

Rodrigo Leppaus de Araujo

Evolução Diferencial para Problemas de Otimização com Restrições Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa

Coorientador: Prof. D.Sc. Heder Soares Bernardino

Juiz de Fora

2016

Rodrigo Leppaus de Araujo,

Evolução Diferencial para Problemas de Otimização com Restrições Lineares/ Rodrigo Leppaus de Araujo. – Juiz de Fora: UFJF/MMC, 2016.

XIV, 82 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Helio José Corrêa Barbosa

Coorientador: Heder Soares Bernardino

Dissertação (mestrado) – UFJF/MMC/Programa de Modelagem Computacional, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 82.

1. Otimização, Restrições lineares de igualdade, Evolução diferencial. I. José Corrêa Barbosa, Helio *et al.*. II. Universidade Federal de Juiz de Fora, MMC, Programa de Modelagem Computacional.

Rodrigo Leppaus de Araujo

Evolução Diferencial para Problemas de Otimização com Restrições Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 5 de Setembro de 2016.

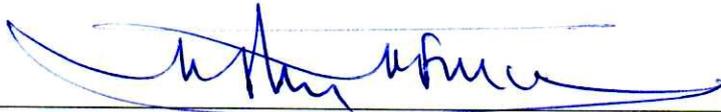
BANCA EXAMINADORA



Prof. D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora / Laboratório Nacional de Computação Científica



Prof. D.Sc. Heder Soares Bernardino - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Wilhelm Passarella Freire
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Eduardo Krempser da Silva
Fundação Oswaldo Cruz



Prof. D.Sc. Douglas Adriano Augusto
Fundação Oswaldo Cruz

*Ao meu Anjo Eivelton Leppaus
de Araujo
In memoriam*

AGRADECIMENTOS

À DEUS pela força espiritual.

À minha família, meu alicerce para vida. Tudo que sou, agradeço imensamente a vocês. Nas diversidades que a vida nos reservou, fomos e permanecemos unidos. Meus pais, obrigado pela vida. Meus Branquelos, obrigado pela convivência.

Ao meu eterno Anjo da guarda, meu eterno e querido Branquelo. Meu herói, meu guerreiro, minha inspiração.

À minha Branquela, que nossa união seja mais forte a cada dia.

Aos meus grandes amigos, que me apoiaram no momento mais difícil da minha vida, sempre estendendo o ombro amigo, quando precisei chorar. E nos momentos alegres, em que sorrirmos com a vida. A gente se entende.

Aos colegas e amigos de pesquisa e trabalho, que contribuíram para essa etapa na minha vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da UFJF, pela oportunidade oferecida.

Ao Departamento de Matemática da UFJF, pela oportunidade e ajuda prestada quando necessária.

Aos meus orientadores, Prof. Helio e Prof. Heder, meu agradecimento por aceitarem este desafio e compartilharem seus conhecimentos e mais ainda minha eterna gratidão, por compreenderem e me apoiarem nessa etapa difícil que a vida me reservou.

Enfim, agradeço a todos que estiveram comigo nessa caminhada.

*“I open my eyes, each morning I
rise to find the truth I know that
is there I’m lucky to breathe, I’m
lucky to feel I’m glad to wake up,
I’m glad to be here With all of this
world, and all of it’s pain all of
it’s lies, and all of its let downs
I still feel a sense of freedom So
glad I’m around”*

(Soldiers of Jah Army)

RESUMO

Meta-heurísticas têm sido frequentemente empregadas na resolução de problemas de otimização. Em particular, pode-se destacar a Evolução Diferencial (DE), que vem sendo aplicada com sucesso em situações onde o espaço de busca é contínuo. Apesar das vantagens dessas técnicas, elas precisam de adequações para tratar as restrições, que comumente limitam o espaço de busca em problemas reais de otimização. Nesse trabalho, uma modificação na DE é proposta a fim de tratar as restrições lineares de igualdade do problema. O método proposto, denotado aqui por DELEqC, gera uma população inicial de soluções candidatas que é factível em relação às restrições lineares de igualdade e gera os novos indivíduos sem utilizar o operador padrão de cruzamento. Com isso, pretende-se gerar novas soluções que também sejam viáveis quanto a esse tipo de restrição. O procedimento proposto de geração de indivíduos e manutenção da factibilidade da população é direto quando restrições lineares de igualdade são consideradas, mas requer o uso de variáveis de folga quando há desigualdades lineares no problema. Caso o problema de otimização envolva restrições não-lineares, o seu tratamento é feito aqui através de uma técnica de penalização adaptativa (APM) ou por meio de um esquema de seleção (DSS). O procedimento proposto é aplicado a problemas disponíveis na literatura e os resultados obtidos são comparados àqueles apresentados por outras técnicas de tratamento de restrições. A análise de resultados indica que a proposta apresentada encontrou soluções competitivas em relação às outras técnicas específicas para o tratamento de restrições de igualdade lineares e melhores do que as alcançadas por estratégias comumente adotadas em meta-heurísticas.

Palavras-chave: Otimização, Restrições lineares de igualdade, Evolução diferencial.

ABSTRACT

Metaheuristics have been used to solve optimization problems. In particular, we can highlight the Differential Evolution (DE), which has been successfully applied in situations where the search space is continuous. Despite the advantages of those techniques, they require adjustments in order to deal with constraints, which commonly restrict the search space in real optimization problems. In this work, a change in the DE is proposed in order to deal with the linear equality constraints of the problem. The proposed method, here denoted by DELEqC, generates an initial population of candidate solutions, which are feasible with respect to the linear equality constraints, and generates new individuals without the standard crossover operation. The idea is to generate new solutions that are also feasible with respect to this kind of constraint. The proposed procedure for generating individuals and maintaining the feasibility of the population is straightforward when linear equality constraints are considered, but requires the use of slack variables when linear inequalities are present. If the optimization problem involves nonlinear constraints, their treatment is done here using an adaptive penalty method (APM), or by means of a selection scheme (DSS). The proposed procedure is applied to problems available in the literature and the results obtained are compared to those presented by other constraint handling techniques. The analysis of results indicates that the presented proposal found competitive solutions in relation to other specific techniques for the treatment of linear equality constraints and better than those achieved by strategies commonly adopted in metaheuristics.

Keywords: Optimization, Linear equality constraints, Differential evolution.

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	Otimização Matemática	17
2.1	Tratamento das Restrições Lineares	19
2.2	Variáveis de Folga	22
2.3	Algoritmos de Otimização	23
2.3.1	<i>Algoritmos Determinísticos</i>	23
2.3.2	<i>Algoritmos Estocásticos</i>	23
3	Evolução Diferencial	25
3.1	Operadores	25
3.1.1	<i>Mutação</i>	25
3.1.2	<i>Cruzamento</i>	26
3.1.3	<i>Seleção</i>	28
3.1.4	<i>Variantes do Algoritmo DE</i>	29
4	A Proposta - DELEqC	30
4.1	DELEqC - <i>Differential Evolution for Linear Equality Constraints</i>	31
5	Métodos de Penalização	33
5.1	Penalização Estática	34
5.2	Penalização Dinâmica	34
5.3	Penalização Adaptativa	35
5.3.1	<i>Método de Penalização Adaptativa - APM</i>	35
5.4	Esquema DSS	37
6	Experimentos Numéricos	38
6.1	Perfis de Desempenho	38
6.2	Otimização com Restrições Lineares de Igualdade	39
6.2.1	<i>Problemas-Teste</i>	40
6.2.2	<i>Resultados Experimentais</i>	43

6.3	Erro Numérico	57
6.4	Otimização com Restrições Lineares de Igualdade e de Limitantes .	64
6.4.1	<i>Problemas-Teste</i>	64
6.4.2	<i>Resultados Experimentais</i>	66
6.5	Otimização com Restrições Lineares de Desigualdade com Inserção de Variáveis de Folga e de Limitantes	67
6.5.1	<i>Problema Teste</i>	68
6.5.2	<i>Resultados Experimentais</i>	69
6.6	Otimização com Restrições Lineares de Igualdade, Restrições Não- Lineares e Limitantes	70
6.6.1	<i>Problemas Testes</i>	70
6.6.2	<i>Resultados Experimentais</i>	73
7	Conclusão.....	76

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Projeção da solução do sistema linear no núcleo, retirado e adaptado de (Friedlander, 1994)	18
3.1	Exemplo do funcionamento do operador mutação do Algoritmo DE. Retirado de (Krempser, 2014).	27
3.2	Função-Objetivo Quadrática. (a)Distribuição espacial da população na geração $t = 1$ (b)Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 1$. Retirado de (Guimarães, 2009)	27
3.3	Função-Objetivo Quadrática. (a)Distribuição espacial da população na geração $t = 10$ (b)Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 10$. Retirado de (Guimarães, 2009)	28
3.4	Função-Objetivo Quadrática. (a)Distribuição espacial da população na geração $t = 20$ (b)Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 20$. Retirado de (Guimarães, 2009)	28
5.1	Exemplo da função \bar{f} . Retirado e adaptado de (Barbosa e Lemonge, 2008). . .	37
6.1	Perfil de desempenho utilizando o melhor valor encontrado referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.	45
6.2	Perfil de desempenho utilizando a média dos valores encontrados referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.	45
6.3	Perfil de desempenho utilizando o melhor resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).	47
6.4	Perfil de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb). . .	48
6.5	Perfil de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$). . .	49
6.6	Perfil de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$). . .	52
6.7	Perfil de desempenho utilizando o melhor resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).	54

6.8	Perfil de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).	55
6.9	Perfil de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).	55
6.10	Perfil de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).	57
6.11	Curvas de Nível da Função Objetivo. As cores claras indicam as regiões de mínimos da FO.	59
6.12	Valores iniciais gerados aleatoriamente no intervalo $[0, 3] \times [0, 3]$	59
6.13	População inicial viável (em relação à restrição linear de igualdade) gerada a partir dos pontos gerados aleatoriamente.	60
6.14	População inicial viável (em relação à restrição linear de igualdade) gerada a partir dos pontos aleatórios apresentados (“zoom”).	60
6.15	Comportamento da população na geração 50 para o problema 6.5.	61
6.16	Comportamento da população na geração 100 para o problema 6.5.	61
6.17	Comportamento da população na geração 150 para o problema 6.5.	62
6.18	Comportamento da população na geração 200 para o problema 6.5.	62
6.19	Comportamento da população na geração 250 para o problema 6.5.	63
6.20	Perfil de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 á 19.	74
6.21	Perfil de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.	74

LISTA DE TABELAS

6.1	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor valor encontrado referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.	44
6.2	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos valores encontrados referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.	46
6.3	Número de avaliações da função objetivo necessário para obter a solução conhecida com um erro absoluto menor ou igual a 10^{-4} . Os limitantes $[-1000; 1000]$ foram adotados para todos os problemas-teste . Para DE+APM e DE+DSS, a tolerância para restrições de igualdade adotada aqui é $\epsilon = 0.0001$	46
6.4	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).	47
6.5	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).	47
6.6	Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).	50
6.7	Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).	51
6.8	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).	52
6.9	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).	52
6.10	Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).	53

6.11	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).	54
6.12	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).	54
6.13	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).	54
6.14	Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).	56
6.15	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).	57
6.16	Resultados dos problemas 12 e 13, com 100 execuções independentes.	67
6.17	Resultados do problema 14, com 100 execuções independentes.	69
6.18	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o melhor dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.	73
6.19	Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a média dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.	73
6.20	Resultados obtidos dos problemas 15 à 19, com 100 rodadas independentes.	75

1 Introdução

Problemas de otimização restrita são comuns em muitas áreas e devido à crescente complexidade das aplicações, meta-heurísticas inspiradas na natureza, e algoritmos evolutivos em particular, estão em geral se tornando cada vez mais populares. Isso é devido ao fato de que eles podem ser facilmente aplicados a situações em que a função objetivo e/ou restrições não são conhecidas como funções explícitas das variáveis de decisão, facilitando o cálculo da função objetivo e verificação das restrições durante a busca pelo ótimo.

Como os operadores de movimento não são geralmente ligados às restrições (ou seja, quando operando sobre os indivíduos viáveis eles não necessariamente geram descendência viável), as meta-heurísticas em geral devem ser equipadas com uma técnica de tratamento de restrições. Em situações mais simples, técnicas de reparo (Salcedo-Sanz, 2009), operadores especiais de movimento (Schoenauer e Michalewicz, 1996) ou decodificadores especiais (Koziel e Michalewicz, 1998) podem ser projetados para assegurar que todas as soluções candidatas geradas sejam viáveis.

A presente dissertação se concentrará na obtenção de soluções que satisfaçam todas as restrições lineares de igualdade (na forma $Ex = c$). Quaisquer restrições restantes presentes no problema podem ser tratadas com o uso de técnicas de tratamento de restrições disponíveis na literatura (Barbosa e Lemonge, 2002; Mezura-Montes e Coello, 2008; Deb, 2000).

Inicialmente, uma abordagem possível para o problema de otimização com restrições lineares de igualdade, apresentada no Capítulo 6.2, foi a adotada no sistema GENOCOP (Michalewicz e Janikow, 1996), onde as restrições lineares de igualdade são utilizadas para eliminar algumas das variáveis, as quais são reescritas como uma função das variáveis restantes, reduzindo assim o número de variáveis no problema. Como resultado, qualquer restrição de desigualdade linear presente no problema deverá ser adequadamente modificada. Uma outra ideia é a utilização de um mapeamento (dito *homomorphous*) (Koziel e Michalewicz, 1999a), que transforma um espaço limitado por $Ex = c$ em um espaço que não só é totalmente sem restrições, mas também de menor dimensionalidade (Monson e Seppi, 2005). Em (Paquet e Engelbrecht, 2007) duas modificações da técnica

de otimização por enxame de partículas (PSO) foram propostas para tratar restrições lineares de igualdade: LPSO e CLPSO. A técnica LPSO parte de uma população inicial viável e, em seguida, mantém a viabilidade modificando as fórmulas do PSO padrão para a velocidade da partícula. A técnica CLPSO tenta melhorar algumas deficiências observadas na LPSO e muda a equação para a melhor partícula no enxame de modo que ela possa explorar o domínio, usando um vetor de velocidade aleatória no espaço nulo de $Ex = c$, isto é, este vetor de velocidade mantém a melhor partícula viável em relação às restrições lineares de igualdade .

Nessa dissertação, uma modificação da técnica de evolução diferencial, denotada aqui por DELEqC (Barbosa *et al.*, 2015), é proposta a fim de tratar exatamente as restrições lineares de igualdade presentes nos problemas de otimização contínua que podem também incluir igualdades não-lineares e desigualdades adicionais. Estas, por sua vez, são possíveis de serem tratadas via técnicas existentes de manuseio de restrições, como por exemplo o APM (Barbosa e Lemonge, 2002) e o DSS (Deb, 2000). A partir de uma população que é factível no que diz respeito às restrições lineares de igualdade, a viabilidade é mantida utilizando um esquema adequado de mutação ao longo do processo de busca, sem a necessidade do operador de cruzamento.

A presente dissertação está dividida em 7 Capítulos, incluindo esta introdução que contem uma visão geral sobre o tema. No Capítulo 2 a otimização restrita é apresentada e discutida juntamente com conceitos e definições acerca dos problemas de otimização. No Capítulo 3 é apresentada a técnica proposta nesta dissertação, DELEqC. Já no Capítulo 4 é apresentado o algoritmo Evolução Diferencial no qual a modificação proposta é feita. No Capítulo 5 serão discutidos os métodos de penalização, com foco no Método de Penalização Adaptativa (APM), e o Critério de Seleção de Deb (DSS). No Capítulo 6 são apresentados e analisados os experimentos numéricos, que incluem problemas de otimização encontrados na literatura. Uma análise detalhada dos resultados é feita através dos chamados Perfis de Desempenho (*Performace Profiles*). Finalizando a dissertação, no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais, conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 Otimização Matemática

Em diversas áreas do conhecimento como ciências, engenharias e economia, existem modelos matemáticos que originam problemas de otimização e, assim, requerem métodos numéricos para sua solução. Na medida em que os modelos se tornam mais complexos, novas metodologias devem ser desenvolvidas para a resolução dos mesmos.

Um modelo matemático geral muito utilizado para problemas de otimização restrita se escreve como

$$\min \quad f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (2.1)$$

$$\text{s.a :} \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, p \quad (2.3)$$

$$x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

onde $f(x)$ representa a função objetivo a ser minimizada. As restrições pertinentes ao modelo incluem restrições de igualdade (2.2), restrições de desigualdade (2.3) e limites inferiores e superiores para as variáveis (2.4). As restrições de igualdade em (2.2) podem ser transformados em restrições de desigualdade, como as em (2.3), utilizando-se uma tolerância $\epsilon > 0$, obtendo-se assim:

$$|h_j(x)| - \epsilon \leq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

A técnica a ser proposta tem como finalidade a resolução dos problemas de minimização com restrições lineares de igualdade, do tipo $Ex = c$, onde $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 \leq m < n$, e E com posto igual a m .

$$\min \quad f(x) \quad (2.5)$$

$$\text{s.a :} \quad Ex = c \quad (2.6)$$

Dado o sistema $Ex = c$, pode-se considerar o conjunto de soluções do sistema homogêneo $Ex = 0$, que é denominado Núcleo de E e denotado aqui por $Ker(E)$ (do inglês *kernel*). A dimensão de $Ker(E)$ é $n - m$.

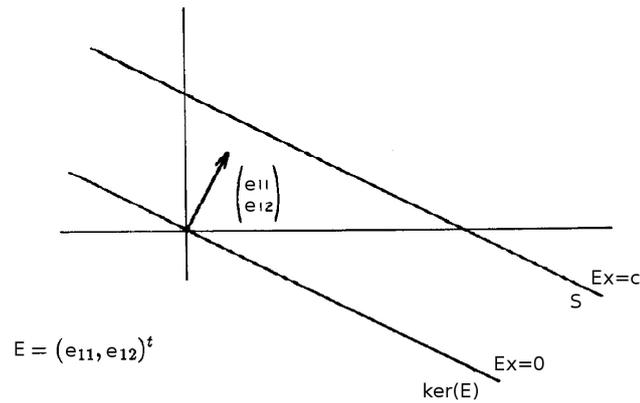


Figura 2.1: Projeção da solução do sistema linear no núcleo, retirado e adaptado de (Friedlander, 1994)

Na Figura (2.1), nota-se que o $Ker(E)$ é paralelo a S e passa pela origem. As linhas da matriz E são ortogonais ao $Ker(E)$, ou seja, o produto interno é zero. Por hipótese inicial, o posto da matriz E é m , logo tem-se m linhas que formam um conjunto de vetores linearmente independentes (LI).

Denotando a imagem de E^T como $Im(E^T)$, é sabido que o espaço vetorial \mathbb{R}^n é soma direta dos subespaços $Ker(E)$ e $Im(E^T)$ (Boldrini, 1986), ou seja,

$$\mathbb{R}^n = Ker(E) \oplus Im(E^T),$$

com

$$Ker(E) \cap Im(E^T) = \emptyset$$

Sejam \tilde{x} uma solução do sistema $Ex = c$ e $\bar{v} \in Ker(E)$. Segue-se que $x = \tilde{x} + \alpha\bar{v}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, também é uma solução de $Ex = c$. Assim, para qualquer vetor $\bar{v} \in Ker(E)$ tem-se uma direção no espaço em que se pode mover, a partir de uma solução viável, sem sair da região factível. Assim pode-se concluir que $Ker(E)$ é o conjunto de direções viáveis/factíveis em S .

2.1 Tratamento das Restrições Lineares

Problemas envolvendo exclusivamente restrições lineares de igualdade podem ser reescritos eliminando variáveis. O GENOCOP (Michalewicz e Janikow, 1996) resolve problemas diminuindo o número de variáveis do problema. A mesma estratégia também pode ser verificada em (Pina e Madeira, 2012).

Seja o problema de otimização envolvendo uma função não-linear em que as restrições são todas lineares de igualdade:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & Ex = c \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto m e $m < n$.

Rearranja-se, se necessário, as colunas de E , escrevendo $EP = [B \ N]$, onde B é uma matriz de ordem m inversível, N é $m \times (n - m)$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação que move as colunas LI's de E para as primeiras colunas da matriz. Uma solução

$$P^T x = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

de $Ex = c$ é dita ser uma solução básica do sistema. Neste caso, B é chamada matriz básica, e a matriz N é chamada matriz não-básica. As componentes $X_B \in \mathbb{R}^m$ são chamadas variáveis básicas e as componentes de $X_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ de variáveis não-básicas.

Nota-se que de fato uma solução básica é solução do sistema $Ex = c$ pois

$$c = Ex \tag{2.9}$$

$$= EPP^T x \tag{2.10}$$

$$= (EP)(P^T x) \tag{2.11}$$

$$= [B \ N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$= BX_B + NX_N \tag{2.13}$$

Da Equação (2.13), pode-se deduzir que as variáveis básicas são dadas por

$$X_B = B^{-1}c - B^{-1}NX_N. \quad (2.14)$$

A suposição de que E tenha posto m não é restritiva, pois desde que o sistema admita solução, podemos eliminar as restrições que são combinações lineares de outras, obtendo assim, somente restrições LI's.

Escolhendo um valor qualquer de X_N , então pode-se definir X_B utilizando a Equação (2.14). Após a reformulação das variáveis do problema apresentado na Equação (2.7) tem-se equivalentemente um problema irrestrito que segue abaixo, onde f é a função objetivo

$$\min f\left(P \begin{bmatrix} B^{-1}c - B^{-1}NX_N \\ X_N \end{bmatrix}\right). \quad (2.15)$$

Para melhor entendimento do processo, será apresentado o exemplo retirado de (Friedlander, 1994).

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{sen}(x_1 + x_2) + x_3^2 + \frac{1}{3}\left(x_4 + x_5^4 + \frac{x_6}{2}\right) \\ \text{sujeito a:} \quad & 8x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_4 + 6x_5 + 4x_6 = -4 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim, $Ex = c$ é

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 & 9 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Reorganizando as colunas de E utilizando a matriz P de permutação tem-se a seguinte

modificação das componentes do vetor x como $x^T = (x_3, x_6, x_1, x_2, x_4, x_5)^T$, obtendo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

assim,

$$EP = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 & 9 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A matriz base $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é diagonal, e é fácil calcular sua inversa, mas na prática o cálculo da inversa não é realizada pelo alto custo computacional, mas o sistema linear é resolvido. Usando a Equação (2.14), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 8 & -6 & 9 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Substituindo na Equação (2.16) os novos valores das variáveis x_3 e x_6 na Equação (2.18) obtém-se o problema irrestrito

$$\min_{x_1, x_2, x_4, x_5} \text{sen}(x_1 + x_2) + (6 - 8x_1 + 6x_2 - 9x_4 - 4x_5)^2 + \frac{1}{3} \left[x_4 + x_5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{4}x_5 \right) \right] \quad (2.19)$$

2.2 Variáveis de Folga

Em um problema de otimização

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\
 \text{s.a :} \quad & Ex \leq c \\
 & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \\
 & h_j(x) = 0, \quad j = p + 1, \dots, m \\
 & x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

em que há restrições lineares do tipo $Ex \leq c$, com a matriz E de ordem $m \times n$ e posto m é possível transformar tais restrições de desigualdade em igualdade através da introdução de variáveis de folga, não-negativas, $s \in \mathbb{R}_+^m$:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\
 \text{s.a :} \quad & Ex + s = c \\
 & s_l \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \\
 & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 & h_j(x) = 0, \quad j = p + 1, \dots, m \\
 & x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Exemplo 2. Seja o problema retirado de (Bazaraa *et al.*, 2004)

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -5x_1 - 20x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 3x_1 + 3x_2 \leq 160 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 200 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

É possível então re-escrevê-lo na forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -5x_1 - 20x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 3x_1 + 3x_2 + s_1 = 160 \\
 & x_1 + 3x_2 + s_2 = 200 \\
 & s_1, s_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

As variáveis adicionais s_1 e s_2 são as variáveis de folga do problema.

2.3 Algoritmos de Otimização

Os algoritmos usados para resolução de um problema de otimização podem ser classificados como determinísticos ou estocásticos (Kargupta e Goldberg, 1995).

2.3.1 Algoritmos Determinísticos

Os algoritmos determinísticos são aqueles em que dada uma determinada entrada, sempre será produzida a mesma saída. A solução é dependente do ponto de partida fornecido e pode-se provar a convergência destes métodos para uma solução ótima, porém sem evidências de que ela é a global (Izmailov e Solodov, 2014). Os algoritmos clássicos de otimização, que dependem do conhecimento das derivadas da função objetivo, são exemplos de algoritmos determinísticos. Os melhores resultados destes métodos são para funções deriváveis e convexas.

Os métodos determinísticos possuem uma grande vantagem que é o baixo número de avaliações da função objetivo.

Alguns métodos clássicos para resolução são: Método do Gradiente, Método de Newton, Métodos Quase-Newton, entre outros (Izmailov e Solodov, 2014; Friedlander, 1994).

2.3.2 Algoritmos Estocásticos

Os algoritmos conhecidos como estocásticos ou probabilísticos têm como principal característica a busca pelo ótimo através de regras de probabilidade trabalhando de

maneira “aleatória”. Esses métodos utilizam apenas os valores da função objetivo, podendo não requerer informações sobre suas derivadas o que pode ser uma alternativa como um método para estes casos.

Estas técnicas ganharam popularidade com a evolução dos computadores, já que requerem um grande número de avaliações da função objetivo e das restrições. Isto é necessário para que se dê chance ao método de explorar o espaço de busca onde está contida a solução ótima. Alguns exemplos de algoritmos estocásticos são: Algoritmos Genéticos (Holland, 1973), Enxame de Partículas (Eberhart e Kennedy, 1995), Evolução Diferencial (Storn e Price, 1995), dentre outros.

O Algoritmo Genético (AG), é inspirado na maneira como o darwinismo (Darwin, 1871) explica o processo de evolução das espécies. O algoritmo foi desenvolvido por John Holland na década de 70 (Holland, 1973, 1975).

Um Algoritmo Genético usa uma nomenclatura muito próxima da área da genética para definir seus componentes. Uma população inicial de cromossomos é gerada e cada cromossomo representa uma possível solução para o problema de otimização a ser estudado. Cada cromossomo/solução candidata é avaliado e recebe um valor de aptidão. Os cromossomos são selecionados para a próxima geração e transferem suas características para seus descendentes através da reprodução (cruzamento e mutação). Enquanto não for satisfeito o critério de parada, o processo é repetido.

O método de otimização por enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization - PSO*) foi desenvolvido por Eberhart e Kennedy (1995) e é inspirado no comportamento social de bandos de pássaros. Assim como outros algoritmos evolutivos, o PSO é de simples implementação, convergência rápida, e com poucos parâmetros a serem ajustados (Kar *et al.*, 2012).

Por ter sido o método aqui adotado, a evolução diferencial será abordada com mais detalhes no Capítulo seguinte.

3 Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial (em inglês: Differential Evolution - DE) é um algoritmo de otimização simples e eficiente que foi proposto por Rainer Storn e Kenneth Price em 1995 (Storn e Price, 1995). Trata-se de um método estocástico de busca que surgiu inicialmente com o intuito de resolver um problema de ajuste polinomial de Chebychev.

O DE é um método, que além de ser de fácil implementação, tem ótimo desempenho numa grande classe de problemas, como relatado por Plagianakos *et al.* (2008). Mostra-se eficaz para funções objetivo que não são diferenciáveis ou convexas e tem facilidade na busca do ótimo com populações pequenas (Cheng e Hwang, 2001).

O DE pode ser descrito como uma manipulação de indivíduos que representam as soluções candidatas. No decorrer das gerações, essas soluções candidatas sofrem modificações de *mutação* e *cruzamento*, onde são geradas novas soluções candidatas, e logo após é feita a *seleção* e o ciclo se repete.

No Algoritmo 1 é apresentado um pseudo-código básico do DE.

3.1 Operadores

3.1.1 Mutação

No operador *mutação* cada indivíduo é modificado através da adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. São gerados então os vetores doadores ou modificados.

O operador de mutação é definido por:

$$v_{novo} = v_{base} + F(v_1 - v_2)$$

onde v_{novo} é o novo indivíduo gerado e F determina a ponderação da diferença entre v_1 e v_2 . O vetor v_{base} é o vetor base, que indica onde é realizada a perturbação. Esses três vetores são escolhidos de forma aleatória. Na Figura 3.1, pode-se verificar o funcionamento do operador mutação.

Algoritmo 1: Algoritmo DE

```

input : NP (tamanho da população), F (ponderação da mutação), CR (taxa de
recombinação)

1 Cria_População_Inicial_Aleatória(NP);
2 Avalia_População  $f(\vec{x}_{i,G})$ ; /*  $\vec{x}_{i,G}$  é um indivíduo da população */
3 enquanto condição de parada não satisfeita faça
4   para  $i \leftarrow 1$  to NP faça
5     Seleciona_Aleatoriamente( $r_1, r_2, r_3$ ); /*  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$  */
6      $jRand \leftarrow \text{RandInt}(1, n)$ ; /*  $n$  é o número de variáveis */
7     para  $j \leftarrow 1$  to  $n$  faça
8       se  $\text{Rand}(0, 1) < CR$  ou  $j = jRand$  então
9         |  $u_{i,j,G+1} = x_{r_3,j,G} + F \cdot (x_{r_1,j,G} - x_{r_2,j,G})$ ;
10        fim se
11        senão
12          |  $u_{i,j,G+1} = x_{i,j,G}$ ;
13        fim se
14        fim para
15        se  $f(\vec{u}_{i,G+1}) \leq f(\vec{x}_{i,G})$  então
16          |  $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{u}_{i,G+1}$ ;
17        fim se
18        senão
19          |  $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{x}_{i,G}$ ;
20        fim se
21      fim para
22 fim enquanto
23 Retorna_Melhor_Indivíduo;

```

Para melhor entendimento do operador mutação do algoritmo evolução diferencial, segue nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 um exemplo do operador durante algumas gerações.

3.1.2 Cruzamento

Cruzamento, ou *crossover* em inglês, é introduzido na população para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação (Price, 1999). Assim, os membros da população e os vetores mutantes trocam atributos para formar o vetor modificado.

O vetor experimental u_i^j é formado pela seguinte equação

$$u_i^j = \begin{cases} v^j + F(v_{r_1}^j - v_{r_2}^j) & \text{se } r_i \leq CR. \\ v_i^j, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde r_i é um número gerado aleatoriamente e CR é um valor real determinado dentro

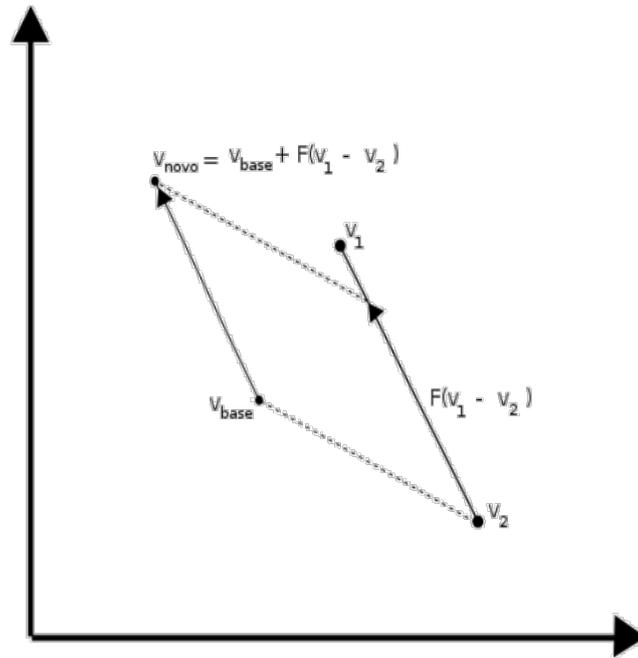


Figura 3.1: Exemplo do funcionamento do operador mutação do Algoritmo DE. Retirado de (Krempser, 2014).

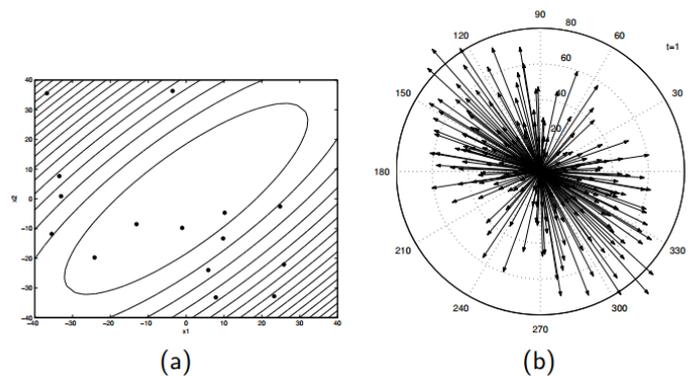


Figura 3.2: Função-Objetivo Quadrática. (a) Distribuição espacial da população na geração $t = 1$ (b) Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 1$. Retirado de (Guimarães, 2009)

de um intervalo e é informado pelo usuário, v_i^j são as componentes do vetor alvo que pertencente à população, o qual competirá com o novo vetor gerado. Para garantir a realização da mutação em ao menos uma variável, seleciona-se, anteriormente à geração de um novo indivíduo, um dos componentes do mesmo, denominado $jRand$, onde a mutação é realizada independentemente da probabilidade CR.

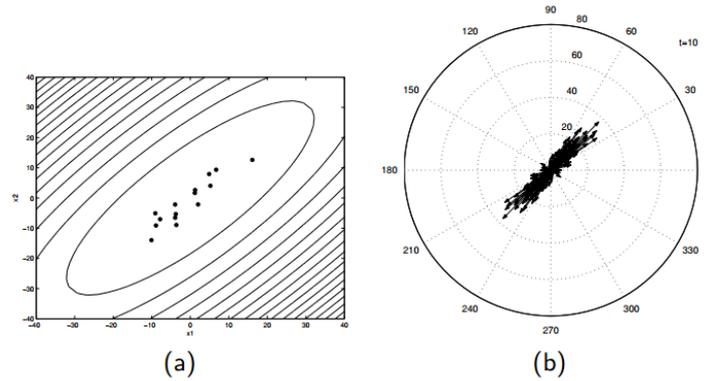


Figura 3.3: Função-Objetivo Quadrática. (a) Distribuição espacial da população na geração $t = 10$ (b) Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 10$. Retirado de (Guimarães, 2009)

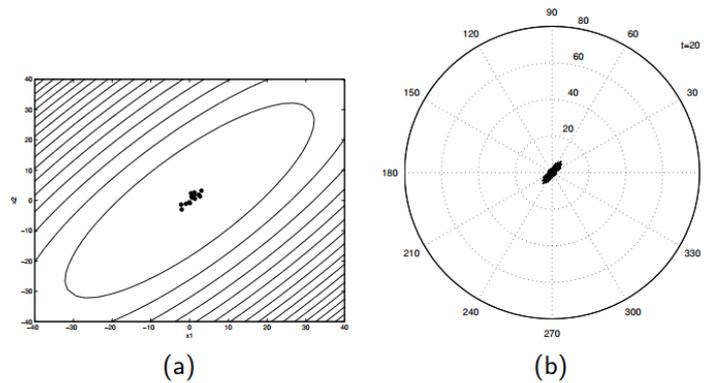


Figura 3.4: Função-Objetivo Quadrática. (a) Distribuição espacial da população na geração $t = 20$ (b) Distribuição dos vetores diferenciais na geração $t = 20$. Retirado de (Guimarães, 2009)

3.1.3 Seleção

O operador seleção tem como finalidade selecionar os melhores indivíduos. Este operador visa simplesmente escolher os indivíduos com melhores características que serão preservados para a próxima geração. Se a aptidão determinada através do cálculo da função objetivo do indivíduo i da população corrente ($\vec{x}_{i,G+1}$) é maior do que a aptidão do indivíduo i da população de cruzamento ($\vec{u}_{i,G+1}$), esse indivíduo passa para próxima geração com os melhores entre as duas populações, como mostra a Equação (3.2).

$$\vec{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \vec{u}_{i,G+1}, & \text{se } f(\vec{u}_{i,G+1}) \leq f(\vec{x}_{i,G}). \\ \vec{x}_{i,G+1} = \vec{x}_{i,G}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.4 Variantes do Algoritmo DE

A forma como serão aplicadas as diferenças, a maneira pela qual os indivíduos da população são selecionados, e a distribuição de recombinação determinam as variantes do algoritmo DE.

A versão básica do algoritmo DE utiliza a seleção aleatória com probabilidade uniforme do vetor base, um vetor diferença para o operador mutação, e recombinação entre a solução corrente e um vetor mutante correspondente.

Um dos pontos mais estudados para o aperfeiçoamento da DE diz respeito à adaptação dos seus parâmetros, em especial a amplitude da diferença utilizada na operação de mutação. As variantes serão descritas seguindo o padrão: DE/mecanismo-de-seleção/número-de-diferenças/ modelo-de-recombinação; onde tem-se que:

mecanismo-de-seleção: indica de que forma os vetores são selecionados, podendo ser “rand” (vetor da população escolhido aleatoriamente) ou “best” (vetor de melhor custo da população). No algoritmo apresentado foi usado “rand”.

número-de-diferenças: indica o número de pares de vetores utilizados na subtração, ou seja, o número de diferenças ponderadas realizadas. No algoritmo apresentado apenas uma diferença é aplicada e indica-se, portanto, o valor 1.

modelo-de-recombinação: indica como o operador cruzamento é aplicado. Pode ser de forma exponencial (exp), ou binomial (bin). No algoritmo foi utilizado o modelo de recombinação de distribuição binomial, “bin”.

4 A Proposta - DELEqC

O problema considerado aqui é encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a função objetivo $f(x)$ sujeita a restrições lineares de igualdade do tipo $Ex = c$ com ($m < n$), além de p restrições de desigualdade $g_i(x) \leq 0$ e q restrições de igualdade $h_j(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\
 \text{sujeito a} \quad & Ex = c \\
 & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, q \\
 & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ao usar meta-heurísticas, as restrições de igualdade são geralmente relaxadas para $|h_j(x)| \leq \epsilon$ onde o parâmetro $\epsilon > 0$ deve ser convenientemente definido pelo usuário. Soluções candidatas viáveis com respeito à todas as restrições de igualdade são muito difíceis de ser obtidas.

Sempre que o indivíduo x viola a j -ésima restrição se define a violação de restrição correspondente, $v_j(x) = |h_j(x)| - \epsilon$ que são acumuladas para o indivíduo x definindo $v(x) = \sum_j v_j(x)$.

A busca em satisfazer todas as restrições lineares de igualdade é uma melhoria importante em um algoritmo para otimização com restrições não-lineares de igualdade e desigualdade, merecendo, portanto, ser estudada.

Assume-se aqui que as linhas de E são linearmente independentes o que acarreta $\text{posto}(E) = m$. Uma solução candidata $x_1 \in \mathbb{R}^n$ é dita viável em relação às restrições lineares de igualdade se $x_1 \in \mathcal{E}$, onde \mathcal{E} denota o conjunto viável:

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ex = c\}.$$

Um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção viável no ponto $x \in \mathcal{E}$ se $x + d$ é viável: $E(x + d) = c$. Daqui resulta que a direção viável d deve satisfazer $Ed = 0$, ou seja, que qualquer direção viável pertence ao espaço nulo da matriz E , $\text{Ker}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ex = 0\}$.

Agora, dados dois vetores viáveis x_1 e x_2 é fácil ver que $d = x_1 - x_2$ é uma direção viável, já que $E(x_1 - x_2) = 0$.

4.1 DELEqC - *Differential Evolution for Linear Equality Constraints*

O objetivo da proposta DELEqC é iniciar a população com soluções factíveis para as restrições lineares de igualdade e manter esta viabilidade através de operadores adequados.

Assim, para resolver o problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & Ex = c \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, q \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

a proposta DELEqC, requer que exista pelo menos uma restrição linear de igualdade.

Com isso, dado o sistema $Ex = c$ onde $E_{m \times n}$, devemos calcular a matriz $M = EE^T$, em que $E_{n \times m}^T$ é a transposta de E e a matriz M é quadrada de ordem m .

Para resolução computacional do sistema $Ex = c$ deve ser utilizado algum método de resolução de sistemas lineares, aqui foi utilizado para decompor a matriz M a decomposição LU com pivotamento.

Após a decomposição, é gerado uma solução x_0 viável em relação às restrições lineares de igualdade, ou seja, $Ex_0 = c$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_0 &= E^T M^{-1} c = E^T (EE^T)^{-1} c \\ M^{-1} c &= y \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Desta forma, basta resolver o sistema $My = c$. Como M já foi decomposta em $M = LU$, podemos obter $x_0 = E^T y \in \mathbb{R}^n$.

Agora, deve-se gerar um vetor $x^r = x_0 + P_{Ker(E)} d^r$ com $d^r \in \mathbb{R}^n$ aleatório e

$$P_{Ker(E)} = I - E^T (EE^T)^{-1} E = I - E^T M^{-1} E$$

é o operador de projeção sobre o núcleo da matriz E .

Logo,

$$\begin{aligned} x^r &= x_0 + (I - E^T M^{-1} E) d^r \\ &= x_0 + d^r - \underbrace{E^T M^{-1} E d^r}_{v^r} \end{aligned}$$

Calculando v^r ,

$$v^r = E^T M^{-1} E d^r = E^T \underbrace{M^{-1} E d^r}_{z^r}_{u^r}$$

Assim, os indivíduos viáveis gerados aleatoriamente que satisfaçam as restrições lineares do problema são,

$$x^r = x_0 + d^r - v^r \text{ ou } x^r = x_0 - d^r + v^r.$$

A proposta DELEqC, evolução diferencial para restrições lineares de igualdade, é definida como DE/rand/1/bin, equipada com o procedimento de geração da população inicial viável no Algoritmo 2 e executada sem o operador de cruzamento usual da DE. Como todos os indivíduos gerados na população inicial são factíveis para as restrições lineares de igualdade e considerando as fórmulas do operador mutação do algoritmo DE, os vetores gerados sempre serão viáveis com a proposta DELEqC.

Algoritmo 2: Algoritmo - CreateInitialPopulation.

Entrada: NP (tamanho da população)

- 1 $M = EE^T$;
 - 2 Execute a decomposição LU: $M = LU$;
 - 3 Resolva $My = c$ ($Lw = c$ e $Uy = w$) ;
 - 4 $x_0 = E^T y$;
 - 5 **para** $i \leftarrow 1$ **até** NP **faça**
 - 6 $d \in \mathbb{R}^n$ é gerado aleatoriamente;
 - 7 $z = Ed$;
 - 8 Resolva $Mu = z$ ($Lw = z$ e $Uu = w$) ;
 - 9 $v = E^T u$;
 - 10 $x_i = x_0 + d - v$;
 - 11 **fim para**
-

5 Métodos de Penalização

Os problemas de otimização com restrições são abundantes e uma abordagem muito utilizada em algoritmos evolutivos para lidar com essas restrições é o uso de técnicas de penalização, onde o problema de otimização restrita é transformado num problema irrestrito (Friedlander, 1994).

As técnicas para lidar com restrições no âmbito das meta-heurísticas bio-inspiradas podem ser classificadas como interiores, quando apenas elementos viáveis pertencentes ao espaço de busca são considerados, ou como exteriores, quando ambos os elementos viáveis e inviáveis são utilizados durante o processo de busca. Na literatura, é possível encontrar várias publicações referentes a ambas as classes (Koziel e Michalewicz, 1999b; Potter *et al.*, 1992; Orvosh e Davis, 1994; Deb e Srivastava, 2012; Barbosa, 1999; Mezura-Montes e Coello, 2008).

Uma forma geral de uma função de penalização, pode ser escrita como (Mezura-Montes e Coello, 2008):

$$F(x) = f(x) + kp(x) \quad (5.1)$$

onde a função $F(x)$ é a nova função objetivo do problema irrestrito, $f(x)$ é a função objetivo original do problema, $p(x)$ é o valor da penalização referente à solução candidata x e k é o coeficiente de penalização definido pelo usuário. Para o cálculo de $p(x)$ pode-se usar a seguinte expressão:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n_g} r_j \max(0, g_j(x))^2 + \sum_{k=1}^{n_h} c_k |h_k(x)| \quad (5.2)$$

onde r_j e c_k são constantes positivas chamadas de fatores de penalização, n_g é o número de restrições de desigualdades e n_h é o número de restrições de igualdade.

Uma das dificuldades dos métodos de penalização é encontrar valores convenientes para os parâmetros de penalização. As técnicas de penalização podem ser ditas estáticas, dinâmicas ou adaptativas (Coello, 2002).

5.1 Penalização Estática

Nos métodos de penalização estática, os parâmetros de penalização são pré-fixados e não sofrem qualquer tipo de mudança durante a evolução do algoritmo. A implementação computacional desta técnica se destaca por ser simples, mas existe a desvantagem de que durante a evolução o coeficiente de penalização seja o mesmo.

Um exemplo da técnica de penalização estática foi proposto por Homaifar em 1994, onde o usuário define vários níveis de violação e um coeficiente de penalização deve ser utilizado para cada um destes níveis (Homaifar *et al.*, 1994).

5.2 Penalização Dinâmica

Nos métodos de penalização dinâmica, os valores dos parâmetros de penalização variam de acordo com o número da geração em que se encontra o processo evolutivo do algoritmo. Um exemplo de penalização dinâmica foi proposto por Joines e Houck (Joines e Houck, 1994), onde o cálculo da função aptidão segue a equação:

$$F(x) = f(x) + (C \cdot t)^\alpha \cdot SVC(\beta, x) \quad (5.3)$$

em que as constantes C , α e β são informadas pelo usuário e $SVC(\beta, x)$ é definida como:

$$SVC(\beta, x) = \sum_{i=1}^{n_g} D_i^\beta(x) + \sum_{j=1}^{n_h} D_j(x) \quad (5.4)$$

onde $D_i(x)$ e $D_j(x)$ são definidas pelas Equações (5.5) e (5.6), respectivamente:

$$D_i(x) = \begin{cases} 0, & g_i(x) \leq 0, & 1 \leq i \leq n_g \\ g_i(x), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$D_j(x) = \begin{cases} 0, & -\epsilon \leq |h_j(x)| \leq \epsilon, & 1 \leq j \leq n_h \\ |h_j(x)|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.6)$$

5.3 Penalização Adaptativa

Na penalização adaptativa, os parâmetros de penalização são atualizados ao longo do processo evolutivo de acordo com informações coletadas da população. Num exemplo da literatura, devido a Bean e Hadj-Alouane (Bean e Hadj-Alouane, 1992), a função aptidão é dada pela Equação (5.7) em que o fator $\lambda(t)$ é atualizado de acordo com a Equação 5.8.

$$F(x) = f(x) + \lambda(t) \left[\sum_{i=1}^{n_g} g_i^2(x) + \sum_{j=1}^{n_h} |h_j(x)| \right] \quad (5.7)$$

$$\lambda(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} \lambda(t), & \text{se } x^i \text{ for sempre viável} \\ \beta_2 \lambda(t), & \text{se } x^i \text{ for sempre inviável} \\ \lambda(t), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.8)$$

onde x^i é o melhor indivíduo das últimas gerações, com $\beta_1 \neq \beta_2$ e $\beta_1, \beta_2 > 1$. Para este método, o parâmetro de penalização $\lambda(t+1)$ diminui quando os melhores indivíduos das últimas gerações são viáveis, aumenta se esses indivíduos são inviáveis, ou não sofrem nenhuma alteração, em caso contrário.

5.3.1 Método de Penalização Adaptativa - APM

O Método de Penalização Adaptativa, APM (*Adaptive Penalty Method*), foi proposto por Barbosa e Lemonge (2002) para problemas de otimização restrita. Por não necessitar de nenhum parâmetro informado pelo usuário, nem conhecimento prévio do problema, baseia-se somente em informações da população, como a média da função objetivo e o nível em que cada restrição é violada, para o cálculo dos coeficientes de penalização.

A função de aptidão utilizada aqui para um problema de minimização é definida como (Lemonge e Barbosa, 2004):

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é factível.} \\ \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.9)$$

onde

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > \langle f(x) \rangle. \\ \langle f(x) \rangle, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.10)$$

em que $\langle f(x) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo da população atual. A variável $v_j(x)$ guarda o valor da violação do indivíduo x na restrição j e é definida por:

$$v_j(x) = \begin{cases} \max(g_j(x), 0), & \text{se a restrição } j \text{ for de desigualdade} \\ |h_j(x)|, & \text{se a restrição } j \text{ for de igualdade.} \end{cases} \quad (5.11)$$

O valor do parâmetro k_j é calculado por

$$k_j = \langle f(x) \rangle \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{l=1}^m [\langle v_l(x) \rangle]^2} \quad (5.12)$$

em que $\langle v_j(x) \rangle$ é a média dos valores da l -ésima restrição da população corrente e m é o número total de restrições penalizadas.

Para as restrições mais difíceis de serem atendidas, o parâmetro de penalização k_j assume valores mais altos.

A Figura 5.1, apresenta indivíduos de uma população. Dos indivíduos inactíveis representados por 1, 2, 3, 4, 5, 6, os indivíduos de número 1, 2, 3 e 4, que na figura são os de círculos abertos (\circ), possuem valores da função objetivo abaixo da média da função objetivo de toda a população. E que de acordo com a ideia do APM, o valor de $\bar{f}(x)$ é substituído pela média da função objetivo $\langle f(x) \rangle$ para as soluções encontradas.

Barbosa e Lemonge (2008) propuseram quatro variantes para a técnica APM que são: **APM Esporádico** (*APM-Spor*); **APM Esporádico com Acumulo das Violações** (*APM-Spor-Acum*); **APM Monotônico e Esporádico** (*APM-Mono-f*); **APM com Amortecimentos** (*APM-Damp*). Em experimentos numéricos, Barbosa e Lemonge (2008) concluíram que o APM original obteve uma maior frequência de melhores soluções, apesar dos valores comparados com as variantes não serem tão discrepantes.

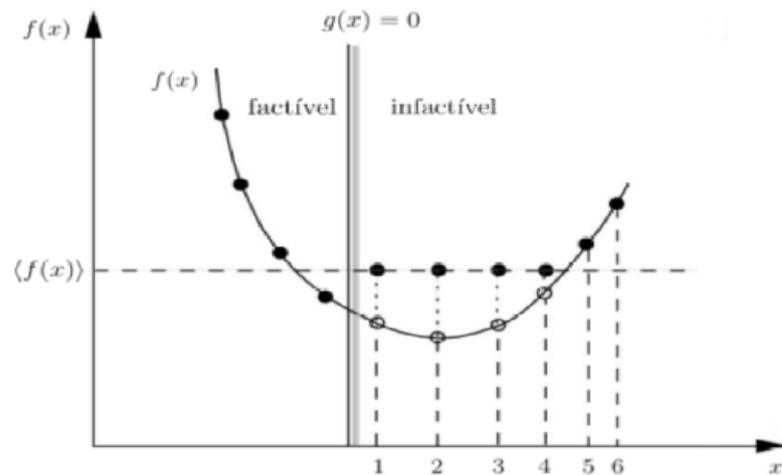


Figura 5.1: Exemplo da função \bar{f} . Retirado e adaptado de (Barbosa e Lemonge, 2008).

5.4 Esquema DSS

Uma técnica muito popular de tratamento de restrições é a proposta por (Deb, 2000), denotada aqui como DSS (*Deb's selection scheme*), e que impõe as condições apresentadas no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: ESQUEMA DSS

Entrada: Supondo que x_1 e x_2 sejam duas candidatas a solução.

Saída: Melhor solução candidata.

```

1 início
2   se  $x_1$  e  $x_2$  são factíveis então
3     | Escolhe-se a que tem o melhor valor da função objetivo.
4   fim se
5   se  $x_1$  ou  $x_2$  é infactível então
6     | Escolhe-se aquela que é factível.
7   fim se
8   se  $x_1$  e  $x_2$  são infactíveis então
9     | Seleciona-se a que possui o menor valor da soma de violações das restrições.
10  fim se
11 fim
12 retorna Melhor entre  $x_1$  e  $x_2$ 

```

6 Experimentos Numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados dos experimentos numéricos para problemas de otimização com restrições lineares de igualdade, para assim verificar o desempenho da proposta DELEqC. Para as outras restrições envolvidas no problema são usados o método de penalização adaptativa APM e o critério de seleção de Deb DSS.

A avaliação experimental de algoritmos não é trivial e apresenta algumas dificuldades, tais como (Dolan e Moré, 2002):

- a determinação de medidas de desempenho para avaliar os algoritmos;
- uma quantidade considerável de resultados nos conjuntos de problemas;
- a decisão de como representar e interpretar os resultados obtidos nos experimentos.

A comparação dos resultados da otimização dos problemas-teste foi realizada através de uma ferramenta conhecida como perfis de desempenho (em inglês, *Performance Profiles*).

6.1 Perfis de Desempenho

Os perfis de desempenho foram propostos por Dolan e Moré (2002) para facilitar a visualização e interpretação dos resultados obtidos em experimentos com grande quantidade de problemas-teste.

Considerando um conjunto P de problemas-teste p_j , com $j = 1, 2, \dots, n_p$, um conjunto de algoritmos a_i , com $i = 1, 2, \dots, n_a$ e $t_{p,a} > 0$ e uma métrica de desempenho a ser definida pelo usuário (como, por exemplo, tempo computacional), então razão de desempenho pode ser definida como:

$$r_{p,a} = \frac{t_{p,a}}{\min\{t_{p,a} : a \in A\}}. \quad (6.1)$$

O perfil de desempenho do algoritmo é definido como:

$$\rho_a(\tau) = \frac{1}{n_p} |\{p \in P : r_{p,a} \leq \tau\}| \quad (6.2)$$

onde $\rho_a(\tau)$ é a fração de problemas resolvidos pelo algoritmo com desempenho dentro de um fator τ do melhor desempenho obtido considerando todos os algoritmos.

Algumas propriedades em relação ao melhor desempenho do algoritmo podem ser observadas em (Barbosa *et al.*, 2010a):

- Quando $\tau = 1$, $\rho_a(\tau)$ é a fração de problemas em que o algoritmo apresenta melhor desempenho quando comparado com os demais algoritmos;
- Quando $\tau = \infty$, $\rho_a(\tau)$ representa a fração de problemas que o algoritmo consegue resolver;
- $\rho_a(1)$ é a porcentagem de problemas em que o algoritmo a tem melhor desempenho. Considerando dois algoritmos E e F , se $\rho_E(1) > \rho_F(1)$ então, o algoritmo E ganha em uma quantidade maior de problemas em P que o algoritmo F .

Uma extensão dessa ferramenta para trabalhar com algoritmos estocásticos foi proposta por Barreto *et al.* (2010) e ficou conhecida como perfil de desempenho probabilístico. A ideia era utilizar uma ferramenta que a princípio foi desenvolvida para ambientes determinísticos em algoritmos estocásticos, já que estes trazem variabilidade devido aos diferentes desempenhos nas suas diversas execuções. Outras aplicações envolvendo os perfis de desempenho em problemas com restrições, podem ser observadas nas referências (Barbosa *et al.*, 2010a) e (Bernardino *et al.*, 2011).

6.2 Otimização com Restrições Lineares de Igualdade

Inicialmente, a proposta DELEqC é aplicada aqui em problemas da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a :} \quad & Ex = c \end{aligned}$$

ou seja, aqueles que possuem somente restrições lineares de igualdade.

A fim de testar a proposta DELEqC e avaliar o seu desempenho, um conjunto de problemas-teste com restrições lineares de igualdade foi retirado da literatura. Os resultados obtidos são, então, comparados com os de processos alternativos disponíveis na literatura de meta-heurísticas como (Paquet e Engelbrecht, 2007) e (Monson e Seppi,

2005), bem como aqueles obtidos via técnicas de tratamento de restrições usualmente empregadas nas meta-heurísticas nas Seções (5.3.1) e (5.4). Para tanto, 100 rodadas independentes foram executadas em todos os testes.

Inicialmente, experimentos computacionais foram realizados com o objetivo de selecionar os valores para o tamanho da população (NP) e a taxa de mutação (F). Os valores testados foram:

$$\text{NP} \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\} \quad (6.3)$$

e

$$\text{F} \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\} \quad (6.4)$$

Devido ao grande número de combinações, os perfis de desempenho propostos por Dolan e Moré (2002) foram utilizados para identificar os parâmetros que geram os melhores resultados.

Adotou-se o orçamento máximo permitido em (Paquet e Engelbrecht, 2007) e (Monson e Seppi, 2005) como critério de parada e o valor da função objetivo final como a métrica de qualidade. A área sob a curva do perfil de desempenho (Barbosa *et al.*, 2010b) indica que os parâmetros de melhor desempenho de acordo com essas regras são NP = 50 e F = 0.7, e estes valores foram então usados para todos os experimentos computacionais.

Os problemas 1 à 6 foram retirados de (Hock e Schittkowski, 1981) e os problemas 7 à 11 de (Monson e Seppi, 2005).

6.2.1 Problemas-Teste

Problema 1: A solução deste problema é $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ onde $f(x^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ & x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -3 \end{aligned}$$

Problema 2: A solução deste problema é $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ onde $f(x^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ & x_3 + 5x_5 = 6 \end{aligned}$$

Problema 3: A solução deste problema é $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ onde $f(x^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^4 + (x_4 - x_5)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ & x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 6 \end{aligned}$$

Problema 4: A solução deste problema é $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ onde $f(x^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_2 = 4 \\ & x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_2 - x_5 = 0 \end{aligned}$$

Problema 5: A solução deste problema é

$x^* = (-33/349, 11/349, 180/349, -158/349, 1/349)^T$ onde $f(x^*) = 5.326647564$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (4x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_2 = 0 \\ & x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_2 - x_5 = 0 \end{aligned}$$

Problema 6: A solução deste problema é $x^* = (-33/43, 11/43, 27/43, -5/43, 11/43)^T$ onde $f(x^*) = 4.093023256$.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_2 = 0 \\ & x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_2 - x_5 = 0 \end{aligned}$$

Problema Problema 7 - Sphere: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 32.137$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & -3x_2 - x_3 + 2x_6 - 6x_7 - 4x_9 - 2x_{10} = 3 \\ & -x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_7 - x_8 - 7x_9 - 2x_{10} = 0 \\ & x_3 + x_6 + 3x_7 - 2x_9 + 2x_{10} = 9 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_7 + 6x_8 + 16x_9 + 4x_{10} = -16 \\ & -x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 13x_9 - 4x_{10} = 30 \end{aligned}$$

Problema 8 - Quadratic: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 35.377$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} e^{-(x_i - x_j)^2} x_i x_j + \sum_{i=1}^{10} x_i \\ \text{s.a.} \quad & -3x_2 - x_3 + 2x_6 - 6x_7 - 4x_9 - 2x_{10} = 3 \\ & -x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_7 - x_8 - 7x_9 - 2x_{10} = 0 \\ & x_3 + x_6 + 3x_7 - 2x_9 + 2x_{10} = 9 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_7 + 6x_8 + 16x_9 + 4x_{10} = -16 \\ & -x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 13x_9 - 4x_{10} = 30 \end{aligned}$$

Problema 9 - Rastrigin: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 36.975$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 10 - 10 \cos(2\pi x_i) \\ \text{s.a.} \quad & -3x_2 - x_3 + 2x_6 - 6x_7 - 4x_9 - 2x_{10} = 3 \\ & -x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_7 - x_8 - 7x_9 - 2x_{10} = 0 \\ & x_3 + x_6 + 3x_7 - 2x_9 + 2x_{10} = 9 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_7 + 6x_8 + 16x_9 + 4x_{10} = -16 \\ & -x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 13x_9 - 4x_{10} = 30 \end{aligned}$$

Problema 10 - Rosenbrock: O valor da função objetivo encontrado na literatura

para este problema é $f(x^*) = 21485.3$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^9 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \\
\text{s.a.} \quad & -3x_2 - x_3 + 2x_6 - 6x_7 - 4x_9 - 2x_{10} = 3 \\
& -x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_7 - x_8 - 7x_9 - 2x_{10} = 0 \\
& x_3 + x_6 + 3x_7 - 2x_9 + 2x_{10} = 9 \\
& 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_7 + 6x_8 + 16x_9 + 4x_{10} = -16 \\
& -x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 13x_9 - 4x_{10} = 30
\end{aligned}$$

Problema 11 - Griewank: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 0.151$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \prod_{i=10}^1 \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 \\
\text{s.a.} \quad & -3x_2 - x_3 + 2x_6 - 6x_7 - 4x_9 - 2x_{10} = 3 \\
& -x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_7 - x_8 - 7x_9 - 2x_{10} = 0 \\
& x_3 + x_6 + 3x_7 - 2x_9 + 2x_{10} = 9 \\
& 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_7 + 6x_8 + 16x_9 + 4x_{10} = -16 \\
& -x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 13x_9 - 4x_{10} = 30
\end{aligned}$$

6.2.2 Resultados Experimentais

Em primeiro lugar, foi possível verificar a rapidez com que a técnica DELEqC encontra a melhor solução conhecida de cada problema-teste quando comparada com uma DE usando (i) o método de seleção de Deb (DE+DSS) ou (ii) um método de penalidade adaptativa (DE+APM). O objetivo neste caso é verificar se a proposta DELEqC é capaz de obter as soluções conhecidas usando um número similar de avaliações da função objetivo. Usando $CR = 0.9$, $NP = 50$ e $F = 0.7$ para ambos (DE+DSS) e (DE+APM). As informações estatísticas (melhor resultado, mediana, média, desvio padrão, pior resultado), obtidas a partir de 100 rodadas independentes e o número de execuções bem-sucedidas (SR) também são mostradas nas Tabelas 6.3 á 6.6. A execução bem sucedida é aquela em que a solução conhecida é encontrada (erro absoluto menor ou igual a 10^{-4}), utilizando-se o número máximo permitido de avaliações da função objetivo (5×10^6). Os melhores resultados são destacados em negrito.

Nota-se que a proposta DELEqC requer um número menor de avaliações da função objetivo para encontrar as soluções conhecidas dos problemas-teste quando comparados a (DE+DSS) e (DE+APM). Além disso, pode-se observar que a proposta DELEqC obteve mais rodadas bem sucedidas do que ambos (DE+DSS) e (DE+APM). Finalmente, é importante salientar que os resultados obtidos pela técnica proposta são estatisticamente diferentes: p -valor < 0.05 , em relação ao (i) comparações de pares usando teste de Wilcoxon ; e (ii) p -valor ajustados por correção de Bonferroni.

Pode-se dizer que a técnica proposta produz resultados melhores ou semelhantes aos disponíveis na literatura usando o mesmo número de avaliações da função objetivo. As simulações referentes aos problemas-teste 7-11 foram consideradas como em (Paquet e Engelbrecht, 2007) e (Monson e Seppi, 2005). Cada problema-teste tem seu número permitido de avaliações da função objetivo (nofe) agrupado em 4 orçamentos computacionais diferentes: um orçamento de referência (rb), e três múltiplos dele ($2 \times rb$), ($3 \times rb$), e ($4 \times rb$). A informação estatística dos resultados é apresentada nas Tabelas 6.6 e 6.10, onde os melhores resultados são destacados em negrito.

Analisando os resultados nas Tabelas 6.6 e 6.10, é importante destacar que a proposta DELEqC obtém os melhores valores médios em 15 dos 20 casos considerados aqui (5 problemas-teste e 4 orçamentos diferentes). Além disso, os melhores resultados no que diz respeito ao melhor valor encontrado foram alcançados em 15 situações. Observando que o CLPSO, a técnica de melhor desempenho em (Paquet e Engelbrecht, 2007), obteve os melhores valores médios em apenas 6 casos, e os melhores resultados, em relação ao melhor valor encontrado, em 14 casos.

Quando comparado com o *Constricted PSO*, a técnica com melhor desempenho em (Monson e Seppi, 2005) e que tem resultados disponíveis para 10 dos 20 casos considerados aqui, pode-se notar que o DELEqC obteve os melhores valores médios em 8 casos, e o melhor resultado, em relação ao melhor valor encontrado, em 9 dos 10 casos, enquanto o *Constricted PSO* encontra os melhores valores médios em apenas 3 casos, e os melhores resultados, em relação ao melhor valor encontrado, em 9 dos 10 casos.

Tabela 6.1: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** valor encontrado referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.

Método	DELEqC	DE+APM	DE+DSS
Área	1.000	0.497635	0.317684

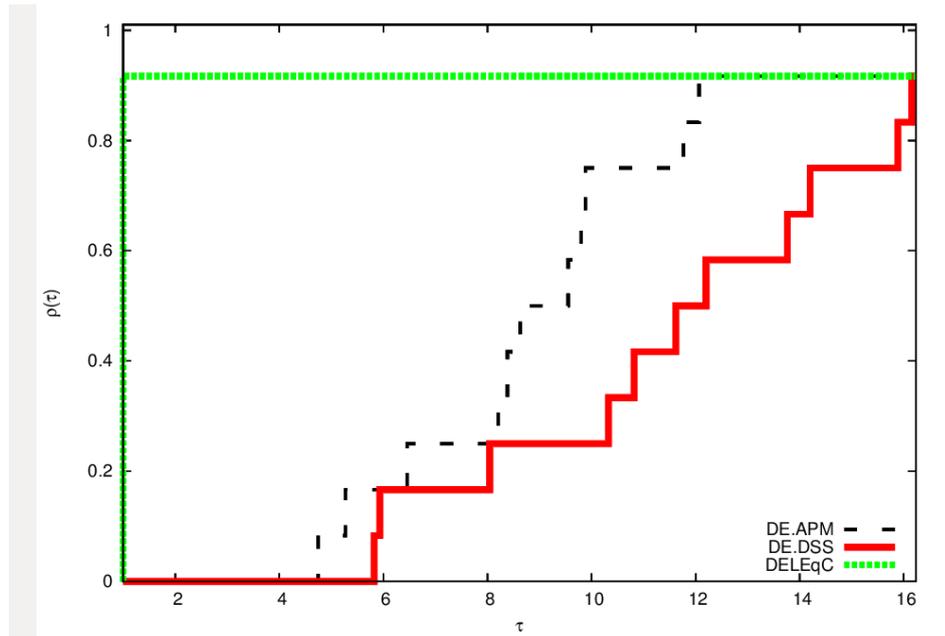


Figura 6.1: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** valor encontrado referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.

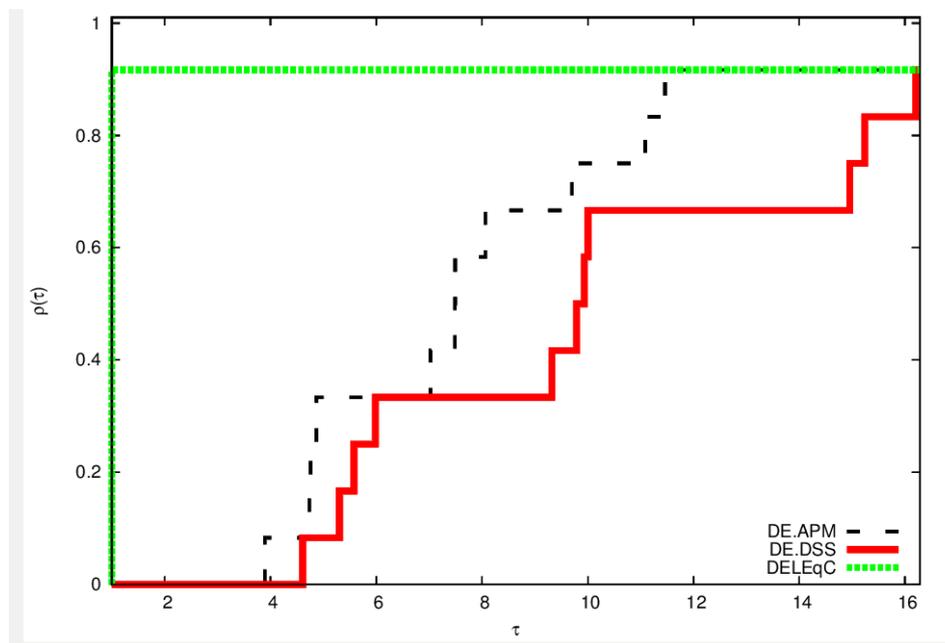


Figura 6.2: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos valores encontrados referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.

Utilizando o **melhor** dos resultados encontrados, a Figura 6.1 apresenta o gráfico dos perfis de desempenho onde os menores valores de τ , tal que $\rho(\tau) = 1$, é o DELEqC; com isso a técnica se mostra mais robusta em relação ao (DE+APM) e (DE+DSS). A Tabela 6.1 apresenta as áreas sob as curvas dos perfis de desempenho onde o DELEqC apresenta o melhor resultado dentre os algoritmos comparados. Ou seja, a proposta DELEqC tem o melhor

Tabela 6.2: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos valores encontrados referente ao número necessário de avaliações da função objetivo.

Método	DELEqC	DE+APM	DE+DSS
Área	1.000	0.584055	0.426512

Tabela 6.3: Número de avaliações da função objetivo necessário para obter a solução conhecida com um erro absoluto menor ou igual a 10^{-4} . Os limitantes $[-1000; 1000]$ foram adotados para todos os problemas-teste. Para DE+APM e DE+DSS, a tolerância para restrições de igualdade adotada aqui é $\epsilon = 0.0001$.

Problema	Técnica	Melhor	Media	Mediana	Desvio Padrão	Pior	SR
1	DELEqC	2800	3475	3458.00	$2.51e + 02$	4050	100
	DE+APM	14750	16400	16456.50	$6.68e + 02$	18200	100
	DE+DSS	16300	18350	18336.00	$7.54e + 02$	20250	100
2	DELEqC	2750	3300	3249.50	$1.93e + 02$	3600	100
	DE+APM	13050	15375	15385.00	$7.79e + 02$	17350	100
	DE+DSS	16300	18100	18121.50	$6.92e + 02$	20150	100
3	DELEqC	1500	2050	2029.00	$1.74e + 02$	2400	100
	DE+APM	12950	14250	14256.50	$5.49e + 02$	15800	100
	DE+DSS	18300	20225	20158.50	$7.68e + 02$	22000	100
4	DELEqC	1250	1900	1906.00	$1.61e + 02$	2250	100
	DE+APM	12250	14350	14280.00	$7.30e + 02$	15650	100
	DE+DSS	17200	19000	19060.50	$7.60e + 02$	20800	100
5	DELEqC	1700	2050	2055.00	$1.46e + 02$	2350	100
	DE+APM	13950	15300	15382.83	$6.17e + 02$	16650	99
	DE+DSS	17550	19150	19157.50	$6.93e + 02$	21400	100
6	DELEqC	1450	1950	1932.50	$1.56e + 02$	2250	100
	DE+APM	13850	15600	15582.00	$6.32e + 02$	17150	100
	DE+DSS	16850	18850	18916.50	$7.45e + 02$	20750	100
7	DELEqC	6550	7300	7326.00	$3.24e + 02$	8150	100
	DE+APM	77050	83750	83938.00	$3.55e + 03$	95750	100
	DE+DSS	104050	118550	118711.50	$7.01e + 03$	134100	100
8	DELEqC	6700	8050	8018.00	$4.05e + 02$	8950	100
	DE+APM	80850	88675	88901.00	$3.71e + 03$	98600	100
	DE+DSS	108250	122000	122199.50	$7.26e + 03$	139000	100
9	DELEqC	18150	26100	30482.76	$1.59e + 04$	91400	58
	DE+APM	117150	140950	148259.78	$2.19e + 04$	208900	46
	DE+DSS	145950	175875	182394.57	$2.63e + 04$	256150	46
10	DELEqC	6900	7900	7959.00	$4.65e + 02$	9200	100
	DE+APM	68200	77000	77211.50	$3.46e + 03$	86150	100
	DE+DSS	98000	119175	119015.00	$7.54e + 03$	138350	100
11	DELEqC	12150	25975	31196.50	$1.51e + 04$	73150	100
	DE+APM	101850	109600	121478.57	$2.76e + 04$	210700	14
	DE+DSS	131450	141350	143682.14	$9.04e + 03$	165550	14

desempenho global diante dos 11 problemas-teste. Para a **média** dos melhores resultados, como pode ser observado na Figura 6.2 e na Tabela 6.2, a proposta DELEqC também apresenta melhores resultados, conforme análise utilizada para **melhor** dos resultados encontrados.

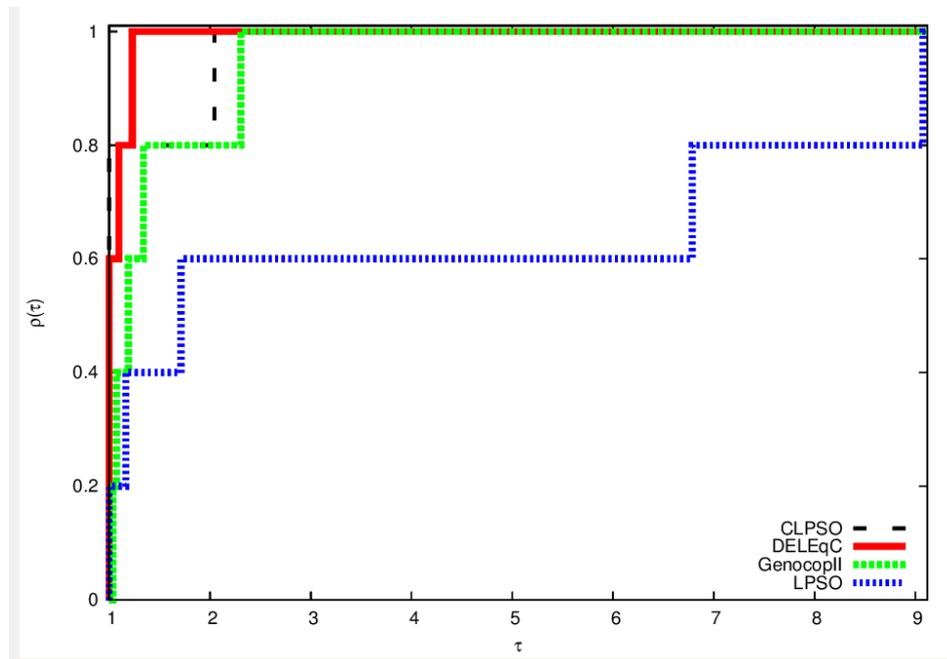


Figura 6.3: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).

Tabela 6.4: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO
Área	1.000	0.959401	0.640162	0.982054

Tabela 6.5: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO
Área	1.000	0.999931	0.798611	0.905474

Agora, foi realizada uma análise dos problemas-teste 7 á 11, em que será comparado com outros métodos propostos pela literatura.

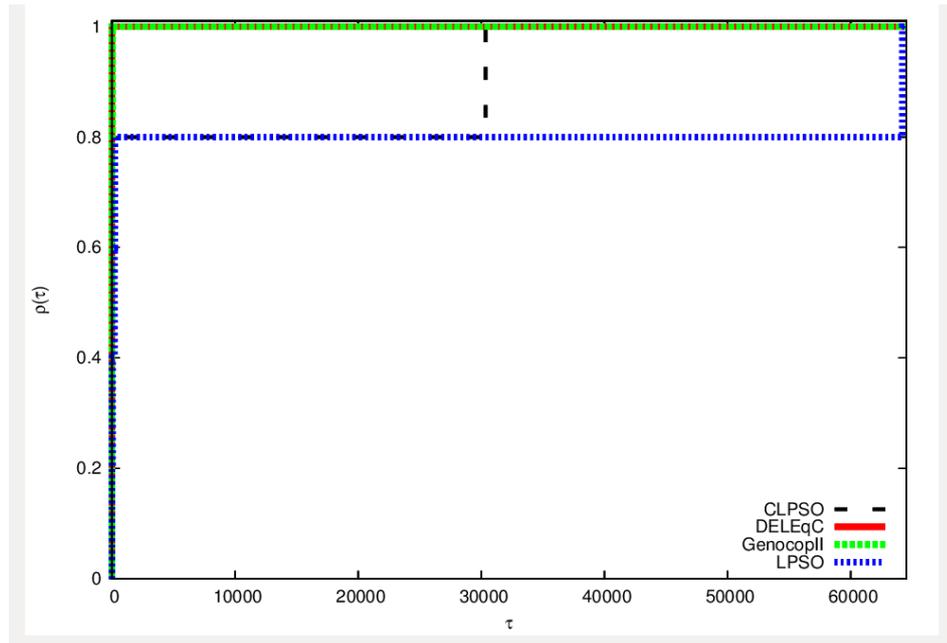


Figura 6.4: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).

Na Figura 6.4, apresenta-se o gráfico dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos valores encontrados, onde os menores valores de τ , tal que $\rho(\tau) = 1$ é a proposta DELEqC, com isso a técnica se mostra mais robusta em relação ao (GenocopII), (LPSO) e (CLPSO). A Tabela 6.4 apresenta as áreas sob as curvas dos perfis de desempenho onde o DELEqC apresenta o melhor resultado dentre os algoritmos comparados. Ou seja, a proposta DELEqC tem o melhor desempenho global.

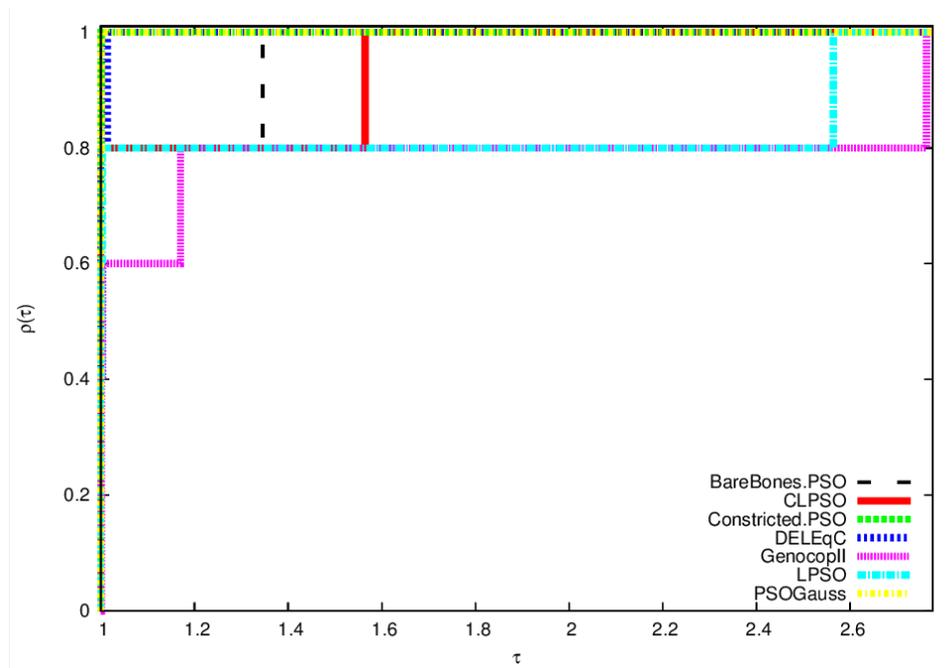


Figura 6.5: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).

Tabela 6.6: Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência (rb).

Problema	nofe	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão.	Pior
7	1,250	DELEqC	39.5143	115.8354	122.5069	$5.03e + 01$	260.6652
		Genocop II (Paquet e Engelbrecht, 2007)	38.322	-	739.438	$8.40e + 02$	$1.63e + 3$
		LPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	37.420	-	$7.03e + 03$	$8.01e + 03$	$4.63e + 4$
		CLPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	32.138	-	35.197	$2.21e + 01$	252.826
8	5,000	DELEqC	35.3784	35.3961	35.4051	$2.78e - 02$	35.5360
		Genocop II (Paquet e Engelbrecht, 2007)	37.939	-	104.192	$5.99e + 01$	262.656
		LPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	240.101	-	$8.46e + 3$	$1.05e + 04$	$7.79e + 4$
		CLPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	35.377	-	82.077	$6.10e + 01$	197.389
9	5,000	DELEqC	40.5363	58.7789	58.1392	$8.04e + 00$	77.4060
		Genocop II (Paquet e Engelbrecht, 2007)	49.581	-	56.694	$8.93e + 00$	75.906
		LPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	36.981	-	77.398	$2.35e + 01$	149.429
		CLPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	36.975	-	72.451	$2.57e + 01$	167.644
10	10,000	DELEqC	21485.2614	21485.2983	21485.2962	$5.87e - 03$	21485.3000
		Genocop II (Paquet e Engelbrecht, 2007)	22334.971	-	58249.328	$6.25e + 04$	$2.00e + 5$
		LPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	$1.95e + 5$	-	$1.38e + 9$	$4.48e + 09$	$3.55e + 10$
		CLPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	21485.306	-	$6.52e + 8$	$2.39e + 09$	$2.23e + 10$
11	5,000	DELEqC	0.3091	0.5910	0.5821	$9.56e - 02$	0.8099
		Genocop II (Paquet e Engelbrecht, 2007)	0.713	-	1.009	$1.30e - 01$	1.131
		LPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	0.529	-	6.853	$6.20e + 00$	36.861
		CLPSO (Paquet e Engelbrecht, 2007)	0.632	-	7.470	$7.27e + 00$	44.071

Tabela 6.7: Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).

TP	nofe	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão	Pior
7	2,500	DELEqC	32.5550	34.2880	34.7973	$1.97e+00$	41.1522
		Genocop II	37.612	-	304.884	$3.88e+02$	$1.17e+3$
		LPSO	32.137	-	445.316	$8.03e+02$	$4.51e+3$
		CLPSO	32.137	-	32.139	$6.69e-03$	32.183
		Constricted PSO (Monson e Seppi, 2005)	32.137	-	32.137	$2.00e-10$	32.137
		BareBones PSO (Monson e Seppi, 2005)	32.137	-	32.137	$1.00e-14$	32.137
		PSOGauss (Monson e Seppi, 2005)	32.137	-	32.137	$1.00e-14$	32.137
8	10,000	DELEqC	35.3769	35.3770	35.3770	$2.57e-05$	35.3770
		Genocop II	35.393	-	49.945	$1.10e+01$	82.221
		LPSO	35.400	-	758.525	$1.50e+03$	$1.12e+4$
		CLPSO	35.377	-	68.570	$5.39e+01$	196.067
		Constricted PSO (Monson e Seppi, 2005)	35.377	-	36.165	$3.12e+00$	55.538
		BareBones PSO (Monson e Seppi, 2005)	35.377	-	40.019	$9.61e+00$	75.147
		PSOGauss (Monson e Seppi, 2005)	35.377	-	38.998	$8.59e+00$	72.482
9	10,000	DELEqC	36.9755	44.9910	46.7872	$8.30e+00$	67.1005
		Genocop II	37.116	-	52.379	$7.50e+00$	67.564
		LPSO	36.975	-	76.487	$3.07e+01$	232.979
		CLPSO	36.975	-	69.039	$2.16e+01$	154.379
		Constricted PSO (Monson e Seppi, 2005)	36.975	-	50.431	$1.23e+01$	85.728
		BareBones PSO (Monson e Seppi, 2005)	36.975	-	55.921	$1.61e+01$	119.556
		PSOGauss (Monson e Seppi, 2005)	36.975	-	55.622	$1.48e+01$	119.094
10	20,000	DELEqC	21485.2614	21485.2983	21485.2962	$5.87e-03$	21485.3000
		Genocop II	21490.840	-	21630.020	$1.54e+02$	22030.988
		LPSO	21554.158	-	$4.44e+6$	$2.28e+07$	$2.18e+8$
		CLPSO	21485.305	-	$7.45e+5$	$7.12e+06$	$7.11e+7$
		Constricted PSO (Monson e Seppi, 2005)	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
		BareBones PSO (Monson e Seppi, 2005)	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
		PSOGauss (Monson e Seppi, 2005)	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
11	10,000	DELEqC	0.1509	0.4299	0.4163	$1.07e-01$	0.6677
		Genocop II	0.417	-	0.702	$1.87e-01$	0.971
		LPSO	0.387	-	2.997	$2.94e+00$	15.805
		CLPSO	0.236	-	3.049	$3.10e+00$	16.427
		Constricted PSO	0.151	-	0.488	$1.68e-01$	0.83
		BareBones PSO	0.203	-	0.523	$1.81e-01$	0.912
		PSOGauss	0.151	-	0.53	$1.68e-01$	0.958

Tabela 6.8: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO	Constricted	BareBones PSO	PSOGauss
Área	0.998598	0.780223	0.822172	0.936109	1.0	0.960913	1.0

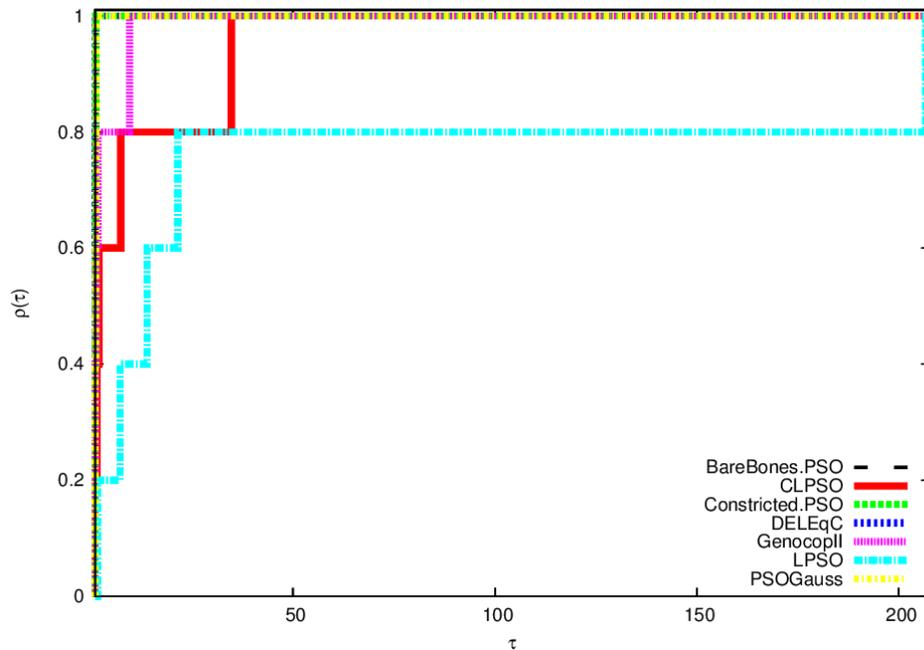


Figura 6.6: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).

Tabela 6.9: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($2 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO	Constricted	BareBones PSO	PSOGauss
Área	1.0	0.990635	0.761032	0.959802	0.999815	0.999513	0.999531

Tabela 6.10: Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).

Problema	nofe	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão	Pior
7	3,750	DELEqC	32.1447	32.1881	32.2008	$5.53e - 02$	32.5202
		Genocop II	33.837	-	69.154	$2.67e + 01$	124.820
		LPSO	32.137	-	35.071	$2.15e + 01$	244.077
		CLPSO	32.137	-	32.137	$1.83e - 04$	32.138
8	15,000	DELEqC	35.3769	35.3770	35.3770	$2.57e - 05$	35.3770
		Genocop II	35.772	-	42.393	$6.86e + 00$	60.110
		LPSO	35.377	-	125.727	$2.31e + 02$	$1.72e + 3$
		CLPSO	35.377	-	59.001	$5.00e + 01$	196.065
9	15,000	DELEqC	36.9751	37.1959	39.6822	$4.52e + 00$	54.5931
		Genocop II	37.326	-	47.643	$8.45e + 00$	67.128
		LPSO	36.975	-	74.338	$2.83e + 01$	234.968
		CLPSO	37.970	-	77.409	$3.09e + 01$	224.024
10	30,000	DELEqC	21485.2614	21485.2983	21485.2962	$5.87e - 03$	21485.3000
		Genocop II	21487.098	-	21546.332	$8.53e + 01$	21836.797
		LPSO	21483.373	-	$3.71e + 5$	$2.41e + 06$	$2.05e + 7$
		CLPSO	21485.305	-	21485.305	$9.83e - 08$	21485.305
11	15,000	DELEqC	0.1508	0.2361	0.2605	$8.79e - 02$	0.5190
		Genocop II	0.351	-	0.702	$1.72e - 01$	0.962
		LPSO	0.250	-	2.653	$2.72e + 00$	14.405
		CLPSO	0.250	-	2.146	$2.21e + 00$	11.983

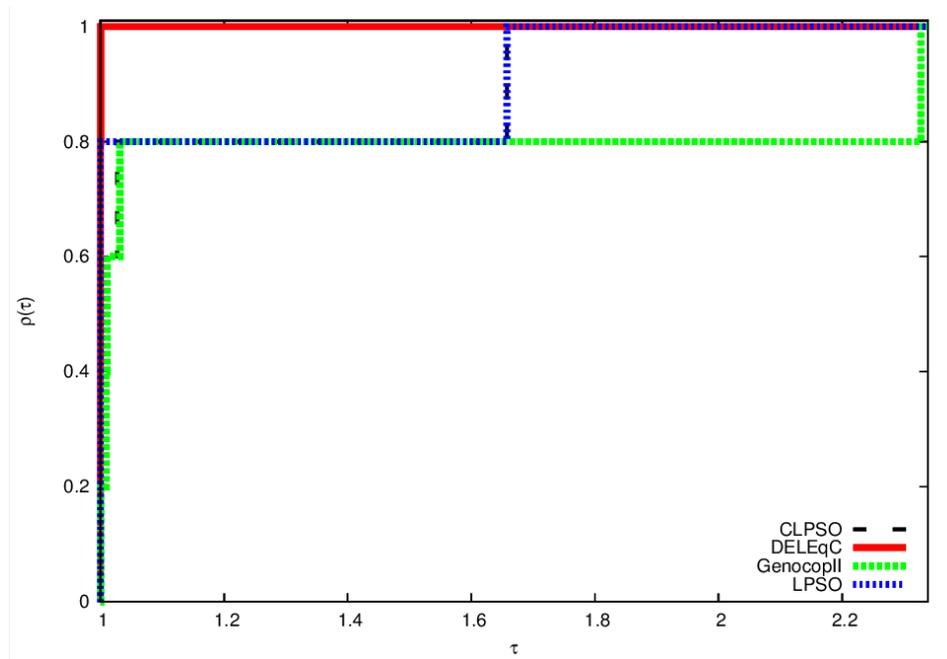


Figura 6.7: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).

Tabela 6.11: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO
Área	1.0	0.792176	0.900943	0.896875

Tabela 6.12: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO
Área	1.0	0.960085	0.643842	0.896875

Tabela 6.13: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO	Constricted PSO	BareBones PSO	PSOGauss
Área	1.0	0.942085	0.791589	0.907480	0.997048	0.997048	0.997048

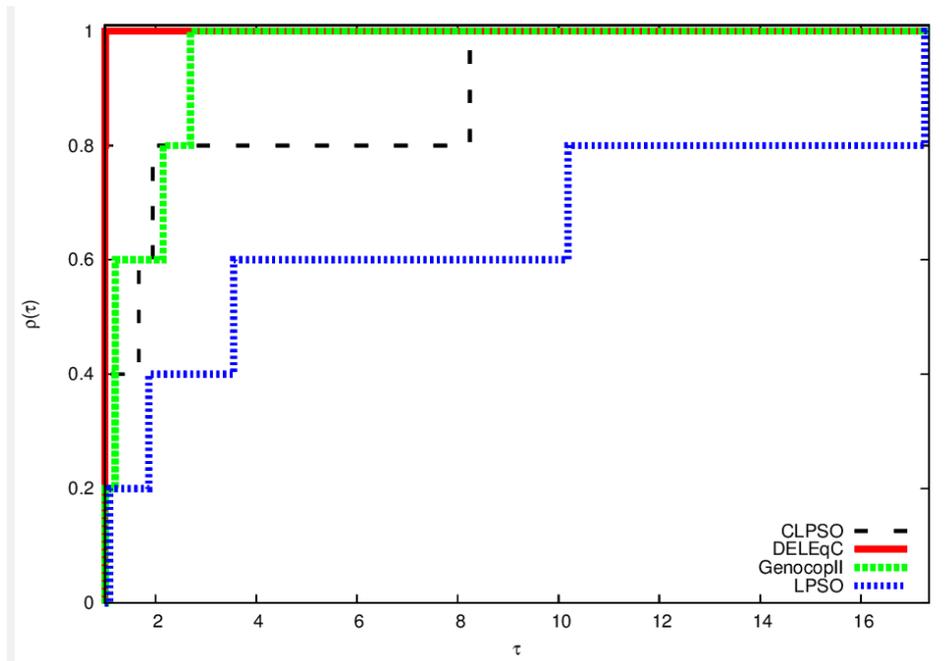


Figura 6.8: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($3 \times rb$).

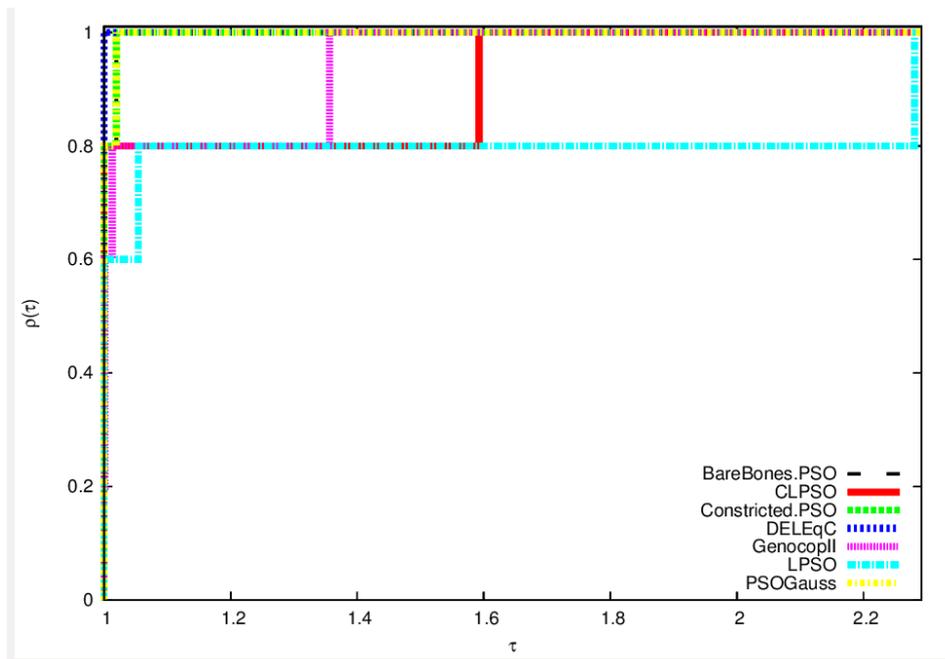


Figura 6.9: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).

Tabela 6.14: Os resultados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).

Problema	nofe	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão	Pior
7	5,000	DELEqC	32.1371	32.1381	32.1386	$1.41e-03$	32.1436
		Genocop II	32.544	-	54.846	$1.69e-01$	107.584
		LPSO	32.137	-	32.137	$7.18e-12$	32.137
		CLPSO	32.137	-	32.137	$3.02e-06$	32.137
		Constricted PSO	32.137	-	32.137	$1.00e-14$	32.137
		BareBones PSO	32.137	-	32.137	$1.00e-14$	32.137
		PSOGauss	32.137	-	32.137	$1.00e-14$	32.137
8	20,000	DELEqC	35.3769	35.3770	35.3770	$2.57e-05$	35.3770
		Genocop II	35.410	-	39.500	$6.78e+00$	56.613
		LPSO	35.377	-	59.762	$3.98e+01$	246.905
		CLPSO	35.377	-	39.832	$1.09e+01$	71.380
		Constricted PSO	35.377	-	35.783	$2.39e+00$	55.538
		BareBones PSO	35.377	-	37.079	$5.33e+00$	55.538
		PSOGauss	35.377	-	35.589	$5.28e-01$	36.892
9	20,000	DELEqC	36.9748	36.9755	38.5722	$3.27e+00$	51.4201
		Genocop II	37.011	-	43.059	$6.14e+00$	59.959
		LPSO	38.965	-	75.011	$2.77e+01$	184.226
		CLPSO	36.975	-	76.896	$2.73e+01$	151.394
		Constricted PSO	36.975	-	46.199	$7.48e+00$	76.736
		BareBones PSO	36.975	-	49.238	$1.02e+01$	76.774
		PSOGauss	36.975	-	47.11	$8.14e+00$	68.802
10	40,000	DELEqC	21485.2614	21485.2983	21485.2962	$5.87e-03$	21485.3000
		Genocop II	21485.363	-	21485.714	$4.00e-01$	21486.646
		LPSO	21485.925	-	$1.260e+05$	$1.04e+06$	$1.04e+07$
		CLPSO	21485.305	-	21485.305	$9.40e-08$	21485.305
		Constricted PSO	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
		BareBones PSO	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
		PSOGauss	21485.3	-	21485.3	$6.00e-11$	21485.3
11	20,000	DELEqC	0.1482	0.2019	0.2241	$6.11e-02$	0.3849
		Genocop II	0.201	-	0.584	$1.31e-01$	0.843
		LPSO	0.338	-	1.695	$1.92e+00$	14.401
		CLPSO	0.236	-	1.900	$2.38e+00$	17.259
		Constricted PSO	0.151	-	0.413	$1.45e-01$	0.792
		BareBones PSO	0.151	-	0.444	$1.58e-01$	0.83
		PSOGauss	0.151	-	0.454	$1.74e-01$	0.83

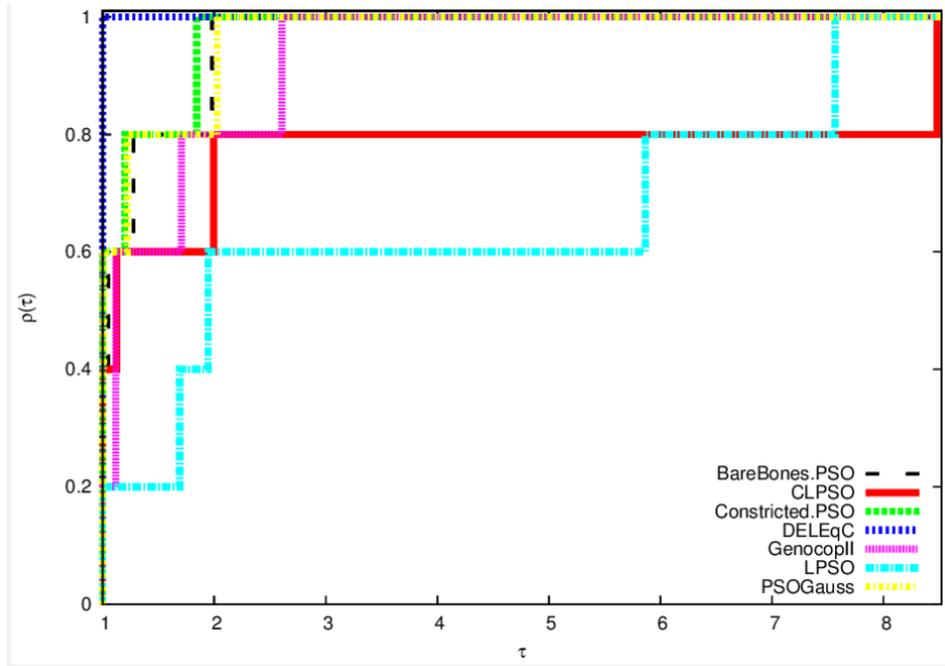


Figura 6.10: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).

Tabela 6.15: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-teste 7, 8, 9, 10 e 11, usando o orçamento de referência ($4 \times rb$).

Método	DELEqC	GenocopII	LPSO	CLPSO	Constricted PSO	BareBones PSO	PSOGauss
Área	1.0	0.931924	0.650671	0.770061	0.972170	0.965076	0.966485

6.3 Erro Numérico

O erro numérico está presente nos experimentos computacionais já que nem sempre são exatos e, por outro lado, as operações sobre valores não exatos propagam esses erros a seus resultados, o que prejudica a solução. O conjunto dos números representáveis em qualquer máquina é discreto e finito. Ou seja, não é possível representar em uma máquina todos os reais de um dado intervalo $[a, b]$ e os erros de arredondamento devido à aritmética de ponto flutuante surgem. A implementação criada para este trabalho utilizou variáveis com precisão dupla.

Nas próximas seções serão apresentados problemas de otimização que possuem outros tipos de restrições, além de $Ex = c$. Nos primeiros experimentos dos problemas com

restrições não lineares de igualdade e desigualdade, que serão resolvidos com a técnica DELEqC+APM e DELEqC+DSS, foi observado que após algumas iterações as restrições lineares não eram mais atendidas.

Aplica-se a seguir a proposta DELEqC ao problema

$$\begin{aligned}
 \min \quad & (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \\
 \text{s.a.} \quad & x + y = 1 \\
 & 0 \leq x \leq 1 \\
 & 0 \leq y \leq 1
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

para exemplificação desse erro numérico.

As curvas de nível da função objetivo são vistas na Figura 6.11 em que é possível verificar que o mínimo é o ponto $(2, 1)$. Os indivíduos gerados aleatoriamente dentro do intervalo estabelecido $[0, 3] \times [0, 3]$, são mostrados na Figura 6.12. Os indivíduos da população inicial (viáveis em relação à restrição linear de igualdade), são mostrados na Figura 6.13. Na Figura 6.14 é dado um “zoom” para maior clareza.

Nas Figuras 6.15, 6.16, 6.17 6.18 e 6.19 mostram o comportamento da população na geração 50, 100, 150, 200 e 250 respectivamente, pode-se acompanhar o comportamento dos indivíduos em relação a restrição durante o processo evolutivo.

Após a verificação desse erro numérico, notou-se a necessidade de evitar que esse erro se propague. Com isso, foi feita uma validação do indivíduo, onde, caso esse erro fosse verificado, o mesmo seria projetado novamente sobre o conjunto viável (relativo às restrições lineares de igualdade) durante o processo evolutivo. A cada novo indivíduo criado em cada geração, é verificado se o mesmo ainda continua neste conjunto viável. Se não, o mesmo é projetado.

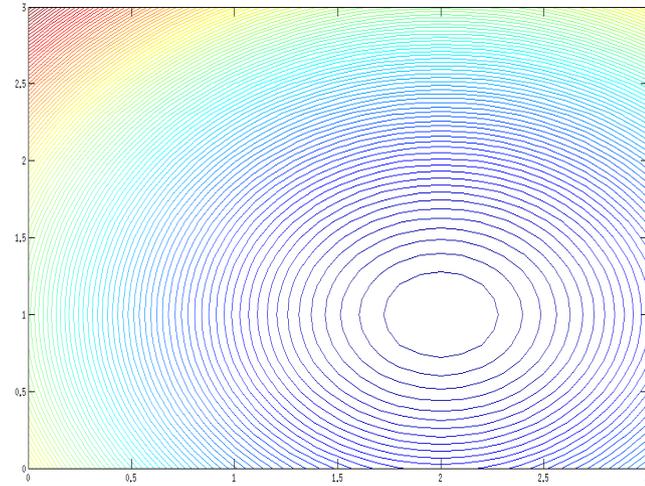


Figura 6.11: Curvas de Nível da Função Objetivo. As cores claras indicam as regiões de mínimos da FO.

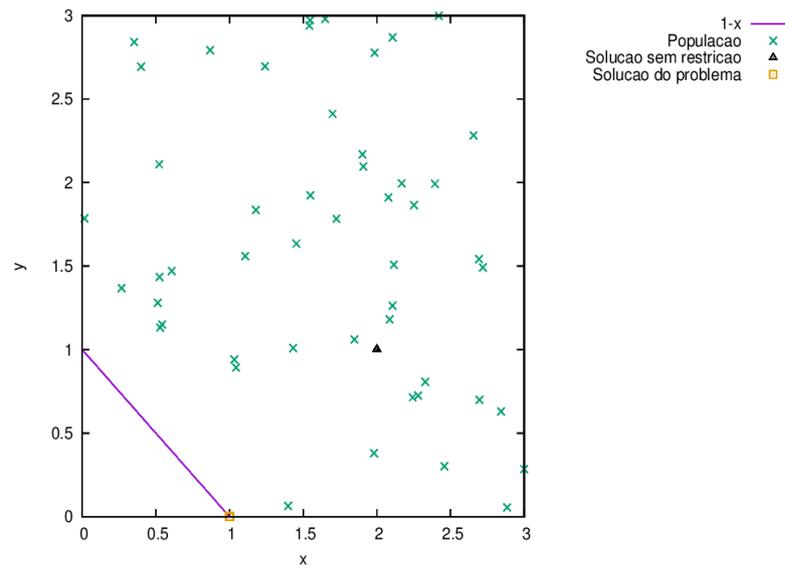


Figura 6.12: Valores iniciais gerados aleatoriamente no intervalo $[0, 3] \times [0, 3]$.

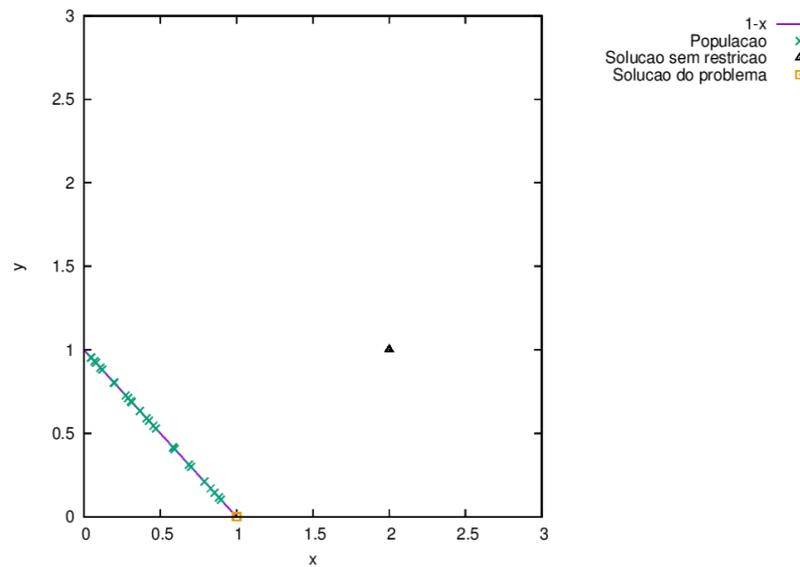


Figura 6.13: População inicial viável (em relação à restrição linear de igualdade) gerada a partir dos pontos gerados aleatoriamente.

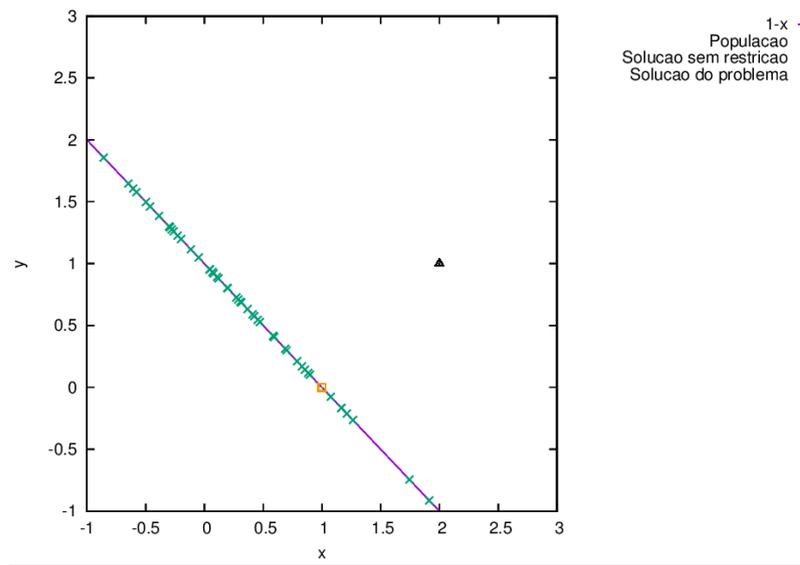


Figura 6.14: População inicial viável (em relação à restrição linear de igualdade) gerada a partir dos pontos aleatórios apresentados (“zoom”).

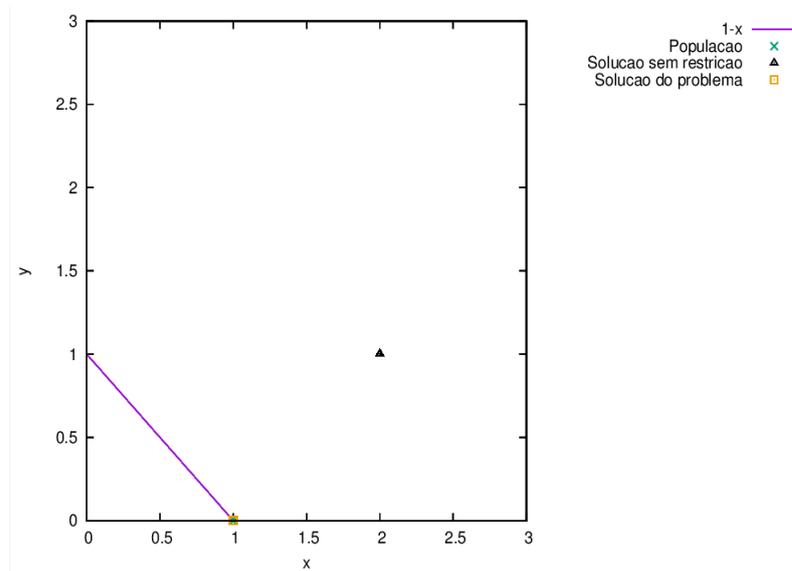


Figura 6.15: Comportamento da população na geração 50 para o problema 6.5.

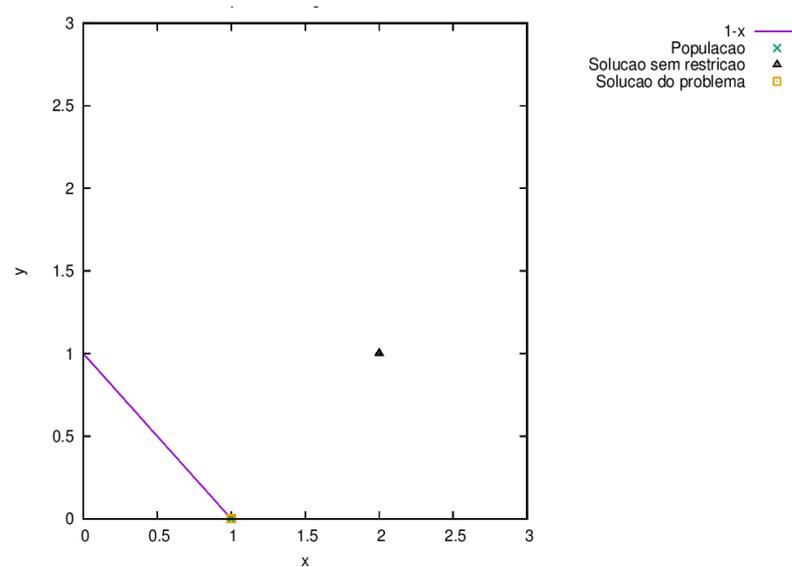


Figura 6.16: Comportamento da população na geração 100 para o problema 6.5.

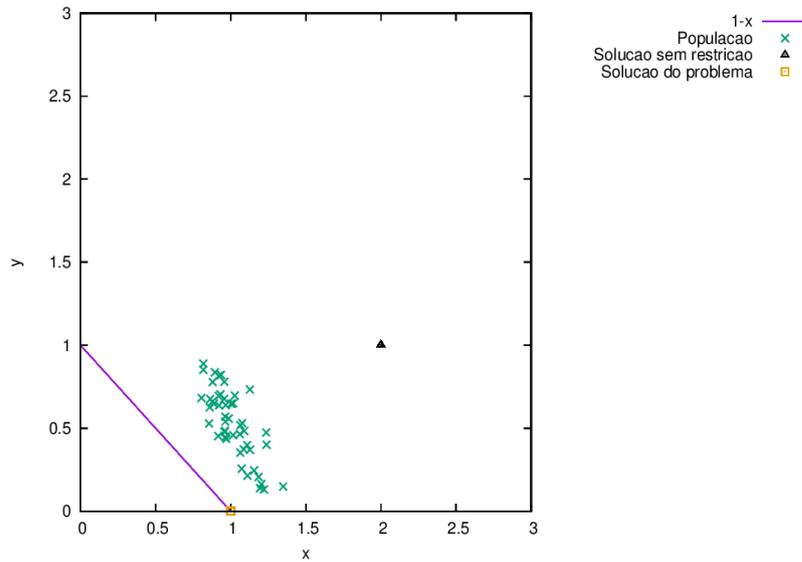


Figura 6.17: Comportamento da população na geração 150 para o problema 6.5.

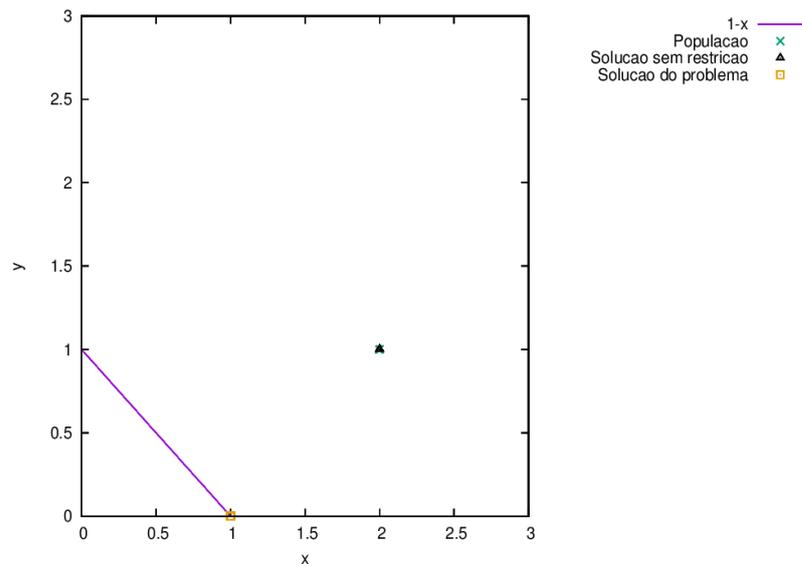


Figura 6.18: Comportamento da população na geração 200 para o problema 6.5.

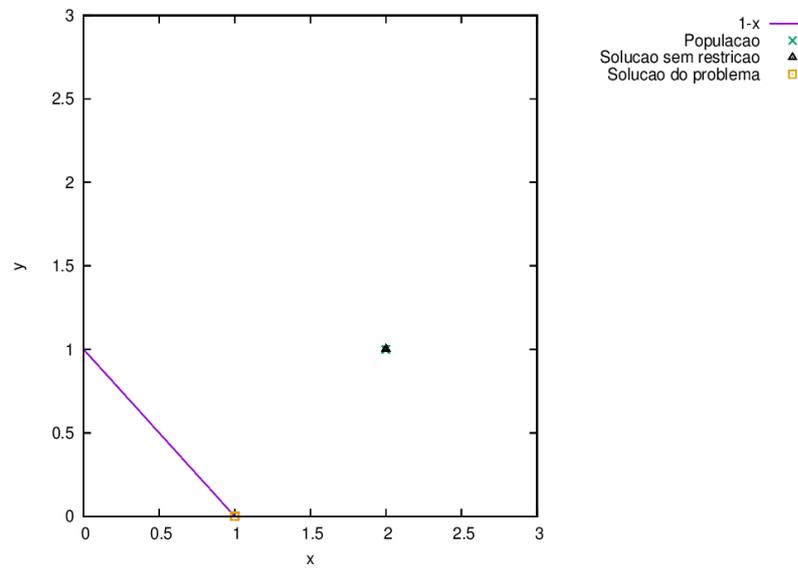


Figura 6.19: Comportamento da população na geração 250 para o problema 6.5.

6.4 Otimização com Restrições Lineares de Igualdade e de Limitantes

Agora a proposta DELEqC será aplicada aos problemas na forma:

$$\min \quad f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (6.6)$$

$$\text{s.a :} \quad Ex = c \quad (6.7)$$

$$x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.8)$$

ou seja, problemas que possuem somente restrições lineares de igualdade e em que as variáveis de projeto são limitadas inferiormente e superiormente. As restrições adicionais apresentadas na Equação (6.8) serão tratadas com a técnica de penalização (APM) ou com o critério de seleção de Deb (DSS).

Os algoritmos utilizados para as comparações nos próximos problemas são: (DE+APM), (DE+DSS), (DELEqC+APM) e (DELEqC+DSS). Os parâmetros adotados foram NP = 100, F = 0.7 e CR = 0.8. Os critérios de parada adotados para os experimentos foram o número máximo de avaliações da função objetivo (5×10^6) e um erro absoluto de 10^{-4} em relação ao valor de referência da literatura, com 100 execuções independentes.

6.4.1 Problemas-Teste

Problema 12 - (G-14): O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = -47.7648884594915$. Retirado de (Ullah *et al.*, 2012).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{10} x_i \left[c_i + \ln \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{10} x_j} \right) \right] \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} = 2 \\ & x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ & x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 10, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 10 \end{aligned}$$

onde, $c_1 = -6.089$, $c_2 = -17.164$, $c_3 = -34.054$, $c_4 = -5.914$, $c_5 = -5.914$, $c_6 = -14.986$, $c_7 = -24.1$, $c_8 = -10.708$, $c_9 = -26.662$, $c_{10} = -22.179$.

Problema 13: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema

é $f(x^*) = 15990.0$. Problema original retirado de (Floudas e Pardalos, 1990).

min x_1

$$\begin{aligned}
 \text{s.a.} \quad & -x_1 + 300x_2 + 270x_3 + 460x_4 + 800x_5 + 740x_6 + 600x_7 + 540x_8 + 380x_9 + 300x_{10} \\
 & + 490x_{11} + 380x_{12} + 760x_{13} + 430x_{14} + 250x_{15} + 360x_{16} + 600x_{17} + 210x_{18} + 830x_{19} \\
 & + 470x_{20} + 680x_{21} + 360x_{22} + 290x_{23} + 400x_{24} + 310x_{25} - 7x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_4^2 \\
 & - 8x_5^2 - 12x_6^2 - 9x_7^2 - 14x_8^2 - 7x_9^2 - 13x_{10}^2 - 12x_{11}^2 - 8x_{12}^2 - 4x_{13}^2 - 7x_{14}^2 - 9x_{15}^2 - 16x_{16}^2 \\
 & - 8x_{17}^2 - 4x_{18}^2 - 10x_{19}^2 - 21x_{20}^2 - 13x_{21}^2 - 17x_{22}^2 - 9x_{23}^2 - 8x_{24}^2 - 4x_{25}^2 \leq 0 \\
 & x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} + x_{18} + x_{22} = 29 \\
 & x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} + x_{19} + x_{23} = 41 \\
 & x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} + x_{20} + x_{24} = 13 \\
 & x_5 + x_9 + x_{13} + x_{17} + x_{21} + x_{25} = 21 \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\
 & x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 24 \\
 & x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\
 & x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 24 \\
 & x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} = 16 \\
 & x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 12 \\
 & 0 \leq x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 8 \\
 & 0 \leq x_6, x_7 \leq 24 \\
 & 0 \leq x_8, x_{12}, x_{16}, x_{20} \leq 13 \\
 & 0 \leq x_9, x_{17} \leq 21 \\
 & 0 \leq x_{10}, x_{11}, x_{13} \leq 20 \\
 & 0 \leq x_{14}, x_{15} \leq 24 \\
 & 0 \leq x_{18}, x_{19}, x_{21} \leq 16 \\
 & 0 \leq x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25} \leq 12
 \end{aligned}$$

Problema adaptado de (Floudas e Pardalos, 1990).

$$\begin{aligned}
\min \quad & 300x_2 + 270x_3 + 460x_4 + 800x_5 + 740x_6 + 600x_7 + 540x_8 + 380x_9 + 300x_{10} \\
& + 490x_{11} + 380x_{12} + 760x_{13} + 430x_{14} + 250x_{15} + 360x_{16} + 600x_{17} + 210x_{18} + 830x_{19} \\
& + 470x_{20} + 680x_{21} + 360x_{22} + 290x_{23} + 400x_{24} + 310x_{25} - 7x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_4^2 \\
& - 8x_5^2 - 12x_6^2 - 9x_7^2 - 14x_8^2 - 7x_9^2 - 13x_{10}^2 - 12x_{11}^2 - 8x_{12}^2 - 4x_{13}^2 - 7x_{14}^2 - 9x_{15}^2 - 16x_{16}^2 \\
& - 8x_{17}^2 - 4x_{18}^2 - 10x_{19}^2 - 21x_{20}^2 - 13x_{21}^2 - 17x_{22}^2 - 9x_{23}^2 - 8x_{24}^2 - 4x_{25}^2 \\
\text{s.a.} \quad & x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} + x_{18} + x_{22} = 29 \\
& x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} + x_{19} + x_{23} = 41 \\
& x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} + x_{20} + x_{24} = 13 \\
& x_5 + x_9 + x_{13} + x_{17} + x_{21} + x_{25} = 21 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\
& x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 24 \\
& x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\
& x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 24 \\
& x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} = 16 \\
& x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 12 \\
& 0 \leq x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 8 \\
& 0 \leq x_6, x_7 \leq 24 \\
& 0 \leq x_8, x_{12}, x_{16}, x_{20} \leq 13 \\
& 0 \leq x_9, x_{17} \leq 21 \\
& 0 \leq x_{10}, x_{11}, x_{13} \leq 20 \\
& 0 \leq x_{14}, x_{15} \leq 24 \\
& 0 \leq x_{18}, x_{19}, x_{21} \leq 16 \\
& 0 \leq x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25} \leq 12
\end{aligned}$$

6.4.2 Resultados Experimentais

Na resolução do problema 12, observa-se pela Tabela 6.16 que o algoritmo (DE+APM), encontrou o **melhor** resultado conhecido, **-47.764949**, em relação aos outros algoritmos utilizados para comparação. Já em relação a **média** dos valores encontrados, a técnica proposta (DELEqC+APM) apresentou o melhor resultado, **-47.764800**. Nota-se ainda que em relação ao pior valor encontrado, **-47.764787**, a técnica proposta com o APM, (DELEqC+APM), mostrou-se superior em comparação aos outros algoritmos.

Para o problema 13, o algoritmo (DE+APM) não foi possível encontrar soluções factíveis, conforme observado na Tabela 6.16. Já para os outros algoritmos, a técnica proposta com o APM, (DELEqC+APM), foi vencedora, tanto em relação ao **melhor**, que encontrou um novo valor de referência para o problema adaptado, **15, 638.91**, e a **média, 15, 639.41**, dos valores encontrados.

A solução encontrada para o problema 13 adaptado é

$$x^* = (0, 6, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 21, 20, 0, 0, 0, 0, 24, 0, 0, 3, 0, 13, 0, 0, 12, 0, 0)$$

Tabela 6.16: Resultados dos problemas 12 e 13, com 100 execuções independentes.

Problema	Técnica	Melhor	Média	Mediana	Desvio Padrão	Pior
12	DELEqC+APM	-47.764868	-47.764800	-47.764793	1.68e - 05	-47.764787
	DELEqC+DSS	-45.768343	-42.7071803	-42.9846265	1.45e + 00	-39.659665
	DE+APM	-47.764949	-45.608244	-45.385833	2.10e + 00	-40.512209
	DE+DSS	-47.764849	-45.344048	-45.196949	2.06e + 00	-40.308707
13	DELEqC+APM	15, 638.91	15, 639.41	15, 638.96	1.37e + 00	15, 647.83
	DELEqC+DSS	33, 798.79	41, 524.49	42, 405.49	2.70e + 03	45, 340.68
	DE+APM	-	-	-	-	-
	DE+DSS	35, 677.852	41, 742.487	42, 924.963	2.77e + 03	45, 394.274

6.5 Otimização com Restrições Lineares de Desigualdade com Inserção de Variáveis de Folga e de Limitantes

Agora a proposta DELEqC será aplicada em problemas do seguinte formato

$$\min \quad f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (6.9)$$

$$\text{s.a :} \quad Ex \leq c \quad (6.10)$$

$$x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.11)$$

ou seja, problemas que possuem somente restrições lineares de desigualdade e que as variáveis de projeto são limitadas inferiormente e superiormente. Adaptando o problema

para

$$\min \quad f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (6.12)$$

$$\text{s.a :} \quad Ex + x_f = c \quad (6.13)$$

$$x_f \geq 0 \quad (6.14)$$

$$x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.15)$$

onde $x_f \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de folga do problema. Após essa modificação as restrições adicionais das Equações 6.14 e 6.15 serão tratadas com a técnica de penalização APM ou pelo critério de seleção de Deb (DSS).

Os algoritmos utilizados para as comparações aos próximos problemas são: (DE+APM), (DE+DSS), (DELEqC+APM) e (DELEqC+DSS). Os parâmetros adotados foram NP = 100, F = 0.7 e CR = 0.8. Os critérios de parada adotados para os experimentos foram o número máximo de avaliações da função objetivo (5×10^6) e um erro absoluto de 10^{-4} em relação ao valor de referência da literatura, com 100 execuções independentes.

6.5.1 Problema Teste

Problema 14 - Minos Diet Problem: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 92.5$. Problema original retirado de (Murtagh e Saunders, 1983).

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\ \text{s.a.} \quad & 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ & 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 \geq 55 \\ & 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ & 0 \leq x_3, x_5, x_6 \leq 2 \\ & 0 \leq x_4 \leq 8 \end{aligned}$$

Adaptamos o problema original inserindo variáveis de folga x_7, x_8 e x_9 ao problema.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\
 \text{s.a.} \quad & 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 - x_7 = 2000 \\
 & 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 - x_8 = 55 \\
 & 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 - x_9 = 800 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 3 \\
 & 0 \leq x_3, x_5, x_6 \leq 2 \\
 & 0 \leq x_4 \leq 8 \\
 & 0 \leq x_7, x_8, x_9 \leq 800
 \end{aligned}$$

6.5.2 Resultados Experimentais

Na Tabela 6.17, é possível verificar o comportamento dos algoritmos comparados no problema 14. A proposta com o APM, (DELEqC+APM), mostrou-se superior em relação aos algoritmos (DELEqC+DSS), (DE+APM) e (DE+DSS). O **melhor** resultado encontrado foi **92.500072**. Em relação a **média**, **mediana** e até mesmo o **pior**, os resultados foram bem próximos com o melhor valor conhecido na literatura.

Tabela 6.17: Resultados do problema 14, com 100 execuções independentes.

Problema	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão	Pior
14	DELEqC+APM	92.500072	92.500095	92.500093	$5.73e - 06$	92.5001
	DELEqC+DSS	112.520718	151.721629	151.033796	$1.71e + 01$	185.441672
	DE+APM	95.07366	96.899654	102.03714	$9.45e + 00$	125.074995
	DE+DSS	94.768703	103.2023765	114.7948810	$2.23e + 01$	170.71986

6.6 Otimização com Restrições Lineares de Igualdade, Restrições Não-Lineares e Limitantes

Agora a proposta DELEqC será aplicada para problemas do seguinte formato:

$$\min \quad f(x), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (6.16)$$

$$\text{s.a :} \quad Ex = c \quad (6.17)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.18)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = p + 1, \dots, m \quad (6.19)$$

$$x_k^{inf} \leq x_k \leq x_k^{sup}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.20)$$

ou seja, problemas que possuem restrições lineares de igualdade, restrições não-lineares de igualdade e de desigualdade, e as variáveis de projeto são limitadas inferiormente e superiormente. As restrições adicionais das Equações 6.18, 6.19 e 6.20 serão tratadas usando a técnica de penalização APM e o critério de seleção de Deb (DSS).

Os algoritmos utilizados para as comparações aos próximos problemas são: (DE+APM), (DE+DSS), (DELEqC+APM) e (DELEqC+DSS). Os parâmetros adotados foram NP = 100, F = 0.7 e CR = 0.8. Os critérios de parada adotados para os experimentos foram o número máximo de avaliações da função objetivo (5×10^6) e um erro absoluto de 10^{-4} em relação ao valor de referência da literatura, com 100 execuções independentes.

6.6.1 Problemas Testes

Problema 15 (G-15): O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = 961.715022289961$. Retirado de (Liang *et al.*, 2006).

$$\min \quad 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3$$

$$\text{s.a.} \quad 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 56$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$$

$$0 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3$$

Problema 16 (G-23): O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = -400.055099999999584$. Retirado de (Liang *et al.*, 2006).

$$\begin{aligned}
\min \quad & -9x_5 - 15x_8 + 6x_1 + 16x_2 + 10(x_6 + x_7) \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
& x_3 + x_6 - x_5 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_8 = 0 \\
& 0.03x_1 + 0.01x_2 - x_9(x_3 + x_4) = 0 \\
& x_9x_3 + 0.02x_6 - 0.025x_5 \leq 0 \\
& x_9x_4 + 0.02x_7 - 0.015x_8 \leq 0 \\
& 0 \leq x_1, x_2, x_6 \leq 300 \\
& 0 \leq x_3, x_5, x_7 \leq 100 \\
& 0 \leq x_4, x_8 \leq 200 \\
& 0.01 \leq x_9 \leq 0.03
\end{aligned}$$

Problema 17: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = -600.0$. Retirado de (Floudas e Pardalos, 1990).

$$\begin{aligned}
\min \quad & 6x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 10x_4 - 9x_7 - 15x_8 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 0 \\
& -x_3 - x_5 + x_7 = 0 \\
& -x_4 - x_6 + x_8 = 0 \\
& -3x_1 - x_2 + x_9x_5 + x_9x_6 = 0 \\
& 2x_3 - 2.5x_7 + x_9x_5 \leq 0 \\
& 2x_4 - 1.5x_8 + x_9x_6 \leq 0 \\
& 0 \leq x_1, x_2 \leq 800 \\
& 0 \leq x_3, x_5, x_7 \leq 600 \\
& 0 \leq x_4, x_6, x_8 \leq 200 \\
& 1 \leq x_9 \leq 3
\end{aligned}$$

Problema 18 - Pooling Problem: O valor da função objetivo encontrado na literatura

para este problema é $f(x^*) = -400.0$. Retirado de (Ryoo e Sahinidis, 1995).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -9x_5 - 15x_9 + 6x_1 + 16x_2 + 10x_6 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
 & x_3 + x_7 - x_5 = 0 \\
 & x_4 + x_8 - x_9 = 0 \\
 & x_7 + x_8 - x_6 = 0 \\
 & x_{10}x_3 + 2x_7 - 2.5x_5 \leq 0 \\
 & x_{10}x_4 + 2x_8 - 1.5x_9 \leq 0 \\
 & 3x_1 + x_2 - x_{10}x_3 - x_{10}x_4 = 0 \\
 & 0 \leq x_1, x_2, x_6 \leq 300 \\
 & 0 \leq x_3, x_5, x_7 \leq 100 \\
 & 0 \leq x_4, x_8, x_9 \leq 200 \\
 & 1 \leq x_{10} \leq 3
 \end{aligned}$$

Problema 19: O valor da função objetivo encontrado na literatura para este problema é $f(x^*) = -13.401904$. Retirado de (Ryoo e Sahinidis, 1995).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1^{0.6} + x_2^{0.6} + x_3^{0.4} - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 - x_6 \\
 \text{s.a.} \quad & -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\
 & -2x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\
 & 4x_4 - x_6 = 0 \\
 & x_7 + x_8 - x_6 = 0 \\
 & x_1 + 2x_4 - 4 \leq 0 \\
 & x_2 + x_5 - 4 \leq 0 \\
 & x_3 + x_6 - 6 \leq 0 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 3 \\
 & 0 \leq x_2, x_3 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_4, x_5 \leq 2 \\
 & 0 \leq x_6 \leq 6
 \end{aligned}$$

6.6.2 Resultados Experimentais

Para o conjunto de experimentos envolvendo essa classe de problemas-testes, uma análise dos resultados obtidos é feita utilizando o melhor valor e a média da função objetivo. Inicialmente, utilizou-se o melhor valor da função objetivo retirados da Tabela 6.20. A Figura 6.20 apresenta o gráfico dos perfis de desempenho, onde verifica-se que o DELEqC+APM obteve o melhor desempenho em uma quantidade maior de problemas em relação aos outros algoritmos. Os valores das áreas sob as curvas dos perfis de desempenho podem ser observados na Tabela 6.18, onde o algoritmo DELEqC+APM obteve a maior área, seguido do DE+APM. Assim, ambos algoritmos são considerados os que possuem o melhor desempenho global.

A análise envolvendo o valor da média da função objetivo apresenta o método DELEqC+DSS como aquele que obteve o melhor desempenho para um número maior de problemas, conforme a Figura 6.21. Por fim, a Tabela 6.19 que apresenta os valores das áreas sob as curvas dos perfis de desempenho, apresenta o DELEqC+DSS como o método com melhor desempenho global.

Para o problema 15 a proposta com APM, DELEqC+APM, encontrou uma melhor solução **961.50703** em relação a solução de referência da literatura 961.715022289961.

Nessa classe de problemas, todos os problemas envolvidos, a técnica de penalização APM foi vencedora, em relação aos melhores resultados. Nos problemas 15, 17 e 18 a proposta com APM, DELEqC+APM, foi a vencedora. Já para o problema 16, em especial, houve um empate para a melhor solução nos algoritmos DELEqC+APM e DE+APM. Para o problema 19, o algoritmo DE+APM foi melhor do que os outros algoritmos.

Tabela 6.18: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.

Método	DELEqC+APM	DELEqC+DSS	DE+APM	DE+DSS
Área	1.0	0.676956	0.993867	0.859058

Tabela 6.19: Área normalizada sob as curvas dos perfis de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.

Método	DELEqC+APM	DELEqC+DSS	DE+APM	DE+DSS
Área	0.569892	1.0	0.564901	0.464514

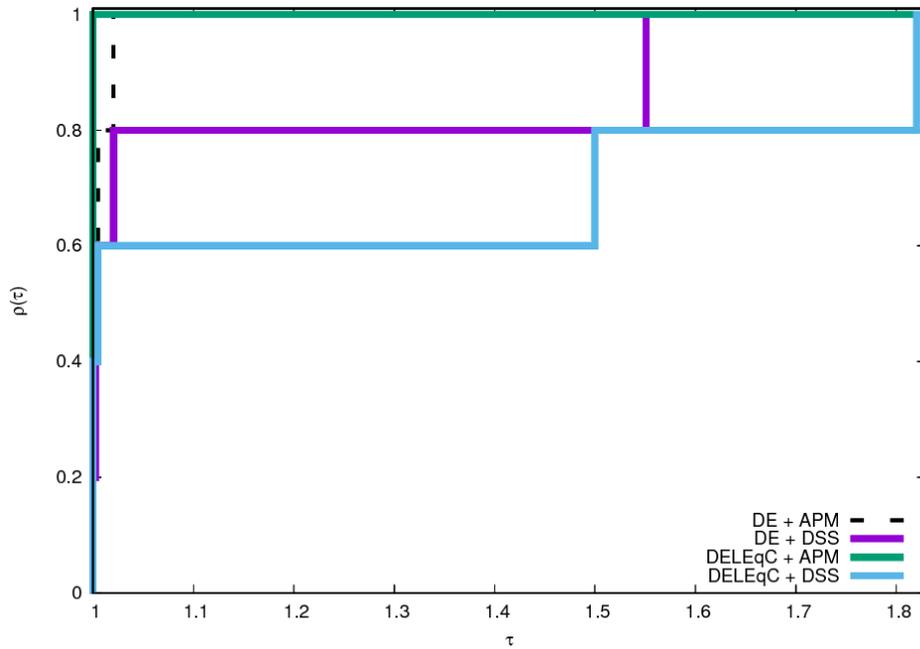


Figura 6.20: Perfil de desempenho utilizando o **melhor** dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 á 19.

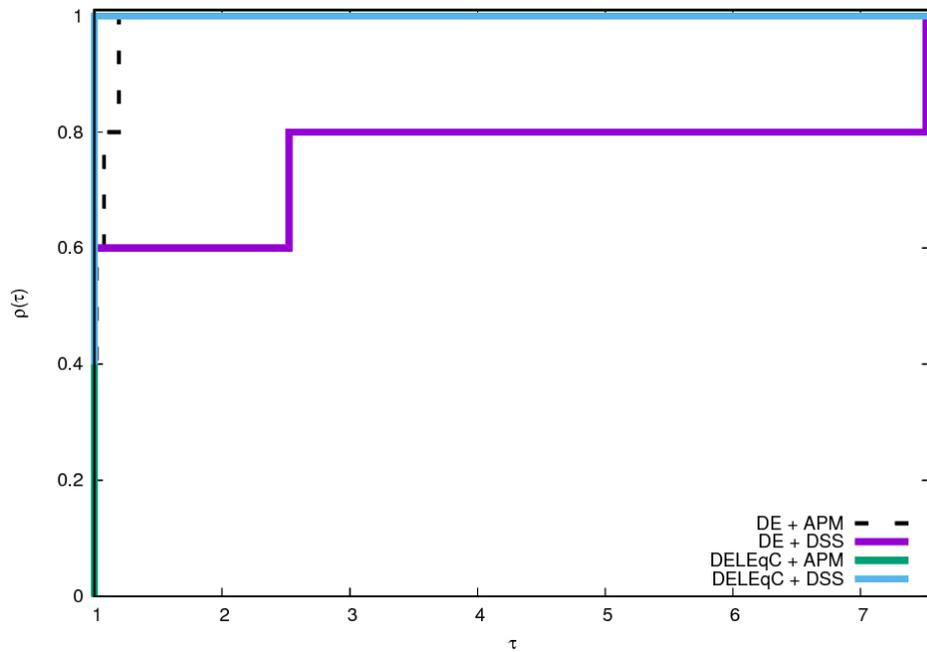


Figura 6.21: Perfil de desempenho utilizando a **média** dos resultados encontrados para os problemas-testes 15 à 19.

Tabela 6.20: Resultados obtidos dos problemas 15 à 19, com 100 rodadas independentes.

Problema	Técnica	Melhor	Mediana	Média	Desvio Padrão	Pior
15	DELEqC+APM	961.50703	961.715106	961.673887	$4.65e - 01$	962.262332
	DELEqC+DSS	961.715015	961.715101	961.71509675	$2.08e - 05$	961.715122
	DE+APM	961.71505	961.715112	961.805346	$4.81e - 01$	965.700427
	DE+DSS	961.715055	961.715102	961.816475	$5.52e - 01$	965.986653
16	DELEqC+APM	-400.055014	-400.055002	-400.05499919	$3.03e - 05$	-400.054699
	DELEqC+DSS	-400.055018	-400.055002	-400.05500225	$5.09e - 06$	-400.05496
	DE+APM	-400.055063	-385.485438	-372.119641	$3.04e + 01$	-267.797869
	DE+DSS	-399.19044	-193.308791	-158.555094	$1.99e + 02$	425.89822
17	DELEqC+APM	-600.007	-600.007	-599.96776	$3.64E - 01$	-596.368252
	DELEqC+DSS	-400.0057	-400.0057	32.3974694747	$6.18E + 02$	2501.940381
	DE+APM	-600.007	-600.007	-589.409752	$3.02E + 01$	-431.50533
	DE+DSS	-386.911793	566.141888	591.285059	$5.70E + 02$	2639.928296
18	DELEqC+APM	-398.947233	-386.854869	-385.242722	$7.83e + 00$	-357.973993
	DELEqC+DSS	-219.14	98.78	94.98	$1.36e + 02$	411.67
	DE+APM	-390.982773	-326.695753	-323.185625	$3.76e + 01$	-241.409513
	DE+DSS	-390.932972	-40.649406	-51.281201	$1.78e + 02$	265.975933
19	DELEqC+APM	-13.401976	-13.401823	-13.4018279	$2.45e - 05$	-13.401804
	DELEqC+DSS	-13.401885	-13.4018245	-13.40182611	$1.81e - 05$	-13.401804
	DE+APM	-13.402002	-13.401832	-13.401839	$3.079e - 05$	-13.401805
	DE+DSS	-13.401924	-13.401831	-13.401839	$2.86e - 05$	-13.401804

7 Conclusão

Nessa dissertação, um algoritmo de evolução diferencial (DE) modificado, denotado aqui por DELEqC, é proposto para resolver problemas de otimização com restrições lineares de igualdade, permitindo que qualquer técnica disponível para tratamento de restrições seja aplicada às demais restrições. Este novo método envolve (i) a geração de uma população inicial viável em relação às restrições lineares de igualdade, (ii) a manutenção dessa factibilidade nas gerações seguintes ao não utilizar o operador de cruzamento usual da DE e (iii) a aplicação de técnicas estabelecidas na literatura de meta-heurísticas no tratamento das demais restrições do problema.

Para os problemas de otimização com restrições lineares de igualdade estudados aqui a proposta DELEqC requer um número menor de avaliações da função objetivo para encontrar as soluções conhecidas dos problemas-teste quando comparada aos métodos DE+DSS e DE+APM. Além disso, o DELEqC obteve os melhores valores médios em 15 dos 20 problemas-teste, quando comparado com os métodos Genocop II, LPSO e CLPSO.

Na classe de problemas de otimização com restrições lineares de igualdade e de limitantes, o DELEqC foi combinado aos métodos de tratamento de restrições APM e DSS. Os resultados obtidos pelo DELEqC+APM foram aqueles com os melhores valores médios. Além disso, o DELEqC+APM alcançou um novo valor de referência para um dos problemas abordados aqui.

Nos problemas de otimização com restrições lineares de desigualdade com inserção de variáveis de folga e de limitantes, o método DELEqC+APM foi o que alcançou os melhores resultados.

Para os problemas de otimização com restrições lineares de igualdade, restrições não-lineares e limitantes, o DELEqC+APM também obteve os melhores resultados, assim como observado em casos anteriores. Adicionalmente, a proposta DELEqC+APM alcançou um resultado melhor do que o apresentado na literatura para um dos problemas-teste.

Os resultados dos experimentos computacionais indicam que o DELEqC supera as alternativas que podem ser encontradas na literatura e é uma ferramenta adicional útil para o usuário.

Como trabalhos futuros, pretende-se tratar exatamente as restrições lineares de

desigualdade sem a introdução de variáveis de folga e fazer uma análise das variantes do operador de mutação.

Referências Bibliográficas

- Barbosa, H. J., Lemonge, A. C., 2002. An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. In: GECCO. Vol. 2. Citeseer, pp. 287–294.
- Barbosa, H. J. C., 1999. A coevolutionary genetic algorithm for constrained optimization. In: Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Congress on Proceedings of the 1999. p. 1611 Vol. 3.
- Barbosa, H. J. C., Araujo, R. L., Bernardino, H. S., 2015. Progress in Artificial Intelligence: 17th Portuguese Conference on Artificial Intelligence, EPIA 2015, Coimbra, Portugal, September 8-11, 2015. Proceedings. Springer International Publishing, Ch. A Differential Evolution Algorithm for Optimization Including Linear Equality Constraints, pp. 262–273.
- Barbosa, H. J. C., Bernardino, H. S., Barreto, A. d. M. S., 2010a. Using performance profiles to analyze the results of the 2006 CEC constrained optimization competition. In: Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on. IEEE, pp. 1–8.
- Barbosa, H. J. C., Bernardino, H. S., Barreto, A. M. S., 2010b. Using performance profiles to analyze the results of the 2006 CEC constrained optimization competition. In: Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on. pp. 1–8.
- Barbosa, H. J. C., Lemonge, A. C. C., 2008. An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. INTECH Open Access Publisher.
- Barreto, A., Bernardino, H. S., Barbosa, H. J. C., 2010. Probabilistic performance profiles for the experimental evaluation of stochastic algorithms. In: Proceedings of the 12th annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. ACM, pp. 751–758.

- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., 2004. Linear Programming and Network Flows. Wiley-Interscience.
- Bean, J., Hadj-Alouane, A., 1992. A dual genetic algorithm for bounded integer programs. Tech. Rep. 92-53, The University of Michigan.
- Bernardino, H. S., Barbosa, H. J. C., Fonseca, L. G., 2011. Surrogate-assisted clonal selection algorithms for expensive optimization problems. *Evolutionary Intelligence* 4 (2), 81–97.
- Boldrini, J., 1986. Álgebra linear. HARBRA.
- Cheng, S.-L., Hwang, C., Nov 2001. Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm. *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, IEEE Transactions on 31 (6), 698–707.
- Coello, C. A. C., 2002. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: A survey of the state of the art.
- Darwin, C., 1871. On the origin of species. New York. D. Appleton and Co.,.
- Deb, K., 2000. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 186, 311–338.
- Deb, K., Srivastava, S., Dec. 2012. A genetic algorithm based augmented lagrangian method for constrained optimization. *Comput. Optim. Appl.* 53 (3), 869–902.
- Dolan, E., Moré, J. J., 2002. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Math. Programming* 91 (2), 201–213.
- Eberhart, R. C., Kennedy, J., 1995. A new optimizer using particle swarm theory. *Proc. of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, 39–43.
- Floudas, C. A., Pardalos, P. M., 1990. A Collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms. Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- Friedlander, A., 1994. Elementos de Programação Não-Linear. Editora da UNICAMP, São Paulo.

- Guimarães, F., 2009. Algoritmos de Evolução Diferencial. Manual de Algoritmos Evolutivos e Metaheurísticas, Minas Gerais.
- Hock, W., Schittkowski, K., 1981. Test Examples for Nonlinear Programming Codes. Springer-Verlag, Secaucus, NJ, USA.
- Holland, J., 1975. Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor.
- Holland, J. H., 1973. Genetic algorithms and the optimal allocation of trials. *SIAM J. Comput.* 2, 88–105.
- Homaifar, A., Qi, C. X., Lai, S. H., Apr. 1994. Constrained Optimization Via Genetic Algorithms. *SIMULATION* 62 (4), 242–253.
- Izmailov, A. F., Solodov, M. V. (Eds.), 2014. Newton-type methods for optimization and variational problems. Springer series in operations research and financial engineering. Springer, Heidelberg, New York.
- Joines, J., Houck, C. R., 1994. On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with ga's. In: In. IEEE Press, pp. 579–584.
- Kar, R., Mandal, D., Mondal, S., Ghoshal, S. P., 2012. Crazy based particle swarm optimization algorithm for fir band stop filter design. *Swarm and Evolutionary Computation* 7, 58–64.
- Kargupta, H., Goldberg, D. E., 1995. Black box optimization: Implications of search. University of Illinois, Urbana-Champaign.
- Koziel, S., Michalewicz, Z., 1998. A decoder-based evolutionary algorithm for constrained parameter optimization problems. In: Eiben, A., Bäck, T., Schoenauer, M., Schwefel, H.-P. (Eds.), *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN)*. Vol. 1498 of LNCS. Springer, pp. 231–240.
- Koziel, S., Michalewicz, Z., Mar. 1999a. Evolutionary algorithms, homomorphous mappings, and constrained parameter optimization. *Evol. Comput.* 7 (1), 19–44.
- Koziel, S., Michalewicz, Z., 1999b. Evolutionary algorithms, homomorphous mappings, and constrained parameter optimization. *Evolutionary Computation* 7, pp.

- Krempser, E., 2014. *Uso de Metamodelos na Evolução Diferencial para Problemas Envolvendo Simulações de Alto Custo Computacional*. Tese - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis - RJ.
- Lemonge, A. C. C., Barbosa, H. J. C., 2004. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (5), 703–736.
- Liang, J. J., Runarsson, T. P., Mezura-Montes, E., Clerc, M., Suganthan, P. N., Coello, C. A. C., Deb, K., 2006. Problem definitions and evaluation criteria for the cec 2006 special session on constrained real-parameter optimization. In: *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. Vol. 41. *Journal of Applied Mechanics*, p. 8.
- Mezura-Montes, E., Coello, C. A. C., 2008. Constrained optimization via multiobjective evolutionary algorithms. In: *Multiobjective Problem Solving from Nature: From Concepts to Applications*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 53–75.
- Michalewicz, Z., Janikow, C. Z., 1996. Genocop: A genetic algorithm for numerical optimization problems with linear constraints. *Commun. ACM* 39 (12es), 175–201.
- Monson, C. K., Seppi, K. D., Sept 2005. Linear equality constraints and homomorphous mappings in PSO. In: *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*. Vol. 1. pp. 73–80 Vol.1.
- Murtagh, B. A., Saunders, M. A., 1983. *Minos 5.1 User's Guide*. Tech. Rep. SOL 83-20R, Stanford Univ., CA, USA.
- Orvosh, D., Davis, L., Jun 1994. Using a genetic algorithm to optimize problems with feasibility constraints. In: *Evolutionary Computation, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the First IEEE Conference on*. pp. 548–553 vol.2.
- Paquet, U., Engelbrecht, A. P., 2007. Particle swarms for linearly constrained optimisation. *Fundamenta Informaticae* 76 (1), 147–170.
- Pina, H., Madeira, J., 2012. *Handling linear constraints in genetic algorithms*. Civil-Comp Press.

- Plagianakos, V., Tasoulis, D., Vrahatis, M., 2008. A review of major application areas of differential evolution. In: Chakraborty, U. (Ed.), *Advances in Differential Evolution*. Vol. 143 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 197–238.
- Potter, W. D., Miller, J. A., Tonn, B. E., Gandham, R. V., Lapena, C. N., 1992. Improving the reliability of heuristic multiple fault diagnosis via the EC-based genetic algorithm. *Applied Intelligence* 2 (1), 5–23.
- Price, K. V., 1999. An introduction to differential evolution. *New Ideas in Optimization*, 79–108.
- Ryoo, H., Sahinidis, N., 1995. Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design. *Computers & Chemical Engineering* 19 (5), 551 – 566.
- Salcedo-Sanz, S., 2009. A survey of repair methods used as constraint handling techniques in evolutionary algorithms. *Computer Science Review* 3 (3), 175 – 192.
- Schoenauer, M., Michalewicz, Z., 1996. Evolutionary computation at the edge of feasibility. In: *In Proc. of Parallel Problem Solving from Nature (PPSN)*. Springer Verlag LNCS, pp. 245–254.
- Storn, R., Price, K. V., 1995. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization* 11, 341–359.
- Ullah, A. S. B., Sarker, R., Lokan, C., 2012. Handling equality constraints in evolutionary optimization. *European Journal of Operational Research* 221 (3), 480 – 490.