



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelo Cosmológico com gás de partículas relativísticas e formação de estruturas

Flávia Sobreira

Orientador:

Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Julho de 2007

Universidade Federal de Juiz de Fora

Modelo Cosmológico com gás de partículas relativísticas e formação de estruturas

Dissertação de mestrado apresentada ao
Departamento de Física da UFJF como
requisito parcial e obrigatório para a
obtenção do título de mestre em Física.

Aprovada em 13 de julho de 2007.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Martín Makler

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Júlio C. Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

FAT - UERJ

Prof. Dr. Guilherme de Berredo Peixoto

Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedicatória

Dedico à minha família por todo o apoio e carinho. Aos meus pais Jorge e Sttella que são o alicerce da minha vida. Aos meus irmãos Adriano, Débora, Natália e Liliane que são as pessoas mais maravilhosas que conheço. Ao meu irmão Otavio que vive eternamente em meu coração.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos

- A **Deus** pela sua presença em todos os momentos difíceis e alegres na minha vida e por ter me ajudado em mais uma conquista.
- Ao meu orientador Prof. Ilya porque além de ser o idealizador do trabalho teve uma enorme participação na minha formação científica. Agradeço pela sua dedicação em todos os anos que trabalhamos juntos e principalmente pela paciência nos momentos mais estressantes deste trabalho. Muito obrigada por ter acreditado em meu potencial.
- Ao professor Júlio Fabris pela recepção na UFES e pelas discussões sobre Teoria de Perturbação.
- Ao professor Guilherme de Berredo-Peixoto pelos conselhos certos nas horas certas e pelas discussões sobre ciência.
- A toda minha família que é minha fonte de inspiração, meu apoio e incentivo em tudo que faço. Amo vocês.

- A todos meus amigos do mestrado e do doutorado. Posso dizer que construímos parte de nossas histórias juntos, por isso, vocês serão para sempre inesquecíveis. Não posso deixar de mencionar a Adriana, o Ivo e o Leandro que foram meus amigos de sala com os quais me diverti e aprendi muito.
- Ao Sr. Clério e toda sua família pelos anos de carona e pelo carinho e dedicação.
- A todos os professores do departamento de física que direta ou indiretamente participaram da minha formação.
- A toda equipe da pós-graduação, principalmente ao Domingos que sempre esteve disposto a me ajudar com os assuntos burocráticos.
- À CAPES, CNPQ, FAPEMIG e UFJF que foram o suporte financeiro durante esse trabalho.

Resumo

O Modelo do Gás Relativístico Reduzido é uma aproximação para gás ideal relativístico de partículas massivas. Nós construímos a equação de estado que é dada por uma função elementar e, ao mesmo tempo, representa uma excelente aproximação à (complicada) equação de estado baseada na distribuição de Maxwell. O nosso modelo admite solução analítica da equação de Friedmann, inclusive nos casos mais complexos quando o termo cosmológico ou radiação estão presentes. Em todas situações, o gás relativístico comporta-se numa maneira intermediária entre poeira e radiação. Com objetivo de estudar a formação de estruturas, construímos as equações para pequenas perturbações na métrica e na densidade em torno do background homogêneo e isotrópico. No caso extremo de gás de partículas não-relativísticas, o espectro de potência reproduz o resultado padrão de Λ CDM.

Abstract

The Model of the Reduced Gas is a new approximation for relativistic ideal gas of massive particles. We built a state equation that is given by a simple and elementary function and, at the same time, it represents an excellent approximation the (quite complicated) state equation based on the distribution of Maxwell. Our model admits analytical solution of the equation of Friedmann, besides in the most complex cases when the cosmological term or radiation is present. In all situations, the relativistic gas behaves in an intermediate way between dust and radiation. With objective of studying the formation of structures, we built the equations for small perturbations in the metric and in the density around the homogeneous and isotropy background. In the extreme case with gas of no-relativistic particles, the power spectrum reproduces its result pattern of Λ CDM.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	i
Resumo	iv
Abstract	v
Conteúdo	v
Introdução	1
1 Modelo Cosmológico com Gás Relativístico Reduzido	3
1.1 Cosmologia Relativística	5
1.2 Equação de estado	6
1.3 Equação de conservação	8
1.3.1 Dependência do fator de escala	10
1.4 Equação de Friedmann	11
1.4.1 Solução da equação de Friedmann	14
2 Formação de Estruturas com Gás de Partículas Relativísticas	19
2.1 Perturbações Lineares	20
2.2 Dinâmica das perturbações	22
3 Análise do espectro de potência e comparação com dados do LSS	30

3.1	Espectro de potência e Função transferência	30
3.2	Condições iniciais. Normalização com respeito ao modelo Λ CDM	32
3.3	Espectro de potência para o modelo do gás relativístico reduzido	34
	Conclusões	37
A	Background homogêneo e isotrópico	39
A.1	Equação de estado	39
B	Perturbações	42
B.1	Variação do símbolo de Christoffel	42
B.2	Cálculo de f_1	43
	Bibliografia	45

Introdução

A teoria da relatividade geral abriu novos caminhos para a solução dos problemas ligados às propriedades do universo, investigados em escalas cósmicas. Os modelos cosmológicos contemporâneos baseiam-se na idéia de que o universo é essencialmente o mesmo por toda a parte. Em uma escala maior que $100Mpc$, o universo apresenta-se o mesmo em todos os pontos (homogêneo) e em todas as direções (isotrópico). No entanto em pequenas escalas temos um alto grau de inhomogeneidades, isto é, a matéria é desigualmente distribuída em forma de galáxias, clusters de galáxias, etc.

Para entendermos o surgimento dessas inhomogeneidades supomos que em algum instante no universo primordial existiu um pequeno desvio na homogeneidade que se desenvolveu no decorrer do tempo devido à instabilidade gravitacional. Neste trabalho não vamos discutir a origem desses desvios, mas acreditamos que seu início se deu no período da inflação. No entanto, eles foram inicialmente pequenos, o que nos permite estudar sua evolução usando teoria de perturbação linear. A análise linear de perturbações cósmicas no espaço-tempo de background de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é importante para estudos de processos de formação de estruturas. Devemos focar nossa atenção nos detalhes dos processos da instabilidade gravitacional, isto é, de como rapidamente o universo se expande e qual é a matéria existente nele.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 introduzimos o Modelo Cosmológico com Gás Relativístico Reduzido. O Capítulo 2 é dedicado a perturbações

neste modelo. No Capítulo 3 vamos discutir as condições iniciais, a análise de possíveis formações de estruturas e as aproximações que nos permitem comparar nosso modelo com dados observacionais do modelo Λ *CDM*. Finalmente serão formuladas as conclusões.

Capítulo 1

Modelo Cosmológico com Gás Relativístico Reduzido

As investigações teóricas de novos modelos cosmológicos são sustentadas pela nova e precisa medida da taxa da expansão do universo com experimentos de supernovas Ia [1] e também com radiação cósmicas de fundo (CMB)[2]. Os dados obtidos indicam que o universo está principalmente composto por fontes não luminosas, como a matéria escura responsável por 25-30% da densidade de energia global, e a denominada energia escura, responsável por 70-75%.

Vamos considerar o universo preenchido por um gás ideal de partículas massivas relativísticas. Este modelo pode ter uma aplicação interessante. No universo novo, dominado pela radiação, podemos considerar o gás de partículas massivas relativísticas como um modelo constituído de matéria quente, assumimos que as partículas tenham velocidades comparáveis com a velocidade da luz, ou seja, partículas massivas relativísticas com interação desprezível.

A equação de estado para o gás ideal relativístico é conhecida há muito tempo [3]

(podemos achar estes cálculos, e.g., em [4])¹. Veremos que a relação entre pressão e densidade de energia envolve função de Bessel Modificada. Obviamente, esta forma de equação de estado não é muito útil para aplicações cosmológicas. Ao mesmo tempo podemos considerar um simples modelo cosmológico com gás relativístico sem perder o sentido físico. Ao invés de seguirmos com a distribuição de Maxwell, vamos considerar que todas as partículas tenham a mesma energia cinética [5]. O "defeito" da equação de estado com essa simplificação não é significativa, especialmente tratando-se do limite ultra-relativístico quando a dispersão mostra ser muito pequena. Com isso nós chamamos o modelo do gás relativístico com partículas relativísticas de mesma energia cinética de *Gás Relativístico Reduzido* (RRG).

A comparação numérica das duas distribuições é representada graficamente na Fig.1.1. Esta mostra que a diferença não excede mais de 2.5% na região de baixas energias, ficando desprezível para o gás ultra-relativístico. Vamos lembrar que a distribuição de Maxwell também é uma aproximação para a situação real. Por exemplo, quando analisamos a distribuição para as partículas no universo primordial nós desconsideramos as interações entre essas partículas e radiação, e também a presença de partículas de diferentes massas.

O modelo do gás relativístico reduzido tem a equação de estado próximo da distribuição de Maxwell para a energia cinética, mas isto prevê uma vantagem séria para aplicações cosmológicas. Iniciando com a equação de estado do gás reduzido podemos integrar a equação de Friedmann analiticamente, e construir um agradável e simples modelo cosmológico interpolando entre a era dominada pela radiação e a era dominada pela matéria no universo.

¹A versão relativística da distribuição de Maxwell segue para a generalização de Boltzmann *H*-teorema (see, e.g. [16]).

1.1 Cosmologia Relativística

Antes de estudarmos a fundo o Modelo do Gás Relativístico Reduzido vamos introduzir conceitos básicos necessários para a análise da dinâmica do universo para qualquer modelo cosmológico. A princípio consideraremos o universo homogêneo e isotrópico, isso significa que se pode escolher um tempo no universo tal que a cada instante a métrica do espaço seja idêntica em todos os seus pontos e em todas as direções. A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) é responsável para descrever tal homogeneidade espacial e é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dl^2, \quad (1.1)$$

onde o parâmetro $a(t)$ é chamado fator de escala. Se em qualquer instante de tempo fixo o universo é homogêneo e isotrópico, então sua dinâmica se resume na dependência temporal do fator de escala, ou seja, ele que nos fornece informações sobre a evolução temporal do universo em grandes escalas.

A Relatividade Geral nos permite buscar uma interpretação da expansão cosmológica, para isso precisamos das equações responsáveis pela dinâmica do universo, tais equações são:

- *equação de estado*: relaciona a densidade de energia com a pressão. Nos casos comuns esta equação tem forma $P = w\rho$.
- *equação de conservação*: relaciona a densidade de energia com o fator de escala a ,
 $\rho = \rho(a)$;
- *equação de Friedmann*: relaciona o fator de escala com o tempo físico $a = a(t)$.

1.2 Equação de estado

Consideremos uma única partícula relativística com massa de repouso m em uma caixa de volume V . A relação de dispersão tem forma padrão

$$\varepsilon^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4, \quad \text{onde} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.2)$$

Uma consideração elementar mostra que a média da pressão produzida pela partícula nas paredes do recipiente é

$$P = \frac{1}{3V} \cdot \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.3)$$

Para um gás de N partícula em que cada partícula possui energia cinética ε , nós chegamos a seguinte equação de estado

$$P = \frac{\rho}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 \right], \quad \text{onde} \quad \rho = \frac{N\varepsilon}{V} \quad (1.4)$$

é a densidade de energia (ver Apêndice A). Podemos observar que $w = P/\rho$ tende a $1/3$ no limite ultra-relativístico $\varepsilon \rightarrow \infty$ e tende a zero no limite não relativístico $\varepsilon \rightarrow mc^2$. Vamos introduzir as seguintes notações: $\rho_1 = Nmc^2/V_0$ que é a densidade de energia de repouso das partículas no momento inicial e $\rho_d = \rho_d(V) = \rho_1 V_0/V = Nmc^2/V$ que é a densidade que envolve a mudança de volume. Usando estas notações podemos reescrever (1.4) na forma

$$P = \frac{\rho}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_d}{\rho} \right)^2 \right]. \quad (1.5)$$

Para entender melhor a diferença entre a última fórmula e a ”correta”, vamos postular a distribuição para o gás ideal de partículas massivas. A integral estatística para uma única partícula é dada pela expressão

$$Z = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d^3p d^3q = 4\pi m^2 c V \cdot K_2\left(\frac{mc^2}{kT}\right), \quad (1.6)$$

onde K_i é a Função de Bessel Modificada de índice i

$$K_i(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^i \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(i + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-\zeta y} (y^2 - 1)^{i-\frac{1}{2}} dy.$$

A equação de estado para o gás de N partículas pode ser calculada de maneira padrão

$$PV = kT N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T = N kT, \quad (1.7)$$

enquanto a média da energia da partícula é

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon d^3p d^3q = mc^2 \frac{K_3(mc^2/kT)}{K_2(mc^2/kT)} - kT. \quad (1.8)$$

A densidade de energia $\rho = N\bar{\varepsilon}/V$ e a pressão P são relacionadas por uma função implícita como em (1.7) e (1.8).

Nosso propósito é comparar os resultados (1.7) e (1.8) da distribuição de Maxwell para o gás de partículas massivas e a relação correspondente (1.5) para o modelo do gás relativístico reduzido. Nas fórmulas (1.7) e (1.8) a temperatura kT tem o papel de parâmetro e nós estamos interessados na dependência entre P e ρ . Conseqüentemente resolvemos (1.7) com respeito a pressão e substituímos em (1.8)

$$\rho_M(P) = \frac{K_3(\rho_d/P)}{K_2(\rho_d/P)} \rho_d - P, \quad (1.9)$$

onde a subscrição M indica a distribuição de Maxwell.

É fácil ver que o limite não-relativístico ($P \rightarrow 0$) e o limite ultra-relativístico ($P \rightarrow \rho/3$) da última relação são coincidentes com o modelo RRG (1.5). Para comparar as duas expressões numericamente, numa escala intermediária, vamos reescrever (1.5) numa forma similar à (1.9)

$$\rho(P) = \frac{3}{2}P + \sqrt{\frac{9P^2}{4} + \rho_d^2}. \quad (1.10)$$

Depois que assumirmos o valor numérico para ρ_1 ($\rho_1 = 1$), podemos analisar a diferença

$$\delta_\rho = \frac{|\rho - \rho_M|}{\rho_M} \quad \text{em função de } P.$$

O gráfico desta dependência é apresentado na figura 1.1. Podemos notar que a aparente divergência δ_ρ alcança seu máximo de 2.5 % na região não-relativística e se torna completamente desprezível na região de energia mais alta.

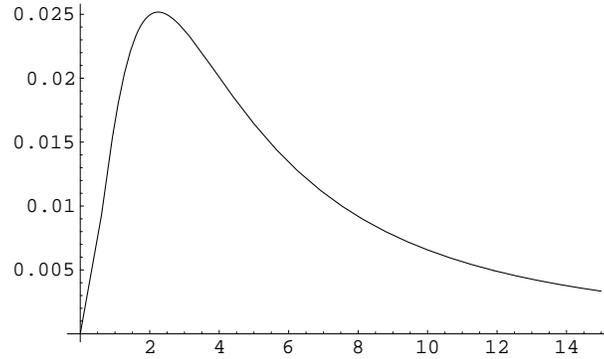


Figura 1.1: Gráfico de δ_ρ para o caso de $\rho_1 = 1$. A discrepância máxima é de aproximadamente 2.5% .

Podemos concluir que o modelo do gás relativístico reduzido é uma excelente aproximação para gás ideal relativístico.

1.3 Equação de conservação

Quando procuramos soluções das Equações de Einstein não estamos interessados em soluções de vácuo, pois supomos que o fluido cósmico formado pelos grupos de galáxias preenche todo o espaço. Sabemos que os fluidos perfeitos são isotrópicos no seu referencial próprio, portanto escolhemos um modelo para a matéria e energia do universo como sendo um fluido perfeito. O tensor $T_{\mu\nu}$ de um fluido perfeito depende de duas grandezas físicas:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p\eta_{\mu\nu} \quad , \quad (1.11)$$

ρ e p que são respectivamente, a densidade de massa-energia e a pressão (isotrópica) medidas por um observador comovente com o fluido. Na equação (1.11) também temos U^μ que é o 4-vetor velocidade do fluido e portanto do observador e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ que é a métrica de Minkowski. O 4-vetor velocidade destes observadores têm componentes

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (1.12)$$

então o tensor momento-energia assume a forma

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (1.13)$$

As Equações de Einstein foram construídas de forma a garantir a conservação local de massa e energia. Podemos calcular diretamente a equação de conservação usando a divergência do tensor momento energia

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = (T_\nu^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (1.14)$$

A equação anterior inclui a derivada covariante de um tensor misto de rank 2

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0, \quad (1.15)$$

então podemos imediatamente argumentar que

$$\partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0. \quad (1.16)$$

A grandeza $\Gamma_{\beta\theta}^\alpha$ é chamada símbolo de Christoffel, e é dada por:

$$\Gamma_{\tau\beta}^\alpha = \frac{g^{\alpha\theta}}{2} \left(\partial_\tau g_{\beta\theta} + \partial_\beta g_{\tau\theta} - \partial_\theta g_{\beta\tau} \right), \quad (1.17)$$

onde a métrica $g_{\mu\nu}$ corresponde ao background homogêneo e isotrópico.

Fazendo $\nu = 0$ na equação (1.16),

$$\partial_\mu T_0^\mu = -\Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_0^\alpha + \Gamma_{0\mu}^\alpha T_\alpha^\mu, \quad (1.18)$$

obtemos a equação que nos garante a conservação da energia contida em todo o universo

$$\begin{aligned} \partial_0 T_0^0 &= \Gamma_{00}^0 T_0^0 + \Gamma_{10}^1 T_1^1 + \Gamma_{20}^2 T_2^2 + \Gamma_{33}^3 T_3^3 - \\ &- \Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{01}^1 T_0^0 - \Gamma_{02}^2 T_0^0 - \Gamma_{03}^3 T_0^0 = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como sabemos $\partial_0 T_0^0 = \partial_t \rho$, logo

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \quad (1.20)$$

mas $\dot{a} = da/dt$ então

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3}{a}(\rho + p). \quad (1.21)$$

A eq. (1.21) é chamada equação de conservação, ela é muito importante em cosmologia pois relaciona a densidade de energia ρ com o fator de escala a , $\rho = \rho(a)$.

1.3.1 Dependência do fator de escala

Vamos usar a equação de estado para o gás reduzido relativístico e achar como a densidade de energia depende do tamanho da caixa quando ela é expandida. Para este fim nós substituímos a equação (1.5) dentro da lei de Conservação

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3}{a}(\rho + p). \quad (1.22)$$

Na cosmologia a última equação implica que o gás reduzido não troca energia com outras entidades como radiação (no caso do universo primordial).

Desde que $(a/a_0)^3 = V/V_0$, a equação diferencial (1.22) pode ser facilmente resolvida

$$\rho(a) = \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}, \quad (1.23)$$

onde as condições iniciais são definidas como

$$\rho(a_0) = [\rho_1^2 + \rho_2^2]^{1/2}.$$

Relembre que ρ_1 é a densidade de energia de repouso, conseqüentemente a segunda componente ρ_2 pode ser interpretada como a densidade de energia de radiação do gás relativístico reduzido. Porém a densidade de energia total não é uma simples soma dessas duas densidades de energia, mas sim a raiz quadrada de seus quadrados. Os limites não-relativísticos ou ultra-relativísticos são alcançados quando, respectivamente $\rho_2 = 0$ ou $\rho_1 = 0$. É fácil ver que a expressão (1.23) prevê corretamente estes dois casos. A densidade de massa de repouso comporta-se como $\rho_d(a) = \rho_1(a_0/a)^3$. Sabemos que $w = P/\rho$, de acordo com a equação (1.5) isso conduz a

$$w = \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho(a)} \right)^2 \cdot \frac{a_0^6}{a^6} \right]. \quad (1.24)$$

As relações (1.5) e (1.24) prediz que no limite $a \rightarrow 0$ temos $w \approx 1/3$ (radiação) e no limite $a \rightarrow \infty$ temos $w \approx 0$ (poeira), conseqüentemente nosso modelo de gás relativístico reduzido pode ser considerado como uma interpolação entre o modelo de radiação dominante e matéria dominante. Se o universo fosse, no início, preenchido por gás ideal quente de partículas massivas, não haveria reações nucleares e o comportamento da densidade de energia seria próximo à (1.23).

1.4 Equação de Friedmann

Como temos visto a métrica de FRW (1.1) é puramente uma conseqüência da homogeneidade e isotropia da parte espacial do universo. Nosso objetivo é derivar as

equações de Einstein para esta métrica e analisar em forma de equações diferenciais a expansão do universo governada pelo fator de escala $a(t)$. As equações de Einstein são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad , \quad (1.25)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia.

Para obter a equação de Friedmann temos que calcular, de acordo com a equação (1.25), as componentes do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) e o escalar de curvatura (R). O tensor de Ricci tem forma geral:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\tau \Gamma_{\mu\nu}^\tau + \partial_\nu \Gamma_{\mu\tau}^\tau + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\tau}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\tau \quad . \quad (1.26)$$

Vamos usar índices romanos (i, j, k, \dots) para denotar o espaço Euclidiano tridimensional e índices gregos ($\beta, \alpha, \tau, \dots$) para denotar o espaço-tempo quadridimensional. De acordo com a equação (1.26) temos:

$$R_{00} = \partial_l \Gamma_{00}^l + \partial_0 \Gamma_{0l}^l + \Gamma_{00}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{0m}^l \quad ,$$

$$R_{00} = \partial_t (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \quad ,$$

o que nos fornece

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad . \quad (1.27)$$

Da mesma maneira temos R_{11} dado por

$$R_{11} = \partial_k \Gamma_{11}^k + \partial_1 \Gamma_{1k}^k + \Gamma_{11}^k \Gamma_{km}^m - \Gamma_{1k}^m \Gamma_{1m}^k \quad ,$$

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) +$$

$$+ \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 - 2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \quad ,$$

o que nos fornece

$$R_{11} = \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)}{1 - kr^2}. \quad (1.28)$$

Realizando os mesmos cálculos para R_{22} e R_{33} obtemos:

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k) \quad \text{e} \quad (1.29)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k) \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (1.30)$$

Usando a definição do escalar de curvatura $R = R^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ temos:

$$R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k),$$

onde acabamos com

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a} + k). \quad (1.31)$$

Agora fica fácil calcular as componentes do tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

Quando calculamos G_{00} temos

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \quad (1.32)$$

e para índices espaciais

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

De acordo com as eqs. (1.25) e (1.32), $G_{00} = 8\pi G T_{00}$, o que nos leva ao resultado esperado

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) &= 8\pi G \rho, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8}{3}\pi G \rho. \end{aligned} \quad (1.33)$$

A eq. (1.33) é conhecida como *Equação de Friedmann* e nos fornece a relação entre o fator de escala a e o tempo físico t , $a = a(t)$.

1.4.1 Solução da equação de Friedmann

Considere o modelo cosmológico do universo preenchido com gás reduzido (1.23), por causa da generalidade, vamos iniciar formulando a equação de Friedmann para um parâmetro arbitrário k e também incluir a densidade de energia de vácuo $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ e radiação com densidade de energia $\rho_r(a) = \rho_{r0}/a^4$. Em todas considerações abaixo nós fixaremos $a_0 = 1$. A equação de interesse tem forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho(a) + \rho_\Lambda + \rho_r(a) \right], \quad (1.34)$$

onde $\rho(a)$ é dado por (1.23).

Modelo com gás relativístico reduzido puro

Como primeiro exemplo, vamos integrar a eq.(1.34) para o modelo com gás reduzido puro onde $\rho_\Lambda = \rho_r = 0$. A curvatura não é relevante em nossos cálculos, assim faremos $k = 0$. Depois de introduzirmos uma nova variável $x = a^2$ a equação (1.34) torna-se

$$\dot{x}^2 = \frac{32\pi G \rho_1}{3} \sqrt{x + b^2} \quad \text{onde} \quad b = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (1.35)$$

cuja solução tem forma

$$\left(a^2 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right)^{3/4} = \sqrt{6\pi G \rho_1} \cdot t. \quad (1.36)$$

A última expressão mostra, também, que este modelo interpola entre a era de matéria dominante e radiação dominante. No caso não relativístico (matéria) $\rho_2 = 0$ nós obtemos, diretamente, o comportamento padrão $a(t) \sim t^{2/3}$.

O limite ultra-relativístico não pode ser considerado de maneira direta, pois de acordo com a equação (1.36) $\rho_1 = 0$ produz singularidade. Vamos assumir $\rho_1 \ll \rho_2$ e expandir até a primeira ordem em (ρ_1^2/ρ_2^2)

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 a^2 \right] = \sqrt{6\pi G \rho_1} t. \quad (1.37)$$

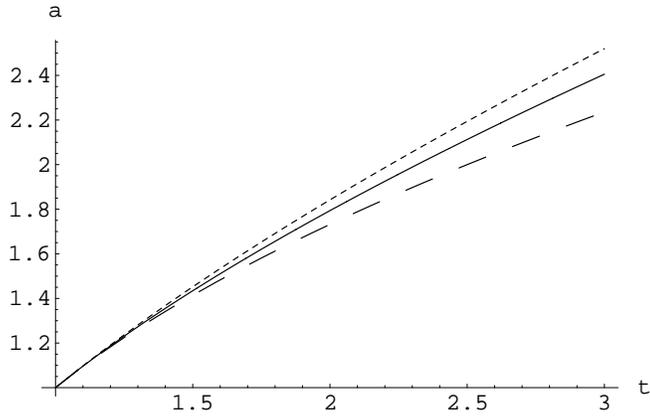


Figura 1.2: O gráfico para o fator conforme $a(t)$ nos três casos seguinte: radiação pura $a(t) \sim t^{1/2}$ que é representado pela linha tracejada, o caso de poeira pura pela linha pontilhada e o caso do gás reduzido puro representado pela linha contínua.

A fórmula (1.37) não é nada mais que a solução de radiação dominante com variável de tempo trocada

$$a(t) = \left(\frac{32\pi G \rho_2}{3} \right)^{1/4} \sqrt{t - t_0}, \quad \text{onde} \quad t_0 = \frac{\rho_2^{3/2}}{6\pi G \rho_1^2}, \quad (1.38)$$

onde é fácil ver que $a(t) \sim t^{1/2}$.

Com o resultado obtido acima podemos afirmar que o modelo do gás reduzido interpola entre as fases mais conhecidas na literatura que é o universo preenchido por radiação e o universo preenchido por poeira, como mostra a Figura 1.2.

Universo dominado pela radiação

Considere o gás relativístico reduzido na era dominada pela radiação. De acordo com estimativas conhecidas [6, 7], a constante cosmológica e a curvatura espacial não são relevantes, neste caso podemos seguramente fazer $k = \rho_\Lambda = 0$. Então a equação de

Friedmann pode ser reescrita como

$$\frac{4}{3} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{\rho_{r0}}{\rho_1} \right)^{3/2} - \frac{4\rho_{r0}}{\rho_1} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{\rho_{r0}}{\rho_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{32\pi G \rho_1}{3} \right)^{1/2} t. \quad (1.39)$$

A última relação representa a solução exata da equação de Friedmann, mas ela é complicada para a análise qualitativa. Vamos considerar a situação especial quando a densidade de radiação é fortemente dominante e o efeito do gás relativístico massivo é uma pequena correção para a lei $a \sim t^{1/2}$. Nosso propósito é avaliar essa correção. Para este fim vamos expandir a expressão abaixo

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{\rho_{r0}}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{\rho_{r0}}{\rho_1} \right)^\gamma \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_{r0}} \sqrt{a^2 + b^2} \right)^\gamma, \quad (1.40)$$

até a terceira ordem do pequeno parâmetro $\frac{\rho_1}{\rho_{r0}} \sqrt{a^2 + b^2}$, (aqui $\gamma = 1/2$ ou $3/2$). O resultado tem forma

$$a^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{r0}} \right) (a^2 + b^2)^{3/2} = \left(\frac{32\pi G \rho_{r0}}{3} \right)^{1/2} t, \quad (1.41)$$

onde nós desconsideramos o valor inicial t_0 . É fácil ver que o efeito do gás relativístico reduzido apressa a expansão do universo comparada com radiação pura. O efeito do gás relativístico de partículas volumosas é mais fraco que o efeito vindo da matéria não relativística com a mesma densidade de energia. Os comportamentos relativos são apresentados à Figura 1.2.

Universo dominado pela constante cosmológica

O próximo caso relevante é o gás relativístico reduzido como um modelo para a Matéria Escura, no universo dominado pela energia escura (const. cosmológica). Depois da mudança de variável $x = a^2$, nós chegamos na solução na forma de uma integral

$$\int \frac{dx}{(\rho_\Lambda x^2 + \rho_1 \sqrt{x + b^2})^{1/2}} = \sqrt{\frac{32\pi G}{3}} t, \quad (1.42)$$

com b definida em (1.35). Esta integral é bastante complicada e difícil de ser avaliada analiticamente. Nessa situação podemos aplicar métodos numéricos ou usar o papel dominante da densidade de vácuo. O resultado da análise numérica é mostrada na Figura 1.3, onde nós plotamos $a(t)$ para o caso de $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $\Omega_{rr} = 0.3$ correspondendo ao gás reduzido. Em todos os casos, para simplificar, fixamos $a_o = 1$. Nós podemos verificar que a presença do gás relativístico reduzido resulta em uma expansão mais lenta do universo comparada com a constante cosmológica pura.

Considere uma solução analítica aproximada baseada na suposição que a densidade de energia de vácuo domina o universo. Nós reescrevemos a integral em *l.h.s.* da eq. (1.42) como

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_\Lambda}} \int \frac{dx}{(x+b^2)^{1/4} \sqrt{1+\xi}}, \quad \text{onde} \quad \xi = \frac{\rho_1}{\rho_\Lambda} \frac{\sqrt{x+b^2}}{x^2}$$

e expandimos em série de potência o parâmetro pequeno ξ . Então a integração torna-se trivial e tomando a primeira ordem nós chegamos a seguinte solução

$$\ln a + X(a) = \lambda t, \quad (1.43)$$

onde

$$X(a) = \frac{\rho_1}{8\rho_\Lambda} \left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^4} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2a^2} + \frac{1}{4b^3} \ln \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{\sqrt{a^2+b^2}+b} \right) \right] \quad (1.44)$$

é um termo pequeno e $\lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$. Podemos facilmente achar uma fórmula explícita aproximada para $a(t)$ usando o termo pequeno $X[a]$ e fazendo

$$a(t) = f(t) \cdot a_\lambda(t), \quad a_\lambda(t) = e^{\lambda t}, \quad |f(t) - 1| \ll 1. \quad (1.45)$$

Substituindo (1.45) em (1.43) nós chegamos na solução

$$f(t) = e^{\lambda t} [1 - X(e^{\lambda t})]. \quad (1.46)$$

Esta expressão pode ser substituída dentro de (1.45). Qualitativamente o comportamento de $a(t)$ é ajustada na análise numérica. A presença do gás reduzido relativístico reduz a velocidade de aceleração do universo causada por ρ_Λ .

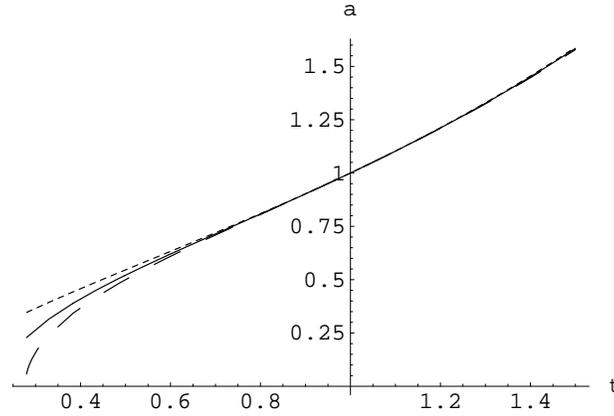


Figura 1.3: O gráfico para o fator de escala $a(t)$ segue nos seguintes casos: constante cosmológica pura (linha pontilhada), constante cosmológica mais radiação pura (linha tracejada) e domínio da constante cosmológica sobre o gás relativístico reduzido (linha contínua). Podemos ver que o efeito do gás relativístico reduzido traz uma interpolação entre a era de radiação e a era de poeira. Depois as três curvas convergem no tempo ficando pertinente apenas a constante cosmológica.

Capítulo 2

Formação de Estruturas com Gás de Partículas Relativísticas

A discussão do último capítulo foi baseada na idéia que a matéria e radiação no nosso universo estavam distribuídas homoganeamente. O universo real, em pequenas escalas, contém estruturas inhomogêneas como planetas, estrelas, galáxias, clusters de galáxias, etc. A densidade de massa dentro de uma galáxia é aproximadamente 10^5 a densidade média do universo. Neste capítulo discutiremos um mecanismo possível para a formação dessas inhomogeneidades com o universo inicialmente preenchido por gás de partículas relativísticas. Vamos tentar reconstruir o universo observado na seguinte maneira: assumindo que, em algum momento no passado, existiu um pequeno desvio na homogeneidade que cresceu devido a instabilidade gravitacional dando origem aos planetas, galáxias, cluster, etc. Estes desvios na homogeneidade inicialmente foram pequenos o que nos permite estudar sua evolução usando teoria de perturbação linear.

Instabilidade gravitacional é a causa mais provável para formação de estruturas cósmicas. Quando falamos de pequenos desvios na homogeneidade significa que algumas regiões no universo são mais densas que outras. O que nos interessa é analisar como esses desvios

se comportam com o tempo. É notável que no caso relativístico não somente a massa e a energia tem papel importante no comportamento das perturbações, mas também a pressão do fluido. A massa próxima das regiões mais densas são atraídas para o centro pela força gravitacional e repelidas pela pressão com uma força na mesma direção mas com o sentido contrário. Se a densidade de energia for grande o bastante para vencer a pressão, as regiões densas se tornarão cada vez mais densas com o tempo. Para diferentes cenários cosmológicos a taxa de crescimento das perturbações se comporta de uma maneira diferente. Por exemplo, representamos uma perturbação na densidade relativa de energia com o fator $\delta = \delta\rho/\rho$ dado pela expansão de Fourier, se o universo é dominado por poeira, δ crescerá com a primeira ordem de t , porém se o universo é dominado por radiação, δ crescerá logaritmicamente [9].

Para finalizar vamos concluir nosso trabalho comparando a teoria com as observações. O modelo Λ CDM é obtido quando fazemos o parâmetro $b = 0$. Encontrando $\delta(k)$ e introduzindo as condições iniciais nós podemos construir o espectro de potência teórico de matéria do universo atual.

2.1 Perturbações Lineares

Consideremos uma pequena perturbação na métrica $g_{\nu\mu}$ e no tensor momento energia $T_{\nu\mu}$ que são as grandezas responsáveis para a descrição do universo. Notemos que de acordo com (1.11) o tensor momento energia depende somente da pressão, da densidade de energia e do 4-vetor velocidade, então as perturbações tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \\ \bar{\rho} &= \rho + \delta\rho; \\ \bar{p} &= p + \delta p;\end{aligned}$$

$$\bar{U}^\nu = U^\nu + \delta U^\nu.$$

Nestas fórmulas, as grandezas $g_{\mu\nu}$, ρ , p e U^ν são soluções de base correspondendo a um universo homogêneo isotrópico e $h_{\mu\nu}$, $\delta\rho$, δp e δU^ν são pequenas perturbações.

No modelo RRG vamos considerar que perturbações na densidade de energia ocorrem devido a variação de partículas existente em alguma região do universo. Isso significa que, enquanto no universo não perturbado o número de partículas é distribuído de forma homogênea e isotrópica, no universo perturbado algumas regiões possuem mais partículas que em outras. Vamos analisar o que ocorre com a equação de estado quando o universo está sujeito a essas perturbações, de acordo com (1.4) temos

$$P = \frac{\rho}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad \text{onde} \quad \rho = \frac{N\varepsilon}{V},$$

então variar ρ é equivalente variar N , ou seja, $\delta\rho = \delta N \varepsilon / V$ e conseqüentemente variar a pressão P é equivalente variar ρ

$$\delta P = \frac{\delta\rho}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 \right].$$

A última equação pode ser escrita como

$$\delta P = \frac{\delta\rho}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_d}{\rho} \right)^2 \right] = \frac{\delta\rho}{3} \cdot [1 - S(z)], \quad (2.1)$$

onde $S(z) = \rho_d^2 / \rho^2$.

Em torno da solução representando o universo homogêneo e isotrópico, vamos estudar como essas pequenas perturbações se desenvolvem no tempo. Como vimos na seção anterior a evolução cosmológica é governada pelos seguintes ingredientes: (i) *Equação de estado* que relaciona a pressão e a densidade de energia, no nosso modelo é dada por (1.5); (ii) *Lei de Conservação* (segue da identidade de Bianchi); (iii) *Equações de Friedmann*, que pode ser escrita como

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3} [\rho(z) + \rho_\Lambda] + H_0^2 \Omega_k^0 (1+z)^2. \quad (2.2)$$

É interessante introduzir notações de pressão e densidade de energia para as componentes matéria e vácuo

$$\rho_t = \rho + \rho_\Lambda, \quad P_t = P + P_\Lambda, \quad (2.3)$$

ρ representa a densidade de energia de matéria quando o universo é preenchido por gás relativístico reduzido e ρ_Λ a densidade de energia de vácuo. Usando a equação (2.3), podemos determinar a lei da dinâmica da evolução do fator de escala:

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_t + 3P_t) = -\frac{4\pi G}{3}\left\{\rho[2 - S(z)] - 2\rho_\Lambda\right\}, \quad (2.4)$$

aqui usamos a equação de estado padrão para energia de vácuo $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Nós devemos precisar da seguinte função definida a seguir

$$f_1 = \frac{\rho}{\rho_t} = \frac{(1+z)(H^2)' - 2\Omega_k^0 H_0^2 (1+z)^2}{[H^2 - \Omega_k^0 H_0^2 (1+z)^2]} \frac{1}{4 - S(z)}, \quad (2.5)$$

onde linha indica d/dz , ver Apêndice (B.2). A taxa de expansão de $H(z)$ é dada por

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_k^0 (1+z)^2 + \frac{\Omega_m^0}{\sqrt{1+b^2}} (1+z)^3 \sqrt{1+b^2(1+z)^2} + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.6)$$

nessa fórmula $\Omega_m^0 = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ é obtido aplicando as condições iniciais na equação (1.23).

Vamos lembrar que a densidade de energia de vácuo é invariante neste modelo. Podemos encontrar em [10] um modelo onde existe troca de energia entre constante cosmológica e matéria. No nosso trabalho vamos utilizar as abordagem das perturbações cósmicas, desenvolvidas neste artigo.

2.2 Dinâmica das perturbações

Em ordem de derivar as equações para a densidade e a métrica nós seguimos o formalismo padrão ¹ e negligenciamos perturbações na curvatura espacial, no entanto temos mantido a curvatura espacial na métrica de fundo.

¹O formalismo padrão de Teoria de Perturbação linear pode ser encontrado em [6],[11],[17].

No capítulo anterior introduzimos o tensor momento energia. Nas coordenadas comoventes $U^0 = U_0 = 1$ e $U^i = U_i = 0$, assim o tensor momento energia de matéria e vácuo pode ser expresso via (2.3) como

$$T_\mu^\nu = (\rho_t + P_t)U^\nu U_\mu - P_t \delta_\mu^\nu, \quad (2.7)$$

tal que $T_0^0 = \rho_t$ e $T_i^j = -P_t \delta_i^j$.

Consideremos simultâneas perturbações na métrica e na densidade de matéria

$$\rho \rightarrow \rho + \delta\rho, \quad g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde a métrica de fundo $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -a^2(t)\delta_{ij}\}$ corresponde a soluções obtidas anteriormente. Dessa forma, para a perturbação na métrica dada por (2.8) obtemos a variação do símbolo de Christoffel dado por

$$\delta \Gamma_{\nu\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \{ \nabla_\nu h_{\beta\alpha} + \nabla_\beta h_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha h_{\nu\beta} \}, \quad (2.9)$$

ver Apêndice (B.1). Vamos introduzir as coordenadas síncronas $h_{0\mu} = 0$, com essa escolha de coordenada de Calibre obtemos os elementos da variação do Símbolo de Christoffel

$$\delta \Gamma_{00}^0 = \delta \Gamma_{0i}^0 = \delta \Gamma_{0i}^0 = 0;$$

$$\delta \Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij};$$

$$\delta \Gamma_{0i}^j = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a^2}\right) \delta^{jk} \{ \dot{h}_{ik} - 2H h_{ik} \};$$

$$\delta \Gamma_{0i}^i = -\frac{1}{a^2} \delta^{jk} \{ \dot{h}_{ik} - 2H h_{ik} \};$$

$$\delta \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ji} \};$$

$$\delta \Gamma_{ki}^i = -\frac{1}{2} \frac{1}{a^2} (\partial_k h_i^i).$$

Para iniciar o estudo da dinâmica das perturbações, começaremos com as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Sabemos que elas nos fornecem 16 equações. Porém, desde que em ambos os lados da última equação existem tensores simétricos, apenas 10 equações serão distintas. Vamos focar nossa atenção apenas em uma dessas equações. Se tirarmos o traço do tensor de Einstein $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -R = 8\pi G T$ e substituirmos R na componente $R_{00} = 1/2 R + 8\pi G T_{00}$ do tensor de Ricci, vamos obter

$$R_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} T \right).$$

Sabemos que $T_{00} = \rho_t = \rho + \rho_\Lambda$ e $T = \rho_t - 3P_t = \rho + \rho_\Lambda - 3(P + P_\Lambda)$, ao variarmos a equação acima encontraremos

$$\delta R_{00} = 8\pi G \left(\delta T_{00} - \frac{1}{2} \delta T \right).$$

Se usarmos a equação de estado para energia de vácuo dada na forma padrão por $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$, teremos

$$\delta R_{00} = 4\pi G (\delta\rho + 3\delta P), \quad (2.11)$$

onde $\delta\rho$ e δP representam respectivamente a variação da densidade de energia e da pressão do modelo RRG. De acordo com que discutimos na seção anterior podemos substituir a relação (2.1) acima e obtermos a equação dependendo dos parâmetros do nosso modelo

$$\delta R_{00} = 4\pi G \left[2 - S(z) \right] \delta\rho. \quad (2.12)$$

Por outro lado temos

$$\delta R_{00} = \nabla_\mu \delta \Gamma_{00}^\mu - \nabla_0 \delta \Gamma_{0\mu}^\mu = \frac{\dot{h}}{2} + H h; \quad (2.13)$$

onde definimos ($h = \partial_0 h_i^i / a^2$). Comparando as equações (2.12) e (2.13), obtemos

$$\dot{h} + 2H h = 8\pi G \left[2 - S(z) \right] \delta\rho, \quad (2.14)$$

essa é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo. Seria interessante colocarmos em função do parâmetro de redshift (z). Antes de darmos continuidades aos nossos cálculos devemos mencionar que as equações de perturbação são representadas no espaço de Fourier, isto é, usamos a representação de Fourier padrão para as quantidades perturbadas:

$$f(\vec{x}, t) = \int d^3k f(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad k = |\vec{k}|. \quad (2.15)$$

A transformação a ser feita para deixarmos as equações em função de z obedece a relação

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} = H a \frac{d}{da} = -(1+z) H \frac{d}{dz}, \quad (2.16)$$

dessa forma a equação (2.14) pode ser escrita como

$$h' - \frac{2h}{(1+z)} = -\frac{f_1}{\varrho} [2 - S(z)] \delta, \quad (2.17)$$

onde ‘linha’ corresponde a derivada em relação a z e f_1 foi definida em (2.5). Na última equação introduzimos as funções

$$\varrho = \frac{(1+z)H}{3[H^2 - \Omega_k^0 H_0^2 (1+z)^2]}, \quad (2.18)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (2.19)$$

cujas a primeira depende da solução de base e a segunda é a perturbação relativa da densidade. O próximo passo é analisar a variação da lei de conservação

$$\delta(\nabla_\mu T_\nu^\mu) = 0,$$

ou seja

$$\delta(\nabla_\mu T_\nu^\mu) = \delta(\partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\mu) = \partial_\mu (\delta T_\nu^\mu) +$$

$$+ \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} (\delta T_{\nu}^{\alpha}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (\delta T_{\alpha}^{\mu}) + (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}) T_{\nu}^{\alpha} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.20)$$

Considerando $\delta U^0 = 0$ e $\omega = P + \rho$ (função de calor), temos as componentes da variação do tensor momento energia dadas por

$$\delta T_0^0 = \delta \rho;$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + P) \delta U_i U^0 - \delta P \delta_i^0 = \omega \delta U_i;$$

$$\delta T_0^i = \omega \delta u^i;$$

$$\delta T_i^j = -\delta P \delta_i^j.$$

De acordo com (2.20) temos para a componente $\nu = 0$:

$$\partial_{\mu} (\delta T_0^{\mu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} (\delta T_0^{\alpha}) - \Gamma_{\mu 0}^{\alpha} (\delta T_{\alpha}^{\mu}) + (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}) T_0^{\alpha} - (\delta \Gamma_{\mu 0}^{\alpha}) T_{\alpha}^{\mu} = 0,$$

onde cada termo é calculado abaixo

$$\partial_{\mu} (\delta T_0^{\mu}) = \delta \dot{\rho} + \omega \theta;$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} (\delta T_0^{\alpha}) = 3H \delta \rho;$$

$$- \Gamma_{\mu 0}^{\alpha} (\delta T_{\alpha}^{\mu}) = 3H \delta p;$$

$$(\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}) T_0^{\alpha} = -\frac{1}{2} h \rho;$$

$$- (\delta \Gamma_{\mu 0}^{\alpha}) T_{\alpha}^{\mu} = -\frac{1}{2} h p.$$

Aqui usamos a notação $\nabla_i (\delta U^i) \equiv \theta$ para a derivada do 3-vetor velocidade perturbado.

Ao somarmos todos esses termos obtemos

$$\delta \dot{\rho} + \omega \theta + 3H \delta \omega - \frac{1}{2} h \omega = 0. \quad (2.21)$$

Relembre que $\omega = \rho + P$, onde a pressão é dada pela equação de estado (1.5). Dessa forma podemos escrever

$$\omega = \frac{\rho}{3} [4 - S(z)].$$

A equação (2.21), depois que a dividimos por ρ e substituirmos ω , torna-se

$$\dot{\delta} + \frac{1}{3} [4 - S(z)] \left(\theta - \frac{1}{2} h \right) + H \left[4 - S(z) + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{1}{H} \right] \delta = 0. \quad (2.22)$$

Temos uma equação diferencial não linear no tempo, se definirmos $v = \theta f_1$, e usarmos a relação de transformação entre o tempo físico e o parâmetro de redshift z obteremos

$$\delta' - \frac{1}{(1+z)} \left[4 - S(z) - (1+z) \frac{\rho'}{\rho} \right] \delta + \frac{4 - S(z)}{3H(1+z)} \left(\frac{h}{2} - \frac{v}{f_1} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Para a componente $\nu = i$ temos

$$\partial_\mu (\delta T_i^\mu) + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu (\delta T_i^\alpha) - \Gamma_{\mu i}^\alpha (\delta T_\alpha^\mu) + (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu) T_i^\alpha - (\delta \Gamma_{\mu i}^\alpha) T_\alpha^\mu = 0,$$

onde cada termo é calculado abaixo

$$\partial_\mu (\delta T_i^\mu) = -a^2 \dot{\omega} \delta u^i - 2\omega a \dot{a} \delta u^i - a^2 \omega \partial_0 (\delta u^i) - \partial_i (\partial p);$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\mu (\delta T_i^\alpha) = -3a^2 H \omega \delta u^i;$$

$$- \Gamma_{\mu i}^\alpha (\delta T_\alpha^\mu) = 0;$$

$$(\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu) T_i^\alpha = \frac{1}{2} p \partial_k \left(\frac{h_i^k}{a^2} \right);$$

$$- (\delta \Gamma_{\mu i}^\alpha) T_\alpha^\mu = -\frac{1}{2} p \partial_k \left(\frac{h_i^k}{a^2} \right).$$

Somando os termos acima e multiplicando por $-1/a^2$ encontramos a equação

$$\dot{\omega} \delta u^i + 5 \omega H \delta u^i + \omega \delta \dot{u}^i - \partial^i (\delta P) = 0. \quad (2.24)$$

Nessa equação precisamos um pouco mais de atenção. Antes de continuarmos seu desenvolvimento vamos retornar a alguns conceitos já mencionados anteriormente. Primeiro vamos lembrar que a perturbação na densidade de energia significa perturbar o número de partículas em uma dada região do universo, assim a perturbação da pressão é dada por

(2.1). Para derivarmos $\dot{\omega}$, precisamos conhecer a variação temporal de P , cujo é definido em (1.5). Assim temos

$$\dot{P} = \frac{1}{3}\dot{\rho}[1 - S(z)] - \frac{1}{3}\rho\dot{S}(z) \quad (2.25)$$

e como consequência

$$\dot{\omega} = \frac{1}{3}\dot{\rho}[4 - S(z)] - \frac{1}{3}\rho\dot{S}(z). \quad (2.26)$$

Como vimos em (2.15) é conveniente discutir perturbações através de uma expansão de Fourier, onde representamos

$$\delta(t, \vec{x}) = \int d^3k \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{x}}. \quad (2.27)$$

Vamos retornar a equação (2.24) dividi-la por ρ e diferenciá-la aplicando ∂^i . Obtemos

$$\frac{\dot{\omega}}{\rho}\theta + 5\frac{\omega}{\rho}H\theta + \frac{\omega}{\rho}\dot{\theta} - \partial_i\partial^i\left(\frac{\delta P}{\rho}\right) = 0. \quad (2.28)$$

Precisamos lembrar que as soluções de base correspondendo ao universo homogêneo e isotrópico não variam com a posição, então apenas as perturbações serão atingidas com essa derivação. Podemos usar a métrica para abaixar índice $\partial^j = g^{ij}\partial_i = -1/a^2\partial_i$, assim temos

$$\partial_i\partial^i\left(\frac{\delta P}{\rho}\right) = -\frac{1}{a^2}\partial_i\partial_i\left(\frac{\delta P}{\rho}\right) = -\frac{1}{3a^2}\left[1 - \left(\frac{\rho_d}{\rho}\right)^2\right]\partial_i\partial_i\delta. \quad (2.29)$$

Usando δ como uma expansão de Fourier chegamos a uma nova forma para a equação (2.24)

$$\dot{\theta} + \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} + 5H\right)\theta - \frac{k^2}{a^2}\frac{1 - S(z)}{3\omega}\rho\delta = 0. \quad (2.30)$$

Substituindo ω e $\dot{\omega}$ obtidos anteriormente e colocando em termos de z e da variável $v = \theta f_1$ essa equação pode ser escrita como

$$v' + \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{S'(z)}{4 - S(z)} - \frac{5}{1 + z} - \frac{f_1'}{f_1}\right)v + (1 + z)f_1\frac{k^2}{H}\frac{1 - S(z)}{4 - S(z)}\delta = 0. \quad (2.31)$$

Finalmente temos três equações diferenciais acopladas (2.17), (2.23) e (2.31) que descrevem a dinâmica das perturbações. Podemos checar que para $b = 0$, elas reproduzem o modelo Λ CDM, já que isso significa a ausência de radiação no universo.

Capítulo 3

Análise do espectro de potência e comparação com dados do LSS

3.1 Espectro de potência e Função transferência

No capítulo anterior nós obtemos um conjunto de equações diferenciais que descrevem a dinâmica das perturbações na métrica e na densidade. Em ordem de considerar a análise numérica dessas equações, vamos fixar as condições iniciais e definir o limite para variação do parâmetro de red-shift z e para o número de onda $|\vec{k}| = k$ contido nas perturbações. A análise realizada neste capítulo é aplicada depois do fim da época de radiação. Consideramos que desde o início de época da matéria o universo está preenchido pelo gás reduzido. No entanto z deve evoluir entre $z = 1100$ (era da recombinação) a $z = 0$ (hoje). Por causa da análise numérica vamos medir k em unidades de $hMpc^{-1}$, onde h é a constante de Hubble reduzida. Nestas unidades devemos considerar $k < 0.15hMpc^{-1}$, pois os dados observacionais relativos ao regime linear estão nessa taxa. Além disso usaremos o tempo em unidades de $1/H_0$, na prática isso significa que medimos o valor da constante de Hubble $H(z)$ em unidades de H_0 .

Nós usaremos uma função transferência que nos conduz a processos ocorridos ao longo da recombinação. O uso da função transferência permite realizar a análise numérica e a comparação com dados recentes de red-shift de galáxias [18] na era dominada pela matéria, por exemplo na taxa de z entre $z_0 = 500$ e $z_f = 0$.

A escolha de z_0 é totalmente arbitrária, a única exigência é que os processos físicos, na era dominada pela matéria, sejam avaliados. No nosso modelo é levado em conta os efeitos relativísticos da matéria durante a formação de estruturas. Essencialmente o resultado não depende do valor preciso de z_0 . Expressaremos nossas escalas em termos do raio de Hubble, $H_0 \simeq 3000hMpc^{-1}$, isso implica que devemos considerar o valor de k entre 0 e $450H_0$.

O principal propósito de nossa análise numérica é comparar o comportamento das perturbações com o estabelecido pelas medidas observacionais de red-shift de galáxias. O espectro de potência de matéria é dado em vários lugares na literatura por

$$P(k) = \left| \frac{\delta\rho(k)}{\rho} \right|^2 = |\delta(k)|^2. \quad (3.1)$$

Vamos utilizar as condições adequadas para que o espectro de potência em nosso modelo seja um caso limite da aproximação Λ CDM quando $b = 0$.

Usando a função transferência sugerida em [17] podemos fixar as condições iniciais

$$\delta(z_0) = v(z_0) = h(z_0) = p(k) \cdot T[k], \quad (3.2)$$

aqui $p(k) = 24^2 \cdot \sqrt{k}$ e

$$T(k) = \left[1 + \frac{8k}{\Omega_{k0} + \Omega_{m0}} + \frac{4.7k^2}{(\Omega_{k0} + \Omega_{m0})^2} \right]^{-1} \quad (3.3)$$

é a função transferência. Essa função assume uma escala invariante do espectro primordial, como sugerido pelo cenário inflacionário, e determina o espectro de hoje onde temos o universo composto de matéria escura e constante cosmológica que são responsáveis pela

expansão acelerada na fase atual. A normalização usada na expressão para $p(k)$ está sugerida em [11]. A arbitrariedade dessa normalização no espectro de potência não pode afetar os resultados qualitativos deste trabalho.

3.2 Condições iniciais. Normalização com respeito ao modelo Λ CDM

Vamos agora explicar com alguns detalhes como fixamos as condições iniciais para nosso problema específico. A estratégia é a seguinte, primeiro vamos considerar o modelo padrão com constante cosmológica como referência para normalizar nossos cálculos. Nesta maneira o espectro de matéria de hoje (que é para $z = 0$) pode ser descrito pela função transferência (3.3). Isto permite fixar as condições da densidade relativa δ em $z = 0$ para o caso de Λ CDM. Além disso, podemos fazer o mesmo para condições iniciais na função métrica, h . Para a perturbação na velocidade, $\theta \equiv \nabla_i(\delta U^i)$, nós supomos que ela é zero, desde que elas são funções decrescentes, são precisamente zero no modelo Λ CDM. Com essa renormalização podemos encontrar o espectro para o modelo RRG seguindo dois passos. Primeiro nós integramos as equações perturbadas no modelo Λ CDM em $z = 0$ até algum ponto $z = z_0$, onde $z_0 \gg 1$. Desta maneira vamos determinar os valores das três flutuações (δ, H, v) em $z = z_0$. O segundo passo é usar estes valores como condições iniciais nas equações (2.17),(2.23) e (2.31) no caso RRG para b arbitrário. Em particular isso fornece o espectro de potência para a densidade de matéria hoje com $b \neq 0$.

Vamos retornar as equações citadas acima e analisa-las para o modelo Λ CDM. Neste modelo a densidade de energia de vácuo domina com $\Omega_\Lambda^0 \simeq 0.7$ da energia total do universo. A matéria bariônica junto com matéria escura (DM) possui cerca de $\Omega_m^0 \simeq 0.3$ e a curvatura $\Omega_k^0 = 1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_m^0 \simeq 0$. Para adquirirmos essa aproximação temos que

considerar que a densidade de energia de matéria bariônica contida no universo é muito superior que a densidade de energia de radiação. No modelo do gás reduzido introduzimos duas grandezas: ρ_1 e ρ_2 , onde nos limites conhecidos a primeira corresponde a densidade de energia de matéria e a segunda corresponde a densidade de energia de radiação. Essas considerações nos levam a condição $\rho_1 \gg \rho_2$ e assim podemos fazer $b = \rho_2/\rho_1 \simeq 0$. Isso afeta os parâmetros do nosso modelo na seguinte maneira:

$$\rho = \rho_d = \rho_1 (1 + z)^3; \quad S(z) = 1;$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{3}{(1 + z)}; \quad f_1 = \frac{(1 + z)^3 \Omega_m^0}{\Omega_m^0 (1 + z)^3 + \Omega_\Lambda};$$

$$\varrho = \frac{(1 + z) H}{H^2 - \Omega_k^0 H_0^2 (1 + z)^2};$$

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \Omega_k^0 (1 + z)^2 + \Omega_m^0 (1 + z)^3 \right];$$

e as equações se tornam

$$h' - \frac{2h}{(1 + z)} = -\frac{3f_1}{(1 + z)H} H_0^2 [\Omega_m^0 (1 + z)^3 + \Omega_\Lambda];$$

$$\delta' + \frac{1}{H(1 + z)} \left(\frac{h}{2} - \frac{v}{f_1} \right) = 0;$$

$$v' - \left[\frac{5\Omega_\Lambda + 2\Omega_m^0 (1 + z)^3}{(1 + z)[\Omega_\Lambda + \Omega_m^0 (1 + z)^3]} \right] v = 0.$$

Essas equações nos fornecem informações sobre o espectro de potência fornecido na Figura 3.1. O espectro final depende essencialmente de três parâmetros: Ω_m^0 , Ω_k^0 e Ω_Λ . O primeiro corresponde a matéria, o segundo a curvatura espacial e o terceiro a constante cosmológica. Devemos relembrar que $\Omega_i^0 = \Omega_i^0(z = 0) = \rho_i/\rho_c^0$, onde ρ_c^0 é a densidade

crítica.

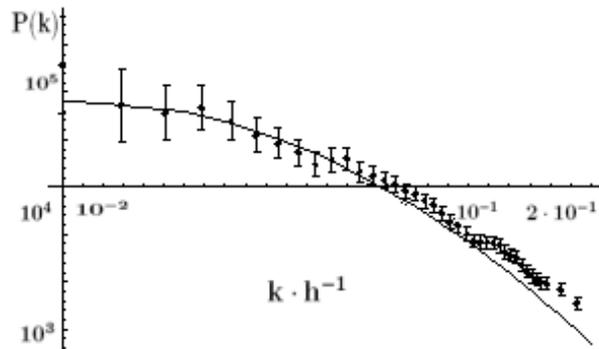


Figura 3.1: Gráfico do espectro de potência $P(k)$ versus $k \cdot h^{-1}$.

No gráfico 3.1 temos a linha contínua que ilustra o comportamento do modelo RRG com $b = 0$ e a linha pontilhada com barras de erro que ilustra os dados observacionais. Podemos ver que o Modelo do gás reduzido na aproximação Λ CDM se encaixa com dados observacionais .

3.3 Espectro de potência para o modelo do gás relativístico reduzido

O objetivo do estudo das perturbações no modelo RRG deve ser a busca dos efeitos da componente relativística. Em outras palavras, nós esperamos encontrar os limites para o parâmetro b definido na equação (1.35). Podemos comparar o espectro produzido no modelo usando valores fixos do parâmetro b com os dados experimentais. Vamos fixar $\Omega_k^0 = 0$, $\Omega_m^0 = 0.3$ e $\Omega_\Lambda^0 = 0.7$, aqui Ω_m^0 representa a quantidade relativa de matéria bariônica junto com matéria escura contida no universo. De acordo com a definição de b , seu valor numérico obrigatoriamente deve ser maior que zero ($b > 0$). Para valores de

$b = 10^{-7}$ temos um acordo perfeito com dados do LSS; para $b = 10^{-6}$ a curva teórica começa a se desviar dos dados observacionais principalmente para valores de k altos. Em $b = 10^{-5}$ o espectro representa um forte desvio (o mesmo é observado para valores $b > 10^{-5}$). Podemos verificar os casos acima pelas gráficos mostrados na Figura 3.2.

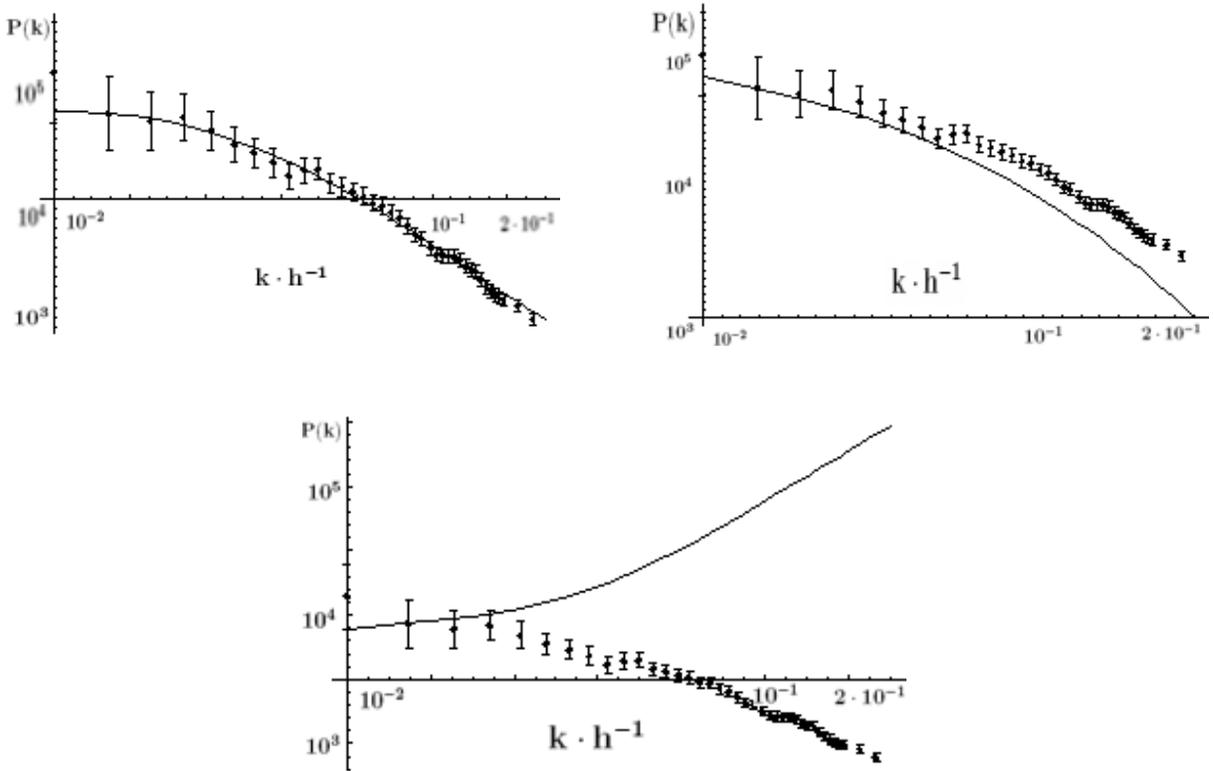


Figura 3.2: Gráficos do espectro de potência $P(k)$ versus $k \cdot h^{-1}$. Os valores do parâmetro b são 10^{-7} , 10^{-6} , 10^{-5} respectivamente.

A questão é: Qual é o valor de b compatível com os resultados experimentais? Podemos observar que para valores de b próximos á 10^{-5} temos um alto grau de divergência comparando com dados observacionais de 2dF Galaxy Redshift Survey [18], com nível de erros de 1σ . Ao mesmo tempo, de acordo com a Figura 3.2 e com os testes feitos para va-

lores de b menores que 10^{-6} , podemos argumentar que b pode assumir valores no intervalo de

$$0 \leq b \leq 10^{-6}.$$

Esse limite é interessante pois a princípio podemos limitar o módulo da velocidade das partículas no modelo RRG. Discussão deste assunto pretendemos deixar para um trabalho futuro.

Conclusões

O modelo do gás reduzido relativístico tem um papel importantíssimo em aplicações cosmológicas. A distribuição de Maxwell para gás de partículas relativísticas nos fornece uma equação de estado que envolve funções de Bessel Modificada. Essa forma de equação nos limita à aplicações cosmológicas, pois muitas vezes não sabemos resolver as equações necessárias para o desenvolvimento do modelo. Como mostramos neste trabalho, o RRG é uma excelente aproximação para a distribuição de Maxwell. A principal vantagem é que ele admite derivação analítica da dependência $\rho(a)$ através de funções elementares. Além disso, é possível integrar facilmente a equação de Friedmann para o universo preenchido pelo gás relativístico reduzido, e novamente, a solução é determinada através de uma função elementar. Deste modo chegamos à uma interpolação entre a solução cosmológica para a era de matéria dominante e a era de radiação dominante.

O modelo do gás relativístico reduzido pode ser, em princípio, testado, usando espectro de perturbações cósmicas. Nós investigamos os efeitos relativísticos no período de formação de estruturas. A princípio fizemos $b = 0$, isso nos conduz ao modelo atual Λ CDM. Os dados teóricos dessa aproximação se encaixaram perfeitamente com os dados observacionais.

O modelo RRG é caracterizado por um parâmetro fundamental, b , que está associado com o tipo de fluido que preenche o universo. Por exemplo, nos casos limites quando o universo está preenchido por radiação, b assume um valor muito alto e no outro caso

quando a matéria domina o universo $b = 0$. Este trabalho teve como objetivo encontrar os possíveis valores de b comparando vários resultados teóricos com dados observacionais do LSS. A comparação nos forneceu um limite permitido para b dentro da taxa

$$0 \leq b \leq 10^{-7} \sim 10^{-6}.$$

As possíveis interpretações físicas deste intervalo serão analisadas num trabalho futuro onde pretendemos estudar o modelo RRG como matéria escura contida no universo atual.

Apêndice A

Background homogêneo e isotrópico

A.1 Equação de estado

Consideremos uma única partícula relativística com massa de repouso m em uma caixa de volume V .

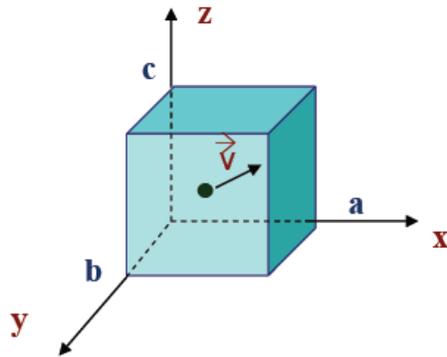


Figura A.1: *Partícula com velocidade relativística em uma caixa de volume V .*

A relação de dispersão é dada por

$$\varepsilon^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4, \quad \text{onde} \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Ao estudarmos a variação do momento da partícula na direção x , antes e depois da colisão com a área bc , como mostra a Figura A.1, temos

$$\Delta p_x = p_x - (-p_x) = 2p_x \quad \text{e} \quad t_x = \frac{2a}{v_x}. \quad (\text{A.2})$$

Sabemos que a força produzida no intervalo de tempo t_x é dada por

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{t_x} = \frac{m v_x^2}{a \sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (\text{A.3})$$

por outro lado a pressão produzida na área $A = bc$ é

$$P = \frac{F_x}{A} = \frac{F_x}{bc}. \quad (\text{A.4})$$

Assim obtemos

$$P = \frac{m v_x^2}{abc \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m v_x^2}{V \sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (\text{A.5})$$

onde V é o volume da caixa.

De acordo com a teoria cinética dos gases a média do quadrado da velocidade é dada em função dos quadrados de suas componentes

$$\frac{1}{3} \langle \bar{v}^2 \rangle = \langle \bar{v}_x^2 \rangle = \langle \bar{v}_y^2 \rangle = \langle \bar{v}_z^2 \rangle. \quad (\text{A.6})$$

A energia de uma partícula relativística é $\varepsilon = mc^2/(1 - \beta^2)^{1/2}$, onde $\beta = v/c$, então podemos expressar a pressão em termos da energia na seguinte forma:

$$P = \frac{1}{3V} \frac{v^2}{c^2} \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{V} \left[1 - \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Essa equação representa a pressão exercida por uma partícula com velocidade relativística numa caixa de volume V . Se ao invés de uma partícula, tivermos N partículas dentro da caixa, teremos

$$P = \frac{1}{3} \frac{N\varepsilon}{V} \left[1 - \frac{m^2 c^4}{\varepsilon^2} \right]. \quad (\text{A.8})$$

A densidade de energia é definida como $\rho = \frac{N\varepsilon}{V}$, dessa forma podemos escrever a pressão em termos da densidade de energia

$$P = \frac{\rho}{3} \left[1 - \left(\frac{m c^2}{\varepsilon} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.9})$$

Vamos definir $\rho_d(V) = \rho_1 V_0/V$, onde $\rho_1 = (Nmc^2)/V_0$. Podemos interpretar ρ_1 como sendo a densidade de energia de repouso e ρ_d uma densidade que depende do volume. Em termos desses novos parâmetros podemos escrever a equação (A.9) como

$$P = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{\rho_d}{\rho} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.10})$$

A última fórmula representa a equação de estado para o gás de partículas relativísticas com mesma energia cinética.

Apêndice B

Perturbações

B.1 Variação do símbolo de Christoffel

Consideremos uma perturbação na métrica

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo $\bar{g}_{\mu\nu}$ dentro de $\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \{ \partial_{\nu} g_{\beta\alpha} + \partial_{\beta} g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\nu\beta} \}$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} &= \bar{\Gamma}_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\xi\mu} \{ \partial_{\nu} h_{\beta\xi} + \partial_{\beta} h_{\nu\xi} - \partial_{\xi} h_{\nu\beta} \} - \frac{1}{2} h^{\xi\mu} \{ \partial_{\nu} g_{\beta\xi} + \\ &+ \partial_{\beta} g_{\nu\xi} - \partial_{\xi} g_{\nu\beta} \} - \frac{1}{2} h^{\xi\mu} \{ \partial_{\nu} h_{\beta\xi} + \partial_{\beta} h_{\nu\xi} - \partial_{\xi} h_{\nu\beta} \}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Das propriedades de metricidade temos

$$\nabla_{\beta} g_{\mu\nu} = \partial_{\beta} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\beta}^{\xi} g_{\xi\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\xi} g_{\mu\xi} = 0, \quad (\text{B.3})$$

Usando (B.3) em (B.2) e ignorando os termos de 2ª ordem em $h_{\nu\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \{ \partial_{\nu} h_{\beta\xi} + \partial_{\beta} h_{\nu\xi} - \partial_{\xi} h_{\nu\beta} \} - \frac{1}{2} h^{\mu\xi} \{ \Gamma_{\nu\beta}^{\delta} g_{\delta\xi} + \\ &+ \Gamma_{\nu\xi}^{\delta} g_{\beta\delta} + \Gamma_{\xi\beta}^{\delta} g_{\delta\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\delta} g_{\delta\xi} - \Gamma_{\nu\xi}^{\delta} g_{\delta\beta} - \Gamma_{\xi\beta}^{\delta} g_{\delta\nu} \}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Através da propriedade de abaixar e levantar índices podemos ver que $h^{\xi\mu} g_{\xi\delta} = h_{\xi\delta} g^{\xi\mu}$, dessa forma teremos

$$\delta \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \{ \nabla_{\nu} g_{\beta\alpha} + \nabla_{\beta} g_{\nu\alpha} - \nabla_{\alpha} g_{\nu\beta} \}. \quad (\text{B.5})$$

Essa equação nos fornece a variação do símbolo de Christoffel quando acrescentamos uma pequena perturbação $h_{\nu\mu}$ na métrica.

B.2 Cálculo de f_1

Temos as equações de Einstein

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_t + 3P_t), \quad (\text{B.6})$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_t, \quad (\text{B.7})$$

onde $\rho_t = \rho + \rho_{\Lambda}$ é a densidade de energia total contida no universo. Sabemos que

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (\text{B.8})$$

De acordo com a equação (B.6) e (B.8) temos

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_t + 3P_t) = -\frac{4\pi G}{3}\left\{\rho\left[2 - \left(\frac{\rho_d}{\rho}\right)^2\right] - 2\rho_{\Lambda}\right\}, \quad (\text{B.9})$$

onde usamos que $\rho_t = \rho + \rho_{\Lambda}$ e $P_t = P + P_{\Lambda}$. Da equação (B.7) temos

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{4\pi G}{3}2\rho_{\Lambda}. \quad (\text{B.10})$$

Subtraindo (B.10) de (B.9) obtemos

$$-\dot{H} = -\frac{k}{a^2} + \rho\frac{4\pi G}{3}\left(4 - \left(\frac{\rho_d}{\rho}\right)^2\right), \quad (\text{B.11})$$

onde podemos extrair ρ

$$\rho = \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \frac{3}{4\pi G} \frac{\rho^2}{(4\rho^2 - \rho_d^2)}. \quad (\text{B.12})$$

Da equação (B.7) temos

$$\rho_t = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right), \quad (\text{B.13})$$

vamos definir $f_1 = \rho/\rho_t$, de acordo com (B.12) e (B.13) podemos escrever

$$f_1 = \frac{\rho}{\rho_t} = \frac{2\rho^2}{(4\rho^2 - \rho_d^2)} \frac{k/a^2 - \dot{H}}{(H^2 + k/a^2)}. \quad (\text{B.14})$$

Vamos chamar $\Omega_k^0 = -k/H_0^2$ e transformar a derivada temporal por derivada em função de z , usaremos $(H^2)' = 2HH'$

$$f_1 = \frac{(1+z)(H^2)' - 2\Omega_k^0 H_0^2 (1+z)^2}{H^2 - \Omega_k^0 H_0^2 (1+z)^2} \frac{1}{(4 - \rho_d^2/\rho^2)}, \quad (\text{B.15})$$

essa relação foi usada na equação (2.17).

Bibliografia

- [1] S. Perlmutter *et al.* (the Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
- [2] P. de Bernardis *et al.*, *Nature* **404** (2000) 955.
- [3] F. Jüttner, *Ann. der Phys.* **Bd 116** (1911) S. 145.
- [4] W. Pauli, *Theory of Relativity*, (Dover, 1981).
- [5] G. de Berredo-Peixoto, I. L. Shapiro and F. Sobreira, *Mod. Phys. Lett.A.* **20**, **2723** (2005).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley and Sons. Inc., 1972).
- [7] S.A. Bludman and M.A. Ruderman, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 255.
- [8] T. Appelquist and J. Carazzone, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2856.
- [9] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, (Academic Press, 2003).
- [10] J.C. Fabris, I. L. Shapiro, J. Solà, *Density Perturbations for Running Cosmological Constant*, gr-qc/0609017.
- [11] T. Padmanabhan, *Structure formation in the Universe*, (Cambridge University Press, 1993).

- A. Albrecht, P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220.
- [12] P.J.E. Peebles, *Physical Cosmology*, (Princeton University Press, 1993).
- [13] A.D. Linde, *Phys. Lett.* **108B** (1982) 389;
- [14] A.H. Guth, *Phys. Rev.* **23** (1981) 347.
- [15] L.Landau and E.Lifshitz, *Theory of Field*, (Ed. Mir Moscou, 1980).
- [16] C. Cercignani, G.M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, (Birkhäuser, Basel, 2002).
- A.G. Riess *et al.* (the High- z SN Team), *Astronom. J.* **116** (1998) 1009.
- [17] P.J.E. Peebles, *Physical Cosmology*, (Princeton University Press, 1993).
- [18] S. Cole et al, The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications, astro-ph/0501174.
- [19] J. Garriga, A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **61D** (2000) 083502.