

---

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas, Física  
Departamento de Física

# Magnetismo como sistema vinculado.

**Gabriel de Lima e Silva.**

Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Wilson Oliveira**

Agosto de 2012  
Juiz de Fora - MG

---

Dissertação apresentada ao Departamento de Física, ICE, **UFJF**, como requisito parcial para obtenção do Título de **mestre em Física**.

Silva, Gabriel de Lima e

Magnetismo como Sistema Vinculado.

Gabriel Silva – Juiz de Fora, [M.G.:s.n.], 2012.

Orientador: Wilson Oliveira

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora,  
Departamento de Física

Banca examinadora:

Dr. Wilson Oliveira (Orientador) (UFJF)

Dr. Sidiney de Andrade Leonel (UFJF)

Dr. Clifford Neves Pinto (UERJ)

Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (UFJF)

*Dedico este trabalho a minha família  
e aos meus amigos.*

# Agradecimentos

Ao professor Wilson Oliveira pelos anos de convivência e por ter aceito compartilhar comigo sua contagiante paixão pela Física. Você é, de fato, um orientador. Obrigado patrão!

Aos professores do Departamento de Física pelos cursos ministrados. Em especial agradeço a Maria Luisa Bedran, Jens K. H. Mund, Wilson Melo, Maria José V. Bell, Paulo M. V. B. Barone e Virgílio C. Anjos que sempre mostraram-se dispostos a dividir suas experiências de vida. Aprendi mais do que Física com vocês.

Aos professores do Departamento de Matemática pelos cursos ministrados.

As professoras Ana Maria Santos e Armanda Linhares por sempre me incentivarem na carreira científica.

Aos funcionários da Universidade pelos serviços prestados. Em particular, aos secretários do Departamento de Física, Domingos Souza B. de Oliveira Lopes e Alan Abreu, pela atenção e por sempre estarem dispostos a solucionarem nossos problemas administrativos.

Aos meus colegas de curso, em especial os alunos do meu período, que me acompanham dia a dia.

A minha mãe Marly e ao meu irmão Gustavo por me lembrarem que sempre posso contar com uma família.

Aos meus amigos pelas horas e horas de boas conversas; aprendo com vocês o tempo todo.

A todos os meus familiares por estarem comigo.

Ao meu pai e minhas irmãs que mesmo distantes fazem parte da minha história.

A Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho discutimos o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional do ponto de vista de sistema vinculado. Nós apresentamos este sistema como uma teoria que não tem, a princípio, invariância de calibre. O conceito de invariância de calibre é muito útil em física teórica, uma vez que permite a compreensão profunda de sistemas físicos já que permite uma escolha arbitrária de um referencial a cada instante de tempo. Na verdade, todas as teorias que descrevem as interações fundamentais são teorias de calibre. No método de Dirac todos os vínculos obtidos para o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional são de segunda classe, isso significa que, em princípio, o modelo não apresenta invariância de calibre. Isto será verificado através da aplicação do método simplético. Neste contexto, o potencial simplético (hamiltoniana) será obtido e para uma escolha de fator-ordenação particular, a saber, que as funções dos campos devem ficar à esquerda do operador momento, nós escrevemos a equação de Schrödinger funcional correspondente. Esta equação não será resolvida explicitamente aqui, no entanto, isso poderia ser feito aplicando o método do cálculo funcional assim seria obtido o espectro de energias do sistema.

Palavras-chave: Modelo de Heisenberg, Quantização, Sistemas Vinculados, Equação Funcional.

# Abstract

In this work we discuss the two-dimensional isotropic Heisenberg model from the constrained systems point of view. We present this system as a theory which has not gauge invariance. The concept of gauge invariance is very useful in theoretical physics, since it allows a deep understanding of physical systems and an arbitrary choice of a reference at each instant of time. In fact, all theories describing the fundamental interactions are gauge theories. In the method of Dirac all constraints obtained for the two-dimensional isotropic Heisenberg model are second class, this means, at first, the model has no gauge invariance. This will be checked by applying the symplectic method. In this context, the symplectic potential (Hamiltonian) will be obtained and a choice of particular factor-ordering, namely that the functions of the fields should be left to the operators, we write the associated functional equation of Schrödinger. This equation will not be solved explicitly here, however, this could be done by applying the method of functional calculation, and so we should obtain the energy spectrum of the system.

Keywords: Heisenberg Model, Quantization, Constraints Systems, Functional Equation.

# Introdução

Desde a descoberta da alta supercondutividade  $T_c$  [1] o interesse no modelo de Heisenberg bidimensional foi grandemente reavivado. Em vista disso, o estudo do magnetismo em duas dimensões tornou-se interessante aos teóricos e experimentais [2, 3, 4]. E um grande progresso na compreensão do magnetismo em duas dimensões foi alcançado e discutido na literatura [5, 6, 7]. Além disso, é sabido que o limite contínuo, classicamente falando, do modelo de Heisenberg bidimensional pode ser descrito pelo modelo sigma não-linear  $O(3)$ .

Um estudo consistente e sistemático dos sistemas vinculados foi inicialmente estabelecido por Dirac [8]. O objetivo principal do assim chamado, formalismo de Dirac, é obter os parênteses de Dirac, que são a ponte para os comutadores da teoria quântica. Com a classificação de vínculos como primeira ou segunda classe, primários ou secundários, este formalismo tornou-se um dos padrões para a análise de sistemas vinculados. Faddeev e Jackiw [9] propuseram um método geométrico de quantização simplética de lagrangianas de primeira ordem para sistemas vinculados, que é diferente da tradicional abordagem Hamiltoniana de Dirac. No método de Faddeev e Jackiw, não é preciso introduzir os vínculos primários como no formalismo de Dirac, que decorre da definição dos momentos canônicos. Além disso, a classificação dos vínculos como primeira ou segunda classe, primário ou secundário não é necessária neste método; todos os vínculos são mantidos ao mesmo nível. Barcelos-Neto e Wotzasek propuseram um formalismo simplético [10], que é uma versão estendida do método de Faddeev e Jackiw para o caso em que os sistemas vinculados.

O ponto principal do formalismo simplético é alterar o sistema introduzindo campos auxiliares na Lagrangiana de primeira ordem, este método não deve depender da forma como os campos auxiliares são introduzidos. A Lagrangiana de primeira ordem, que depende das variáveis simpléticas e seus momentos canônicos generalizados, leva à matriz dois-forma simplética  $f_{\alpha\beta}$ . A classificação do sistema como vinculado ou não vinculado no formalismo simplético depende do comportamento singular da matriz dois-forma simplética. A partir daí, podem acontecer três situações diferentes, devido a esse comportamento. Em primeiro lugar, se a matriz dois-forma simplética é não-singular, poderá ser invertida para gerar os parênteses de Poisson generalizados, que correspondem aos parênteses de Dirac. Em segundo lugar, se a matriz dois-forma simplética é singular, existe um modo zero, que gera um novo vínculo para o sistema. Particularmente, neste caso, os vínculos são colocados na parte canônica da lagrangiana via multiplicadores de Lagrange. Então, esses vínculos são considerados um-forma canônicas, enquanto multiplicadores de Lagrange são considerados como variáveis simpléticas. Normalmente, com essa nova Lagrangiana de primeira ordem, pode fazer a matriz dois-forma simplética não-singular depois de um número finito de iterações e obter os parênteses generalizadas das variáveis simpléticas, que coincidem com os do formalismo

de Dirac. Finalmente, mesmo que a matriz dois-forma seja singular, existe uma situação para a qual os modos zero originais geram quaisquer vínculos sobre as variáveis dinâmicas, na primeira etapa de iteração. Portanto, a parte canônica da Lagrangiana de primeira ordem é inalterada, devido à ausência dos vínculos adicionais. Então, podemos dizer que o sistema tem uma simetria de calibre com as regras transformação geradas por estes modos zero.

A representação funcional de Schrödinger vem sendo sistematicamente utilizada a fim de quantificar as diferentes teorias de campo. Muitas previsões teóricas e experimentais já foram obtidas dos funcionais de onda obtidos até agora. Um exemplo de um importante recurso teórico de teorias de calibre estabelecidos no contexto da equação funcional de Schrödinger, sem qualquer “aproximação” instanton, é o assim chamado, ângulo de vácuo [11].

Assim, o trabalho será apresentado da seguinte maneira, inicialmente serão apresentados os métodos de quantização de sistemas vinculados, formalismo de Dirac e formalismo Simplético, em seguida será feita uma revisão do modelo de Heisenberg e em seguida sua quantização e ao final será apresentada a equação de Schrödinger funcional para o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional.

# Capítulo 1

## Sistemas Vinculados

### 1.1 Conceitos Básicos.

#### 1.1.1 Equação de Euler-Lagrange.

Para resolvermos um determinado problema em Física o primeiro passo sempre é escolher um sistema de coordenadas bem adaptado. Aqui, qualquer um desses conjuntos de coordenadas será chamado de *coordenadas generalizadas* e será representado por  $q_i$ , em que o índice  $i$  identifica quantas coordenadas serão necessárias <sup>1</sup>. Definindo uma função dessas coordenadas, e de suas derivadas temporais como a função lagrangiana  $L = L(q_i, \dot{q}_i)$  com  $L = T - V$  em que  $T$  e  $V$  são as energias cinética e potencial, respectivamente, maiores detalhes sobre esta escolha em [12, 13].

Tomando a variação  $\delta q$  definida por  $\delta q = \epsilon \eta$ , de modo que podemos escrever

$$\bar{q} = q + \delta q \quad (1.1)$$

Analogamente, para um funcional  $S$ , a ação, dado por  $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ , a variação é dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (1.2)$$

uma integração por partes, como o uso de  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  leva a

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt \quad (1.3)$$

aqui temos que impor que a ação,  $S$ , tenha um valor mínimo, ou seja,  $\delta S = 0$ , para a trajetória física real. Dessa forma, teremos

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.4)$$

que é conhecida como *Equação de Euler-Lagrange*, e decorre do seguinte princípio variacional

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>Os graus de liberdade do sistema.

com  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . A importância desta equação está no fato de com ela podermos atacar problemas mais gerais do que aqueles resolvidos pela mecânica vetorial de Newton. Além disso, esta formulação é muito mais concisa elegante.

Formalmente falando, temos que para um dado sistema mecânico descrito pela lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ , seu movimento do instante  $t_1$  ao instante  $t_2$  é tal que a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.6)$$

é mínima (mais geralmente, estacionária) para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração.

### 1.1.2 Equações de Hamilton.

Na descrição de Hamilton não usaremos as variáveis  $q_i$  e  $\dot{q}_i$  para descrever a dinâmica do sistema, como foi feito acima, aqui usaremos duas quantidades  $q_i$  e  $p_i$ , em que  $p_i$  é o momento canonicamente conjugado a  $q_i$ , definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.7)$$

Assim, nessa nova descrição, temos que fazer a substituição das variáveis  $(q, \dot{q})$  por  $(q, p)$  em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função  $H(q, p, t)$  em lugar da lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  para gerar a dinâmica. Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma transformação de Legendre, que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução da função de Hamilton, ou simplesmente, hamiltoniana  $H(q, p, t)$  definida por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (1.8)$$

As consequências mais imediatas da introdução da função  $H$  podem ser deduzidas tomando-se a diferencial da Eq.(1.8)

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad (1.9)$$

em virtude da definição (1.7) dos momentos canônicos e das equações de Lagrange, esta última equação reduz-se a

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.10)$$

indicando que  $H$ , de fato, só depende dos  $q$ s e  $p$ s. Por outro lado,

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.11)$$

comparando estas duas últimas equações temos:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Estas são conhecidas como Equações de Hamilton, ou Equações Canônicas de Hamilton, e formam um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem equivalente ao sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem de Lagrange. As quantidades  $(q, p)$  são chamadas de variáveis canônicas e o espaço cartesiano de  $2n$  dimensões cujos pontos são representados pelas  $2n$ -uplas  $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  é chamado espaço de fase. Devemos ressaltar que, ao contrário da formulação lagrangiana em que vale *a priori* a conexão  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ , na dinâmica de Hamilton não há qualquer conexão *a priori* entre as variáveis canônicas, isto é, os  $qs$  e  $ps$  são inteiramente independentes entre si. Por isso, as duas partes da Eq.(1.12) devem ser encaradas em pé de igualdade, constituindo o conjunto completo de equações de movimento do sistema.

Excetuados os casos em que a hamiltoniana pode ser escrita diretamente, a construção das equações de Hamilton envolve os seguintes estágios:

1. Escolhidas as coordenadas generalizadas, constroi-se a lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ ;
2. A Eq.(1.7) é resolvida para as velocidades  $\dot{q}_i$  como funções de  $(q, p, t)$ ;
3. Constroi-se  $H(q, p, t)$  substituindo-se em (1.8) os  $\dot{q}_s$  obtidos no passo anterior;
4. Uma vez obtida  $H(q, p, t)$ , as equações de movimento do sistema são (1.12).

### 1.1.3 Vínculos.

Como definido em [12], vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo, *a priori* o seu movimento. É importante sublinhar que vínculos são limitações *de ordem cinemática* impostas ao sistema mecânico. Portanto, estas restrições antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema. Restrições de natureza dinâmica - decorrentes, portanto, das equações de movimento - não são vínculos. Por exemplo, a segunda lei de Newton obriga uma partícula sujeita a uma força central a se mover num plano fixo, mas isto não caracteriza um vínculo.

São exemplos de sistemas vinculados<sup>2</sup>:

1. Uma partícula que está restrita a uma superfície fixa;
2. Duas partículas que se movem no espaço unidas por uma haste rígida;
3. Um pêndulo duplo que oscila num plano vertical fixo.

mais tarde, ainda nesse trabalho, mostraremos as classificações de vínculos em primários e secundários e vínculos de primeira e segunda classes.

<sup>2</sup>As equações de vínculo para estes sistemas podem ser encontradas em [12].

## 1.2 Formalismo de Dirac.

Com a presença de vínculos, a hamiltoniana não é univocamente determinada em termos de momento de coordenada. A fim de termos uma ideia sobre qual hamiltoniana usar, efetivamente, no formalismo, vamos calcular as equações de movimento no espaço de fase. Seja, então, o princípio de Hamilton com  $L$  obtida a partir da transformação de Legendre da hamiltoniana sem vínculos, aqui denominada  $H_c$

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S \\
 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \\
 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H_c) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \delta H_c) dt
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Assim, podemos escrever  $\delta H_c$  da seguinte maneira:

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \delta p_i \tag{1.14}$$

Logo, levando este resultado na Eq.(1.13), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0 \tag{1.15}$$

Como  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$  são funções arbitrárias do tempo, concluímos que a integração na Eq.(1.15) só é nula se o integrando o for. Portanto,

$$\left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i = 0 \tag{1.16}$$

Supondo que haja  $M$  relações de vínculo envolvendo  $p_i$  e  $q_i$  (vamos admitir, por enquanto, que só existam esses vínculos) nada podemos concluir da Eq.(1.16). Por outro lado, seja  $\phi_m(q_i, p_i)$  um vínculo, teremos:

$$\begin{aligned}
 0 &\approx \delta \phi_m(q_i, p_i) \\
 &= \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \delta p_i
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

São, ao todo,  $M$  equações.

Multiplicando cada uma por  $\lambda_m = \lambda_m(q_i, p_i)$  e somando o resultado com a Eq.(1.16), obtemos

$$0 \approx \left( -\dot{q}_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta p_i \quad (1.18)$$

Temos agora  $M$  funções arbitrárias  $\lambda_m = \lambda_m(q_i, p_i)$  (multiplicadores de Lagrange). Assim, é possível obter as seguintes equações de Hamilton

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (1.19)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \quad (1.20)$$

Efetivamente, é como se tivéssemos definido uma nova hamiltoniana dada por

$$\tilde{H} = H_c + \lambda_m \phi_m \approx H_c \quad (1.21)$$

Como pode ser visto, o preço pago pelos  $M$  vínculos é a presença de  $M$  multiplicadores de Lagrange.

Podemos escrever as equações de Hamilton em termos dos parênteses de Poisson envolvendo  $\tilde{H}$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, \tilde{H}\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, \tilde{H}\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Conforme foi dito, pode haver mais vínculos <sup>3</sup>. Suponhamos que existam  $K$  vínculos secundários ( $K + M \leq N$ ). Temos então,

$$H = H_c + \lambda_a \phi_a \quad a = 1, 2, 3, \dots, M + K \quad (1.23)$$

$H$  é chamada de hamiltoniana total.

Vejam agora como determinar os vínculos secundários, terciários etc. Seja  $\phi_m$  um dos  $M$  vínculos primários. É uma questão de consistência os vínculos não evoluírem com o tempo. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &= \{\phi_m, \tilde{H}\} \\ &= \{\phi_m, H_c + \lambda_n \phi_n\} \\ &\approx \{\phi_m, H_c\} + \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

---

<sup>3</sup>Os vínculos  $\phi_m$  são ditos primários, os demais são chamados de secundários, terciários etc

Como podemos observar da expressão acima, usamos que  $\dot{\phi}_m$  é obtido através dos parênteses de Poisson com  $\tilde{H}$ .

Da equação (1.24), podemos destacar duas possibilidades que estão relacionados aos parênteses de Poisson entre  $\phi_m$  e  $\phi_n$  ser ou não fracamente igual a zero:

i)  $\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$  Neste caso, obtemos  $\{\phi_m, H_c\} \approx 0$ , que é uma relação de vínculo. Pode acontecer deste vínculo ser, simplesmente, um dos vínculos primários já conhecidos. Se isto ocorrer, a relação (1.24) é uma mera relação de consistência. Mas, pode acontecer, também, de  $\{\phi_m, H_c\} \approx 0$  ser um novo vínculo. Como foi dito, um vínculo secundário, em virtude de não estar vindo diretamente da relação do momento.

ii)  $\{\phi_m, \phi_n\} \neq 0$  Agora não obtemos um novo vínculo, mas uma relação obtendo os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_n$ . Este processo deve ser repetido para os vínculos secundários. A partir destes, são obtidos, da mesma maneira, os vínculos terciários e assim por diante. Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann. Procedemos assim até esgotarem todas as possibilidades, isto é, até nenhum vínculo novo ser obtido (apenas a repetição dos já existentes) e até serem determinados todos os multiplicadores de Lagrange. De agora em diante, os vínculos terciários e os obtidos nas demais etapas do processo serão chamados, simplesmente, de secundários.

Voltemos, agora, ao fato de termos usado  $\tilde{H}$  para obter  $\dot{\phi}_m$  na expressão (1.24). O correto seria usar, como Dirac denominou, a hamiltoniana total, ou seja, com todos os vínculos da teoria [8]. Mas isto, obviamente, não seria possível pois não conhecíamos os vínculos secundários. Agora já conhecemos. Não é difícil perceber que se montarmos equações semelhantes às equações (1.24), usando  $H$  em lugar de  $\tilde{H}$ , obteremos os mesmos multiplicadores de Lagrange.

É oportuno comentar aqui, que os vínculos primários, obtidos da definição de momento  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  e os vínculos secundários obtidos de relações de consistência, provenientes do fato de os vínculos não evoluírem com o tempo, podem não ser os únicos vínculos da teoria. Nas teorias de calibre (gauge, em inglês) <sup>4</sup>, como o eletromagnetismo, há o aparecimento de novos vínculos quando fixamos o calibre.

### 1.2.1 Vínculos de Primeira e Segunda Classes.

A classificação dos vínculos em primários, secundários, terciários e etc está ligada a maneira como os vínculos são obtidos. Ela é, apenas, uma questão de organização. Em termos de quantização canônica, não importa como os vínculos foram obtidos. O que importa é que eles existam. Neste sentido, uma classificação mais útil é a seguinte: dentre os vínculos, podem existir alguns que possuem parênteses de Poisson fracamente igual a zero com todos

---

<sup>4</sup>Uma teoria de calibre é aquela na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um sistema de referência, cuja escolha é arbitrária no tempo. As variáveis fisicamente importantes são aquelas que são independentes da escolha do sistema de referência. Uma transformação de variáveis induzida por uma mudança no sistema de referência arbitrário é chamada transformação de calibre. Variáveis físicas (“observáveis”) são então ditos invariantes de calibre.

os vínculos da teoria. Esses vínculos são denominados de primeira classe. Já aqueles que possuírem pelo menos um parênteses de Poisson diferente de zero são chamados de segunda classe.

O importante a destacar é que a existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui invariância por transformações de calibre. Há dois caminhos que podem ser seguidos. Um deles é fixar o calibre, assim, os vínculos decorrentes da fixação do calibre implicarão que aqueles vínculos de primeira classe passem a ser de segunda classe. Ou seja, haverá, agora, parênteses de Poisson, daqueles vínculos com os da fixação de calibre que não serão mais nulos. O problema desta escolha é que o desenvolvimento fica não covariante.

Outro caminho a ser seguido é não proceder à fixação de calibre e trabalhar covariantemente.

## 1.2.2 Parênteses de Dirac.

Seja a evolução temporal de uma quantidade dinâmica  $A(q_i, p_i, t)$ . Temos, então,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.25)$$

Usando as equações de Hamilton dadas por (1.19) e (1.20), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \frac{\partial A}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H_c\} + \lambda_a \{A, \phi_a\} + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.26)$$

em que  $a = 1, 2, 3, \dots, M + K$  vide Eq.(1.23). Todos os vínculos estão incluídos. Inclusive os decorrentes da fixação de calibre, caso existam.

No caso particular de  $\phi_b$  ser qualquer um dos vínculos da teoria, vem que

$$0 = \frac{d\phi_b}{dt} \approx \{\phi_b, H_c\} + \lambda_a \{\phi_b, \phi_a\} \quad (1.27)$$

Seja  $C$  a matriz cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, isto é,

$$C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\} \quad (1.28)$$

Logo, da Eq.(1.27) vem que

$$\lambda_a C_{ba} + \{\phi_b, H_c\} \approx 0 \quad (1.29)$$

assim,

$$\lambda_a C_{ab} \approx \{\phi_b, H_c\} \quad (1.30)$$

em que usamos o fato de a matriz  $C$  ser antissimétrica. Dirac mostrou que a matriz  $C$  sempre possui determinante diferente de zero (lembrando que estamos estudando o caso que todos os vínculos são de segunda classe). Assim, da Eq.(1.30), vem que

$$\lambda_a C_{ab} C_{bc}^{-1} \approx C_{bc}^{-1} \{\phi_b, H_c\} \quad (1.31)$$

portanto

$$\lambda_a \approx -C_{ab}^{-1} \{\phi_b, H_c\} \quad (1.32)$$

Introduzindo este resultado na Eq.(1.26), finalmente vem que

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \{A, H_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, H_c\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H_c\}_D + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Em que

$$\{A, H_c\}_D = \{A, H_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, H_c\} \quad (1.34)$$

são os parênteses de Dirac entre  $A$  e  $H_c$ .

Assim, somos levados a formular a seguinte regra de quantização canônica para sistemas vinculados:

$$\{A, B\}_D \longrightarrow -i[A, B] \quad (1.35)$$

em que os parênteses de Dirac são definidos de forma análoga à Eq.(1.34), ou seja,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, B\} \quad (1.36)$$

Uma forte evidência que sustenta a hipótese dada pela Eq.(1.35) é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente nos parênteses de Dirac. Isto significa que se tomarmos os parênteses de Dirac entre um vínculo e uma quantidade qualquer, obteremos zero. Vejamos isto:

$$\begin{aligned} \{A, \phi_c\}_D &= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, \phi_c\} \\ &= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} C_{bc} \\ &= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} \delta_{ac} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Aqui não há mais inconsistências na teoria.

### 1.3 Formalismo Simplético.

Anteriormente foi discutido o método de Dirac que fornece um tratamento consistente de sistemas vinculados. O objetivo principal é chegar aos parênteses de Dirac, que constituem a ponte para os comutadores (após resolvidos os problemas de ordenamento).

Em um trabalho relativamente recente [9], Faddeev-Jackiw mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos seguindo um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Este formalismo é conhecido como *formalismo simplético*, ou *quantização simplética*, ou ainda, *quantização simplética de Faddeev-Jackiw*. A proposta de Faddeev e Jackiw para tratar sistemas vinculados é que se fizesse, primeiramente, a eliminação dos graus de liberdade supérfluos. Entretanto, conforme eles mesmos reconheceram, isto nem sempre pode ser feito. Note que se isso acontecesse, não haveria sequer a necessidade de Dirac ter desenvolvido um formalismo para tratar de sistemas vinculados, pois bastaria que se eliminassem os graus de liberdade não físicos e se usasse o formalismo hamiltoniano usual.

E mais recentemente, num par de trabalhos [10], J. Barcelos Neto e C. Wotzasek mostraram que o método simplético pode ser convenientemente estendido de tal maneira que vínculos possam ser incorporados. No que segue, será apresentado o formalismo simplético sem e com vínculos.

Com o intuito, em princípio, de termos uma notação mais concisa, vamos denotar o conjunto de coordenadas e momentos por apenas uma quantidade  $y^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 3N$ ), em que

$$\begin{aligned} y^i &= q_i \\ y^{N+1} &= p_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Neste caso, o conjunto de parênteses fundamentais de Poisson reduz-se simplesmente, a

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = \epsilon^{\alpha\beta} \quad (1.39)$$

em que  $\epsilon^{\alpha\beta}$  é um elemento da matriz

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

sendo 0 a matriz nula  $N \times N$  e 1 a matriz identidade  $N \times N$ . É fácil ver que os parênteses de Poisson de duas quantidades  $A(y)$  e  $B(y)$  é dado por

$$\{A(y), B(y)\} = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A \partial_\beta B \quad (1.41)$$

sendo  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ . A quantidade  $\epsilon^{\alpha\beta}$  garante a usual antissimetria dos parênteses de Poisson.

Observando-se a relação (1.39), podemos concluir que a generalização dos parênteses de Poisson, para o caso de sistemas vinculados, deve ser do tipo

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = f^{\alpha\beta} \quad (1.42)$$

em que  $f^{\alpha\beta}$  deve ser um tensor antissimétrico e não singular (note que essa última propriedade é também verificada para o caso particular do tensor  $\epsilon^{\alpha\beta}$ ). O tensor  $f^{\alpha\beta}$  é chamado de *tensor simplético*.<sup>5</sup>

Neste ponto, podemos compreender em que se baseiam os métodos de Dirac [8] e simplético [9]. O primeiro é desenvolvido olhando-se para o lado esquerdo da Eq.(1.42), ou seja, ele procura ir generalizando os parênteses de Poisson com a inclusão dos vínculos até chegar à forma final quando todos os vínculos foram considerados. No caso do método simplético, olha-se para o lado direito da Eq.(1.42). A ideia é ir usando os vínculos com o intuito de ir deformando a estrutura geométrica da teoria até que o tensor simplético possa ser obtido.

Inicialmente, vejamos o formalismo simplético sem vínculo. Este método trabalha com lagrangianas de primeira ordem. É oportuno comentar aqui que isto não é uma restrição séria porque todos os sistemas que conhecemos, descritos por lagrangianas quadráticas, podem sempre ser escritos na formulação em primeira ordem. Isto é conseguido estendendo-se o espaço de configurações com a introdução de campos auxiliares. Estes são geralmente os momenta, mas isto não é necessariamente obrigatório.

Seja um sistema descrito por uma lagrangiana de primeira ordem do tipo:

$$L = a_\alpha(y)\dot{y}^\alpha - V(y) \quad (1.43)$$

segue-se da equação de Euler-Lagrange que

$$f_{\alpha\beta}\dot{y}^\beta = \partial_\alpha V \quad (1.44)$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha \quad (1.45)$$

suponhamos que os coeficientes  $a_\alpha(y)$  sejam tais que  $\det(f_{\alpha\beta}) \neq 0$ . Isto significa que não há vínculos. Logo, da Eq.(1.44), vem que

$$\dot{y}^\alpha = f^{\alpha\beta}\partial_\beta V \quad (1.46)$$

sendo  $f^{\alpha\beta}$  o inverso de  $f_{\alpha\beta}$ . O tensor  $f^{\alpha\beta}$  é o tensor simplético a que nos referimos anteriormente. Vamos mostrar que, de fato, este tensor corresponde aos parênteses de Dirac para o sistema descrito pela lagrangiana (1.43). Antes, é importante mencionar aqui que o tratamento de Dirac sempre leva a um número de vínculos maior ou igual ao tratamento simplético (chamaremos os vínculos que só aparecem no formalismo simplético de *vínculos verdadeiros*).

O momento canônico conjugado à coordenada  $y_\alpha$  é um vínculo (não verdadeiro).

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\alpha} = a_\alpha(y) \quad (1.47)$$

---

<sup>5</sup>O termo simplético foi introduzido pelo matemático alemão Hermann Weyl em 1939 e deriva de uma raiz grega que significa “entremeado” ou “entrelaçado”.

Denotando este vínculo por

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - a_\alpha = 0 \quad (1.48)$$

e calculando os parênteses de Poisson  $\{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\}$ , temos

$$\begin{aligned} \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} &= -\{\pi_\alpha, a_\beta\} - \{a_\alpha, \pi_\beta\} \\ &= \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha \\ &= f_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Como estamos considerando que  $\det(f_{\alpha\beta}) \neq 0$ , os parênteses acima são não nulos. Os vínculos  $\Omega_\alpha$  são de segunda classe e, conseqüentemente, não há vínculos secundários.

Os parênteses de Dirac entre  $y^\alpha$  e  $y^\beta$  são:

$$\begin{aligned} \{y^\alpha, y^\beta\}_D &= \{y^\alpha, y^\beta\} - \{y^\alpha, \Omega_\rho\} f^{\rho k} \{\Omega_k, y^\beta\} \\ &= -\{y^\alpha, \pi_\rho\} f^{\rho k} \{\pi_k, y^\beta\} \\ &= f^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Caso  $\det(f_{\alpha\beta}) = 0$ , não poderíamos expressar as velocidades como na Eq.(1.46) e, também, não poderíamos obter o tensor simplético  $f^{\alpha\beta}$ , pois  $f_{\alpha\beta}$  não tem inversa.

Agora, vamos ver o formalismo simplético com vínculos [10].

Neste caso, como já comentamos anteriormente a matriz  $(f_{\alpha\beta})$  é singular. E não podemos, de imediato, obter o tensor simplético  $f^{\alpha\beta}$ , que nos dará, então, os parênteses de Dirac. Este problema será discutido usando-se vínculos para produzir uma espécie de deformação na estrutura geométrica, o que leva ao aparecimento de um novo tensor, que pode ser não singular. Quando isso acontece esta nova quantidade será identificada como o tensor simplético<sup>6</sup> Vejamos como isto é feito sistematicamente.

Seja a quantidade singular acima mencionada indicada por  $(f_{\alpha\beta}^{(0)})$  e consideremos que ela tenha, digamos,  $M$  ( $M < 2N$ ) modos zeros  $v_m^{(0)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Isto significa que

$$f_{mn}^{(0)} v_n^{(0)} = 0 \quad (1.51)$$

Usando a Eq.(1.51) na Eq.(1.44), vem que

$$v_m^{(0)} \partial_m V = 0 \quad (1.52)$$

---

<sup>6</sup>Algumas vezes, por abuso de linguagem, nos referimos ao tensor não singular  $f_{\alpha\beta}$ , também como tensor simplético.

Esta equação pode ser um vínculo. E vamos supor que seja o caso. Normalmente, vínculos podem ser introduzidos na parte potencial da lagrangiana por meio de multiplicadores de Lagrange. Aqui, a fim de obter uma deformação do tensor  $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ , nós os introduziremos na parte cinética. Isto é feito tomando-se a derivada temporal do vínculo e introduzindo o resultado na lagrangiana por meio de um multiplicador de Lagrange<sup>7</sup>.

Estes multiplicadores, que denotaremos por  $\lambda_m^{(0)}$ , alargam o espaço de configurações da teoria. As variáveis simpléticas da teoria passam a ser  $(y^\alpha, \lambda_m^{(0)})$  e a lagrangiana Eq.(1.43) fica escrita como

$$\begin{aligned} L(0) &= a_\alpha^{(0)}(y)\dot{y}^\alpha + \lambda_m^{(0)}\dot{\Omega}_m^{(0)} - V^{(0)}(y) \\ &= a_\alpha^{(0)}(y)\dot{y}^\alpha + \lambda_m^{(0)}\partial_\alpha\Omega_m^{(0)}\dot{y}^\alpha - V^{(0)}(y) \\ &= (a_\alpha^{(0)}(y) + \lambda_m^{(0)}\partial_\alpha\Omega_m^{(0)})\dot{y}^\alpha - V^{(0)}(y) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Da Eq.(1.53) podemos, então, identificar novos vetores  $a_\alpha^{(1)}$  e  $a_m^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} a_\alpha^{(1)} &= a_\alpha^{(0)} + \lambda_m^{(0)}\partial_\alpha\Omega_m^{(0)} \\ a_m^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Note-se que  $\Omega_m^{(0)}$  são os vínculos obtidos da Eq.(1.52). Em consequência, temos tensores:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{(1)} &= \partial_\alpha a_\beta^{(1)} - \partial_\beta a_\alpha^{(1)} \\ f_{\alpha m}^{(1)} &= \partial_\alpha a_m^{(1)} - \partial_m a_\alpha^{(1)} = -\partial_m a_\alpha^{(1)} \\ f_{mn}^{(1)} &= \partial_m a_n^{(1)} - \partial_n a_m^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

sendo  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial\lambda_m}$ . Se  $\det f^{(1)} \neq 0$ , conseguimos eliminar os vínculos da teoria e tem-se o tensor simplético da teoria. Caso contrário, devemos repetir o procedimento anterior tantas vezes quantas forem necessárias.

Pode ocorrer, também, de se chegar a um ponto onde se obtém uma matriz singular e os modos zeros correspondentes não conduzem a novos vínculos. Este é o caso, por exemplo, de teorias de calibre. Neste ponto, se queremos definir o tensor simplético, devemos introduzir as condições de calibre.<sup>8</sup>

---

<sup>7</sup>Pode-se também tomar a derivada temporal do multiplicador de Lagrange.

<sup>8</sup>Vínculos provenientes da quebra de simetria de calibre.

## 1.4 Modelo Sigma Não-Linear.

A densidade de lagrangiana para o modelo sigma não-linear é dada por <sup>9</sup>

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a + \frac{\lambda}{2} (\varphi_a \varphi_a - 1) \quad (1.56)$$

em que  $a = 1, 2, \dots, N$  são índices internos que correspondem à simetria  $O(N)$  e  $\mu = 0, 1$  são índices do espaço-tempo. A título de ilustração e para melhor poder comparar os métodos simplético e de Dirac, vamos tratar este sistema das duas maneiras. Começemos com o de Dirac. Os momentos canônicos são:

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} = \dot{\varphi}_a \quad (1.57)$$

$$\pi_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad (1.58)$$

Como vemos, a expressão do momento conjugado a  $\lambda$  é um vínculo. Usando a condição de consistência para este vínculo, obtém-se o vínculo secundário

$$\varphi_a \varphi_a - 1 = 0 \quad (1.59)$$

impondo que este vínculo não apresente evolução temporal, obtém-se o vínculo terciário

$$\varphi_a \pi_a = 0 \quad (1.60)$$

Similarmente, a condição de consistência leva ao vínculo quaternário

$$\pi_a \pi_a + \varphi_a \partial_x^2 \varphi_a + \lambda = 0 \quad (1.61)$$

A partir daí não são obtidos mais vínculos e todos são de segunda classe (a teoria não possui nenhuma invariância de calibre). Denotemos esses vínculos por  $\phi_m$ , em que  $m = 1, 2, 3, 4$  correspondem às equações (1.59), (1.60), (1.58) e (1.61). A matriz dos parênteses de Poisson desses vínculos é dada por

$$C = (\{\phi_m(x, t), \phi_n(y, t)\})$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \lambda + 3\pi_a \pi_a - \varphi_a \varphi_a (y) \partial_y^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda - 3\pi_a \pi_a + \varphi_a \varphi_a (y) \partial_y^2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (1.62)$$

Na matriz acima, e também na seguinte, não foi escrita a dependência na variável  $x$ . A inversa é

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\lambda - 3\pi_a \pi_a + \varphi_a \varphi_a (y) \partial_y^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 3\pi_a \pi_a - \varphi_a \varphi_a (y) \partial_y^2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (1.63)$$

---

<sup>9</sup>Este modelo é tratado em [10, 14, 15] onde podem ser encontradas informações adicionais.

Usando-se a Eq.(1.36), calculamos os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned}\{\varphi_a(x), \varphi_b(y)\}^* &= 0 \\ \{\varphi_a(x), \pi_b(y)\}^* &= (\delta_{ab} - \varphi_a \varphi_b) \delta(x - y) \\ \{\pi_a(x), \pi_b(y)\}^* &= -(\varphi_a \pi_b - \varphi_b \pi_a) \delta(x - y)\end{aligned}\quad (1.64)$$

Passemos, agora, ao tratamento simplético. Primeiramente, temos de passar a lagrangiana Eq.(1.56) para primeira ordem. Isto é conseguido pela introdução de um campo auxiliar  $\pi_a(x)$  da seguinte maneira (aqui, o campo auxiliar é o próprio momento)

$$\dot{\varphi}_a \dot{\varphi}_a \longrightarrow \dot{\varphi}_a \pi_a - \frac{1}{2} \pi_a \pi_a \quad (1.65)$$

Substituindo de volta, a equação de movimento para  $\pi_a$ , obtém-se do termo quadrático inicial. Com a transformação dada pela Eq.(1.65) obtemos a seguinte lagrangiana de primeira ordem

$$L^{(0)} = \pi_a \dot{\varphi}_a - V^{(0)}(\varphi, \pi) \quad (1.66)$$

em que

$$V^{(0)}(\varphi, \pi) = \frac{1}{2} \pi_a \pi_a + \frac{1}{2} \varphi'_a \varphi'_a - \frac{\lambda}{2} (\varphi_a \varphi_a - 1) \quad (1.67)$$

onde  $\varphi'_a = \partial_x \varphi_a$ . Podemos identificar os vetores  $a^{(0)}$ .

$$\begin{aligned}a^{(0)\varphi} &= \pi \\ a^{(0)\pi} &= 0 \\ a^{(0)\lambda} &= 0\end{aligned}\quad (1.68)$$

A matriz  $f^{(0)}$ ,  $(2N+1) \times (2N+1)$ , é dada por

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ab} & 0 \\ \delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (1.69)$$

em que as linhas e colunas seguem a ordem  $\varphi, \pi, \lambda$ . A matriz (1.69) é singular. Os modos zeros são  $\tilde{v}_a^{(0)} = (0, 0, 1)$ , onde 0 está representando uma matriz  $(1 \times N)$ . Um vínculo pode aparecer de

$$\int dx \frac{\delta}{\delta \tilde{\varphi}(x, t)} \int dy V^{(0)}(y, t) = 0 \quad (1.70)$$

que é a generalização da Eq.(1.52). Aqui,  $\tilde{\varphi}(x, t)$  está representando qualquer um dos campos  $\varphi, \pi, \lambda$ . Considerando a Eq.(1.67) e a Eq.(1.70), obtém-se o primeiro vínculo

$$\Omega^{(0)} = \varphi_a \varphi_a - 1 \quad (1.71)$$

O próximo passo é introduzir este vínculo na parte cinética da lagrangiana. Pelo que já discutimos, isto pode ser feito com  $\eta\dot{\Omega}^{(0)}$  ou  $\dot{\eta}\Omega^{(0)}$ , em que  $\eta$  é um multiplicador de Lagrange. Como já existe  $\Omega^{(0)}$  na parte potencial da lagrangiana, é mais prático fazer a substituição  $\lambda \longrightarrow \dot{\eta}$ <sup>10</sup> Isto nos permite obter a seguinte lagrangiana modificada

$$L^{(1)} = (\pi_a + \eta\varphi_a)\dot{\varphi}_a - V^{(1)} \quad (1.72)$$

em que

$$V^{(1)}(\varphi, \pi) = \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + \frac{1}{2}\varphi'_a\varphi'_a \quad (1.73)$$

Assim, novos vetores  $a_i^{(1)}$  podem ser identificados

$$\begin{aligned} a_a^{(1)\varphi} &= \pi_a + \eta\varphi_a \\ a_a^{(1)\pi} &= 0 \\ a^{(1)\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

e a matriz  $f^{(1)}$  é

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ab} & -\varphi_a \\ \delta_{ab} & 0 & 0 \\ \varphi_a & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y) \quad (1.75)$$

que continua sendo singular. A ordem das linhas e colunas é  $\varphi, \pi, \eta$ . Usando a Eq.(1.69), os modos zeros da Eq.(1.75),  $\tilde{v}_a^{(1)} = (0, -\tilde{\varphi}_a, \delta_{(ab)})$ , fornecerão o segundo vínculo.

$$\Omega^{(1)} = \varphi_a\pi_a \quad (1.76)$$

Introduzindo este vínculo na parte cinética da lagrangiana através de um multiplicador de lagrange  $\rho$ , obtém-se

$$L^{(2)} = (\pi_a + \eta\varphi_a + \rho\pi_a)\dot{\varphi}_a + \rho\varphi_a\dot{\pi}_a - V^{(2)} \quad (1.77)$$

Aqui,  $V^{(2)} = V^{(1)}$ . Identificando os vetores  $a_\varphi^{(2)}, a_\pi^{(2)}, a_\eta^{(2)}, a_\rho^{(2)}$ , imediatamente construímos a matriz  $f^{(2)}$

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ab} & -\varphi_a & -\pi_a \\ \delta_{ab} & 0 & 0 & -\varphi_a \\ \tilde{\varphi}_b & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\pi}_b & \tilde{\varphi}_b & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y) \quad (1.78)$$

---

<sup>10</sup>Mais formalmente, isto é equivalente a introduzir uma derivada total  $\frac{d(\eta\Omega^{(0)})}{dt}$  e escolher um  $\eta$  de tal maneira que  $\lambda = \dot{\eta}$ . Poderíamos, também, caso desejássemos, introduzir um termo  $\eta\dot{\Omega}^{(0)}$  na parte cinética da lagrangiana e manter o termo  $\lambda\Omega^{(0)}$  do potencial. O resultado final seria o mesmo, apenas com mais trabalho algébrico.

que não é mais degenerada. Assim, podemos identificar  $f^{(2)}$  como o tensor simplético da teoria. É mais interessante observar que no método simplético só há dois vínculos. O próximo passo é calcular a inversa. Sem maiores dificuldades, obtemos

$$(f^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ab} - \varphi_a \varphi_b & -\varphi_b & 0 \\ -\delta_{ab} \varphi_a \varphi_b & \varphi_a \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a \varphi_b & -\varphi_b & \varphi_b \\ -\varphi_a & \dot{\varphi}_a & 0 & -1 \\ 0 & \varphi_a & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (1.79)$$

aqui retornamos às variáveis originais (sem campos auxiliares). Podemos, então, identificar os seguintes parênteses

$$\begin{aligned} \{\varphi_a(x), \varphi_b(y)\} &= 0 \\ \{\varphi_a(x), \dot{\varphi}_b(y)\} &= (\delta_{ab} - \varphi_a \varphi_b) \delta(x - y) \\ \{\dot{\varphi}_a(x), \dot{\varphi}_b(y)\} &= (\varphi_a \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a \varphi_b) \delta(x - y) \end{aligned} \quad (1.80)$$

que coincidem com os correspondentes parênteses de Dirac calculados inicialmente. Há ainda outros parênteses envolvendo os multiplicadores de Lagrange, mas estes não têm significado físico porque não representam as grandezas físicas pertinentes ao modelo. O que podemos dizer é que eles apenas entram na teoria para que o tensor simplético possa ser definido corretamente.

# Capítulo 2

## Modelo de Heisenberg

As propriedades dos materiais magnéticos são completamente especificadas pelas leis da Mecânica Quântica. Porém, o tratamento de um sistema macroscópico contendo milhões de partículas torna-se inviável através destas. Assim, simplificações se tornam essenciais no estudo desses sistemas.

Pode-se mostrar que a interação de troca, a principal responsável pelas propriedades magnéticas dos materiais com momentos magnéticos localizados, leva a uma interação do tipo  $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ , onde  $\vec{S}_i$  é o spin do íon localizado no sítio  $i$ . Como uma extensão desta interação temos o modelo de Heisenberg, que é definido pela seguinte hamiltoniana

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (2.1)$$

Em que o somatório é realizado sobre os vizinhos próximos,  $J$  é a constante de acoplamento entre vizinhos próximos e impomos o vínculo não-linear  $S^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = 1$ . Argumentos para esta forma de interação e do modelo podem ser obtidas nas referências [16,17]. O caso em que  $J > 0$  na Hamiltoniana representa um acoplamento antiferromagnético, uma vez que a energia mínima do estado fundamental é atingida quando os spins se alinham antiparalelamente ( $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -1$ ). Pelo mesmo raciocínio, percebemos que,  $J < 0$ , temos um acoplamento ferromagnético. Podemos introduzir neste modelo um termo para levar em consideração a presença de anisotropias (existência de uma direção preferencial para os spins se ordenarem). Neste caso a hamiltoniana fica da seguinte forma:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \Lambda S_i^z S_j^z) \quad (2.2)$$

Através da Eq.(2.2) os seguintes modelos são definidos:

1. Quando  $\Lambda = 0$  temos o modelo de Heisenberg isotrópico, definido pela hamiltoniana Eq.(2.1) que é caracterizado por não haver neste nenhuma direção preferencial para os spins se orientarem.
2. Quando  $\Lambda = 1$  a hamiltoniana é a seguinte

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \quad (2.3)$$

Neste caso podemos obter dois modelos distintos. No modelo  $XY$ , o vínculo é  $S^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = 1$ , ou seja, há as três componentes de spin. Já no modelo rotor planar o vínculo é  $S^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 = 1$ , ou seja, não há a terceira componente do spin e portanto, os spins ficam confinados no plano.

3. Quando  $0 < \Lambda < 1$  temos o modelo de Heisenberg de plano-fácil, que é caracterizado pela preferência dos spins se alinharem paralelamente ao plano. A hamiltoniana novamente é dada pela Eq.(2.2).
4. Quando  $\Lambda < 0$  temos o modelo de Heisenberg de eixo-fácil, que é caracterizado pela preferência dos spins se alinharem perpendicularmente ao plano (direção- $z$ ). Novamente a hamiltoniana é dada pela Eq.(2.2).

Nestes modelos a interação com um campo magnético externo pode ser introduzida através de um termo proporcional a  $\sum \vec{B} \cdot \vec{S}_i$ . Vale ressaltar que a dinâmica dos spins é obtida através da equação quântica de movimento:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\vec{S}, H] \quad (2.4)$$

onde  $H$  é o hamiltoniano do modelo em questão,  $\hbar$  é a constante de Plank e  $[\vec{S}, H] = \vec{S}H - H\vec{S}$  é o comutador de  $\vec{S}$  e  $H$ . Lembrando que a relação de comutação entre os operadores de spin  $S^x$ ,  $S^y$ ,  $S^z$  é dada por  $[S^\alpha, S^\beta] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S^\gamma$ , onde  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  é igual a 1 se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  forem cíclicos,  $-1$  caso contrário e 0 para o caso de um índice repetido. Percebemos então que no modelo do rotor planar não há dinâmica, uma vez que não existe a componente  $S^z$ , temos a seguinte equação de movimento  $[S^z, \frac{d\vec{S}}{dt}] = 0$ .

Sistemas macroscópicos são geralmente constituídos por  $10^{23}$  partículas. Sendo assim, seu tratamento matemático, mesmo através dos modelos propostos acima, não é fácil. Geralmente, recorre-se ao tratamento destes e outros modelos através de técnicas aproximadas, como a aproximação de campo médio [18], métodos computacionais, entre outras. Podemos também tratar estes modelos de uma forma analítica através da teoria de campo que os reproduza [19, 20, 21, 22]. O uso de uma teoria de campo justifica-se já que esta descreve sistemas com infinitos graus de liberdade, e em um sistema composto por cerca de  $10^{23}$  partículas podemos considerar infinitos graus de liberdade em primeira aproximação. Outra aproximação possível é tratar os modelos considerando que os sítios da rede são compostos por spins com elevados números quânticos. Desta forma, podemos desconsiderar o princípio da incerteza, ou seja, assumimos que podemos conhecer as três componentes de spin simultaneamente. Os sistemas onde esta última aproximação se aplica são comumente referidos como sistemas clássicos de spin.

Uma forma de se obter uma teoria de campo correspondente a estes modelos é considerar o limite contínuo. Isto é feito assumindo-se que o espaçamento de rede (distância entre dois sítios de uma rede quadrada) é desprezível e considerar que a direção dos spins varia lentamente. Isto corresponde a analisar a região de grandes comprimentos de onda e baixas energias desses sistemas, sendo aplicados portanto à faixa de baixas temperaturas. Vamos obter o limite contínuo do modelo de Heisenberg isotrópico. Partindo de sua hamiltoniana, Eq.(2.1), vamos considerar o spin no sítio  $i$  interagindo com os spins  $i + 1$ , no sítio à direita,

e  $i - 1$  no sítio à esquerda,  $i + 2$  no sítio acima e  $i - 2$  no sítio abaixo, em uma rede quadrada. Definindo

$$T^\alpha = S_i^\alpha (S_{i+1}^\alpha + S_{i-1}^\alpha) + S_i^\alpha (S_{i+2}^\alpha + S_{i-2}^\alpha) \quad (2.5)$$

em que  $\alpha = x, y, z$ , podemos, em uma aproximação contínua, escrever:

$$S_{i+1}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots \quad (2.6)$$

$$S_{i-1}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots \quad (2.7)$$

$$S_{i+2}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots \quad (2.8)$$

$$S_{i-2}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

em que  $a$  é o espaçamento de rede. Temos então que:

$$T^\alpha = 2S_i^\alpha S_i^\alpha + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} S_i^\alpha + 2S_i^\alpha S_i^\alpha + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} S_i^\alpha \quad (2.11)$$

$$\frac{T^\alpha}{2} = 2(S_i^\alpha)^2 + \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} \right] S_i^\alpha \quad (2.12)$$

Agora, considerando as três componentes de spin,  $(T^x, T^y, T^z)$  e substituindo o somatório em Eq.(2.1) por  $\int \int \frac{dx dy}{a^2} = \int \frac{d^2 r}{a^2}$ , temos:

$$\begin{aligned} H &= -2J \int [(S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2] \frac{d^2 r}{a^2} - \frac{Ja^2}{2} \int \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} \right] S_i^\alpha \frac{d^2 r}{a^2} \\ H &= -2J \int \vec{S}^2 \frac{d^2 r}{a^2} - \frac{Ja^2}{2} \int \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} \right] S^\alpha \frac{d^2 r}{a^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que  $S^1 = S^x$ ,  $S^2 = S^y$  e  $S^3 = S^z$ . O índice  $i$  foi omitido pois qualquer sítio pode agora ser considerado e, sendo assim, dividimos o resultado acima por 2, já que cada par de sítios  $(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)$  foi contado duas vezes. Integrando por partes os termos da segunda integral, temos:

$$\int dy \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} S^\alpha = - \int \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 dy \quad (2.14)$$

O termo  $-2J \int \vec{S}^2 \frac{d^2 r}{a^2}$ , que é a energia fundamental do sistema, é infinito para uma rede infinita, uma vez que estamos impondo o vínculo não-linear  $\vec{S}^2 = |\vec{S}|^2 = 1$ , e deve ser subtraído da hamiltoniana original. Assim, obtemos:

$$H = \frac{J}{2} \int \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] d^2 r \quad (2.15)$$

que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$H = \frac{J}{2} \int (\partial_\mu \vec{S}) \cdot (\partial^\mu \vec{S}) d^2 r \quad \mu = 1, 2 \quad (2.16)$$

em que  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ . Este resultado obtido para o modelo de Heisenberg bidimensional é conhecido em teoria de campos como o modelo  $O(3)$  não-linear, ou modelo  $\sigma$  não-linear.

# Capítulo 3

## Modelo de Heisenberg como Sistema Vinculado

Este capítulo está baseado no artigo submetido “Hidden symetries in the two-dimensional isotropic Heisenberg Model”, Gabriel L. Silva et al. Neste trabalho, os autores fizeram a quantização do modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional, obtendo os parênteses de Dirac, tanto *via* Formalismo de Dirac quanto *via* Formalismo Simplético. Os autores também obtiveram a equação de Schrödinger funcional, que será apresentada mais adiante.

### 3.1 Obtenção dos Parênteses de Dirac do Modelo de Heisenberg Isotrópico *via* Formalismo de Dirac.

Tomando a Lagrangiana do modelo de Heisenberg isotrópico

$$L = \frac{1}{2}J \int d^2x [(\partial_0 S_i)^2 - \sum_i (\partial_\mu S_i)^2] \quad (3.1)$$

Que pode ser reescrita como:

$$L = \frac{1}{2}J \int d^2x \sum_i [\dot{S}_i^2 - (\partial_\mu S_i)^2] \quad (3.2)$$

Para obtermos a hamiltoniana, devemos calcular os momentos conjugados  $\pi_i$

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}_i} = J\dot{S}_i$$

Portanto:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^2x \sum_i \left[ \pi_i \frac{\pi_i}{J} - \frac{1}{2J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 \right] \\ &= \int d^2x \sum_i \left[ \frac{1}{J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

adicionado o vínculo  $S_i S_i = 1$  na Eq.(3.3)

$$H = \int d^2x \sum_i \left[ \frac{1}{J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 + \lambda (S_i S_i - 1) \right] \quad (3.4)$$

em que  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

Usando a condição de consistência de que o vínculo,  $\Omega_1 = S_i S_i - 1$ , seja conservado no tempo, isto é,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \{\Omega_1, H\} \approx 0 \\ &= \int d^2y \sum_i \frac{1}{J} \{S_i S_i - 1, \pi_i \pi_i\} = \int d^2y \sum_i [2S_i \frac{1}{J} 2\pi_j \delta(x-y)] \approx 0 \\ &= \frac{4}{J} S_i \pi_i \approx 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos definir  $\Omega_2 = S_i \pi_i$

Para  $\Omega_2$ , teremos:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= \{\Omega_2, H\} = \int d^2y \sum_i \{S_i \pi_i, \frac{1}{J} \pi_j \pi_j + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_j)^2 + \lambda (S_j S_j - 1)\} \approx 0 \\ &= \int d^2y \sum_i [\pi_i \frac{2}{J} \pi_i + S_i \frac{J}{2} \frac{\partial}{\partial S_i} (\frac{\partial S_i}{\partial x^\mu})^2 + S_i \lambda 2S_i] \delta(x-y) \\ &= \sum_i \frac{2}{J} \pi_i \pi_i + 2\lambda S_i S_i \approx 0 \end{aligned}$$

que não representa um novo vínculo. Assim,

$$\begin{aligned} \{\Omega_1, \Omega_2\} &= \{S_i S_i - 1, S_j \pi_j\} = S_i \{S_i, S_j \pi_j\} + \{S_i, S_j \pi_j\} \\ &= S_i S_j \{S_i, \pi_j\} + S_j \{S_i, \pi_j\} S_i = 2S_i S_j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo, a matriz  $C$  terá a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} S_i^2 \delta(x-y) \quad (3.6)$$

cuja inversa é dada por

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} S_i^{-2} \delta(x-y) \quad (3.7)$$

Então,

$$\{S_i, S_j\}_D = \{S_i, S_j\} - \{S_i, \Omega_1\} C_{12}^{-1} \{\Omega_2, S_j\} - \{S_i, \Omega_2\} C_{21}^{-1} \{\Omega_1, S_j\} = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \{S_i, \pi_j\}_D &= \{S_i, \pi_j\} - \{S_i, \Omega_1\} C_{12}^{-1} \{\Omega_2, \pi_j\} - \{S_i, \Omega_2\} C_{21}^{-1} \{\Omega_1, \pi_j\} \\ &= \delta_{ij} \delta(x-y) - S_R \delta_{Ri} (1/2) S_i^{-2} \delta(x-y) 2S_m \delta_{jm} \\ &= \left( \delta_{ij} - \frac{S_i S_j}{S_i^2} \right) \delta(x-y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\{\pi_i, \pi_j\}_D &= \{\pi_i, \pi_j\} - \{\pi_i, \Omega_1\}C_{12}^{-1}\{\Omega_2, \pi_j\} - \{\pi_i, \Omega_2\}C_{21}^{-1}\{\Omega_1, \pi_j\} \\
&= -2S_k\delta_{ki}(-1/2)S_i^{-2}\delta(x-y)\delta_{jm}\pi_m - \delta_{ki}\pi_k(1/2)S_i^{-2}\delta(x-y)2S_m\delta_{ij} \\
&= \frac{S_i\pi_j - \pi_iS_j}{S_i^2}\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

## 3.2 Obtenção dos Parênteses de Dirac do Modelo de Heisenberg Isotrópico *via* Formalismo Simplético.

Para implementar o método simplético introduziremos as variáveis auxiliares  $\pi^i$ , tal que a densidade de lagrangiana de segunda ordem na velocidade, dada na Eq.(3.1), pode ser escrita como lagrangiana de primeira ordem dada por

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^i \dot{S}_i - V^{(0)}, \quad (3.11)$$

com

$$V^{(0)} = \frac{1}{2J} \pi_i^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_i^2 - 1) - \frac{J}{2} (\partial_k S_i)^2. \quad (3.12)$$

As coordenadas simpléticas são  $\xi_\alpha^{(0)} = (S_i, \pi_i, \lambda)$  e o índice (0) indica a iteração de ordem zero. O tensor simplético, Eq.(1.45), nesse caso, é dado por:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ij} & 0 \\ \delta^{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (3.13)$$

Esta matriz é singular, então, considerando o seguinte modo zero,

$$\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Contraindo este modo zero com o gradiente do potencial  $V^{(0)}$ , dado na Eq.(3.12), o seguinte vínculo é obtido,

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} (S_i^2 - 1). \quad (3.15)$$

De acordo com o formalismo simplético, este vínculo deve ser introduzido na parte canônica da lagrangiana de primeira ordem Eq.(3.11) junto com o multiplicador de Lagrange  $\rho$  e então nós obtemos a Lagrangiana para primeira iteração como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^i \dot{S}_i + \Omega_1 \dot{\rho} - V^{(1)}, \quad (3.16)$$

com

$$V^{(1)} = V^0 |_{\Omega_1=0} = \frac{1}{2J} \pi_i^2 + \frac{J}{2} (\partial_k S_i)^2. \quad (3.17)$$

As novas coordenadas simpléticas são  $\xi_\alpha^{(1)} = (S_i, \pi_i, \rho)$  com a seguinte um forma canônica do momento,

$$\begin{aligned} a_{S_i}^{(1)} &= \pi^i \\ a_{\pi_i}^{(1)} &= 0, \\ a_{\rho}^{(1)} &= \frac{1}{2} (S_i^2 - 1). \end{aligned} \quad (3.18)$$

O tensor simplético correspondente  $f^{(1)}$  é dado por,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ij} & S^i \\ \delta^{ji} & 0 & 0 \\ -S^j & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (3.19)$$

que é singular e tem um modo zero que gera o novo vínculo,

$$\Omega_2 = \frac{1}{J} S_k \pi^k. \quad (3.20)$$

Introduzindo o vínculo  $\Omega_2$  na Lagrangiana de primeira iteração Eq.(3.16) com um multiplicador de Lagrange  $\zeta$ , a Lagrangiana de segunda iteração é obtida como

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^i \dot{S}_i + \frac{1}{2} (S_i^2 - 1) \dot{\rho} + \frac{1}{J} (S_i \pi^i) \dot{\zeta} - V^{(2)}, \quad (3.21)$$

com  $V^{(2)} = V^{(1)}|_{\Omega_1=0}$ . As coordenadas simpléticas estendidas são  $\xi_\alpha^{(2)} = (S_i, \pi_i, \rho, \zeta)$  e a nova um forma canônica do momento é

$$\begin{aligned} a_{S_i}^{(2)} &= \pi_i \\ a_{\pi_i}^{(2)} &= 0 \\ a_\rho^{(2)} &= \frac{1}{2} S_i^2 - 1, \\ a_\zeta^{(2)} &= \frac{1}{J} S_i \pi^i. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A matriz  $f^{(2)}$  correspondente é

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ij} & S^i & \frac{1}{J} \pi^i \\ \delta^{ji} & 0 & 0 & \frac{1}{J} S^i \\ -S^j & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} \pi^j & -\frac{1}{J} S^j & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (3.23)$$

que é uma matriz não singular. Daqui identificamos imediatamente os parênteses de Dirac dados por

$$\begin{aligned} \{S_i(x), S_j(y)\}^* &= \{\rho(x), \rho(y)\}^* = \{\zeta(x), \zeta(y)\}^* = 0, \\ \{S_i(x), \pi_j(y)\}^* &= \left( \delta_{ij} - \frac{S_i S_j}{S_i^2} \right) \delta(x - y), \\ \{\pi_i(x), \pi_j(y)\}^* &= \frac{(S_i \pi_j - S_j \pi_i)}{S_i^2} \delta(x - y). \\ \{S_i(x), \rho(y)\}^* &= -\frac{S_i}{S_i^2} \delta(x - y), \\ \{\pi_i(x), \rho(y)\}^* &= \frac{\pi_i}{S_i^2} \delta(x - y), \\ \{\pi_i(x), \zeta(y)\}^* &= -\frac{J S_i}{S_i^2} \delta(x - y), \end{aligned} \quad (3.24)$$

que são os mesmos obtidos anteriormente para as variáveis  $S_i$  e  $\pi_i$ .

Isto significa que, em princípio, este modelo não apresenta simetria de calibre.

### 3.3 Obtenção dos Parênteses de Dirac do Modelo de Heisenberg Anisotrópico *via* Formalismo de Dirac.

Tomando a Lagrangiana do modelo de Heisenberg anisotrópico em  $z$

$$L = \frac{1}{2}J \int d^2x (\partial_0 S_i)^2 - \sum_i (\partial_\mu S_i)^2 + \Lambda (\partial_\mu S_z)^2 \quad (3.25)$$

Que pode ser reescrita como:

$$L = \frac{1}{2}J \int d^2x \left\{ \sum_i [(\dot{S}_i - (\partial_\mu S_i)^2)] + \Lambda (\partial_\mu S_z)^2 \right\} \quad (3.26)$$

Para obtermos a hamiltoniana, devemos calcular os momentos conjugados  $\pi_i$

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}_i} = J \dot{S}_i$$

Portanto:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^2x \sum_i \left[ \pi_i \frac{\pi_i}{J} - \frac{1}{2J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 + \Lambda (\partial_\mu S_i)^2 \right] \\ &= \int d^2x \sum_i \left[ \frac{1}{J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 + \Lambda (\partial_\mu S_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

adicionando o vínculo  $S_i S_i - 1 = 0$  na Eq.(3.27)

$$H = \int d^2x \sum_i \left[ \frac{1}{J} \pi_i \pi_i + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_i)^2 + \Lambda (\partial_\mu S_i)^2 + \lambda (S_i S_i - 1) \right] \quad (3.28)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

Usando a condição de consistência de que o vínculo,  $\Omega_1 = S_i S_i - 1$ , seja conservado no tempo, isto é,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \{\Omega_1, H\} \approx 0 \\ &= \int d^2y \sum_i \frac{1}{J} \{S_i S_i - 1, \pi_i \pi_i\} = \int d^2y \sum_i [2S_i \frac{1}{J} 2\pi_i \delta(x-y)] \approx 0 \\ &= \frac{4}{J} S_i \pi_i \approx 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos definir  $\Omega_2 = S_i \pi_i$

Para  $\Omega_2$ , teremos:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= \{\Omega_2, H\} = \int d^2y \sum_i \left\{ S_i \pi_i, \frac{1}{J} \pi_j \pi_j + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_j)^2 + \frac{J}{2} \Lambda (\partial_\mu S_z)^2 + \lambda (S_j S_j - 1) \right\} \approx 0 \\ &= \int d^2y \sum_i \left[ \pi_i \frac{2}{J} \pi_i + S_i \frac{J}{2} \frac{\partial}{\partial S_i} \left( \frac{\partial S_i}{\partial x^\mu} \right)^2 + \Lambda S_i \frac{J}{2} \frac{\partial}{\partial S_z} \left( \frac{\partial S_z}{\partial x^\mu} \right) + S_i \lambda 2S_i \right] \delta(x-y) \\ &= \sum_i \frac{2}{J} \pi_i \pi_i + (1 + \Lambda) \frac{J}{2} S_i \partial_\mu S_i + 2\lambda S_i S_i \approx 0 \end{aligned}$$

que não representa um novo vínculo. Assim,

$$\begin{aligned}\{\Omega_1, \Omega_2\} &= \{S_i S_i - 1, S_j \pi_j\} = S_i \{S_i, S_j \pi_j\} + \{S_i, S_j \pi_j\} \\ &= S_i S_j \{S_i, \pi_j\} + S_j \{S_i, \pi_j\} S_i = 2S_i S_j \delta^2(\vec{x} - \vec{y})\end{aligned}\quad (3.29)$$

Logo, a matriz  $C$  terá a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} S_i^2 \delta(x - y) \quad (3.30)$$

cuja inversa é dada por

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} S_i^{-2} \delta(x - y) \quad (3.31)$$

Então,

$$\{S_i, S_j\}_D = \{S_i, S_j\} - \{S_i, \Omega_1\} C_{12}^{-1} \{\Omega_2, S_j\} - \{S_i, \Omega_2\} C_{21}^{-1} \{\Omega_1, S_j\} = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}\{S_i, \pi_j\}_D &= \{S_i, \pi_j\} - \{S_i, \Omega_1\} C_{12}^{-1} \{\Omega_2, \pi_j\} - \{S_i, \Omega_2\} C_{21}^{-1} \{\Omega_1, \pi_j\} \\ &= \delta_{ij} \delta(x - y) - S_R \delta_{Ri} (1/2) S_i^{-2} \delta(x - y) 2S_m \delta_{jm} \\ &= \left( \delta_{ij} - \frac{S_i S_j}{S_i^2} \right) \delta(x - y)\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}\{\pi_i, \pi_j\}_D &= \{\pi_i, \pi_j\} - \{\pi_i, \Omega_1\} C_{12}^{-1} \{\Omega_2, \pi_j\} - \{\pi_i, \Omega_2\} C_{21}^{-1} \{\Omega_1, \pi_j\} \\ &= -2S_k \delta_{ki} (-1/2) S_i^{-2} \delta(x - y) \delta_{jm} \pi_m - \delta_{ki} \pi_k (1/2) S_i^{-2} \delta(x - y) 2S_m \delta_{ij} \\ &= \frac{S_i \pi_j - \pi_i S_j}{S_i^2} \delta(x - y)\end{aligned}\quad (3.34)$$

# Capítulo 4

## Cálculo Funcional

### 4.1 Derivada Funcional.

Um espaço funcional é um espaço onde cada ponto é uma função no espaço-tempo. Ou seja, cada ponto no espaço funcional é um mapeamento do espaço-tempo no conjunto dos números reais ou complexos. Para nossos propósitos um funcional será um escalar, um espinor ou um vetor no espaço-tempo. Um ponto particular num espaço funcional será o mapeamento dos pontos do espaço-tempo nos escalares, espinores ou nos vetores. [23]

Um mapeamento dos pontos do espaço das funções nos números é chamado funcional. Assim sendo, um funcional associa um número com cada função do espaço-tempo. Por exemplo, seja  $a$  um ponto no espaço funcional,  $\mathcal{A}$ .  $a$  é um escalar no espaço-tempo,  $a = a(x) \in \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Seja  $F$  um funcional em  $\mathcal{A}$ , logo,  $F$  leva pontos de  $\mathcal{A}$  nos números. Denotaremos o uso dos funcionais de  $F$  por colchetes,  $F = F[a] \in \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Um exemplo simples de um funcional é  $F[a] = \int a(x)dx$ .

Quando nos movemos de ponto a outro no espaço-tempo, os valores de um funcional,  $F[a]$ , devem mudar. A taxa de variação de  $F$  com respeito a variação no funcional  $a$  é expressa como a derivada funcional de  $F$ ,  $\frac{\delta F}{\delta a}$ . A derivada funcional de  $F$  é formalmente definida como

$$\frac{\delta F[a]}{\delta a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[a + \epsilon \delta] - F[a]}{\epsilon} \quad (4.1)$$

em que  $\delta$  é a distribuição delta de Dirac. Da mesma forma, podemos definir a derivada funcional direcional, na direção de uma função  $\eta(x)$  como

$$\frac{\delta_\eta F[a]}{\delta_\eta a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[a + \epsilon \eta] - F[a]}{\epsilon} \quad (4.2)$$

A derivada funcional ordinária, definida na Eq.(4.1), é a derivada direcional na direção da função  $\delta$ .

Sempre podemos incluir explicitamente a dependência do espaço-tempo quando escrevemos a derivada funcional. Assim, com  $\frac{\delta F[a]}{\delta a(x)}$  estamos querendo dizer que a mudança em  $F$

com respeito a mudança do funcional  $a$  somente no ponto  $x$ . Formalmente,

$$\frac{\delta F[a]}{\delta a(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\tilde{a}] - F[a]}{\epsilon} \quad (4.3)$$

em que  $\tilde{a}$  é a função obtida da adição de  $a$  e  $\epsilon$  somente no ponto  $x$  em que  $\tilde{a} = a + \epsilon$ . Se tomarmos  $F[a] = \int a(z)\delta(z - y)dz = a(y)$ , então,  $F[\tilde{a}] = \int (a(z) + \epsilon\delta(x - z))\delta(z - y)dz$ . Da definição (4.3) ou (4.1), vemos que

$$\frac{\delta a(y)}{\delta a(x)} = \delta(x - y) \quad (4.4)$$

evidentemente, a Eq.(4.2) implica que

$$\frac{\delta_\eta a(y)}{\delta_\eta a(x)} = \eta\delta(x - y) \quad (4.5)$$

O formalismo da derivada funcional, Eq.(4.4), pode ser usado para calcular as equações de movimento, a partir da ação, sem mencionar explicitamente a equação de Euler-Lagrange.

## 4.2 Equação Diferencial Funcional.

Na representação de Schrödinger da teoria de campo, a equação de Schrödinger funcional, que é uma equação envolvendo a função de onda do estado quântico. Como demonstrado na seção anterior, já tratamos de equações diferenciais funcionais quando calculamos as equações de movimento para os campos. Para o campo  $a(x)$ , as equações de campo são

$$\frac{\delta S[a]}{\delta a(x)} = 0 \quad (4.6)$$

em que  $S[a]$  é o funcional da ação. A forma do funcional da ação é conhecida e a Eq.(4.6) estabelece que as soluções de campos clássicos são os pontos críticos do funcional  $S[a]$  no espaço funcional  $\mathcal{A}$ .

A mecânica quântica requer uma filosofia diferente em relação ao que nós queremos de uma equação diferencial funcional. No caso clássico visto anteriormente, a forma do funcional é conhecida e nós estamos buscando pontos isolados no espaço dos funcionais. No caso quântico, a forma do funcional é desconhecida e o objetivo é resolver a equação diferencial funcional. Nós não estamos interessados em pontos particulares do espaço funcional.

Uma equação diferencial funcional pode ser pensada como um conjunto de infinitas equações diferenciais acopladas ou de uma equação diferencial parcial num espaço infinito-dimensional. Resolveremos algumas equações para mostrar a complexidade e a liberdade na escolha da solução.

Podemos pedir emprestado uma técnica das equações diferenciais parciais e tentar uma separação de variáveis num espaço infinito. Isto funciona para equações lineares em que as soluções são exponenciais. Por exemplo, considere uma equação diferencial funcional,

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} F[a] = -\mu F[a] \quad (4.7)$$

O lado esquerdo é a soma de operadores diferenciais não acoplados, para cada  $y$  do espaço-tempo. Portanto, podemos escrever o funcional como um produto infinito, um fator para cada “componente” de  $a$ . Para um ponto  $x$ , fixo no espaço-tempo, por exemplo,  $z = a(x)$ . Então, cada fator deverá satisfazer

$$\frac{d}{dz} \mathcal{F}(z) = -f \mathcal{F}(z)$$

com isso,  $\mathcal{F}(z) = \exp(-fz)$ , assim,

$$\begin{aligned} F[a] &= \eta \prod_x \exp(-f(x)a(x)) \\ &= \eta \exp\left(-\sum_x f(x)a(x)\right) \\ &= \eta \exp\left(-\int dx f(x)a(x)\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

para satisfazer a Eq.(4.7), a função arbitrária  $f(x)$  deve obedecer

$$\mu = \int dx f(x) \quad (4.9)$$

A normalização,  $\eta$ , é determinada pelas condições iniciais ou de contorno colocadas sobre  $F$ . Por exemplo, se  $F[\tilde{a}] = 1$  em que  $\tilde{a}$  é uma função constante,  $\tilde{a}(x) = 1$ , então,  $\eta = \exp(\mu)$ . Similarmente,

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} \frac{\delta}{\delta a(y)} F[a] = -\mu F[a] \quad (4.10)$$

é satisfeita pelo seguinte funcional

$$F[a] = \eta \exp\left(\pm \int dx f(x)a(x)\right) \quad (4.11)$$

em que a função arbitrária agora satisfaz  $\mu = \int dx f^2(x)$ . Como a função arbitrária  $f(x)$  é dependente numa equação diferencial. Por exemplo, considere

$$\int dy \left( \frac{\delta}{\delta a(y)} \frac{\delta}{\delta a(y)} - b(y) \right) F[a] = \mu F[a] \quad (4.12)$$

esta equação é satisfeita por

$$F[a] = \eta \exp\left(\pm \int dx \sqrt{b(x)} a(x)\right) \quad (4.13)$$

Podemos complicar e arruinar a separação de variáveis acoplando funções de diferentes pontos. Considere a adição de um “potencial” a Eq.(4.10)

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} \frac{\delta}{\delta a(y)} F[a] + \int dx dy f(x, y) a(x) a(y) F[a] = \mu F[a] \quad (4.14)$$

O segundo termo do lado esquerdo acopla  $a$  num ponto com  $a$  em outro ponto. O acoplamento é dado por  $f(x, y)$ . Assumindo que  $f(x, y)$  é simétrica em  $x$  e  $y$ . Nós encontramos equações similares a esta em teoria de campos. Em geral, desde que  $F[a]$  apareça em todos os termos, nós podemos substituir

$$F[a] = \eta \exp(G[a]) \quad (4.15)$$

e resolver a equação resultante para  $G[a]$ .

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} \frac{\delta}{\delta a(y)} G[a] + \left( \frac{\delta}{\delta a(y)} G[a] \right)^2 = \mu - \int dx dy f(x, y) a(x) a(y) \quad (4.16)$$

Para prosseguirmos, notamos que o primeiro termo acima,  $\frac{\delta^2}{\delta a(y)^2} G[a]$ , remove 2 fatores de  $a(y)$  de  $G[a]$ , enquanto o segundo remove um fator e eleva ao quadrado o resultado. O lado direito é o funcional conhecido  $\mu - \int dx dy f(x, y) a(x) a(y)$  que deve ser igual ao lado esquerdo. A hipótese mais simples é tomar um funcional quadrático em  $a$ . Dessa forma, a segunda derivada será uma constante que nós podemos igualar com  $\mu$ , enquanto que a derivada elevada ao quadrado, ainda será quadrática em  $a$  e será igualada a  $f(x, y) a(x) a(y)$ . Com isso, podemos escrever  $G[a]$  como um funcional quadrático geral.

$$G[a] = \int dx dy g(x, y) a(x) a(y) \quad (4.17)$$

$G[a]$  será a solução desde que a simetria de  $g(x, y)$  satisfaça

$$\begin{aligned} \mu &= \int dy g(y, y) \\ f(x, y) &= \int dz g(x, z) g(y, z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

A técnica de contagem de potências usada acima pode ser explorada em situações nas quais o número de derivadas de um funcional desconhecido aparece de um lado, enquanto um funcional conhecido, que é polinomial em  $a$ , aparece no outro lado. Como outro exemplo, considere a equação

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} \frac{\delta}{\delta a(y)} F[a] = \mu G[a] \quad (4.19)$$

em que

$$G[a] = \int dx f(x) a(x)$$

A derivada dupla no lado esquerdo remove dois fatores em  $a$  de  $F[a]$ . O funcional da direita contém um único fator de  $a$ . Um fator em  $a$  deve permanecer em  $F[a]$  após a remoção dos dois, então  $F[a]$  deve ser cúbico em  $a$ . Nós podemos tentar

$$F[a] = \int dx f(x) a^3(x)$$

mas encontraríamos divergências quando aplicada na Eq.(4.19). Em particular, a segunda derivada com respeito a  $a(y)$  deve ser  $\delta(0)$ . Em geral, para evitar divergências, nós devemos “espalhar” os três fatores de  $a$  e escrever

$$F[a] = \int dx f(x, y, z) a(x) a(y) a(z) \quad (4.20)$$

Aplicando a Eq.(4.19), encontramos que  $f(x, y, z)$  deve satisfazer

$$\mu g(x) = 2 \int dy (f(y, y, z) + (fy, x, y) + f(x, y, y)) \quad (4.21)$$

Embora esta equação diferencial funcional pareça fácil de ser resolvida, não é simples encontrarmos uma  $f(x, y, z)$  que satisfaça a equação integral (4.21) para uma dada  $g(x)$ .

Até agora, as funções arbitrárias,  $f$ , que aparecem nas soluções das equações diferenciais funcionais satisfazem equações integrais. Nós podemos mudar isso, complicando a equação diferencial funcional, com a adição de operadores diferenciais no espaço-tempo. Por exemplo, consideremos uma pequena variação da Eq.(4.19)

$$\int dy \frac{\delta}{\delta a(y)} (\partial_y^2) \frac{\delta}{\delta a(y)} F[a] = \mu \int dx g(x) a(x) \quad (4.22)$$

Usando a mesma técnica de contagem de potências temos que a Eq.(4.20) será solução se  $f(x, y, z)$  satisfizer à seguinte equação diferencial-integral

$$\mu g(z) = \int dy \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, t, z)|_{t=y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, z, t)|_{t=y} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t, z, y)|_{t=y} \quad (4.23)$$

Notemos que para evitar divergências, não devemos colocar mais do que um fator de  $a(z)$ , no mesmo ponto do espaço-tempo, no funcional. No entanto, a teoria de campo antes de ordenação normal e renormalização está repleta de divergências, talvez por isso, funcionais com divergências e fatores coincidentes de  $a$  não sejam tão ruins ou inevitáveis. Por exemplo, considere novamente a Eq.(4.14) e assumindo que  $f(x, y)$  é diagonal, ou seja, que  $f(x, y) = h(x)\delta(x - y)$ . De fato, esta situação aparece em teoria de campo. Para satisfazer a Eq.(4.18),  $g(x, y)$  também deve divergir. A divergência é  $\delta(0)$  que pode ser interpretada como o volume do sistema.

Tendo 2 fatores de  $a(x)$  num funcional, não necessariamente teremos divergências. Suponha que  $a$  é, neste caso, um vetor funcional,  $\vec{a}(\vec{x})$ . Uma solução desta equação

$$\vec{a}(\vec{y}) \times \frac{\delta}{\delta \vec{a}(\vec{y})} F[a] = 0 \quad (4.24)$$

é

$$F[a] = \int d^3x \vec{a}(\vec{x}) \cdot \vec{a}(\vec{x}) \quad (4.25)$$

### 4.3 Integral Funcional.

Integrais funcionais são integrais de funcionais no espaço das funções e, em geral, não são bem definidas. Existem apenas dois tipos que podem ser resolvidos exatamente.

O primeiro tipo que podemos integrar exatamente é o funcional- $\delta$ ,  $\delta[a - \xi]$ . De fato,

$$\int \mathcal{D}a \delta[a - \xi] = 1 \quad (4.26)$$

o símbolo  $\mathcal{D}$  para a medida acima indica que é a integral sobre o espaço funcional contendo  $a(\vec{x})$ . Podemos pensar que  $\mathcal{D}a$  é definido como o produto infinito

$$\mathcal{D}a = \prod_{\vec{x}} da(\vec{x}) \quad (4.27)$$

O funcional- $\delta$  pode ser considerado como o produto infinito

$$\delta[a - \xi] = \prod_{\vec{x}} \delta(a(\vec{x}) - \xi(\vec{x})) \quad (4.28)$$

com isso, a integral na Eq.(4.26) é um produto infinito de integrais independentes, uma para cada  $\vec{x}$ . Usando o mesmo raciocínio, podemos se ver que se  $F[a]$  é um funcional arbitrário, então

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}a F[a] \delta[a - \xi] &\approx \int \prod_{\vec{x}} \delta(a(\vec{x}) - \xi(\vec{x})) F[a] \\ &= \prod_{\vec{x}} \int da(\vec{x}) \delta(a(\vec{x}) - \xi(\vec{x})) F[a] \\ &= F[\xi] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Algumas vezes é proveitoso pensar que as funções, tais como  $a(\vec{x})$ , são vetores coluna infinito-dimensional, em que  $x$  faz o papel de um índice. Sob esse ponto de vista, a integral funcional surge como um limite infinito-dimensional de uma integral ordinária finito-dimensional.

O segundo tipo de funcionais que podem ser integrados exatamente são os funcionais Gaussianos. Consideremos

$$\int \mathcal{D}a e^{-F[a]}$$

em que

$$F[a] = \int dx a^2(x) \quad (4.30)$$

Como no caso funcional- $\delta$ , nós podemos resolver essa integral exatamente porque ela pode ser fatorada em um produto de infinitas integrais Gaussianas. Para resolver esta integral usaremos o resultado conhecido que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (4.31)$$

Nós temos,

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}a e^{-\int dx a^2(x)} &\rightarrow \int \prod_x da(x) e^{-\sum_x a^2(x)} \\
&= \int \prod_x da(x) \prod_x e^{-a^2(x)} \\
&= \prod_x \int da(x) e^{-a^2(x)} \\
&= \prod_x \sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

que é divergente. Seguindo os mesmos passos anteriores, temos

$$\int \mathcal{D}a e^{-\int dx \alpha a^2(x)} = \prod_x \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{4.33}$$

ou, no caso mais geral,

$$\int \mathcal{D}a e^{-\int dx f(x) a^2(x)} = \prod_x \sqrt{\frac{\pi}{f(x)}} \tag{4.34}$$

Se tomarmos que  $a(x)$  é um vetor infinito-dimensional, então, devemos tomar  $f(x)$  como uma matriz diagonal infinito-dimensional,

$$f(x, y) = f(x)\delta(x - y)$$

$f(x)$  representa os elementos diagonais da matriz diagonal. Eles são os autovalores da matriz. O produto dos autovalores é o determinante da matriz, logo

$$\prod_x \sqrt{\frac{\pi}{f(x)}} \rightarrow (\sqrt{\pi})^\infty \prod_x \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det f}} = (\det f)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f}{\pi}\right)$$

assim,

$$\int \mathcal{D}a e^{-\int dx f(x) a^2(x)} = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det f}} = (\det f)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f}{\pi}\right) \tag{4.35}$$

De certo modo, nós obtemos a Eq.(4.35), por tomar, audaciosamente, um limite infinito-dimensional de um resultado finito-dimensional. O número potencialmente infinito no numerador, é absorvido ou cancelado pela normalização. Em última análise, nós efetivamente temos que definir a integral do funcional Gaussiano como tendo determinante com potência  $-\frac{1}{2}$  do operador, posta entre dois fatores de  $a(x)$ .

Se o operador não for diagonal, o resultado permanece o mesmo.

$$\int \mathcal{D}a e^{-\int dx dy a(x)g(x,y)a(y)} = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}} \tag{4.36}$$

Nós podemos justificar esse resultado considerando o caso finito-dimensional e tomando o limite simples.

# Capítulo 5

## A Equação de Schrödinger Funcional

O modelo de Heisenberg isotrópico  $2D$ , é descrito pelo modelo sigma não-linear  $O(3)$  [14]<sup>1</sup> é dado pela seguinte lagrangiana

$$\begin{aligned} L &= \frac{J}{2} \int d^2x \partial_\mu S^a \partial^\mu S^a \\ &= \frac{J}{2} \int d^2x [(\partial_0 S^a)^2 - (\partial_i S^a)^2], \end{aligned} \quad (5.1)$$

com o vínculo

$$\Omega_1 = S^a S^a - 1. \quad (5.2)$$

Aqui,  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $a$  são os índices relacionados a simetria do grupo  $O(3)$ , a métrica tem a seguinte assinatura  $(+, -, -)$  e nós estamos utilizando a convenção de que índices repetidos indicam soma.

Começaremos impondo o vínculo  $\Omega_1$ , Eq.(5.2). Em vista disso, nós escreveremos um dos campos, por exemplo,  $S^3$ , em termos dos outros campos  $S^1$  e  $S^2$ ,

$$S^3 = \sqrt{1 - S^i S^i}, \quad (5.3)$$

em que  $i = 1, 2$ . Da Eq.(5.3), nós obtemos

$$\partial_\mu S^3 = -\frac{S^i \partial_\mu S^i}{\sqrt{1 - S^i S^i}}. \quad (5.4)$$

Introduzindo as Eqs. (5.3) e (5.4) na Eq.(5.1), nós temos um modelo descrito em termos dos campos  $S^1$  e  $S^2$

$$L = \frac{J}{2} \int d^2x g_{ij} \partial_\mu S^i \partial^\mu S^j, \quad (5.5)$$

em que

---

<sup>1</sup>Neste trabalho foi obtida a Equação de Schrödinger Funcional para o modelo sigma não-linear.

$$g_{ij} = \frac{S_i S_j}{1 - S^i S^i}. \quad (5.6)$$

Agora, construiremos a hamiltoniana do modelo para posterior quantização. Para isso, tomemos os momentos

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}^i}. \quad (5.7)$$

Então, teremos

$$\pi_i = J g_{ij} \dot{S}^j. \quad (5.8)$$

Para escrever a hamiltoniana do modelo, nós devemos saber como se inverte a Eq.(5.8), de modo que seja possível escrever as velocidades em termos dos momentos.

O cálculo da inversa de  $g_{ij}$  nos leva a

$$\tilde{g}^{ij} = \delta^{ij} - S^i S^j. \quad (5.9)$$

Portanto,

$$\dot{S}^i = \frac{1}{J} \tilde{g}^{ij} \pi_j. \quad (5.10)$$

A hamiltoniana total do modelo, cuja expressão geral é

$$H = \int d^2x (\pi_i \dot{S}^i - L), \quad (5.11)$$

toma a forma particular,

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \pi_i \pi_j + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \right), \quad (5.12)$$

em que  $\partial_k$  significa a derivada parcial com respeito as coordenadas espaciais.

Note que, por definição,  $(S^i, \pi_j)$  formam um par de variáveis canonicamente conjugadas que têm os parênteses de Poisson usuais,

$$\{S^i(x), \pi_j(y)\} = \delta_j^i \delta^2(x - y). \quad (5.13)$$

Agora nós gostaríamos de escrever a equação de Schrödinger funcional para o modelo de Heisenberg isotrópico  $2D$ . Assim, introduziremos o funcional de onda  $\Psi[S^i, t]$  e iremos considerar  $S^i$  e  $\pi_i$  operadores. Isso significa que na representação dos campos os momentos são substituídos pelas seguintes derivadas funcionais

$$\pi(x) \longrightarrow -i \frac{\delta}{\delta S^i(x)}, \quad (5.14)$$

onde nós temos  $\hbar = 1$ .

O funcional de onda  $\Psi$  satisfaz à equação de Schrödinger funcional

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi[S^i, t] = \hat{H}[S^i, t] \Psi[S^i, t], \quad (5.15)$$

onde  $\hat{H}$  é a versão operatorial de  $H$ , Eq.(5.12).

É importante observar que se  $\tilde{g}^{ij}$  depende dos campos, o termo cinético na Hamiltoniano  $H$ , Eq.(5.12), desenvolverá fatores de ordenamento ambíguos sobre a quantização. Para resolver esse problema, temos que escolher um fator de ordenamento particular. Sendo assim, devemos escrever todas as funções dos campos à esquerda dos operadores momento. Justificamos essa escolha observando que no estudo do modelo de primeira classe vinculado, o ordenamento é consistente com a versão operatorial da álgebra clássica de vínculos e também do Hamiltoniano de primeira classe, que leva à mesma equação funcional de Schrödinger.

Da Eq.(5.12) e a particular escolha do fator de ordenamento mencionado acima, a equação Schrödinger funcional para o modelo de Heisenberg isotrópico é dada por

$$\int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta S^i \delta S^j} + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \Psi \right) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi. \quad (5.16)$$

Desde que o Hamiltoniano escrito na Eq.(5.12) não dependa explicitamente do tempo, nós podemos separar a dependência temporal do funcional de onda e escrevemos

$$\Psi[S^i, t] = e^{-Et} \Psi[S^i]. \quad (5.17)$$

Da Eq.(5.16), vemos que  $\Psi[S^i]$  satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta S^i \delta S^j} + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \Psi \right) = E \Psi. \quad (5.18)$$

Assim, fica claro que as energias,  $E$ , podem ser encontradas ao resolvermos a equação Eq.(5.18). Como dito anteriormente, esta equação foi obtida no artigo submetido “Hidden symmetries in the two-dimensional isotropic Heisenberg Model”, Gabriel L. Silva et al, em que os autores obtiveram esta mesma equação considerando o sistema como invariante de calibre.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma breve revisão das idéias principais de sistemas vinculados, os quais necessitam de um tratamento diferenciado daqueles sistemas sem vínculos. Isso acontece porque a presença de vínculos pode gerar inconsistências na teoria. A fim de sanar estas inconsistências foram desenvolvidos formalismos para tratar sistemas com vínculos. Aqui, apresentamos o formalismo de Dirac, que é um formalismo hamiltoniano em que os parênteses de Poisson são generalizados, levando aos chamados parênteses de Dirac, que consideram os vínculos na sua construção. O outro formalismo apresentado aqui foi o formalismo simplético, este é um formalismo lagrangiano que modifica o espaço de configuração, com a introdução de variáveis novas, multiplicadores de Lagrange, estes também são os responsáveis por introduzir os vínculos na lagrangiana.

Vimos também o modelo de Heisenberg, a forma de sua hamiltoniana e as anisotropias que podem surgir. No limite contínuo, classicamente falando, vimos que esse modelo tem uma hamiltoniana que apresenta a mesma forma da hamiltoniana do modelo sigma não linear. Dessa forma, pode ser tratado como uma teoria de campos e do ponto de vista de sistemas vinculados. Assim, calculamos os parênteses de Dirac, tanto *via* formalismo de Dirac quanto *via* formalismo Simplético. Em seguida, foi obtida a equação de Schrödinger funcional do modelo. É oportuno comentar aqui, que o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional foi descrito recentemente como uma teoria de calibre <sup>1</sup> e a equação de Schrödinger funcional para a versão invariante de calibre do modelo coincide com a obtida aqui, mostrando a equivalência das duas descrições.

Como perspectiva futura, vamos realizar o mesmo estudo para o caso em que existam anisotropias na hamiltoniana de Heisenberg (aqui chegamos a obter os parênteses de Dirac *via* formalismo de Dirac). Pretendemos realizar a quantização canônica, obtendo os parênteses de Dirac, e também queremos obter a equação de Schrödinger funcional do modelo anisotrópico.

---

<sup>1</sup>Artigo submetido “Hidden symmetries in the two-dimensional isotropic Heisenberg Model”, Gabriel L. Silva et al.

# Referências Bibliográficas

- [1] J.A.Bednorz, K.A.Muller, Z.Phys. B **64** (1986) 189.
- [2] P.W.Anderson, Science —bf 235 (1987) 1196.
- [3] K.L.Taft et al, J.Am.Chem.Soc. **116** (1994) 823;  
J.Van Slageren et al, Chem.Eur.J. **8** (2002) 277.
- [4] B.Pilawa et al, J.Magn.Magn.Mater. **748** (1998) 177-181.  
A.Cornia, A.G.M. Jansen, M.Affonte, Phys. Rev.B **60** (1999) 12177.
- [5] M.E.Gouvêa, G.M.Wysin, S.A.Leonel, A.S.T.Pires, T.Kamppeter, F.G.Mertens,  
Phys.Rev.B, **59(9)** (1999) 6229.
- [6] S.A.Leonel, Amanda Castro Oliveira, B.V.Costa and Pablo Zimmermann Coura,  
J.Magn.Magn.Mater. **305**, (2006) 157-164.
- [7] J.E.R.Costa, B.V.Costa, Phys.Rev.B **54** (1996) 994.
- [8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 257 (1960) 32; P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Press, New York, 1964; P. A. M. Dirac, Can. J. Math. 2 (1950) 129; A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Academia Nazionale dei Lincei, Roma 1976; K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics*, Springer, New York, 1982, vol 169; P. G. Bergmann, Phys. Rev. 75, (1949) 680; P. G. Bergmann, Phys. Rev. 89 (1953) 4; H. J. Rothe and K. Rothe, *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems* World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 81, World Scientific Publishing Co, Singapore, 2010.
- [9] L. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1692.
- [10] J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, Mod. Phys. Lett. A **7** (1992) 1172.  
J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, Int. J. Mod. Phys. A **7** (1992) 4981.
- [11] R. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [12] N. A. Lemos, “Mecânica Analítica”, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007)
- [13] H. Goldstein, “Classical Mechanics”, Addison Wesley, N.Y., 1972

- [14] A. A. Deriglazov, W. Oliveira and G. Oliveira-Neto, *Int. J. Mod. Phys. A* **18** (2003) 755.
- [15] G. Oliveira-Neto, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 24010.
- [16] N.W.Ashcroft, N.D. Mermin, “Solid State Physics, International Edition”, ed. D.G.Crane (Saunders College Publishing, 1976) p.674,679.
- [17] A. Aharoni, “Introduction to the Theory of Eletromagnetism”, (Oxford Science Publications, 1996) p.36.
- [18] S.R.A. Salinas, “Introdução à Física Estatística”, (EDUSP, São Paulo, 1999)
- [19] B. V. Costa, A. R. Pereira A.S.T. Pires, *Phys. Rev. B*, **54**, 3019 (1996)
- [20] L.A.S Mól, A.R. Pereira, W.A. Moura-Melo, *Phys. Lett A*, **319** 114 (2003)
- [21] S.L.Menezes, M.E.Gouvêa, A.S.T. Pires.*Phys. Rev. A* **51** 166, 320 (1992)
- [22] A.R.Pereira, A.S.T. Pires, M.E.Gouvêa, *Phys. Rev B* **51** 16413 (1995)
- [23] B. Hatfield, “Quantum field theory of point particles and string”, *Frontiers in physics*, Addison-Wesley Publi. Co., CA, USA, 1992.