma que as propriedades como a densidade ou constante de elasticidade são consideradas funções contínuas que representam médias das quantidades microscópicas. No entanto, para entender a propagação de uma perturbação, é útil considerar em primeiro lugar um modelo composto por elementos discretos, o qual consiste numa série de massas e molas interligadas, como visto em [3]. De modo que quando seja dada uma perturbação a uma partícula de massa, esta é transmitida para a próxima partícula de massa através da mola entre elas e assim por diante. Desta forma, a

---

<sup>1</sup>ondas eletromagnéticas não precisam de meio para se propagar

perturbação é transmitida até um ponto distante, embora todas as partículas do sistema tenham se deslocado apenas um pouco.

A maneira de como a massa e parâmetros de rigidez afetam a velocidade de propagação da perturbação fica claro neste modelo. Por exemplo, se aumentada a rigidez das molas ou se diminuída a massa das partículas, ou até mesmo realizando ambas ações simultaneamente, é de se esperar que a velocidade de propagação aumente. De maneira semelhante, molas menos rígidas e/ou massas maiores iriam diminuir a velocidade de propagação. Assim, é de se esperar que utilizar os valores extremos dos parâmetros, poderia levar à propagação instantânea ou nula dos distúrbios.

No caso de um meio contínuo, a massa e os parâmetros de rigidez são agora distribuídos em termos da densidade de massa e do módulo de elasticidade. A interação de uma parte do sistema para a próxima é a interação de um elemento infinitesimal no próximo. Em vez do simples movimento de empurrar e puxar ao longo de uma série de molas e massas, a perturbação se propaga num sentido tridimensional. Associando uma *frente de onda*<sup>2</sup> com a propagação da perturbação pode-se afirmar que, partículas posicionadas diante da frente de onda não terão experimentado nenhum movimento, enquanto que as partículas atrás do frente de onda terão experimentado movimento e podem, de fato, continuar a oscilar durante algum tempo.

## 1.2 Aplicações dos fenômenos de onda

Muitas vezes os problemas presentes na natureza não são simples de serem resolvidos, por causa disto os modelos computacionais, assim como os experimentos em laboratório, auxiliam na obtenção de melhores resultados numa dada aplicação, sendo feitos muitos testes antes de finalmente escolher a melhor opção a ser utilizada. Na maioria dos casos, os testes feitos em laboratórios, além de caros, podem chegar a ser demorados ou em quantidade elevada, por outro lado os métodos numéricos além de obter resultados próximos da realidade, são em sua maioria mais rápidos e baratos, podendo assim, complementando os resultados obtidos em laboratório, diminuir a quantidade elevada de testes feitos em laboratório e melhorando os custos.

Em particular, a motivação pelo qual surge interesse nos fenômenos de onda são as

---

<sup>2</sup>Define-se como a superfície na qual todas as partículas vibram com a mesma fase

muitas aplicações práticas na ciência e na indústria. Por exemplo, na área das estruturas o interesse é principalmente prever a resposta das ditas estruturas a cargas de impacto ou explosão. Sob cargas transientes de força moderada, condições completamente elásticas podem prevalecer em toda a estrutura e neste caso a teoria de ondas elásticas pode ser suficiente para prever todos os aspectos da resposta. Já, sob cargas mais graves, a deformação local pode se tornar permanente, pode ocorrer fratura, ou pode ocorrer a perfuração da estrutura caracterizando outro tipo de problema.

Uma das áreas mais estudadas atualmente, uma vez que o petróleo e o gás natural estão entre as principais matrizes energéticas utilizadas no mundo e que nas últimas décadas os investimentos da indústria do petróleo em pesquisas vem crescendo com o objetivo de viabilizar a exploração de reservas de hidrocarbonetos, é a de formulação de métodos que possibilitem obter imagens da subsuperfície com elevada exatidão, podendo assim, evitar desastres ambientais e otimizar a perfuração de poços. Alguns desses métodos baseiam-se em gerar ondas sísmicas através de fontes artificiais e registrar suas reflexões formadas pelo contato com camadas geológicas com diferentes características, sendo essas reflexões capturadas, processadas e analisadas para gerar uma imagem da subsuperfície que está sendo estudada.

### 1.3 Objetivos do trabalho

Ao se estudar o fenômeno de propagação de onda em meios elásticos mais complexos, é utilizada a equação da elastodinâmica junto com suas condições de contorno e iniciais, relações constitutivas do meio além da escolha adequada do método numérico e do termo fonte. Dentre os vários métodos numéricos existentes na literatura, podem-se destacar os métodos das diferenças finitas (MDF), volumes finitos (MVF), elementos finitos (MEF) e elementos de contorno (MEC), dos quais, neste trabalho será apresentado unicamente o método dos elementos finitos e conceitos do método dos elementos de contorno.

Quando o método dos elementos finitos padrão é aplicado para este problema, é obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias [4]. Embora existam diferentes metodologias para a solução de tal sistema de equações diferenciais ordinárias, métodos de integração temporal ou de marcha no tempo são uma poderosa e eficiente ferramenta numérica. Entre os métodos numéricos de integração temporal (marcha no tempo) mais

utilizados se destacam os seguintes métodos: Diferença central, Runge-Kutta, Newmark,  $\alpha$ -generalizado, etc. [5]. Ao longo das últimas décadas novas metodologias de integração temporal vêm sendo criadas, principalmente para o desenvolvimento de métodos de integração temporal de ordem superior, já que os métodos mencionados acima são de primeira ou segunda ordem no tempo.

Neste trabalho será apresentado um novo método de marcha no tempo de segunda ordem, este método se baseia no método da aproximação explícita de Green – “Explicit Green’s Approach” (ExGA) – proposto por [1, 6], onde é feito o cálculo numérico e explícito da função de Green (através do MEF e MDF, respectivamente) para problemas governados pela equação hiperbólica – onde apresentou resultados bastante precisos quando comparado aos métodos tradicionais de marcha no tempo – diferente do método dos elementos de contorno, que se baseia na utilização de funções de Green analíticas [7, 8, 9].

Como descrito por [10], a solução de equações diferenciais pode ser facilmente obtida uma vez conhecida a função de Green para o meio em questão. De fato, funções de Green são uma poderosa ferramenta para solução de diversos problemas, pois a solução de um determinado problema submetido a diferentes condições de contorno é facilmente obtida através de equações ou expressões integrais. O sucesso do MEC se baseia no fato de que funções de Green de *meio infinito* (soluções fundamentais), usualmente utilizadas, existam. Embora o MEC seja geral com respeito a geometria do problema, certas restrições aparecem quanto ao meio em questão, já que funções de Green para diferentes tipos de meios, e.g., heterogêneos, anisotrópicos, etc., nem sempre estão disponíveis [8].

Por outro lado, funções de Green para um *domínio finito* qualquer que satisfaçam as condições homogêneas de contorno são muito difíceis se não impossíveis de se obterem analiticamente. O método ExGA, porém, como dito antes, se baseia em funções de Green calculadas numericamente (e.g., MEF, MEC), tornando-se bastante geral no sentido de que qualquer geometria e meio podem ser facilmente levados em consideração na modelagem do problema em questão. Entretanto, para tal generalização, o domínio do problema a ser resolvido precisa ser discretizado em elementos.

Ainda sobre o método, este se mostrou bastante promissor ao resolver problemas transientes de condução de calor utilizando o MEF [11, 12, 13] e utilizando o MEC para o cálculo da função de Green [14].

## 1.4 Organização da dissertação

A dissertação consiste em quatro capítulos organizados da seguinte maneira:

Neste primeiro capítulo é apresentada, de maneira geral, uma introdução aos aspectos gerais da propagação de ondas e algumas das suas aplicações, juntamente com os objetivos desta dissertação e a organização do trabalho.

No capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica do fenômeno de propagação de ondas em meios elásticos.

No capítulo 3 são apresentados os procedimentos matemáticos para a obtenção da expressão do método da aproximação explícita de Green (ExGA), suas características, sua análise de estabilidade e convergência.

No capítulo 4 são apresentados três exemplos numéricos e os resultados da aplicação do método proposto juntamente com os de um método clássico para comparação.

As conclusões e comentários, baseados nos resultados obtidos para as aplicações do Capítulo anterior, como também as sugestões de trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 5.

No Apêndice A são apresentadas, de forma resumida, a teoria básica e as características da notação utilizada neste trabalho.

# 2 TEORIA GERAL DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS

Neste capítulo é apresentada a teoria referente ao fenômeno de propagação de ondas em meios elásticos homogêneos e isotrópicos necessária para a compreensão das formulações numéricas utilizadas ao longo dos demais capítulos. São abordados apenas os tópicos principais necessários para a obtenção das equações da elastodinâmica, sendo apresentadas principalmente as que efetivamente serão utilizadas nas modelagens numéricas. São deixadas para o Apêndice A algumas definições e conceitos relacionados.

## 2.1 Introdução

No estudo da propagação de ondas em meios elásticos, sabe-se que uma onda tem dois tipos distintos de ação. Num deles, o sólido irá transmitir tensões de tração e compressão relacionado ao movimento das partículas que estará na direção de propagação da onda, este comportamento é idêntico ao dos fluidos. No outro, o sólido irá transmitir tensões de cisalhamento, relacionado ao movimento (das partículas) transversal à direção de propagação. Comportamento que não ocorre no caso dos fluidos (e.g. ar e água) [15], em virtude dos mesmos não oferecerem resistência ao cisalhamento. Um exemplo deste fato é que, ao virar-se um copo d'água, a água escorre, ou seja as camadas de água “escorregam” umas sobre as outras sem resistência, diferente de um material sólido que se mantém coeso devido à resistência que as camadas deste meio tem de “escorregarem” umas sobre as outras. Desta forma, as equações que regem a propagação de ondas acústicas (ou em fluidos) podem ser vistas como um caso particular da propagação de ondas elásticas em meios isotrópicos onde o módulo de cisalhamento é nulo. Muitos modelos geofísicos utilizam operadores acústicos para simular a propagação de ondas no meio, é evidente porém, que tais simulações em meios geofísicos são uma simplificação, uma vez que as camadas de rochas destes meios não são meios fluidos e, portanto, não são meios acústicos,

sendo somente a lâmina d'água um meio acústico. Os meios elásticos oferecem resistência ao cisalhamento; logo, ondas transversais são geradas e podem se propagar em conjunto com as ondas longitudinais, de forma que as rochas são, na verdade, melhor descritas como sendo meios elásticos. O modelo mais simples de propagação de ondas elásticas considera a existência de isotropia, isto é, que as propriedades elásticas do meio independem da direção em que são medidas e, por conseguinte, a velocidade independe da direção. A seguir, serão obtidas as equações que governam a propagação de ondas em meios elásticos homogêneos e isotrópicos.

## 2.2 A equação da onda elástica

Nesta seção, são obtidas as equações e relações que descrevem a propagação de ondas em meios elásticos como consequência da aplicação das leis da física, ainda é tratado o caso da isotropia do meio e de como isto afeta a modelagem do problema.

### 2.2.1 Conservação da quantidade de movimento

Considere uma região do espaço contendo um corpo qualquer de densidade  $\rho$  cujo volume seja  $\Omega$  e cuja superfície seja  $\Gamma$ . Associada a todos os elementos infinitesimais de  $\Omega$  tem-se a velocidade  $v_i$ <sup>1</sup>, enquanto que no corpo estarão agindo as forças de superfícies  $t_i$  e as forças de volume por unidade de volume  $f_i$ . A lei da conservação da quantidade de movimento estabelece que a mudança da quantidade de movimento destes elementos neste volume é igual à resultante das forças que atuam nos elementos em  $\Omega$  (Segunda Lei de Newton generalizada), ou seja:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_i \rho d\Omega = \int_{\Gamma} t_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i d\Omega \quad (2.1)$$

Sabendo que  $t_i = \sigma_{ji} n_j$ <sup>2</sup>, onde  $n_j$  é a componente  $j$  do vetor normal à superfície  $\Gamma$  e  $\sigma_{ji}$  é o tensor de tensões, e utilizando o teorema da divergência para uma quantidade tensorial é:

$$\int_{\Omega} T_{i,j,j} d\Omega = \int_{\Gamma} T_{ij} n_j d\Gamma \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Uma breve introdução sobre a notação indicial se encontra no Apêndice A

<sup>2</sup>A definição do tensor de tensões se encontra no Apêndice A

a equação 2.1 se torna:

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \sigma_{ji,j} - f_i \right) d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

ou, uma vez que  $\Omega$  é qualquer

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \frac{dv_i}{dt}. \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Conservação da quantidade de movimento angular

Este princípio estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento angular do corpo em relação a um ponto qualquer é igual à soma das quantidades de movimentos angulares em relação em relação ao mesmo ponto de todas as forças externas atuantes, sejam elas de volume ou de superfície. De maneira geral, sendo  $\mathbf{r}$  o vetor posição e usando notação vetorial tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{f} d\Omega \quad (2.5)$$

e em notação indicial

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e_{ijk} x_j v_k \rho d\Omega = \int_{\Gamma} e_{ijk} x_j t_k d\Gamma + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j f_k d\Omega \quad (2.6)$$

Expressando  $t_i = \sigma_{ji} n_j$  e reescrevendo a integral na superfície como uma integral de volume utilizando o teorema da divergência, i.e.:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e_{ijk} x_j t_k d\Gamma &= \int_{\Gamma} e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l d\Gamma = \int_{\Omega} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} e_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \sigma_{lk,l}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

Também sabendo que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e_{ijk} x_j v_k \rho d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (e_{ijk} x_j v_k \rho) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} e_{ijk} \frac{d}{dt} (x_j v_k) \rho d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \cancel{e_{ijk} (v_j v_k)} + x_j \ddot{u}_k \rho d\Omega \tag{2.8} \\
&\quad \text{uma vez que } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0 \\
&= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \ddot{u}_k \rho d\Omega
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. 2.7 e 2.8 na Eq. 2.6 tem-se

$$\int_{\Omega} e_{ijk} x_j \ddot{u}_k \rho d\Omega = \int_{\Omega} e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j f_k d\Omega \tag{2.9}$$

rearranjando a equação 2.9 obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} e_{ijk} x_j \ddot{u}_k \rho - e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) - e_{ijk} x_j f_k d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} e_{ijk} x_j (\ddot{u}_k \rho - \sigma_{lk,l} - f_k) - e_{ijk} \sigma_{jk} d\Omega &= 0 \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Utilizando a conservação da quantidade de movimento (Eq. 2.4) tem-se:

$$\int_{\Omega} e_{ijk} \sigma_{jk} d\Omega = 0 \tag{2.11}$$

ou, localmente

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \tag{2.12}$$

Este resultado é equivalente a dizer que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $i \neq j$ . Esta simetria do tensor de tensões é resultado do balanço da conservação da quantidade movimento angular. O que irá reduzir as variáveis independentes do tensor de elasticidade, como será observado nas seções a seguir.

### 2.2.3 *Sólido elástico linear e Tensor de elasticidade*

Para a descrição completa dos movimentos em um meio elástico, é necessário ainda levar em conta as chamadas relações constitutivas do meio, que para o caso que estamos estudando é, como se relacionam os tensores de segunda ordem de tensões  $\sigma_{ij}$  e de deformações  $\varepsilon_{ij}$ <sup>3</sup>, pois será através deste último que se obterá a formulação final do problema. Como neste trabalho o interesse se concentra apenas no regime linear, a relação tensão-deformação (Lei de Hooke generalizada) é descrita por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.13)$$

na qual, o tensor de elasticidade de quarta ordem  $C_{ijkl}$  que num caso mais geral possui 81 componentes, terá esse número reduzido a 21 componentes independentes [16, 15]. Estas componentes caracterizam completamente o meio elástico no regime linear.

### 2.2.4 *Caso isotrópico*

Neste trabalho será estudado o caso mais simples de todos, que se caracteriza por apresentar a velocidade de propagação da onda independe da direção de propagação da mesma, isto é, serão considerados os meios isotrópicos. Como consequência, as 21 componentes independentes se tornarão apenas 2 [16], resultando na relação:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.14)$$

onde  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  representa a dilatação e,  $\lambda$  e  $\mu$  são conhecidas como constantes de Lamé, a partir das quais se definem o modulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de poisson  $\nu$  como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.15)$$

Desta forma, no estado plano de deformação, o tensor de elasticidade é dado pelo tensor

---

<sup>3</sup>A definição do tensor de deformações se encontra no Apêndice A

isotrópico simétrico, sendo sua expressão na notação de Voigt<sup>4</sup> (em duas dimensões):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

resultando numa relação entre as tensões e deformações de forma matricial ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Na prática, é comum utilizar o tensor  $\mathbf{D}$  em função do módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , obtendo-se

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

sendo este último o utilizado para a formulação numérica do problema como será visto no próximo capítulo.

## 2.3 Termo fonte, condições iniciais e de contorno

Nesta seção, são discutidos os demais tópicos importantes para que as equações de propagação de ondas apresentadas anteriormente representem um problema físico completo com solução única. Para tal, é necessário a especificação do termo fonte, além das condições de contorno e das condições iniciais, como será discutido nos próximos tópicos.

### 2.3.1 Termo fonte

Neste trabalho é de interesse mostrar certas características importantes do método de marcha no tempo que será apresentado, uma destas está diretamente relacionada com

---

<sup>4</sup>A definição da notação de Voigt se encontra no Apêndice A

o termo fonte utilizado, por este motivo, além das fontes sísmicas tradicionais, serão utilizadas fontes diferentes das mesmas.

De maneira geral, uma fonte sísmica é qualquer aparato utilizado para gerar ondas sísmicas que irão se propagar através do meio que se deseja estudar. Exemplos de possíveis fontes sísmicas para levantamentos terrestres são: detonação de dinamites enterradas e queda de pesos na superfície da Terra. Em geofísica, estas fontes são tradicionalmente tratadas como fontes pontuais

$$f_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)F(t) \quad (2.19)$$

onde  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)$  é a distribuição conhecida como delta de Dirac,  $\mathbf{x}_f$  é a coordenada de aplicação da fonte e  $F(t)$  é dada, por exemplo, pela seguinte expressão [17, 18]:

$$F(t) = [2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1] \exp[-\pi(\pi f_c t_d)^2], \quad (2.20)$$

onde  $f_c$  é um parâmetro relacionado com a frequência de corte  $f_{corte}$  (Fig. 2.1) e  $t_d$  é o tempo defasado, utilizado para deslocar o início da aplicação da fonte, para que o máximo (ou mínimo, no caso) da função seja deslocado de zero para um tempo  $t_0$  positivo de forma que a expressão seja praticamente zero no início da análise (em  $t = 0$ ) e cresça suavemente (sem descontinuidade), conforme mostra a Fig. 2.1. As expressões para os parâmetros acima são dadas por:

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}} \\ t_0 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}} \\ t_d &= t - t_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

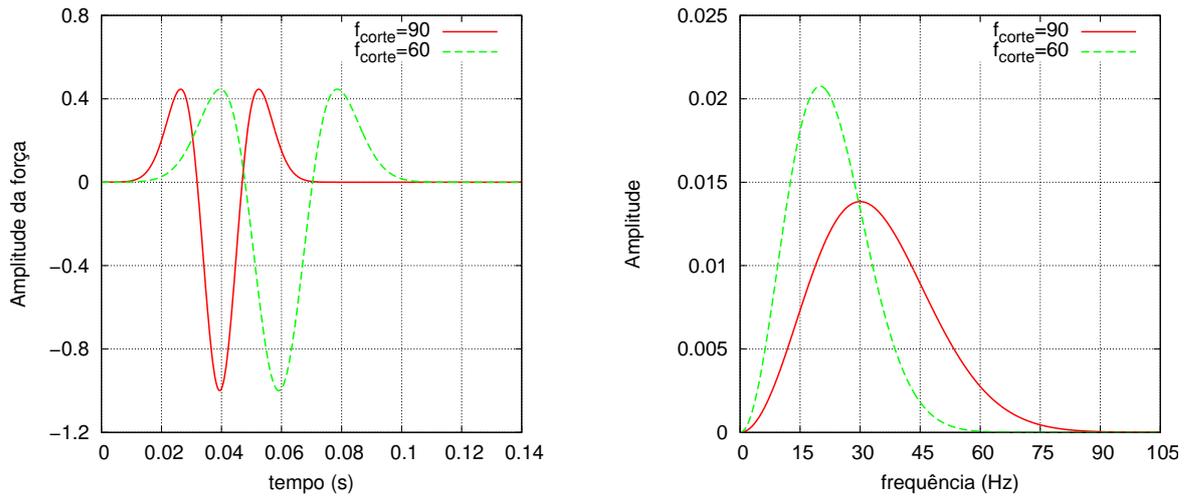


Figura 2.1: Gráfico da fonte sísmica e seu espectro de frequências

Como a Eq. 2.20, que representa a derivada segunda da função de Gauss, vai a zero apenas no infinito, utiliza-se tal expressão truncada no tempo, ou seja, na prática, utiliza-se a seguinte expressão para fonte:

$$F(t) = \begin{cases} [2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1] \exp[-\pi(\pi f_c t_d)^2] & \text{se } 0 \leq t \leq t_M \\ 0 & \text{se } t > t_M \end{cases} \quad (2.22)$$

onde

$$t_M = 2t_0 = \frac{4\sqrt{\pi}}{f_{\text{corte}}} \quad (2.23)$$

Além desta primeira, como dito anteriormente, neste trabalho serão utilizadas também fontes não necessariamente sísmicas, para visualizar algumas características do método de marcha no tempo que será apresentado.

Por este motivo, a segunda fonte, utilizada por [19], faz parte das funções do tipo triangulares definidas como:

$$F(t) = F_0 \cdot \begin{cases} t/T_{p/2} & \text{se } t \leq T_{p/2} \\ 2 - t/T_{p/2} & \text{se } (t > T_{p/2}) \text{ e } (t \leq T_p) \\ 0 & \text{se } t > T_p \end{cases} \quad (2.24)$$

onde  $F_0$  é a amplitude da fonte,  $T_p$  representa o instante final onde a função deixa de ter valores não nulos (período predominante) e  $T_{p/2} = T_p/2$ .

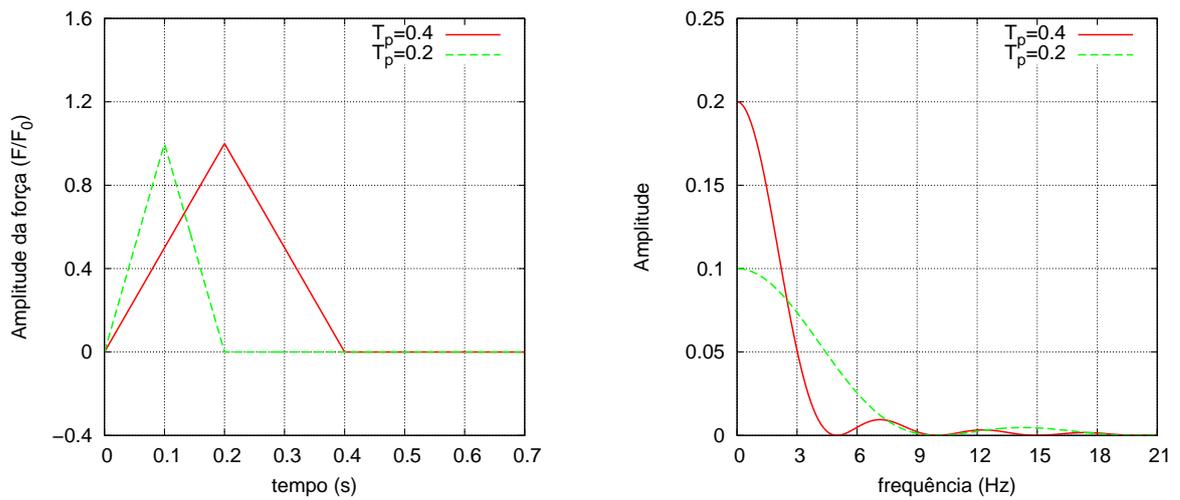


Figura 2.2: Gráfico da fonte e seu espectro de frequências

A terceira fonte, será uma função do tipo Heaviside, i.e. ;

$$F(t) = F_0 H(t) \quad (2.25)$$

onde  $F_0$  é a amplitude da fonte. Diferente das outras, esta fonte conseguirá excitar todas as frequências do sistema.

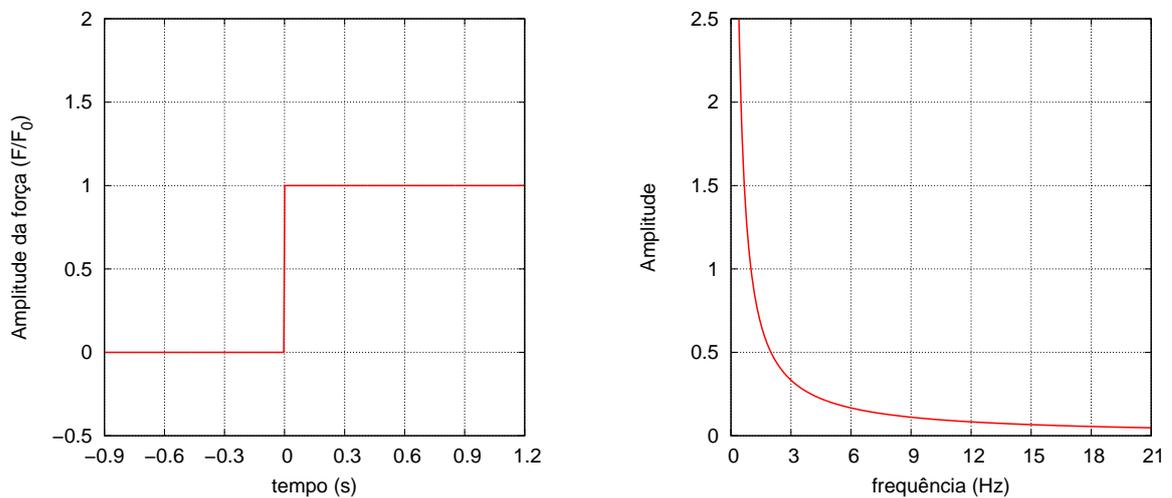


Figura 2.3: Gráfico da fonte e seu espectro de frequências

O motivo particular da utilização destas duas últimas fontes será apresentado devidamente no capítulo de exemplos numéricos.

### 2.3.2 Condições iniciais e de contorno

Como é bem conhecido, para que um sistema de equações diferenciais parciais apresente solução única em um determinado domínio é necessário levar em conta as condições iniciais e de contorno do problema.

Em relação às condições iniciais, nos problemas de propagação de ondas, são necessárias apenas condições triviais, porém num caso mais geral são dadas as condições iniciais dos campos de deslocamentos e velocidades, ou seja,

$$u_i(\mathbf{x}, t = 0) = \dot{u}_i(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega \quad (2.26)$$

$$\dot{u}_i(\mathbf{x}, t = 0) = \dot{v}_i(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega \quad (2.27)$$

Como foi visto no tópico anterior, ao utilizar uma fonte explosiva geradora da perturbação sísmica com uma dependência temporal suave que inicia de um valor nulo, basta assumir as condições iniciais dadas acima como sendo nulas.

Em relação às condições de contorno, serão utilizadas as condições essenciais (de Dirichlet), com valor do campo prescrito, e as condições naturais (de Neumann), com valor das forças de superfície, i.e. :

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I \quad (2.28)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_{N_i} \times I \quad (2.29)$$

sendo  $I = (0, t_f] \subset \mathbb{R}_+$  o tempo da análise (domínio temporal),  $\Gamma_{D_i}$  e  $\Gamma_{N_i}$  partições de  $\partial\Omega = \Gamma$  tais que  $\Gamma = \Gamma_{D_i} \cup \Gamma_{N_i}$  e  $\Gamma_{D_i} \cap \Gamma_{N_i} = \emptyset$ .

Entretanto, no contexto da propagação de ondas, aplicar tais condições no contorno do domínio numérico considerado faria com que toda onda incidente sobre eles fosse refletida com a mesma fase ou com a fase invertida dependendo da condição que se utiliza. Neste sentido, é necessário recorrer-se às chamadas condições de contorno não-reflexivas.

A necessidade de utilizar condições de contorno não-reflexivas ocorre porque os problemas que desejam-se modelar possuem domínios semi- infinitos (ou infinitos), que precisam ser truncados para alguns métodos numéricos a fim de se realizar as simulações em computador.

Antes da discussão sobre as várias condições de contorno para a solução de

problemas de propagação de ondas em domínios infinitos, é necessário introduzir algumas características importantes da propagação de ondas elásticas em meios infinitos. Esta breve introdução da teoria de ondas mecânicas estará baseada em [20, 21, 22].

Quando energia é liberada a partir de um ponto  $\mathbf{x}$ , localizado próximo a superfície de um meio elástico – por simplificação homogêneo – parte da energia propaga-se no interior do meio como *ondas de volume*, a parte remanescente da energia propaga-se na forma de *ondas de superfície*, como as ondulações na superfície da água quando uma pedra é atirada.

As ondas de volume são divididas em duas categorias: ondas primárias (ondas-P) e ondas secundárias (ondas-S). No caso das ondas-P, o movimento das partículas é na direção de propagação da onda, sendo elas as ondas de volume mais rápidas e também conhecidas como ondas de pressão, compressão ou longitudinais. No caso das ondas-S, o movimento das partículas é transversal à direção de propagação da onda. Estas ondas são também conhecidos como ondas transversais ou de cisalhamento. Neste caso, a direção do movimento da partícula pode ser utilizada para dividir as ondas-S em ondas-SV (movimento vertical ao plano) e ondas-SH (movimento horizontal ao plano). Entretanto numa análise no estado plano de deformação somente poderão consideradas ondas-P e ondas-SV.

As ondas de superfície resultam da interação das ondas de volume com a superfície livre e são divididas em duas categorias: ondas de Rayleigh (ondas-R) e ondas Love. Ondas-R podem ser consideradas como uma combinação das ondas-P com as ondas-SV. Já as ondas Love, assim como as ondas-SH, se propagam na direção pra fora do plano não tendo componentes verticais no movimento das partículas, e de igual maneira não podendo ser consideradas numa análise no estado plano de deformação.

Ainda, para ilustrar a natureza geométrica da propagação dos diferentes tipos de ondas citadas acima, pode-se considerar que, para ondas de volume em três dimensões, a frente de onda, a uma distância  $r$  da fonte pontual, é dado por um grande hemisfério de área  $2\pi r^2$ , enquanto que para as ondas-R a frente de onda é um cilindro plano cuja altura mede aproximadamente um comprimento de onda-R, ou  $\lambda_R$  [23].

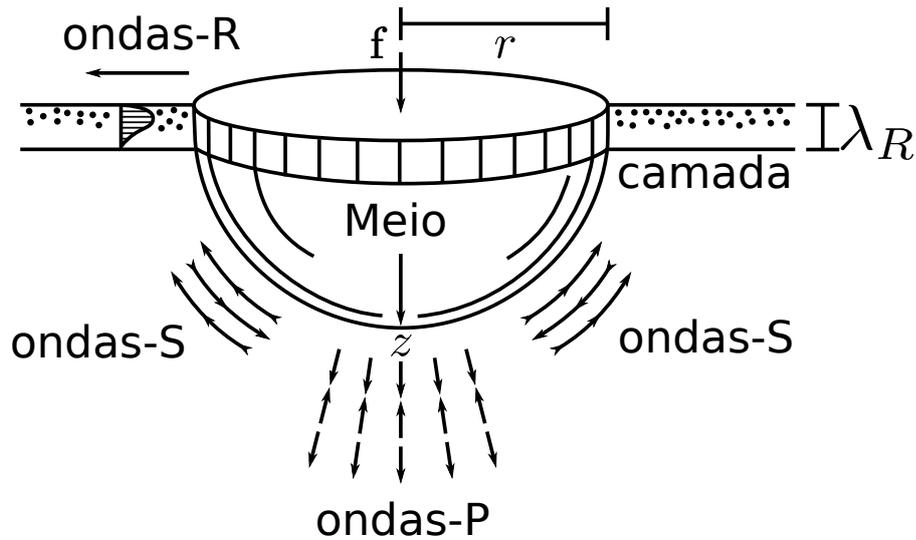


Figura 2.4: Representação da natureza geométrica da propagação das ondas num meio infinito. *Extraído de [23].*

Uma das primeiras técnicas utilizadas para implementar condições de contorno não reflexivas foi a condição de contorno viscoso a qual foi introduzida por Lysmer e Kuhlemeyer em 1969. Esta técnica possui uma implementação simples quando comparada por exemplo aos PML (“Perfectly-Matched-Layer”, e.g., [24]), que são, atualmente, os métodos que produzem melhores resultados tendo porém uma formulação bastante complexa. Por outro lado a técnica PML depende da frequência da fonte utilizada, limitando assim a quantidade de modelos nos quais pode ser aplicada a mesma formulação. Este problema não está presente na condição de contorno viscoso padrão.

A ideia fundamental do contorno viscoso padrão é a aplicação de uma força de superfície artificial num contorno livre, que faça com que as tensões de ondas refletidas sejam nulas, também podendo ser entendido como uma série de duplas de amortecedores infinitesimais orientados normal e tangencialmente no contorno de uma malha de elementos finitos, como descrito na Fig. 2.6(a). Portanto, as expressões do contorno viscoso são dadas por:

$$\sigma(t, s) + \alpha \rho V_P \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} = 0 \quad (2.30)$$

$$\tau(t, s) + b \rho V_S \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

onde  $\sigma(t, s)$  e  $\tau(t, s)$  são as forças de superfície normal e cisalhante no contorno,  $u(t, s)$  e  $v(t, s)$  são os deslocamentos normal e tangencial,  $s$  denota a coordenada em um contorno

artificial,  $\alpha$  e  $b$  são parâmetros adimensionais [25] e  $V_P$  e  $V_S$  são as velocidades da onda-P e onda-S respectivamente. O estudo analítico de [25] sugeriu que o desempenho da condição de contorno é otimizado quando  $\alpha = b = 1, 0$ , sendo depois confirmado por [26].

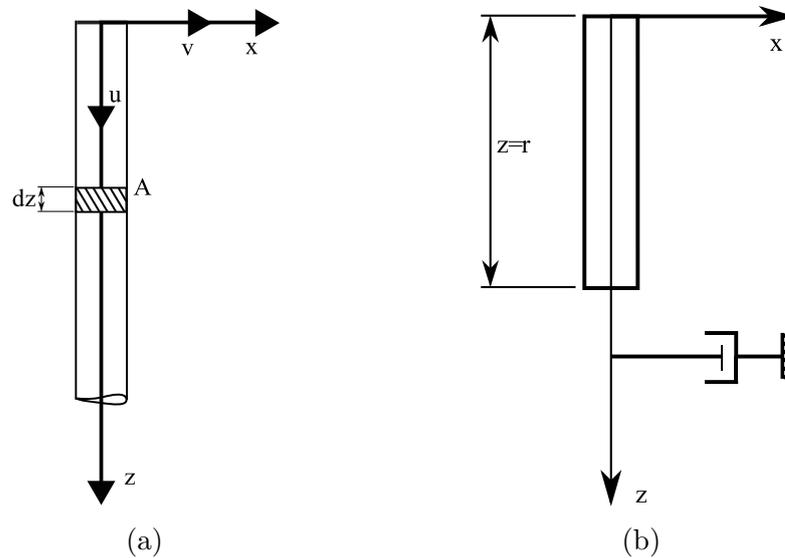


Figura 2.5: Modelo da barra semi-infinita

Ressalte-se que [27] considerou o problema de uma barra prismática homogênea, elástica e semi-infinita a fim de mostrar que o contorno viscoso padrão é baseado na teoria das ondas unidimensionais, podendo-se substituir a parte da barra que se estende ao infinito por um amortecedor. Desta forma, a absorção perfeita da condição de contorno viscoso só pode ser alcançada por ondas que incidam perpendicularmente no contorno. Portanto, para a propagação de ondas de volume, o método é exato apenas nos problemas unidimensionais. Para os casos bidimensionais e tridimensionais, um grau de absorção aceitável é obtida para os ângulos de incidência maiores do que  $30^\circ$  (quando o ângulo é medido a partir da direção paralela ao contorno) [28]. Porém, geralmente, quando muito distantes da fonte, as ondas de volume se propagam de maneira unidimensional na direção do vetor normal ao contorno artificial [27], devendo-se encontrar um equilíbrio entre precisão e um tamanho de malha economicamente aceitável.

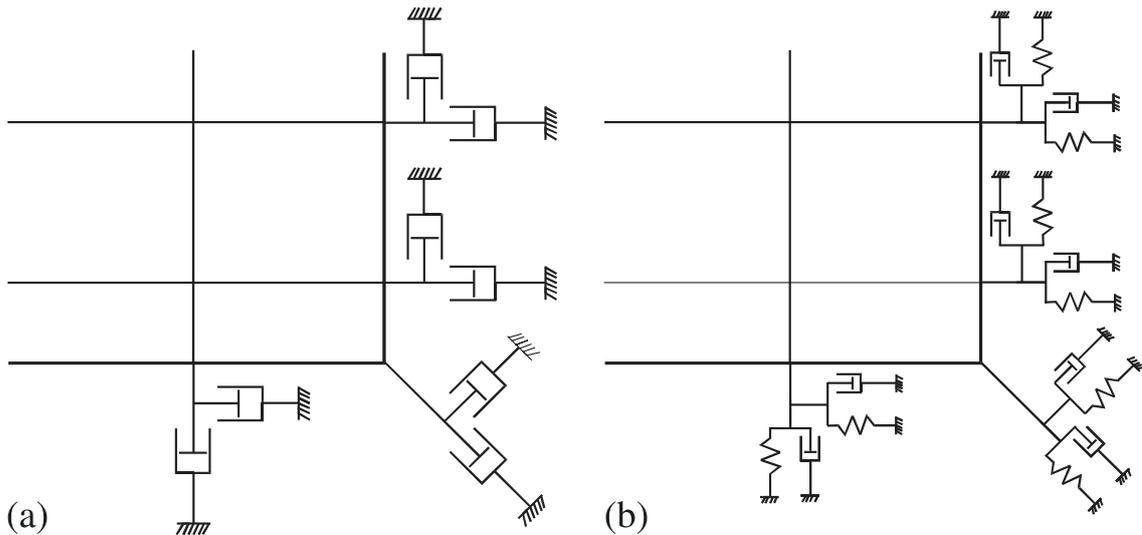


Figura 2.6: Representação mecânica da condição de contorno viscoso padrão(a) e do cone(b). *Extraído de [29].*

O contorno viscoso padrão provavelmente seja a técnica mais utilizada, por possuir uma precisão aceitável para o baixo custo computacional, no entanto, possui uma desvantagem, que é a de não conseguir absorver ondas de Rayleigh [25, 30, 31].

Neste trabalho porém, será utilizada a condição de contorno do cone [19], o qual consiste em adicionar uma fator relacionado com o deslocamento  $u$  à condição de contorno viscoso (Eqs. 2.30 e 2.31), que pode ser entendido como a adição de uma mola infinitesimal para cada amortecedor da condição de contorno viscoso, vide Fig. 2.6(b). Graças a isso, a condição do cone aproxima a rigidez do sistema de domínio ilimitado e isto elimina o movimento de corpo rígido quando se tem somente condição de contorno de Neumann, sendo que esta característica vantajosa não está presente na condição de contorno viscoso padrão [28].

Assim como o modelo da barra unidimensional pode ser considerada como a interpretação física do contorno viscoso padrão, o contorno do cone pode ser representado pelo modelo de uma barra cônica unidimensional. A aplicação de uma carga na superfície livre de um meio, conduz a tensões que atuam sobre uma área que aumenta com a profundidade. O que não pode ser adequadamente modelado pelo modelo da barra semi-infinita. A melhor aproximação é uma barra semi-infinita com seção transversal variável  $A(z)$ , podendo-se substituir a parte da barra que se estende ao infinito por uma dupla de amortecedor e mola infinitesimal.

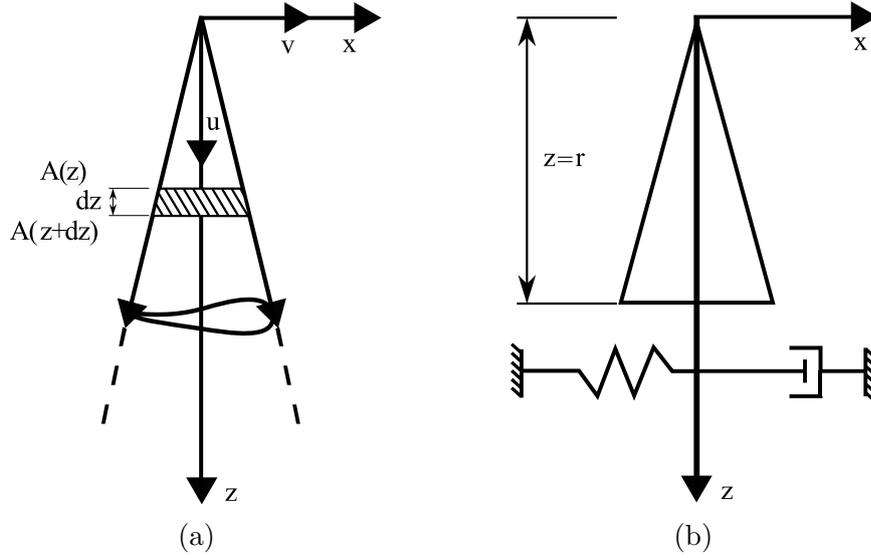


Figura 2.7: Modelo da barra cônica semi-infinita

Este tipo de contorno também apresenta uma implementação simples e se mostrou mais efetivo para os problemas estudados neste trabalho quando comparado ao contorno viscoso padrão. Ainda, este método possui duas formulações [32, 19], uma para ondas de volume

$$\sigma(t, s) = -\frac{E}{r}u(t, s) - \rho V_P \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} \quad (2.32)$$

$$\tau(t, s) = -\frac{\mu}{r}v(t, s) - \rho V_S \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} \quad (2.33)$$

e outra para ondas de Rayleigh

$$\sigma(t, s) = -\frac{\rho S^2 V_R^2}{r}u(t, s) - \rho S V_R \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$\tau(t, s) = -\frac{\rho V_R^2}{2r}v(t, s) - \rho V_R \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} \quad (2.35)$$

onde é possível ver que ambas formulações dependem da distância  $r$  da posição da fonte pontual ao nó da malha no contorno, e

$$V_R = V_S \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu}, \quad S = \sqrt{2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)} \quad (2.36)$$

representam a velocidade aproximada da onda de Rayleigh e a razão entre as velocidades das ondas-P e ondas-S respectivamente.

Ainda, no estado plano de deformação, ondas de Rayleigh se propagam ao longo de

uma superfície retangular de altura  $\lambda_R$ . Podendo, como sugerido por [32, 19], utilizar uma formulação do contorno viscoso modificada, resultante da extração do termo referente ao deslocamento das Eqs. 2.34 e 2.35

$$\sigma(t, s) = -\rho S V_R \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$\tau(t, s) = -\rho V_R \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} \quad (2.38)$$

ao longo dos contornos laterais do domínio (em contato com a superfície livre) até uma profundidade igual a  $\lambda_R = 0.92 V_S T_p$  [28], que é o comprimento de onda de Rayleigh aproximado – considerando o período dominante da fonte –, e a formulação para ondas de volume da contorno do cone para o restante do contorno lateral e inferior.

# 3 MÉTODO DA APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN: EQUAÇÃO ELASTODINÂMICA

## 3.1 Introdução

No presente capítulo é apresentada a formulação para problemas de propagação de ondas em meios elásticos e para a função de Green do problema em consideração. Na sequência, os procedimentos matemáticos necessários para a obtenção da expressão integral do método da aproximação explícita de Green (ExGA) e suas funções de Green para a solução da equação elastodinâmica são detalhadamente apresentados.

## 3.2 Equações governantes

Diferentemente do capítulo anterior, as equações serão descritas com maior rigor matemático. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  um domínio finito aberto qualquer com contorno  $\partial\Omega = \Gamma$  do tipo Lipschitz, onde  $d$  representa o número de dimensões do problema, a equação diferencial parcial que descreve problemas de propagação de ondas é expressa por [15]

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \text{ em } \Omega \times I, \quad (3.1)$$

onde  $\ddot{u}_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  representa o campo de acelerações,  $f_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  as forças de volume por unidade de volume  $\sigma_{ji} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{d^2}$  o tensor de tensões,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  com  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  a densidade, como visto no capítulo anterior. Porém é de nosso interesse que esta equação esteja em termos do campo de deslocamentos  $u_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Com esta finalidade, substituindo a definição do tensor de deformações (vide apêndice A.22) na relação tensão-deformação (Eq. 2.13) e utilizando as simetrias vistas no capítulo anterior tem-se:

$$\sigma_{ji,j} = (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \quad (3.2)$$

possibilitando assim que as equações anteriores sejam reescrita em termos do campo de deslocamentos, i.e., a Eq. 3.1 torna-se:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i \quad \text{em } \Omega \times I. \quad (3.3)$$

onde  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\mathbf{x})$  com  $C_{ijkl} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^4}$  é o tensor de elasticidade de quarta ordem. Ainda, utilizando das mesmas simetrias, a condição de contorno de Neumann (Eq. 2.29) pode ser reescrita em função de  $u_i$ , como:

$$\bar{t}_i = \sigma_{ji}n_j = \frac{1}{2}C_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})n_j \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2}(C_{ijkl}u_{k,l} + C_{ijkl}u_{l,k})n_j \quad (3.5)$$

$$= C_{ijkl}u_{k,l}n_j \quad (3.6)$$

Incluindo esta última alteração, as condições iniciais e de contorno do capítulo anterior serão utilizadas para completar o problema, e assim obter solução única.

Como a solução do campo de deslocamentos efetuada pelo método ExGA se baseia na utilização de funções de Green do problema, sendo consideradas como as funções teste para se aplicar às equações governantes num sentido de ponderação integral, torna-se importante definir as características da função de Green utilizada. Como descrito na literatura [10, 33, 8, 34], a função de Green pode ser interpretada como sendo o deslocamento na direção  $i$  de um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  (ponto campo) no tempo  $t$ , resultante da aplicação de uma fonte pontual instantânea na direção  $n$  numa determinada posição  $\mathbf{y}$  (ponto fonte) e em um certo instante de tempo  $\tau$ , i.e., matematicamente representado por  $f_{in}(\mathbf{x}, t) = \delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$ , onde  $\delta_{in}$  é o operador delta de Kronecker, e  $\delta(\cdot)$  representa a função generalizada delta de Dirac<sup>1</sup> definida como:

$$\delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{A} \quad (3.7)$$

$$\int_D \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{A})d\boldsymbol{\xi} = 1 \quad (3.8)$$

sendo  $D$  um domínio qualquer espacial ou temporal e  $\mathbf{A} \in D$  com  $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  variáveis

---

<sup>1</sup>Denominada apenas de função delta de Dirac deste ponto em diante

genéricas. A função delta de Dirac possui a seguinte propriedade

$$\int_D \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{A})g(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \begin{cases} g(\mathbf{A}) & \text{se } \mathbf{A} \in D \\ 0 & \text{se } \mathbf{A} \notin D \end{cases} \quad (3.9)$$

supondo que  $g(\boldsymbol{\xi})$  seja uma função contínua em  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}$ .

Uma questão crucial para se inicializar uma metodologia baseada em funções de Green corresponde à escolha de uma função de Green para o problema, e.g., funções de Green de meio infinito (solução fundamental), semi-infinito, etc. No método ExGA, considera-se a função de Green no mesmo domínio fechado  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  e com as mesmas propriedades físicas do problema original a ser resolvido, mas com condições de contorno homogêneas:

$$\rho\ddot{G}_{in} - (C_{ijkl}G_{kn,l})_{,j} = \delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau) \text{ em } \Omega, t > \tau \quad (3.10)$$

$$G_{in} = 0 \text{ em } \Gamma_{D_i}, t > \tau \quad (3.11)$$

$$C_{ijkl}G_{kn,l}n_j = 0 \text{ em } \Gamma_{N_i}, t > \tau \quad (3.12)$$

Além da função de Green será utilizado também uma função chamada Degrau [35, 36, 37] a qual para a Eq. 3.10 pode ser interpretada como a derivada a função de Green no tempo, i.e.,  $H_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \dot{G}_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ , desta forma, as Eqs. 3.10-3.12 podem ser reescritas como:

$$\rho\ddot{H}_{in} - (C_{ijkl}H_{kn,l})_{,j} = \delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\dot{\delta}(t - \tau) \text{ em } \Omega, t > \tau \quad (3.13)$$

$$H_{in} = 0 \text{ em } \Gamma_{D_i}, t > \tau \quad (3.14)$$

$$C_{ijkl}H_{kn,l}n_j = 0 \text{ em } \Gamma_{N_i}, t > \tau \quad (3.15)$$

Vale a pena ressaltar que a resolução das Eqs. 3.13-3.15 ou obtendo a função Degrau diretamente derivando da função de Green no tempo dá a mesma expressão de um ponto de vista analítico, entretanto, como será mostrado na seção seguinte, calcular numericamente a função Degrau a partir das Eqs. 3.13-3.15 pode gerar resultados diferentes, dando a possibilidade de obter resultados com maior precisão.

### 3.3 Formulação fraca e Método de elementos finitos (MEF)

Nesta seção será obtida a formulação fraca do problema dado pelas Eqs. 2.4, 2.26- 2.29, antes de se obter a formulação semi-discreta do MEF e finalmente a discreta no domínio do tempo.

Sendo o espaço de soluções admissíveis e o espaço de funções teste, respectivamente definidos como:

$$S_t = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Gamma_D \forall t \geq 0 \right\} \quad (3.16)$$

$$V = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (3.17)$$

a formulação fraca do problema consiste em encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in S_t, \forall t \geq 0$  tal que  $\forall \mathbf{v} \in V$  satisfaça [5]:

$$(\mathbf{v}, \rho \ddot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{f}) + (\mathbf{v}, \mathbf{t})_\Gamma \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{v}, \rho \mathbf{u}(0)) = (\mathbf{v}, \mathring{\mathbf{u}}) \quad (3.19)$$

$$(\mathbf{v}, \rho \dot{\mathbf{u}}(0)) = (\mathbf{v}, \mathring{\mathbf{v}}) \quad (3.20)$$

onde  $H^1$  é o espaço de Sobolev clássico e  $(\cdot, \cdot)$  é o produto interno  $L_2(\Omega_s)$  usual (e.g.,  $(\mathbf{v}, \rho \ddot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Omega$ ) [38]. O operador bilinear  $a : V \times S_t \rightarrow \mathbb{R}$  da Eq. 3.18 pode ser escrito como

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : (\mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}) d\Omega \quad (3.21)$$

A Eq. 3.18 pode ser obtida a partir das Eqs. 3.3, 2.28 e 2.29, ao multiplicar a Eq. 3.3 por  $v_i \in V$  e integrar no domínio  $\Omega$ , ou seja

$$\int_{\Omega} [(C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i] v_i d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i d\Omega \quad (3.22)$$

Da regra da derivada do produto tem-se:

$$(C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} v_i = (C_{ijkl} u_{k,l} v_i)_{,j} - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} \quad (3.23)$$

a qual substituindo na Eq. 3.22 resulta em

$$\int_{\Omega} [(C_{ijkl}u_{k,l}v_i)_{,j} - C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} + f_i v_i] d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i d\Omega \quad (3.24)$$

Através do teorema da divergência tem-se

$$\int_{\Omega} (C_{ijkl}u_{k,l}v_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} C_{ijkl}u_{k,l}v_i n_j d\Gamma \quad (3.25)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal à superfície  $\Gamma$ . Como a função teste tem que satisfazer a condição de contorno de Dirichlet e os deslocamentos estão prescritos em  $\Gamma_{D_i}$ , então  $v_i = 0$  em  $\Gamma_{D_i}$ , por outro lado tem-se as condições de contorno de Neumann  $C_{ijkl}u_{k,l}n_j = \bar{t}_i$  em  $\Gamma_{N_i}$  e do cone em  $\Gamma_{A_i}$ . A condição de contorno não reflexiva do cone em  $\Gamma_{A_i}$  pode ser interpretada como forças de superfícies  $t_i^*$  obtidas das Eqs. 2.32-2.35 que dependem tanto do deslocamento quanto da velocidade. Logo

$$\int_{\Gamma} C_{ijkl}u_{k,l}v_i n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_{N_i}} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{A_i}} t_i^* v_i d\Gamma \quad (3.26)$$

e substituindo a Eq.3.26 em 3.25 tem-se:

$$\int_{\Omega} (C_{ijkl}u_{k,l}v_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma_{N_i}} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{A_i}} t_i^* v_i d\Gamma \quad (3.27)$$

em seguida, substituindo a Eq. 3.27 em 3.24, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{N_i}} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{A_i}} t_i^* v_i d\Gamma \quad (3.28)$$

A partir daqui, nesta subseção, adota-se a notação matricial para facilitar a implementação computacional do problema, que para o caso bidimensional, resulta na relação matricial do tensor deformação com o campo de deslocamentos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{L}$  é a matriz de operadores diferenciais:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamento

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Assim, por exemplo, a relação tensão-deformação 2.17 pode ser dada em função do campo de deslocamentos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.32)$$

obtendo, o segundo membro da Eq. 3.28 em forma matricial:

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega. \quad (3.33)$$

### 3.3.1 Aproximação por elementos finitos

No MEF deve-se inicialmente particionar  $\Omega$  em  $n_{el}$  elementos de domínios  $\Omega_e$  não sobrepostos, i.e.,  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_e$  e  $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset$  ( $\forall e \neq e'$ , Fig. 3.1).

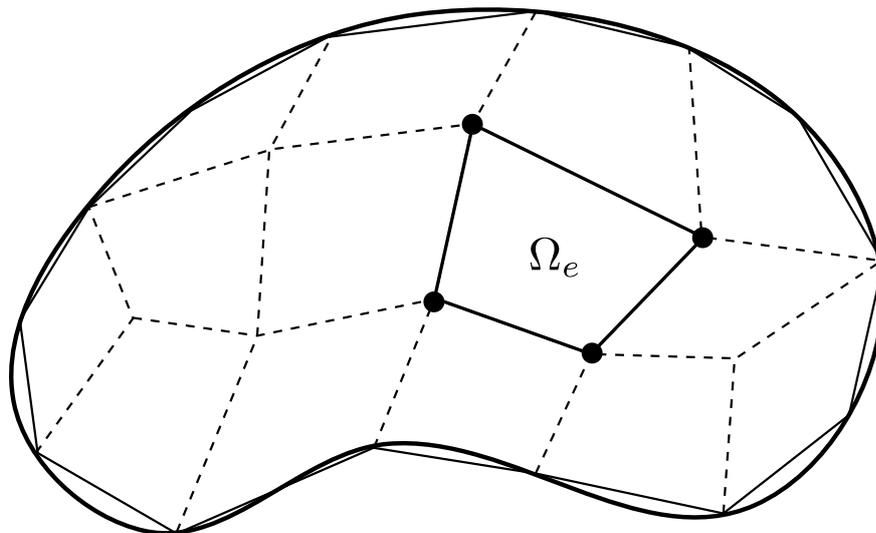


Figura 3.1: Representação da discretização espacial por elementos finitos.

Tendo em vista a discretização do domínio, restringe-se o problema variacional a um

determinado subespaço – de dimensão finita, com base na aproximação de polinômios por partes sobre o domínio discreto  $\bar{\Omega}^h$  – do espaço das funções admissíveis, i.e., substituem-se os espaços  $S_t$  e  $V$  pelos subespaços de dimensão finita  $S_t^h \subset S_t$  e  $V^h \subset V$  definidos respectivamente como

$$S_t^h = \{ \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) \in S_t; \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Gamma_D^h \forall t \geq 0 \} \quad (3.34)$$

$$V^h = \{ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) \in V; \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D^h \} \quad (3.35)$$

Assim, a formulação semi-discreta do MEF pode ser realizada. Para cada elemento, o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  é aproximado por

$$u_i^e(\mathbf{x}, t) = N_I^e(\mathbf{x}) u_{i_I}^e(t) \quad (3.36)$$

onde  $u_{i_I}^e(t)$  é o deslocamento do nó  $I$  do elemento  $e$  segundo a direção  $i$  no instante  $t$  e  $N_I^e(\mathbf{x})$  é a função de interpolação associada ao nó  $I$ , com  $e = 1, \dots, n_{el}$ . Desta forma tem-se:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{u}_d^e \quad (3.37)$$

tomando a matriz  $\mathbf{N}^e \in \mathbb{R}^{2 \times 2n_{ne}}$  da seguinte maneira

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e o vetor  $\mathbf{u}^e \in \mathbb{R}^{2n_{ne} \times 1}$  como

$$\mathbf{u}^{eT} = \left\{ u_{1_1} \quad u_{2_1} \quad u_{1_2} \quad u_{2_2} \quad u_{1_3} \quad u_{2_3} \quad \cdots \right\} \quad (3.39)$$

onde  $n_{ne}$  é o número de nós do elemento  $e$ .

Assim, para um elemento  $\Omega_e$  da malha de elementos finitos do problema, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}\mathbf{v}^e)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^e) d\Omega &= \int_{\Gamma_{eN_i}} \mathbf{v}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{v}^{eT} \mathbf{t}^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{v}^{eT} \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{v}^{eT} \ddot{\mathbf{u}}^e d\Omega \end{aligned} \quad (3.40)$$

e ao aproximar as funções teste por  $\mathbf{v}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{v}^{*e}$  e o campo de deslocamento por  $\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{u}_d^e$ , a Eq. 3.40 torna-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}\mathbf{N}^e)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\mathbf{N}^e) d\Omega \mathbf{u}_d^e &= \int_{\Gamma_{eN_i}} \mathbf{N}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega \ddot{\mathbf{u}}_d^e \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dada a matriz de deformação  $\mathbf{B}^e$  por

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{L}\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e o vetor de forças como

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Gamma_{eN_i}} \mathbf{N}^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^* d\Gamma + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{f} d\Omega \quad (3.43)$$

tem-se

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \mathbf{u}_d^e = \mathbf{F}^e - \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega \ddot{\mathbf{u}}_d^e \quad (3.44)$$

Introduzindo as definições das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}^e$  e de massa  $\mathbf{M}^e$  dadas por

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \quad (3.45)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega \quad (3.46)$$

obtém-se finalmente a *equação de equilíbrio elementar*

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}_d^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}_d^e = \mathbf{F}^e \quad (3.47)$$

Ao se somar de maneira correta as contribuições das matrizes e vetores elementares

nas globais, ou seja

$$\mathbf{K} = \bigvee_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e \quad (3.48)$$

$$\mathbf{M} = \bigvee_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{M}^e \quad (3.49)$$

$$\mathbf{F} = \bigvee_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}^e. \quad (3.50)$$

onde  $\bigvee_{e=1}^{n_{el}}$  é o operador *Assembly* [5], chega-se na *equação de equilíbrio global*

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.51)$$

onde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$  são as matrizes globais de massa e rigidez,  $\mathbf{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$  o vetor de forças nodais,  $\mathbf{U} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$  e  $\ddot{\mathbf{U}} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$  os vetores de deslocamentos e acelerações nodais respectivamente, em que  $nq$  representa o número de equações ou graus de liberdade.

### 3.3.2 Matriz de massa diagonal

A matriz de massa definida em (3.49) é denominada matriz consistente, não sendo diagonal; Matrizes de massa diagonais possuem um grande atrativo, principalmente do ponto de vista computacional e quando aplicadas a métodos explícitos de marcha no tempo. Na obtenção de matrizes de massa diagonais, se destacam, as técnicas: “Row Sum”, HRZ e quadratura nodal.

A matriz massa “Row Sum” [39, 40], associada ao par de graus de liberdade (deslocamento do nó  $I$  na direção  $i$ , deslocamento do nó  $J$  na direção  $j$ ) do elemento  $e$  é definida como:

$$M_{Ii,Jj}^e = \begin{cases} \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \rho N_I d\Omega & \text{se } I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases} \quad (3.52)$$

O nome vem do fato de que

$$\sum_{J=1}^{n_{ne}} \int_{\Omega_e} \rho N_I N_J d\Omega = \int_{\Omega_e} \rho N_I \underbrace{\left( \sum_{J=1}^{n_{ne}} N_J \right)}_1 d\Omega = \int_{\Omega_e} \rho N_I d\Omega \quad (3.53)$$

Ou seja, os elementos em cada linha são somados e colocados na diagonal [5].

### 3.3.3 Condição não-reflexiva do cone

Ao implementar a condição não-reflexiva do cone assume-se que os contornos  $\Gamma_{A_i}$  utilizados para os modelos serão paralelos aos eixos  $x$  (contorno superior e inferior) e  $y$  (contornos laterais), conseqüentemente, ao fazer-se  $\mathbf{t}^{*T} = \left\{ \begin{matrix} t_1^* & t_2^* \end{matrix} \right\}$  tem-se  $t_1^* \equiv \sigma$  e  $t_2^* \equiv \tau$  para os contornos laterais e  $t_1^* \equiv \tau$  e  $t_2^* \equiv \sigma$  para os contornos superior e inferior.

Ao expandir a parcela referente ao contorno do cone da Eq.3.43 com relação a uma forma geral das Eqs. 2.32-2.35 obtém-se:

$$\int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{u}^e + \mathbf{b} \dot{\mathbf{u}}^e) d\Gamma = \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{N}^e \mathbf{u}_d^e + \mathbf{b} \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{u}}_d^e) d\Gamma \quad (3.54)$$

$$= \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{N}^e d\Gamma \mathbf{u}_d^e + \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b} \mathbf{N}^e d\Gamma \dot{\mathbf{u}}_d^e \quad (3.55)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  são matrizes que dependem das constantes do material do elemento, e que sendo na lateral por exemplo, para o caso das ondas de Rayleigh serão [32, 19]:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad \mathbf{b} = \rho \begin{bmatrix} SV_R & 0 \\ 0 & V_R \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

e para o caso das ondas de volume:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\rho}{2r} \begin{bmatrix} V_P^2 & 0 \\ 0 & V_S^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \rho \begin{bmatrix} V_P & 0 \\ 0 & V_S \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Tomando

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{N}^e d\Gamma \quad (3.58)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{\Gamma_{eA_i}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{b} \mathbf{N}^e d\Gamma \quad (3.59)$$

e ainda, fazendo a matriz de amortecimento diagonal, equivalente ao feito com a matriz

de massa, e utilizando o operador *Assembly*, obtém-se o sistema global final:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.60)$$

onde  $\dot{\mathbf{U}} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$  é o vetor de velocidades nodais,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$  é a fração referente à condição não-reflexiva retirada do vetor  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{K} = \mathbf{K} + \bar{\mathbf{K}}$ , ressaltando que a matriz de amortecimento só terá influência nos elementos cujos lados tiverem a condição de contorno não reflexiva do cone, que na maioria das vezes são poucos quando comparados com a quantidade de elementos total.

### 3.3.4 Elementos finitos isoparamétricos

Na formulação de elementos finitos isoparamétricos, se utilizam as funções de interpolação  $N_I$  tanto para aproximar o campo de deslocamentos como para a própria geometria do elemento finito.

O elemento quadrilátero de 4 nós  $\Omega_e$  representado na Figura 3.2 é obtido de uma mudança de coordenadas que o mapeie a partir do *elemento padrão* definido no sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , através da regra:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) x_I^e \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) y_I^e \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $(x_I^e, y_I^e)$  são as coordenadas globais dos pontos nodais,  $N_I$  são as funções de interpolação correspondentes aos 4 pontos nodais, vértices do *elemento quadrado unitário* no sistema  $(\xi, \eta)$  (chamados de coordenadas naturais  $\xi_I, \eta_I$ ).

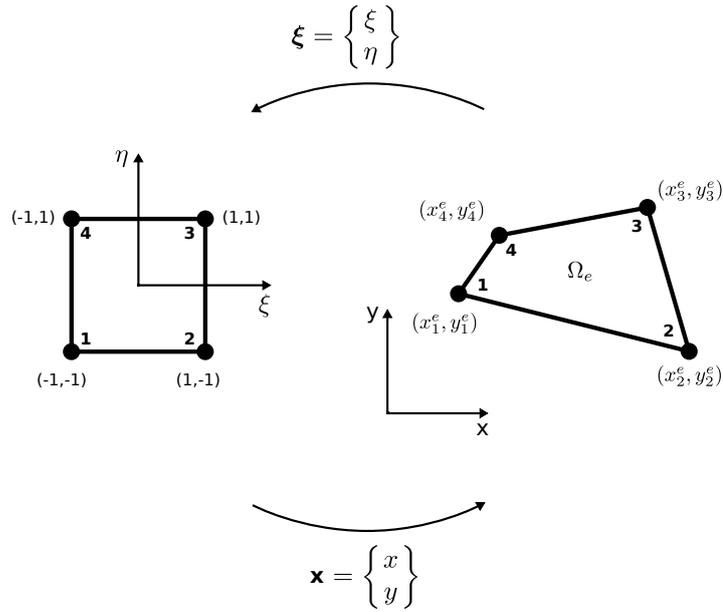


Figura 3.2: Domínio do elemento quadrilateral bilinear e ordenação local dos pontos nodais.

As funções de interpolação  $N_I$  do elemento são obtidas considerando a expansão *bilinear*

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta \\ y(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\xi\eta \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , ( $i = 0, \dots, 3$ ) são parâmetros a ser determinados, e ao se estipular que

$$\begin{aligned} x(\xi_I, \eta_I) &= x_I^e \\ y(\xi_I, \eta_I) &= y_I^e \end{aligned} \quad (3.63)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^e &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4^e &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.64)$$

As condições 3.63 impostas nas funções de interpolação  $N_I$  tem como consequência

$$N_I^e(\xi_J, \eta_J) = \delta_{IJ} \quad (3.65)$$

onde  $\delta_{IJ}$  é o operador delta de Kronecker.

As derivadas das funções de interpolação em relação a  $(x, y)$  são obtidas através da matriz jacobiana que relaciona as derivadas entre a coordenada global e natural (local), sendo as expressões obtidas através da regra da cadeia, como indicado a seguir [4]:

$$\begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} N_{I,x} \\ N_{I,y} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

com

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^4 N_{I,\xi} x_I^e & \sum_{I=1}^4 N_{I,\xi} y_I^e \\ \sum_{I=1}^4 N_{I,\eta} x_I^e & \sum_{I=1}^4 N_{I,\eta} y_I^e \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

As integrais de área definidas nas Eqs. 3.43, 3.45 e 3.46 também são calculadas nas coordenadas naturais, através da seguinte transformação:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{E}(x, y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{E}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (3.68)$$

onde a função  $\mathbf{E}$  representa o integrando e pode ser por exemplo  $\mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e$ .

### 3.3.5 Integração numérica – Quadratura Gaussiana

Em muitos casos a integral definida pela Eq.3.68 não possui solução analítica e precisa ser integrada numericamente. Em elementos finitos é usual adotar a integração por quadratura Gaussiana, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{E}(\xi_i, \eta_j) \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}^1} \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}^2} \mathbf{E}(\xi_i, \eta_j) \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (3.69)$$

onde  $n_{\text{int}}^1$  e  $n_{\text{int}}^2$  representam o número de pontos de integração,  $(\xi_i, \eta_j)$  são os pontos de Gauss e  $w_i$  e  $w_j$  seus respectivos pesos, todos tabelados. Ao utilizar  $n_{\text{int}}$  pontos de Gauss em uma dimensão, o esquema integra exatamente polinômios de grau menor ou igual a  $2n_{\text{int}} - 1$ .

### ***3.3.6 Métodos de integração temporal direta***

Quando analisado um problema de dinâmica de estruturas, na maioria dos casos, é mais efetivo utilizar um esquema de integração implícito incondicionalmente estável, uma vez que o vetor de carga excitará somente os modos mais baixos (ou somente alguns intermediários) do sistema físico [4], não se fazendo necessária a representação precisa das frequências elevadas do sistema físico em questão no sistema de elementos finitos, as quais são diretamente incluídas num esquema de integração direta de marcha no tempo. Esta característica é atrativa ao se estudar fenômenos de propagação de onda, uma vez que, uma característica deste problema é que uma grande quantidade de frequências do sistema são excitadas.

Um dos métodos clássicos de integração direta de marcha no tempo é o esquema de segunda ordem Diferença Central padrão [5], o qual é de fácil implementação (Algoritmo 1) e será utilizado neste trabalho como objeto de comparação com o novo método proposto. Como pode se observar no algoritmo 1 é necessário o cálculo da inversa das matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e amortecimento  $\mathbf{C}$ , o que não é nenhum problema ao se trabalhar com suas respectivas matrizes diagonalizadas (subseção 3.3.2).

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo do esquema de marcha no tempo Diferença Central\*
 

---

Defina as condições iniciais  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0$  e  $\dot{\mathbf{U}}(0) = \dot{\mathbf{U}}^0$ ;

Forme as matrizes globais de massa diagonal  $\mathbf{M}$  de amortecimento diagonal  $\mathbf{C}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$  e o vetor de forças nodais  $\mathbf{F}$ ;

Defina  $t_f/\Delta t = n$ , ou seja,  $n$  é o número de passos de tempo;

Defina  $\gamma = 1/2$ ;

*/\* Calcule a aceleração inicial \*/*

$$\ddot{\mathbf{U}}^0 = -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^0 + \mathbf{K}\mathbf{U}^0 - \mathbf{F}^0);$$

*/\* Integração temporal \*/*

**para**  $i = 1, \dots, n$  **faça**

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{U}^i = \mathbf{U}^{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{i-1}; \\ \dot{\mathbf{U}}^i = \dot{\mathbf{U}}^{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{i-1}; \\ \ddot{\mathbf{U}}^i = -(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^i + \mathbf{K}\mathbf{U}^i - \mathbf{F}^i); \\ \dot{\mathbf{U}}^i = \dot{\mathbf{U}}^i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^i; \end{array} \right.$$

**fim**

---

*\*Observe que este algoritmo pode ser implementado elemento por elemento sem a necessidade de formar nenhuma matriz ou vetor global.*

### 3.4 Expressão integral do método da aproximação Explícita de Green

A presente seção tem por objetivo apresentar a expressão integral do método da aproximação explícita de Green ao aplicar-se o método dos resíduos ponderados simultaneamente no espaço e no tempo e utilizar-se conceitos tanto do método dos elementos de contorno quanto do método dos elementos finitos como descrito em [41, 12].

Antes de aplicar a sentença de resíduos ponderados, a transformação dada por  $u_i = \tilde{u}_i + \hat{u}_i$  tal que  $\hat{u}_i = \bar{u}_i$  em  $\Gamma_{D_i}$  é utilizada. Essa transformação tem por objetivo satisfazer a condição de contorno de Dirichlet de forma exata e também evitar o cálculo da derivada da função de Green no contorno  $\Gamma_{D_i}$  [41]. Portanto, o problema de valor inicial e de contorno dado pelas Eqs. (3.3), (2.26)-(2.29) é reescrito como:

$$(C_{ijkl}\tilde{u}_{k,l})_{,j} + f_i + \psi_i = \rho\ddot{\tilde{u}}_i \text{ em } \Omega \times I \quad (3.70)$$

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_i(\mathbf{x}) - \hat{u}_i(\mathbf{x}, 0) \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (3.71)$$

$$\dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{x}, 0) = \dot{v}_i(\mathbf{x}) - \dot{\hat{u}}_i(\mathbf{x}, 0) \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (3.72)$$

$$\tilde{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I \quad (3.73)$$

$$C_{ijkl}(\tilde{u}_{k,l} + \hat{u}_{k,l})n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_{N_i} \times I \quad (3.74)$$

onde  $\psi_i = (C_{ijkl}\hat{u}_{k,l})_{,j} - \rho\ddot{\hat{u}}_i$  pode ser interpretado como sendo uma nova fonte responsável pela introdução da condição de Dirichlet não nula na solução do problema.

Aplicando o método dos resíduos ponderados simultaneamente no domínio espaço tempo, ou seja, em  $\Omega$  e em um intervalo de tempo qualquer  $(t_0, t^+]$  e adotando a função de Green solução das Eqs. 3.10-3.12 como sendo a função teste, a seguinte sentença integral é obtida:

$$\int_t^{t^+} \int_{\Omega} G_{in}(t - \tau) [(C_{nijkl}\tilde{u}_{k,l})_{,j} + f_n + \psi_n - \rho\ddot{\tilde{u}}_n] d\Omega d\tau = 0 \quad (3.75)$$

onde  $t^+ = t + \epsilon$  (sendo  $\epsilon$  um número positivo arbitrariamente pequeno) é utilizado para evitar que o limite superior da integral coincida com o pico da função delta de Dirac.

No método ExGA o domínio do problema  $\Omega$  é particionado em  $n_{el}$  domínios de

elementos  $\Omega_e$  não sobrepostos i.e.,  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_e$  e  $\Omega_e \cap_{\forall e \neq e'} \Omega_{e'} = \emptyset$ . A ideia principal é a de aproximar os campos desconhecidos (deslocamentos e funções de Green) de maneira similar utilizando a formulação semi-discreta do MEF onde o espaço é discretizado independentemente do domínio do tempo como discutido anteriormente [5].

Devido ao grande número de expressões, o desenvolvimento da Eq. 3.75, para se obter a expressão integral do método ExGA não será explicitamente dado, sendo apenas os passos principais apresentados [42]. São eles:

1. Aplicação do teorema da divergência duas vezes no primeiro termo da Eq. 3.75 contendo o laplaciano;
2. Aplicação do teorema da divergência uma vez no primeiro termo envolvendo a parcela  $\psi_n(\mathbf{y}, \tau)$  na Eq. 3.75 que contem o laplaciano devido a condição de contorno 3.74;
3. Efetuar integração por partes em relação a  $\tau$  uma vez para a integral que contem o termo  $\frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau}$  e duas vezes para a integral que contem o termo  $\frac{\partial^2 \tilde{u}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau^2}$  na Eq. 3.75, observando posteriormente que para  $\tau = t^+$  tem-se  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t^+) = 0$  e  $\dot{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t^+) = 0$  pelo princípio da causalidade uma vez que  $t - t^+ = t - (t + \epsilon) = -\epsilon < 0$ ;
4. Utilização da propriedade integral da função delta de Dirac definida anteriormente (Eq. 3.9) tendo em vista a integral obtida depois de efetuado os passos anteriores e a Eq. 3.10 e finalmente tomando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ;
5. Após a realização de todas essas etapas e levando em consideração as condições de contorno homogêneas da função de Green 3.11 e 3.12 bem como a condição de contorno homogênea 3.73, obtem-se a expressão integral do método ExGA para a variável  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  [42]

$$\mathbf{U}(t) = (\mathbf{G}(t-t_0)\mathbf{C} + \dot{\mathbf{G}}(t-t_0)\mathbf{M})\mathbf{U}(t_0) + \mathbf{G}(t-t_0)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau \quad (3.76)$$

onde  $\mathbf{G} : t \geq t_0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq \times nq}$  é a matriz da função de Green que armazena seus valores nodais.

Alternativamente, pode-se obter a seguinte expressão integral no domínio do tempo utilizando a função Degrau:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{H}(t - t_0)\mathbf{M}\mathbf{U}(t_0) + \mathbf{G}(t - t_0)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t - \tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau \quad (3.77)$$

onde  $\mathbf{H} : t \geq t_0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq \times nq}$  é a matriz da função Degrau que armazena seus valores nodais. Causa pela qual, a partir daqui o método passa a receber o nome de ExGAH.

A solução da Eq. 3.77 é realizada recursivamente. Deste modo, particionando o tempo total de análise  $I$  em  $N$  intervalos de tempo iguais, i.e.,  $[0, T] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}]$  com  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_N = t_f$ ,  $\Delta t = t_{k+1} - t_k = t_f/n$  e  $t_{k+1} = (k + 1)\Delta t$ , a Eq. 3.77 e sua derivada no tempo podem ser escritas como [6]:

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}^k + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^k + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t_k + \tau)d\tau \quad (3.78)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{k+1} = \dot{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}^k + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^k + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t_k + \tau)d\tau \quad (3.79)$$

onde as integrais de convolução serão aproximadas pela regra do Trapézio como:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t_k + \tau)d\tau \approx [\mathbf{G}(0)\mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{F}^k] \frac{\Delta t}{2} \quad (3.80)$$

$$\int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau)\mathbf{F}(t_k + \tau)d\tau \approx [\dot{\mathbf{G}}(0)\mathbf{F}^{k+1} + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{F}^k] \frac{\Delta t}{2} \quad (3.81)$$

É importante ressaltar que ao utilizar a matriz Degrau se elimina a segunda derivada da matriz de Green com relação ao tempo na Eq. 3.79 (1º termo do lado direito) a qual poderia ser uma fonte de erros quando seu calculo é realizado numericamente como descrito por [6].

### 3.5 Funções de Green locais

Nesta seção o conceito de função de Green local em duas dimensões (i.e.,  $d = 2$ ) é introduzido tendo em vista o princípio da causalidade com o objetivo de reduzir o custo

computacional para obter as funções de Green e Degrau. Além disso, para mostrar a flexibilidade dada pela formulação proposta, as funções de Green e Degrau serão calculadas independentemente pelo MEF em conjunto com o esquema de Diferença central padrão para se realizar a integração temporal.

### 3.5.1 Princípio da Causalidade (sistema contínuo)

Tendo em mente que as funções de Green serão calculadas somente em  $t = \Delta t$  de acordo com as Eqs. 3.78 e 3.79 e motivado pelo princípio da causalidade, a função de Green possui suporte compacto, i.e., seus valores serão não nulos somente numa pequena região ao redor do ponto fonte considerando um passo de tempo suficientemente pequeno [6, 43, 41]. De fato, ao se considerar um sistema contínuo, o princípio da causalidade afirma que o efeito de um impulso no tempo  $\tau$  localizado em  $\mathbf{y}$ , dado em qualquer direção, não gera nenhuma influência para pontos  $\mathbf{x}$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > V_P(t - \tau)$ , i.e., a onda gerada pela fonte pontual instantânea não teve tempo suficiente de alcançar pontos fora da região  $V_P(t - \tau)$ . Foi utilizada a velocidade da onda-P ( $V_P$ ) uma vez que seu valor é maior que o das velocidades das onda-S ( $V_S$ ) e de Rayleigh ( $V_R$ ), resultando na maior região possível. Assim, considerando  $\tau = 0$  e  $t = \Delta t$  pode-se definir o seguinte subdomínio local para a função de Green dada uma fonte pontual em  $\mathbf{y}$  (ver Fig. 3.3 para uma descrição destes subdomínios locais)

$$\Omega_s = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq V_P \Delta t\} \subset \Omega \quad (3.82)$$

A fim de ilustrar este fato, considerando, por exemplo, que o subdomínio local tem propriedades de material homogêneas; e supondo que o subdomínio não intercepta o contorno original  $\Gamma$  do problema em consideração, a função de Green se reduz a conhecida solução fundamental que tem a sua expressão analítica dada por [44]:

$$G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{V_P} H\left(\frac{V_P \bar{t}}{r} - 1\right) \left[ \left( 2 \left(\frac{V_P \bar{t}}{r}\right)^2 - 1 \right) \frac{r_{,i} r_{,n}}{\sqrt{V_P^2 \bar{t}^2 - r^2}} - \frac{\delta_{in}}{r^2} \sqrt{V_P^2 \bar{t}^2 - r^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{V_S} H\left(\frac{V_S \bar{t}}{r} - 1\right) \left[ - \left( 2 \left(\frac{V_S \bar{t}}{r}\right)^2 - 1 \right) \frac{r_{,i} r_{,n}}{\sqrt{V_S^2 \bar{t}^2 - r^2}} + \delta_{in} \frac{V_S^2 \bar{t}^2}{r^2} \frac{1}{\sqrt{V_S^2 \bar{t}^2 - r^2}} \right] \right\} \quad (3.83)$$

onde  $\bar{t} = t - \tau$ ,  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  e  $H(\cdot)$  é a função Heaviside generalizada. Observe que a função Heaviside garante o princípio da causalidade discutido anteriormente.

### 3.5.2 Sistema discreto

Devido ao fato de que as expressões analíticas para as Eqs. 3.10-3.15 serem difíceis ou até mesmo impossíveis de serem obtidas para um meio geral com geometria qualquer, a função de Green junto com a função Degrau serão tratadas numericamente com a formulação semi-discreta do MEF. Porém, as Eq. 3.10 e 3.13 ainda não estão de maneira adequada para aplicar os procedimentos do MEF devido à função delta de Dirac no tempo e sua derivada no tempo respectivamente.

Neste caso, a fonte pontual instantânea ( $\delta_{in}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-\tau)$  e  $\delta_{in}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\dot{\delta}(t-\tau)$ ) pode ser substituída por condições iniciais equivalentes (ver, por exemplo, [41, 45] para mais detalhes).

Além disso, como as funções de Green são calculadas localmente através dos subdomínios  $\Omega_s$ , são impostas condições de contorno de Dirichlet homogêneas (i.e.,  $G_{in} = 0$ ) no contorno  $\Gamma_s$  do subdomínio somente se este não intercepta o contorno original; caso contrário, serão impostas as condições de contorno originais com valores nulos.

Daqui em diante, o contorno local do subdomínio pode ser dividido como  $\partial\Omega_s = \Gamma_s = \tilde{\Gamma}_{D_i} \cup \tilde{\Gamma}_{N_i} \cup \Gamma_{sD_i}$  de forma que  $\tilde{\Gamma}_{D_i} \cap \tilde{\Gamma}_{N_i} = \tilde{\Gamma}_{D_i} \cup \Gamma_{sD_i} = \tilde{\Gamma}_{N_i} \cup \Gamma_{sD_i} = \emptyset$  onde  $\tilde{\Gamma}_{D_i} = \Gamma_{D_i} \cap \Gamma_s$  e  $\tilde{\Gamma}_{N_i} = \Gamma_{N_i} \cap \Gamma_s$  com as condições de contorno de Dirichlet sendo utilizadas em  $\Gamma_{sD_i}$  ao invés da de Neumann, a fim de evitar o movimento de corpo rígido no caso onde o subdomínio não tenha influência do contorno de Dirichlet original (ver Fig. 3.3).

Assim, pode-se definir o seguinte conjunto de equações no subdomínio local

$$\rho\ddot{w}_{in} - (C_{ijkl}w_{kn,l})_{,j} = 0 \text{ em } \Omega_s, t > \tau \quad (3.84)$$

$$w_{in} = 0 \text{ em } \tilde{\Gamma}_{D_i} \cup \Gamma_{sD_i}, t > 0 \quad (3.85)$$

$$C_{ijkl}w_{kn,l}n_j = 0 \text{ em } \tilde{\Gamma}_{N_i}, t > 0 \quad (3.86)$$

$$w_{in} = \dot{w}_i \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (3.87)$$

$$\dot{w}_{in} = \ddot{w}_i \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (3.88)$$

onde  $w_{in} : \Omega \times \Omega \times (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$  representa as componentes da função de Green ou a função Degrau devido às condições iniciais equivalentes.

Para a função de Green, as condições iniciais são dadas por  $\dot{w}_i = 0$  e  $\ddot{w}_i = \frac{\delta_{in}}{\rho}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ , enquanto que para a função Degrau,  $\dot{w}_i = \frac{\delta_{in}}{\rho}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$  e  $\ddot{w}_i = 0$ . Fisicamente, a função de



se resume em encontrar  $\mathbf{W}_j : t > 0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq_s}$  tal que

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}}_j(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{W}}_j(t) + \mathbf{K}\mathbf{W}_j(t) = \mathbf{0}, t > 0 \quad (3.92)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{W}_j(0) = \mathbf{W}^0, t = 0 \quad (3.93)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{W}}_j(0) = \hat{\mathbf{W}}^0, t = 0 \quad (3.94)$$

onde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nq_s \times nq_s}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{nq_s \times nq_s}$  e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{nq_s \times nq_s}$  são as matrizes de massa diagonal, de amortecimento diagonal e de rigidez respectivamente, relativas ao subdomínio local discreto, com  $nq_s$  sendo o número de equações associado a cada subdomínio local discreto  $\bar{\Omega}_s^h$  com sua respectiva submalha.

A matriz de amortecimento diagonal  $\mathbf{C}$  será nula em muitos subdomínios uma vez que nem todos os elementos possuem lados com a condição de contorno não reflexiva do cone. Além disso, observe-se que  $\mathbf{W}_j(t)$  denota o vetor de Green nodal se as condições iniciais forem dadas por  $\mathbf{W}^0 = \mathbf{0}$  e  $\hat{\mathbf{W}}^0 = \mathbf{1}_j$  ou o vetor Degrau nodal se as condições iniciais forem dadas por  $\mathbf{W}^0 = \mathbf{1}_j$  e  $\hat{\mathbf{W}}^0 = \mathbf{0}$  em que  $\mathbf{1}_j \in \mathbb{R}^{nq_s}$  é o vetor unitário com as componentes definidas como  $1_{ij} = \delta_{ij}$ .

Efetivamente, o vetor  $\mathbf{W}_j(t)$  representa somente os valores não-nulos de uma coluna da matriz de Green  $\mathbf{G}(t)$  ou da matriz Degrau  $\mathbf{H}(t)$  devido a uma condição inicial aplicada no grau de liberdade  $j$ , lembrando que os valores nodais fora do subdomínio local discreto (i.e.,  $\bar{\Omega}^h \setminus \bar{\Omega}_s^h$ ) são nulos devido ao princípio da causalidade.

De acordo com as Eq. 3.78 e 3.79, as matrizes de Green, Degrau e de suas derivadas no tempo precisam ser calculadas no primeiro passo de tempo. Isto é realizado através da utilização de uma variação do esquema de integração Diferença Central clássico para resolver o problema de valor inicial representado pelas Eqs. 3.92-3.94.

Na realidade, a característica principal da metodologia proposta é a de calcular as matrizes de Green e Degrau independentemente adotando o esquema de Diferença Central procedente da implementação que utiliza a aceleração (Algoritmo 1) [5] com  $\gamma$  sendo um parâmetro livre, diferente do esquema de Diferença Central padrão, onde este parâmetro é sempre igual a  $\gamma = 1/2$ .

As matrizes de Green e Degrau são calculadas diretamente de  $t = 0$  para  $t = \Delta t$  adotando  $\gamma = 1/2$  para o cálculo da matriz de Green e  $\gamma = \gamma_0 \in [1/2, 1]$  (parâmetro livre) para o cálculo da matriz Degrau com  $\gamma_0$  sendo ajustada para produzir a melhor precisão.

O procedimento acima está resumido no Algoritmo 2 (as propriedades de estabilidade e precisão deste algoritmo serão vistas em detalhes na seção seguinte). Como o esquema de Diferença Central é um método de integração explícita, a seguir será utilizada uma matriz de massa (ou amortecimento) diagonal a fim de evitar a solução de qualquer sistema de equação (veja, por exemplo, Eqs. 3.93 e 3.94).

Agora torna-se claro que resolver as matrizes de Green e Degrau independentemente permite uma aproximação mais geral para derivar diferentes técnicas de marcha no tempo – no que concerne à expressão do método ExGAH dada pelas Eqs. 3.78 e 3.79 – com diferentes propriedades numéricas.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo para o cálculo das matrizes de Green e Degrau

---

**para**  $j = 1, \dots, nq$  (*número total de graus de liberdade não nulos*) **faça**

Defina a submalha  $\bar{\Omega}_s^h$  ao redor da fonte pontual nodal associada com o grau de liberdade;

Forme as matrizes locais de massa diagonal  $\mathbf{M}$ , de amortecimento diagonal  $\mathbf{C}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$ ;

Defina as condições iniciais  $\mathbf{W}_j(0) = \mathbf{W}_j^0 = \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{W}}_j(0) = \dot{\mathbf{W}}_j^0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}_j$  para o vetor nodal de Green ou  $\mathbf{W}_j(0) = \mathbf{W}_j^0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}_j$  e  $\dot{\mathbf{W}}_j(0) = \dot{\mathbf{W}}_j^0 = \mathbf{0}$  para o vetor nodal Degrau;

*/\* Integração temporal \*/*

Calcule a aceleração inicial  $\ddot{\mathbf{W}}_j^0 = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{W}}_j^0 + \mathbf{K}\mathbf{W}_j^0)$ ;

Defina  $\gamma_0 = 1/2$  para o vetor de Green e  $\gamma_0 \in [1/2, 1]$  para o vetor Degrau;

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j^0 + \Delta t \dot{\mathbf{W}}_j^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{W}}_j^0;$$

$$\dot{\mathbf{W}}_j = \dot{\mathbf{W}}_j^0 + (1 - \gamma_0) \Delta t \ddot{\mathbf{W}}_j^0;$$

$$\ddot{\mathbf{W}}_j = -(\mathbf{M} + \gamma_0 \Delta t \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{W}}_j + \mathbf{K}\mathbf{W}_j);$$

$$\dot{\mathbf{W}}_j = \dot{\mathbf{W}}_j + \gamma_0 \Delta t \ddot{\mathbf{W}}_j;$$

Insira os vetores  $\mathbf{W}_j \equiv \mathbf{W}_j(\Delta t)$  e  $\dot{\mathbf{W}}_j \equiv \dot{\mathbf{W}}_j(\Delta t)$  na coluna  $j$  da matriz de Green (ou Degrau) e de sua derivada, respectivamente;

**fim**

---

### 3.5.3 Propriedades da função de Green e implementação computacional

Como descrito na seção anterior, as funções de Green e Degrau podem ser calculadas somente numa pequena região ao redor de cada ponto fonte nodal representada pelas submalhas para formar as matrizes  $\mathbf{G}(\Delta t)$ ,  $\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ ,  $\mathbf{H}(\Delta t)$  e  $\dot{\mathbf{H}}(\Delta t)$ . De fato, para um passo de tempo suficientemente pequeno (que é o caso devido à região de estabilidade que será estudada na próxima seção), o número de equações de uma submalha do subdomínio discreto  $\bar{\Omega}_s^h$  é muito menor que o número de equações de toda a malha, implicando que  $nq_s \ll nq$  especialmente para malhas refinadas.

No contexto computacional, pode-se ter vantagens da *relação de reciprocidade* que pode ser usada para mostrar que as matrizes de Green e Degrau, assim como suas derivadas temporais, são simétricas, como visto nas figuras 3.4 e 3.5, e sendo assim, somente os coeficientes da parte superior ou inferior da matriz precisam ser calculadas, reduzindo pela metade o custo computacional. Além disso, os cálculos das funções de Green e Degrau são interdependentes uns dos outros assim como suas submalhas. Portanto, o armazenamento de memória e o tempo de processamento para a obtenção destas funções são consideravelmente reduzidos. É importante ressaltar que devido ao processo de semi-discretização, o princípio da causalidade não é totalmente satisfeito [15] resultando num subdomínio discreto maior comparado ao subdomínio real obtido pelo princípio da causalidade. De fato, isso é de certa forma esperado uma vez que a função delta de Dirac das Eqs. 3.90 e 3.91 numa fonte pontual nodal é tratada num sentido distribuído pelo MEF através das funções de interpolação dando origem às Eqs. 3.93 e 3.94.

Neste sentido, deve ser tomado cuidado ao definir o tamanho de cada submalha. Isto é ilustrado pelas Fig. 3.4 e 3.5, onde pode-se observar que o tamanho dos subdomínios locais discretos  $\bar{\Omega}_s^h$  é ligeiramente maior do que o do sistema contínuo, como será analisado a seguir.

Para analisar melhor o tamanho dos subdomínios discretos, serão feitos testes num modelo onde é considerado, num estado plano de deformação, um sólido homogêneo elástico linear de dimensões 1m x 1m que possui as velocidades  $V_S \approx 5,83m/s$  e  $V_P \approx 9,53m/s$ ,  $\rho = 2200kg/m^3$ ,  $\nu = 0,2^2$ , no qual é aplicado uma condição inicial no ponto nodal do centro (Fig. 3.7), em ambas direções porém, uma por vez, por exemplo, nos

---

<sup>2</sup>Módulo de Young ou de elasticidade  $E = 1,8 \times 10^5 N/m^2$ .

graus de liberdade  $j$  e  $j + 1$ , obtendo os vetores  $\mathbf{W}_i(\Delta t)$ ,  $\dot{\mathbf{W}}_i(\Delta t)$  com  $i = j, j + 1$ .

Para este modelo considerou-se que todo o contorno será livre, tendo um total de 64 elementos regulares de tamanho  $l_e = 0,125m$ , e um  $\Delta t = 9,7 \times 10^{-3}s$  ( $0.85\Delta t$  crítico)<sup>3</sup> sendo igual ao tempo final, pois será feito o cálculo dos vetores nodais somente num passo de tempo.

Ainda, para este problema  $V_p\Delta t = 0,0924m < l_e$ , o que faz com que o subdomínio discreto seja maior que o contínuo (Fig. 3.4a).

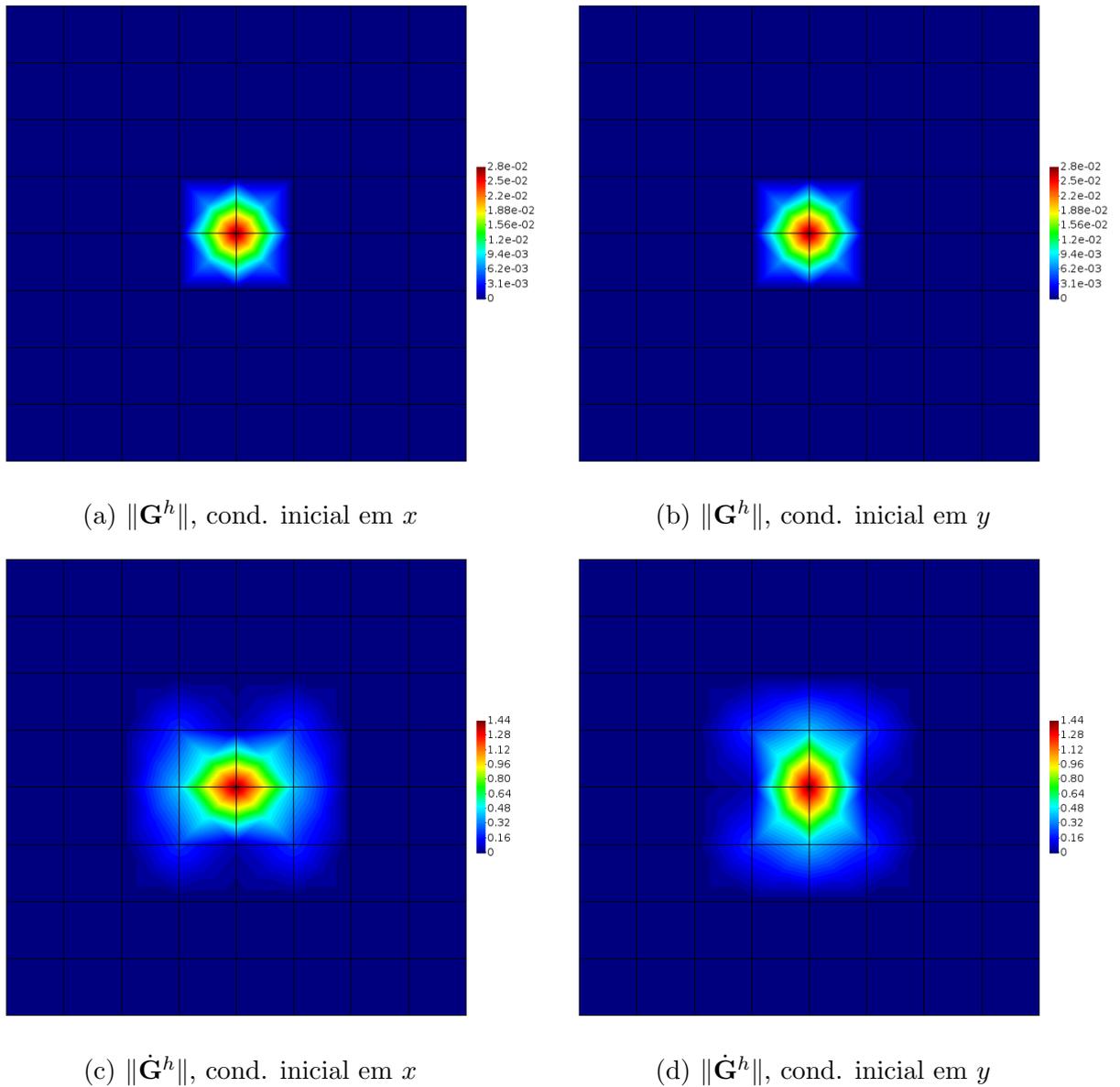


Figura 3.4: Função de Green numérica.

Na figura 3.5 é possível ver que a matriz mais cheia é a da derivada temporal da função

<sup>3</sup>Na próxima seção será comentado mais sobre o  $\Delta t$  crítico

Degrau,  $\dot{\mathbf{H}}(\Delta t)$ , também é possível ver nas figuras 3.4 e 3.5 que  $\dot{\mathbf{G}}(\Delta t) = \mathbf{H}(\Delta t)$ , como comentado na seção 3.2.

Ainda, quando o subdomínio tiver influência da condição do cone, a matriz Degrau poderá não ser simétrica [41], porém, como comentado na seção anterior, isto ocorrerá em poucos subdomínios.

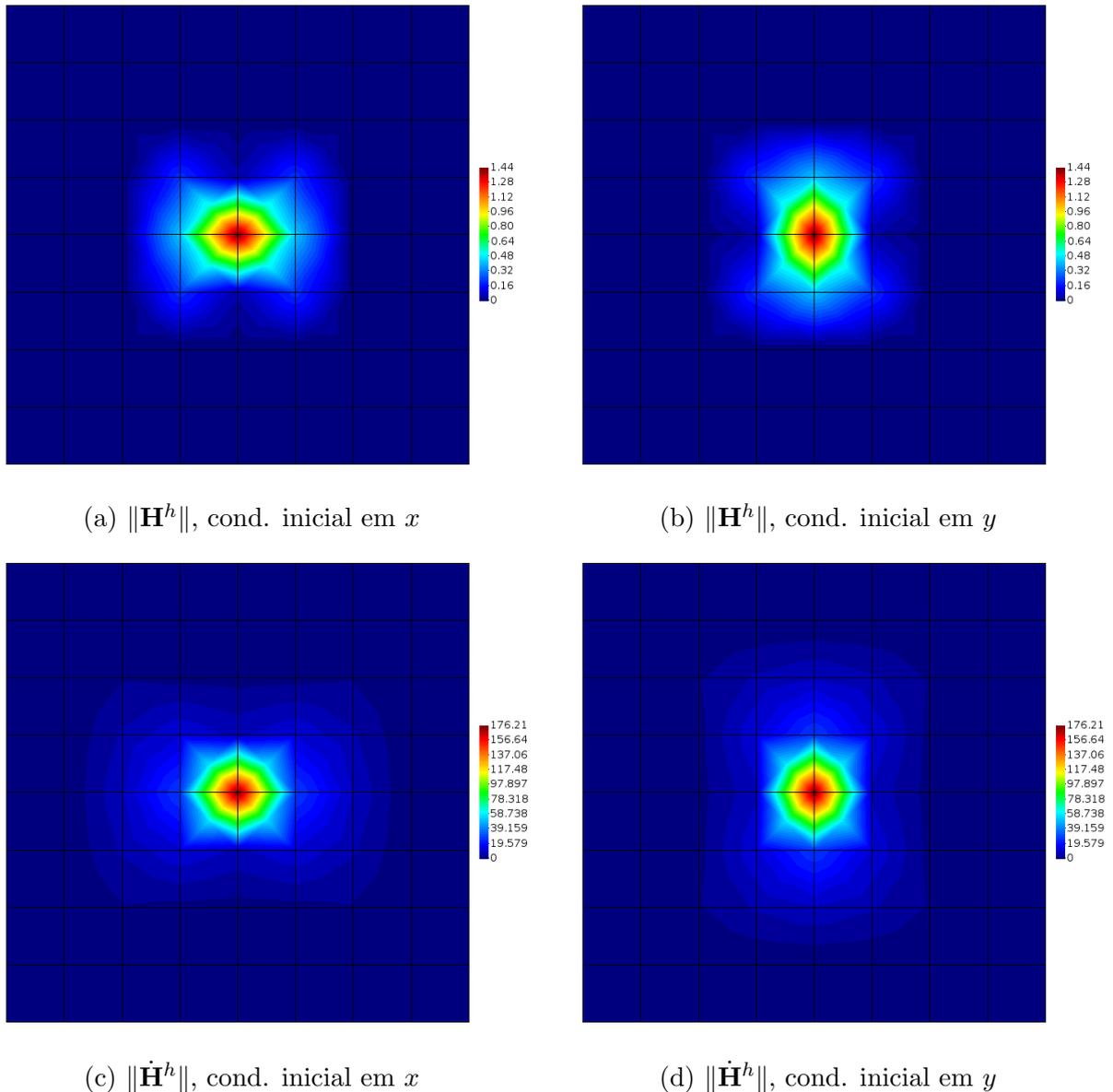
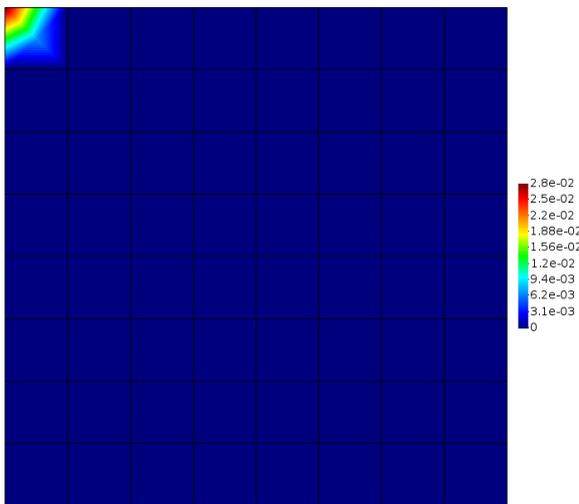


Figura 3.5: Função Degrau numérica.

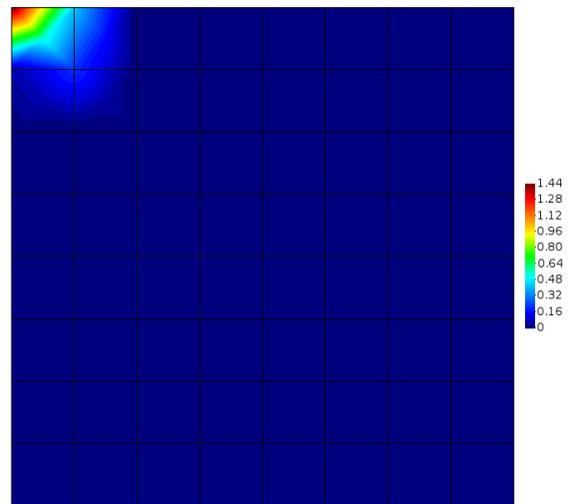
Ainda, em algumas simulações práticas, é comum utilizar materiais homogêneos por partes e regulares em pelo menos alguma parte de toda a malha, o que também é vantajoso para o método, uma vez que pode-se utilizar unicamente a quarta parte da submalha para o cálculo das matrizes como visto na Fig. 3.7, reduzindo assim, ainda mais o custo

computacional.

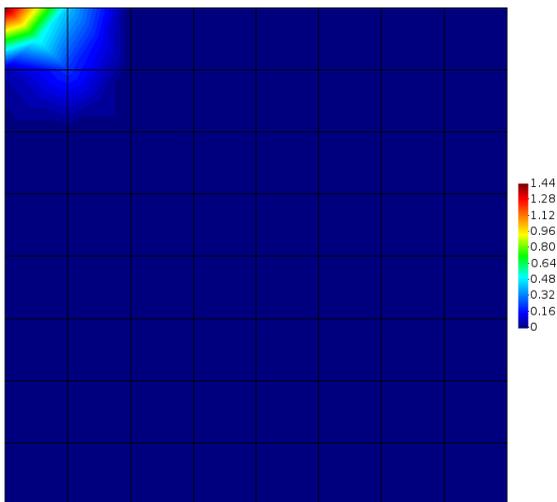
Na figura 3.6 é possível ver as matrizes de Green e Degrau, assim como suas respectivas derivadas temporais, quando feito o cálculo delas na quarta parte da submalha. O modelo utilizado foi o mesmo, mudando unicamente as condições de contorno que são escolhidas com seguinte critério, quando dada uma condição inicial na direção  $x$ , os lados de cima e esquerdo são presos na mesma direção  $x$  (Fig. 3.7), e o valor da condição inicial que é dividido por quatro.



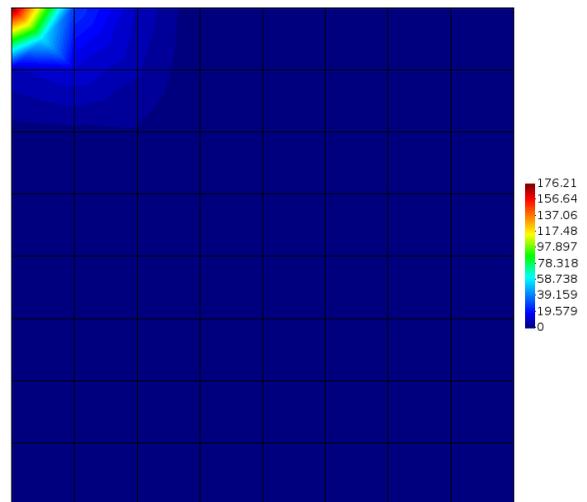
(a)  $\|\mathbf{G}^h\|$ , cond. inicial em  $x$



(b)  $\|\mathbf{H}^h\|$ , cond. inicial em  $x$



(c)  $\|\dot{\mathbf{G}}^h\|$ , cond. inicial em  $x$



(d)  $\|\dot{\mathbf{H}}^h\|$ , cond. inicial em  $x$

Figura 3.6: Funções de Green e Degrau numéricas.

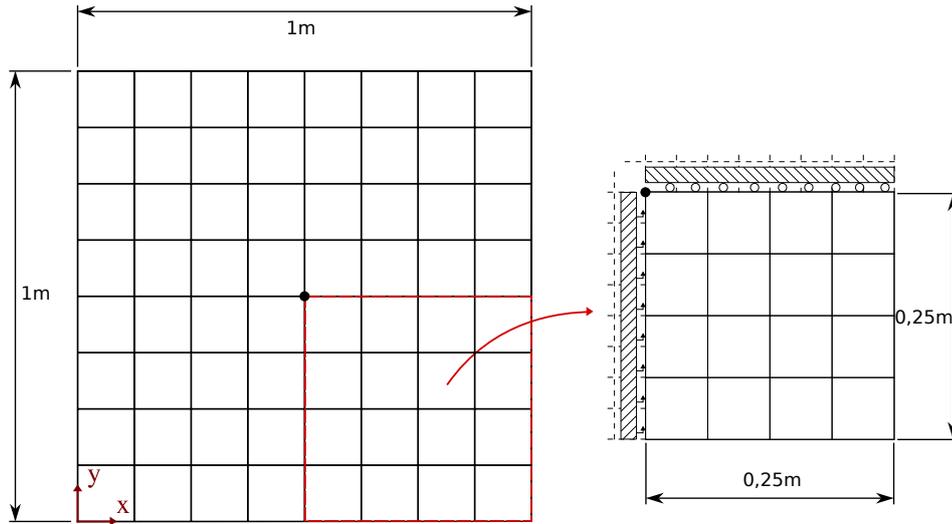


Figura 3.7: Modelo utilizado e sua quarta parte com as condições de contorno quando aplicada a condição inicial na direção  $x$ .

## 3.6 Análise de convergência

Nesta seção será feita a análise de convergência no domínio do tempo do método ExGAH e de suas propriedades numéricas. Como as funções de Green e Degrau são calculadas separadamente como descrito no Algoritmo 2, a estabilidade e precisão serão estudados em detalhe.

### 3.6.1 Estabilidade e Precisão

A análise estabilidade e precisão da técnica de marcha no tempo proposta pode ser realizada pelo estudo de equações de um grau de liberdade desacopladas (SDOF) da forma  $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t)$  resultantes do procedimento de diagonalização [4, 35]; onde  $\omega$  representa uma frequência natural do sistema e  $f(t)$  é função de carregamento aplicado. Assim, as expressões recursivas das Eqs. 3.78 e 3.79 quando aplicadas para a equação SDOF podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} u^{k+1} \\ \dot{u}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\Delta t) & g(\Delta t) \\ \dot{h}(\Delta t) & \dot{g}(\Delta t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^k \\ \dot{u}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\Delta t)\Delta t/2 & 0 \\ \dot{g}(\Delta t)\Delta t/2 & \Delta t/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^k \\ f^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

$$= \mathbf{A} \begin{Bmatrix} u^k \\ \dot{u}^k \end{Bmatrix} + \mathbf{L} \begin{Bmatrix} f^k \\ f^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a chamada matriz de amplificação e  $\mathbf{L}$  é a matriz do operador de carga. Devido ao fato de que as propriedades da estabilidade e precisão são efetuadas na matriz de amplificação, a análise do operador de carga não será considerada; para aprofundar as discussões sobre o operador de carga ver [1].

Adotando o algoritmo 2 para o modelo SDOF, a contraparte numérica das funções de Green e Degrau em  $t = \Delta t$  que definem as componentes da matriz da amplificação, são dadas como:

$$g(\Delta t) = \Delta t \quad (3.97)$$

$$\dot{g}(\Delta t) = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \quad (3.98)$$

$$h(\Delta t) = \dot{g}(\Delta t) \quad (3.99)$$

$$\dot{h}(\Delta t) = -\omega^2 \Delta t + \gamma_0 \frac{\omega^4 \Delta t^3}{2} \quad (3.100)$$

É importante ressaltar que embora a função Degrau seja igual à derivada no tempo da função de Green, o mesmo, no entanto, não acontece quando comparado  $\dot{h}(\Delta t)$  (veja Eq. 3.100) com  $\ddot{g}(\Delta t) = -\omega^2 \Delta t$ . Confirmando que calcular separadamente as funções de Green e Degrau pode resultar em diferentes expressões, dando origem a uma abordagem mais geral uma vez que diferentes combinações podem ser consideradas.

Como a análise de estabilidade está relacionada com a matriz de amplificação, o passo seguinte é o de calcular seu raio espectral, o qual é definido como  $\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_{1,2}|$ , sendo  $\lambda_{1,2}$  os autovalores, que podem ser calculados por:

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (3.101)$$

onde  $A_1 = 1/2\text{tr}(\mathbf{A})$  e  $A_2 = \det(\mathbf{A})$  são os invariantes escalares. Observa-se que autovalores complexos são *preferíveis* uma vez que foi obtida uma solução oscilatória: a qual representa o modelo do problema utilizado; esta é obtida se  $A_1^2 < A_2$ . A condição que garante a estabilidade é [4, 5]:

$$\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad (3.102)$$

O método é dito ser incondicionalmente estável ou A-estável, se  $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$  para todo valor positivo de  $\omega \Delta t$ ; caso contrário, o método é dito condicionalmente estável. Por

outro lado, a precisão de um método de integração temporal é medida pela diferença entre a solução numérica e a exata. No caso onde a matriz de amplificação apresenta autovalores complexos conjugados, a solução discreta pode ser colocada de forma similar à da solução exata da equação SDOF [35]. Assim, os autovalores podem ser escritos como  $\lambda_{1,2} = \exp^{-\bar{\xi}\omega\Delta t \pm i\bar{\omega}\Delta t} = A_1 \pm i\sqrt{A_2 - A_1^2}$ , levando em conta as seguintes expressões [5]:

$$\bar{\omega} = \frac{\arctg\left(\sqrt{A_2/A_1^2 - 1}\right)}{\Delta t} \quad (3.103)$$

$$\bar{\xi} = \frac{-\ln(A_2)}{2\bar{\omega}\Delta t} \quad (3.104)$$

onde  $\bar{\omega}$  é a contraparte numérica de  $\omega$  e  $\bar{\xi}$  é chamado de amortecimento numérico, o qual dá uma medida da quantidade de dissipação numérica. A dispersão numérica é medida pelo erro do período relativo e sua expressão é dada por  $(\bar{T} - T)/T$ , onde  $T = 2\pi/\omega$  e  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$  são, respectivamente, o período natural exato e o numérico.

É conhecido que, usualmente, as discretizações espaciais não conseguem representar bem respostas de frequências elevadas [4, 5], que pode ser devido tanto ao comportamento físico do sistema mecânico quanto a erros numéricos. Quando os componentes de frequências elevadas não são importantes, os algoritmos que têm capacidade de eliminar as resposta espúrias de alta frequência são preferíveis. Isto é alcançado, por exemplo, quando o algoritmo possui algum amortecimento numérico, o qual é responsável pela dissipação da energia dos modos mais imprecisos. Então, em grande parte dos casos, é desejado desenvolver algoritmos que possuam algum amortecimento numérico, mantendo o erro do período relativo (dispersão) o menor possível.

A figura 3.8 mostra o raio espectral referente ao método ExGAH proposto (Algoritmo 2). Como esperado e similar ao método Diferença Central padrão, o esquema de marcha no tempo é também condicionalmente estável. Adicionalmente à limitação da estabilidade, o raio espectral pode também ser utilizado para identificar, de maneira qualitativa, a presença do amortecimento numérico do algoritmo que aparece para valores de  $\rho(\mathbf{A})$  menores que a unidade. Como pode ser observado, o amortecimento numérico do algoritmo aumenta quando o valor do parâmetro  $\gamma_0$  se aproximam de um, enquanto que a limitação da estabilidade diminui (para  $\gamma_0 = 1/2$  o esquema proposto é espectralmente equivalente ao método de integração temporal Diferença Central padrão como visto na Fig. 3.8).

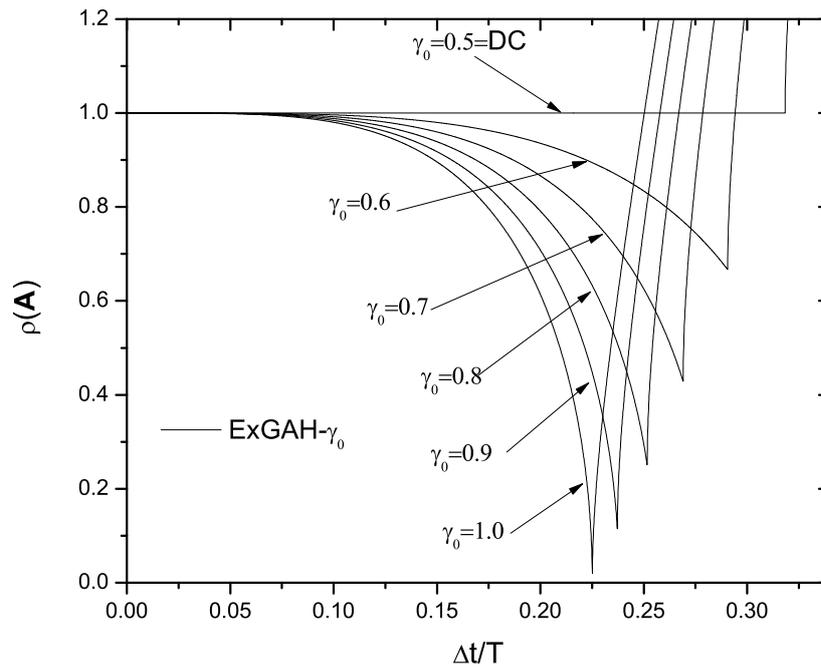
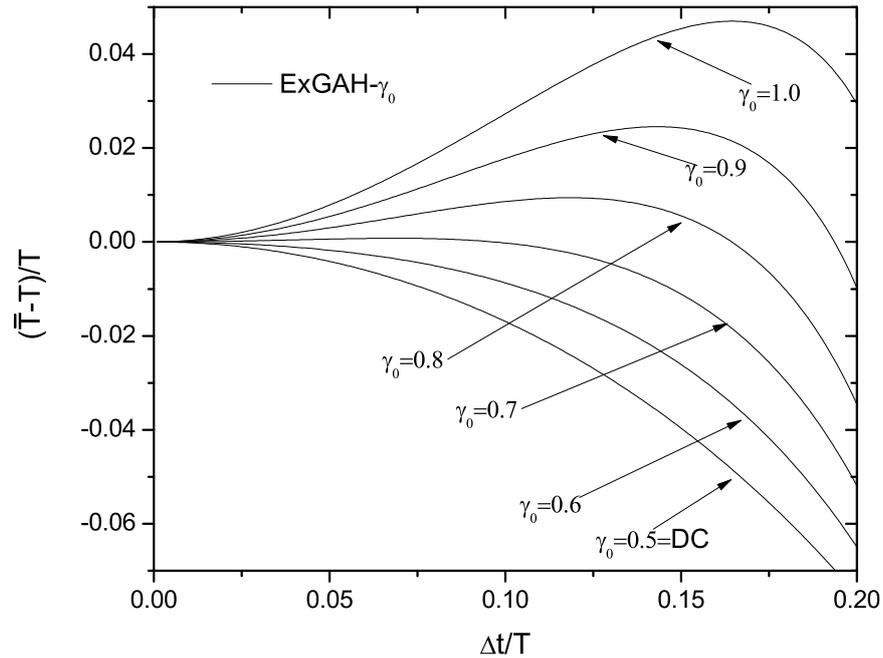
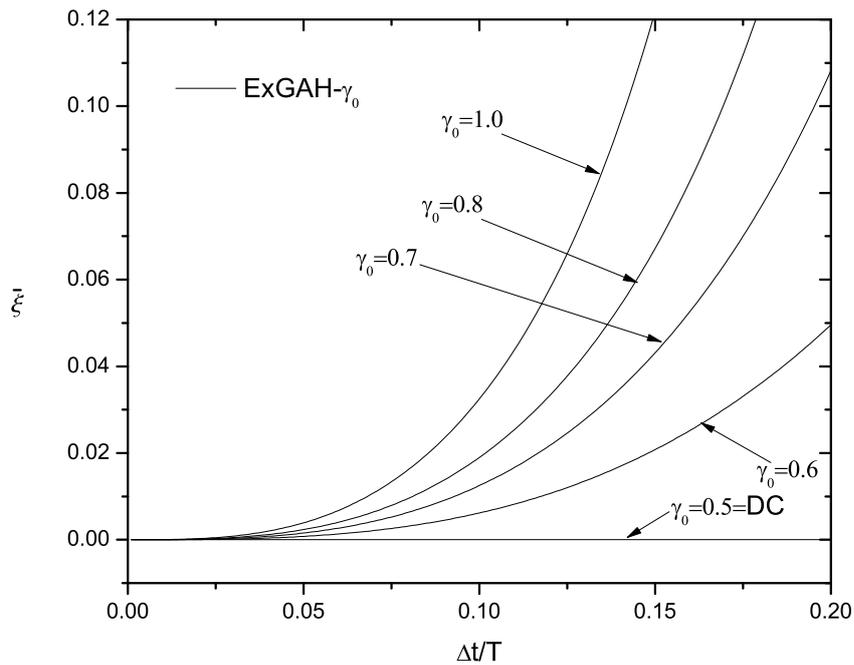


Figura 3.8: Raio espectral para o método ExGAH e o método de integração temporal Diferença Central padrão (DC).

Na figura 3.9 erros de períodos relativos assim como o amortecimento numérico do algoritmo são plotados. Analisando a Fig. 3.9a é fácil ver que os erros dos períodos relativos do algoritmo proposto são menores do que o da integração temporal do Diferença Central. Também é possível ver que os erros de períodos relativos são menores para valores baixos de  $\Delta t/T$  quando o parâmetro livre está entre 0.6 e 0.7. Além disso, a Figura 3.9b apresenta os valores dos amortecimentos numéricos do algoritmo que confirmam que os valores aumentam de forma qualitativa à medida que aumenta  $\gamma_0$ , como discutido acima. Assim, pode-se concluir que o algoritmo proposto é mais preciso do que o método de integração temporal Diferença Central padrão com a vantagem de dissipar oscilações espúrias causadas por modos de frequências imprecisos mais elevadas, o que desempenha um papel importante em algumas simulações numéricas como será ilustrado na próxima seção.



(a)



(b)

Figura 3.9: Análise de precisão para o método ExGAH e o método de integração temporal Diferença Central padrão (DC): (a) erros de períodos relativos; (b) amortecimentos numéricos do algoritmo.

### 3.6.2 Erro de truncamento local

Para demonstrar a consistência da presente abordagem, a matriz de amplificação numérica é comparada com a analítica para analisar o erro de truncamento local. A matriz de

amplificação analítica para o sistema SDOF é dado por [35]:

$$\mathbf{A}_{AN} = \begin{bmatrix} h(\Delta t) & g(\Delta t) \\ \dot{h}(\Delta t) & \dot{g}(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\Delta t) & \frac{1}{\omega}\text{sen}(\omega\Delta t) \\ -\omega\text{sen}(\omega\Delta t) & \cos(\omega\Delta t) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Uma maneira de provar a ordem de convergência de uma técnica de marcha no tempo é calcular a matriz de erro definido como  $\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{AN}$  e aplicar a série de Taylor. O algoritmo é dito ser de ordem  $p$  se os erros correspondentes às componentes de  $\mathbf{E}$  satisfazem  $|E_{ij}| \leq c_{ij}\Delta t^{p+1}$ ,  $\forall ij$  com  $c_{ij}$  sendo constantes independentes do passo de tempo  $\Delta t$ . Assim, a expansão das componentes da matriz de erro  $\mathbf{E}$  em séries de Taylor, é dada por:

$$E_{1,1} = E_{2,2} = -\frac{\omega^4\Delta t^4}{24} + \frac{\omega^6\Delta t^6}{720} + O(\Delta t^7) \quad (3.106)$$

$$E_{1,2} = \frac{\omega^2\Delta t^3}{6} - \frac{\omega^4\Delta t^5}{120} + O(\Delta t^7) \quad (3.107)$$

$$E_{2,1} = \left(\frac{\gamma_0}{2} - \frac{1}{6}\right)\omega^4\Delta t^3 + \frac{\omega^6\Delta t^5}{120} + O(\Delta t^7) \quad (3.108)$$

Analisando as Eqs. 3.106 - 3.108 é fácil ver que o menor erro dos termos do algoritmo é proporcional a  $\Delta t^3$ , e portanto, pode se deduzir que o esquema de marcha no tempo proposto (i.e., ExGAH) é de segunda ordem de precisão em relação ao tempo, i.e.,  $O(\Delta t^2)$ .

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

No presente capítulo serão apresentados os resultados de alguns testes numéricos realizados com o objetivo de mostrar as vantagens do método da aproximação explícita de Green (ExGAH) quando comparado com o método clássico de Diferença central (DC), o qual não possui amortecimento numérico, porém é de segunda ordem igual ao método apresentado neste trabalho, e com a solução analítica quando existente. O primeiro exemplo é dedicado a analisar o método ExGAH considerando-se uma barra homogênea sob um carregamento externo do tipo Heaviside. O segundo exemplo terá como interesse analisar o desempenho do método ExGAH quando utilizadas às condições de contorno (não reflexivas) do cone considerando-se um sólido sob carregamento vertical pontual. Por fim é mostrado um exemplo mais complexo mostrando a propagação da onda gerada por uma fonte sísmica em um meio geofísico. Quando não mencionado nada a respeito, os testes terão em comum a utilização de malhas com elementos quadrilaterais bilineares, o parâmetro  $\gamma_0 = 0.65$  e o  $\Delta t = 0.85\Delta t_c$  (intervalo de tempo crítico), o qual é achado através do cálculo do  $\Delta t_c$  de cada elemento<sup>1</sup>, para garantir a convergência do método.

### 4.1 Barra homogênea

O primeiro exemplo tem como interesse validar o método ExGAH comparando-o com a solução analítica do problema, além de demonstrar o amortecimento numérico através da variação do parâmetro  $\gamma_0$ .

O modelo utilizado baseia-se no exemplo estudado por [7, 46], o qual consiste numa barra retangular de dimensões  $a = 2m$  (largura) e  $b = 4m$  (comprimento) submetida a um carregamento uniforme vertical do tipo Heaviside com  $F_0 = 1.0$  (Eq. 2.25, Fig. 2.3), a barra teve restrito o movimento horizontal nas laterais e vertical no lado inferior como descrito na Fig. 4.1(a).

As constantes do material são  $\rho = 1kg/m^3$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $E = 10^5N/m^2$ , as velocidades são dadas por  $V_P = 341.1m/s$  e  $V_S = 200m/s$ . Foi utilizado o  $\Delta t = 1.6556 \times 10^{-4}s$  e o tempo final  $t_f = 0.1$ , na Fig. 4.1(b) é possível ver a malha de elementos finitos regular

---

<sup>1</sup>Cálculo para achar os autovalores do elemento, que é computacionalmente barato

utilizada a qual possui 1250 elementos com  $l_e = 0.08m$ , sendo  $l_e$  o tamanho do elemento.

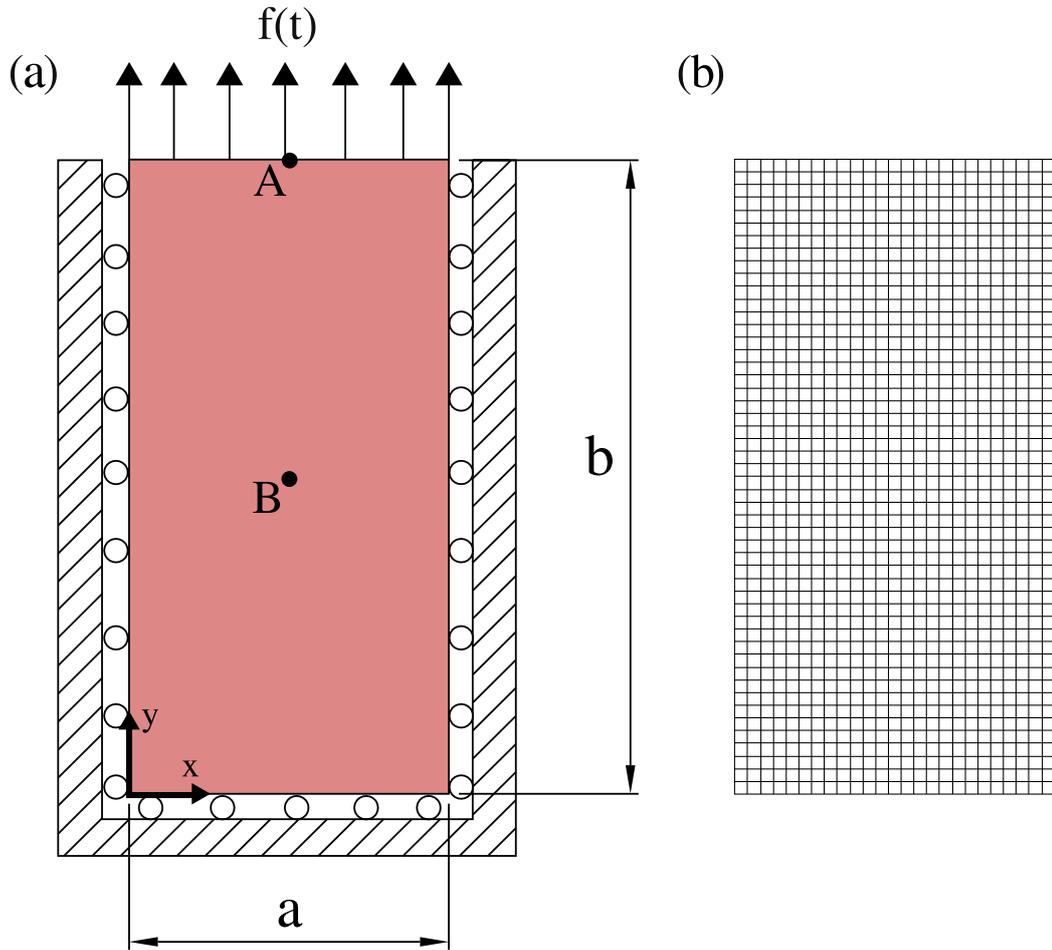


Figura 4.1: Barra retangular submetida a tensão: (a) geometria e condições de contorno; (b) malha de elementos finitos.

Do ponto de vista numérico este problema é considerado muito severo, pois possui velocidade e tensões descontínuas, sendo, portanto, frequentemente utilizado na literatura [44, 7] para testar a robustez de novos métodos, uma vez que o mesmo possui solução analítica [47]:

$$u(x, t) = \frac{F_0 a}{E} \left[ \frac{x}{a} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \right) \cos \left( \frac{(2n-1)V_p \pi t}{2a} \right) \right] \quad (4.1)$$

A figura 4.2 mostra os resultados dos deslocamentos verticais nos pontos  $A=(1,4)$  e  $B=(1,2)$  (ver Fig. 4.1(a)) e a tensão  $\sigma_y$  no ponto  $C=(1,0.04)$  (ponto de Gauss perto do lado inferior) bem como suas respectivas soluções analíticas.

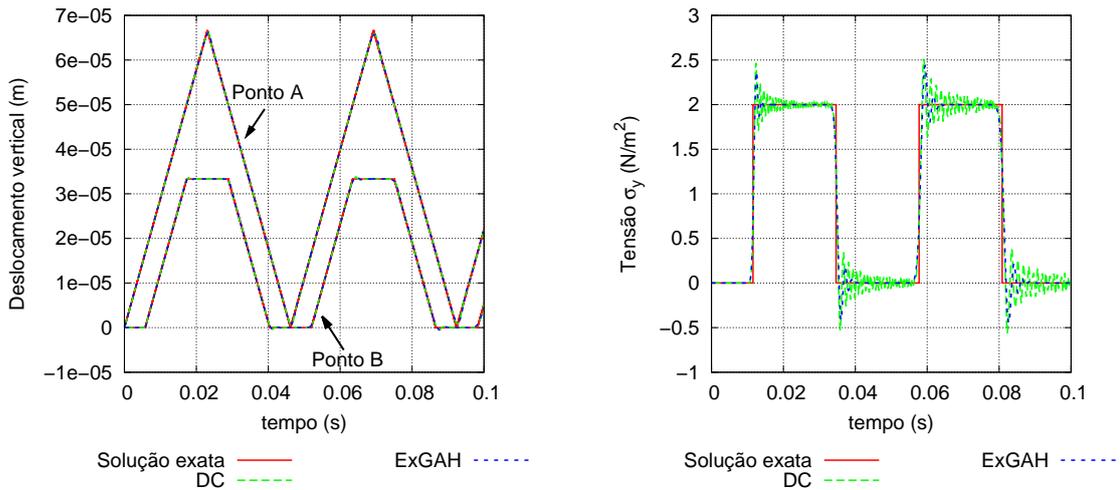


Figura 4.2: Resultado do deslocamento vertical para os pontos A e B e tensão  $\sigma_y$  no ponto C.

No gráfico dos deslocamentos é possível observar que tanto o método ExGAH quanto o método DC se aproximam da solução analítica, porém no gráfico das tensões, o método DC apresenta uma quantidade elevada de oscilações espúrias, as quais estão presentes de forma localizada, e em menor número, no método ExGAH. Esta característica está presente nos métodos que possuem amortecimento numérico.

A figura 4.3 mostra a tensão  $\sigma_y$  no ponto C, obtida pelo método ExGAH para diferentes valores do parâmetro  $\gamma_0$ , estudando sua influência nos resultados.

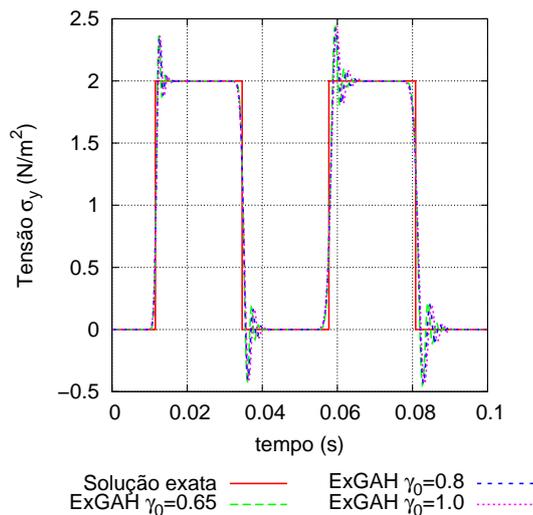


Figura 4.3: Resultado da tensão  $\sigma_y$  no ponto C para diferentes valores de  $\gamma_0$ .

Para melhor visualização, as figuras 4.4 e 4.5 mostram com mais detalhes os resultados para diferentes valores do parâmetro  $\gamma_0$  nos intervalos onde ocorrem as oscilações espúrias.

É possível ver que aumentando o valor do parâmetro  $\gamma_0$  obtem-se resultados mais amortecidos (vide Fig. 3.9b).

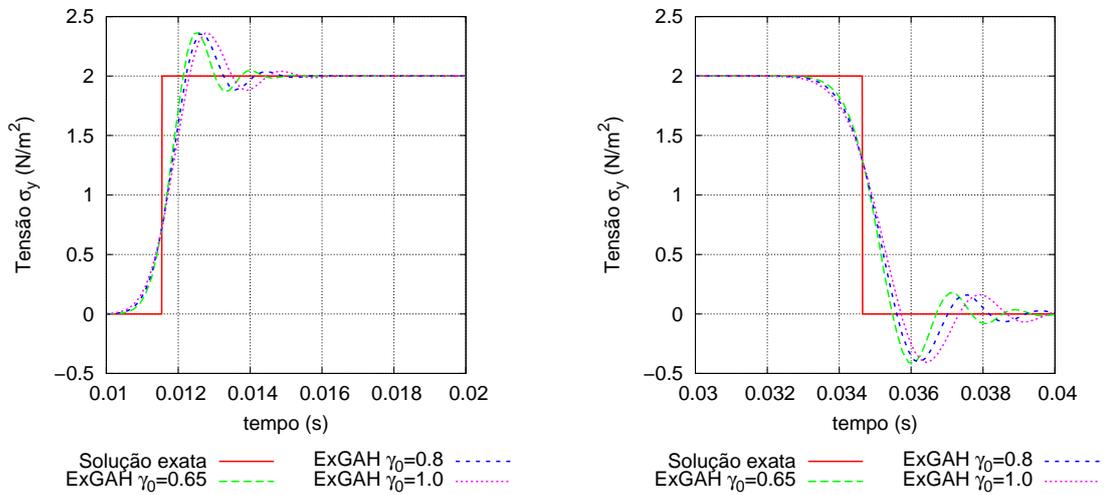


Figura 4.4: Resultado da tensão  $\sigma_y$  no ponto C para diferentes valores de  $\gamma_0$  em diferentes intervalos de tempo.

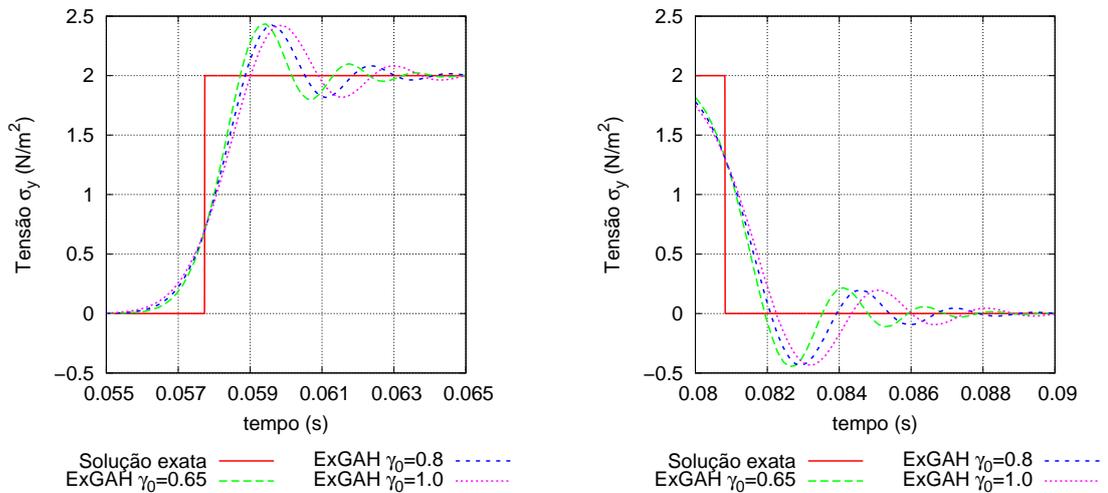


Figura 4.5: Resultado da tensão  $\sigma_y$  no ponto C para diferentes valores de  $\gamma_0$  em diferentes intervalos de tempo.

## 4.2 Condição não-reflexiva do cone

O segundo exemplo tem como objetivo mostrar o desempenho do método ExGAH quando utilizadas às condições de contorno não reflexivas do cone<sup>2</sup>. O modelo utilizado se baseia naquele proposto por [19], onde é considerado, num estado plano de deformação, um sólido homogêneo elástico linear que possui as velocidades  $V_S = 224m/s$  e  $V_P \approx 387,98m/s$ ,  $\rho = 2000kg/m^3$ ,  $\nu = 0,25^3$ , no qual é aplicado um carregamento pontual vertical do tipo triangular (Eq. 2.24, Fig. 2.2) com  $T_p = 0,2s$  e  $F_0 = 1,0$  na sua extremidade superior esquerda (vide Fig 4.6).

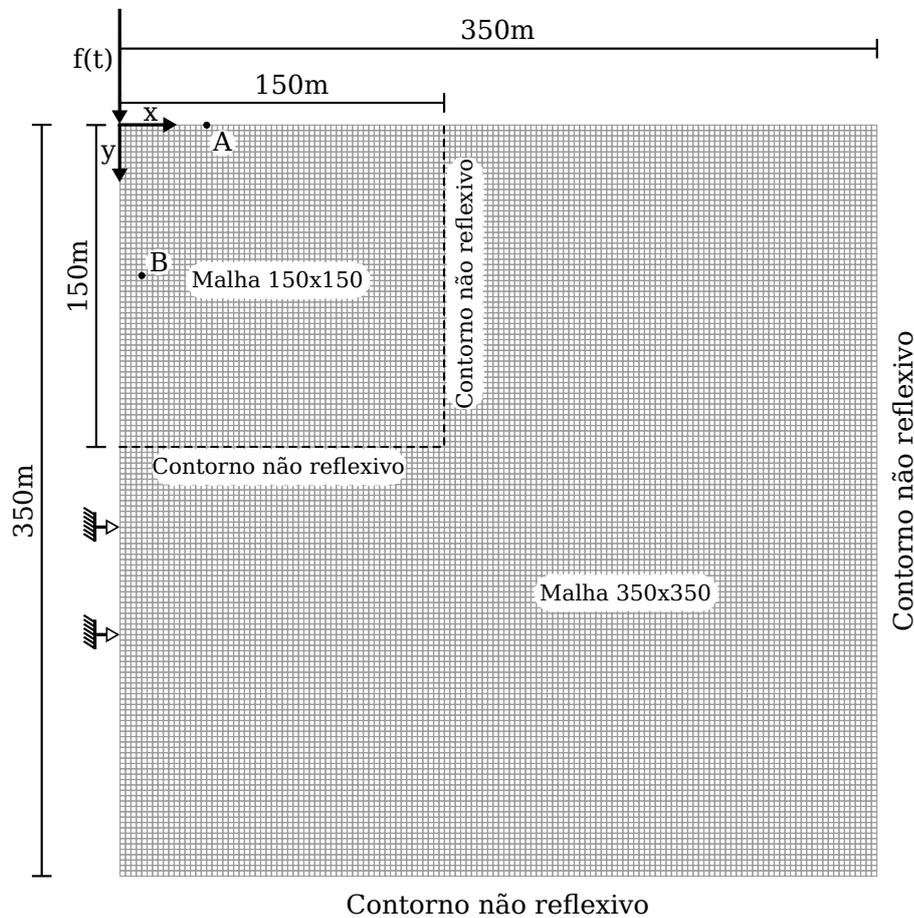


Figura 4.6: Modelo de elementos finitos para as malhas menor e estendida.

Serão realizados testes com duas malhas regulares cobrindo áreas diferentes, porém possuindo em comum o mesmo tamanho do elemento ( $l_e = 2,5m$ ), a malha menor possui  $150m \times 150m$  (3600 elementos) e a malha estendida  $350m \times 350m$  (19600 elementos), para ambas as malhas será utilizado um  $\Delta t = 4,6243 \times 10^{-3}s$  com o tempo final  $t_f = 1.6s$ .

<sup>2</sup>O assunto foi discutido na seção sobre condições iniciais e de contorno

<sup>3</sup>Módulo de Young ou de elasticidade  $E = 2,5088 \times 10^8 N/m^2$ .

Este modelo, possui as características necessárias para utilizar as propriedades de simetria das matrizes de Green e Degrau (assim como suas respectivas derivadas) e a redução do subdomínio, vistas na seção 3.5.3 e assim diminuir consideravelmente o custo computacional. Para o modelo, considerou-se que o contorno superior está livre, o contorno esquerdo possui restrições somente na direção  $x$  e nos demais contornos aplica-se a condição não reflexiva do cone, para o contorno da lateral direita tal que  $y \leq 40m$  será utilizada a formulação referente às ondas de Rayleigh e para  $y \geq 40m$  a formulação para ondas esféricas. Ainda na figura, pode se observar os pontos  $A=(40,0)$  e  $B=(10,70)$  nos quais serão mostrados os resultados dos deslocamentos verticais para a malha menor e dos deslocamentos e velocidades verticais para a malha estendida.

Primeiro foram feitos testes utilizando a malha estendida (a qual não apresentou deslocamentos decorrentes da reflexão das ondas no contorno nos pontos escolhidos), figura 4.7, a fim de comparar os resultados obtidos ao utilizar as condições de contorno do cone na malha menor. Nos gráficos referentes à Fig 4.7 é possível observar claramente as oscilações espúrias geradas pelo método DC. Ao contrário do método DC, o método ExGAH é capaz de filtrar as frequências espúrias referentes à discretização espacial, como comentado anteriormente, evidenciando a importância de utilizar métodos que possuam amortecimento numérico para a obtenção de resultados mais precisos.

Por este motivo os resultados obtidos pelo método ExGAH serão utilizados como referência para uma melhor visualização na hora de comparar os resultados da malha menor. Uma vez que o método DC apresentou uma quantidade elevada de oscilações no campo das velocidades quando utilizada a malha estendida, é de se esperar que as apresente quando utilizada a malha menor, motivo pelo qual serão vistos unicamente os resultados dos deslocamentos.

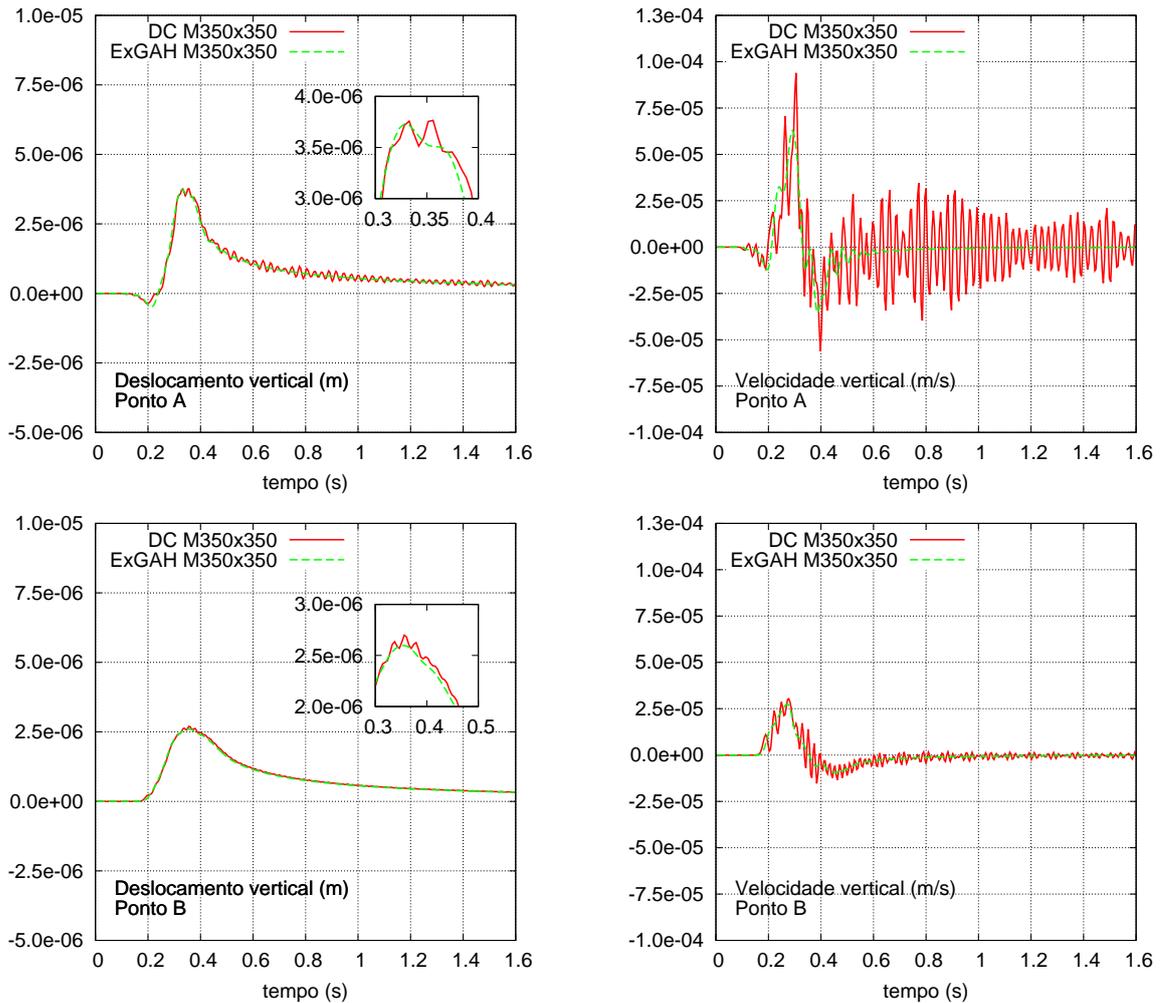


Figura 4.7: Resultados dos deslocamentos e velocidades verticais para M350x350.

Analisando a Fig. 4.8, é possível observar que a resposta utilizando a condição de contorno não-reflexiva do cone conseguiu absorver de forma satisfatória as ondas incidentes, gerando apenas pequenas diferenças que podem ser vistas nos gráficos da Fig. 4.8 a partir dos tempos  $t = 1,16s$  para ponto A e  $t = 1,026s$  para o ponto B (tempo aproximado que leva para que esses pontos sofram o efeito resultante da reflexão da onda-S e de Rayleigh no contorno).

Tal não ocorre com a onda-P, para a qual se esperava efeitos resultantes da reflexão no contorno a partir dos tempos  $t = 0,67s$  para ponto A e  $t = 0,592s$  para o ponto B, já que esta atravessou o contorno mantendo uma frente de onda esférica, como sugere a Fig. 4.11f, resultando vantajoso para contorno do cone, dada sua formulação [19].

Uma comparação do desempenho do método do cone com as condições de contorno tradicionais (Dirichlet e Neumann) e a condição de contorno viscoso tradicional pode ser vista em [19].

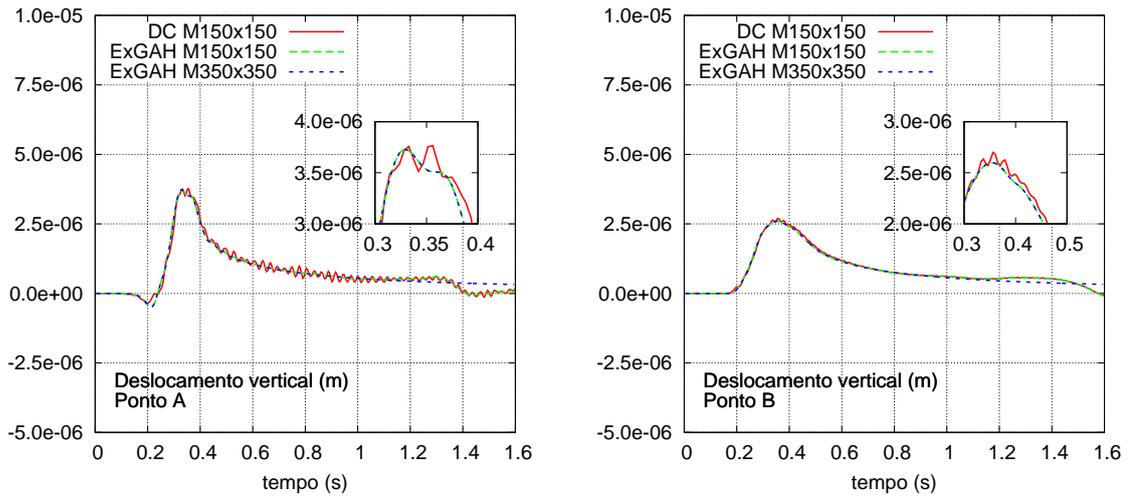


Figura 4.8: Resultado do deslocamento vertical para M150x150.

Além dos deslocamentos e velocidades, na Fig. 4.9 pode-se ver o resultado das tensões  $\sigma_y$  para a malha estendida e na Fig. 4.10 para a malha menor. Mais precisamente, as tensões foram calculadas nos pontos C=(41,25 , 1,250) e D=( 11,25 , 71,25), que são pontos de Gauss localizados próximos de A e B. Nos resultados da malha estendida, o método DC apresentou novamente altas oscilações espúrias em ambos os pontos, motivo pelo qual serão utilizados os resultados obtidos pelo método ExGAH para melhor visualização na hora de comparar os resultados obtidos com malha menor.

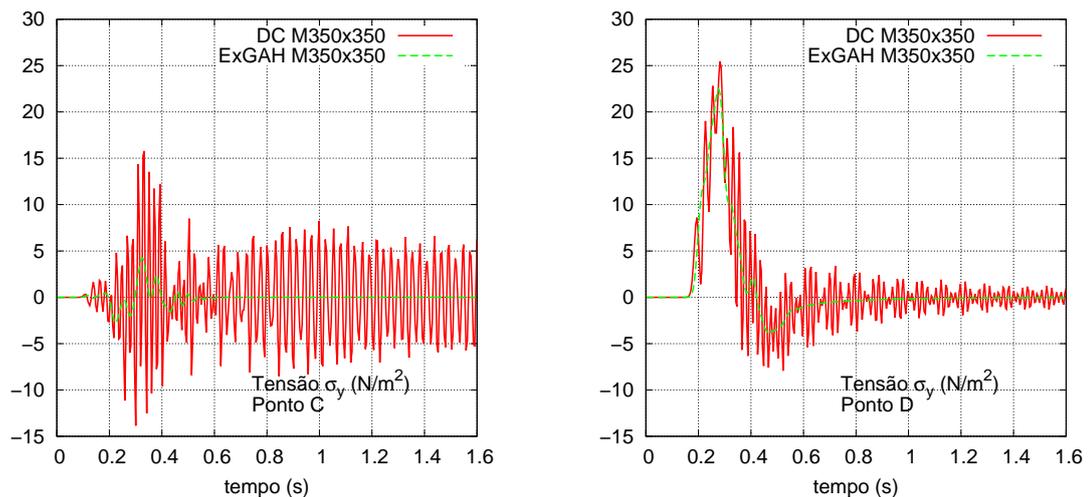


Figura 4.9: Resultado das tensões  $\sigma_y$  para M350x350.

Novamente é possível observar que assim como nos casos do deslocamento e da velocidade, a tensão sofreu pequenas mudanças por causa das ondas refletidas nos pontos escolhidos, para os quais se esperavam efeitos resultantes da reflexão no contorno, a partir

dos tempos  $t = 0,67s$  para ponto C e  $t = 0,592s$  para o ponto D, referentes à onda-P, que desta vez afetaram nos resultados para este segundo ponto mais do que ao primeiro. Como observado na resposta considerando a malha M150x150 (ver Fig. 4.10).

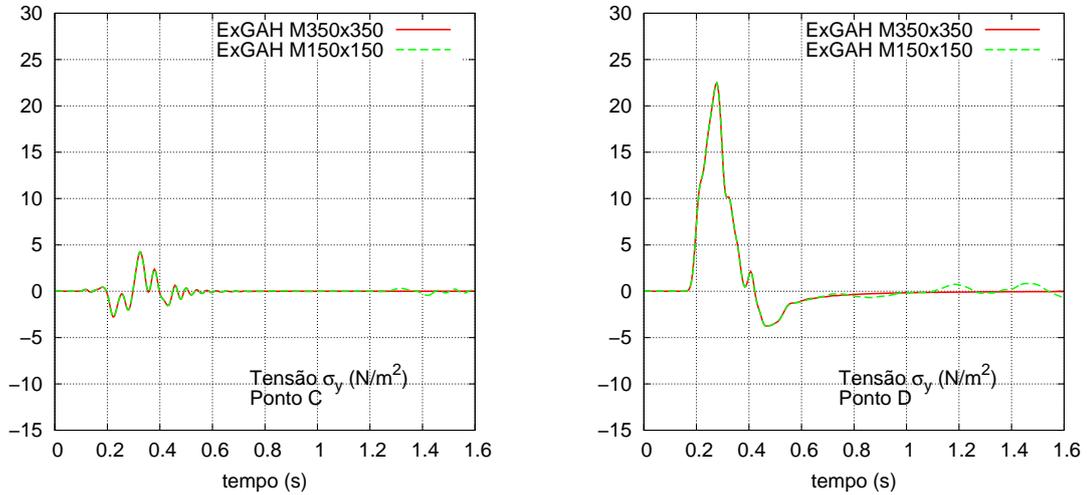


Figura 4.10: Resultado das tensões  $\sigma_y$  para M150x150.

Nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13 são apresentados os snapshots das tensões  $\sigma_y$  de ambos os métodos, DC(esquerda) e ExGAH (direita). Analisando estas figuras fica evidente a diferença dos resultados, uma vez que os obtidos pelo método DC apresentam durante todo o processo de propagação oscilações espúrias, o que não acontece para o método ExGAH, demonstrando, portanto, o bom desempenho do método ExGAH.

Na figura 4.12 são apresentados os resultados dos instantes em que a onda-P começa a atravessar o contorno do cone, e a onda-S se aproxima do contorno. É possível observar que a onda-P consegue atravessar o contorno do cone sem apresentar aparente reflexão.

Na figura 4.13 é possível ver o instante em que a onda-S começa a atravessar o contorno, e como esta reflete, ainda que em pouca intensidade, na parte superior do contorno direito.

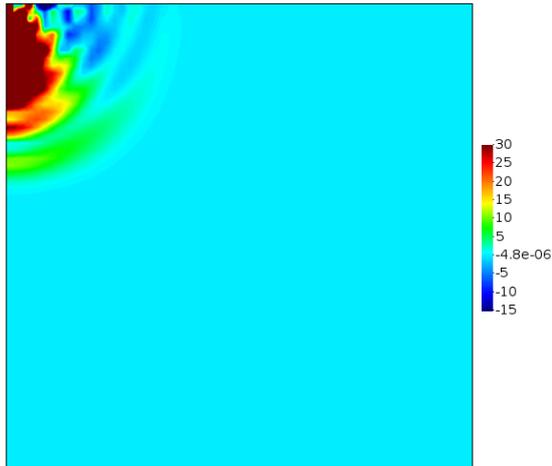
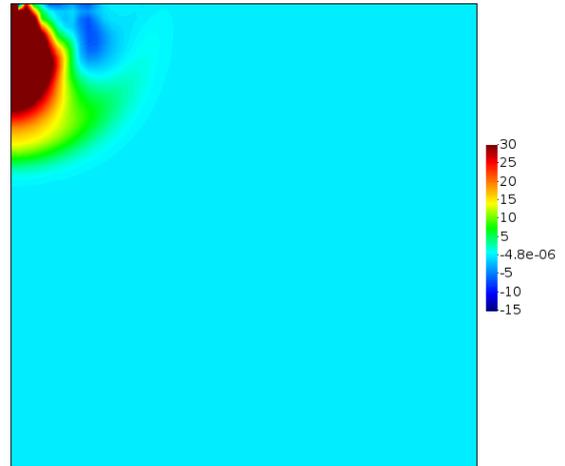
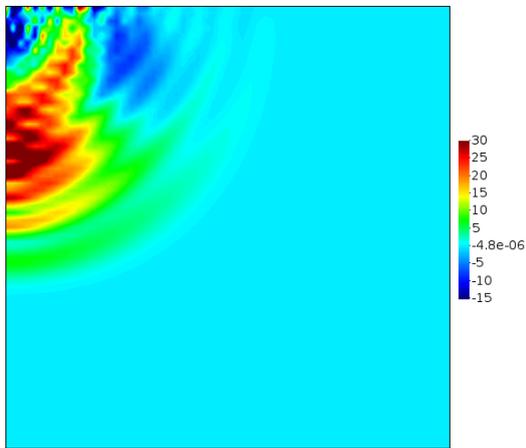
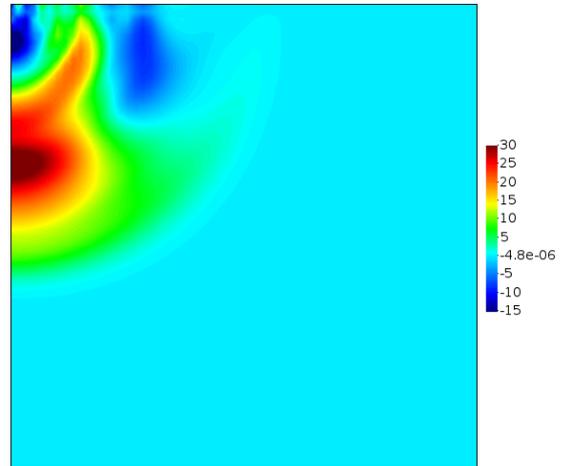
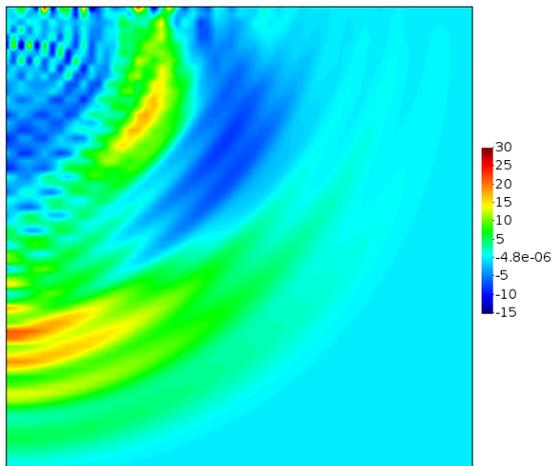
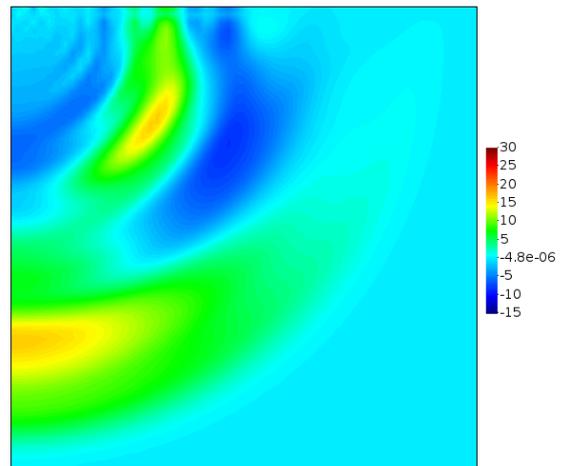
(a)  $\sigma_y$  em  $t=0,138$  segundos(b)  $\sigma_y$  em  $t=0,138$  segundos(c)  $\sigma_y$  em  $t=0,231$  segundos(d)  $\sigma_y$  em  $t=0,231$  segundos(e)  $\sigma_y$  em  $t=0,369$  segundos(f)  $\sigma_y$  em  $t=0,369$  segundos

Figura 4.11: Snapshots das tensões  $\sigma_y$  para M150x150 utilizando os métodos DC(esquerda) e ExGAH (direita).

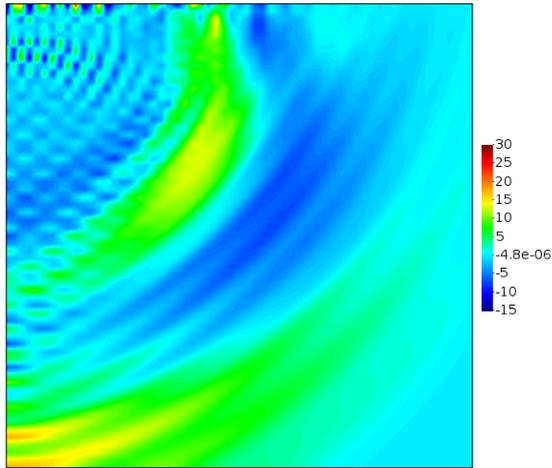
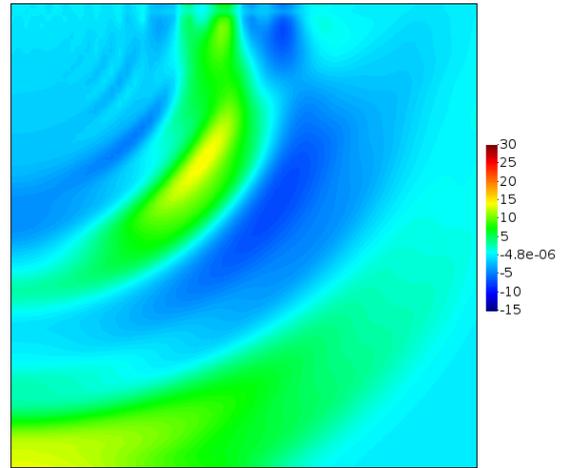
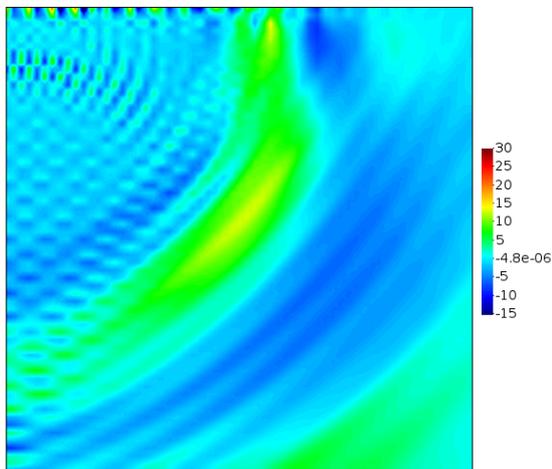
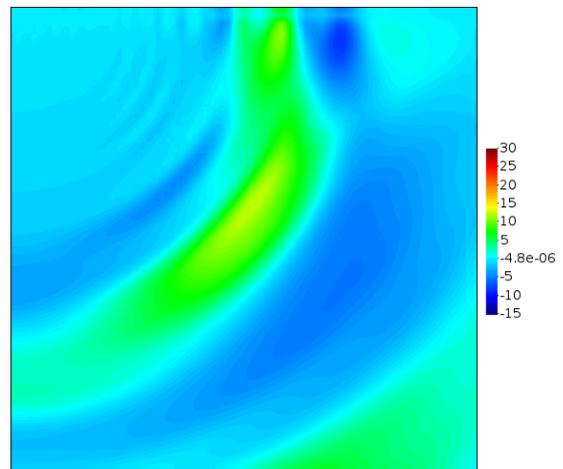
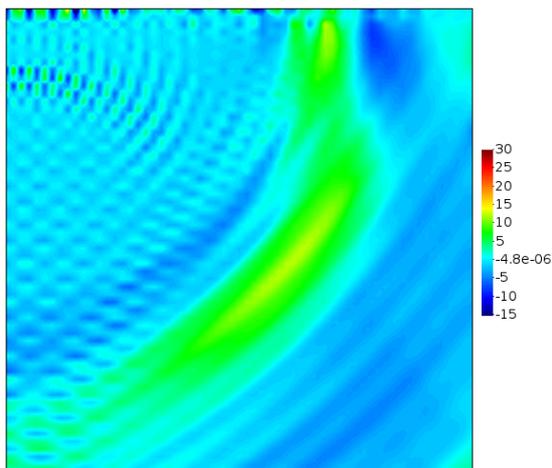
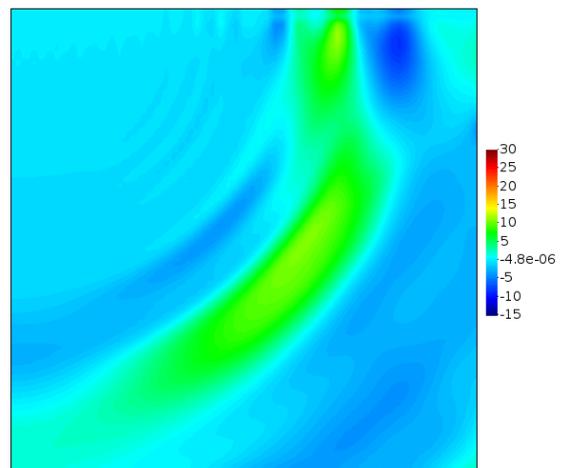
(a)  $\sigma_y$  em  $t=0,462$  segundos(b)  $\sigma_y$  em  $t=0,462$  segundos(c)  $\sigma_y$  em  $t=0,555$  segundos(d)  $\sigma_y$  em  $t=0,555$  segundos(e)  $\sigma_y$  em  $t=0,647$  segundos(f)  $\sigma_y$  em  $t=0,647$  segundos

Figura 4.12: Snapshots das tensões  $\sigma_y$  para M150x150 utilizando os métodos DC(esquerda) e ExGAH (direita).

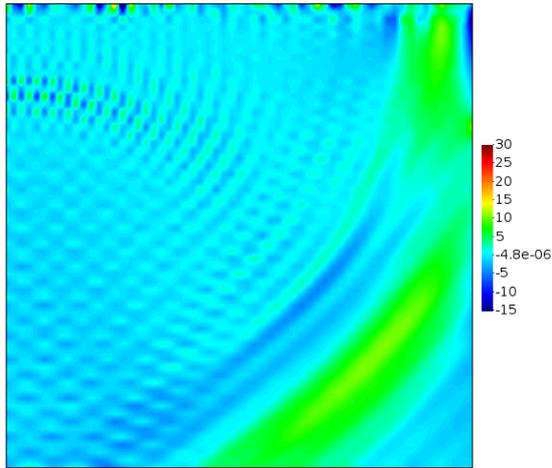
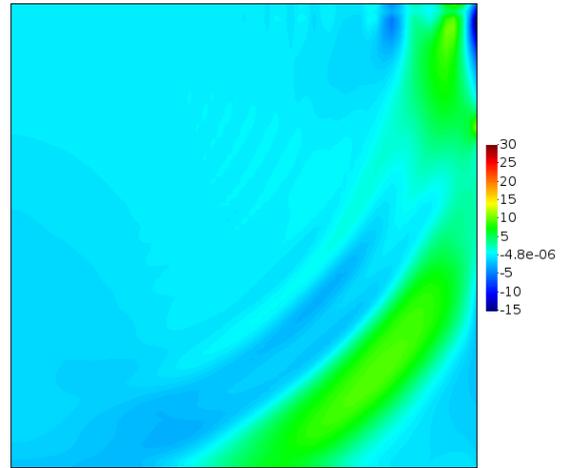
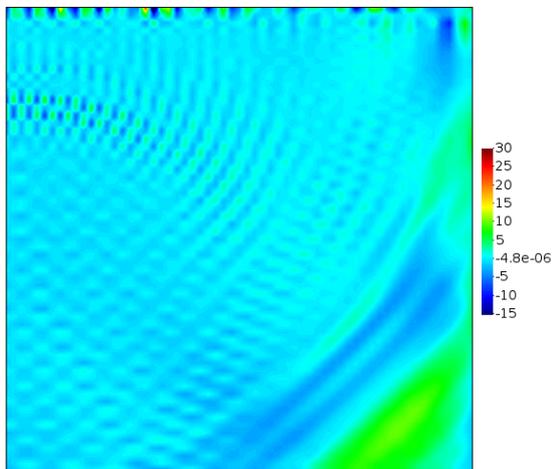
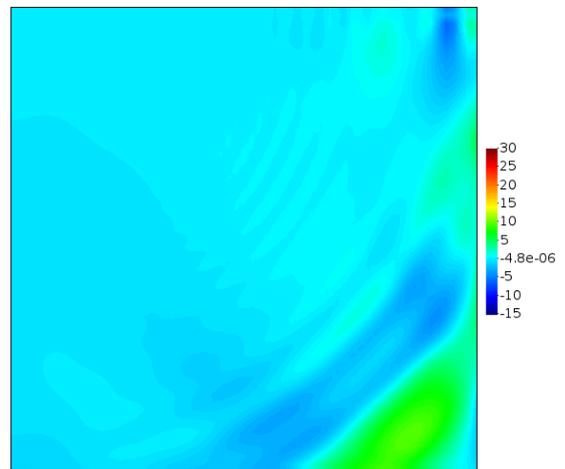
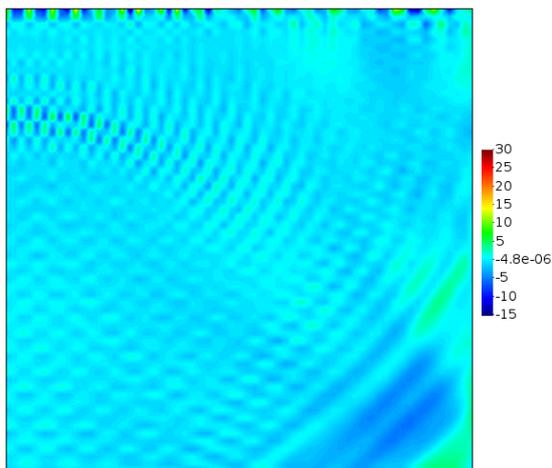
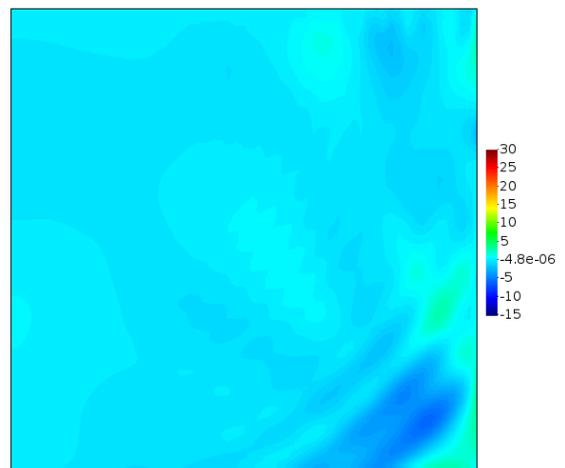
(a)  $\sigma_y$  em  $t=0,832$  segundos(b)  $\sigma_y$  em  $t=0,832$  segundos(c)  $\sigma_y$  em  $t=0,924$  segundos(d)  $\sigma_y$  em  $t=0,924$  segundos(e)  $\sigma_y$  em  $t=1,017$  segundos(f)  $\sigma_y$  em  $t=1,017$  segundos

Figura 4.13: Snapshots das tensões  $\sigma_y$  para M150x150 utilizando os métodos DC(esquerda) e ExGAH (direita).

### 4.3 Meio geofísico

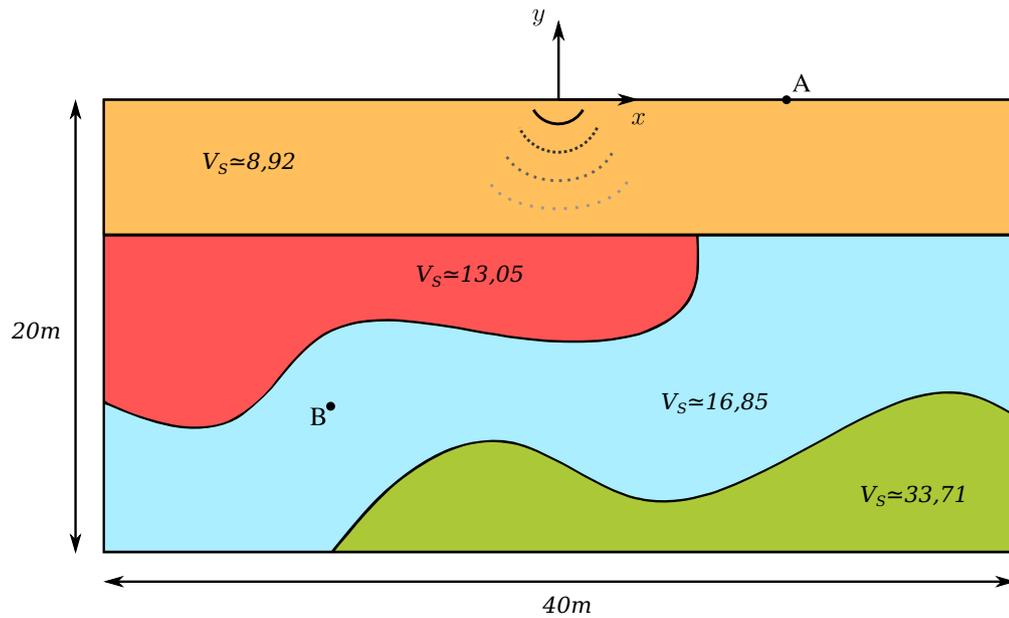
Neste exemplo a propagação de onda gerada por uma fonte sísmica da forma da equação 2.22 em um meio geofísico representado através de um modelo elástico bidimensional é estudado (as grandezas utilizadas não são reais), a fonte pontual adotada neste exemplo tem uma frequência de corte de 13Hz e será aplicada em dois pontos diferentes, o primeiro na superfície, na direção vertical, no ponto (0,0) e o outro no interior da primeira camada, em ambas direções (resultando na direção diagonal entre ambas), no ponto (0,-3).

O meio é composto por quatro camadas (enumeradas de cima para baixo, vide Fig. 4.14) possuindo propriedades físicas segundo a tabela 4.1, tendo em comum a densidade  $\rho = 2200kg/m^3$ :

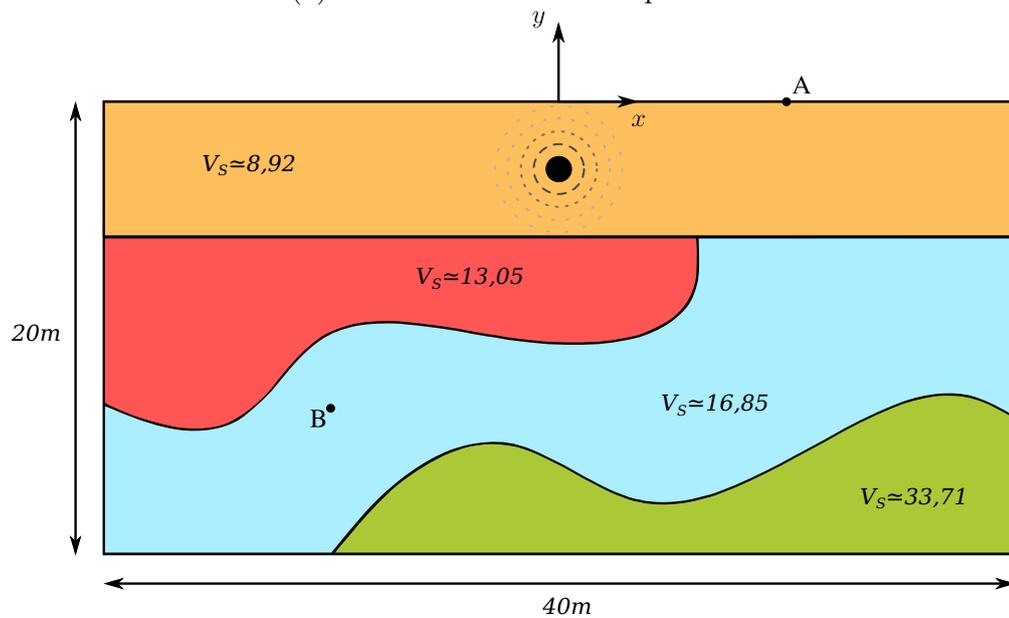
Tabela 4.1: Propriedades físicas do meio geofísico.

Nº	$V_S(m/s)$	$\nu$	$E(N/m^2)$
1	8,9188258502	0,4	490000
2	13,0558241967	0,2	900000
3	16,8549965616	0,2	1500000
4	33,7099931232	0,2	6000000

O meio é discretizado através de uma malha com 486860 elementos totalizando aproximadamente um milhão de equações (i.e., 976656 equações). Na primeira camada foi utilizada uma malha regular, possibilitando utilizar as propriedades de simetria vistas na seção 3.5.3 para diminuir o custo computacional. Observe que esta configuração ocorre muitas vezes, por exemplo em modelos acústico-elásticos (e.g., [18]) onde a primeira camada é de água (meio acústico). No contorno superior (superfície) é aplicada a condição de contorno natural (Neumann), sendo seu valor prescrito igual a zero. Nos demais contornos aplicam-se condições de contorno do cone, com o intuito de representar a continuidade do meio. Para este problema foi utilizado um  $\Delta t \approx 1,362 \times 10^{-4}s$  e o tempo final  $t_f = 3,0s$ , os resultados dos deslocamentos e velocidades nos pontos A=(10,0) e B=(-10,-15) foram calculados.



(a) Modelo com fonte na superfície



(b) Modelo com fonte no interior da primeira camada

Figura 4.14: Modelos para o meio geofísico.

Os resultados obtidos com ambos os métodos para os dois modelos ficaram muito próximos, uma vez que a fonte era suave, não excitando, portanto as frequências mais altas que ocasionam as oscilações.

### 4.3.1 Fonte na superfície

Os resultados dos deslocamentos, tanto verticais quanto horizontais, podem ser vistos na figura 4.15, onde é possível observar que os resultados de ambos os métodos ficaram muito

próximos.

Nos resultados das velocidades porém, figura 4.16, o método DC, ainda que em pequena amplitude e quantidade, apresentou oscilações espúrias em algumas regiões, tanto no ponto A quanto no ponto B.

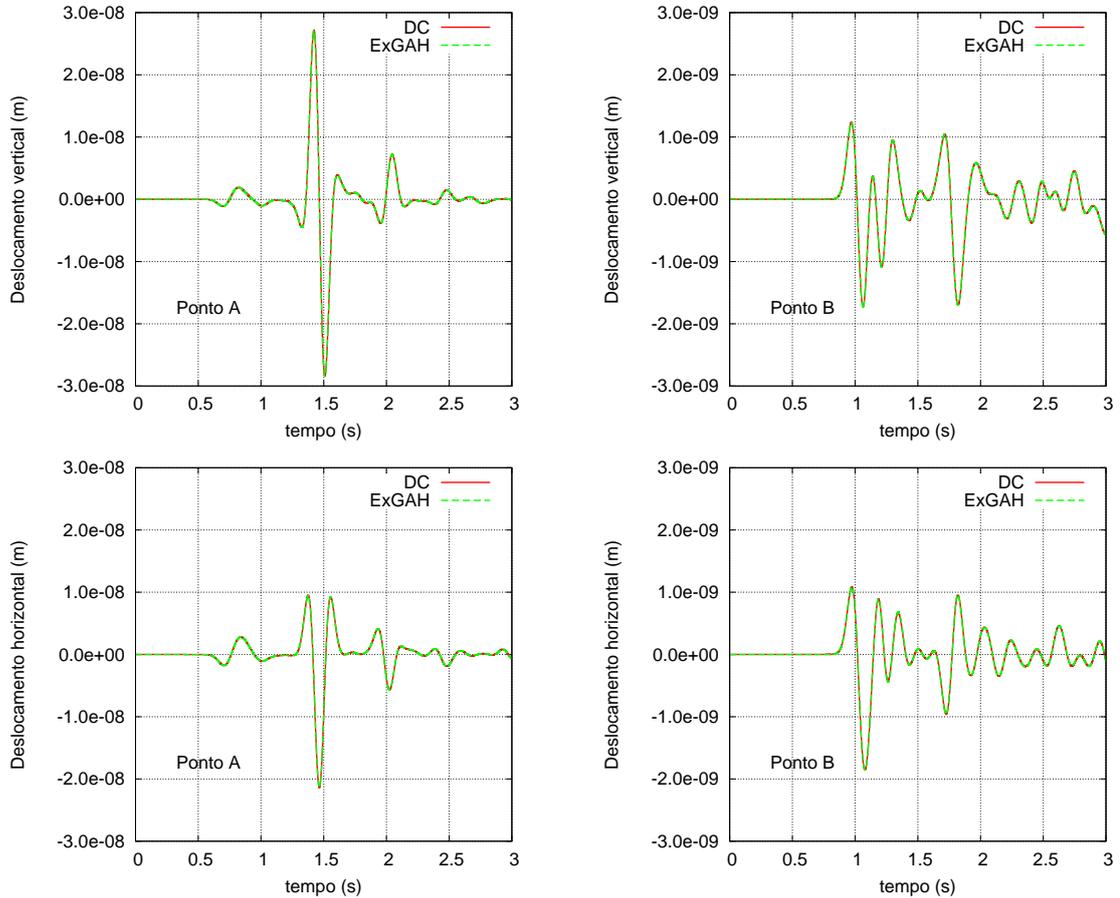


Figura 4.15: Resultado dos deslocamentos verticais e horizontais para o modelo geofísico.

Nas Fig. 4.17, 4.18 e 4.19 serão apresentados os snapshots do módulo do deslocamento  $u = \|\mathbf{u}\|$  obtidos pelo método ExGAH.

Na Fig. 4.17 são apresentados os primeiros instantes da simulação, e o instante no qual é possível ver a onda-P chegando no contorno inferior da malha após ter atravessado pelas diferentes camadas de materiais diferentes, a onda-S e de Rayleigh se mantendo na parte superior, sendo que a de Rayleigh é a de maior intensidade e só acontece na superfície.

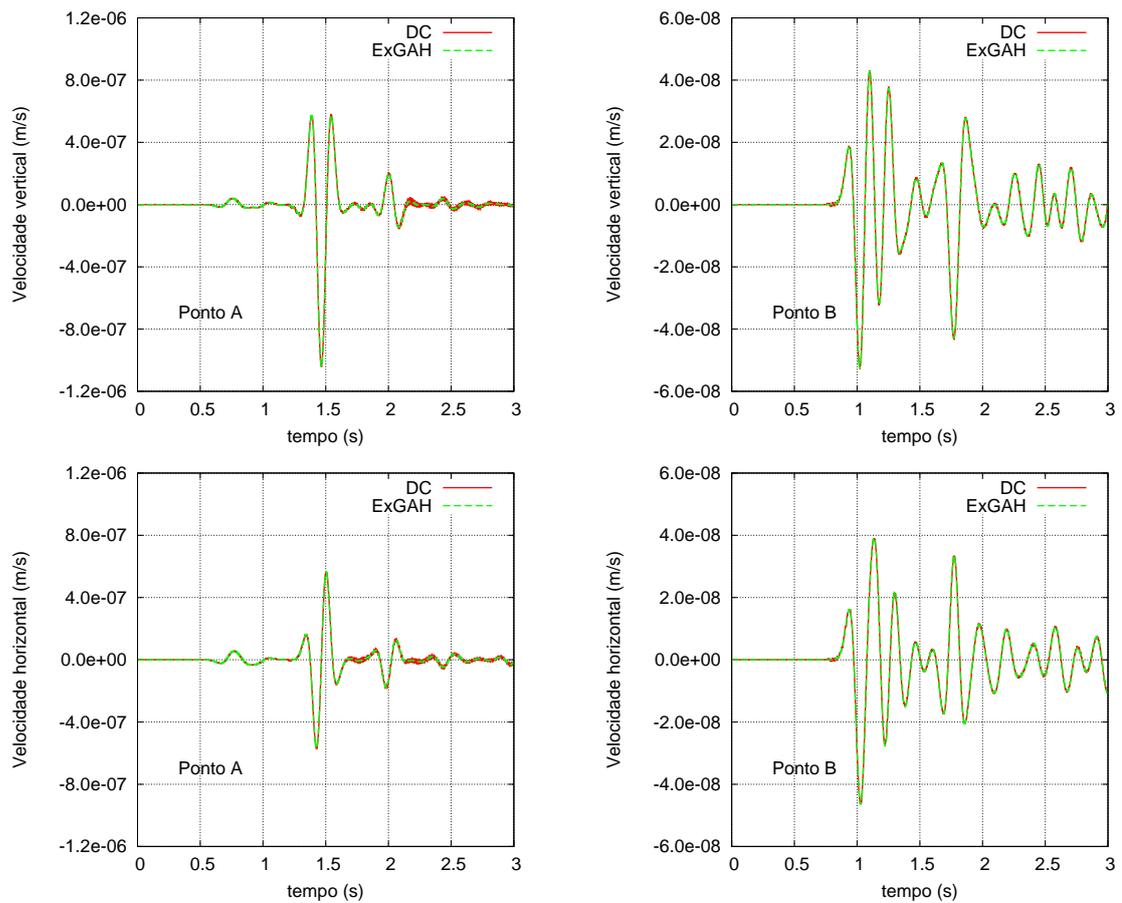
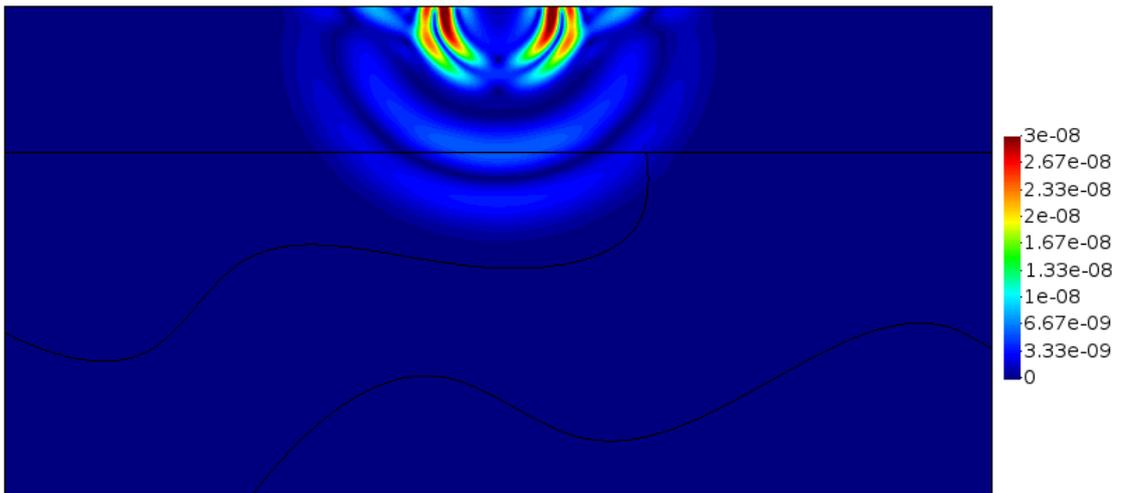


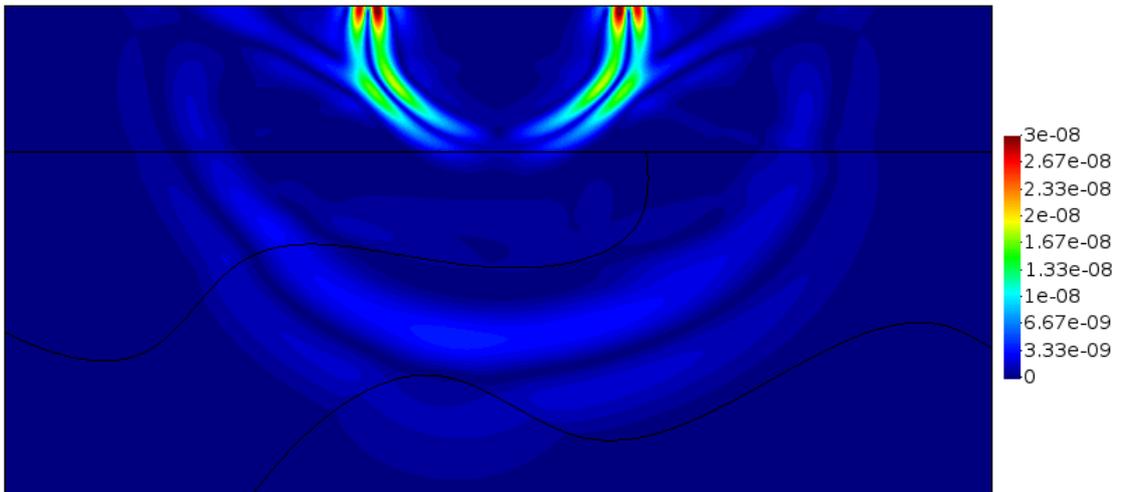
Figura 4.16: Resultado das velocidades verticais e horizontais para o modelo geofísico.

Na Figura 4.18 são apresentados os instantes da simulação onde a onda-P atravessou o contorno, e a onda-S e de Rayleigh estão prestes a chegar nos contornos laterais.

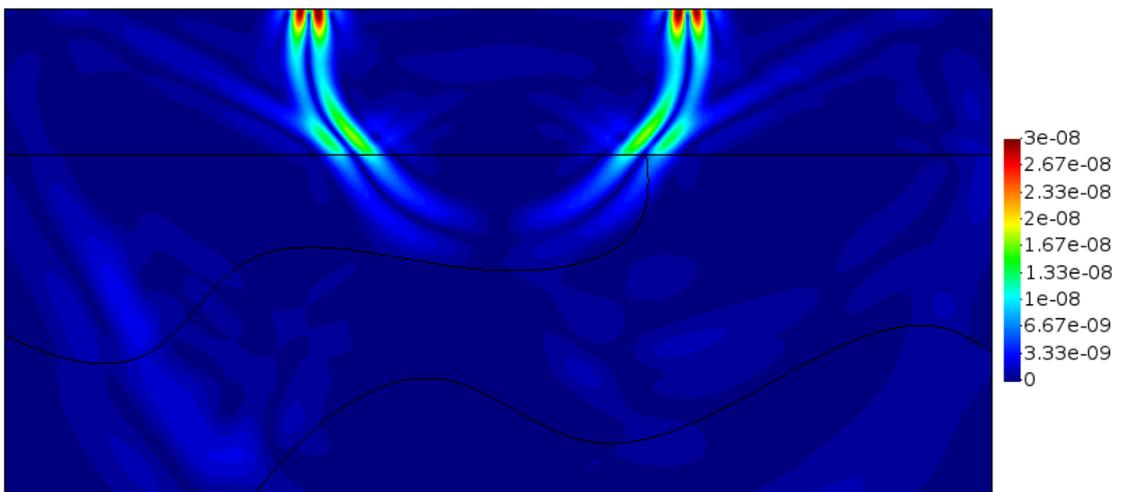
Na Figura 4.19 são apresentados os instantes da simulação onde a onda de Rayleigh chega (figura 4.19(a) e (b)) e reflete (figura 4.19(c)) no contorno, como comentado anteriormente a condição do cone consegue absorver muito bem a onda-P e a onda-S um pouco menos, porém onde tem maior problema é realmente na onda de Rayleigh.



(a)  $u$  em  $t=0,5721$  segundos

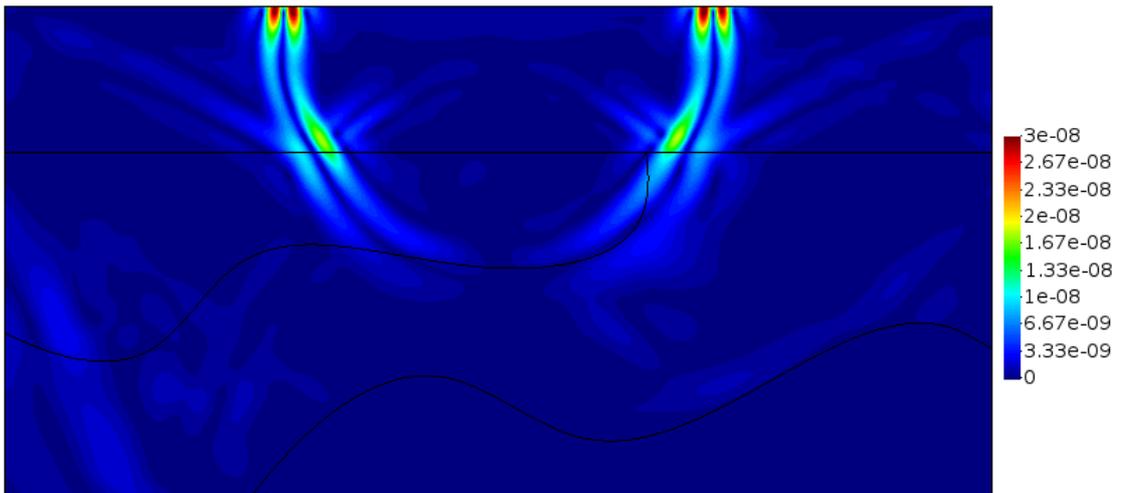


(b)  $u$  em  $t=0,8991$  segundos

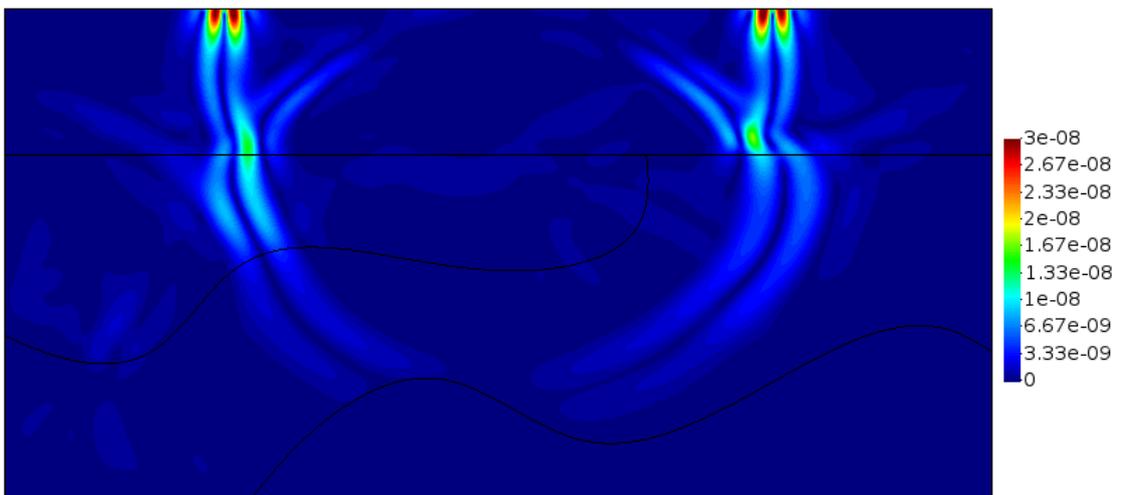


(c)  $u$  em  $t=1,185$  segundos

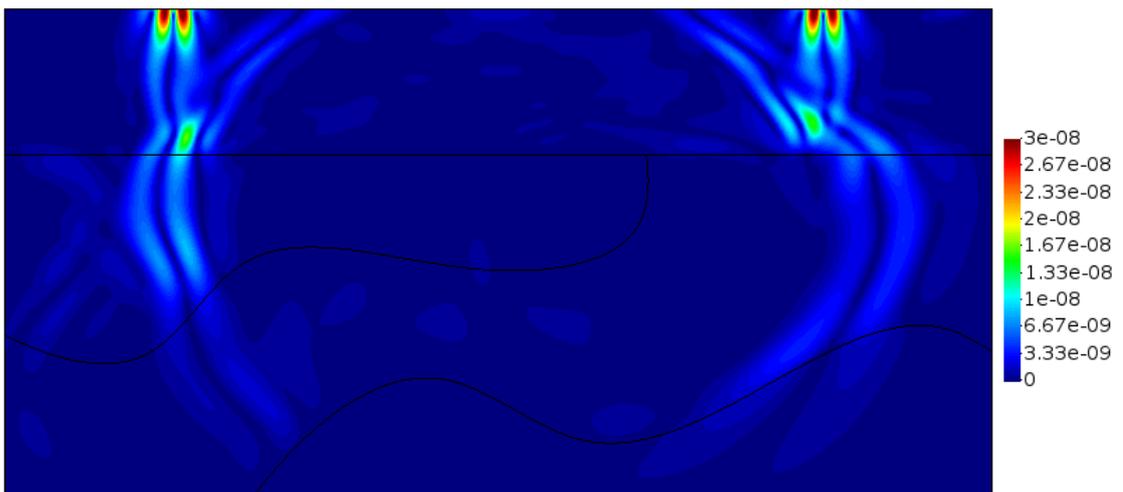
Figura 4.17: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.



(a)  $u$  em  $t=1,308$  segundos

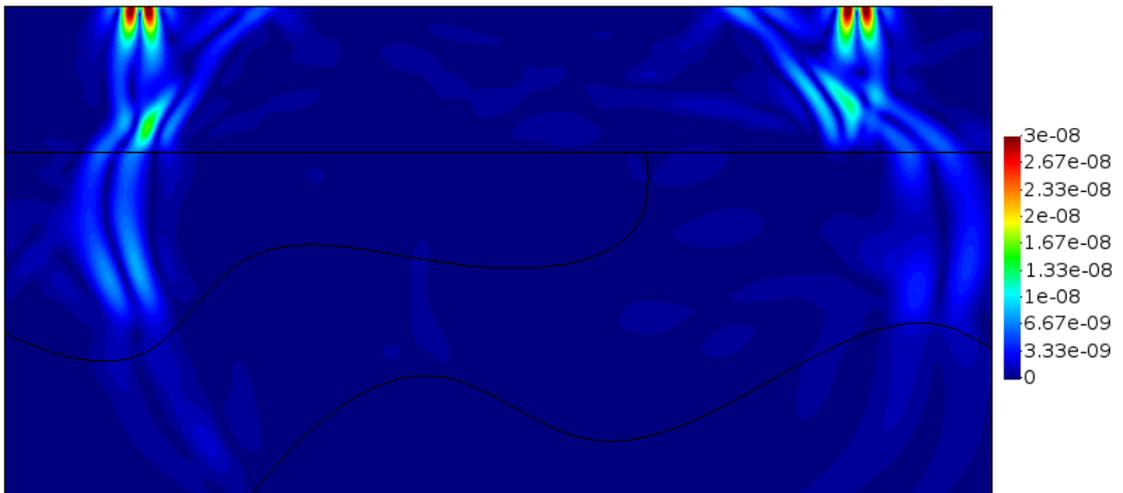
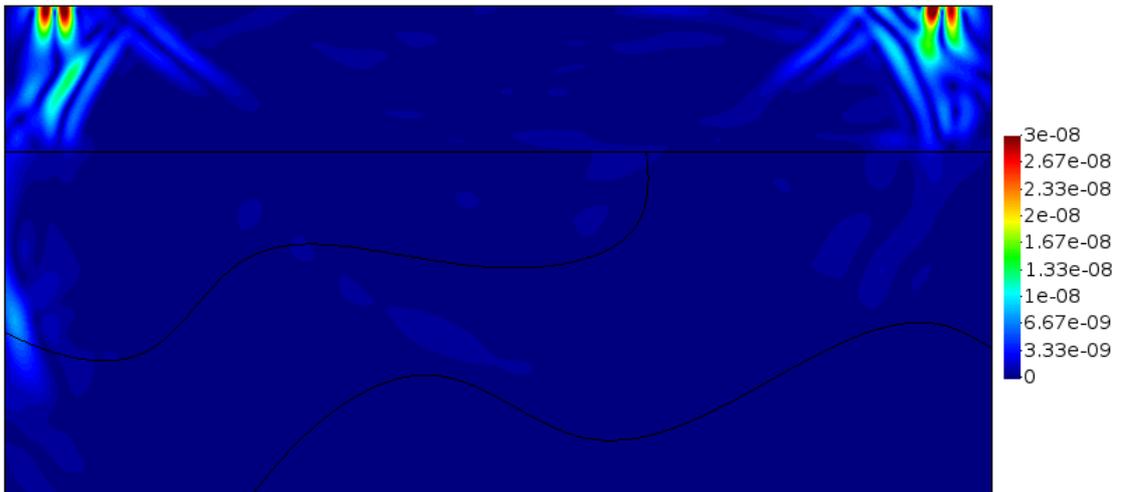
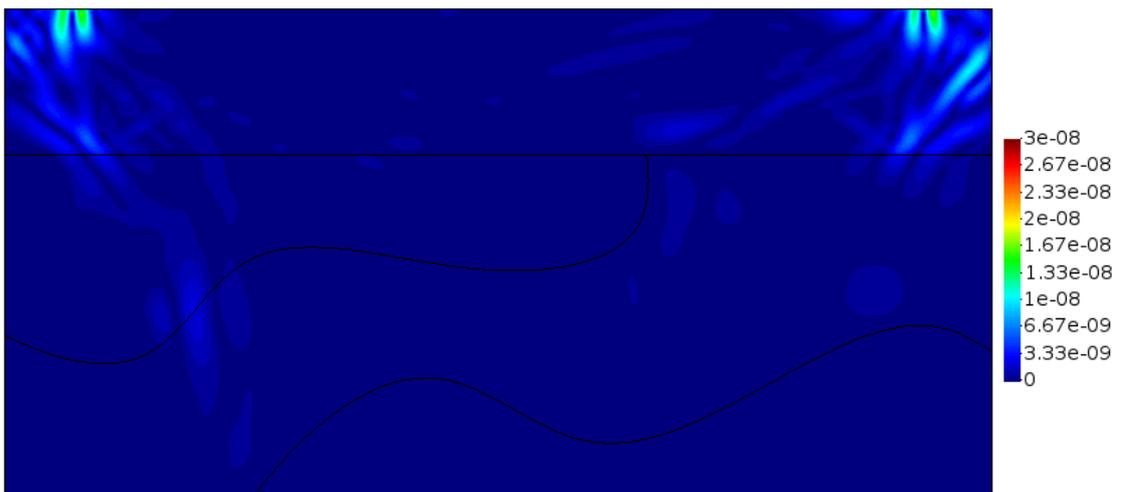


(b)  $u$  em  $t=1,594$  segundos



(c)  $u$  em  $t=1,839$  segundos

Figura 4.18: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.

(a)  $u$  em  $t=2,002$  segundos(b)  $u$  em  $t=2,411$  segundos(c)  $u$  em  $t=2,983$  segundosFigura 4.19: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.

### 4.3.2 Fonte no interior da primeira camada

Da mesma forma que no exemplo com a fonte na superfície, para a fonte no interior da primeira camada, os resultados dos deslocamentos ficaram muito próximos, como pode ser visto na Fig. 4.20.

Novamente para o caso das velocidades, o método DC apresentou oscilações espúrias em ambos pontos como é possível ver na Fig. 4.21.

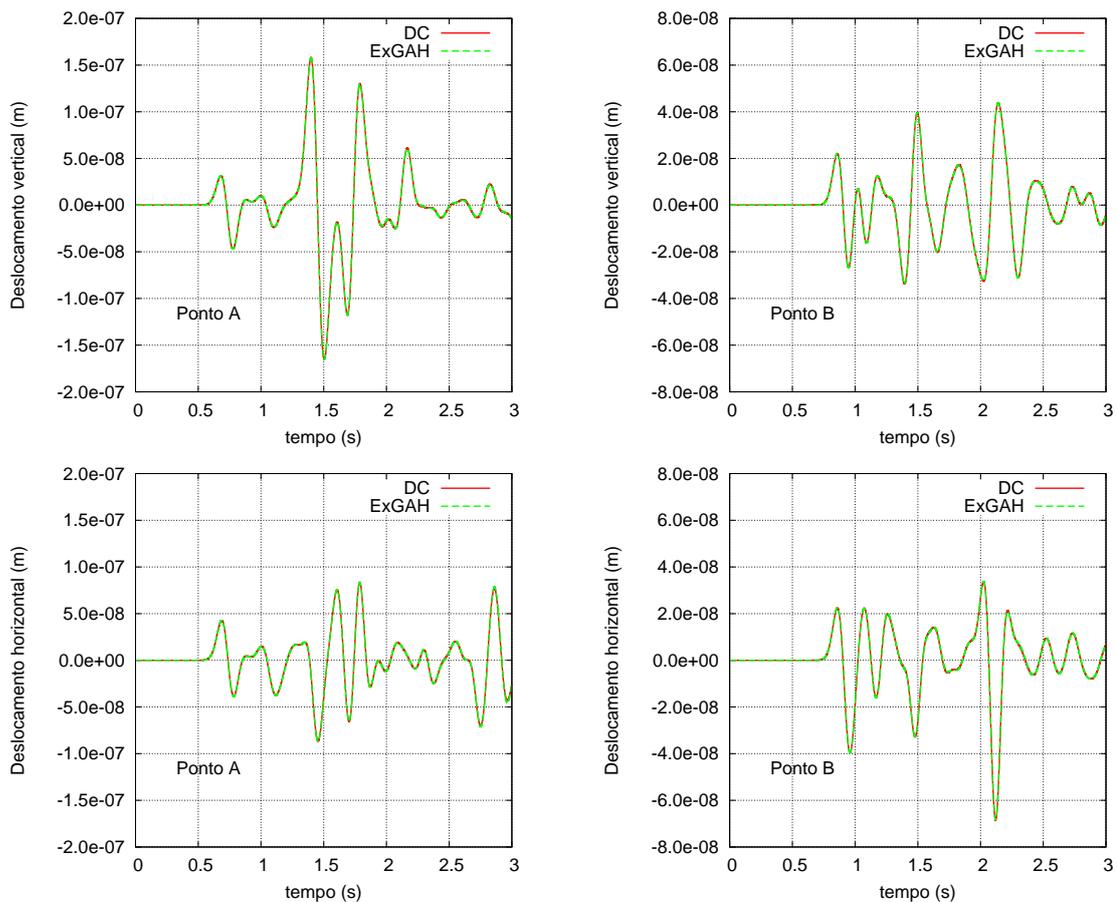


Figura 4.20: Resultado dos deslocamentos verticais e horizontais para o modelo geofísico.

Na Figura 4.22 são apresentados os primeiros instantes da simulação, onde é possível ver a onda-P chegando no contorno inferior da malha após ter atravessado pelas diferentes camadas de materiais, a onda-S e de Rayleigh se mantendo na parte superior. Na superfície pode-se ver que a onda refletiu com a fase invertida.

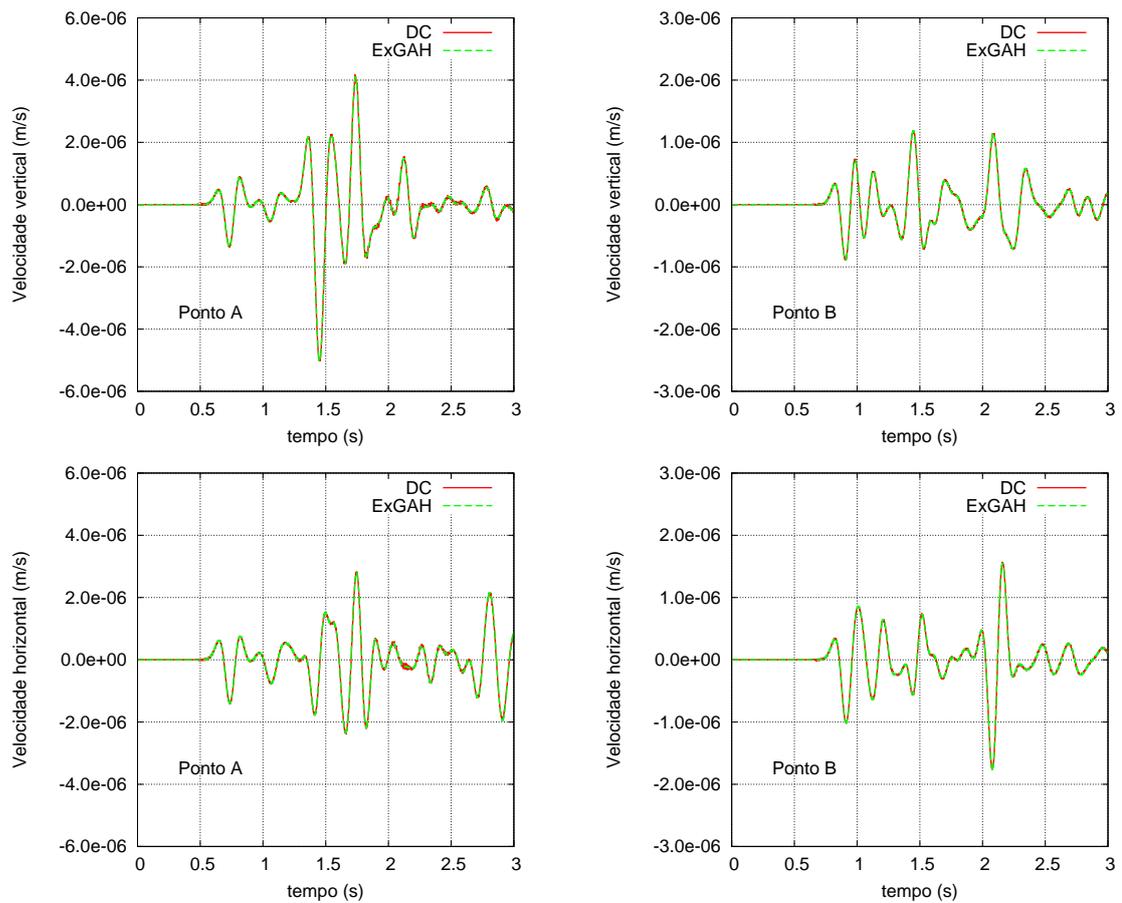
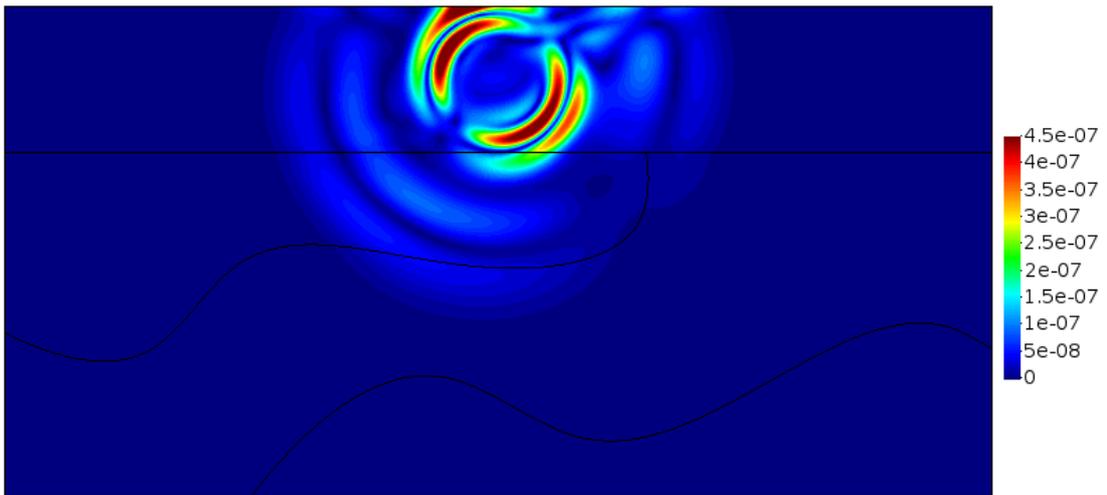


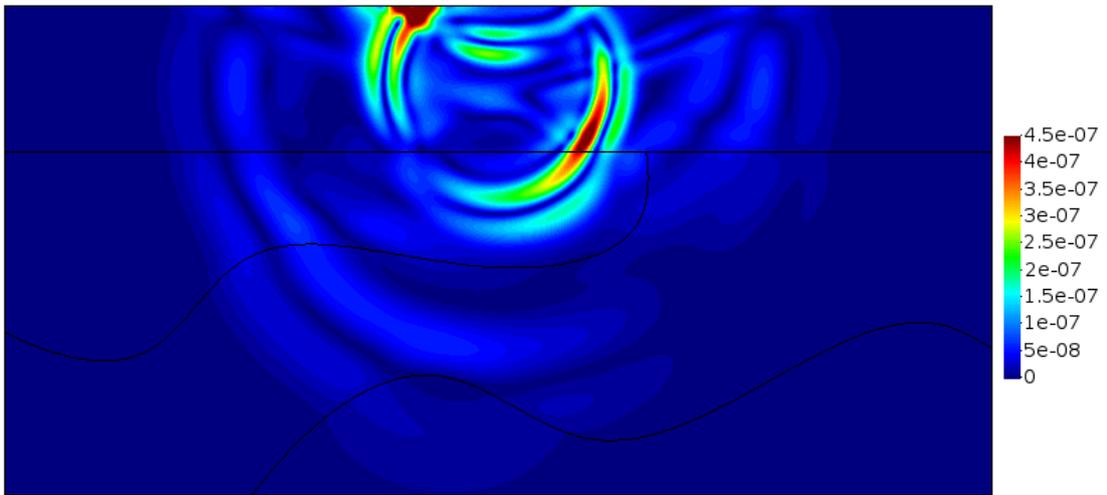
Figura 4.21: Resultado das velocidades verticais e horizontais para o modelo geofísico.

Na Figura 4.23 são apresentados os instantes da simulação onde a onda-P atravessou o contorno, e a onda-S e de Rayleigh estão prestes a chegar nos contornos laterais.

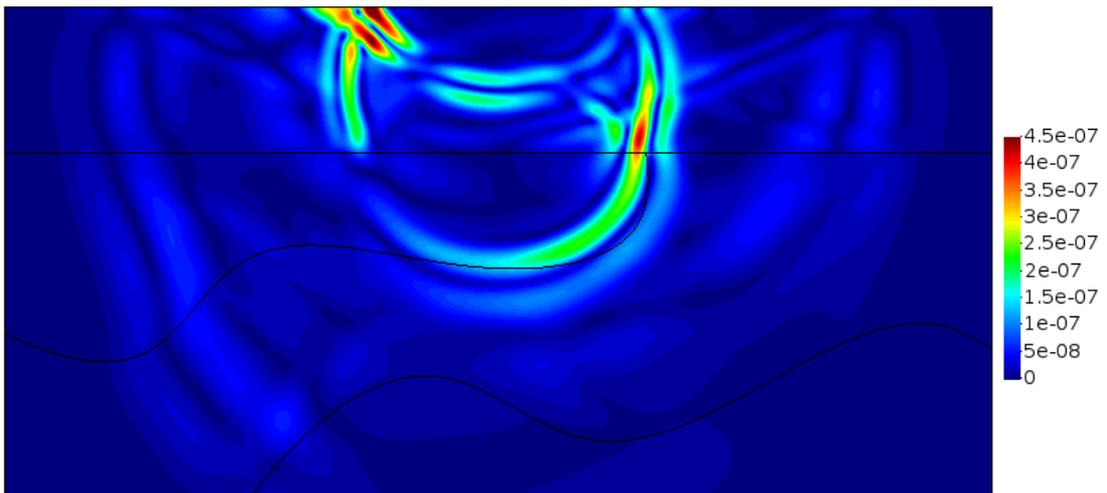
Na Figura 4.24 são apresentados os instantes da simulação onde a onda de Rayleigh chega (figura 4.24(a) e (b)) e reflete (figura 4.24(c)) no contorno, porém em menor quantidade do que no exemplo anterior.



(a)  $u$  em  $t=0,5721$  segundos

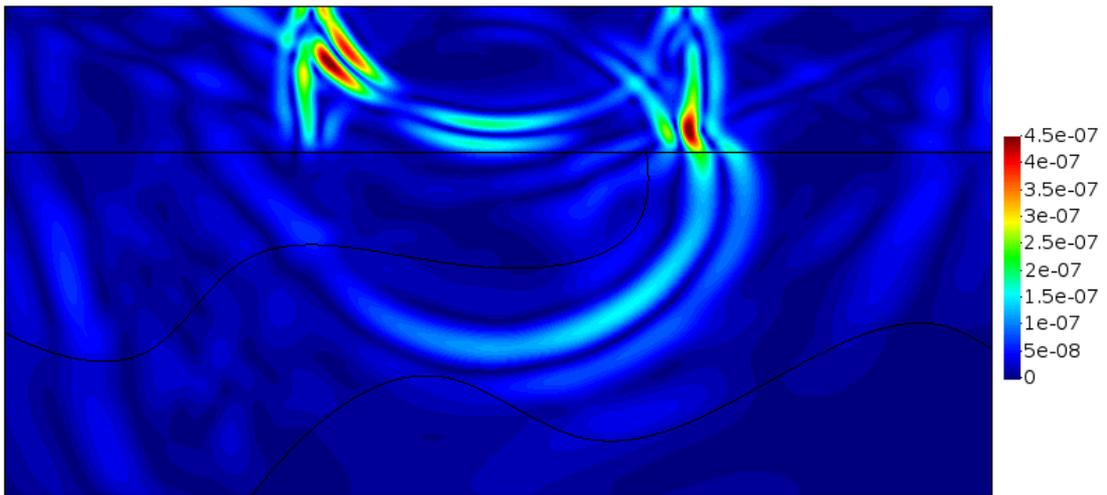


(b)  $u$  em  $t=0,7765$  segundos

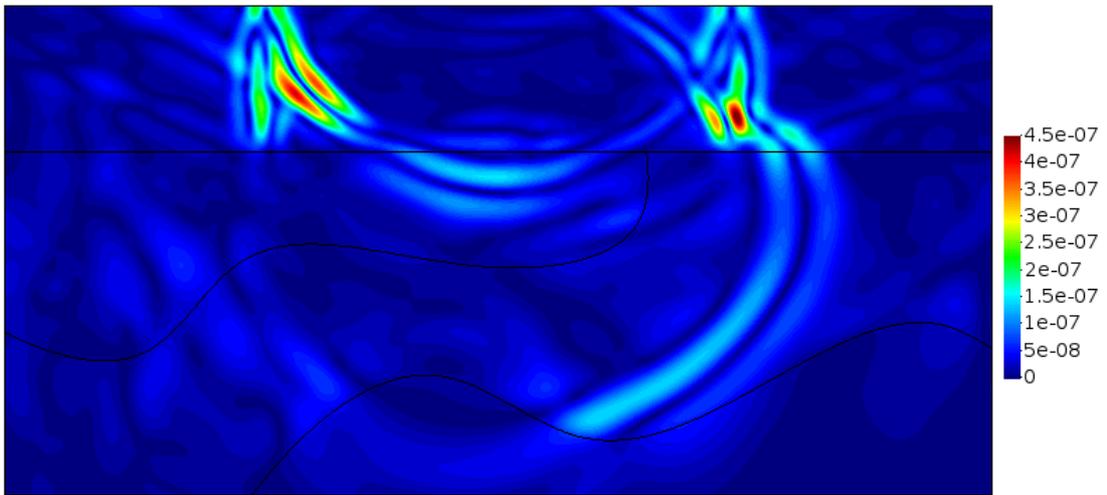


(c)  $u$  em  $t=0,9808$  segundos

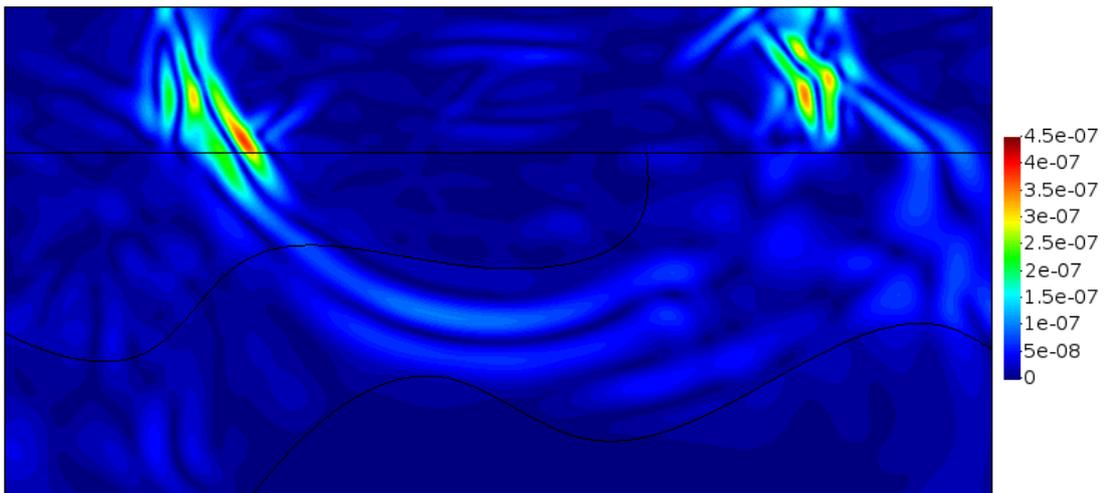
Figura 4.22: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.



(a)  $u$  em  $t=1,185$  segundos

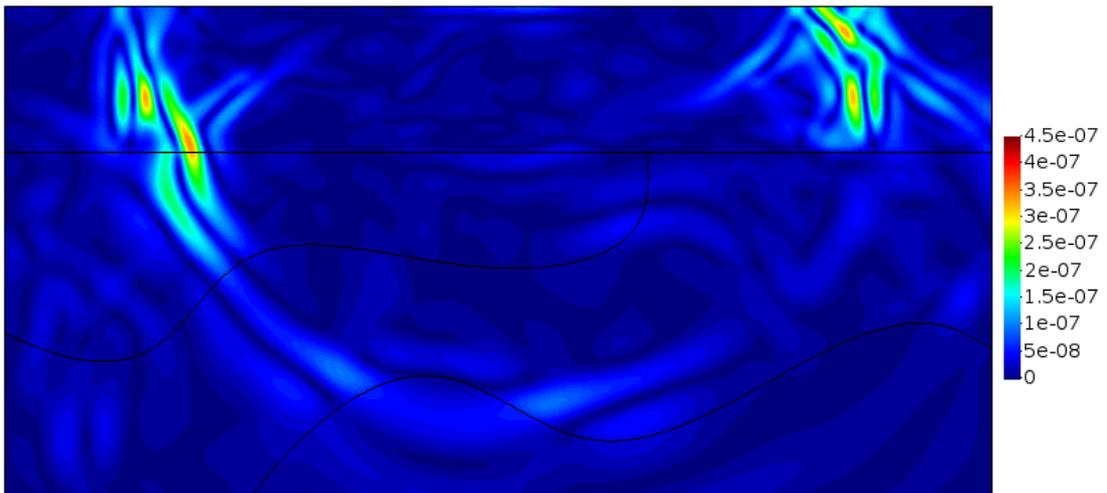


(b)  $u$  em  $t=1,389$  segundos

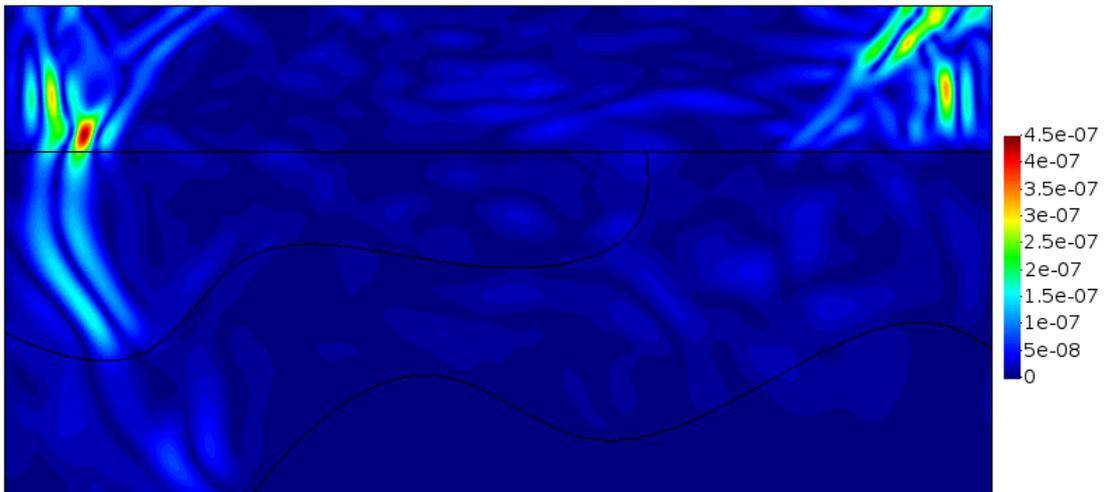


(c)  $u$  em  $t=1,798$  segundos

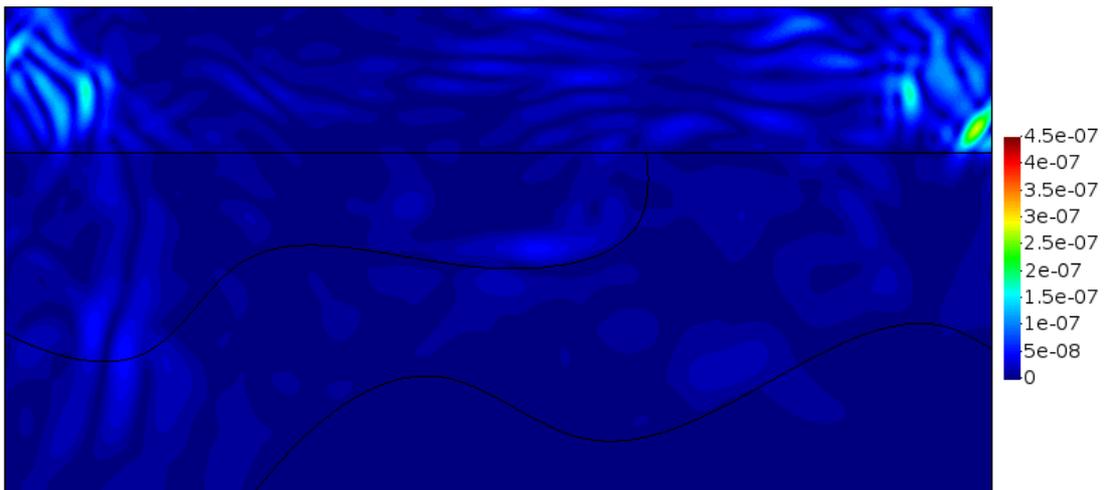
Figura 4.23: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.



(a)  $u$  em  $t=2,002$  segundos



(b)  $u$  em  $t=2,411$  segundos



(c)  $u$  em  $t=2,983$  segundos

Figura 4.24: Snapshots de  $u$  para o método ExGAH.

## 5 CONCLUSÕES

Na presente dissertação foi apresentada uma técnica precisa de marcha no tempo explícita baseada no método ExGA, que foi implementada na linguagem de programação Fortran90, a qual consiste numa modificação do método Diferença Central para calcular as funções de Green e Degrau de maneira independente uma da outra e logo em seguida o cálculo dos campos de deslocamentos e velocidades pelo método ExGAH (algumas multiplicações  $\text{matriz} \times \text{vetor}$ ).

Motivado pelo princípio da causalidade, a característica principal é o cálculo das funções de Green e Degrau localmente em subdomínios ao redor de cada ponto fonte. Embora o subdomínio local discreto com sua respectiva submalha obtida a partir da formulação semi-discreta do MEF seja um pouco maior do que o previsto pelo princípio da causalidade, ainda é muito pequeno quando comparado a toda a malha, especialmente para simulações em grande escala, e assim, as funções de Green e Degrau são eficientemente calculadas com um baixo custo computacional.

Além disso, em muitos casos, se as submalhas são formadas por elementos regulares e as propriedades do material são constantes ao longo deles, o custo computacional pode ser reduzido drasticamente, uma vez que será necessária somente um quarto da submalha para a realização dos cálculos; ainda, a resposta obtida de uma submalha pode ser reutilizada para outras submalhas iguais. A análise de convergência revelou que o esquema proposto é de segunda ordem de precisão em relação ao tempo e possui as seguintes vantagens sobre o método Diferença Central padrão: amortecimento numérico e menor erro de dispersão.

A primeira é uma importante propriedade numérica para filtrar oscilações espúrias que possam surgir em algumas simulações. De fato, os resultados numéricos mostraram que com a formulação proposta são obtidos resultados precisos, sem oscilações espúrias. Por isso, o uso de conceitos numéricos de funções de Green em conjunto com o princípio da causalidade para problemas de propagação de ondas pode ser muito promissor para desenvolver técnicas numéricas eficientes.

Cita-se como sugestões de trabalhos futuros:

- a expansão do esquema de marcha no tempo para problemas em três dimensões;

- a utilização do método dos elementos finitos espectral;
- Intentar melhorar a solução adicionando informação da solução analítica (solução fundamental);
- o estudo do comportamento do esquema no tempo quando aplicado a problemas inversos de propagação de ondas ou detecção de danos ou trincas.

## REFERÊNCIAS

- [1] MANSUR, W., LOUREIRO, F., SOARES, D., DORS, C., “Explicit time-domain approaches based on numerical Green’s functions computed by finite differences - the ExGA family”, *Journal of Computation Physics*, v. 227, pp. 851–870, 2007.
- [2] ACHENBACH, J., *Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*, Elsevier Science, 1984.
- [3] DAVIS, J., *Mathematics of Wave Propagation*. Princeton University Press: New Jersey, 2000.
- [4] BATHE, K., *Finite element procedures*. Prentice-Hall: New Jersey, 1996.
- [5] HUGHES, T., *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications: New York, 2000.
- [6] LOUREIRO, F., *Métodos de integração temporal baseados no cálculo numérico de funções de Green através do método dos elementos finitos*, Master’s Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [7] DOMINGUEZ, J., *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications: Southampton, 1993.
- [8] WROBEL, L., *The boundary element method: applications in thermo-fluids and acoustics*. John Wiley & Sons: England, 2002.
- [9] ALIABADI, H., WEN, P., *Boundary Element Methods in Engineering and Sciences*. 2011.
- [10] STAKGOLD, I., *Green’s Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons: New York, 1979.
- [11] MANSUR, W., VASCONSELLOS, C., ZAMBROZUSKI, N., ROTUNNO FILHO, O., “Numerical Solution for Linear Transient Heat Conduction Using an Explicit Green’s Approach”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, pp. 694–701, 2009.

- [12] LOUREIRO, F., MANSUR, W., VASCONSELLOS, C., “A hybrid time/Laplace integration method based on numerical Green’s functions in conduction heat transfer”, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, v. 198, pp. 2662–2672, 2009.
- [13] LOUREIRO, F., MANSUR, W., “A new family of time integration methods for heat conduction problems using numerical Green’s functions”, *Computational Mechanics*, v. 44, pp. 519–531, 2009.
- [14] ZAMBROZUSKI, N., *Análise de problemas difusivos transientes utilizando o método de aproximação explícita de Green e o método dos elementos de contorno*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.
- [15] GRAFF, K., *Wave motion in elastic solid*. Dover Publications: New York, 1991.
- [16] LAI, W., RUBIN, D., RUBIN, D., KREMPL, E., *Introduction to Continuum Mechanics*. 4th ed. Elsevier Science, 2009.
- [17] BULCÃO, A., *Modelagem e migração reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [18] DI BARTOLO, L., *Modelagem sísmica anisotrópica através do método das diferenças finitas utilizando sistemas de equações em segunda ordem*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.
- [19] KELLEZI, L., “Local transmitting boundaries for transient elastic analysis”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 19, n. 7, pp. 533–547, 2000.
- [20] PRAKASH, S., *Soil dynamics*. McGraw-Hill: New York, 1981.
- [21] KRAMER, S. L., *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice Hall: New Jersey, 1996.
- [22] LOWRIE, W., *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press, 1997.
- [23] MEEK, J. W., WOLF, J. P., “Why cone models can represent the elastic half-space”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 22, n. 9, pp. 759–771, 1993.

- [24] KUCUKCOBAN, S., KALLIVOKAS, L., “Mixed perfectly-matched-layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, pp. 57–76, 2011.
- [25] LYSMER, J., KUHLEMEYER, R. L., “Finite-Dynamic Model for Infinite Media”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, v. 95, n. 4, pp. 859–877, 1969.
- [26] KOUROUSSIS, G., VERLINDEN, O., CONTI, C., “Finite-Dynamic Model for Infinite Media: Corrected Solution of Viscous Boundary Efficiency”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, v. 137, n. 7, pp. 509–511, 2011.
- [27] WOLF, J., *Soil-structure-interaction analysis in time domain*. Prentice Hall: New Jersey, 1988.
- [28] KONTTOE, S., *Development of time integration schemes and advanced boundary conditions for dynamic geotechnical analysis*, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 2006.
- [29] KONTTOE, S., ZDRAVKOVIC, L., POTTS, D. M., “An assessment of the domain reduction method as an advanced boundary condition and some pitfalls in the use of conventional absorbing boundaries”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 33, n. 3, pp. 309–330, 2009.
- [30] URLICH, C. M., KUHLEMEYER, R. L., “Coupled Rocking and Lateral Vibrations of Embedded Footings”, *Canadian Geotechnical Journal*, v. 10, n. 2, pp. 145–160, 1973.
- [31] VALLIAPPAN, S., FAVALORO, J., WHITE, W., “Dynamic Analysis of Embedded Footings”, *Journal of Geotechnical Division*, v. 103, pp. 129–133, 1977.
- [32] KELLEZI, L., *Dynamic soil-structure interaction transmitting boundary for transient analysis*, Ph.D. Thesis, Department of Structural Engineering and Materials, Technical University of Denmark, 1998.
- [33] OZISIK, M., *Heat Conduction*. 2nd ed. Wiley: New York, 1993.
- [34] BECK, J., COLE, K., HAJI-SHEIKH, A., KREMPL, E., *Heat Conduction using Green’s Functions. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences*, Hemisphere Publishing Corporation, 1992.

- [35] CLOUGH, R., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*. 2nd ed. McGraw-Hill: New York, 1993.
- [36] PAZ, M., *Structural Dynamics – Theory and Computation*. 4th ed. Chapman and Hall: New York, 1997.
- [37] FUNG, T., “A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 4501–4527, 1997.
- [38] ADAMS, R., FOURNIER, J., *Sobolev Spaces*. 2nd ed. *Pure and Applied Mathematics*, Elsevier Science, 2003.
- [39] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R., ZHU, J., *Finite element method: its basis & fundamentals*. 6th ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [40] COOK, R., *Concepts and applications of finite element analysis*. 3rd ed. John Wiley & Sons: New York, 2001.
- [41] LOUREIRO, F., *Generalização do Método da Aproximação Explícita de Green para a solução de Equações parabólicas e hiperólicas*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.
- [42] LOUREIRO, F., MANSUR, W., “A novel time-marching scheme using numerical Green’s functions: A comparative study for the scalar wave equation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 23-24, pp. 1502–1512, 2010.
- [43] MANSUR, W., “Explicit Algorithms based on Green’s Functions (ExGA) to Integrate the Equations of Motion”, *Lecture at Civil Engineering Department, COPPE-UFRJ (in Portuguese)*, 2005.
- [44] MANSUR, W., *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, England, 1983.
- [45] DUFFY, D., *Green’s Functions with Applications*. *Applied Mathematics*, Taylor & Francis, 2001.

- [46] LOUREIRO, F., MANSUR, W., “An efficient hybrid time-Laplace domain method for elastodynamic analysis based on the explicit Green’s approach”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 46, pp. 3093–3102, 2009.
- [47] MANSUR, W., CARRER, J., OYARZÚN, P., “Time-domain BEM Techniques”, In: ALIABADI, H., WEN, P. (eds), *Boundary Element Methods in Engineering and Sciences*, pp. 51–75, 2011.

# APÊNDICE A - TEORIA BÁSICA E NOTAÇÃO INDICIAL

O objetivo deste capítulo é o de apresentar a teoria básica necessária para entender as equações utilizadas, além de apresentar a notação utilizada ao longo deste trabalho.

## Notação indicial

A utilização da notação indicial, convenção de somatório, e certos símbolos ajudam que as equações utilizadas apareçam de forma compacta. Ao se designar alguma variável subscrita, ela o será unicamente por índices numéricos em vez de letras individuais ou letras subscritas. Desta forma tem-se  $x_1, x_2, x_3$ , em vez de  $x, y, z$ , ou  $x_x, x_y, x_z$ . Por exemplo, utilizando a notação indicial teremos a equação:

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \quad (\text{A.1})$$

a qual, utilizando a notação convencional de somatório pode ser escrita como:

$$u = \sum_{i=1}^3 a_i x_i \quad (\text{A.2})$$

e ainda, introduzindo a convenção de somatório, o qual estabelece que a repetição de índices num termo representa um somatório com respeito a esse índice no seu intervalo de variação, denotasse a equação anterior como:

$$u = a_i x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.3})$$

Um índice repetido pode ser trocado com outro índice repetido. Assim

$$a_i x_i = a_j x_j \quad (\text{A.4})$$

Muitas vezes pode aparecer um índice duplo. Por exemplo, a equação:

$$\begin{aligned} v = & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 \\ & a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

se resume em

$$v = a_{ij}x_ix_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.6})$$

Por outro lado, uma equação na notação indicial pode representar muitas equações na notação estendida, assim

$$w_i = a_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.7})$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ w_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dois símbolos especiais utilizados na notação indicial são, o delta de Kronecker, definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

e o segundo, o simbolo de permutação, definido como

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação impar de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{se pelo menos dois dos três índices repetem} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Desta maneira teremos  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ ,  $\delta_{12} = 0$ ,  $\delta_{23} = 0$ , etc., e

$$\begin{aligned} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1 \\ e_{112} = 0, \quad e_{223} = 0, \quad \text{etc} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, a notação para a derivada com respeito a uma variável será indicada por

uma virgula seguida por um índice, assim:

$$u_{,j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.12})$$

Desta forma muitas das operações vetoriais conhecidas podem ser escritas facilmente na notação indicial. A seguir serão apresentadas algumas destas seguidas da sua notação indicial correspondente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\sim a_i b_i \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &\sim e_{ijk} a_j b_k, r \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} &\sim A_{ij} B_{ij} \\ \nabla \phi &\sim \phi_{,i} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &\sim a_{i,i} \\ \nabla \times \mathbf{a} &\sim e_{ijk} a_{k,j} \\ \nabla \cdot \nabla \phi &= \nabla^2 \phi \sim \phi_{,ii} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

## Tensor de tensões

Considere um meio contínuo de volume  $V$  e superfície  $S$  sofrendo ação de várias forças como visto na Figura A.1a. Como resultado destas forças, forças de superfície irão agir numa superfície infinitesimal arbitrária dentro do corpo, como visto na Figura A.1b.

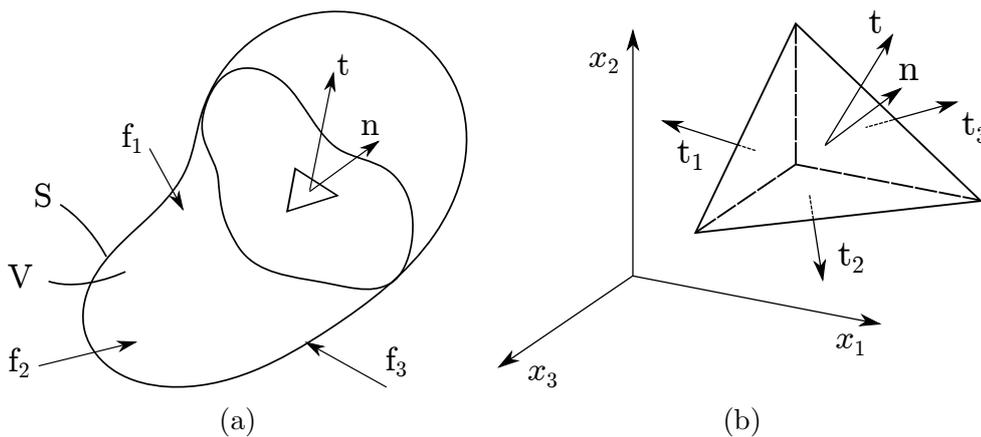


Figura A.1: (a) Um meio contínuo sujeito a influência de forças, e (b) um tetraedro infinitesimal do meio contínuo.

Sendo  $\mathbf{e}_i$  vetores unitários nas direções  $x_i$  de um sistema retangular de coordenadas

cartesiano, ou em notação estendida:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$

$$\mathbf{e}_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$

$$\mathbf{e}_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

De acordo como esta definição, o vetor normal a um dos lados do tetraedro será  $\mathbf{n} = n_j \mathbf{e}_j$ . De forma semelhante o vetor de forças de superfície é dado por

$$\mathbf{t} = t_j \mathbf{e}_j \quad (\text{A.14})$$

onde as componentes do vetor de forças de superfície  $t_j$  servem pra definir o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  como

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A.15})$$

Em notação cartesiana estendida estas componentes serão

$$t_x = \sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2 + \sigma_{xz} n_3$$

$$t_y = \sigma_{yx} n_1 + \sigma_{yy} n_2 + \sigma_{yz} n_3$$

$$t_z = \sigma_{zx} n_1 + \sigma_{zy} n_2 + \sigma_{zz} n_3$$

## Tensor de deformações

Considere um meio contínuo de volume  $V$  e superfície  $S$  submetido a uma deformação.

Sendo o vetor posição definido por

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t) \mathbf{e}_1 + X_2(t) \mathbf{e}_2 + X_3(t) \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.16})$$

Antes da deformação, o ponto  $P_0$  é localizado através do vetor posição  $X_i$ , e  $P_1$  é um ponto vizinho do ponto  $P_0$  localizado pelo vetor  $dX_i$  que tem origem em  $P_0$ . Após a deformação, o ponto  $P_0$  se torna  $P'_0$  o qual é localizado pelo vetor posição  $x_i$ ,  $P_1$  se torna  $P'_1$  o qual é localizado pelo vetor  $dx_i$  relativo a  $P'_0$ . A distância do ponto  $P_0$  para  $P'_0$  é medido pelo vetor deslocamento  $u_i$ . O deslocamento do ponto  $P_1$  para  $P'_1$  é medido pelo vetor  $\hat{u}_i$ . O volume e superfície final do corpo deformado são  $V'$  e  $S'$  respectivamente.

Estas considerações são mostradas na figura A.2.

Algumas das relações vectoriais resultantes são:

$$x_i = X_i + u_i \quad (\text{A.17})$$

$$u_i + dx_i = \hat{u}_i + dX_i \quad (\text{A.18})$$

e da Eq.A.17 obtém-se a seguinte igualdade  $dx_i = dX_i + du_i$ , a qual substituindo na Eq.A.18 resulta em:

$$\hat{u}_i = u_i + du_i \quad (\text{A.19})$$

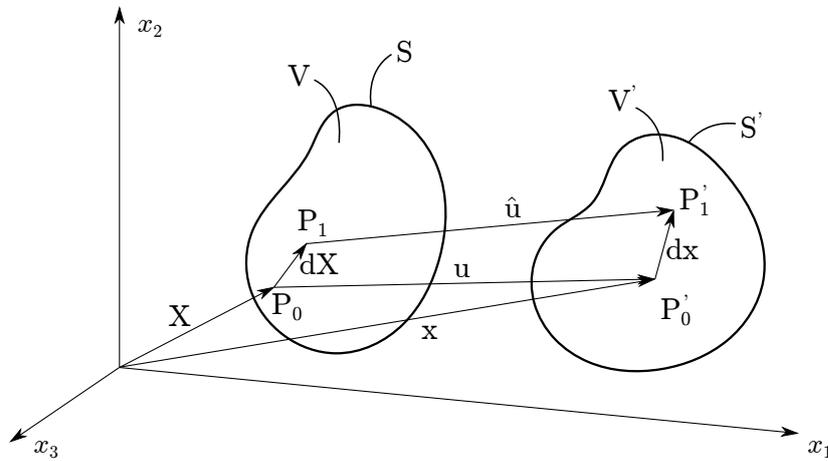


Figura A.2: Deformação de um meio contínuo do volume  $V$  no volume  $V'$ .

No caso de uma deformação infinitesimal pode-se expressar  $du_i$  como

$$du_i = u_{i,j} dx_j \quad (\text{A.20})$$

ainda, pode-se decompor a matriz  $u_{i,j}$  como soma de uma matriz simétrica e uma antissimétrica, assim sendo, tem-se

$$du_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dx_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) dx_j \quad (\text{A.21})$$

Pode-se definir o tensor de deformações infinitesimais e de rotação respectivamente como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{A.22})$$

O resultado A.21 enfatiza que a cinemática de um vizinho arbitrário do ponto  $P_0$  é

governado pelo campo do gradiente de deformação local  $u_{i,j}$  e esse movimento é uma combinação dos efeitos de distorção local  $\varepsilon_{ij}$  e também pelos efeitos da rotação de corpo rígido local  $\omega_{ij}$ .

## Notação de Voigt

Em virtude das simetrias existentes nas tensões, deformações e no tensor de elasticidade [16, 15], é possível reescrever estes objetos com uma notação compacta, de forma que a visualização deles se torne mais simples. Isto porque, sendo o tensor de elasticidade um tensor de quarta ordem, sua representação matricial não é possível a princípio, de forma que neste caso apenas se pode trabalhar com suas componentes.

O tensor de tensões, por ser um tensor de segunda ordem, no caso bidimensional, pode ser representado matricialmente por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

onde  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , totalizando 3 componentes independentes. Assim, uma forma de representar o tensor de tensões, permitindo com isto que o tensor de elasticidade seja representado por uma matriz, é escrevê-lo como um vetor, da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Repare que, para tornar possível a representação utilizando um vetor, os dois índices  $i, j$  do tensor foram transformados num índice  $n$  único, através da seguinte relação

$$n = i\delta_{ij} + (6 - i - j)(1 - \delta_{ij}) \quad (\text{A.25})$$

que define a chamada notação de Voigt para o caso bidimensional.

Desta forma, utilizando a mesma notação, e tendo em conta as simetrias nos índices

originais  $ijkl$ , o tensor de elasticidade de quarta ordem mais geral é dado por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

cujos elementos correspondem à

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

na notação original.

A notação de Voigt é muito útil pois simplifica a representação e evidencia as simetrias físicas presentes no problema.