

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós -Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

*Douglas Ferreira Brum*

*O Espaço de Módulos de Geodésicas  
Complexas no Plano Hiperbólico Complexo*

Juiz de Fora

2013

*Douglas Ferreira Brum*

*O Espaço de Módulos de Geodésicas  
Complexas no Plano Hiperbólico Complexo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática Pura.

Orientador : Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso.

Juiz de Fora

2013

Brum, Douglas Ferreira.

O Espaço de Módulos de Geodésicas Complexas no Plano  
Hiperbólico Complexo / Douglas Ferreira Brum.

2013. 97f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Espaço de Módulos. 2. Matriz de Gram. 3. Geodésicas Complexas. I. Título.

*Douglas Ferreira Brum*

*O Espaço de Módulos de Geodésicas  
Complexas no Plano Hiperbólico Complexo*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Sérgio Guilherme De Assis Vasconcelos  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Francisco Dutenhofner  
UFMG

Juiz de Fora, 30 de agosto de 2013.

*Aos meus pais.*

# *AGRADECIMENTOS*

- À Deus, por ter providenciado todo o necessário para a realização deste trabalho.
- Ao meu orientador professor Luís Fernando Crocco Afonso, por sua paciência, dedicação, apoio, disponibilidade e por me ajudar a tornar esse trabalho possível.
- Ao professor Sérgio Vasconcelos, pelo embasamento teórico fornecido através da disciplina de Tópicos de Geometria I.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- À minha família, em especial minha mãe, por seu apoio constante na realização deste sonho.
- Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática na UFJF que muito contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.
- Ao professor Francisco Dutenhefner, pela sua participação na banca examinadora e pelas sugestões que culminaram no melhoramento desta dissertação.
- À professora Flaviana Ribeiro, por contribuições, de cunho algébrico, nessa dissertação.
- Aos colegas e amigos de Mestrado, pelo apoio e companheirismos nessa jornada.
- Ao pequeno grupo de ex-alunos de tutoria que se tornaram meus grandes amigos, pelos momentos de amizade, confraternização e de descontração.

# *RESUMO*

Esse trabalho visa descrever o espaço de Módulos de  $m$ -uplas geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  nos casos regular, especial e degenerado. Para tal fim faremos uso da matriz de Gram e dos invariantes ( $d$ -invariantes,  $\delta$ -invariantes, invariante angular e invariantes parabólicos) que descrevem unicamente a classe de congruência de  $PU(2, 1)$  de  $m$ -uplas ordenadas de geodésicas complexas distintas nos diferentes casos supracitados.

Palavras-Chave: Espaço de Módulos. Matriz de Gram. Geodésicas Complexas.

# *ABSTRACT*

This work aims to describe the Moduli space of  $m$ -tuples distinct complex geodesics in  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  in the cases regular, special and degenerate. To this end we use the Gram matrix and the invariant (d-invariant,  $\delta$ -invariants, angular invariant and parabolic invariants) that define uniquely the  $\text{PU}(2,1)$ -congruence class of ordered  $m$ -tuples of distinct complex geodesics in the different cases above.

Key-words: Moduli Space. Gram Matrix. Complex Geodesics.

# *LISTA DE FIGURAS*

1	Representação de $\mathbb{C}^{2,1}$ . . . . .	25
2	Assinatura Hiperbólica . . . . .	26
3	Assinatura Parabólica . . . . .	26
4	Assinatura Elíptica . . . . .	26
5	$c$ -quadrilátero simples: $P(c_1, c_2, c_3, c_4)$ . . . . .	60
6	$c$ -quadrilátero não simples . . . . .	61
7	$c$ -pentágono e sua configuração reduzida . . . . .	74
8	$c$ -hexágono e sua configuração reduzida . . . . .	76
9	Geodésicas $c_1$ e $c_2$ . . . . .	95

# *SUMÁRIO*

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
<b>2</b>	<b>ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO DE DIMENSÃO 2</b>	13
2.1	ESPAÇO COMPLEXO $\mathbb{C}^{2,1}$ . . . . .	13
2.1.1	O ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO DE DIMENSÃO 2 . . . . .	14
2.2	O PRODUTO VETORIAL HERMITIANO . . . . .	15
2.3	MODELO DO PARABOLÓIDE (OU DOMÍNIO DE SIEGEL) . . . . .	16
2.3.1	COORDENADA HOROESFÉRICA DE $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	17
2.3.2	TRANSFORMAÇÕES DE HEISENBERG . . . . .	18
<b>3</b>	<b>MATRIZ DE GRAM</b>	19
3.1	CARACTERIZAÇÃO DA MATRIZ DE GRAM . . . . .	19
3.2	CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES DE GRAM ASSOCIADAS A M- UPLAS DE PONTOS POSITIVOS . . . . .	24
<b>4</b>	<b>O ESPAÇO DE MÓDULOS DE GEODÉSICAS COMPLEXAS EM <math>\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2</math> - CASO REGULAR</b>	37
4.1	A ESFERA POLAR DE UMA CONFIGURAÇÃO DE GEODÉSICAS COMPLEXAS EM $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	37
4.2	O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES REGULARES. CASO GENÉRICO . . . . .	41
4.2.1	INVARIANTES NO CASO REGULAR . . . . .	47
4.3	CONFIGURAÇÃO POLIGONAL DE GEODÉSICAS COMPLEXAS . . . . .	58
<b>5</b>	<b>O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES REGULARES</b>	

- CASO ESPECIAL	63
<b>6 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS</b>	<b>77</b>
6.1 AS ESFERAS POLARES DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS DE GEODÉSICAS COMPLEXAS . . . . .	78
6.2 A AÇÃO DE $PU(2,1)$ NAS ESFERAS PARABÓLICAS . . . . .	83
6.3 O INVARIANTE ANGULAR DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS	87
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>97</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os espaços de Módulos estão diretamente vinculados a problemas de classificação, que a grosso modo, são problemas que tem por objetivo dizer quando objetos são ou não equivalentes. Em geral, temos uma noção de quando dois objetos são equivalentes, mas pode acontecer de dois objetos equivalentes superficialmente parecerem distintos. Então desejamos encontrar uma maneira de poder descrever objetos equivalentes com uma mesma descrição, e objetos distintos com descrições diferentes. O espaço de Módulos aparece justamente como uma espécie de solução geométrica para os problemas de classificação.

Nessa dissertação estamos interessados em descrever o espaço de módulos em casos em que dispomos de  $m$ -uplas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Este trabalho será composto por 5 capítulos principais, dispostos da seguinte forma:

**No capítulo 2** apresentamos conceitos de geometria hiperbólica com a finalidade de tornar esse trabalho acessível para leitores que não detenham conhecimentos básicos sobre o assunto.

**No capítulo 3** caracterizaremos as matrizes de Gram e definiremos alguns conceitos como: Subespaço parabólico, hiperbólico, elíptico, degenerado e regular. Neste capítulo o resultado mais importante é a Proposição 3.6, que classifica um par de  $m$ -uplas de pontos positivos como sendo congruentes em  $PU(2, 1)$ , utilizando a equivalência das matrizes de Gram.

**No capítulo 4** passamos a trabalhar com  $m$ -uplas de geodésicas complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Conceitos como: pontos polares, esfera polar aparecem por aqui. É nesse capítulo que definimos os invariantes que definem unicamente a classe de congruência de  $PU(2, 1)$  no caso regular. Por fim, podemos destacar o Teorema 4.8, onde o espaço de Módulos surge pela primeira vez em nosso trabalho.

**No capítulo 5** podemos destacar alguns dos seguintes conceitos: reta boa, reta ruim, configuração boa, configuração ruim, configuração de primeiro, segundo ou

terceiro tipo. Aqui é bom lembrar que os invariantes utilizados no capítulo anterior não são capazes de descrever unicamente as classes de congruência de  $PU(2,1)$ . Então precisaremos definir outros invariantes que cumpram essa tarefa. Nesse caso, acreditamos ser importante destacar os Exemplos 5.3 e 5.4, que descrevem respectivamente os espaços de Módulos de  $c$ -pentágonos e de  $c$ -hexágonos retangulares.

**No capítulo 6** faremos uso da razão cruzada a fim de obter um novo invariante para descrever unicamente as classes de equivalência de  $PU(2,1)$  de  $m$ -uplas ordenadas degeneradas de geodésicas complexas distintas.

Por fim é importante salientar que o final de cada demonstração será marcado por um pequeno quadrado hachurado (■), bem como o fim de exemplos estará indicado por um pequeno círculo hachurado (●).

## 2 *ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO DE DIMENSÃO 2*

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos básicos de geometria hiperbólica complexa a fim de dar ao leitor, não familiarizado com o assunto, condições mínimas para entender os resultados apresentados ao longo do trabalho. Para isso, iniciaremos introduzindo as noções de espaço complexo  $\mathbb{C}^{2,1}$  e o espaço hiperbólico complexo  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Definiremos em seguida geodésica complexa, vetor polar a uma geodésica complexa, produto vetorial hermitiano. E terminaremos apresentando o domínio de Siegel, coordenadas horoesféricas e as transformações de Heisenberg.

### 2.1 ESPAÇO COMPLEXO $\mathbb{C}^{2,1}$

A fim de definir o espaço hiperbólico complexo de dimensão 2, inicialmente consideramos  $\mathbb{C}^{2,1}$  o espaço vetorial complexo munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$ . Se  $z \in \mathbb{C}^{2,1}$ , então  $z$  é representado como

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

com  $z_i \in \mathbb{C}$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ .

Dado  $z, w \in \mathbb{C}^{2,1}$  temos que a forma hermitiana mencionada acima é dada por

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= [w]^* I_{2,1} [z] \\ &= z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3, \end{aligned}$$

onde  $[w]^*$  é a transposta conjugada do vetor coluna  $[w]$  e  $I_{2,1} = (a_{ij})$  é matriz  $3 \times 3$  tal

que

$$I_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

É válido ressaltar que alguns autores fazem uso da forma escrita da seguinte maneira  $\langle z, w \rangle = [z]^* I_{2,1} [w]$ . Para nós a forma Hermitiana utilizada será a definida acima. Apenas no capítulo 6 utilizaremos outro produto, com a finalidade de facilitar o nosso trabalho no referido capítulo.

Podemos destacar três subconjuntos de  $\mathbb{C}^{2,1}$

$$V_- = \{z \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle z, z \rangle < 0\},$$

$$V_0 = \{z \in \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} \mid \langle z, z \rangle = 0\},$$

$$V_+ = \{z \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle z, z \rangle > 0\}.$$

Se  $z, w, u$  pertencem respectivamente a  $V_-, V_0$  e  $V_+$ , então  $z$  é denominado vetor negativo,  $w$  vetor nulo ou isotrópico e  $u$  vetor positivo. Note que se  $z \in V_-$ , tomando  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , temos que  $\lambda z \in V_-$ . Basta ver que se  $z \in V_-$ , então  $\langle z, z \rangle < 0$ . Daí,  $\langle \lambda z, \lambda z \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle z, z \rangle = |\lambda|^2 \langle z, z \rangle < 0$ , portanto  $\lambda z \in V_-$ . O mesmo ocorre com  $V_0$  e  $V_+$ .

Isso nos motiva a estabelecer a seguinte relação de equivalência.

Considere a seguinte relação em  $\mathbb{C}^{2,1}$ :  $z$  e  $w$  se relacionam,  $z \sim w$  se, e somente se,  $z = \lambda w$  onde  $z, w \in \mathbb{C}$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência. Daí, definimos

$$\frac{\mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\}}{\sim} = \mathbb{P}\mathbb{C}^2$$

Ao qual damos o nome de espaço projetivo complexo de dimensão 2. A aplicação projeção de  $\mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\}$  sobre  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  é definida por

$$\pi : \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^2$$

$$z \mapsto [z].$$

### 2.1.1 O ESPAÇO HIPERBÓLICO COMPLEXO DE DIMENSÃO 2

O espaço hiperbólico complexo de dimensão 2 é a imagem de  $V_-$  pela aplicação projeção, ou seja,  $H_{\mathbb{C}}^2 = \pi(V_-)$ , cuja fronteira  $\partial H_{\mathbb{C}}^2 = \pi(V_0)$ . Note que se  $z \in H_{\mathbb{C}}^2$ , então

$z = (z_1, z_2, z_3)^t$  com  $z_3 \neq 0$ . Dessa forma  $z \sim (\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}, 1)^t$ . Fazendo uso da forma hermitiana, obtemos que

$$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 1 < 0.$$

Isso mostra que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  está identificado com a bola  $B^2 = \{(z_1, z_2)^t; |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ . Assim como  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  está identificado com  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ .

A métrica utilizada em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é denominada métrica de Bergman, e é dada por:

$$\cosh^2 \left( \frac{\rho(x, y)}{2} \right) = \frac{\langle X, Y \rangle \langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle},$$

onde  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e seus representantes  $X, Y \in \mathbb{C}^{2,1}$ . Definimos  $U(2,1)$  como o grupo unitário com relação a forma hermitiana, ou seja, se  $A \in U(2,1)$ , então  $A$  preserva a forma hermitiana. Da maneira como definimos a forma hermitiana, isso é o equivalente a dizer que  $A^* I_{2,1} A = I_{2,1}$ . A projeção de  $U(2,1)$  nos fornece o grupo projetivo unitário,  $PU(2,1)$ , que denota o grupo das isometrias holomorfas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Agora, seja  $W \subset \mathbb{C}^{2,1}$  subespaço de dimensão 2 de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Dizemos que a imagem de  $(W \cap V_-) \neq \emptyset$  é uma geodésica complexa  $c$ , ou seja,  $c = \pi(W \cap V_-)$ . É importante observar que dado  $v \in V_+$ , é possível obter geodésica complexa. Seja  $V^\perp = \{w \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle w, v \rangle = 0\}$  o complemento ortogonal de  $v$ . Note que  $\dim V^\perp = 2$  e que  $V \oplus V^\perp = \mathbb{C}^{2,1}$ . Pela assinatura de  $\mathbb{C}^{2,1}$  temos que  $V^\perp$  contém vetor negativo. Logo,  $V^\perp \cap V_- \neq \emptyset$ . Pelo anterior  $c_1 = \pi(V^\perp \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é geodésica complexa. Denominamos  $v$  vetor polar a  $c_1$ .

Considere a seguinte geodésica complexa,

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

ela é importante, pois serve como um padrão para a obtenção de qualquer outra geodésica complexa. Em outras palavras, as geodésicas complexas são cópias de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

## 2.2 O PRODUTO VETORIAL HERMITIANO

Sejam  $v, w$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Se existe  $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  tal que  $v \cap w = \{p\}$  e  $\bar{v} \cap \bar{w} = \emptyset$  então  $v$  e  $w$  se *intersectam*. Se existe  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  tal que  $\bar{v} \cap \bar{w} = \{p\}$  então  $v$  e  $w$  são *paralelas* ou *assintóticas*. Por fim, se  $v \cap w = \emptyset$  e possuem uma única geodésica complexa que é ortogonal comum a ambas, então  $v$  e  $w$  são *ultraparalelas*. No último caso, estamos considerando que  $\bar{v} \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $\bar{w} \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

O produto vetorial Hermitiano é dado pela seguinte relação,

$$\boxtimes : \mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$$

definida por,

$$v \boxtimes w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_3 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_3 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_3 - \bar{v}_3 \bar{w}_1 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_1 \end{pmatrix}.$$

Tal produto exerce o mesmo papel do produto vetorial utilizado no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Ou seja,

$$\langle v, v \boxtimes w \rangle = \langle w, v \boxtimes w \rangle = 0.$$

Agora, é interessante ressaltar que se  $c_1$  e  $c_2$  são geodésicas cujos vetores polares são respectivamente  $v$  e  $w$ , e  $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ , então o produto vetorial Hermitiano de  $v$  e  $w$ ,  $u = v \boxtimes w$ , nos fornece as seguintes possibilidades:

1. Se  $u$  é negativo,  $c_1$  e  $c_2$  se intesectam no ponto  $\pi(u)$  que corresponde ao vetor  $u$  e o ângulo entre as geodésicas complexas é  $\theta$ , onde  $\cos(\theta) = |\langle u, w \rangle|$ . Para mais detalhes veja Goldman [5].
2. Se  $u$  é nulo,  $c_1$  e  $c_2$  são assintóticas ou paralelas no ponto  $\pi(u) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  que corresponde ao vetor  $u$ .
3. Se  $u$  é positivo,  $c_1$  e  $c_2$  são ultraparalelos. Que é o mesmo que dizer que tais geodésicas são disjuntas e têm uma única geodésica complexa ortogonal comum, que é polar a  $u$ .

## 2.3 MODELO DO PARABOLÓIDE (OU DOMÍNIO DE SIEGEL)

O Domínio de Siegel é o subconjunto de  $\mathbb{C}^{2,1}$  dado por

$$\mathfrak{h}^2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0\},$$

cuja fronteira é  $\partial\mathfrak{h}^2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 = 0\} \cup \{p_\infty\}$ .

Seja  $E = (e_1, e_2, e_3)$  base canônica de  $\mathbb{C}^{2,1}$  e considere o produto interno hermitiano

assim definido anteriormente,

$$\langle z, w \rangle = [w]_E^* I_{2,1} [z]_E.$$

O que nos estamos objetivando aqui é uma mudança da base canônica  $E$  para a base  $\hat{E} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , onde  $\hat{e}_1 = e_1$ ,  $\hat{e}_2 = e_3 - e_2$  e  $\hat{e}_3 = \frac{e_3 + e_2}{2}$ . Ou seja, a matriz mudança de base é dada por

$$D = [I]_{\hat{E}}^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A matriz  $D$  é a matriz mudança da base  $\hat{E}$  para  $E$ , que satisfaz  $D[v]_{\hat{E}} = [v]_E$ , onde  $[v]_{\hat{E}}$  e  $[v]_E$  são matrizes colunas que representam  $v \in \mathbb{C}^{2,1}$  na base  $\hat{E}$  e  $E$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} B^2 &\longrightarrow \mathfrak{h}^2 \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{z_1}{z_2 + 1} \\ \frac{-z_2 + 1}{2z_2 + 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

está bem definida e é uma bijeção, denominada de transformação de Cayley.

Cuja inversa é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^2 &\longrightarrow B^2 \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{2z_1}{1 + 2w_2} \\ \frac{1 - 2z_2}{1 + 2w_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que o ponto  $(0, -1)^t \in \partial B^2$  não tem correspondente em  $\mathfrak{h}^2$ . Utilizando compactificação por uma ponto, denominemos  $p_\infty = (0, -1, 1)^t$  de ponto ideal. Na base  $\hat{E}$  tal ponto é dado por  $[p_\infty]_{\hat{E}} = (0, 1, 0)^t$ .

Dessa forma,  $\partial B^2 \longleftrightarrow \partial \mathfrak{h}^2 \cup \{p\}$ .

### 2.3.1 COORDENADA HOROESFÉRICA DE $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Seja  $(w_1, w_2) \in \mathfrak{h}^2$ . Tome  $u = 2\text{Re}(w_2) - |w_1|^2$ , pela definição de domínio de Siegel,  $u > 0$ . Rearranjando a equação obtemos  $\text{Re}(w_2) = \frac{u + |w_1|^2}{2}$ . Note que a variável imaginária de  $w_2$  está livre. Dessa forma podemos determinar  $v \in \mathbb{R}$  tal que  $w_2 = \frac{u + |w_1|^2}{2} - \frac{vi}{2}$ . Assim,

$$\mathfrak{h}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto (\zeta, v, u)$$

onde  $\zeta = z_1$ ,  $u = 2\operatorname{Re}(z_2) - |z_1|^2$  e  $v = -2\operatorname{Im}(z_2)$ . A fronteira neste caso está identificada com  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , ou seja,  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \sim \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(\zeta, v)\}$ .

### 2.3.2 TRANSFORMAÇÕES DE HEISENBERG

Destacamos, a seguir, algumas transformações de  $PU(2, 1)$ .

A transformação de Heisenberg por  $(\zeta, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  é a transformação cuja matriz na base  $\hat{E}$  é

$$T_{(\zeta, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que  $T(p_\infty) = p_\infty$  e  $T(0, 0) = (\zeta, v)$ .

A rotação de Heisenberg por um ângulo  $\theta$  é a matriz representada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $R_\theta(p_\infty) = p_\infty$  e  $R_\theta(0) = 0$ .

A dilatação real de Heisenberg por um fator  $k > 0$  é dada por

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

também como antes  $D_k(p_\infty) = p_\infty$  e  $D_k(0) = 0$ .

O subgrupo de isotropia de  $p_\infty$  e  $0 = (0, 0)$  é dado pelas aplicações da forma

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Para maiores detalhes veja [8].

### 3 MATRIZ DE GRAM

Nesta seção trataremos de uma das principais ferramentas que nos auxiliará na construção do espaço de módulos nos casos geral e especial. É a matriz de Gram que nos possibilita dizer quando duas  $m$ -uplas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , nos casos em que estas são não degeneradas, são congruentes pela ação diagonal de  $PU(2, 1)$ . Neste capítulo tal matriz será útil para dizer quando  $m$ -uplas de pontos positivos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  são congruentes em  $PU(2, 1)$ .

#### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DA MATRIZ DE GRAM

Definimos uma *matriz de Gram*  $G$  como uma matriz hermitiana,  $G^* = G$ , dada por

$$G = G(p, v) = (g_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$$

onde  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $v_i \in \mathbb{C}^{2,1}$  são levantamentos de uma  $m$ -upla  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  de pontos positivos distintos no espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ .

**Exemplo 3.1.** Sejam  $p_1, p_2, p_3$  pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  com levantamentos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

A matriz de Gram  $G$  associada a  $p = (p_1, p_2, p_3)$  definida por  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é dada por

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 11 \\ 6 & 11 & 28 \end{pmatrix}.$$

•

É importante salientar que tomando levantamentos distintos da mesma  $m$ -upla  $p$ , obteremos matrizes de Gram diferentes, ou seja, a matriz de Gram  $G$  depende dos levantamentos tomados em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Mostraremos a veracidade dessa afirmação, fazendo por simplicidade o caso em que  $m = 3$ , mas sem esquecer que o processo é válido para qualquer  $m$ .

Seja  $p = (p_1, p_2, p_3)$  uma tripla de pontos positivos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  um levantamento em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Temos

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix}$$

Substituindo  $v_i$  por  $\lambda_i v_i$ , com  $\lambda_i \neq 0$ , obtemos uma nova matriz

$$\begin{aligned} \widehat{G} = G(p, \lambda v) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \overline{\lambda_1} \langle v_1, v_1 \rangle & \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle & \lambda_1 \overline{\lambda_3} \langle v_1, v_3 \rangle \\ \lambda_2 \overline{\lambda_1} \langle v_2, v_1 \rangle & \lambda_2 \overline{\lambda_2} \langle v_2, v_2 \rangle & \lambda_2 \overline{\lambda_3} \langle v_2, v_3 \rangle \\ \lambda_3 \overline{\lambda_1} \langle v_3, v_1 \rangle & \lambda_3 \overline{\lambda_2} \langle v_3, v_2 \rangle & \lambda_3 \overline{\lambda_3} \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda_3} \end{pmatrix} \\ &= D^*GD \end{aligned}$$

Isto motiva a seguinte afirmação: Duas matrizes hermitianas  $H$  e  $\widetilde{H}$ , ambas  $m \times m$  são ditas *equivalentes* se existir uma matriz diagonal não singular  $D$  tal que  $\widetilde{H} = D^*GD$ .

**Exemplo 3.2.** Utilizando a mesma tripla  $p = (p_1, p_2, p_3)$  do Exemplo 3.1, e tomando levantamentos distintos a do referido exemplo,

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 15i \\ 6i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

Obtemos que

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \bar{i}i & \bar{i}2i & \bar{i}(3i)6 \\ \overline{2i}2i & \overline{2i}2i & \overline{2i}33i \\ \overline{3i}6i & \overline{3i}22i & \overline{3i}84i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 11 \\ 6 & 11 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{3i} \end{pmatrix}$$

as matrizes nos dois exemplos são equivalentes. •

**Observação 3.1.** Se  $G$  e  $\tilde{G}$  são associadas a uma mesma  $m$ -upla  $p$ , pelo acima, tomando levantamentos distintos de  $p$ , obtemos que  $G$  e  $\tilde{G}$  são equivalentes e então  $\det \tilde{G} = \lambda \det G$ . De fato, como  $G$  e  $\tilde{G}$  são equivalentes, cumpre que

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= D^*GD \\ \det \tilde{G} &= \det(D^*GD) \\ &= \det D^* \det G \det D \\ &= \overline{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m} (\det G) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \\ &= |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m|^2 \det G\end{aligned}$$

onde  $D$  é matriz diagonal não singular. Como  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$  segue que  $|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m|^2 > 0$ . Tomando  $\lambda = |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m|^2$  tem-se que,  $\det \tilde{G} = \lambda \det G$ .

**Definição 3.1.** Se  $p = (p_1, \dots, p_m)$  é uma  $m$ -upla ordenada de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  tal que a matriz de Gram associada a  $p$ ,  $G = (g_{ij})$  é tal que  $g_{ij} \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, m$ , então dizemos que  $p$  é *genérico*.

A demonstração da proposição a seguir nos fornece meios de normalizar uma matriz de Gram. Tal procedimento é importante e será utilizado muitas vezes ao longo desse trabalho.

**Proposição 3.2.** Seja  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de pontos positivos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Então a classe de equivalência das matrizes de Gram associadas a  $p$  contém uma matriz  $G = (g_{ij})$  tal que  $g_{ii} = 1$  e  $g_{1j} = r_{1j}$  são números reais não-negativos para  $j = 2, \dots, m$ .

**Demonstração:** Seja  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ , considere  $\widehat{v} = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_m)$  seu levantamento em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Como os  $\widehat{v}_i$  são positivos, podemos tomar o levantamento  $v_i = (\langle \widehat{v}_i, \widehat{v}_i \rangle)^{-\frac{1}{2}} \widehat{v}_i$ . Daí  $g_{ii} = \langle v_i, v_i \rangle = 1$ .

Agora, dados  $\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_m$  escrevamos  $\langle \widehat{v}_1, \widehat{v}_j \rangle = r_j e^{i\alpha_j}$ , onde  $r_j > 0, \forall j = 2, \dots, m$ . Tomemos  $v_j = \langle \widehat{v}_j, \widehat{v}_j \rangle^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha_j} \widehat{v}_j$ . Tal levantamento preserva  $g_{ii} = 1$  e nos fornece  $g_{1j} \in \mathbb{R}_+$ .

■

**Observação 3.2.** Vale destacar que se  $g_{1j} \neq 0, \forall j = 2, \dots, m$  a matriz de Gram  $G$  da proposição acima é única. Fazemos para o caso  $m = 3$ , apenas por simplicidade nas contas.

Seja  $G$  a matriz de Gram associada a  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e definida por  $v = (v_1, v_2, v_3)$  tal

que

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ \overline{r_{12}} & 1 & a \\ \overline{r_{13}} & \bar{a} & 1 \end{pmatrix}, \quad r_{12}, r_{13} > 0.$$

Suponha que exista outra matriz de Gram associada a  $p$  definida pelo levantamento  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$  com as mesmas propriedades de  $G$ ,

$$\tilde{G}(p, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} \\ \overline{\tilde{r}_{12}} & 1 & b \\ \overline{\tilde{r}_{13}} & \bar{b} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13} > 0.$$

Como  $v_i$  e  $\tilde{v}_i$  são levantamentos de  $p_i$  temos

$$\tilde{v}_1 = \lambda v_1, \quad \tilde{v}_2 = \beta v_2, \quad \tilde{v}_3 = \gamma v_3.$$

Lembrando que estamos considerando a matriz de Gram com a forma

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix},$$

Podemos destacar as seguintes relações

1.  $|\lambda|^2 = |\lambda|^2 \langle v_1, v_1 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_1 \rangle = 1;$
2.  $|\beta|^2 = |\beta|^2 \langle v_2, v_2 \rangle = \langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2 \rangle = 1;$
3.  $|\gamma|^2 = |\gamma|^2 \langle v_3, v_3 \rangle = \langle \tilde{v}_3, \tilde{v}_3 \rangle = 1;$
4.  $\lambda \bar{\beta} r_{12} = \lambda \bar{\beta} \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = \tilde{r}_{12};$
5.  $\lambda \bar{\gamma} r_{13} = \lambda \bar{\gamma} \langle v_1, v_3 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_3 \rangle = \tilde{r}_{13};$
6.  $\beta \bar{\gamma} a = \beta \bar{\gamma} \langle v_2, v_3 \rangle = \langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_3 \rangle = b.$

Como  $\lambda, \beta, \gamma$  são complexos unitários podemos escrevê-los como

$$\lambda = e^{i\theta_1}, \quad \beta = e^{i\theta_2}, \quad \gamma = e^{i\theta_3}$$

e obtemos

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} r_{12} = \tilde{r}_{12}, \quad e^{i(\theta_1 - \theta_3)} r_{13} = \tilde{r}_{13}, \quad e^{i(\theta_2 - \theta_3)} a = b.$$

Como  $\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}$  são reais positivos segue que  $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ,  $\theta_2 - \theta_3 = 0$  e  $\theta_2 - \theta_3 = 0$ . Lembrando que  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  são argumentos de complexo e portanto estão definidos no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Logo,  $\lambda = \beta = \gamma = e^{i\theta_1}$ . Segue daí que  $G = G'$ . Assim se  $p$  é genérica a matriz de Gram normalizada associada a  $p$  é única.

**Exemplo 3.3.** Nesse exemplo desejamos mostrar que quando para algum  $j = 2, \dots, m$  temos  $g_{1j} \neq 0$ , perdemos a unicidade mencionada acima. Sejam  $p_1, p_2, p_3$  pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  com levantamentos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz de Gram associada a  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e definida por  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é dada por

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

também são levantamentos de  $p_1, p_2, p_3$  respectivamente em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Cuja matriz de Gram normalizada associada é

$$G'(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

•

No capítulo 5 veremos como normalizar a matriz de Gram nesta situação.

### 3.2 CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES DE GRAM ASSOCIADAS A M-UPLAS DE PONTOS POSITIVOS

Considere em  $\mathbb{C}^{2,1}$  um subespaço vetorial  $W$ , cuja dimensão seja  $k + 1$ , com  $k = 1$  ou  $k = 2$ . Afirmamos que a restrição da matriz do produto hermitiano a  $W$  pode assumir apenas uma das seguintes assinaturas  $(k, 1)$ ,  $(k, 0)$  ou  $(k + 1, 0)$ . Dependendo da assinatura que  $W$  assuma, daremos a ele uma denominação específica. Assim, se a assinatura de  $W$  é  $(k, 1)$ ,  $(k, 0)$  ou  $(k + 1, 0)$  dizemos que  $W$  é respectivamente *hiperbólico*, *parabólico* ou *elíptico*.

Seja  $W$  subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Por comodidade diremos *assinatura de  $W$*  ao invés de dizermos *assinatura da matriz do produto hermitiano restrita ao subespaço  $W$* .

Utilizaremos o lema a seguir, abordado em Parker [7], para obter as possíveis assinaturas de um subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Sua demonstração também se encontra na fonte supracitada.

**Lema 3.3.** Se  $v, w \in \mathbb{C}^{2,1}$  com  $\langle v, v \rangle \leq 0$  e  $\langle w, w \rangle \leq 0$ , então ou  $v = \lambda w$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$  ou  $\langle v, w \rangle \neq 0$ .

Seja  $W$  subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$  com  $\dim W = 3$  segue que  $W = \mathbb{C}^{2,1}$ , conseqüentemente a assinatura de  $W$  é do tipo  $(2, 1)$ . Agora, suponha que  $\dim W = 2$ . Tome  $\{w_1, w_2\}$  base ortogonalizadora, ou seja,  $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ . O lema nos fornece que no máximo um dos dois vetores pertence a  $V_0 \cup V_-$ . Segue que

- Se nenhum dos dois vetores pertence a  $V_0 \cup V_-$  temos a assinatura  $(2, 0)$ ;
- Se um dos vetores pertencer a  $V_0$  o outro tem que pertencer a  $V_+$ , o que gera a assinatura  $(1, 0)$ ;
- Se um dos vetores pertencer a  $V_-$  o outro tem que pertencer a  $V_+$ , fornecendo a assinatura  $(1, 1)$ .

Seja  $p = (p_1, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ ,  $v = (v_1, \dots, v_m)$  um de seus levantamentos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Seja  $V \subset \mathbb{C}^{2,1}$  o espaço gerado pelos  $v_i, i = 1, \dots, m$  e  $\dim V = k + 1$ ,  $k = 1$  ou  $k = 2$ .

Então as seguintes situações são possíveis:

1.  $V$  é hiperbólico de assinatura  $(1, 1)$  ou  $(2, 1)$ ;
2.  $V$  é parabólico de assinatura  $(1, 0)$ ;
3.  $V$  é elíptico de assinatura  $(2, 0)$ .

Essas assinaturas podem ser facilmente obtidas olhando para um ponto de vista geométrico. Para tal fim, façamos uma analogia do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^{2,1}$  com o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^{2,1}$ , ambos com o produto hermitiano padrão. Tomemos um  $z \in \mathbb{R}^{2,1}$  tal que  $z$  esteja em  $V_0$ . De  $\langle z, z \rangle = 0$  segue que,

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0,$$

que é a equação de um cone. Dessa forma podemos vislumbrar  $V_0$ ,  $V_-$ ,  $V_+$  da seguinte forma.

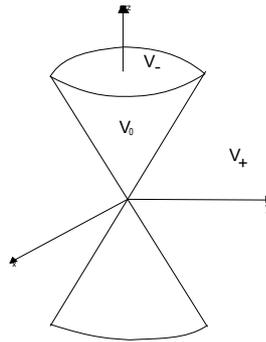


Figura 1: Representação de  $\mathbb{C}^{2,1}$

O subconjunto  $V_0$  representa a lateral do cone,  $V_-$  o interior do cone e o exterior é representado por  $V_+$ .

Os subespaços de  $\mathbb{R}^{2,1}$  de dimensão 2 são planos. Temos três possibilidades para a posição desses planos.

1) Se o plano em questão secciona o cone então a assinatura do produto hermitiano restrita a esse espaço é do tipo  $(1, 1)$ .

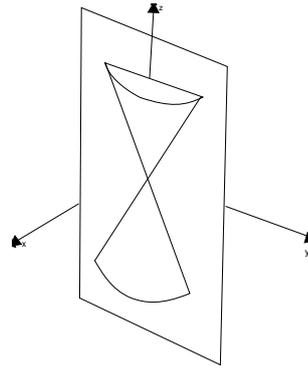


Figura 2: Assinatura Hiperbólica

2) No caso em que o plano tangencia uma geratriz do cone, não temos a presença de vetores negativos na restrição do produto ao subespaço. No entanto, temos a presença de um negativo e outro positivo. Segue que a assinatura obtida aqui é  $(1, 0)$ .

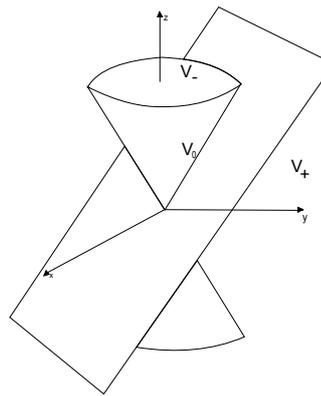


Figura 3: Assinatura Parabólica

3) Por fim temos o caso em que o plano não intersecta o cone. Nesse caso tal subespaço é gerado por dois vetores positivos. Portanto, a assinatura do produto restrita ao subespaço é  $(2, 0)$ .

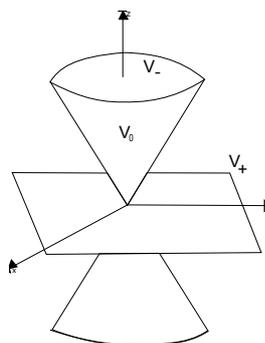


Figura 4: Assinatura Elíptica

Dada uma matriz hermitiana  $H$ , denotamos  $S(H) = (n_+, n_-, n_0)$  de assinatura (ou inércia) de  $H$ , onde  $n_+$ ,  $n_-$  e  $n_0$  são respectivamente o número de autovalores positivos, negativos e nulos de  $H$ . Se  $p$ ,  $G = G(p)$ ,  $V$ ,  $k$  são como mencionados anteriormente, então  $G$  se encontra em um dos casos abaixo:

1. No caso hiperbólico temos  $S(G) = (n_+, 1, n_0)$ , onde  $n_+ = k$ ,  $k = 1$  ou  $k = 2$  e  $n_+ + n_0 + 1 = m$ ;
2. No caso parabólico temos  $S(G) = (1, 0, n_0)$ , onde  $1 + n_0 = m$ ;
3. No caso elíptico temos  $S(G) = (2, 0, n_0)$ , onde  $2 + n_0 = m$ .

As condições acima são denominadas *condições de assinatura*.

Mostraremos o caso elíptico. Os demais são tratados de forma análoga. A título de simplicidade suporemos que  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  é uma quádrupla ordenada de pontos positivos distintos,  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  é uma quádrupla de levantamentos de  $p$  e  $V = [v_1, v_2]$  é subespaço elíptico. A menos de ordenação,  $v_3$  e  $v_4$  são combinações lineares de  $v_1$  e  $v_2$  e, como  $p_3$  e  $p_4$  são pontos distintos de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ ,  $v_4$  não é múltiplo escalar de  $v_3$ . Temos, então  $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$  e  $v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ . Daí,

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \overline{\alpha_1} \langle v_1, v_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v_1, v_2 \rangle & \overline{\beta_1} \langle v_1, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \overline{\alpha_1} \langle v_2, v_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v_2, v_2 \rangle & \overline{\beta_1} \langle v_2, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle v_2, v_2 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \overline{\alpha_1} \langle v_3, v_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v_3, v_2 \rangle & \overline{\beta_1} \langle v_3, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle v_3, v_2 \rangle \\ \langle v_4, v_1 \rangle & \langle v_4, v_2 \rangle & \overline{\alpha_1} \langle v_4, v_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v_4, v_2 \rangle & \overline{\beta_1} \langle v_4, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle v_4, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

isto é, as terceira e quarta colunas de  $G$  são combinações lineares das duas primeiras colunas. Além disso

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são autovalores linearmente independentes associados a 0. Como  $V$  é elíptico, temos que para a base  $B = \{v_1, v_2\}$ , a matriz do produto hermitiano é

$$M = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

segue que  $\Delta_1 = \langle v_1, v_1 \rangle$  e  $\Delta_2 = \det M$  são positivos, e portanto, a assinatura de  $G$  é  $(2, 0, 2)$ .

Vejamos, a título de ilustração, um exemplo de cada caso.

**Exemplo 3.4.** Sejam  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  respectivamente quádruplas de pontos positivos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  e de levantamentos destes pontos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , de modo que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o espaço gerado pelos vetores  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ . Como  $v_3$  e  $v_4$  são combinação de  $v_1$  e  $v_2$ , podemos tomar  $B = \{v_1, v_2\}$  base de  $W$ , onde  $W$  é dado por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Seja  $G$  a matriz de Gram associada a  $p$  definida por  $v$ .

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

A matriz do produto interno restrita ao subespaço  $W$  é dada por

$$[\langle, \rangle|_W] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que a assinatura de  $W$  é  $(2, 0)$ , dimensão de  $W$  é 2, daí  $W$  é elíptico. Observe ainda que  $S(G) = (n_+, n_-, n_0) = (2, 0, 2)$ , pois o polinômio característico de  $G$ ,  $p(x) = x^2(x^2 - 17x + 17)$  nos fornece os autovalores  $0, 0, \frac{\sqrt{221}+17}{2}$  e  $\frac{-\sqrt{221}+17}{2}$ . Segue também que  $n_+ + n_- + n_0 = 4 = m$ . •

**Exemplo 3.5.** Sejam  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , com  $p \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  e  $v \in \mathbb{C}^{2,1}$ , onde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o espaço gerado pelos vetores  $v_1, v_2, v_3$ . Como  $v_3$  é combinação de  $v_1$  e

$v_2$ , podemos tomar  $B = \{v_1, v_2\}$  base de  $W$ , onde  $W$  é dado por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ -x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Seja  $G$  a matriz de Gram associada a  $p$  definida por  $v$ .

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

A matriz do produto interno restrita ao subespaço  $W$  é dada por

$$[\langle, \rangle|_W] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tomando base de autovetores

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Escrevendo a matriz acima na base  $B$ , temos que

$$[\langle, \rangle|_W]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que a assinatura de  $W$  é  $(1, 0)$ , dimensão de  $W$  é 2, daí  $W$  é parabólico. Observe ainda que  $S(G) = (n_+, n_-, n_0) = (1, 0, 2)$ , pois  $p(x) = x^2(6-x)$  nos fornece que  $G$  tem autovalores 0, 0, 6. •

**Exemplo 3.6.** Sejam  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , com  $p \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  e  $v \in \mathbb{C}^{2,1}$ , onde

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o espaço gerado pelos vetores  $v_1, v_2, v_3$ . Como  $v_3$  é combinação de  $v_1$  e

$v_2$ , podemos tomar  $B = \{v_1, v_2\}$  base de  $W$ , onde  $W$  é dado por

$$W = \left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}y \\ \sqrt{3}y \end{array} \right); x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Seja  $G$  a matriz de Gram associada a  $p$  definida por  $v$ .

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

A matriz do produto interno restrita ao subespaço  $W$  é dada por

$$[\langle, \rangle|_W] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

tomando base de autovetores

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right) \right\}.$$

Escrevendo a matriz acima na base  $B$ , temos que

$$[\langle, \rangle|_W]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que a assinatura de  $W$  é  $(1, 1)$ , dimensão de  $W$  é 2, daí  $W$  é hiperbólico. Temos ainda que  $S(G) = (n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$ , pois o polinômio característico de  $G$ ,  $p(x) = -x(x-9)(x+1)$  nos dá 0, 9, -1 como autovalores de  $G$ . •

Até aqui dada uma  $m$ -upla de pontos positivos distintos  $p$  em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{2,1}$  conseguimos obter matriz de Gram associada a  $p$ . Além disso, a proposição 3.2 nos fornece meios para normalizar tal matriz. Desse modo é natural pensar se o caminho inverso também é válido. Ou seja, dada uma matriz hermitiana que cumpra determinadas condições, é possível relacioná-la com alguma  $m$ -upla de pontos positivos distintos? Vejamos a seguir a resposta para essa indagação.

**Proposição 3.4.** Seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz  $m \times m$  hermitiana tal que  $g_{ii} = 1$ . Então  $G$  é uma matriz de Gram associada a alguma  $m$ -upla ordenada  $p = (p_1, \dots, p_m)$  de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  se, e somente se,  $\text{posto}(G) \leq 3$ , e  $G$  é indefinida, positiva

definida ou positiva semi-definida cuja assinatura satisfaz as condições de assinaturas definidas anteriormente. Nos últimos dois casos,  $\text{posto}(G) \leq 2$ .

**Demonstração:** Seja  $G = (g_{ij})$  matriz hermitiana  $m \times m$  tal que  $g_{ii} = 1$ .

$$G = \begin{pmatrix} 1 & g_{1,2} & g_{1,3} & \cdots & g_{1,m-2} & g_{1,m-1} & g_{1,m} \\ g_{2,1} & 1 & g_{2,3} & \cdots & g_{2,m-2} & g_{2,m-1} & g_{2,m} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & 1 & \cdots & g_{3,m-2} & g_{3,m-1} & g_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m-2,1} & g_{m-2,2} & g_{m-2,3} & \cdots & 1 & g_{m-2,m-1} & g_{m-2,m} \\ g_{m-1,1} & g_{m-1,2} & g_{m-1,3} & \cdots & g_{m-1,m-2} & 1 & g_{m-1,m} \\ g_{m,1} & g_{m,2} & g_{m,3} & \cdots & g_{m,m-2} & g_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Faremos aqui a demonstração para o caso de assinatura  $(2, 1, n_0)$  com  $m = n_0 + 3$ . Os demais casos são similares. Pela lei de inércia de Sylvester existe matriz  $S \in GL(m, \mathbb{C})$  tal que  $S^*GS = B$  onde  $B = (b_{ij})$  é matriz diagonal  $m \times m$  tal que  $b_{11} = b_{22} = 1$ ,  $b_{33} = -1$ ,  $b_{ij} = 0$  para todos os outros índices, ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, considere a matriz  $A = (a_{ij})$ ,  $3 \times m$  tal que,  $a_{ii} = 1$  para  $1 \leq i \leq n_+$ ,  $a_{ii} = -1$  para  $i = n_+ + 1$  e  $a_{ij} = 0$  para todos os outros índices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que  $B = A^*J_{2,1}A$ . Adicionando informações anteriores podemos considerar as rela-

ções  $B = A^*J_{2,1}A$  e  $B = S^*GS$ , de modo que

$$\begin{aligned} S^*GS &= A^*J_{2,1}A \\ G &= (S^*)^{-1}A^*J_{2,1}AS^{-1} \\ G &= (AS^{-1})^*J_{2,1}(AS^{-1}) \end{aligned}$$

Basta então definir  $v_i$  como a  $i$ -ésima coluna de  $(AS^{-1})$ . Daí,  $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = [v_j]^*J_{2,1}[v_i]$ . Tomando  $p_i = \pi(v_i)$ , onde  $\pi$  é a aplicação projeção. Portanto,  $G(p, v)$  é a matriz de Gram associada a  $m$ -upla  $p = (p_1, \dots, p_m)$  definida pelo levantamento  $v = (v_1, \dots, v_m)$ . Observe que

- i. os  $p_i$ 's encontrados são positivos, pois  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ .
- ii. os  $p_i$ 's são distintos, pois todas as colunas de  $A$  são L.I. Segue daí que  $AS^{-1}$  só possui vetores coluna L.I.

■

**Exemplo 3.7.** Considere a matriz  $G$  abaixo. Desejamos demonstrar que ela é matriz de Gram utilizando os passos do teorema anterior.

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar  $S \in GL(m, \mathbb{C})$  tal que  $S^*GS = B$ , com

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} S,$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & -\frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} & \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} & \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Tome matriz  $A = (a_{ij})$ ,  $3 \times 3$ , tal que  $a_{ii} = 1$  para  $i = 1, 2$ ,  $a_{33} = -1$ ,  $a_{ij} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ .

Expressamos  $A$  e  $AS^{-1}$  abaixo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad AS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} & \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} & \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & -\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Basta tomar

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}.$$

•

**Definição 3.5.** Seja  $p = (p_1, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  e  $v = (v_1, \dots, v_m)$  seu levantamento em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . A  $m$ -upla  $p$  é dita *hiperbólica*, *parabólica* ou *elíptica* se o espaço  $W$ , gerado pelos  $v_1, \dots, v_m$ , for respectivamente hiperbólico, parabólico ou elíptico.

Seja  $W \subset \mathbb{C}^{2,1}$  subespaço vetorial,  $\dim W = k + 1$ ,  $k = 1$  ou  $k = 2$ , dizemos que  $W$  é *degenerado* ou *singular* se existe  $w \in W$  tal que  $\langle w, v \rangle = 0$  para todo  $v \in W$  onde  $w \neq 0$ . Caso contrário o subespaço é *regular* ou *não singular*.

**Observação 3.3.** Podemos observar que o espaço  $W$  associado a uma  $m$ -upla  $p = (p_1, \dots, p_m)$  de pontos positivos distintos de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  é degenerado se, e somente se,  $p$  é parabólico.

De fato, no caso em que  $\dim W = 2$  existe uma base  $B = \{w_1, w_2\}$  tal que a matriz do produto hermitiano é diagonal dada por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

onde  $a, b$  são positivos, no caso elípticos;  $a$  é positivo,  $b$  é negativo no caso hiperbólico e  $a$  é positivo e  $b$  nulo no caso parabólico. No caso em que  $\dim W = 3$  a matriz em questão é a própria  $I_{2,1}$ .

**Definição 3.6.** Sejam  $p = (p_1, \dots, p_m)$  e  $p' = (p'_1, \dots, p'_m)$  duas  $m$ -uplas ordenadas de pontos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Dizemos que  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(2, 1)$  quando existe  $g \in PU(2, 1)$  tal que  $g(p_i) = p'_i$ .

Para a demonstração da proposição a seguir faremos uso do Teorema de Witt (veja Scharlau [11]), abaixo enunciado

**Lema 3.7.** (Teorema de Witt) Seja  $(V, \langle, \rangle)$  um espaço vetorial regular. Sejam  $W \subset V$  um subespaço de  $V$  e  $\sigma : W \rightarrow V$  uma isometria. Então, existe uma extensão isométrica  $\Sigma : V \rightarrow V$  de  $\sigma$  a  $V$ .

**Proposição 3.8.** Sejam  $p = (p_1, \dots, p_m)$  e  $p' = (p'_1, \dots, p'_m)$  duas  $m$ -uplas ordenadas de pontos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Suponhamos  $p$  e  $p'$  ambos hiperbólicos ou ambos elípticos. Então  $p$  e  $p'$  são congruentes em  $PU(2, 1)$  se, e somente se, as matrizes de Gram normalizadas associadas a  $p$  e a  $p'$  são iguais.

**Demonstração:** Sejam  $p = (p_1, \dots, p_m)$  e  $p' = (p'_1, \dots, p'_m)$   $m$ -uplas ordenadas de pontos positivos distintos congruentes em  $PU(2, 1)$ , isto é, existe  $g \in PU(2, 1)$  com  $g(p_i) = p'_i$  para todo  $i$ . Tome  $q = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $q' = (q'_1, \dots, q'_m)$  e designaremos por  $g$  o levantamento de  $g \in PU(2, 1)$ . Como  $\pi(g(q_i)) = \pi(q'_i) = p_i$  segue que existem  $\lambda_i$  tais que  $g(q_i) = \lambda_i q'_i$ .

Além disso, como  $g$  preserva a forma hermitiana, temos que

$$\begin{aligned} G(p, Q) &= \begin{pmatrix} \langle q_1, q_1 \rangle & \langle q_1, q_2 \rangle & \cdots & \langle q_1, q_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle q_m, q_1 \rangle & \langle q_m, q_2 \rangle & \cdots & \langle q_m, q_m \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle g(q_1), g(q_1) \rangle & \langle g(q_1), g(q_2) \rangle & \cdots & \langle g(q_1), g(q_m) \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle g(q_m), g(q_1) \rangle & \langle g(q_m), g(q_2) \rangle & \cdots & \langle g(q_m), g(q_m) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \lambda_1 q'_1, \lambda_1 q'_1 \rangle & \langle \lambda_1 q'_1, \lambda_2 q'_2 \rangle & \cdots & \langle \lambda_1 q'_1, \lambda_m q'_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \lambda_m q'_m, \lambda_1 q'_1 \rangle & \langle \lambda_m q'_m, \lambda_2 q'_2 \rangle & \cdots & \langle \lambda_m q'_m, \lambda_m q'_m \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daí, por resultado já visto,  $G = D^* \tilde{G} D$ , onde  $D$  é matriz diagonal ( $m \times m$ ). Portanto  $G$  e  $\tilde{G}$  são equivalentes. Normalizando tais matrizes obtemos a igualdade desejada.

Reciprocamente, sejam  $p = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $p' = (p'_1, \dots, p'_m)$   $m$ -uplas ordenadas de pontos hiperbólicos distintos,  $q = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $q' = (q'_1, \dots, q'_m)$  suas respectivas  $m$ -uplas de levantamentos e  $W, W'$  os espaços gerados por esses levantamentos.

Como as matrizes de Gram associadas a  $p$  e a  $p'$  são equivalentes segue que  $\dim W = \dim W'$ . Caso contrário, o número de colunas L.I de  $G$  e  $G'$  seriam distintos.

Agora, suponha que  $W$  e  $W'$  sejam subespaços próprios de  $\mathbb{C}^{2,1}$  de dimensão 2. Reordenando, se necessário, podemos considerar  $B = \{q_1, q_2\}$  e  $B' = \{q'_1, q'_2\}$  bases de  $W$  e  $W'$  respectivamente. Podemos definir,  $g : W \rightarrow W'$  dada por  $g(\alpha q_1 + \beta q_2) = \alpha q'_1 + \beta q'_2$ . Desejamos mostrar que  $g(q_3) = q'_3$ .

O fato de  $q_3 \in W$  nos possibilita escrever esse vetor como combinação linear de  $q_1, q_2$ , ou seja,  $q_3 = aq_1 + bq_2$ . Similarmente  $q'_3 \in W'$  pode ser escrito da seguinte forma  $q'_3 = a'q'_1 + b'q'_2$ . Daí,

$$\begin{cases} \langle q_3, q_1 \rangle = a + b \langle q_2, q_1 \rangle \\ \langle q_3, q_2 \rangle = a \langle q_1, q_2 \rangle + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle q'_3, q'_1 \rangle = a' + b' \langle q'_2, q'_1 \rangle \\ \langle q'_3, q'_2 \rangle = a' \langle q'_1, q'_2 \rangle + b' \end{cases}$$

Como  $\langle q_i, q_j \rangle = \langle q'_i, q'_j \rangle$ , temos que  $(a, b)$  e  $(a', b')$  são soluções do mesmo sistema de equações. Temos que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é

$$\begin{vmatrix} \langle q_1, q_1 \rangle & \langle q_1, q_2 \rangle \\ \langle q_2, q_1 \rangle & \langle q_2, q_2 \rangle \end{vmatrix} \neq 0,$$

pois por hipótese  $W$  é hiperbólico ou elíptico. Daí, o sistema é possível e determinado, de onde segue que  $(a, b) = (a', b')$ .

Portanto,  $g(q_3) = q'_3$  e conseqüentemente aplicando o mesmo raciocínio  $g(q_i) = q'_i$ ,  $\forall i \in \{4, \dots, m\}$ . Note que  $g$  preserva a forma hermitiana, pois  $\langle g(q_i), g(q_i) \rangle = \langle q'_i, q'_i \rangle$  e como  $G$  e  $G'$  normalizadas são iguais, temos que  $\langle q'_i, q'_i \rangle = \langle q_i, q_i \rangle$ , logo  $\langle g(q_i), g(q_i) \rangle = \langle q_i, q_i \rangle$ .

Logo,  $g$  é uma isometria. Utilizando o Teorema de Witt, podemos estender a  $g$  para  $\mathbb{C}^{2,1}$ , obtendo o resultado desejado. ■

É de suma importância ressaltar que o mesmo não vale para quando a  $m$ -upla  $p$  é parabólica. Veja o exemplo a seguir

**Exemplo 3.8.** Seja  $p = (p_1, p_2, p_3)$  uma tripla ordenada de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ , com os seguintes levantamentos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

onde  $z \in \mathbb{C}$ , com  $z \neq 0, 1$ . Observe que  $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ , para todo  $i, j = 1, 2, 3$  e que  $G = (g_{ij})$

não depende de  $z$ ,

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

onde  $v_0 = (1, 0, 1)^t$  é vetor isotrópico de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Como  $v_0 = v_2 - v_1$ , então  $v_0$  pertence ao espaço  $W$  gerado por  $v_1, v_2, v_3$ . Isso implica diretamente que  $W$  é degenerado. Suponha que  $p' = (p_1, p_2, p'_3)$  seja outra tripla ordenada de pontos positivos distintos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Com  $v_1, v_2$  e  $v'_3$  levantamentos de  $p_1, p_2$  e  $p'_3$  respectivamente, onde

$$v_3 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad v'_3 = \begin{pmatrix} z' \\ 1 \\ z' \end{pmatrix}.$$

Até aqui, conseguimos obter duas triplas distintas com a mesma matriz de Gram. É notório que as triplas  $p$  e  $p'$  serão distintas, se tivermos  $v_3 \neq v'_3$ , o que ocorre se, e somente se,  $z \neq z'$ .

Desejamos mostrar que não existe  $g \in PU(2, 1)$  tal que  $g(p) = p'$ . Para isso podemos supor por contradição que existe  $\gamma \in PU(2, 1)$  tal que  $\gamma(p) = p'$ . Então,  $\gamma(p_1) = p_1$ ,  $\gamma(p_2) = p_2$  e  $\gamma(p_3) = p'_3$ .

Note que  $v_3 = (1 - z)v_1 + zv_2$ , o que nos mostra que  $v_3$  é combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ . Temos que,

$$\begin{aligned} v'_3 = \gamma(v_3) &= \gamma((1 - z)v_1 + zv_2) \\ &= (1 - z)\gamma(v_1) + z\gamma(v_2) \\ &= (1 - z)v_1 + zv_2 \\ &= v_3 \end{aligned}$$

O que é uma contradição, dado que estamos considerando que  $v_3 \neq v'_3$ .

Portanto, no caso de  $m$ -uplas degeneradas é possível tomar duas  $m$ -uplas com a mesma matriz de Gram sem que exista congruência em  $PU(2, 1)$  entre tais  $m$ -uplas. •

## 4 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE GEODÉSICAS COMPLEXAS EM $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ - CASO REGULAR

Nesse capítulo, nosso maior interesse é a descrição do espaço de módulos de  $m$ -uplas regulares de geodésicas complexas distintas.

### 4.1 A ESFERA POLAR DE UMA CONFIGURAÇÃO DE GEODÉSICAS COMPLEXAS EM $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Seja  $W$  subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^{2,1}$  com  $\dim W = 2$  tal que  $W \cap V_- \neq \emptyset$ . Definimos a *geodésica complexa*  $c \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  como a imagem de  $W \cap V_-$  pela aplicação projeção, ou seja,  $c = \pi(W \cap V_-)$ .

Agora observe que como  $W$  é subespaço de dimensão 2 segue que a dimensão do complemento ortogonal de  $W$ , denotado por  $W^\perp$ , é igual a 1. Além disso, de  $W \cap V_- \neq \emptyset$  segue que existe  $v \in V_+$  tal que  $S^\perp = \{\alpha v; \alpha \in \mathbb{C}\}$ . Denotamos o vetor positivo  $v$  de *vetor polar* a geodésica complexa  $c$ . A reta complexa positiva gerada por  $v$  é chamada de *reta polar*. Por fim, denominamos de *ponto polar* à geodésica complexa  $c$  a imagem do vetor polar  $v$  pela aplicação projeção  $\pi$ .

Pelo anterior, dado um ponto positivo  $p \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  podemos associá-lo a uma geodésica complexa  $c \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Para tanto, basta tomar um levantamento  $v$  do ponto  $p$ , e notar que o complemento ortogonal de  $v$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^{2,1}$  com dimensão 2 cuja interseção com  $V_-$  é diferente do conjunto vazio. A projeção dessa interseção nos fornece a geodésica complexa  $c(p)$ .

Fixemos a geodésica complexa  $c(p)$  com a finalidade de mostrar que podemos associá-la apenas ao ponto positivo  $p$ . Temos que  $c(p)$  é geodésica complexa associada ao ponto

$p \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Então,  $c(p) = \pi(W \cap V_-)$ , onde  $W$  é subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$ ,  $\dim W = 2$  e  $W \cap V_- \neq \emptyset$ . Sejam  $v_1, v_2$  vetores linearmente independentes de  $W$  tais que,  $v_1 = (a, b, c)^t$  e  $v_2 = (d, e, f)^t$ , onde  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ .

Suponha que exista  $w \in \mathbb{C}^{2,1}$  tal que

$$\begin{cases} \langle v_1, w \rangle = 0 \\ \langle v_2, w \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{então} \quad \begin{cases} az_1 + bz_2 - cz_3 = 0 \\ dz_1 + ez_2 - fz_3 = 0 \end{cases}$$

Note que  $(z_1, z_2, z_3)$  é família de soluções dependendo de um único parâmetro. Como  $p$  satisfaz o sistema acima, temos que  $w$  precisa ser um levantamento de  $p$ . Isso mostra que existe uma relação biunívoca entre geodésicas complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e pontos positivos em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ .

A partir desse momento passaremos a focar nossa atenção em  $m$ -uplas ordenadas  $C = (c_1, \dots, c_m)$  de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $m > 1$ .

Começaremos nosso trabalho aqui fazendo uma distinção entre dois tipos de  $m$ -uplas ordenadas de geodésicas complexas.

**Definição 4.1.** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas e  $v_1, \dots, v_m$  os vetores polares de  $c_1, \dots, c_m$  respectivamente. Dizemos que  $C$  é *regular* se  $V(C)$ , o espaço gerado pelos  $v_1, \dots, v_m$ , é regular. Caso contrário,  $C$  é *degenerado*, ou *parabólico*.

Pela Observação 3.3,  $C$  é regular se, e somente se, é hiperbólica ou elíptica, e  $C$  é degenerada se, e somente se, é parabólica. Note que no caso em que  $C$  é hiperbólica temos que  $V(C) = \mathbb{C}^{2,1}$  ou  $V(C)$  é subespaço próprio de  $\mathbb{C}^{2,1}$  cuja dimensão é 2. Pois, por definição,  $V(C)$  tem assinatura  $(k, 1)$ ,  $k = 1$  ou  $k = 2$  e  $\dim V(C) = k + 1$ . Nos casos elíptico e parabólico pela assinatura dos subespaços,  $k$  só pode ser 1, daí a dimensão em ambos os casos é 2, portanto os subespaços são próprios.

Assim, se  $V(C)$  é subespaço próprio, onde  $C$  é  $m$ -upla com  $m > 1$ , segue que  $\dim V(C) = 2$ .

**Definição 4.2.** Seja  $V(C)$  um subespaço próprio de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Denominamos de *esfera polar* definida por  $C$  a reta projetiva complexa em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  dada por  $S(C) = \pi(V(C) \setminus \{0\})$ .

Sejam  $v_1, \dots, v_m$  levantamentos de  $p_1, \dots, p_m$ , respectivamente. O espaço  $V(C)$  tem dimensão 2, por hipótese. Digamos que ele seja gerado por  $v_1$  e  $v_2$ . Então,  $S(C) =$

$\{\pi(\alpha v_1 + \beta v_2; \alpha, \beta \in \mathbb{C})\}$ . Mas todo  $v_i$  é combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ . Logo existem  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  tais que  $v_i = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2$ . Portanto,  $p_i = \pi(\alpha_i v_1 + \beta_i v_2) \in S(C)$ .

Vejam alguns exemplos ilustrativos de esferas polares no caso em que o subespaço associado é elíptico, parabólico e hiperbólico.

**Exemplo 4.1.** Sejam  $c_1, c_2$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $v_1, v_2$  seus respectivos vetores polares dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o subespaço gerado pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$ ,

$$W = [v_1, v_2] = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \\ 0 \end{pmatrix}; w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

A esfera polar  $S(C) = \pi(W)$  é coberta por duas vizinhanças coordenadas,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

•

**Exemplo 4.2.** Sejam  $C = (c_1, c_2)$  par ordenado de geodésica complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $v_1, v_2$  seus respectivos vetores polares dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o subespaço gerado pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$ ,

$$W = [v_1, v_2] = \left\{ \begin{pmatrix} 2z + 4w \\ 0 \\ z + w \end{pmatrix}; w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

A esfera polar  $S(C) = \pi(W)$  é coberta por duas vizinhanças coordenadas,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

•

**Exemplo 4.3.** Sejam  $C = (c_1, c_2)$  par ordenado de geodésica complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $v_1, v_2$  seus respectivos vetores polares dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considere  $W$  o subespaço gerado pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$ ,

$$W = [v_1, v_2] = \left\{ \begin{pmatrix} z + w \\ w \\ w \end{pmatrix}; w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

A esfera polar  $S(C) = \pi(W)$  é coberta por duas vizinhanças coordenadas,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

•

**Observação 4.1.** Se  $C$  é hiperbólico e  $V(C)$  é próprio, então  $S(C)$  intersecta  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Se  $C$  é elíptico, então  $S(C)$  contém apenas pontos positivos. Finalmente, se  $C$  é parabólico, então  $S(C)$  é tangente a  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em um ponto.

Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $p = (p_1, \dots, p_m)$  e  $v = (v_1, \dots, v_m)$   $m$ -uplas ordenadas de pontos polares e de vetores polares a  $c_1, \dots, c_m$ , respectivamente. Considere  $V(C) = [v_1, \dots, v_m]$  o subespaço associado a  $C$  gerado pelos  $v_1, \dots, v_m$ . Suponha que  $\dim V(C) = 2$  e que  $B = \{w_1, w_2\}$  é base de  $V(C)$  ortogonal com relação a forma hermitiana. Desse modo a matriz do produto interno restrita a  $S(C)$  na base  $B$  é dada por

$$[\langle, \rangle |_{V(C)}]_B = \begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle w_2, w_2 \rangle \end{pmatrix}$$

1. Se  $V(C)$  é hiperbólico, então sua assinatura é  $(1, 1)$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $\langle w_2, w_2 \rangle < 0$ , daí,  $w_2 \in V_-$ . Portanto,  $S(C)$  intersecta  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em  $p = \pi(w_2)$ .
2. Se  $V(C)$  é elíptico sua assinatura é  $(2, 0)$ . Tome  $w \in V(C)$  arbitrário, então  $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ , daí  $\langle w, w \rangle = |\alpha_1|^2 \langle w_1, w_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle w_2, w_2 \rangle > 0$ , pois pela assinatura  $\langle w_1, w_1 \rangle > 0$  e  $\langle w_2, w_2 \rangle > 0$ . Portanto, todo ponto  $p = \pi(w)$  de  $S(C)$  é positivo.
3. Se  $V(C)$  é parabólico, então  $V(C)$  é degenerado com assinatura  $(1, 0)$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $\langle w_2, w_2 \rangle = 0$ , ou seja,  $w_2 \in V_0$ , o que mostra que  $S(C)$  é tangente a  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em  $q = \pi(w_2)$ .

## 4.2 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES REGULARES. CASO GENÉRICO

Definimos a ação diagonal de  $PU(2, 1)$  no conjunto de  $m$ -uplas de geodésicas complexas por  $g(c_1, \dots, c_m) = (g(c_1), \dots, g(c_m))$  onde  $g \in PU(2, 1)$  e  $c_i$  é uma geodésica complexa para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Caracterizamos o *espaço de configurações* como o grupo quociente dado pelo conjunto de  $m$ -uplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  passado o quociente pela ação diagonal de  $PU(2, 1)$  munido da topologia quociente. Ou seja, o espaço de configurações é o conjunto no qual estamos identificando  $m$ -uplas de geodésicas complexas a menos da ação diagonal de  $PU(2, 1)$ . Denotaremos tal espaço por  $\mathcal{M}$ .

Veremos ao longo da dissertação que o teorema a seguir constitui uma ferramenta muito útil no processo de descrição de espaço de módulos.

**Teorema 4.3.** Seja  $G = (g_{ij})$  matriz hermitiana  $m \times m$  tal que  $g_{ii} = 1$ . Então  $G$  é matriz de Gram associada a alguma  $m$ -upla ordenada  $C = (c_1, \dots, c_m)$  de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  se, e somente se, todos os menores principais de  $G$  de ordem  $k \geq 4$  são nulas, e todos os menores principais de  $G$  de ordem 3 são não-positivos.

**Demonstração:** Sejam  $c_1, \dots, c_m$  geodésicas complexas distintas,  $v_1, \dots, v_m$  seus respectivos vetores polares e  $G = (g_{ij})$  matriz hermitiana  $m \times m$  tal que  $g_{ii} = 1$ . Sabemos que a dimensão complexa de  $\mathbb{C}^{2,1}$  é igual a 3. Dessa forma,

1. Qualquer menor principal de  $G$  com ordem maior ou igual a 4 está associado a

quatro ou mais vetores linearmente dependentes, logo o determinante desse menor tem que ser nulo.

2. Se o menor principal possui ordem 3 temos duas possibilidades:

- os três vetores que estão associados a esse menor são L.D. Segue que o determinante tem que ser nulo;
- os três vetores que estão associados a esse menor são L.I. Segue que eles formam uma base para  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Utilizando o teorema de Sylvester é possível mostrar que tal menor está relacionado com a matriz da forma hermitiana. Portanto, seu determinante tem que ser negativo.

A outra implicação resulta diretamente da Proposição 3.4. ■

Vejamos um exemplo do Teorema 4.1.

**Exemplo 4.4.** Seja a matriz hermitiana  $G$ ,  $4 \times 4$  como abaixo

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Note que  $G = (g_{ii})$  atende a todas as hipóteses do Teorema 4.3, pois  $G$  é hermitiana,  $g_{ii} = 1$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\det G = 0$  e os determinantes dos menores principais de ordem 3 são negativos. Então o Teorema 4.3 nos garante que  $G$  é matriz de Gram associada a uma quádrupla de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Para encontrar tais geodésicas, basta encontrar o vetor polar associado a cada uma delas. Lembrando que se  $G$  é de Gram, então  $G$  é da forma

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_4, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_4, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle & \langle v_4, v_3 \rangle \\ \langle v_1, v_4 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle & \langle v_3, v_4 \rangle & \langle v_4, v_4 \rangle \end{pmatrix},$$

onde  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$  são dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

com  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Considere geodésica complexa padrão explicitada abaixo,

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

A partir dela podemos, através da ação de  $PU(2, 1)$ , obter qualquer outra geodésica complexa. Fixemos tal geodésica e o vetor polar  $v_1$  a  $c_1$ , dado por  $v_1 = (0, 1, 0)^t$ . Note que como  $\overline{w_1}z_1 + \overline{w_2}z_2 = \overline{w_3}z_3$ , temos diretamente que  $w_2 = 0$ . O que deixa as variáveis  $w_1$  e  $w_3$  livres, ou seja, o vetor polar a geodésica complexa  $c_2$  é dado por

$$v_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Ainda fazendo uso da ação diagonal de  $PU(2, 1)$ , podemos encontrar  $g \in PU(2, 1)$  que fixe o vetor polar  $v_1$  (consequentemente a geodésica  $c_1$ ) e de modo que  $g(v_2) = (1, 0, 0)^t$ . Tal  $g \in PU(2, 1)$  é dada por

$$\begin{pmatrix} \overline{w_1} & 0 & -\overline{w_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ w_3 & 0 & -w_1 \end{pmatrix}$$

Utilizando as relações

- $\overline{z_1}u_1 + \overline{z_2}u_2 - \overline{z_3}u_3 = 1$
- $\overline{w_1}u_1 + \overline{w_2}u_2 - \overline{w_3}u_3 = 1$

Encontramos que  $u_1 = u_2 = 1$ . Ou seja, o vetor  $v_3$ , polar a geodésica complexa  $c_3$ , é dado por

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

A matriz de Gram nos fornece que  $\langle v_3, v_3 \rangle = 1$ , o que implica que  $u_3$  é um complexo unitário, ou seja,  $u_3 = e^{i\theta}$ , onde  $\theta = \arg(u_3)$ . É mais uma vez é possível obter  $h \in PU(2, 1)$

que fixe  $v_1$  e  $v_2$  e que nos dê,  $v_3 = (1, 1, 1)^t$ .

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Com os três vetores fixados e fazendo uso das relações

- $\bar{z}_1 p_1 + \bar{z}_2 p_2 - \bar{z}_3 p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\bar{w}_1 p_1 + \bar{w}_2 p_2 - \bar{w}_3 p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\bar{u}_1 p_1 + \bar{u}_2 p_2 - \bar{u}_3 p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Obtemos que  $p_1 = p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $p_3 = 0$ . Portanto, os vetores polares são dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E suas respectivas geodésicas complexas associadas são

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\},$$

$$c_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-z \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

•

**Corolário 4.4.** Qualquer matriz hermitiano  $2 \times 2$ ,  $G = (g_{ij})$  tal que  $g_{ij} = 1$  é uma matriz de Gram associada a algum par ordenado de geodésicas complexas distintas  $C = (c_1, c_2)$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Além disso,  $G$  é positiva semi-definida (nesse caso,  $\det G = 0$ ) se, e somente se,  $c_1$  e  $c_2$  são assintóticas,  $G$  é positiva definida (nesse caso,  $\det G > 0$ ) se, e somente se,  $c_1$  e  $c_2$  são concorrentes,  $G$  é indefinida (nesse caso,  $\det G < 0$ ) se, e somente se,  $c_1$  e  $c_2$  são ultraparalelas.

Nesse corolário é importante salientar que se  $G = (g_{ij})$  é hermitiana de ordem 2 então,

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det G &= \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \\ \det G &= 1 - |\langle v_1, v_2 \rangle|^2\end{aligned}$$

- Se  $|\langle v_1, v_2 \rangle| < 1$  então  $c_1$  e  $c_2$  se intersectam e consequentemente  $\det G > 0$ .
- Se  $|\langle v_1, v_2 \rangle| = 1$  então  $c_1$  e  $c_2$  são paralelas e consequentemente  $\det G = 0$ .
- Se  $|\langle v_1, v_2 \rangle| > 1$  então  $c_1$  e  $c_2$  são ultra-paralelas e consequentemente  $\det G < 0$ .

Para mais detalhes o leitor pode ver Goldman [5]. A título de ilustração, vejamos um exemplo para cada caso.

**Exemplo 4.5.** Seja  $G = (g_{ij})$ , dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que  $G$  é hermitiana de ordem 2 e que está associada à

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que são vetores polares às geodésicas complexas

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \in B^2; z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observe que  $\det G = 1$  e que o produto vetorial hermitiano nos fornece o vetor  $u$  que é negativo,

$$u = p_1 \boxtimes p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $c_1$  e  $c_2$  são concorrentes. •

**Exemplo 4.6.** Seja  $G = (g_{ij})$ , dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que  $G$  é hermitiana de ordem 2 e que está associada à

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

que são vetores polares às geodésicas complexas

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z+1 \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}z + \sqrt{2} \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observe que  $\det G = 1$  e que o produto vetorial hermitiano nos fornece o vetor  $u$  que é isotrópico,

$$u = p_1 \boxtimes p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $c_1$  e  $c_2$  são assintóticas. •

**Exemplo 4.7.** Seja  $G = (g_{ij})$ , dada por

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Note que  $G$  é hermitiana de ordem 2 e que está associada à

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que são vetores polares às geodésicas complexas

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ w \\ \frac{w}{3} \end{pmatrix} \in B^2; w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observe que  $\det G = -1$  e que o produto vetorial hermitiano nos fornece o vetor  $u$  que é positivo,

$$u = v_1 \boxtimes v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $c_1$  e  $c_2$  são ultra-paralelas. •

**Corolário 4.5.** Seja  $G = (g_{ij})$  uma matriz hermitiana  $3 \times 3$  tal que  $g_{ii} = 1$ . Então  $G$  é uma matriz de Gram associada a alguma tripla ordenada  $C = (c_1, c_2, c_3)$  de geodésicas

complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  se, e somente se,  $\det G \leq 0$ .

Se  $m \geq 3$  e todos os menores principais de ordem 3 são nulos, então o subespaço  $V(C) \subset \mathbb{C}^{2,1}$  gerado pelos vetores polares a  $c_1, \dots, c_m$  tem dimensão 2, e  $C$  é parabólica (neste caso  $c_1, \dots, c_m$  intersectam um ponto positivo), elíptico (neste caso  $c_1, \dots, c_m$  intersectam um ponto negativo) ou hiperbólico (neste caso existe geodésica  $c$  ortogonal a  $c_1, \dots, c_m$ ). Em todos os casos, os pontos polares a  $c_1, \dots, c_m$  pertencem a uma esfera polar.

De fato, se todos os menores principais de ordem 3 de  $G$  desaparecem, então  $(m-2)$  vetores colunas de  $G$  são combinação linear de dois outros, que são linearmente independentes. São esses dois vetores que formam a base de  $V(C)$ , conseqüentemente  $\dim V(C) = 2$ . O restante segue do que já foi demonstrado na Observação 4.1.

#### 4.2.1 INVARIANTES NO CASO REGULAR

Sejam  $c_1$  e  $c_2$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $v_1$  e  $v_2$  seus vetores polares correspondentes em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Definimos o seguinte invariante

$$d(c_1, c_2) = d(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle}$$

1. O  $d(c_1, c_2)$  independe dos vetores polares escolhidos, pois

$$\begin{aligned} d(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) &= \frac{\langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \langle \lambda_2 v_2, \lambda_1 v_1 \rangle}{\langle \lambda_1 v_1, \lambda_1 v_1 \rangle \langle \lambda_2 v_2, \lambda_2 v_2 \rangle} \\ &= \frac{\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle \lambda_2 \bar{\lambda}_1 \langle v_2, v_1 \rangle}{\lambda_1 \bar{\lambda}_1 \langle v_1, v_1 \rangle \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \langle v_2, v_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle} \\ &= d(v_1, v_2) \end{aligned}$$

2. O  $d(c_1, c_2)$  é invariante com respeito a ação diagonal de  $PU(2, 1)$ . De fato, tome  $C_1 = (c_1, c_2)$  e  $C' = (c'_1, c'_2)$  dois pares de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e suponha que exista  $g \in PU(2, 1)$  tal que  $g(C) = C'$ . Daí existe  $g$  correspondente em  $U(2, 1)$  tal que  $g(v_i) = v'_i$ , onde os  $v_i$  e  $v'_i$ , são vetores polares aos  $c_i$  e  $c'_i$ , para

$i = 1, 2$ . Então vale que

$$\begin{aligned}
 d(c'_1, c'_2) &= d(g(c_1), g(c_2)) \\
 &= d(g(v_1), g(v_2)) \\
 &= \frac{\langle g(v_1), g(v_2) \rangle \langle g(v_2), g(v_1) \rangle}{\langle g(v_1), g(v_1) \rangle \langle g(v_2), g(v_2) \rangle} \\
 &= \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle} \\
 &= d(c_1, c_2)
 \end{aligned}$$

Agora, sejam  $c_1$  e  $c_2$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $v_1$  e  $v_2$  seus respectivos vetores polares em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . A matriz de Gram  $G$ , associada a  $C = (c_1, c_2)$  é dada por

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
 \det G &= \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle \\
 \frac{\det G}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle} &= 1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle} \\
 \det G &= 1 - d(v_1, v_2) \\
 d(v_1, v_2) &= 1 - \det G
 \end{aligned}$$

Então, em comparação com o Corolário 4.4, temos que

1. Se  $\det G = 0$ , então  $c_1$  e  $c_2$  são assintóticas e  $d(v_1, v_2) = 1$ .
2. Se  $\det G > 0$ , então  $c_1$  e  $c_2$  são concorrentes e  $d(v_1, v_2) < 1$ . Nesse caso, se  $\theta \angle(c_1, c_2)$ , vale  $\cos^2(\theta) = d(c_1, c_2)$ .
3. Se  $\det G < 0$ , então  $c_1$  e  $c_2$  são ultra-paralelas e  $d(v_1, v_2) > 1$ . Neste caso, vale a relação  $\cosh^2(\frac{\rho}{2}) = d(c_1, c_2)$ , onde  $\rho$  é a distância entre  $c_1$  e  $c_2$ .

Duas geodésicas complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  são ditas ortogonais se o ângulo  $\theta$  entre elas é igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Como  $\cos^2(\theta) = d(c_1, c_2)$  segue que  $c_1$  e  $c_2$  são ditas ortogonais se  $d(c_1, c_2) = 0$ .

Sempre que tal invariante estiver relacionado com distância ou ângulo entre geodésicas nomearemos  $d(c_1, c_2)$  de *invariante da distância angular*, ou simplesmente por *d-invariante*.

Nosso objetivo agora é definir outro invariante que será de fundamental importância para descrevermos de forma única cada entrada da matriz de Gram associada a uma  $m$ -upla de geodésicas complexas distintas no plano hiperbólico complexo. Para isso considere  $C = (c_1, c_2, c_3)$  uma tripla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Sejam  $v_1, v_2$  e  $v_3$  vetores polares a  $c_1, c_2$  e  $c_3$  respectivamente. Assumiremos que  $c_i$  não é ortogonal a  $c_j$ , para  $i, j = 1, 2, 3$ . Então, o invariante angular de  $C$  é definido por

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(c_1, c_2, c_3) = \arg(\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle)$$

1.  $\mathbb{A}$  está bem definida, pois independe dos vetores polares escolhidos

Seja  $v' = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3)$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(c_1, c_2, c_3) &= \arg(\langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \langle \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3 \rangle \langle \lambda_3 v_3, \lambda_1 v_1 \rangle) \\ &= \arg(|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|^2 \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle) \\ &= \arg(\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle) \end{aligned}$$

Pois,  $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|^2$  é positivo.

2.  $\mathbb{A}$  é invariante com respeito a ação diagonal de  $PU(2, 1)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{A}' &= \arg(\langle g(v_1), g(v_2) \rangle \langle g(v_2), g(v_3) \rangle \langle g(v_3), g(v_1) \rangle) \\ &= \arg(\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle) \\ &= \mathbb{A} \end{aligned}$$

Este invariante é similar ao invariante de Cartan. Os próximos dois exemplos mostrarão algumas diferenças entre estes invariantes.

**Exemplo 4.8.** O invariante de Cartan é um número no intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Esta restrição não se aplica ao presente invariante, como podemos ver a seguir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De onde tiramos que  $\mathbb{A} = \theta$ . Indicando que nosso invariante não tem restrição de valores a serem atingidos. •

Assumiremos que  $\mathbb{A}$  é um número no intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

**Exemplo 4.9.** O invariante de Cartan satisfaz a *propriedade do cociclo* a saber

$$\mathbb{A}(c_1, c_2, c_3) + \mathbb{A}(c_1, c_3, c_4) = \mathbb{A}(c_1, c_2, c_4) + \mathbb{A}(c_2, c_3, c_4)$$

tal propriedade nem sempre é satisfeita pelo nosso invariante. Vejamos por exemplo que se  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  é uma quádrupla de geodésicas complexas cujos respectivos vetores polares são

$$v_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{12}i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{\pi}{4}i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{12}i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{\frac{\pi}{12}i}, & \langle v_3, v_4 \rangle &= -2, & \langle v_2, v_3 \rangle &= 2e^{\frac{\pi}{4}i}. \\ \langle v_4, v_1 \rangle &= -1, & \langle v_3, v_1 \rangle &= 1, & \langle v_2, v_4 \rangle &= e^{-\frac{\pi}{12}i}. \end{aligned}$$

Daí, os invariantes angulares que compoem a igualdade do cociclo são os seguintes

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(c_1, c_2, c_3) &= \arg(\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle) = \arg(2(1 + e^{\frac{\pi}{3}i})) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \\ \mathbb{A}(c_1, c_3, c_4) &= \arg(\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_3, v_4 \rangle \langle v_4, v_1 \rangle) = \arg(2) = 0 \\ \mathbb{A}(c_1, c_2, c_4) &= \arg(\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle \langle v_4, v_1 \rangle) = \arg(-(1 + e^{-\frac{\pi}{3}i})) = \frac{5\pi}{6} \\ \mathbb{A}(c_2, c_3, c_4) &= \arg(\langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_4 \rangle \langle v_4, v_2 \rangle) = \arg(-4(e^{\frac{\pi}{3}i})) = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

O que mostra que a propriedade do cociclo não é satisfeita. •

**Definição 4.6.** Dizemos que uma  $m$ -upla  $C = (c_1, \dots, c_m)$  ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é *genérica*, quando nenhuma das geodésicas que compõem  $C$  é ortogonal a outra. Caso contrário denominamos  $C$  de *especial*.

Aproveitamos essa definição para relembrar quando uma  $m$ -upla ordenada  $p$  de pontos positivos distintos vem a ser genérica. Uma  $m$ -upla é dita genérica quando a matriz de Gram  $G = (g_{ij})$  a ela associada é tal que  $g_{ij} \neq 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, m$ .

Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $p = (p_1, \dots, p_m)$  a  $m$ -upla ordenada de pontos polares correspondentes. A matriz de Gram normalizada  $G(p) = (g_{ij})$  associada a  $p$  é a mesma matriz de Gram normalizada  $G(C)$  associada a  $C$ .

Sabemos que  $g_{ij}$  são números complexos, dessa forma desde que  $g_{ij} \neq 0$ , podemos sempre escrever tal número através de seu módulo e argumento, ou seja,  $g_{ij} = |g_{ij}|e^{i\alpha_{ij}} = r_{ij}e^{i\alpha_{ij}}$ , com  $\alpha_{ij} = \arg(g_{ij}) \in (-\pi, \pi]$ . Como estamos falando de matrizes de Gram normalizadas, segue do capítulo anterior que todos os elementos da primeira linha são não negativos. Como  $g_{ij} \neq 0$ , temos que  $g_{1j} = |g_{1j}| = r_{1j} > 0$ .

Observemos que se  $C = (c_1, \dots, c_m)$  é uma  $m$ -upla genérica segue que a matriz de Gram  $G = (g_{ij})$  associado a  $C$  é tal que  $g_{ij} \neq 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, m$ . Como  $G = (g_{ij})$  também é matriz de Gram associada a  $p = (p_1, \dots, p_m)$  segue que podemos dizer que  $p$  é genérica. O recíproco também é válido e utiliza os mesmos argumentos.

A partir de agora passamos a associar a cada  $m$ -upla ordenada genérica de geodésicas distintas  $C$  os invariantes  $d_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , e  $\mathbb{A}_{ij}$ ,  $2 \leq i < j \leq m$ . Onde  $d_{ij} = d(c_i, c_j)$  e  $\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}(c_1, c_i, c_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ .

Note que da maneira como definimos os índices  $i$  e  $j$  no caso do invariante  $d_{ij}$ , temos exatamente  $m$  valores assumidos tanto por  $i$  quanto por  $j$ , cumprindo é claro  $1 \leq i < j \leq m$ . Então a quantidade de d-invariantes, denotada por  $d_1$ , é dada por

$$d_1 = \binom{m}{2} = \frac{(m)(m-1)}{2}$$

Similarmente, o fato de que  $2 \leq i < j \leq m$  nos fornece que  $(m-1)$  valores são atingidos pelos índices  $i$  e  $j$  no caso em que estamos tratando do invariante angular  $\mathbb{A}_{ij}$ . Segue daí que a quantidade  $d_2$  de invariantes angulares é dada por

$$d_2 = \binom{m-1}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

A proposição a seguir tem por objetivo central definir unicamente a classe de congruência em  $PU(2,1)$  de geodésicas complexas distintas.

**Proposição 4.7.** Os invariantes  $d_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , e  $\mathbb{A}_{ij}$ ,  $2 \leq i < j \leq m$ , definem unicamente a classe de congruência em  $PU(2,1)$  de uma  $m$ -upla ordenada  $C$  de geodésicas complexas genéricas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . O número desses invariantes é igual a  $(m-1)^2$ .

**Demonstração:** Considere  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada genérica de geodésicas complexas distintas e  $G = (g_{ij})$  sua matriz de Gram normalizada. Observe que o d-invariante nos fornece a seguinte relação

$$d_{ij} = d(c_i, c_j) = d(v_i, v_j) = \frac{\langle v_i, v_j \rangle \langle v_j, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle} = g_{ij} \overline{g_{ij}} = |g_{ij}|^2$$

Segue diretamente da relação acima que  $|g_{ij}| = \sqrt{d_{ij}}$ . Assim como feito com o  $d$ -invariante podemos obter uma relação utilizando o invariante angular,

$$\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}(c_1, c_i, c_j) = \arg(\langle v_1, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle \langle v_j, v_1 \rangle) = \arg(g_{1j}g_{ij}g_{j1}) = \arg(r_{1j}g_{ij}r_{j1})$$

Como  $r_{1j} > 0$  segue que  $\mathbb{A}_{ij} = \arg(g_{ij})$ . Desse modo  $g_{ij}$  pode ser escrito como  $g_{ij} = |g_{ij}|e^{i\arg(g_{ij})} = \sqrt{d_{ij}}e^{i\mathbb{A}_{ij}}$ .

Segue que todas as entradas da matriz de Gram normalizada  $G(C)$  de  $C$  são dadas unicamente em termos dos invariantes  $d_{ij}$  e  $\mathbb{A}_{ij}$ .

Por fim considere  $C$  e  $J$   $m$ -uplas de geodésicas complexas distintas tais que possuem a mesma matriz de Gram normalizada. A Proposição 3.8 assegura que  $C$  e  $J$  são congruentes em  $PU(2, 1)$ .

Agora, note que a quantidade total,  $d$ , de invariantes é dada por

$$\begin{aligned} d &= d_1 + d_2 \\ &= \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = (m-1)^2 \end{aligned}$$

■

A proposição anterior nos deixa a um passo da descrição do espaço de módulos de  $m$ -uplas de geodésicas complexas no caso regular. Isso se deve ao fato de que ela nos mune de fórmulas capazes de expressar unicamente todas as entradas de qualquer matriz de Gram,  $G = (g_{ij})$ , associada a uma dada  $m$ -upla ordenada genérica de geodésicas complexas distintas  $C = (c_1, \dots, c_m)$ . Por isso para a construção do espaço de módulos, assumiremos que  $G = (g_{ij})$  estará escrita com esses invariantes, o que nos dá liberdade para escrever  $G = G(d_{ij}, \mathbb{A}_{ij})$ .

Aqui fazemos uma pausa para definir o conceito de submatrizes de  $G$ . Entende-se por submatriz de  $G$  a matriz formada considerando as linhas e colunas  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$  de  $G$ . A notação relacionada a tal matriz é  $G_{i_1 \dots i_k}$ . Vejamos um exemplo de como isso funciona.

**Exemplo 4.10.** Se considerarmos  $G$  matriz como abaixo explicitada,

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

É possível notar que a submatriz  $G_{i_2, i_3, i_4}$ , obtida tomando as linhas 2, 3 e 4 e colunas 2, 3 e 4, é dada por

$$G_{i_2, i_3, i_4} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

•

Dando continuidade ao conceito de submatrizes, representaremos por  $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  o determinante da submatriz  $G_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ .

Agora, denotemos por  $\mathcal{M}_0$  o espaço de configuração de  $m$ -uplas ordenadas regulares genéricas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Seja  $[C] \in \mathcal{M}_0$  o ponto representado por  $C$ . Daí definimos a seguinte aplicação,

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} = \mathbb{R}^d \\ [C] &\longmapsto (u, v) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $d = d_1 + d_2 = (m-1)^2$  e  $d_1 = m(m-1)/2$ ,  $d_2 = (m-1)(m-2)/2$  são como definidos anteriormente. E com  $[C]$  e  $(u, v)$  classe de  $m$ -uplas ordenadas de geodésicas complexas distintas e  $(u, v)$  as coordenadas dessas geodésicas no plano hiperbólico complexo.

Dessa forma se  $w \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ , então podemos escrevê-lo da seguinte forma  $w = (u, v)$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_{d_1}) \in \mathbb{R}^{d_1}$  e  $v = (v_1, \dots, v_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}$ . Até aqui,  $u_i$  e  $v_i$  estão livres e não nos deixam saber que papel cada um deles cumpre. Fazendo uso da ordem do dicionário, podemos relacionar  $(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots, v_{d_2})$  com os  $(d_{12}, \dots, d_{(m-1)m}, \mathbb{A}_{23}, \dots, \mathbb{A}_{(m-1)m})$ . Assim os  $D_{i_1, \dots, i_k} = D_{i_1, \dots, i_k}(d_{1j}, \mathbb{A}_{ij})$  definem os  $D_{i_1, \dots, i_k}(u, v)$ . Vejamos um exemplo deste fato.

**Exemplo 4.11.** Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  uma quádrupla ordenada genérica de geodésicas complexas distintas e  $G = (g_{ij})$  a matriz de Gram associada a  $C$ . A demonstração do Teorema 4.7 nos fornece um total de 9 invariantes que cobrem todas as entradas da matriz  $G$  normalizada. Tais invariantes estão distribuídos do seguinte modo: 6 d-

invariantes e 3 invariantes angulares. Além disso, utilizando o fato de que  $d_{ij} > 0$  e  $\mathbb{A}_{ij} \in (-\pi, \pi]$  podemos considerar a seguinte identificação  $\mathbb{R}^6 \times (-\pi, \pi]^3 \subset \mathbb{R}^9$ . Assim, se  $w \in \mathbb{R}^6 \times (-\pi, \pi]^3$  segue que  $w = (u, v) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3)$ . Utilizando a ordem do dicionário, podemos associar  $d_{12}$  a  $u_1$ ,  $d_{13}$  a  $u_2$ , ou seja, podemos associar  $(u, v)$  à  $(d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}, \mathbb{A}_{23}, \mathbb{A}_{24}, \mathbb{A}_{34})$ .

Como sabemos exatamente cada lugar que esses invariantes ocupam na normalização de uma matriz de Gram associada a uma  $m$ -upla ordenada genérica de geodésicas segue que também sabemos as posições de  $u_i$  e  $v_i$ .

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{14}} \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}}e^{i\mathbb{A}_{23}} & \sqrt{d_{24}}e^{i\mathbb{A}_{24}} \\ \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{32}}e^{-i\mathbb{A}_{32}} & 1 & \sqrt{d_{34}}e^{i\mathbb{A}_{34}} \\ \sqrt{d_{14}} & \sqrt{d_{24}}e^{-i\mathbb{A}_{24}} & \sqrt{d_{34}}e^{-i\mathbb{A}_{34}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue da associação acima que,

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{u_1} & \sqrt{u_2} & \sqrt{u_3} \\ \sqrt{u_1} & 1 & \sqrt{u_4}e^{iv_1} & \sqrt{u_5}e^{iv_2} \\ \sqrt{u_2} & \sqrt{u_4}e^{-iv_1} & 1 & \sqrt{u_6}e^{iv_3} \\ \sqrt{u_3} & \sqrt{u_5}e^{-iv_2} & \sqrt{u_6}e^{-iv_3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma se desejarmos obter  $D_{234}(u, v)$ , por exemplo, basta fazer

$$D_{234}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{u_4}e^{iv_1} & \sqrt{u_5}e^{iv_2} \\ \sqrt{u_4}e^{-iv_1} & 1 & \sqrt{u_6}e^{iv_3} \\ \sqrt{u_5}e^{-iv_2} & \sqrt{u_6}e^{-iv_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

**Teorema 4.8.** O espaço de configuração  $\mathcal{M}_0$  está bijetivamente relacionado ao conjunto  $\mathbb{M}_0$  de pontos em  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  definido pelas seguintes condições:

- $D_{i_1, \dots, i_k}(u, v) = 0$ , para todo  $i \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$  com  $k \geq 4$ .
- $D_{i_1, i_2, i_3}(u, v) \leq 0$ , para todo  $i \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m$ .

Contanto que  $u_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, d_1$  e  $v_j \in (-\pi, \pi]$ ,  $j = 1, \dots, d_2$ .

**Demonstração:** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas distintas e  $G = (g_{ij})$  matriz de Gram associada a  $C$ . Tal matriz pode ser normalizada

utilizando as fórmulas da Proposição 4.7. Além disso, o Teorema 4.3 nos garante que todos os menores principais de  $G$  de ordem  $k \geq 4$  se anulam e todos os menores principais de ordem 3 são não positivos. O que mostra que

$$\tau : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathbb{M}_0$$

está bem definida.

Agora, desejamos mostrar a sobrejetividade da aplicação  $\tau$ . Para isso, consideremos  $w = (u, v) \in \mathbb{M}_0$  e construamos a matriz hermitiana  $G = (g_{ij})$  de ordem  $m$  da seguinte maneira

$$G = (g_{kj}) = \begin{cases} g_{kj} = \sqrt{d_{kj}} e^{i\mathbb{A}_{kj}}, & \text{para } 1 < k < j \leq m \\ g_{1j} = \sqrt{d_{1j}}, & \text{para } j = 2, \dots, m \\ g_{jj} = 1 \end{cases}$$

onde estamos identificando  $u_1, \dots, u_{d_1}$  com  $d_{ij}$  e  $v_1, \dots, v_{d_2}$  com  $\mathbb{A}_{ij}$ .

Construída dessa forma, a matriz  $G$  satisfaz o Teorema 4.3. Portanto, existe uma  $m$ -upla ordenada  $C = (c_1, \dots, c_m)$  de geodésicas complexas em  $\mathcal{M}_0$  associada a  $G$ . Assim para qualquer  $w = (u, v) \in \mathbb{M}_0$  podemos encontrar uma  $m$ -upla  $C = (c_1, \dots, c_m)$  correspondente em  $\mathcal{M}_0$ .

A injetividade segue diretamente da proposição 4.7. Portanto,  $\mathcal{M}_0$  e  $\mathbb{M}_0$  estão relacionados bijectivamente. ■

Denominamos  $\mathbb{M}_0$  de *espaço de Módulos* de  $\mathcal{M}_0$ .

A título de exemplificar o teorema anterior, daremos a descrição do espaço de módulos de uma  $C = (c_1, c_2, c_3)$  tripla ordenada genérica regular de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Aplicando a Proposição 4.4 é possível encontrar que são 4 os invariantes que iremos dispor para descrever a matriz de Gram unicamente. Três deles são d-invariantes e um é invariante angular.

Seja  $G = (g_{ij})$  matriz de Gram normalizada associada a  $C$ , representada da seguinte forma

$$G(p, v) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}} e^{i\alpha} \\ \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{23}} e^{-i\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} e^{i\alpha} \\ r_{13} & r_{23} e^{-i\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Pela Teorema 4.3 como  $G$  é matriz de Gram segue que seu determinante tem que ser não positivo. Ou seja,

$$\det G = 1 - (r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{12}^2) + 2r_{12}r_{13}r_{23} \cos \alpha \leq 0.$$

Definindo  $r_1 = \sqrt{d_{12}}$ ,  $r_2 = \sqrt{d_{13}}$ ,  $r_3 = \sqrt{d_{23}}$ . Podemos enunciar o corolário abaixo, que é justamente a descrição do espaço de módulos de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Corolário 4.9.** O espaço de configurações  $\mathcal{M}_0(3)$  de triplas ordenadas regulares genéricas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  está bijetivamente relacionado ao conjunto  $\mathbb{M}_0 = \{(r_1, r_2, r_3, \alpha) \in \mathbb{R}^4; r_i > 0, \alpha \in (-\pi, \pi], 1 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2r_1r_2r_3 \cos \alpha \leq 0\}$ .

A igualdade acontece se, e somente se, as geodésicas complexas  $c_1, c_2, c_3$  se intersectam num ponto  $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , ou  $c_1, c_2, c_3$  tem uma perpendicular em comum.

Aqui, é importante darmos uma pausa para observarmos que se a igualdade é alcançada e  $C$  é regular, então podemos fazer a seguinte análise.

Para nós, alcançar a igualdade é equivalente a ter  $\det G = 0$ . Segue daí que o posto de  $G$  é igual a 2. Dessa forma se  $c_1, c_2, c_3$  são geodésicas complexas distintas associadas aos vetores polares  $v_1, v_2, v_3$  respectivamente, então a menos de ordenação podemos supor que  $v_3$  se escreve como combinação linear de  $v_1, v_2$ . Esses dois últimos vetores formam uma base para um subespaço vetorial  $W$  de dimensão 2.

Como  $C$  é regular segue que  $W$  também é. Logo,  $W$  é hiperbólico ou elíptico.

- Para  $W$  elíptico tome  $\{w_1, w_2\}$  base ortogonal, com relação ao produto hermitiano, de  $W$ . Como  $W$  é elíptico  $w_1$  e  $w_2$  devem ser positivos. Tome  $W^\perp$  e  $v \neq 0, v \in W^\perp$ . Então, pela assinatura da forma  $v \in V_-$ .
- Para  $W$  hiperbólico tome  $\{w_1, w_2\}$  base ortogonal, com relação ao produto hermitiano, de  $W$ . Como  $W$  é elíptico um dos dois vetores da base é negativo e o outro positivo. Tome  $W^\perp$  e  $v \neq 0, v \in W^\perp$ . Então, pela assinatura da forma  $v \in V_+$ . A geodésica cujo vetor polar é o vetor  $v$  é a perpendicular comum a  $c_1, c_2$  e  $c_3$ .

**Exemplo 4.12.** Sejam  $c_1, c_2, c_3$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  cujos vetores polares  $v_1, v_2, v_3$  estão abaixo expressos

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com esses vetores podemos gerar o subespaço  $W$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$  que possui dimensão 2, haja vista que  $v_3$  é combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ .

$$W = [v_1, v_2, v_3] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

Seja  $G = (g_{ij})$  matriz de Gram associada a  $C = (c_1, c_2, c_3)$ , o menor principal de ordem 2 nos mostra que  $W$  é elíptico.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{7}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{7}{\sqrt{30}} & 1 \end{pmatrix}$$

Explicitando as geodésicas  $c_1, c_2$  e  $c_3$ .

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\},$$

$$c_3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -3z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Não é difícil perceber que a interseção das três geodésicas nos fornece que

$$c_1 \cap c_2 \cap c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2$$

Tal vetor tem como representante em  $\mathbb{C}^{2,1}$  o vetor negativo expresso abaixo.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$$

•

**Exemplo 4.13.** Seja  $C = (c_1, c_2, c_3)$  uma tripla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . E seja  $v = (v_1, v_2, v_3)$  tripla de vetores polares correspondentes, dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz de Gram  $G$  associada a  $C$  é dada por

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 7 & 15 & 22 \\ 10 & 22 & 32 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é nulo. Claramente  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é hiperbólico. Além disso, o vetor positivo  $v = (0, 1, 0)^t$  é ortogonal a  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Dessa forma a geodésica complexa cujo vetor polar é  $v$  é ortogonal as três geodésicas complexas distintas acima.

### 4.3 CONFIGURAÇÃO POLIGONAL DE GEODÉSICAS COMPLEXAS

Nosso objetivo nessa seção é o de definir configurações poligonais. Para tal fim faz-se necessário construirmos a ideia de um polígono em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

A fim de obter tal construção precisaremos considerar que se  $c$  é uma geodésica complexa em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , então  $\bar{c} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é o *fecho* de  $c$ .

**Definição 1.** Seja  $S = (s_1, \dots, s_m)$  uma  $m$ -upla de pontos distintos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Dizemos que  $S$  está em *posição geral*, ou que é do *tipo geral*, se no conjunto  $\{s_1, \dots, s_m\}$  não há subtriplas de pontos distintos em  $\bar{c}$  para alguma geodésica complexa  $c$ .

Um exemplo disso é a quádrupla de pontos distintos abaixo. Podemos agrupá-los em triplas, da forma que desejarmos, sem que nenhuma das tais triplas esteja no fecho de alguma geodésica.

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as geodésicas complexas explicitadas abaixo

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\},$$

$$c_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_4 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 - z \end{pmatrix} \in B^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observe que dos pontos considerados somente  $s_1$  e  $s_2$  estão em  $c_1$ , somente  $s_2$  e  $s_3$  estão em  $c_2$ , apenas  $s_3$  e  $s_4$  estão em  $c_3$  e finalmente somente  $s_4$  e  $s_1$  estão em  $c_4$ . Ou

seja, na quádrupla acima não há subtriplas no fecho de qualquer geodésica complexa em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . •

Se considerarmos uma  $m$ -upla ordenada  $S = (s_1, \dots, s_m)$  de pontos distintos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , então podemos definir  $c_i$  como a geodésica que passa por  $s_i$  e  $s_{i+1}$ . A fim de não deixar nenhum par de pontos de fora da constituição das geodésicas, tomaremos os índices módulo  $m$ . Note que se  $S$  está em posição geral, os pares de pontos definem unicamente cada geodésica complexa. Em outras palavras, uma  $m$ -upla de pontos distintos em posição geral em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  induz, uma  $m$ -upla de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Chamaremos tal  $m$ -upla de  $P(S) = S = (c_1, \dots, c_m)$ .

Para exemplificar tal fato, podemos tomar a tripla  $S = (s_1, s_2, s_3)$ , onde os três pontos, na bola, são da forma

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo o produto vetorial hermitiano dos levantamentos dos pontos acima, onde  $v_1, v_2, v_3$  são os representantes de  $s_1, s_2$  e  $s_3$  respectivamente, obtemos o seguinte

$$v_1 \boxtimes v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \boxtimes v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 \boxtimes v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Que são os vetores polares das seguintes geodésicas

$$c_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\}, \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\},$$

$$c_3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z + 1 \end{pmatrix} \in B^2; z_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Portanto, podemos encontrar uma tripla de geodésicas complexas distintas  $P = (c_1, c_2, c_3)$  associada a tripla  $S = (s_1, s_2, s_3)$ , em posição geral, de pontos distintos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . •

Para nós,  $P = (c_1, \dots, c_m)$  será denominado de  $c$ -polígono, ou seja,  $P$  é uma configuração poligonal cujos lados são as geodésicas  $c_1, \dots, c_m$ . Os vértices de  $P$  são os  $s_i \in S$ .

**Definição 2.** Seja  $s_i$  vértice de um  $c$ -polígono  $P$ . Se  $s_i \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , então  $s_i$  é dito *próprio*. Caso contrário  $s_i$  é dito *ideal*. Dizemos que  $P$  é  $c$ -polígono *próprio* se todos os seus vértices são próprios. De igual maneira  $P$  é *ideal* se todos os seus vértices são ideais.

A título de exemplo podemos considerar o  $c$ -triângulo cujos vértices  $v_1, v_2, v_3$  são dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Tal  $c$ -triângulo é ideal, haja vista que seus três vértices acima estão na fronteira do espaço hiperbólico complexo de dimensão 2. •

**Definição 3.** Dizemos que um  $c$ -polígono  $P = (c_1, \dots, c_m)$  é *simples* quando  $c_i \cap c_j \neq \emptyset$  implica que  $j = i - 1, j = i$  ou  $j = i + 1$ , com os índices tomados módulo  $m$ .

O conceito de um  $c$ -polígono simples pode ser ilustrado pela figura a seguir. Note que as exigências acima são devidamente satisfeitas, pois  $c_i \cap c_j \neq \emptyset$  implica que  $j = i - 1, j = i$  ou  $j = i + 1$  para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , onde esses índices são tomados módulo 4.

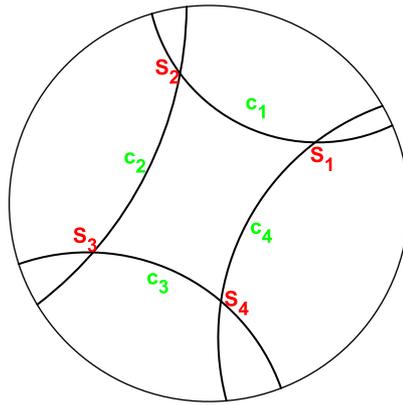


Figura 5:  $c$ -quadrilátero simples:  $P(c_1, c_2, c_3, c_4)$ .

Podemos comparar o quadrilátero simples acima com o não simples abaixo. Tal quadrilátero é não simples, pois  $c_2 \cap c_4 \neq \emptyset$ .

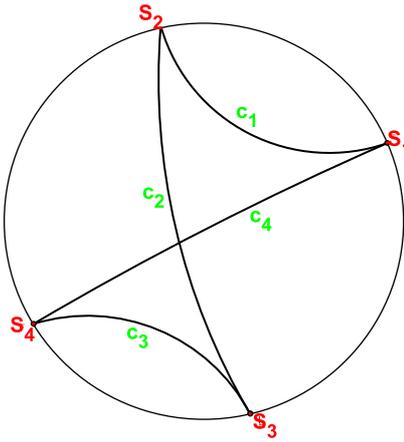


Figura 6: c-quadrilátero não simples

Observe que quando um polígono é simples, seus lados não adjacentes não se intersectam.

Sejam  $c_i$  e  $c_{i-1}$  geodésicas complexas de um c-polígono próprio, definimos  $\theta_i$  como o ângulo em  $s_i$ , onde  $\bar{c}_{i-1} \cap \bar{c}_i = s_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  com  $i$  tomado módulo  $m$ .

Note que, como  $d_{(i-1)i} = \frac{\langle v_{i-1}, v_i \rangle \langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle \langle v_i, v_i \rangle}$ , então  $\cos^2(\theta_i) = d_{(i-1)i}$ , onde  $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Definição 4.** Dado um c-polígono  $P = (c_1, \dots, c_m)$  com vértices  $s = (s_1, \dots, s_m)$ , dizemos que  $P$  é *agudo* se para qualquer  $s_i$ , temos que  $\theta_i \neq \frac{\pi}{2}$ .

O teorema a seguir tem por objetivo definir unicamente a classe de congruência em  $PU(2, 1)$  de c-polígonos agudos. Tal resultado segue diretamente da Proposição 4.5.

**Teorema 4.10.** Os invariantes  $d_{ij}$ ,  $1 \neq i < j \neq m$  e  $\Delta_{ij}$ ,  $2 \neq i < j \neq m$ , definem unicamente a classe de congruência  $PU(2, 1)$  de um c-polígono agudo  $P = (c_1, \dots, c_m)$ .

**Demonstração:** Como o c-polígono em questão é agudo segue que  $\theta_i \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , o que nos fornece que  $P = (c_1, \dots, c_m)$  é genérico ( $g_{ij} \neq 0, \forall i, j$ ). Isso nos deixa com as mesmas hipóteses da Proposição 4.7. ■

Agora que já definimos ângulos entre geodésicas, podemos fazer uso de outra notação para o c-polígono  $P = (c_1, \dots, c_m)$ . A notação a que nos referimos enfatiza os ângulos ao invés de seus lados, e será dada por  $P(\theta_1, \dots, \theta_m)$ . Definimos também o espaço de deformação  $D(\theta_1, \dots, \theta_m)$ , que para nós é o conjunto das classes de congruência em  $PU(2, 1)$  de c-polígonos com ângulos fixos  $\theta_1, \dots, \theta_m$ .

Façamos um exemplo onde estamos considerando um c-quadrilátero cujos ângulos internos são todos iguais a  $\frac{\pi}{4}$ , ou seja,  $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ .

**Exemplo 4.14.** Considere um c-quadrilátero cujos ângulos internos são todos iguais a  $\frac{\pi}{4}$ . Esse fato nos fornece que a matriz de Gram associada a  $P$  é dada por

$$G(P) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & r_{13} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\mathbb{A}_{23}} & r_{24}e^{i\mathbb{A}_{24}} \\ r_{13} & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\mathbb{A}_{23}} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\mathbb{A}_{34}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & r_{24}e^{-i\mathbb{A}_{24}} & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\mathbb{A}_{34}} & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando o Teorema 3.5, temos que  $\det G = 0$ . Isso é o mesmo que dizer que

$$r_{13}(\cos \theta + \cos \psi) + r_{24}(\cos \beta + \cos \phi) - r_{13}r_{24}(\cos \gamma + \cos a) + \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + r_{24}^2 r_{13}^2 - r_{13}^2 - r_{24}\right) = \frac{1}{2}$$

Onde  $\alpha = \mathbb{A}_{23} + \mathbb{A}_{34}$ ,  $\gamma = \mathbb{A}_{23} - \mathbb{A}_{24}$ ,  $\beta = \mathbb{A}_{24}$ ,  $\theta = \mathbb{A}_{34}$ ,  $\psi = \mathbb{A}_{23}$ ,  $\phi = \mathbb{A}_{23} + \mathbb{A}_{34} - \mathbb{A}_{24}$  e  $a = \mathbb{A}_{24} - \mathbb{A}_{34}$ .

Logo o espaço de módulos  $\mathcal{M}(\frac{\pi}{4}, 4)$  é o conjunto dos  $(r_1, r_2, \alpha, \gamma, \beta, \theta, \psi, \phi, a) \in \mathbb{R}^9$  tais que satisfazem a seguinte relação

$$r_1(\cos \theta + \cos \psi) + r_2(\cos \beta + \cos \phi) - r_1 r_2 (\cos \gamma + \cos a) + \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + r_2^2 r_1^2 - r_1^2 - r_2\right) = \frac{1}{2}$$

onde  $\alpha, \gamma, \beta, \theta, \psi, \phi, a \in (-\pi, \pi]$  e  $r_1, r_2 > 0$ , com  $r_1 = r_{13}$ ,  $r_2 = r_{24}$ . •

## 5 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES REGULARES - CASO ESPECIAL

No capítulo anterior definimos os invariantes  $d_{ij}$  e  $\mathbb{A}_{ij}$ , e mostramos que eles definem unicamente a classe de congruência de uma configuração regular em  $PU(2, 1)$ . Só após esse feito, é que foi possível construir o espaço de módulos. Dessa forma, é natural imaginar que o processo realizado no caso especial transcorre de forma análoga. Mas, o Exemplo 3.3 do Capítulo 3 mostra justamente que os invariantes até aqui conhecidos não são capazes de descrever a matriz de Gram de forma única. No caso especial precisaremos descrever novos invariantes.

Iniciemos este capítulo com uma definição importante que será utilizada ao longo do mesmo.

**Definição 5.1.** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas (que ora chamaremos de retas) distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $G = (g_{ij})$  matriz de Gram associada a  $C$ . Dizemos que uma reta  $c_i$  é *ruim*, se o número de retas ortogonais a  $c_i$  em  $C$  exceder um. Dessa forma uma configuração  $C = (c_1, \dots, c_m)$  é dita *boa*, quando esta não contém retas ruins.

É fácil ver que para qualquer configuração boa  $C$  o número de zeros em qualquer linha da matriz  $G$  é menor do que 2. Basta imaginar o seguinte, se  $C$  é boa e  $c_1$  é ortogonal a alguma outra geodésica, suponha que seja  $c_2$ . Teríamos automaticamente que  $\langle v_1, v_i \rangle \neq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , com  $i \neq 2$ . Mostrando que podemos no máximo ter um zero na linha 1. O mesmo ocorre para todas as outras linhas. Vale mencionar que uma configuração genérica é sempre boa.

Sejam  $c_1$  e  $c_2$  geodésicas complexas ultraparalelas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , e  $v_1$  e  $v_2$  vetores polares a  $c_1$

e  $c_2$  respectivamente. Então existe uma única geodésica complexa  $c$  que é ortogonal a  $c_1$  e a  $c_2$ . Um vetor polar  $v$  a  $c$  pode ser encontrado através do produto cruzado  $v = v_1 \boxtimes v_2$ . Denominaremos a geodésica complexa  $c$  de *ortogonal comum* a  $c_1$  e  $c_2$ .

Façamos uma prova de que a geodésica complexa que é ortogonal comum a duas outras geodésicas ultra-paralelas é única.

Sejam  $c_1, c_2$  geodésicas complexas ultra-paralelas com vetores polares  $v_1 = (a, b, c)^t$  e  $v_2 = (e, f, g)^t$  respectivamente.

$$\begin{cases} \bar{a}x + \bar{b}y - \bar{c}z = 0 \\ \bar{e}x + \bar{f}y - \bar{g}z = 0 \end{cases}$$

Como  $v_1$  e  $v_2$  são LI segue que as linhas do sistema acima também são. Temos que o espaço-solução do sistema possui dimensão 1, logo quaisquer duas soluções não nulas são múltiplas uma da outra. Além disso,  $\bar{c}_1 \cap \bar{c}_2 \neq \emptyset$  o que implica que qualquer solução não-nula é um vetor positivo. Portanto, o sistema de equações determina que há uma única geodésica complexa ortogonal a  $c_1$  e a  $c_2$ .

Dizemos que um  $c$ -polígono próprio  $P = (c_1, \dots, c_m)$  é *retângulo* se  $\theta_i = \frac{\pi}{2}$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

O leitor deve observar que a proposição a seguir é uma outra forma de mostrar a unicidade da ortogonal comum a duas geodésicas ultra-paralelas.

**Proposição 5.2.** Não existe  $c$ -polígono próprio retângulo para  $m = 4$ .

**Demonstração:** Suponhamos por contradição que  $P = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  seja um  $c$ -quadrilátero próprio retângulo. Sejam  $v_1, v_2, v_3, v_4$  vetores polares as geodésicas  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $G = (g_{ij})$  matriz de Gram associada a  $P$  definida por esses vetores. O fato de  $P$  ser retângulo nos dá que  $g_{12} = g_{23} = g_{34} = g_{14} = 0$ . Aqui cabe lembrar que a matriz normalizada de  $G$  não é única. A matriz de Gram  $G$  será normalizada segundo a Proposição 3.2, ou seja,  $g_{ii} = 1, g_{13} \geq 0$  e podemos tomar, se necessário,  $\lambda_2$  complexo unitário conforme utilizado na Proposição 3.2 com a finalidade de obter que  $r_{24} \geq 0$ .

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} \\ r_{13} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{com } r_{13}, r_{24} \geq 0.$$

Calculando o determinante da  $G$ , obtemos que  $\det G = (1 - r_{13}^2)(1 - r_{24}^2)$ . Agora,

consideremos as submatrizes  $G_{123}$  e  $G_{124}$ , abaixo explicitadas

$$G_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{124} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{24} \\ 0 & r_{24} & 1 \end{pmatrix}.$$

cujos respectivos determinantes são  $D_{123} = (1 - r_{13}^2)$  e  $D_{124} = (1 - r_{24}^2)$ . Como  $G$  é de Gram e  $g_{ii} = 1$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  segue que estamos nas hipóteses do Teorema 4.1. Aplicando-o temos garantido que

$$\det G = (1 - r_{13}^2)(1 - r_{24}^2) = 0, \quad D_{123} = (1 - r_{13}^2) \leq 0, \quad D_{124} = (1 - r_{24}^2) \leq 0.$$

Repare que  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_1, v_2, v_4$  são vetores linearmente independentes. Provemos que os três primeiros vetores são LI. Para isto, basta notar que se  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ , então aplicando o produto interno hermitiano com  $v_1, v_2$  e  $v_3$  respectivamente nesta equação, obtemos que

$$\alpha + \gamma r_{13} = 0 \tag{5.1}$$

$$\beta = 0 \tag{5.2}$$

$$\alpha r_{13} + \gamma = 0 \tag{5.3}$$

De (5.1) e (5.3), obtemos que  $-\gamma r_{13}^2 + \gamma = 0$ , que é equivalente a  $\gamma(-r_{13}^2 + 1) = 0$ . Daí, tiramos que  $\gamma = 0$  ou  $r_{13}^2 = 1$ . Se  $\gamma = 0$ , obtemos o que queríamos. Se  $r_{13}^2 = 1$ , então  $\alpha = -\gamma$ . Substituindo os valores encontrados em  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ , obtemos que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\alpha v_1 + 0v_2 - \alpha v_3 = 0$$

$$\alpha(v_1 - v_3) = 0$$

Como  $v_1 \neq v_3$  segue que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , mostrando que  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são L.I. O que leva a  $D_{123} \neq 0$  e conseqüentemente que  $D_{123} < 0$ . Por processo análogo mostramos que  $D_{124} < 0$ .

Então teríamos  $\det G = (1 - r_{13}^2)(1 - r_{24}^2) = 0$ ,  $(1 - r_{13}^2) < 0$  e  $(1 - r_{24}^2) < 0$ , que seria um absurdo. ■

Seja  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada ruim de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . A partir de  $C$  podemos construir sub-upla ordenada  $C^* = (c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$  que não contenha retas ruins, onde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ ,  $k \neq 2$ . Vejamos por exemplo o seguinte

algoritmo:

- Se  $C$  não contém retas ruins, então não há o que fazer.
- Se  $C$  contém uma reta ruim, digamos  $c_i$ , então removemos  $c_i$ .
- Se a nova configuração não contiver retas ruins, podemos parar o processo de retirada de geodésicas. Caso contrário, repetimos o processo até obtermos uma configuração boa.

Note que se tivéssemos  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  uma quintupla de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $c_2 \perp c_3$ ,  $c_3 \perp c_4$ ,  $c_4 \perp c_5$ . Por definição,  $C$  seria uma configuração ruim. Aplicando o algoritmo acima podemos retirar  $c_3$ , dando origem a configuração reduzida  $C^* = (c_1, c_2, c_4, c_5)$ , ou poderíamos retirar  $c_4$ , obtendo  $C^* = (c_1, c_2, c_3, c_5)$ . Mostrando que a configuração reduzida não é única. Também observe que a configuração reduzida nos mostra que reta foi retirada. É interessante mencionar que dada uma configuração reduzida  $C^*$  qualquer, não é possível reconstruir a configuração  $C$  da qual ela é originária. Vejamos um exemplo que ilustra essa afirmação.

**Exemplo 5.1.** Note que se possuímos apenas uma configuração reduzida, nada podemos dizer sobre a configuração original.

Suponha, por exemplo, que  $C^*$  é uma configuração reduzida de uma configuração  $C$  tal que

$$C^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ com } z \in \mathbb{C},$$

tais geodésicas complexas estão respectivamente associadas aos vetores polares

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Claramente a primeira e a terceira geodésicas são ortogonais. Note que não sabemos quantas geodésicas foram retiradas da configuração original. Além disso, mesmo que soubéssemos, ainda não seríamos capazes de encontrá-las. Suponha por exemplo que a configuração original tivesse quatro geodésicas complexas. Denominemos a geodésica retirada de  $c$ . A dúvida que surge é se  $c$  é ortogonal a  $c'_1$  e a  $c'_3$ , a  $c'_1$  e a  $c'_2$  ou a  $c'_2$  e a  $c'_3$ , onde  $c'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são as geodésicas da configuração reduzida na ordem que aparecem.

•

Seja  $c_i$  uma das retas ruins retiradas de uma configuração  $C$  para a construção de uma configuração reduzida  $C^*$ . Definimos  $c_i^* = \{c_j \in C^*; c_j \perp c_i\}$  o conjunto de todas as retas em  $C^*$  ortogonais a  $c_i$ . Se uma reta pertence a  $c_i^*$  damos a ela o nome de reta associada a  $c_i$ . Observemos que todas as retas em  $c_i^*$  são ultra-paralelas. A título de exemplificar tal fato, considere uma configuração ruim  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$  com  $c_2 \perp c_3$ ,  $c_2 \perp c_4$  e  $c_2 \perp c_5$ , cuja configuração reduzida é dada por  $C^* = (c_1, c_3, c_4, c_5, c_6)$ . Daí o conjunto de todas as retas ortogonais a  $c_2$  é dado por  $c_2^* = \{c_3, c_4, c_5\}$ . Como  $c_2$  é perpendicular comum a  $c_3$  e a  $c_4$ , a  $c_3$  e  $c_5$ , e a  $c_4$  e  $c_5$ , isso nos fornece que  $c_3$ ,  $c_4$  e  $c_5$  são ultra-paralelas. Como as retas em  $c_i^*$  são ultra-paralelas, conseqüentemente os d-invariantes definidos por pares de geodésicas complexas distintas em  $c_i^*$  são maiores do que 1. A essas condições damos o nome de *condições de ortogonalidade* definidas por  $c_i$ . As condições de ortogonalidade definidas por todos os  $c_i$  ruins são chamadas de *condições herdadas*.

Vimos que somente a configuração reduzida não nos possibilita recuperar a configuração original.

Vejam um exemplo ilustrativo de que quando dispomos da configuração reduzida e de todas as  $c_i^*$  conseguimos obter a configuração inicial.

**Exemplo 5.2.** Tomemos a mesma configuração do exemplo anterior. Mas agora forneçamos que  $c_3^* = \{c_1, c_2\}$ .

Dessa forma é possível saber quantas retas foram retiradas, em nosso caso somente  $c_3^*$  foi retirada. Conseqüentemente  $c_1$ ,  $c_2$  estão em  $C^*$  e se encontram ordenadas. Seja  $v_3$  o vetor polar a  $c_3$ , temos que  $\langle v_3, v_1 \rangle = 0 = \langle v_3, v_2 \rangle$ . Isso nos fornece que  $v_3 = (0, 1, 0)^t$  logo

$$c_3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Assim, a configuração original é dada por

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ com } z \in \mathbb{C}$$

•

Agora nosso objetivo é definir os novos invariantes que nos serão úteis para descrever a classe de congruência de  $PU(2, 1)$ . Sejam  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $v = (v_1, \dots, v_k)$  uma  $k$ -upla de vetores polares a

$c_1, \dots, c_k$ . Definimos o número complexo

$$\delta_k = \delta_k(c_1, \dots, c_k) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \dots \langle v_{k-1}, v_k \rangle \langle v_k, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \dots \langle v_k, v_k \rangle}.$$

que é uma generalização do nosso antigo invariante  $d_{ij}$ . Observe que para  $k = 2$ , temos justamente  $\delta_2(c_1, c_2) = d(c_1, c_2)$ . Desse forma, é facil ver (Seção 4.2.1) que  $\delta_k$  está bem definido, independe dos vetores polares escolhidos e é invariante com respeito a ação diagonal de  $PU(2, 1)$ . Daremos a tal invariante o nome de  $k$  - *delta invariante* ou, de forma mais simplificada,  $\delta$  - *invariante*. Por fim, note que se dispomos de uma tripla  $(c_1, c_2, c_3)$  ordenada de geodésicas complexas não ortogonais, temos que  $\mathbb{A}(c_1, c_2, c_3) = \arg(\delta_3(c_1, c_2, c_3))$ .

Nossa meta seguinte é descrever o espaço de módulos de uma configuração regular boa de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Seja  $\mathcal{M}^*(k)$  o espaço de configuração de  $k$ -uplas ordenadas regulares boas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , ou seja, é o conjunto das  $k$ -uplas ordenadas regulares boas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  passado o quociente pela ação diagonal de  $PU(2, 1)$  munido da topologia quociente.

Para descrever unicamente a classe de congruência em  $PU(2, 1)$  ainda faremos uso da matriz de Gram, mas aqui, dependendo da situação precisaremos manipular os invariantes a fim de descrever a normalização de tal matriz de forma única. Com esse intuito escreveremos o espaço de configurações como uma união finita de conjuntos menores, isso nos fornece algumas situações para a normalização da matriz de Gram.

$$\mathcal{M}^*(k) = \mathcal{M}_1^* \cup \mathcal{M}_2^* \cup \dots \cup \mathcal{M}_{(k-1)}^* \cup \mathcal{M}_k^*,$$

onde

- a.  $\mathcal{M}_1^*$  é o subconjunto de  $\mathcal{M}^*(k)$  cujos pontos  $[C]$  são representados por  $k$ -uplas  $C = (c_1, \dots, c_k)$  tal que  $c_1$  não é ortogonal a  $c_j$  para todo  $j = 2, \dots, k$ ;
- b.  $\mathcal{M}_n^*$  com  $n = 2, \dots, (k-1)$  é o subconjunto de  $\mathcal{M}^*(k)$  cujos pontos  $[C]$  são representados por  $k$ -uplas  $C = (c_1, \dots, c_k)$  tal que  $c_1$  é ortogonal a  $c_n$  e  $c_1$  não é ortogonal a  $c_j$  para  $j \neq n$ ;
- c.  $\mathcal{M}_k^*$  é o subconjunto de  $\mathcal{M}^*(k)$  cujos pontos  $[C]$  são representados por  $k$ -uplas  $C = (c_1, \dots, c_k)$  tal que  $c_1$  é ortogonal a  $c_k$  e  $c_1$  não é ortogonal a  $c_j$  para  $j = 2, \dots, k-1$ .

A partir do acima vemos que  $\mathcal{M}^*(k)$  é a união disjunta dos  $\mathcal{M}_i^*$ ,  $i = 1, \dots, k$ . E é

também o acima que motiva a definição a seguir.

**Definição 5.** Seja  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada regular boa de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Dizemos que  $C$  é do *primeiro tipo* se  $[C] \in \mathcal{M}_1^*$ , que  $C$  é do *segundo tipo* se  $[C] \in \mathcal{M}_n^*$ , para  $n = 2, \dots, (k-1)$ , e que  $C$  é do *terceiro tipo* se  $[C] \in \mathcal{M}_k^*$ .

Agora estamos interessados na normalização da matriz de Gram  $G(C)$  associada a uma  $k$ -upla  $C = (c_1, \dots, c_k)$  ordenada regular boa de geodésicas complexas distintas. Aplicando a Proposição 3.2, podemos normalizar de forma que  $g_{ii} = 1$ , e  $g_{1j} = r_{1j} \geq 0$ , para todo  $j = 2, \dots, k$ . Como estamos considerando que  $C$  é uma configuração boa, o número de zeros na primeira linha  $L = (1, r_{12}, \dots, r_{1k})$  de  $G = (g_{ij})$  é menor do que 2.

Se  $C$  é configuração do primeiro tipo, teremos  $r_{1j} > 0$  para todo  $j = 2, \dots, m$ . Pelo já visto no Capítulo 3 segue que  $G = (g_{ij})$  admite normalização única. O mesmo não ocorre quando  $C$  é do segundo ou terceiro tipo, neste caso  $G = (g_{ij})$  admite mais de uma normalização. Estudemos separadamente os dois casos:

- Se  $C$  é do segundo tipo, então para algum  $n$  temos  $r_{1n} = 0, n = 2, \dots, (k-1)$ . Como a configuração é boa segue que necessariamente  $g_{in} \neq 0$  para todo  $i = 2, \dots, k$ . E neste caso substituindo, se necessário,  $v_n$  por  $\lambda_n v_n$ , obtemos normalização de modo que  $g_{nk} > 0$  onde  $\lambda_n$  é complexo unitário conforme utilizado na Proposição 3.2.
- Se  $C$  é do terceiro tipo, então  $r_{1k} = 0$ . Por estarmos trabalhando com uma configuração boa,  $r_{ik} \neq 0$ , para todo  $i = 2, \dots, k-1$ . Se não fosse teríamos  $c_k$  ortogonal a  $c_1$  e a  $c_i$ , o que contraria o fato de  $C$  ser configuração boa. Novamente, se necessário for, podemos tomar  $\lambda_n$  complexo unitário capaz de obtermos normalização de modo que  $g_{(k-1)k} = r_{(k-1)k} > 0$ .

São estas tais normalizações que nos possibilitarão completar todas as entradas de  $G$  de forma única. Uma matriz de Gram normalizada por esse procedimento é denominada matriz de Gram *completamente normalizada*.

**Proposição 5.3.** Os  $d$ -invariantes  $d_j = d_{1j}, 1 < j \leq k$ , e o 3-delta invariante  $\delta(1, i, j) = \delta_3(c_1, c_i, c_j), 1 < i < j \leq k$ , definem unicamente a classe de congruência  $PU(2, 1)$  de uma  $k$ -upla ordenada regular boa de geodésicas complexas distintas do primeiro tipo.

**Demonstração:** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada boa de geodésicas complexas do primeiro tipo e  $G = (g_{ij})$  sua matriz de Gram completamente normalizada, ou

seja,  $g_{ii} = 1$ ,  $g_{1j} > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$  e  $j = 2, \dots, k$ . Temos que,

$$d_{1j} = d(c_1, c_j) = \frac{\langle v_1, v_j \rangle \langle v_j, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_j, v_j \rangle} = g_{1j}g_{j1} = |g_{1j}|^2 = r_{1j}^2$$

Todo o acima nos fornece que  $r_{1j} = \sqrt{d_{1j}}$ . E isso completa as entradas da primeira linha. Agora, observe que cálculos diretos nos fornecem que

$$\delta(1, i, j) = \delta_3(c_1, c_i, c_j) = \langle v_1, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle \langle v_j, v_1 \rangle = g_{1i}g_{ij}g_{j1}.$$

De onde obtemos a igualdade abaixo.

$$g_{ij} = \frac{\delta(1, i, j)}{g_{1i}g_{j1}} = \frac{\delta(1, i, j)}{\sqrt{d_{1i}}\sqrt{d_{j1}}} = \frac{\delta(1, i, j)}{(d_{1i}d_{j1})^{\frac{1}{2}}}, \quad 1 < i < j \leq k.$$

As relações obtidas cobrem todas as entradas de  $G$  unicamente. Para terminar a prova basta aplicar a Proposição 3.8, pois, se tivermos duas  $k$ -uplas ordenadas boas de geodésicas complexas de primeiro tipo que possuem matrizes de Gram normalizadas iguais, a referida proposição nos garante que tais  $k$ -uplas são congruentes em  $PU(2, 1)$ . ■

**Proposição 5.4.** Seja  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada regular boa de geodésicas complexas distintas do segundo tipo tal que  $[C] \in \mathcal{M}_n^*$ , para algum  $n$  fixo em  $\{2, \dots, k-1\}$ . Então a classe de congruência  $PU(2, 1)$  de  $C$  é unicamente definida pelos d-invariantes  $d_{1j}$ ,  $d_{nk}$ ,  $1 < j \leq k$ ,  $j \neq n$ , o 3-delta invariante  $\delta(1, i, j) = \delta_3(c_1, c_i, c_j)$ ,  $1 < i < j \leq k, i, j \neq n$ , e o 4 delta-invariante  $\delta(1, j, n, k) = \delta_4(c_1, c_j, c_n, c_k)$ ,  $1 < j < k$ ,  $j \neq n$ .

**Demonstração:** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada boa de geodésicas complexas do segundo tipo e  $G = (g_{ij})$  sua matriz de Gram completamente normalizada, ou seja,  $g_{ii} = 1$ ,  $g_{1j} = r_{1j} > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$  e  $j \in \{2, \dots, k\} \setminus \{n\}$ ,  $r_{1n} = 0$ , e  $g_{nk} = r_{nk} > 0$ . Temos que,

$$r_{1j} = \sqrt{d_{1j}}, \forall j = 2, \dots, k, j \neq n \text{ e } r_{nk} = \sqrt{d_{nk}}$$

O que cobre completamente a primeira linha da matriz de Gram. Agora direcionemos nossa atenção para o 3-delta invariante. Como  $r_{i1} > 0$  e  $r_{j1} > 0$  para  $i, j \neq n$  e através de cálculos simples anteriormente explicitados podemos tirar a seguinte relação

$$g_{ij} = \frac{\delta(1, i, j)}{(d_{1i}d_{1j})^{\frac{1}{2}}}, \forall 1 < i < j \leq k \text{ e } i, j \neq n.$$

Por fim, fazendo uso do 4-delta invariante obtemos a ultima relação que completa todas

as entradas da matriz de Gram completamente normalizada.

$$\begin{aligned}
\delta(1, j, n, k) &= \delta_4(c_1, c_j, c_n, c_k) \\
&= \langle v_1, v_j \rangle \langle v_j, v_n \rangle \langle v_n, v_k \rangle \langle v_k, v_1 \rangle \\
&= g_{1j} g_{jn} g_{nk} g_{k1} \\
&= r_{1j} r_{jn} r_{nk} r_{k1}
\end{aligned}$$

Como  $r_{1j} > 0$  para  $j \neq 0$ , e  $r_{k1} > 0$ ,  $r_{nk} > 0$ , podemos rearranjar o acima da seguinte forma

$$g_{jn} = \frac{\delta(1, j, n, k)}{(d_{1j} d_{1k} d_{nk})^{\frac{1}{2}}}, \forall j = 2, \dots, k, j \neq n.$$

Até aqui já temos todas as entradas da matriz de Gram recobertas pelo invariantes  $d_{1j}$ ,  $d_{nk}$ ,  $\delta(1, i, j)$  e  $\delta(1, i, j, k)$ . Para finalizar a demonstração basta seguir exatamente o mesmo raciocínio da parte final da Proposição 5.3. Que consiste na aplicação direta da Proposição 3.8. ■

**Proposição 5.5.** Seja  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada regular boa de geodésicas complexas distintas do terceiro tipo. Então a classe de congruência de  $C$  em  $PU(2, 1)$  é definida unicamente por d-invariantes,  $d_{1j}$ ,  $d_{k(k-1)}$ ,  $1 < j \leq k$ , os 3-deltas invariantes,  $\delta(1, i, j) = \delta_3(c_1, c_i, c_j)$ ,  $1 < i < j \leq k - 1$ , e o 4-delta invariante  $\delta(1, i, k, k - 1) = \delta_4(c_1, c_i, c_k, c_{k-1})$ ,  $1 < i \leq k - 2$ .

**Demonstração:** Seja  $C = (c_1, \dots, c_k)$  uma  $k$ -upla ordenada regular boa de geodésicas complexas do terceiro tipo e  $G = (g_{ij})$  sua matriz de Gram completamente normalizada. Ou seja,  $G$  deve cumprir as seguintes especificações

$$\begin{cases} g_{ii} = 1, i = 1, \dots, k \\ g_{1j} = r_{1j}, \forall j = 2, \dots, k - 1 \\ r_{1k} = 0 \\ g_{(k-1)k} = r_{(k-1)k} > 0 \end{cases}$$

A primeira linha é facilmente completada com o invariante  $d_{1j}$ , conforme abaixo indicado.

$$r_{1j} = \sqrt{d_{1j}}, \forall j = 2, \dots, k - 1 \text{ e } r_{(k-1)k} = \sqrt{d_{(k-1)k}}.$$

Agora, como  $r_{1i} > 0$  e  $r_{j1} > 0$  para todo  $2 \leq i, j \leq (k - 1)$ , obtemos, por contas já feitas na Proposição 5.4, a seguinte relação

$$g_{ij} = \frac{\delta(1, i, j)}{(d_{1i} d_{1j})^{\frac{1}{2}}}, \forall 1 < i < j \leq k - 1.$$

Utilizando o 4 - delta invariante chegamos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\delta(1, i, k, k-1) &= \delta_4(c_1, c_i, c_k, c_{k-1}) \\
&= \langle v_1, v_i \rangle \langle v_i, v_k \rangle \langle v_k, v_{k-1} \rangle \langle v_{k-1}, v_1 \rangle \\
&= g_{1i} g_{ik} g_{k(k-1)} g_{(k-1)1} \\
&= r_{1i} r_{ik} r_{k(k-1)} r_{(k-1)1}
\end{aligned}$$

Daí, como  $r_{1i} > 0$  para  $1 < i \leq (k-1)$ , e  $r_{(k-1)k} > 0$ ,  $r_{(k-1)1} > 0$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
g_{ik} &= \frac{\delta(1, i, k, k-1)}{r_{1i} r_{k(k-1)} r_{(k-1)1}} \\
&= \frac{\delta(1, i, k, k-1)}{(d_{1i} d_{k(k-1)} d_{(k-1)1})^{\frac{1}{2}}} \quad i = 2, \dots, k-2.
\end{aligned}$$

Portanto, todos os invariantes acima definem unicamente a matriz de Gram completamente normalizada. Chegamos ao resultado almejado aplicando a Proposição 3.8. ■

Agora estamos a um passo da construção do espaço de módulos  $\mathbb{M}_k^*$  para o espaço de configuração  $\mathcal{M}^*(k)$  de  $k$ -uplas regulares boas de geodésicas complexas distintas. O procedimento é análogo ao do Teorema 4.8, já demonstrado anteriormente. Para tal feito, precisaremos do número de invariante em cada caso, ou seja, o número de invariante na Proposições 5.3 - 5.5.

1. Na Proposição 5.3 estamos lidando com uma configuração de primeiro tipo. Da qual tiramos que o número de  $d_{1i}$  e  $\delta(1, i, j)$  é dado por

- $\sqrt{d_{1j}} = r_{1j}$ ,  $j = 2, \dots, k$ , daí o número de d-invariantes é:  $\#d_{1j} = k-1 = d_1$ .
- $g_{ij} = \frac{\delta(1, i, j)}{(d_{1i} d_{d_{1j}})^{\frac{1}{2}}}$ ,  $1 < i < j \leq k$ . O número de 3- $\delta$ -invariantes é dado por

$$C(k-1, 2) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} = d_2$$

O que nos leva a concluir que o número total de invariante  $d$  é a soma de  $d_1$  e  $d_2$ , ou seja,  $d = d_1 + d_2 = \frac{k^2-k}{2}$ .

2. Na Proposição 5.4 estamos lidando com uma configuração de segundo tipo. Da qual tiramos que o número de  $d_{1i}$ ,  $\delta(1, i, j)$  e  $\delta(1, j, n, k)$  é dado por

- $\sqrt{d_{nk}} = r_{nk}$ .
- $\sqrt{d_{1j}} = r_{1j}$ ,  $1 < j \leq k$  e  $j \neq n$ , daí o número de d-invariantes é:  $\#d_{1j} = (k-2) + 1 = k-1 = d_1$ .

- $g_{ij} = \frac{\delta(1,i,j)}{(d_{1i}d_{1j})^{\frac{1}{2}}}$ ,  $1 < i < j \leq k$ ,  $i, j \neq n$ . O número de  $4\text{-}\delta$ -invariantes é dado por

$$C(k-2, 2) = \frac{(k-2)(k-3)}{2} = d_2$$

- $g_{jn} = \frac{\delta(1,j,n,k)}{(d_{1j}d_{1k}d_{nk})^{\frac{1}{2}}}$ ,  $1 < j \leq k$ ,  $j \neq n$ . O número de  $\delta$ -invariantes é  $k-2 = d_3$ .

Daí, o número total de invariantes é  $d = d_1 + d_2 + d_3 = \frac{k^2-k}{2}$ .

3. Na Proposição 5.5 estamos lidando com uma configuração de terceiro tipo. Da qual tiramos que o número de  $d_{1i}$ ,  $\delta(1, i, j)$  e  $\delta(1, i, k, k-1)$  é dado por

- $\sqrt{d_{1j}} = r_{1j}$ ,  $1 < j \leq k-1$ , daí o número de  $d$ -invariantes é  $\#d_{1j} = (k-2) + 1 = k-1 = d_1$ .
- $g_{ij} = \frac{\delta(1,i,j)}{(d_{1i}d_{1j})^{\frac{1}{2}}}$ ,  $1 < i < j \leq k-1$ ,  $i$ . O número de  $\delta$ -invariantes é dado por

$$C(k-2, 2) = \frac{(k-2)(k-3)}{2} = d_2$$

- $g_{ik} = \frac{\delta(1,i,k,k-1)}{(d_{1i}d_{1(k-1)}d_{k(k-1)})^{\frac{1}{2}}}$ ,  $1 < i \leq k-2$ . O número de  $\delta$ -invariantes é  $k-3 = d_3$ .

Daí, o número total de invariantes é  $d = d_1 + d_2 + d_3 = \frac{k^2-k-2}{2}$ .

Enunciaremos a seguir o teorema que fornece a descrição do espaço de Módulos de  $k$ -uplas ordenadas boas de geodésicas complexas distintas do segundo tipo,  $\mathbb{M}_n^*$ , onde  $n \in \{2, \dots, k-1\}$ . Os outros tipos seguem de forma análoga. Dessa forma considerando que se  $z \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_3}$ , nós escreveremos  $z = (u, v, w)$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_{d_1}) \in \mathbb{R}^{d_1}$ ;  $d_1 = k-1$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}$ ;  $d_2 = \frac{(k-2)(k-3)}{2}$  e  $w = (w_1, \dots, w_{d_3}) \in \mathbb{R}^{d_3}$ ;  $d_3 = k-2$ . Fazendo uso da ordem do dicionário, podemos relacionar  $(u_1, \dots, u_{d_1}, v_1, \dots, v_{d_2}, w_1, \dots, w_{d_3})$  com os  $(d_{12}, \dots, d_{(m-1)m}, \mathbb{A}_{23}, \dots, \mathbb{A}_{(m-1)m}, \delta(1, 2, 3), \dots, \delta(1, m-1, m))$ . Assim os  $D_{i_1, \dots, i_k} = D_{i_1, \dots, i_k}(d_{1j}, \mathbb{A}_{ij}, \delta(1, i, j))$  definem os  $D_{i_1, \dots, i_k}(u, v, w)$ . Reescrevendo o Teorema 4.8 com os dados da Proposição 5.4, obtemos que

**Teorema 5.6.** O espaço de configuração  $\mathcal{M}_n^*$  de  $k$ -uplas ordenadas regulares de geodésicas complexas distintas do segundo tipo está bijetivamente relacionado ao conjunto  $\mathbb{M}_n^*$  de pontos em  $\mathbb{R}^d$ , com  $d = \frac{k^2-k}{2}$  e  $n \in \{2, \dots, k-1\}$ , definido pelas seguintes condições

1.  $D_{i_1, \dots, i_p}(u, v, w) = 0$ ,  $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k$ , para  $k$  maior ou igual a 4.
2.  $D_{i_1, i_2, i_3}(u, v, w) \leq 0$ ,  $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k$ .

Contanto que  $u_i > 0, \forall i = 1, \dots, d_1, v_j, j = 1, \dots, d_2$  e  $w_t, t = 1, \dots, d_3$ .

Definimos o conjunto  $\mathbb{M}_n^*$  como espaço de módulos de  $\mathcal{M}_n^*$ , onde  $n \in \{2, \dots, k-1\}$ .

Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada ruim de geodésicas complexas distintas e  $C^* = (c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$  uma configuração reduzida, com  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ . Denotando  $\mathbb{M}_m^s$  como espaço de módulos de uma configuração especial, enunciamos o teorema a seguir que o descreve.

**Teorema 5.7.** O espaço de módulos  $\mathbb{M}_m^s$  está bijetivamente relacionado ao conjunto  $\mathbb{M}_k^* = \mathbb{M}_k^*(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$  definido pelas condições herdadas.

Como aplicação do Teorema acima vejamos os seguinte exemplo.

**Exemplo 5.3.** Sejam  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  geodésicas complexas distintas e  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  vértices do  $P = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$   $c$ -pentágono retângulo próprio. Considere  $P^* = (c_1, c_3, c_5)$  uma configuração reduzida de  $P$ . Note que  $P^*$  é boa e é do terceiro tipo. Fazendo analogia com o  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é possível imaginar o  $c$ -pentágono e sua configuração reduzida de terceiro tipo

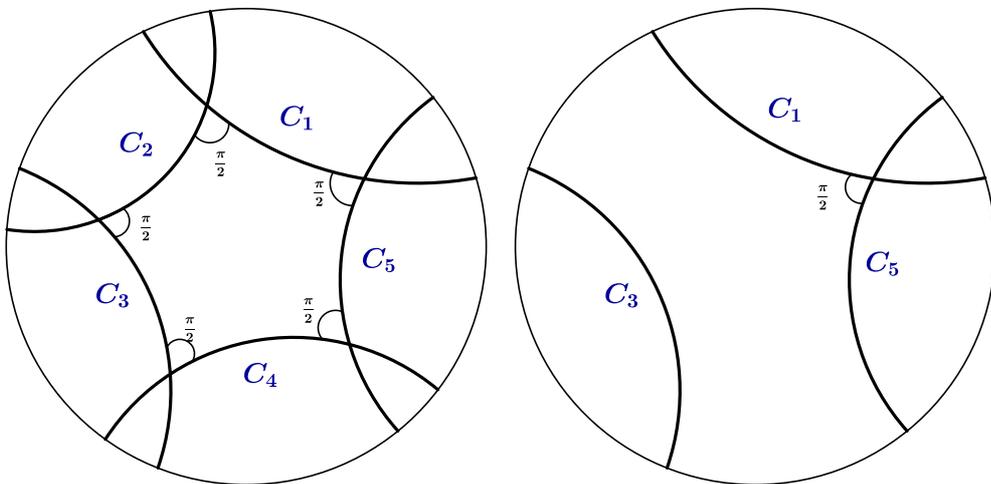


Figura 7:  $c$ -pentágono e sua configuração reduzida

A matriz de Gram  $G = (g_{ij})$  associada a  $P^*$  completamente normalizada é dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & r_{13} & 0 \\ r_{13} & 1 & r_{35} \\ 0 & r_{35} & 1 \end{pmatrix}, \quad r_{13} = \sqrt{d_{13}} > 0 \text{ e } r_{35} = \sqrt{d_{35}} > 0.$$

Os conjuntos de retas associados a  $c_2$  e  $c_4$  denominados por  $c_2^*$  e  $c_4^*$  respectivamente nos fornecem que,

$$c_2^* = \{c_1, c_3\}, \text{ então } c_1 \text{ e } c_3 \text{ são ultra-paralelas, desta forma } d_{13} > 1;$$

$$c_4^* = \{c_3, c_5\}, \text{ então } c_3 \text{ e } c_5 \text{ são ultra-paralelas, desta forma } d_{35} > 1.$$

O Teorema 4.8 nos garante que  $\det G$  deve ser menor ou igual a 0. Como  $r_{13}^2, r_{35}^2$  são reais maiores do que um segue que após cálculos simples  $\det G = 1 - (r_{13}^2 + r_{35}^2) < 0$ .

O espaço de módulos de c-pentágonos retângulos pode ser identificado como

$$\mathbb{M}_5^s = \{(x, y); x > 1, y > 1\}$$

•

Agora desejamos mostrar que qualquer c-pentágono próprio retângulo está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano. Sabemos que o  $\mathbb{R}^2$ -plano é definido como o conjunto dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in B^2; |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1 \right\}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Considere os 5 pontos abaixo,

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{11}} \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{22}} \\ \sqrt{\frac{1}{11}} \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{2}{33}} \\ \frac{1}{\sqrt{99}} \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{2}{33}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tais pontos estão num  $\mathbb{R}^2$ -plano e formam um pentágono retângulo. Podemos associar a quintupla  $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$  de pontos em  $\mathbb{R}^2$ -plano a uma quintupla de geodésicas complexas  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  que está associado a uma matriz de Gram normalizada dada por,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4\sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{11}{10}} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 3 & 4\sqrt{\frac{1}{5}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{11}{10}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chamando  $x = d_{13}$  e  $y = d_{35}$ , temos que  $x, y > 1$ . Mostrando que existe  $g \in PU(2, 1)$  capaz de levar um c-pentágono complexo num  $\mathbb{R}^2$ -plano.

**Exemplo 5.4.** Sejam  $P = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$  um c-hexágono retângulo próprio,  $S =$

$(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$  seus vértices e  $P^* = (c_1, c_3, c_5)$  a configuração reduzida de  $P$ . Note que  $P^*$  é boa e é do primeiro tipo. Fazendo analogia com o  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é possível imaginar o c-hexágono e sua configuração reduzida de primeiro tipo

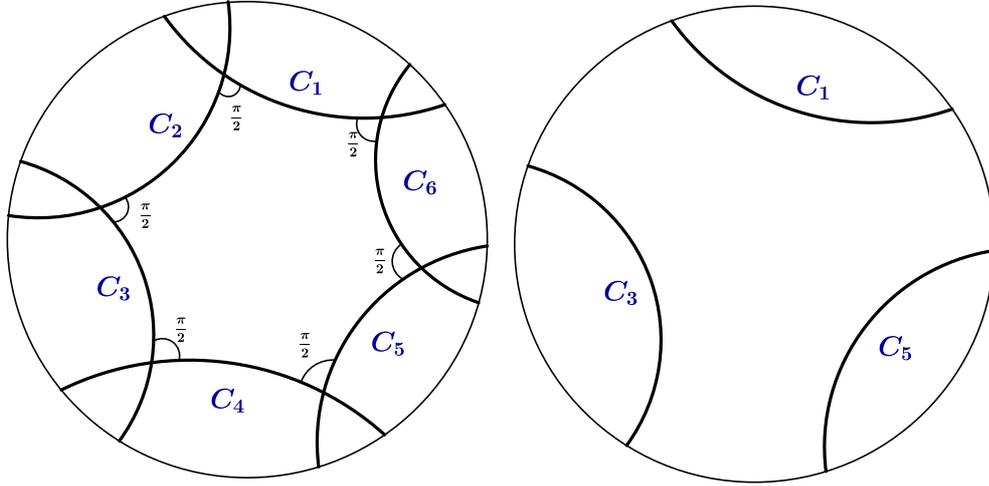


Figura 8: c-hexágono e sua configuração reduzida

A matriz de Gram  $G = (g_{ij})$  normalizada associada a  $P^*$  está estruturada como abaixo

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{d_1} & \sqrt{d_2} \\ \sqrt{d_1} & 1 & r_{35} \\ \sqrt{d_2} & r_{35} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} r_{13} = r_1 = \sqrt{d_{13}} = \sqrt{d_1} > 0 \\ r_{15} = r_2 = \sqrt{d_{15}} = \sqrt{d_2} > 0 \\ r_3 = r_{35} = \sqrt{d_{35}} > 0 \\ r_3 = \sqrt{d_{35}} = \frac{\delta(c_1, c_3, c_5)}{(d_1 d_2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Das retas associadas a  $c_2, c_4$  e  $c_6$  tiramos que  $d_{13} > 1$ ,  $d_{35} > 1$  e  $d_{15} > 1$ , pois

$$c_2^* = \{c_1, c_3\}, \text{ então } c_1 \text{ e } c_3 \text{ são ultra-paralelas, desta forma } d_{13} > 1;$$

$$c_4^* = \{c_3, c_5\}, \text{ então } c_3 \text{ e } c_5 \text{ são ultra-paralelas, desta forma } d_{35} > 1;$$

$$c_6^* = \{c_1, c_5\}, \text{ então } c_1 \text{ e } c_5 \text{ são ultra-paralelas, desta forma } d_{15} > 1.$$

Portanto, aplicando o Teorema 4.8 temos garantido que  $\det G$  deve ser menor ou igual a 1. Como  $r_{13}^2, r_{35}^2$  e  $r_{15}^2$  são reais maiores do que 0 segue que após cálculos simples que o  $\det G = 1 - (r_{13}^2 + r_{35}^2 + r_{15}^2) + 2r_{13}r_{15}r_{35} \cos \alpha < 0$ . Utilizando a ordem do dicionário ( $r_{13} = r_1, r_{15} = r_2$  e  $r_{35} = r_3$ ) o espaço de módulos de c-hexágonos retângulos pode ser identificado como

$$\mathbb{M}_6^s = \{(r_1, r_2, r_3, \alpha) \in \mathbb{R}^4 : r_i > 1, \alpha \in (-\pi, \pi], 1 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2r_1 r_2 r_3 \cos \alpha < 0\} \bullet.$$

## 6 O ESPAÇO DE MÓDULOS DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS

No Capítulo 2 desta dissertação falamos sobre o produto interno hermitiano e sobre o domínio de Siegel. Aqui, tal produto irá adquirir outra forma. Mas ambos os produtos são equivalentes. O que estamos fazendo é uma mudança de base, mudança essa que altera a matriz geradora do produto interno hermitiano.

A base canônica  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  utilizada no Capítulo 2 dará lugar a seguinte base  $\hat{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , onde  $\hat{e}_1 = (1, 0, 1)^t$ ,  $\hat{e}_2 = (0, 1, 0)^t$  e  $\hat{e}_3 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ . Segue abaixo a matriz mudança de base, da base  $E$  para a base  $\hat{E}$ .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A partir dessa mudança de base é possível encontrar a matriz da forma hermitiana, que para nos será denominada de  $J_0$ . Consideraremos o produto interno hermitiano  $\langle z, w \rangle = w^* J_0 z$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$  definido pela matriz

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto nos fornece que  $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_3 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_1$ , onde

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando os mesmos argumentos do capítulo 2, obtemos que com essa mudança o

domínio de Siegel passa a ser identificado a

$$\mathfrak{h}^2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2 \mid 2\operatorname{Re}(w_1) + |w_2|^2 < 0\}$$

Recordamos que o grupo de Heisenberg é  $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  munido da operação

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)).$$

Daí, o espaço hiperbólico complexo pode ser parametrizado em coordenadas horoesféricas  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$ . Como descrito em Falbel - Parker [9].

$$\psi : (z, t, u) \rightarrow \begin{pmatrix} -|z|^2 - u + it \\ z\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para } (z, t, u) \in \overline{\mathfrak{h}^2} \setminus \{q_\infty\}.$$

O ponto ideal  $q_\infty$

$$\psi : q_\infty \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste capítulo, assim como no anterior, será necessário a construção de novos invariantes. Isso porque conforme visto no Exemplo 3.8, no caso de  $m$ -uplas degeneradas, é possível encontrar duas  $m$ -uplas de geodésicas complexas distintas que possuem matrizes de Gram normalizadas iguais, sem que tais  $m$ -uplas sejam congruentes.

## 6.1 AS ESFERAS POLARES DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS DE GEODÉSICAS COMPLEXAS

Neste capítulo estaremos a todo tempo trabalhando com elementos do espaço  $\mathbb{C}^{2,1}$  e do espaço projetivo  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ . Nossa atenção estará voltada para as esferas parabólicas, que nada mais são do que retas projetivas complexas em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ .

Iniciemos essa seção com a proposição a seguir que associa a cada ponto  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  a uma única reta projetiva  $S_p \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^2$ .

**Proposição 6.1.** Para qualquer ponto isotrópico  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  existe uma única reta projetiva complexa  $S_p \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  tangente a  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em  $p$ .

**Demonstração:** Consideremos os seguintes elementos do espaço  $\mathbb{C}^{2,1}$

- $l_p \subset \mathbb{C}^{2,1}$  com  $l_p = \{\lambda p; \lambda \in \mathbb{C}\}$ ;
- $V_p \subset \mathbb{C}^{2,1}$  com  $V_p = l_p^\perp = \{v; \langle v, p \rangle = 0\} \cup \{0\}$ .

denominados de reta complexa determinada por  $p$  e complemento hermitiano de  $l_p$  respectivamente.

É fácil ver que  $V_p$  é subespaço vetorial com dimensão 2. Pois dado  $v \in \mathbb{C}^{2,1}$  e  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  podemos escrevê-los genericamente como  $v = (v_1, v_2, v_3)^t$  e  $p = (p_1, p_2, p_3)^t$ , onde  $v_i, p_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i = 1, 2, 3$ . O produto hermitiano nos fornece a equação abaixo,

$$v_1\bar{p}_3 + v_2\bar{p}_2 + v_3\bar{p}_1 = 0. \quad (6.1)$$

Tal equação é suficiente para mostrar que  $\dim V_p = 2$ .

Agora note que se tomarmos  $z \in l_p$ , existirá  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $z = \lambda p$ . Daí,  $\langle z, p \rangle = \lambda \langle p, p \rangle = 0$ , pois  $p$  é isotrópico. Logo  $z \in V_p$ . Como tomamos  $z$  qualquer, temos que  $l_p \subset V_p$ . Consequentemente  $l_p \cap V_p = l_p$ .

Fazendo uso do Lema 3.2, obtemos que  $V_p \setminus l_p$  só contém vetores positivos. Pois, do fato de que  $\dim V_p = 2$  segue que a base de  $V_p$  possui dois vetores, a menos de ordenação podemos supor que  $p$  pertence a tal base, daí  $V_p = [w, p]$ . Considere a matriz do produto interno restrita a  $V_p$  como abaixo

$$G = \begin{pmatrix} \langle w, w \rangle & 0 \\ 0 & \langle p, p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w, w \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $p$  é isotrópico segue que  $\langle w, w \rangle > 0$ . Todo o anterior implica que a reta projetiva complexa  $S_p = \pi(V_p \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  é tangente a  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em  $p$ . Onde a unicidade de  $S_p$  é garantida pela equação 6.1. ■

O corolário a seguir assegura que qualquer subespaço degenerado de dimensão 2 tem a forma de um  $V_p$  para algum  $p$  na fronteira de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Corolário 6.2.** O espaço complexo de dimensão 2,  $V_p$ , é um subespaço degenerado do espaço hermitiano  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Além disso, qualquer subespaço degenerado de dimensão 2 de  $\mathbb{C}^{2,1}$  é da forma  $V_p$  para algum ponto isotrópico  $p$ .

**Demonstração:** Seja  $V_p$  um espaço complexo de dimensão 2. E seja  $\{z, p\}$  uma base de  $V_p$ . Então  $z \notin l_p$ , o que implica que  $\langle z, z \rangle > 0$ . É claro que

$$[\langle, \rangle|_{V_p}] = \begin{pmatrix} \langle z, z \rangle & \langle p, z \rangle \\ \langle z, p \rangle & \langle p, p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com  $r > 0$ . Logo, a restrição da matriz da forma hermitiana a  $V_p$  possui assinatura  $(1, 0)$  o que pelo capítulo 3 é o mesmo que dizer que  $V_p$  é parabólico, ou degenerado.

Para a segunda parte da demonstração do teorema, considere  $W$  um subespaço degenerado de  $\mathbb{C}^{2,1}$  de dimensão 2 tomemos uma base  $B = \{v, p\}$  tal que  $\langle p, w \rangle = 0$  para todo  $w \in W$ .

Daí,  $\langle v, p \rangle = \langle p, p \rangle = 0$  e pelo Lema 3.3 temos que  $\langle v, v \rangle > 0$ . Para qualquer  $w \in W$ , existem  $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$  com  $w = \lambda p + \beta v$  tal que  $\langle w, p \rangle = 0$ . Daí,  $W = \{w \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle w, P \rangle = 0\} = l_p^\perp = V_p$ . ■

Vejamos a seguir que se uma  $m$ -upla de geodésicas complexas é degenerada então tais geodésicas se encontram na  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  em um ponto isotrópico  $p$ . Além disso, é possível garantir que a recíproca também é válida.

Antes façamos uma pausa para lembrar o conceito de uma  $m$ -upla  $C$  de geodésicas complexas distintas degenerada. Sejam  $c_1, \dots, c_m$  geodésicas complexas distintas e  $v_1, \dots, v_m$  seus respectivos vetores polares. Dizemos que a  $m$ -upla  $C = (c_1, \dots, c_m)$  é degenerada se o subespaço  $W = [v_1, \dots, v_m]$  é degenerado. E por definição um subespaço  $W$  é degenerado quando existe  $w \in W$  tal que  $\langle w, v \rangle = 0$  para todo  $v \in W$ .

**Corolário 6.3.** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ , e  $P = (p_1, \dots, p_m)$  uma  $m$ -upla correspondente de pontos polares. Então  $C$  é degenerada se, e somente se, todas as geodésicas complexas  $c_1, \dots, c_m$  se intersectam em um ponto isotrópico  $p \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ . Nesse caso, os pontos  $p_1, \dots, p_m$  pertencem a esfera polar  $S_p$  com base em  $p$ .

**Demonstração:** Sejam  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  e  $v = (v_1, \dots, v_m)$  uma  $m$ -upla de seus respectivos vetores polares. Suponhamos que  $C$  seja degenerada. Então segue que o subespaço  $W = [v_1, \dots, v_m]$  gerado por  $v_1, \dots, v_m$  é degenerado. Pela definição de espaço degenerado existe  $z \in W$  tal que  $\langle z, w \rangle = 0$ , para todo  $w \in W$ . Em particular  $\langle z, v_i \rangle = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , e  $\langle z, z \rangle = 0$ . Portanto, as geodésicas  $c_1, \dots, c_m$  intersectam  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  em  $p = \pi(z)$ .

Reciprocamente, sejam  $c_1, \dots, c_m$  geodésicas complexas distintas cujos os respectivos vetores polares são os  $v_1, \dots, v_m$ . Por hipótese, as geodésicas  $c_1, \dots, c_m$  intersectam  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  em  $p$ . Isso indica que  $\langle v_i, v \rangle = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , onde  $v$  é representante de  $p$ . Daí,

o subespaço de  $\mathbb{C}^{2,1}$  gerado pelos  $v_1, \dots, v_m$ , é o conjunto de vetores que são ortogonais a  $v$ . Mas essa é justamente a definição de  $V_p = l_p^\perp$ , onde  $l_p = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Sabemos que tal subespaço tem dimensão 2 e é degenerado, pelo Capítulo 3, a  $m$ -upla  $C$  é degenerada.

A unicidade decorre do fato de que se supusermos que existe  $p' \neq p$ , com  $p' \in \partial\mathbb{H}_C^2$  tal que  $c_1, \dots, c_m$  intersectem  $p$  e  $p'$ , então necessariamente  $c_1 = \dots = c_m$ , o que é um absurdo, pois estamos trabalhando com geodésicas distintas. ■

A proposição a seguir nos mostra que sobre certas condições podemos garantir a existência de um isomorfismo projetivo entre duas retas projetivas complexas. Segue da álgebra que um isomorfismo é um homomorfismo bijetor. Ao longo da demonstração veremos que um isomorfismo induz um isomorfismo projetivo. Para nós, este último é um homomorfismo bijetor entre espaços projetivos.

**Proposição 6.4.** Sejam  $S_p$  e  $S_q$  esferas polares com base em  $p$  e  $q$  respectivamente, onde  $p, q \in \partial\mathbb{H}_C^2$ . Seja  $\gamma \in PU(2, 1)$  tal que  $\gamma(p)=q$ . Então  $\gamma(S_p)=S_q$ . Além disso,  $\gamma : S_p \rightarrow S_q$  determina um isomorfismo projetivo entre  $S_p$  e  $S_q$ , considerados como retas projetivas complexas.

**Demonstração:** Sejam  $p, q \in \partial\mathbb{H}_C^2$ ,  $\tilde{\gamma} \in U(2, 1)$  o levantamento de  $\gamma \in PU(2, 1)$  e  $P, Q \in V_0$  levantamentos de  $p, q$  respectivamente.

Sabemos que  $V_P$  é subespaço degenerado de  $\mathbb{C}^{2,1}$ , com  $\dim V_P = 2$ . Note que o isomorfismo  $\tilde{\gamma}$  nos fornece que  $\tilde{\gamma}(V_P)$  é também um subespaço degenerado de dimensão 2 contendo o levantamento  $Q$ . Pelo Corolário 6.2  $\tilde{\gamma}(V_P) = V_Q$ . A classe de  $\tilde{\gamma}$  induz um isomorfismo projetivo  $\gamma : S_p \rightarrow S_q$ . ■

Utilizemos o exemplo a seguir para ilustrar a parte final da demonstração da Proposição acima.

Como  $PU(2, 1)$  age bitransitivamente na fronteira do espaço hiperbólico complexo, considere  $p, q \in \partial\mathbb{H}_C^2$ , tal que

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

suas respectivas linhas complexas são expressas da seguinte maneira

$$l_p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}, \quad l_q = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \beta \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Lembremos que o complemento ortogonal de tais retas são subespaços vetoriais de  $\mathbb{C}^{2,1}$ , que nesse caso são dados respectivamente por

$$V_p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ w \end{pmatrix}; z, w \in \mathbb{C}^* \right\}, \quad V_q = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; u, v \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Tais subespaços possuem dimensão dois, então são isomorfos. Isso nos garante que existe  $\gamma \in U(2, 1)$  responsável por induzir tal isomorfismo.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\gamma$  induz um isomorfismo projetivo de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  definido da seguinte forma

$$\gamma(x, y, z)^t := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y, z, x)^t.$$

Ao restringirmos o isomorfismo projetivo acima de  $V_p$  a  $V_q$ , obtemos o desejado. •

A seguir veremos uma proposição que segue diretamente do resultado anterior.

**Proposição 6.5.** Sejam  $S_p$  e  $S_q$  esferas polares baseadas em  $p$  e  $q$ , respectivamente, onde  $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então  $S_p$  e  $S_q$  são projetivamente equivalentes como retas projetivas complexas, onde um isomorfismo projetivo pode ser definido por  $\Gamma \in PU(2, 1)$  tal que  $\gamma(p) = q$ .

**Demonstração:** Temos que  $PU(2, 1)$  age transitivamente em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Daí, dados  $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , existe  $\gamma \in PU(2, 1)$  tal que  $\gamma(p) = q$ . Isso nos deixa justamente com as mesmas hipóteses da Proposição anterior, aplicando-a temos que  $\gamma(S_p) = S_q$  e que  $S_p$  e  $S_q$  são projetivamente equivalentes. ■

## 6.2 A AÇÃO DE $PU(2,1)$ NAS ESFERAS PARABÓLICAS

Identificaremos  $L \equiv \mathbb{P}\mathbb{C}^1$  como reta projetiva complexa e  $G(L) = PGL(2, \mathbb{C})$  o grupo das transformações lineares bijetoras de  $L$  em  $L$ , que para nós estão identificadas com as matrizes com determinante não nulo de modo que:

$$\begin{aligned} T : L &\rightarrow L \\ [x] &\mapsto T([x]) = A[x] = [Ax] \end{aligned}$$

onde  $A$  é matriz  $3 \times 3$  tal que  $\det A \neq 0$ , com  $A$  relacionada à transformação  $T$ . Afir-mamos que nem sempre um subconjunto de  $G(L)$  possui uma extensão num subgrupo do estabilizador de  $L$  em  $PU(2,1)$ .

Utilizemos por comodidade a forma hermitiana usual. E considere o ponto  $p = (0, 0, 1)^t$ , cujo espaço complementar associado é dado por  $V_p = \{(z, w, 0)^t\}$ . Daí, escremevamos  $L = \pi(V_p \setminus \{0\}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Podemos identificar os elementos de  $L$  da seguinte forma,

$$z \rightarrow (z, 1, 0), \quad \infty \rightarrow (z, 0, 0).$$

Tomemos a seguinte aplicação em  $L$ ,

$$Az = 2z, \quad A\infty = \infty.$$

Trabalhando matricialmente, temos que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que não existe  $B \in PU(2,1)$  tal que  $B(V_p) \subset V_p$  e  $A = B|_L$ .

Demonstraremos a seguir que quando a reta projetiva complexa em questão é uma esfera polar com base em algum ponto  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , todo elemento do estabilizador de  $p$  em  $G(L)$ , denotado por  $\Gamma_p$  tem uma extensão no estabilizador de  $p$  em  $PU(2,1)$ .

**Proposição 6.6.** Sejam  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , e  $S_p$  a esfera polar com base em  $p$ . Sejam  $\Gamma_p$  o estabilizador de  $p$  no grupo de automorfismos projetivos  $G(S_p)$  de  $S_p$  e  $\Gamma_p^*$  o estabilizador de  $p$  em  $PU(2,1)$ . Então, o homomorfismo restrição  $\Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$  está bem definido e é sobrejetor.

**Demonstração:** Temos três pontos a serem demonstrados nesse teorema:

1. A boa definição de  $\Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$ .
2. A sobrejetividade de  $\Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$ .
3. Que  $\Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$  é homomorfismo.

Temos que  $PU(2, 1)$  age transitivamente em  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então, podemos tomar  $g \in PU(2, 1)$  tal que  $g(p) = \infty$ . Dessa forma o estabilizador de  $p$ ,  $\Gamma_p$ , e o estabilizador de  $\infty$  estão relacionados por uma conjugação. Geometricamente, após solução do problema, deveríamos voltar para o ambiente em que iniciamos nosso trabalho. Aqui, no entanto estamos interessados em apenas facilitar nossos cálculos. Como tal conjugação preserva os valores obtidos nos dois grupos, iremos supor  $p = \infty$  e não iremos nos importar em voltar para o local inicial do problema.

Sejam  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $S_p$  esfera polar com base em  $p$ . Como  $\Gamma_p^* = \{g \in PU(2, 1); g(p) = p\}$  segue da Proposição 6.4 que  $\Gamma_p^*(S_p) = S_p$ .

Aplicando a Proposição 6.4 podemos assumir que  $p = \infty$ , representado por  $v_0 = (1, 0, 0)^t$ . Note que o espaço  $V_p \subset \mathbb{C}^{2,1}$  pode ser identificado com

$$V_{\infty} = \left\{ v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Tal identificação se deve ao fato de que  $l_p = l_{\infty} = \{\lambda v_0; \lambda \in \mathbb{C}\}$ , o que implica que  $V_p = V_{\infty} = l_{\infty}^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle v, v_0 \rangle = 0\}$ , onde  $v = (z_1, z_2, z_3)^t$  e  $v_0 = (1, 0, 0)^t$ . Então, temos que  $\langle v, v_0 \rangle = 0$  de onde chegamos que  $z_3 = 0$ . Daí,  $v$  se escreve como:  $v = (z_1, z_2, 0)^t$  tal que  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  de modo que  $z_1$  e  $z_2$  não sejam simultaneamente nulos.

Temos que  $V_p = V_p \setminus [v_0] \cup [v_0]$ , com  $V_p \setminus [v_0] = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}; z_2 \neq 0 \right\}$ . Projetando obtemos que

$$S_{\infty} \equiv \left\{ v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (6.2)$$

O estabilizador de  $p$  em  $PGL(2, \mathbb{C})$ ,  $\Gamma_p$  pode ser identificado da seguinte forma  $\Gamma_p = \Gamma_{\infty} = \{\gamma(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}\}$ , pois  $\Gamma_{\infty} = \{\gamma \in PGL(2, \mathbb{C}); \gamma(\infty) = \infty\}$ , onde

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

O fato de  $\gamma$  fixar o  $\infty$  indica que necessariamente devemos ter  $c = 0$  segue daí que

$$\gamma(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b'.$$

Agora observe que se  $A \in U(2, 1)$  fixa a reta gerada por  $v_0$ , então ela é triangular superior. Considere por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{j} & \bar{f} & \bar{c} \\ \bar{h} & \bar{e} & \bar{b} \\ \bar{g} & \bar{d} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Como  $A$  e  $A^{-1}$  fixam  $v_0$ , encontramos que  $d = g = h = 0$ .

O estabilizador de  $l_\infty$  em  $U(2, 1)$  é o conjunto das  $g \in U(2, 1)$  que fixam múltiplos de  $v_0$ , em particular fixa  $\infty$ . É um fato conhecido (veja [9]) que se  $g$  fixa  $\infty$  então  $g$  tem uma forma padrão dada por  $g = T_{(z_0, t_0)} \circ D_\lambda \circ R_\theta$ . Ou seja, a  $g$  é uma composição de transformações de Heisenberg. Isso nos dá que o estabilizador mencionado anteriormente é gerado pelas seguintes matrizes

$$T_{(z_0, t_0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2 + it_0}{2} \\ 0 & 1 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

onde  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $t_0, \theta, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ . Para mais detalhes veja Falbel-Parker [9].

Utilizando as matrizes acima consideradas podemos, através de cálculos simples e diretos, obter que

$$T_{(z_0, t_0)} \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - \bar{z}_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_\theta \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_\lambda \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De onde segue que as projeções  $T^*, R^*, D^*$  de  $T, R, D$  agem em  $S_\infty$ , com

$$T^*(z) = z - \bar{z}_0, \quad R^*(z) = e^{-i\theta}z, \quad D^*(z) = \lambda z.$$

$$T^*(\infty) = \infty, \quad R^*(\infty) = \infty, \quad D^*(\infty) = \infty.$$

Se  $f^* \in \Gamma_\infty^*$  então  $f^*(S_p) \subset S_p$ . De modo que a restrição de um elemento de  $\Gamma_\infty^*$  age da seguinte forma em  $S_p$ ,

$$\phi(T_{(z_0, t_0)} D_\lambda R_\theta(z)) = \lambda e^{-i\theta}z - \bar{z}_0,$$

onde  $\phi : \Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$  está definida como abaixo.

1. A partir deste momento estamos interessados em mostrar a boa definição da correspondência  $\Gamma_p^*$  em  $\Gamma_p$ . Para isso, basta mostrar a unicidade para a forma padrão. Considere a seguinte igualdade onde  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\bar{z}_0 e^{i\theta} & \frac{\lambda^{-1}(-|z_0|^2 + it_0)}{2} \\ 0 & e^{i\theta} & z_0 \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \beta & -\bar{w}_0 e^{i\alpha} & \frac{\beta^{-1}(-|w_0|^2 + ip_0)}{2} \\ 0 & e^{i\alpha} & w_0 \beta^{-1} \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

De onde destacamos as seguintes relações,

1.  $\lambda = \gamma\beta$ ;
2.  $\bar{z}_0 e^{i\theta} = \gamma \bar{w}_0 e^{i\alpha}$ ;
3.  $e^{i\theta} = \gamma e^{i\alpha}$ ;
4.  $z_0 \lambda^{-1} = \gamma w_0 \beta^{-1}$ ;
5.  $\lambda^{-1} = \gamma \beta^{-1}$ ;
6.  $\frac{\lambda^{-1}(-|z_0|^2 + it_0)}{2} = \gamma \frac{\beta^{-1}(-|w_0|^2 + ip_0)}{2}$ .

De 1 e 5 tiramos que,  $\gamma = \pm 1$ . Como  $\lambda, \beta > 0$  então  $\gamma = 1$ . Assim  $\lambda = \beta$ ,  $z_0 = w_0$ ,  $t_0 = p_0$  e  $\theta = \alpha + 2k\pi$ . Logo, a aplicação considerada está bem definida.

2. A Sobrejetividade vem do fato de que se  $\gamma \in \Gamma_p$  então  $\gamma(z) = az + b = \lambda e^{-i\theta} z - z_0$ . Assim,  $z_0 = -\bar{b}$ ,  $\theta = -\arg a$  e  $|a| = \lambda$ . Denominemos  $\phi : \Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$  a aplicação sobrejetora de  $\Gamma_p^*$  para  $\Gamma_p$ .

3. Claramente tal aplicação é homomorfismo, pois cumpre que  $\phi(f.g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ , onde  $f, g \in \Gamma_\infty^*$ . Basta considerar  $f = T_{(z_0, t_0)} \circ D_\lambda \circ R_\theta$  e  $g = T_{(w_0, p_0)} \circ D_\beta \circ R_\alpha$ .

$$f = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{z}_0 e^{i\theta} & \frac{\lambda^{-1}(-|z_0|^2 + it_0)}{2} \\ 0 & e^{i\theta} & z_0 \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \beta & -\bar{w}_0 e^{i\alpha} & \frac{\beta^{-1}(-|w_0|^2 + ip_0)}{2} \\ 0 & e^{i\alpha} & w_0 \beta^{-1} \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$[fg] \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\beta e^{-i(\theta+\alpha)} z - \lambda\bar{w}_0 e^{-i\theta} - \bar{z}_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cuja a projetivização é dada por  $\phi(fg)^* = \lambda\beta e^{-i(\theta+\alpha)}z - \lambda\bar{w}_0 e^{-i\theta} - \bar{z}_0$ . Observemos que,

$$[f] \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{-i(\theta)}z - \bar{z}_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [g] \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{-i(\alpha)}z - \bar{w}_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos que  $\phi(f) = \lambda e^{-i(\theta)}z - \bar{z}_0$  e que  $\phi(g) = \beta e^{-i(\alpha)}z - \bar{w}_0$ , assim  $\phi(f) \circ \phi(g) = \lambda\beta e^{-i(\theta+\alpha)}z - \lambda\bar{w}_0 e^{-i\theta} - \bar{z}_0$  ■

**Observação 6.1.** O homomorfismo restrição  $\Gamma_p^* \rightarrow \Gamma_p$  tem núcleo não trivial, ou seja, a ação de  $\Gamma_p^*$  em  $S_p$  não é fiel.

Sabemos que  $\text{Ker}(\phi) = \{f \in \Gamma_\infty^*; \phi(f) = f^* = Id\}$ . Ou seja,  $f^* = \lambda z e^{-i\theta} - \bar{z}_0 = z$ . De onde tiramos as relações

- $-\bar{z}_0 = 0$ , então  $z_0 = 0$ ;
- $\lambda = 1$ ;
- $e^{-i\theta} = 1$ , então  $\theta = 0$ .

Daí,

$$f = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{z}_0 e^{i\theta} & \frac{\lambda^{-1}(-|z_0|^2 + it_0)}{2} \\ 0 & e^{i\theta} & z_0 \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{it_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Variando  $t_0$  podemos ter uma infinidade de matrizes. Logo, o núcleo é não trivial.

## 6.3 O INVARIANTE ANGULAR DE CONFIGURAÇÕES DEGENERADAS

É nessa seção que definimos os novos invariantes que nos auxiliam no momento de definir unicamente a classe de congruência de  $PU(2, 1)$ . Começaremos pela razão cruzada.

Seja  $p = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  uma quádrupla ordenada de pontos distintos em  $\mathbb{C}$ . Então definimos a *razão cruzada* de  $p$ , como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Tal definição pode ser estendida para o caso em que um dos pontos  $z_i$  é  $\infty$ . Se por exemplo,  $z_1 = \infty$ , a razão cruzada é dada por

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_4)}.$$

Tal invariante traz consigo algumas propriedades que valem a pena serem mencionadas.

- a. Para qualquer  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z \neq 0$  e  $z \neq 1$ ,  $[1, 0, \infty, z] = z$ ;
- b. Dada  $g \in PGL(2, \mathbb{C})$  tal que

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$$

é possível mostrar que a igualdade a seguir é válida,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)]. \quad (6.3)$$

Para provar essa igualdade basta notar que dados  $z$  e  $w$  distintos, temos que

$$g(z) - g(w) = \frac{(z - w)(ad - bc)}{(cz + d)(cw + d)}.$$

Com essa relação em mãos é fácil ver que substituindo adequadamente os valores e cancelando alguns termos chegamos a Equação (6.3).

- c. Dados pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ , a função  $f(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$  é o único elemento de  $PGL(2, \mathbb{C})$  tal que  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$ , e  $f(z_3) = \infty$ .

Para provar tal fato, basta supor que existe  $g \in PGL(2, \mathbb{C})$  tal que  $g(z_1) = 1$ ,  $g(z_2) = 0$ , e  $g(z_3) = \infty$ . Daí, é fácil ver que,

$$\begin{aligned} f(z) &= [1, 0, \infty, f(z)] \\ &= [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z)] \\ &= [z_1, z_2, z_3, z] \\ &= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z)] \\ &= [1, 0, \infty, g(z)] \\ &= g(z) \end{aligned}$$

Vejamos que o teorema a seguir utiliza a razão cruzada, acima definida, para demonstrar quando duas  $m$ -uplas de pontos distintos são congruentes em  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

**Proposição 6.7.** Sejam  $p = (z_1, \dots, z_m)$  e  $p' = (w_1, \dots, w_m)$  duas  $m$ -uplas ordenadas de pontos distintos em  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $m \geq 4$ . Então,  $p$  e  $p'$  são congruentes com respeito a ação diagonal de  $PGL(2, \mathbb{C})$  se, e somente se,

$$[z_1, z_2, z_3, z_j] = [w_1, w_2, w_3, w_j]$$

para qualquer  $j = 4, \dots, m$ .

**Demonstração:** Suponha que  $[z_1, z_2, z_3, z_j] = [w_1, w_2, w_3, w_j]$  para todo  $j = 4, \dots, m$ . Aplicando a propriedade (c) da razão cruzada, obtemos que existem  $f, g \in PGL(2, \mathbb{C})$  tais que

$$\begin{aligned} f(z_1) &= 1, \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = \infty \\ g(w_1) &= 1, \quad g(w_2) = 0, \quad g(w_3) = \infty \end{aligned}$$

Agora aplicando a propriedade (a) da razão cruzada,

$$\begin{aligned} f(z_j) &= [1, 0, \infty, f(z_j)] \\ &= [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_j)] \\ &= [z_1, z_2, z_3, z_j] \\ &= [w_1, w_2, w_3, w_j] \\ &= [g(w_1), g(w_2), g(w_3), g(w_j)] \\ &= [1, 0, \infty, g(w_j)] \\ &= g(w_j) \end{aligned}$$

Daí,  $f(z_j) = g(w_j)$  para todo  $j = 1, \dots, m$ . Podemos chamar  $h = g^{-1}f(z_i) = w_i$ . Como  $f, g \in PGL(2, \mathbb{C})$  segue que  $g^{-1} \in PGL(2, \mathbb{C})$ , o que implica que  $h \in PGL(2, \mathbb{C})$ .

Reciprocamente, suponha que  $p'$  e  $p$  são congruentes em  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Então existe  $g \in PGL(2, \mathbb{C})$  tal que  $g(z_i) = w_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Segue desse fato e da propriedade (b) que

$$[z_1, z_2, z_3, z_j] = [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_j)] = [w_1, w_2, w_3, w_j].$$

■

Nesse momento estamos caminhando para a descrição das classes de congruência de  $PU(2, 1)$ . É com essa finalidade que definiremos a seguir os invariantes responsáveis por descrever essas classes no caso de configurações degeneradas de geodésicas complexas.

Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3)$  uma tripla ordenada parabólica de geodésicas complexas dis-

tintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $P = (p_1, p_2, p_3)$  tripla de pontos polares e  $S_p$  esfera polar com base em  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $p$  é o ponto em que  $c_1, c_2$  e  $c_3$  se encontram na fronteira de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Para nós, a esfera  $S_p$  está identificada da mesma maneira que em (6.2). Definimos

$$\chi(C) = \chi(c_1, c_2, c_3) = \chi(p_1, p_2, p_3) = [p, p_1, p_2, p_3].$$

Temos que  $\chi$  está bem definida e que se  $p, p_1, p_2, p_3$  forem distintos, então  $\chi$  é finito e  $\chi \neq 0, 1$ .

De fato, suponha por contradição que  $\chi = 0$  desse modo  $[p, p_1, p_2, p_3] = 0$ . Considere  $\infty, z_1, z_2, z_3$  complexos distintos relacionados a  $p, p_1, p_2, p_3$  respectivamente. A definição de  $\chi$  nos fornece que  $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = 0$  de onde tiramos  $z_1 = z_3$ , o que é uma contradição. Por raciocínio análogo mostramos que  $\chi \neq 1$ . Logo,  $\chi \in \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Denominamos  $\chi$  de *invariante parabólico*. Note que  $\chi$  é invariante com respeito a ação diagonal de  $PU(2, 1)$ .

Vejamos dois exemplos ilustrativos de como encontrar o invariante parabólico de uma tripla ordenada de geodésicas complexas distintas degenerada.

**Exemplo 6.1.** Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3)$  uma tripla degenerada de geodésicas complexas e  $p_1, p_2, p_3$  os pontos polares a  $c_1, c_2$  e  $c_3$  respectivamente. Onde tais pontos são da seguinte forma

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como a configuração é degenerada as  $c_i, i = 1, 2, 3$ , intersectam a fronteira num ponto  $p$  isotrópico.

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A reta complexa definida por  $\infty$  é dada por

$$l_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Cujo complementar hermitiano é dado por

$$V_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \end{pmatrix}; z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

A reta projetiva complexa com base em  $\infty$  é dada por

$$S_\infty = \pi(V_\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty \cup \{\infty\}$$

onde  $\mathbb{C}_\infty$  está identificado com o conjunto dos números complexos. Note que

- $p_1$  corresponde ao valor 1;
- $p_2$  corresponde ao valor 2;
- $p_3$  corresponde ao valor 3.

Daí, o invariante parabólico dessa tripla é dado por

$$\chi(c_1, c_2, c_3) = [\infty, 1, 2, 3] = \frac{1-3}{2-3} = 2.$$

•

Aqui o leitor deve atentar para o fato de que podemos usar um ponto  $p$  qualquer na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Nesse caso, basta fazer uso da transitividade de  $PU(2, 1)$  em  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  e levar o ponto em questão para o ponto ideal, repetindo o processo mostrado acima.

**Exemplo 6.2.** No caso em que  $p$  está na fronteira do espaço hiperbólico complexo, mas não é o ponto ideal, temos o seguinte

Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3)$  tripla degenerada de geodésicas complexas e  $p_1, p_2, p_3$  os pontos polares a  $c_1, c_2$  e  $c_3$  respectivamente. Onde tais pontos são da seguinte forma

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como a configuração é degenerada as  $c_i, i = 1, 2, 3$ , intersectam a fronteira num ponto

$p$  isotrópico.

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A reta complexa definida por  $p$  é dada por

$$l_p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Cujo complementar hermitiano é dado por

$$V_p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ w \end{pmatrix} ; z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

A reta projetiva complexa com base em  $p$  é dada por

$$S_p = \pi(V_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{C} \right\} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_p \cup \{p\}$$

onde  $\mathbb{C}_p$  está identificado com o conjunto dos números complexos. Da mesma maneira feita no outro exemplo, podemos relacionar a cada ponto um número complexo, mas não conseguimos definir um para o ponto isotrópico  $p$ .

Daí, podemos utilizar a transitividade de  $PU(2, 1)$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  para voltarmos as condições do exemplo anterior. Tome  $g \in PU(2, 1)$  (lembrando que a matriz aqui é a  $J_0$ ) tal que  $g(p) = p_{\infty}$ .

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tal matriz leva  $p_1$  em  $p'_1$ ,  $p_2$  em  $p'_2$  e  $p_3$  em  $p'_3$ .

$$p'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p'_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note que

- $p'_1$  corresponde ao valor  $\frac{3}{2}$ ;

- $p'_2$  corresponde ao valor  $\frac{1}{3}$ ;
- $p'_3$  corresponde ao valor  $\frac{5}{4}$ .

Daí, o invariante parabólico dessa tripla é dado por

$$\chi(c_1, c_2, c_3) = \left[\infty, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right] = -\frac{3}{11}.$$

•

O teorema que enunciaremos a seguir define que duas triplas de geodésicas complexas são congruentes em  $PU(2, 1)$  quando seus invariantes parabólicos são iguais. A recíproca também é válida. Vejamos abaixo como tal resultado decorre.

**Teorema 6.8.** Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3)$  e  $C' = (c'_1, c'_2, c'_3)$  duas triplas ordenadas degeneradas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então  $C$  e  $C'$  são congruentes com respeito a ação diagonal de  $PU(2, 1)$  se, e somente se,  $\chi(C) = \chi(C')$ .

#### Demonstração:

Sejam  $C = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $C' = (c'_1, c'_2, c'_3)$  duas triplas ordenadas degeneradas de geodésicas complexas distintas. Pelo Corolário 6.3 podemos tomar pontos isotrópicos  $p$ ,  $p'$  associados a  $C$ ,  $C'$ . Agora, considere  $S_p$  e  $S_{p'}$  esferas polares com base em  $p$  e  $p'$  respectivamente.

Supondo que  $\chi(C) = \chi(C')$  e lembrando que  $PU(2, 1)$  age transitivamente na  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Existem  $r, g \in PU(2, 1)$  tais que,

$$[r(p), r(p_1), r(p_2), r(p_3)] = [g(p'), g(p'_1), g(p'_2), g(p'_3)]$$

onde estamos considerando que  $r(p) = \infty = g(p')$ , então a igualdade anterior torna-se  $[\infty, q_1, q_2, q_3] = [\infty, q'_1, q'_2, q'_3]$ , com  $r(p_i) = q_i$  e  $g(p'_i) = q'_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ .

A Proposição 6.7 nos garante a existência de  $\gamma \in G(S_{\infty}) \equiv PGL(2, \mathbb{C})$  de  $S_{\infty}$  tal que  $\gamma(\infty) = \infty$ ,  $\gamma(q_1) = q'_1$ ,  $\gamma(q_2) = q'_2$  e  $\gamma(q_3) = q'_3$ .

Como  $\gamma(\infty) = \infty$  segue que  $\gamma \in \Gamma_{\infty}$  em  $G(S_{\infty})$ . Aqui, podemos aplicar a Proposição 6.6 que nos fornece que  $\gamma$  é a restrição de um elemento  $\gamma^* \in PU(2, 1)$ . Isso nos dá o resultado procurado, ou seja, que existe  $g \in PU(2, 1)$  tal que  $g(q_i) = q'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Reciprocamente, como  $C$  e  $C'$  são degeneradas, pelo Corolário 6.3 as  $c_i$  intersectam um ponto  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , da mesma forma as  $c'_i$  intersectam um ponto  $p' \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Por hipótese

$C$  e  $C'$  são congruentes em  $PU(2,1)$ , então existe  $g \in PU(2,1)$  tal que  $g(c_i) = c'_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , conseqüentemente  $g(p) = p'$ . De onde vem que

$$\chi(C') = [p', p'_1, p'_2, p'_3] = [g(p), g(p_1), g(p_2), g(p_3)] = [p, p_1, p_2, p_3] = \chi(C).$$

■

Agora, seja  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada degenerada de geodésicas complexas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $m \geq 3$ . Associamos a  $C$  os seguintes invariantes parabólicos

$$\chi_0 = \chi(c_1, c_2, c_3), \quad \chi_1 = \chi(c_1, c_2, c_4), \dots, \chi_{(m-3)} = \chi(c_1, c_2, c_m).$$

São esses invariantes que nos auxiliam a definir unicamente as classes de congruência de  $PU(2,1)$  de configurações degeneradas de geodésicas complexas. O Teorema que vem em seqüência nos dá esse valioso resultado que possibilitará a construção do espaço de módulos.

**Teorema 6.9.** Seja  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada degenerada de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $m \geq 3$ . Então a classe de congruência  $PU(2,1)$  de  $C$  é definida unicamente pelos invariantes parabólicos  $\chi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, (m-3)$ .

**Demonstração:** Suponha que  $C = (c_1, \dots, c_m)$  e  $C' = (c'_1, \dots, c'_m)$  são equivalentes em  $PU(2,1)$ . Então existe  $g \in PU(2,1)$  tal que  $g(c_k) = c'_k$ , para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

$$\chi_i(C') = [p', p'_1, p'_2, p'_i] = [g(p), g(p_1), g(p_2), g(p_i)] = [p, p_1, p_2, p_i] = \chi_i(C).$$

Reciprocamente consideremos as  $m$ -uplas  $C = (c_1, \dots, c_m)$  e  $C' = (c'_1, \dots, c'_m)$ , ambas degeneradas. Pelo Corolário 6.3 as geodésicas  $c_i$  se encontram em um ponto  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Pelo mesmo teorema as  $c'_i$  se encontram num ponto  $q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Façamos um caso particular. Para tanto utilizando a ação transitiva de  $PU(2,1)$  na fronteira do espaço hiperbólico complexo podemos considerar que  $p = q = \infty$ . Ou seja, nossas cadeias  $\partial c_i$  e  $\partial c'_i$  são verticais. Suponhamos, a menos de isometria, que a cadeia  $\partial c_1$  seja a cadeia vertical passando pela origem e que  $\partial c_2$  seja a cadeia vertical passando pelo ponto  $(1, 0)$  e que  $c_1 = c'_1$ ,  $c_2 = c'_2$ .

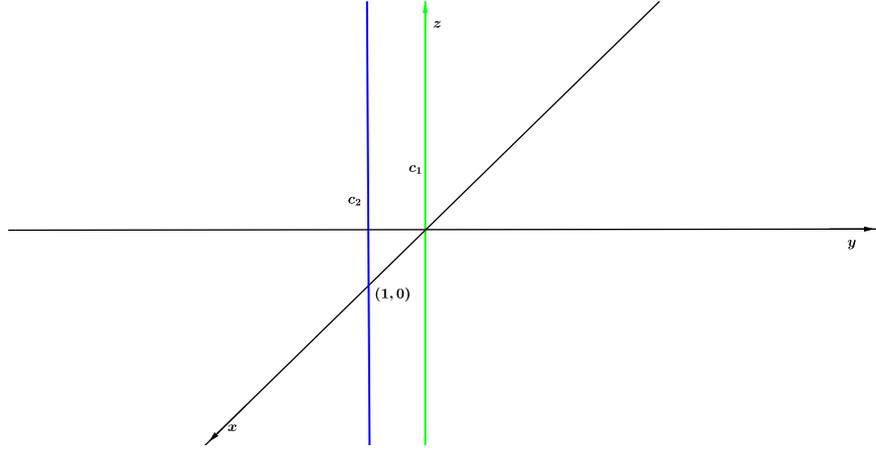


Figura 9: Geodésicas  $c_1$  e  $c_2$

Dessa forma  $[0, 1, \infty, z_i] = [0, 1, \infty, z'_i]$  implica em  $z_i = z'_i$ , de onde segue que  $p_i = p'_i$  resultando em  $c_i = c'_i$ . Logo,  $(c_1, \dots, c_m) = (c'_1, \dots, c'_m)$  e a isometria procurada é a identidade.

Agora vejamos o caso geral. Devida a ação transitiva de  $PU(2, 1)$  na fronteira de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  existe  $g_1 \in PU(2, 1)$  tal que  $g_1(p) = \infty$ . Dessa forma  $\partial(g_1(c_1))$  é cadeia vertical. Utilizando translação de Heisenberg adequada é possível obter que  $\partial(T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(c_1))$  é cadeia vertical pela origem,  $T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(p) = \infty$  e  $\partial(T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(c_2))$  é cadeia vertical por  $(z_0, 0)$ , onde  $z_0 = re^{i\theta}$ . Tomando rotação e dilatação de Heisenberg apropriadas temos que  $\partial(D_{\frac{1}{r}} \circ R_{\theta} \circ T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(c_2))$  é cadeia vertical por  $(1, 0)$ . Note que  $\partial(D_{\frac{1}{r}} \circ R_{\theta} \circ T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(c_1))$  ainda é cadeia vertical passando pela origem, bem como  $D_{\frac{1}{r}} \circ R_{\theta} \circ T_{(\zeta_0, t_0)} \circ g_1(p) = \infty$ .

Portanto, existe  $H \in PU(2, 1)$  tal que  $H(p) = \infty$ ,  $\partial H(c_1)$  é cadeia vertical passando pela origem e  $\partial H(c_2)$  é cadeia vertical passando por  $(1, 0)$ , onde  $H = D_{\frac{1}{r}} R_{\theta} T_{(\zeta_0, t_0)} g_1$ .

Similarmente é possível encontrar  $\tilde{H} \in PU(2, 1)$  tal que  $\tilde{H}(q) = \infty$ ,  $\tilde{H}(c'_1) = H(c_1)$  e  $\tilde{H}(c'_2) = H(c_2)$ . Pelo caso particular  $\tilde{H}(c'_i) = H(c_i)$ . Bastando tomar  $g = \tilde{H}^{-1} \circ H$  para obter o desejado. ■

**Corolário 6.10.** O espaço de módulos de  $m$ -uplas ordenadas degeneradas de geodésicas complexas distintas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $m \geq 3$ , pode ser identificado com o conjunto  $\mathbb{M} = \mathbb{C}_*^{(m-2)} \setminus \Delta$ , onde  $\Delta$  é a diagonal de  $\mathbb{C}_*^{(m-2)}$ .

**Demonstração:** Seja  $C = (c_1, \dots, c_m)$  uma  $m$ -upla ordenada degenerada de geodésicas complexas distintas. Pelo Corolário 6.3 as geodésicas  $c_i$  se intersectam em um ponto  $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Pela transitividade de  $PU(2, 1)$  na  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  podemos considerar

$p = \infty$ , e que  $c_1, c_2$  são tais que os números complexos  $z_1, z_2$  associados a elas são  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 1$ .

Os invariantes parabólicos nos fornecem que

$$\begin{aligned}\chi_0(c_1, c_2, c_3) &= \frac{-z_3}{1 - z_3}; \\ \chi_1(c_1, c_2, c_4) &= \frac{-z_4}{1 - z_4}; \\ &\vdots \\ \chi_{m-3}(c_1, c_2, c_m) &= \frac{-z_m}{1 - z_m}.\end{aligned}$$

Como  $z_i \neq z_j$ , para  $i \neq j$  segue que  $\chi_{i-3} \neq \chi_{j-3}$ . Então o espaço de módulos  $\mathbb{M}$  é formado pelas  $(m - 2)$ -uplas de números complexos distintos. Ou seja,  $\mathbb{M} = \mathbb{C}_*^{m-2} \setminus \Delta$ , onde  $\Delta = \{(w_1, \dots, w_{m-2}); w_i \in \mathbb{C}_* \text{ e onde existem } w_i = w_j \text{ com } i \neq j\}$ .

■

# ***REFERÊNCIAS***

- [1] CUNHA, H. ; DUTENHEFNER F. ;GUSEVSKII, N. ;THEBALDI, R. S. *The Moduli Space of Complex Geodesics in the complex Hyperbolic Plane.* J Geom Anal, 2010.
- [2] CUNHA, H. ;GUSEVSKII, N. *The Moduli Space of Points in the Boundary of Complex Hyperbolic Space.* J Geom Anal, 2010.
- [3] GUSEVSKII, N *The invariants of finite configurations in complex hyperbolic geometry.* International Center for Theoretical Physics, 2010.
- [4] CUNHA, H. *O espaço de módulos de  $k$ -uplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.* Tese de Doutorado 2009.
- [5] GOLDMAN, W. M. *Complex Hyperbolic Geometry.* New York: Oxford University Press, 1999.
- [6] BEARDON, A. *The Geometry of Discrete Groups.* Graduate Texts in Mathematics, vol 91. Springer, New York, 1983.
- [7] PARKER, J. R. *Notes on Complex Hyperbolic Geometry.* University of Durham, 2003.
- [8] LOPES, A. P. C. *Um Estudo da Geometria Hiperbólica Complexa.* Dissertação de Mestrado. UFMG, Minas Gerais, 2009.
- [9] FALBEL, E ; PARKER, J. R. *The geometry of the Eisenstein-Picard modular group.* Duke Math. J., 2006.
- [10] CHEN, S. S. : GREENBERG, L. *Hyperbolic Space.* New York: Academics Press, 1974.
- [11] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian forms.* Springer-Verlag, New York, 1985.