

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Faculdade de Economia  
Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada

**Christian Jonnatan Jacobsen Soto Herrera**

Análise dos modelos baseados em *lower partial moments*:  
Um estudo empírico para o Ibovespa e Dow Jones através da distância  
Hansen-Jagannathan

Juiz de Fora

2017

Christian Jonnatan Jacobsen Soto Herrera

Análise dos modelos baseados em *lower partial moments*:

Um estudo empírico para o Ibovespa e Dow Jones através da distância  
Hansen-Jagannathan

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Finanças, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia Aplicada.

Orientadora: Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Herrera, Christian Jacobsen.

Análise dos modelos baseados em *lower partial moments*:

Um estudo empírico para o Ibovespa e Dow Jones através da distância  
Hansen-Jagannathan / Christian Jonnatan Jacobsen Soto Herrera. – 2017.

71 f. : il.

Orientadora: Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade  
de Economia. Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada, 2017.

1. *Asset Pricing*. 2. Dominância Estocástica. 3. *Downside Risk Measures*. 4. Hansen-Jagannathan. I. Perobelli, Fernanda Finotti Cordeiro.  
Discutindo modelos multifatoriais de apreçamento de ativos.

Christian Jonnatan Jacobsen Soto Herrera

**Análise dos modelos baseados em *lower partial moments*:  
Um estudo empírico para o Ibovespa e Dow Jones através da distância  
Hansen-Jagannathan**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Finanças, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia Aplicada.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Paulo César Coimbra Lisboa  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Marcelo Fernandes  
Fundação Getulio Vargas - São Paulo  
Queen Mary University of London.

*Dedico este trabalho a minha mãe, pela dedicação e eterna fonte de força.*

## AGRADECIMENTOS

A minha orientadora Prof<sup>a</sup> Dra Fernanda Perobelli pela orientação prestada, pelo seu incentivo, disponibilidade e apoio que sempre demonstrou.

Aos Professores Paulo César Coimbra Lisbôa e Marcelo Fernandes, membros da Banca Examinadora, por terem atendido ao convite para desempenhar este papel, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho.

Ao PPGEA pelo corpo acadêmico e excelente estrutura disponibilizada.

A UFJF pelo apoio financeiro que tornou possível este trabalho.

A minha família, minha mãe Graça, meu pai Christian, minha irmã Catharine e minha tia Nádia, pelo apoio e carinho que sempre me prestaram.

Aos colegas e amigos do PPGEA pelo apoio e amizade. Em especial aos amigos Ricardo, Carlos, Luciano, Izak, Jean, Filipe e Alexandre.

A minha namorada Mariana pelo apoio, paciência, carinho e companheirismo.

”Dai-me a boa política; dar-vos-ei boas finanças”  
(Barão Louis)

## RESUMO

Esta dissertação propõe testar empiricamente, através de otimizações *in sample*, os modelos de *downside risk*, Sortino, *Upside Pontential Ratio*, Omega e Kappa, comparado-os com o tradicional CAPM, derivado a partir da fronteira de média e variância, utilizando as ações listadas no Ibovespa e Dow Jones (DJIA) para construção de carteiras de mercado para cada um dos modelos. Estas duas classes de modelos distinguem-se quanto aos pressupostos e à mensuração do risco. Enquanto o CAPM considera apenas os dois primeiros momentos da distribuição de retornos, as outras medidas levam em conta os momentos superiores. Através da distância Hansen-Jagannathan, que mede o erro de mensuração do Stochastic Discount Factor (SDF) gerado pelos modelos, observou-se grande distinção dos modelos nos dois mercados. Enquanto o CAPM performou melhor no Dow Jones, os modelos de *downside risk* apresentaram melhores resultados para o Ibovespa, sugerindo vantagem na utilização destes modelos em mercados com menor liquidez e maior assimetria.

Palavras-chave: *Asset Pricing*. Dominância Estocástica. *Downside Risk Measures*. *Hansen-Jagannathan distance*.

## ABSTRACT

This dissertation proposes empirically test the downside risk models, Sortino, Upside Potential Ratio, Omega and Kappa, by comparing them with the traditional CAPM, derived from the mean and variance boundary, using the listed shares in the Ibovespa and Dow Jones (DJIA) for the construction of market portfolios for each of the models. These two classes of models are distinguished in terms of assumptions and risk measurement. While the CAPM considers only the first two moments of the returns distribution, the other measures take into account the higher moments of such distributions. The Hansen-Jagannathan distance, which measures the Stochastic Discount Factor (SDF) measurement error generated by the models, showed a great distinction of the models in the two markets. While the CAPM performed better in the Dow Jones, the downside risk models presented better results for the Ibovespa, suggesting an advantage in the use of such models in markets with lower liquidity and greater asymmetry.

Key-words: Asset Pricing. Stochastic Dominance. Downside Risk Measures. Hansen-Jagannathan distance.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Distribuições com Mesma Média, Variância e Curtose . . . . .	37
Figura 2 – Distribuições Simétricas com Mesma Média e Variância . . . . .	38
Figura 3 – Omega Performance Measure . . . . .	40
Figura 4 – DWJ - Retorno Acumulado Anual . . . . .	48
Figura 5 – DWJ - Retorno Acumulado do Período . . . . .	48
Figura 6 – IBOV - Retorno Acumulado Anual . . . . .	50
Figura 7 – IBOV - Retorno Acumulado do Período . . . . .	51
Figura 8 – Gráfico de Dispersão DWJ . . . . .	65
Figura 9 – Gráfico de Dispersão IBov . . . . .	69

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>TEORIAS MODERNAS DE PORTFÓLIO . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	Markowitz e a abordagem Média-Variância . . . . .	13
2.2	Capital Asset Pricing Model (CAPM) . . . . .	14
2.3	Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM) . . . . .	16
2.4	Arbitrage Pricing Theory (APT) . . . . .	16
2.5	Consumption-based Capital Asset Pricing Model (CCAPM) . . . . .	17
2.6	Modelo de Fatores de Fama e French . . . . .	18
<b>3</b>	<b>TESTES EMPÍRICOS . . . . .</b>	<b>20</b>
3.1	CAPM . . . . .	20
3.2	ICAPM . . . . .	21
3.3	CCAPM . . . . .	22
3.4	APT . . . . .	22
3.5	Modelos Fatoriais . . . . .	24
<b>4</b>	<b>DA MÉDIA-VARIÂNCIA AO FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO . . . . .</b>	<b>26</b>
4.1	Fronteira Média-Variância . . . . .	26
4.2	Escolha Intertemporal . . . . .	27
4.3	Fator Estocástico de Desconto . . . . .	29
<b>5</b>	<b>MÉTRICA DE AVALIAÇÃO DE MODELOS . . . . .</b>	<b>31</b>
5.1	Hansen-Jagannathan . . . . .	31
5.2	Distância Hansen-Jagannathan . . . . .	31
<b>6</b>	<b>UTILIDADE ESPERADA E DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA</b>	<b>34</b>
6.1	Utilidade Esperada . . . . .	34
6.2	Dominância Estocástica . . . . .	35
6.3	Momentos Superiores . . . . .	37
<b>7</b>	<b>MODELOS DE LOWER PARTIAL MOMENTS . . . . .</b>	<b>39</b>
7.1	Índice de Sortino . . . . .	39
7.2	Medida OMEGA . . . . .	40
7.3	Sharpe-Omega . . . . .	41
7.4	Medida KAPPA . . . . .	42

7.5	Upside Potential Ratio . . . . .	43
<b>8</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS DE MERCADO . . . . .</b>	<b>44</b>
8.1	Base de Dados . . . . .	44
8.2	Método de Otimização . . . . .	44
8.3	Estimação do SDF . . . . .	45
<b>9</b>	<b>ANÁLISE DESCRITIVA E COMPARATIVA . . . . .</b>	<b>47</b>
9.1	Descrição dos Resultados . . . . .	47
9.1.1	Dow Jones . . . . .	47
9.1.2	Bovespa . . . . .	49
9.2	Previsões . . . . .	52
9.3	Teste da Distância H-J . . . . .	53
9.3.1	H-J Dow Jones . . . . .	53
9.3.2	H-J Ibovespa . . . . .	53
<b>10</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>ANEXO A – Prova CRRA com <math>\gamma = 1</math> . . . . .</b>	<b>62</b>
	<b>ANEXO B – Pressupostos GMM . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>ANEXO C – Ações Dow Jones . . . . .</b>	<b>64</b>
	<b>ANEXO D – Dow Jones Série Completa . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>ANEXO E – Estatística descritiva Carteiras Dow Jones . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>ANEXO F – Estatísticas de teste DWJ . . . . .</b>	<b>67</b>
	<b>ANEXO G – Ações Bovespa . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>ANEXO H – Ibovespa Série Completa . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>ANEXO I – Estatísticas descritivas Carteiras Bovespa . . . . .</b>	<b>70</b>
	<b>ANEXO J – Estatísticas de Teste IBOV . . . . .</b>	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As teorias modernas de apreçamento de ativos se baseiam na análise das variáveis que impactam o comportamento dos investidores na escolha de portfólio e na determinação do fator de desconto a ser utilizado na formação de preços. Para tal, consideram-se os diferentes estados da natureza possíveis e as probabilidades atribuídas a cada um destes. Assim, podemos dizer que esta abordagem se pauta no estudo das expectativas dos investidores em ambiente de incerteza.

Os trabalhos seminais de Markowitz (1952), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) foram revolucionários para o campo de apreçamento de ativos arriscados. Os autores, separadamente, desenvolveram medidas de risco para análise de ativos, com base na variância destes ativos, o que à época contrapunha o modelo de seleção vigente em que o ótimo sempre se daria pela seleção dos ativos com maiores retornos somente.

A partir de então, surgiram diversos trabalhos analisando e propondo novas formas e metodologias de análise para mensuração do risco. À medida que estes modelos e críticas aos trabalhos anteriores foram se desenvolvendo, maiores dificuldades foram sendo impostas na solução do problema de maximização, inicialmente do retorno, posteriormente da utilidade esperada, do consumo intertemporal e assim por diante.

No início da década de 1970, Bawa (1973) apresentou um ferramental revolucionário para solução de diversas das premissas restritivas e das aplicações práticas dos modelos propostos. Ao demonstrar a dominância estocástica das ordens superiores dos momentos das distribuições, propiciou a flexibilização de diversas hipóteses restritivas inerentes aos modelos baseados em consumo e utilidade esperada.

Desta nova abordagem, originaram-se os modelos de *downside risk*, que consideram os momentos de ordens superiores para mensuração do risco dos ativos e carteiras financeiras. Dentre estes, o índice de Sortino, a medida Omega, Sharpe-Omega, Kappa e Upside Potential Ratio, todos apresentados ao longo deste trabalho.

Este trabalho tem por objetivo verificar de que forma os modelos de *downside risk* performam nos mercados, comparando-os à abordagem tradicional do *Capital Asset Pricing Model*, na determinação das carteiras de mercado para os mercados brasileiro e americano, analisados a partir das ações que compõem os tradicionais indicadores de mercado (Ibovespa e Dow Jones-DJIA). Para tanto, são realizadas otimizações das carteiras de mercado por cada um dos modelos, utilizando dados *in sample*. A partir dessas carteiras, são estimados os Stochastic Discount Factors (SDF's) para cada modelo nos dois mercados. Como método de análise do impacto dos momentos superiores sobre a otimização de carteiras, é utilizada a distância Hansen-Jagannathan, que mede o erro de mensuração dos modelos. Esta análise contribui para a literatura no sentido de revelar se a abordagem que vem sendo utilizada pelas novas medidas de risco de fato é empiricamente relevante

quando se trata de otimização de carteiras.

## 2 TEORIAS MODERNAS DE PORTFÓLIO

A teoria de utilidade esperada nos moldes propostos por Von, John e Morgenstern (1944)<sup>1</sup>. Tal teoria foi de suma importância para o desenvolvimento das ciências econômicas e finanças, com maior destaque para o campo de apreçamento de ativos. Neumann e Morgenstern utilizaram os conceitos apresentados por Bernoulli (1738) sobre utilidade marginal decrescente<sup>2</sup> e maximização de utilidade esperada aplicando-os ao conceito de decisão em ambiente arriscado. Von, John e Morgenstern (1944) demonstraram que a teoria de utilidade esperada, nos moldes de Bernoulli (1738), podia ser explicada por um conjunto de axiomas aplicados à escolha dos agentes.

Os conceitos sobre utilidade esperada apresentados por Von, John e Morgenstern (1944) serviram de alicerce para o desenvolvimento da teoria de Markowitz (1952), sobre seleção de ativos e determinação de prêmio pelo risco em ambiente de incerteza, como bem observou Steinbach (2001).

Posteriormente Arrow (1965), Pratt (1964), dentre outros, trouxeram grande contribuição aos diversos campos da ciência que trabalham com risco, principalmente economia e finanças, ao formularem o conceito de aversão ao risco, derivada dos conceitos de utilidade esperada e prêmio de risco. A metodologia desenvolvida na mensuração da aversão ao risco dos agentes foi de suma importância para as teorias de apreçamento de ativos que surgiram nos anos seguintes, principalmente pela relação próxima que teve com a literatura de dominância estocástica, introduzida na análise econômica por Hadar e Russell (1969) e desenvolvida por Rothschild e Stiglitz (1970) e Ekern (1980).

### 2.1 Markowitz e a abordagem Média-Variância

A ideia de escolha de portfólio proposta por Markowitz (1952) reformulou as pesquisas na área financeira e econômica ao combinar os conceitos de maximização de riqueza e minimização de risco aplicados à escolha de portfólio. Markowitz verificou que os conceitos de utilidade esperada e variância deveriam ser combinados de maneira a

<sup>1</sup> Von, John e Morgenstern (1944) observa que, sob situação de incerteza, os indivíduos agirão de modo a obter a maior utilidade esperada possível, que é função do somatório dos produtos das utilidades e probabilidades sobre todos os resultados possíveis. A teoria da utilidade esperada baseia-se na ideia de  $L$  loterias, cada qual com um determinado resultado associado  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  e as suas probabilidades associadas  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  com  $\sum p = 1$  tal que:

$$EU(L) = U(c_1)Xp_1 + U(c_2)Xp_2 + \dots + U(c_n)Xp_n \quad (2.1)$$

<sup>2</sup> O conceito original de Bernoulli é o de *emolumentum medium*, enquanto a teoria do utilitarismo é iniciada por Bentham e Mill, cujo conceito de utilidade é análogo. As traduções posteriores para o latim do trabalho de Bernoulli optaram por utilizar o termo já usual “utilidade” (*utility*) para nomear esse conceito (BERNOULLI, 1954).

formarem uma fronteira Risco e Retorno<sup>3</sup> entre os ativos analisados. Além disso, este trabalho também testou e rejeitou a hipótese de que sempre haverá uma carteira com máximo valor esperado e mínima variância, restabelecendo novos conceitos e objetivos no processo de otimização de carteira. A principal contribuição de Markowitz foi ter distinguido a variância dos retornos de um ativo individual e o risco da carteira. Nos testes realizados por Markowitz, verificou-se que investir em muitos ativos não é condição suficiente para minimização da variância, sendo também necessário evitar que ativos com alta correlação estejam presentes em uma mesma carteira.

## 2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Na década de 1960, Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) (SLM) realizaram estudos voltados à teoria de apreçamento de ativos dinâmicos, iniciando uma nova vertente teórica em finanças<sup>4</sup> (FAMA; FRENCH, 2004).

O CAPM de (SLM) é baseado no trabalho de Markowitz (1959) sobre escolha de portfólio de único-período em tempo discreto. No modelo, assume-se que os investidores são avessos ao risco na escolha do melhor conjunto de ativos. A escolha da carteira de ativos se dá no período  $t - 1$ , a qual produz um retorno estocástico em  $t$ . Assim, os investidores se preocupam apenas com portfólios que tenham eficiência "média-variância" de forma a (1) minimizar a variância do retorno do portfólio dado o retorno esperado e (2) maximizar o valor esperado dado o risco máximo (mensurado pela variância) que o investidor está disposto a incorrer (FAMA; FRENCH, 2004).

Sharpe (1964) e Lintner (1965) adicionam duas premissas ao modelo de Markowitz de modo que a carteira selecionada seja "média-variância" eficiente. A primeira é a "plena concordância", segundo a qual os investidores assumem a distribuição conjunta dos retornos dos ativos como fixa de  $t - 1$  a  $t$ . A segunda é a existência de uma taxa livre de risco sob a qual os investidores podem emprestar e tomar empréstimos livremente, independente do montante.

Definem-se então os pressupostos assumidos por (SLM) na caracterização do

<sup>3</sup> Risco pode ser definido em um contexto em que um determinado agente econômico se depara com uma situação envolvendo aleatoriedade na forma de exogeneidade específica ou cientificamente calculável, probabilidades objetivas (DURLAUF; BLUME et al., 2008). Retorno pode ser entendido como,  $Retorno = (\text{preço em } t - \text{preço em } t-1) / \text{preço em } t-1$ .

<sup>4</sup> Apesar de Sharpe, Lintner e Mossin serem reconhecidos pelo desenvolvimento do CAPM, Treynor (1962) já havia idealizado um modelo semelhante ao decompor o retorno esperado em (1) componente livre de risco  $r$  e (2) componente de prêmio pelo risco  $r^*$  para então analisar o fator de desconto  $b$  sob a perspectiva de período único, onde  $b = 1 / (1 + r)$  e então analisar a performance esperada da carteira  $rC$ , isto é, o retorno do capital a taxa livre de risco vezes  $(1 + r) \sum x_i a_i$  que é o retorno esperado em relação ao prêmio pelo risco  $a_i$ . Treynor (1962) define o prêmio esperado pelo risco do portfólio  $\mu$  como o valor presente do prêmio de risco do portfólio, French (2003).

investidor representativo e do mercado como: (i) agentes racionais e avessos ao risco; (ii) agentes tomadores de preços; (iii) é possível tomar e emprestar livremente a uma mesma taxa livre de risco; (iv) agentes possuem expectativas homogêneas com relação ao comportamento da distribuição dos retornos; (v) não existem custos de transação; (vi) todos os ativos são completamente divisíveis; (vii) a carteira de mercado é eficiente (em termos de média-variância); (viii) ativos são disponibilizados em quantidades fixas para negociação.

A estrutura do CAPM considera a existência de  $N$  ativos arriscados, tal que  $i = 1, \dots, N$ . A condição que se aplica à carteira de mercado  $M$  para que esta apresente mínima variância é dada por:

$$E(R_i) = E(R_{ZM}) + [E(R_M) - E(R_{ZM})]\beta_{iM} \quad (2.2)$$

em que:

$E(R_i)$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,

$\beta_{iM} = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$  é o beta de mercado do ativo  $i$ ,

$E(R_{ZM})$  é o retorno esperado dos ativos que apresentam betas de mercado iguais a zero, isto é, não estão correlacionados com o retorno de mercado

$E(R_M) - E(R_{ZM})$  é o prêmio pelo risco.

Pelo modelo (SLM), quando há concessão de empréstimos à taxa livre de risco  $R_f$ , o retorno esperado dos ativos não correlacionados ao retorno de mercado deve ser igual a  $R_f$ . A Equação 2.2 pode então ser reescrita como função da taxa livre de risco acrescida do prêmio pelo risco, na forma:

$$E(R_i) = R_f + \beta_{iM}[E(R_M) - R_f] \quad (2.3)$$

O Modelo CAPM (SLM) assume diversos pressupostos simplificadores que são comumente violados na prática, tais como existência de ativo livre de risco na economia, horizonte temporal único, função de utilidade quadrática entre os investidores, existência de uma carteira de mercado com ativos equilibrados, mercados completos e sem fricções, inexistência de custos de transações, dentre outros pressupostos. Respeitadas essas premissas, o modelo explica o retorno esperado dos ativos como função linear de três variáveis, a taxa de retorno do ativo livre de risco, a taxa de retorno esperado da carteira de mercado e o beta, que é o coeficiente de sensibilidade dos retornos de determinado ativo em relação aos retornos da carteira de mercado.

Os trabalhos subseqüentes ao CAPM buscaram relaxar estas hipóteses restritivas do modelo. Um dos primeiros trabalhos nesta linha foi o de Black (1972) que relaxou a

hipótese original de existência de um ativo livre de risco na economia. O autor propôs como alternativa uma carteira de ativos comprados e vendidos de beta zero. Outro pressuposto que Black acreditava não ser condizente com a realidade é a obtenção de empréstimos irrestritos à taxa livre de risco. Para Black, ainda que se considere a existência de uma taxa livre de risco para tomada de empréstimos, estes seriam restritos e difeririam no custo. Os demais pressupostos do CAPM não foram discutidos em Black (1972).

### 2.3 Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM)

Em seguida, Merton (1973) desenvolveu o *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (ICAPM), modelo multifatorial que considera o apreçamento de ativos em tempo contínuo. Merton nega a hipótese de expectativas homogêneas entre os investidores; desta forma, se as expectativas são mutáveis ao longo do tempo, não se poderia analisar o modelo como sendo de um único período. Pelo ICAPM, na seleção da carteira de mercado ótima, o investidor busca o máximo retorno esperado com a menor variância possível nos  $H$  estados da natureza. A principal contribuição do modelo, em relação ao CAPM, é a inclusão do coeficiente de sensibilidade dos ativos aos diferentes estados da natureza. O ICAPM é descrito como:

$$E_t(r_{i,t+1}) - r_{f,t} = \alpha Cov_t(r_{i,t+1}, r_{m,t+1}) + \beta_{i,j} Cov_t(r_{i,t+1}, Z_{j,t+1}) \quad (2.4)$$

em que  $E_t(r_{i,t+1})$  representa a expectativa de retorno em  $t$  do  $i$  –ésimo ativo arriscado, com  $i = 1, \dots, N$ ,  $r_{f,t}$  é o retorno em  $t$  do ativo livre de risco  $\alpha$  é coeficiente de aversão ao risco do investidor  $r_{i,t+1}$  é o retorno do ativo  $i$  no período  $t + 1$   $r_{m,t+1}$  é o retorno da carteira de mercado  $\beta_{i,j}$  é o coeficiente de sensibilidade do ativo  $i$  em relação à  $j$  –ésima variável de estado  $Z$ , com  $j = 1, \dots, H$ .

A manutenção de algumas premissas do modelo original, principalmente a de expectativas homogêneas dos investidores, torna o modelo sujeito às mesmas críticas inerentes ao CAPM.

### 2.4 Arbitrage Pricing Theory (APT)

Ross (1976) desenvolveu uma nova teoria para precificar ativos financeiros, o *Arbitrage Pricing Theory* (APT), como alternativa ao modelo de média-variância de Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). O modelo de Ross, baseado na premissa de não-arbitragem, tratou a questão da mutabilidade do coeficiente de aversão ao risco em relação à riqueza dos agentes, conceito que foi baseado no trabalho de Pratt (1964), e relaxou várias hipóteses do modelo CAPM original, como normalidade do retorno dos ativos e função de utilidade quadrática dos agentes. O APT sustenta que em equilíbrio o retorno esperado dos ativos financeiros pode ser descrito como função linear dos  $k$  fatores

de natureza macroeconômica, cada qual associado a um coeficiente  $\beta$  específico, mais o ativo livre de risco, tratado como constante.

O modelo de Ross estabelece a seguinte relação linear para determinação do retorno dos ativos:

$$E(r_i) = \lambda_0 + \lambda_k \beta_{i,k}, \text{ onde } \beta_{i,k} = \frac{\text{cov}(r_i, f_k)}{\text{var}(f_k)} \quad (2.5)$$

em que  $E(r_i)$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $\lambda_0$  é uma constante,  $\lambda_k$  é o prêmio de risco associado ao  $k$ -ésimo fator de risco e  $\beta_{i,k}$  é o coeficiente de sensibilidade do ativo arriscado com os  $k$  fatores macroeconômicos.

Diferente do CAPM, que necessita de todos os ativos da economia na composição da carteira de mercado, o APT sugere a utilização de apenas um subconjunto destes ativos.

Apesar de partir de premissas menos restritivas, se comparado ao CAPM, a implementação do APT envolve grande dificuldade quanto à definição de uma estrutura de fatores que seja relevante para a *proxy* de mercado. Empiricamente, assim como o CAPM, o modelo também apresenta deficiências, como a não observância de linearidade entre retornos e fatores, conforme apontado por Shanken (1982).

## 2.5 Consumption-based Capital Asset Pricing Model (CCAPM)

Rubinstein (1976), Breeden e Litzenberger (1978), Breeden (1979) e Lucas (1978) reestruturam o CAPM original ao tratar o fator de risco que determina os preços dos ativos como sendo função da taxa marginal de substituição do consumo. Breeden demonstrou que o prêmio do retorno esperado que um ativo deve oferecer, relativamente ao ativo livre de risco, é proporcional à covariância do seu retorno com o incremento do consumo agregado, (DUFFIE; ZAME, 1989).

O *Consumption-based Capital Asset Pricing Model* ou CCAPM, derivado a partir da Equação de Euler para o consumo, considera a existência de um fator estocástico de desconto  $m_{s,t}$  que é função da taxa de substituição intertemporal do consumo no período  $s$  pelo consumo em  $t$ , na forma  $\beta^{s-t}[u'(c_s)/u'(c_t)]$ , onde  $\beta^{s-t}$  é taxa de preferência temporal e  $u'(c_{s,t})$  são as utilidades marginais obtidas pelo consumo em  $s$  e  $t$ , (MEHRA, 2012). Diferente dos demais modelos apresentados, o CCAPM não possui uma única forma funcional, pois depende da função utilidade utilizada na sua derivação. Pelo CCAPM, o retorno esperado de um ativo arriscado depende de sua correlação com o consumo. Ativos negativamente correlacionados com o consumo terão um prêmio de risco menor (preço maior) do que os que apresentam alta correlação. O modelo, que tem por solução a

Equação de Euler<sup>5</sup>, precifica os ativos conforme se segue:

$$E_t[R_{i,t+1}] = r_{f,t+1} - \frac{Cov[u'(C_{t+1}), (1 + R_{i,t+1})]}{E_t[u'(C_{t+1})]} \quad (2.6)$$

O trabalho de Lucas (1978) no desenvolvimento da equação de Euler foi de suma importância pois, além de preservar a simplicidade do CAPM clássico, possibilitou o link entre os modelos de *asset pricing* e os fatores de risco macroeconômicos. A inclusão da taxa marginal de substituição do consumo pelo CCAPM possibilitou a captura, pelo modelo, dos choques econômicos, representados por variações no consumo. O modelo foi o precursor para os modelos de apreçamento baseados em consumo que se seguiram.

Apesar da grande contribuição teórica atribuída ao *Consumption* CAPM, assim como ocorrido com o CAPM, o modelo não se demonstrou satisfatório desempenho empírico.

## 2.6 Modelo de Fatores de Fama e French

Durante os anos 1980 e 1990, pesquisadores começaram a olhar para outras características dos ativos capazes de representar riscos, além de seus betas. Diversos desvios ou anomalias do CAPM foram descobertos, (CAMPBELL, 2000). Banz (1981) reportou o “efeito tamanho” ou *Market Equity* (ME), calculado como o produto do preço da ação pela quantidade emitida. De acordo com esse feito, pequenos ativos (baixo valor de mercado) apresentariam mais excesso de retorno médio do que o explicado pelo CAPM. Apesar do fato dos ativos menores apresentarem maiores betas e maiores retornos médios do que o ativos grandes, a relação entre retorno médio e beta para as carteiras de tamanho classificadas é mais acentuada do que a *Security Market Line* (SML) do CAPM prevê.

Fama e French (1992) partem das anomalias observadas nos modelos propostos até então e discutem o efeito valor e tamanho. Verificam que, quando os testes não consideravam estes efeitos, a relação entre os  $\beta$ 's e os retornos dos ativos tornava-se achatada, ou apresentava leve tendência ao declínio. Stattman (1980) e Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) observam que os retornos médios das ações norte-americanas estão positivamente relacionados com o índice de "*firms's book value*" ou patrimônio contábil (BE) em relação ao seu valor de mercado, ME. Basu (1983), mostra que os índices "*earning-price*" (E/P) ajudam a explicar a variação *cross-sectional* dos retornos médios dos ativos norte-americanos. Bhandari (1988) encontra uma relação positiva entre alavancagem e retorno médio, mostrando que a primeira ajuda a explicar o retorno médio dos ativos em testes que incluem ME e  $\beta$ .

---

<sup>5</sup> Tal representação será vista mais adiante neste trabalho.

Basu (1983), Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) e Fama e French (1992) encontraram o chamado “efeito valor”, segundo o qual os retornos são relacionados ao valor de mercado das firmas. Jegadeesh e Titman (1993) documentaram o “efeito momento” no qual as ações com altos retornos nos últimos três a 12 meses tendem a performar melhor no futuro.

Fama e French (1992) constataram que, apesar do trabalho de Black (1972) ter encontrado forte correlação entre os betas dos ativos e o retorno médio das ações, para dados históricos mais atuais, após 1966, tal relação não se manteve. Os autores verificaram que outras características como o tamanho da firma (SMB) e razão entre valor contábil e valor de mercado (HML) são fatores que devem ser incorporadas ao modelo, afim de torná-lo melhor ajustado para explicar os retornos das ações. Fama e French (1993) testam o modelo CAPM com a inclusão destes dois fatores. Através do ordenamento das ações quanto ao tamanho e *book-to-market equity*, ou razão BE/ME, eles constroem 25 carteiras para testar os fatores de risco associados ao efeito tamanho (SMB<sup>6</sup>) e valor (HML<sup>7</sup>). O modelo de 3 fatores é construído conforme se segue:

$$R_i - r_f = \alpha + \beta_{i,m}(R_m - r_f) + \beta_{i,s}SMB + \beta_{i,v}HML + \epsilon_i \quad (2.7)$$

em que  $\beta_{i,m,s,v}$  corresponde à sensibilidade do ativo  $i$  ao mercado, SMB e HML, respectivamente  $\epsilon_i$  é o erro de medida e  $\alpha$  é o intercepto da regressão.

Carhart (1997) adiciona outro fator ao modelo de Fama e French, com base no fator capturado por Jegadeesh e Titman (1993), o *momentum anomaly*, que está relacionado à ineficiência do mercado aos casos de reações lentas a novas informações. Os testes realizados por Carhart sugerem três importantes "regras" que devem ser observadas para maximização dos ganhos com investimentos: (1) evitar fundos com persistência de baixa *performance*, (2) fundos com elevados retornos no último ano apresentam retornos mais altos que a média no ano seguinte, mas não nos anos posteriores e (3) os custos em taxas administrativas, custos de transação e taxas de carregamento têm um impacto direto e negativo sobre o desempenho.

A grande dificuldade dos modelos fatorais decorre da verificação da significância estatística dos coeficientes (fatores) de risco inseridos nas *cross-sectional* dos retornos esperados. Problemática esta que pode estar relacionada ao fato desses fatores serem obtidos como resultado de exercícios puramente empíricos, sem teoria de suporte. Harvey, Liu e Zhu (2015) sintetizam centenas de trabalhos que propuseram fatores de risco para explicar o retorno dos ativos e observam que muitos, dentre os 316 fatores testados, apresentem significância casual, mas não possuem robustez econômica ou estatística.

<sup>6</sup> O *Small Minus Big* é calculado com base no retorno médio dos 3 portfólios de menor valor de mercado menos o retorno médio dos portfólios de maior valor.

<sup>7</sup> *High minus Low* é calculado de forma análoga ao SML.

### 3 TESTES EMPÍRICOS

Em 1964, a Universidade de Chicago supriu, em grande parte, a necessidade de realização de testes empíricos sobre os modelos de apreamento ao finalizar um banco de dados financeiro contendo informações pertinentes aos ativos americanos. Somam-se a este fato as novas capacidades de processamento computacional do *Center for Research in Securities Prices* (CRSP) parte integral da *University of Chicago's Booth School of Business* fundado em 1960, como propulsores da análise empírica dos modelos de *asset pricing*.

#### 3.1 CAPM

Lintner (1969) testou o CAPM de forma ex-post (utilizou os retornos anuais de mais de 300 ações listadas na *New York Stock Exchange* (NYSE)) adicionando o risco não sistemático, mensurado pela variância dos resíduos, à regressão original. Nos testes realizados, a hipótese nula de que o coeficiente ligado ao risco não sistemático fosse zero foi rejeitada, indicando que o  $\beta$  do modelo original não seria a única medida de risco relevante.

Em relação aos trabalhos empíricos que se seguiram com o intuito de verificar a eficiência do modelo CAPM e dos betas gerados, se destacam Black (1972) e Fama e MacBeth (1973). O primeiro trabalho testou o modelo CAPM, com e sem a presença de um ativo livre de risco no mercado, utilizando dados mensais para todas as ações listadas na *New York Stock Exchange* no período compreendido entre janeiro de 1926 e março de 1966. Os autores verificaram que os betas gerados apresentaram valores distintos daqueles previstos pelo modelo teórico. Dois fatores puderam ser percebidos para justificar o ocorrido, o primeiro foram os erros decorrentes do fato da carteira de mercado utilizada, apesar de próxima, não ser a verdadeira carteira de mercado, o segundo foi a impossibilidade, quando da ausência de um ativo livre de risco, de o modelo prever um intercepto igual a zero.

Miller e Scholes (1972) replicaram os testes realizados por Lintner (1969) com o intuito de comprovar se o modelo com a inclusão do risco não sistemático de fato é relevante. Para tanto, utilizando dados de retornos anuais de 631 ações listadas na NYSE entre 1954 e 1963, testaram três modelos, um contendo somente a medida de risco  $\beta$ , outro apenas o risco não sistemático ( $s^2(e_i)$ ) e o terceiro contendo ambos. Os autores verificaram que o  $R^2$  do modelo contendo ambos fatores foi muito superior (0,33) ao do modelo que continha apenas o  $\beta$  (0,19). Apesar dos resultados obtidos inicialmente corroborarem os resultados de Lintner (1969), Miller e Scholes identificaram possíveis vies nos testes, resultado da utilização de estimativas como variáveis independentes na regressão. Desta maneira, os coeficientes estimados poderiam estar super ou subestimados, concluindo que

os testes de Lintner não poderiam ser considerados definitivos devido à utilização dos  $\beta$ 's e das variâncias residuais estimadas como variáveis independentes.

Fama e MacBeth (1973) desenvolveram uma metodologia (*cross-sectional*) para estimar os betas do mercado, corrigindo assim o problema de inferência causado pela correlação entre os resíduos em regressões longitudinais. Eles observaram a existência de um *trade-off* positivo entre risco e retorno, também observaram a presença de fatores estocásticos não lineares entre períodos.

Roll (1977), que mais tarde trabalharia em diversos *papers* em parceria com Ross, mostrou em seu trabalho que os testes empíricos aplicados ao CAPM não eram conclusivos. Seu trabalho se baseou nos testes realizados por Black, Jensen e Scholes e na teoria de Sharpe-Lintner. Roll faz severas críticas a ambos e concluiu que: (a) a teoria de Sharpe-Lintner é falsa ou (b) o portfólio utilizado por Black, Jensen e Scholes não é o verdadeiro portfólio de mercado ou (c) tanto (a) quanto (b) ocorrem. O autor concluiu que os índices de mercado utilizados nos trabalhos empíricos não seriam representativos da verdadeira carteira de mercado, impossibilitando que fossem feitos testes conclusivos sobre o modelo, pois a carteira de mercado na qual o CAPM teórico sustenta-se é composta por todos os ativos arriscados da economia em proporções ótimas.

### 3.2 ICAPM

Brennan, Wang e Xia (2004) testaram os parâmetros do ICAPM e outros modelos intertemporais para o mercado americano utilizando 55 portfólios de setores industriais compreendidos entre janeiro de 1952 e dezembro de 2000. Apesar de terem encontrado significância estatística com o prêmio de risco nas variáveis de estado utilizadas, *Treasury bond yields* e expectativas de inflação, as restrições de preços do modelo foram rejeitadas.

Rubio (1989) aplicou o modelo ICAPM de Merton no mercado acionário espanhol, utilizando dados de mercado entre janeiro de 1967 e dezembro de 1984 e sub-períodos dentro deste. Como ativo de *hedging*<sup>1</sup> utilizou títulos públicos e o ouro. O modelo testado rejeitou fortemente a utilização dos ativos de *hedging*, uma vez que estes apresentaram correlação positiva com o ativo livre de risco.

Faff e Chan (1998) também utilizaram o ouro como ativo de *hedging* para testar o ICAPM no mercado australiano entre janeiro de 1975 e dezembro de 1994 e sub-períodos. Os autores encontraram correlação levemente negativa para o período completo; entretanto, nos sub-períodos, a correlação foi positiva tanto com o ativo livre de risco quanto com a *proxy* de mercado utilizada.

---

<sup>1</sup> Ativo negativamente correlacionado com a variável de estado, taxa de juros, utilizado como proteção ao risco sistemático.

### 3.3 CCAPM

Hansen e Singleton (1983) testaram o modelo baseado em consumo de Rubinstein (1976), Lucas (1978), Breeden (1979) e outros, com o intuito de verificar se o comportamento das séries de tempo de retorno dos ativos gerados através do modelo eram condizentes com a teoria. Os autores estimam os parâmetros de oito variações do modelo, variando os lags de defasagem e a medida de consumo (não duráveis e serviços mais não duráveis). Para tanto, utilizaram dados mensais de retorno de todas as ações listadas na *New York Stock Exchange* entre 1959:2 e 1978:12, dados de consumo, do mesmo período, obtidos do *Forecasting Analysis and Modeling Environment* (FAME) e os títulos do tesouro americano. Os autores encontraram evidências de que a média dos retornos condicionais das ações e títulos do tesouro são inconsistentes com todas as parametrizações do modelo testadas.

Mehra e Prescott (1985) encontraram uma anomalia em relação às teorias de apreçamento. Os autores observaram, através de testes empíricos realizados com dados do mercado norte americano, que o valor médio do prêmio de risco, na série analisada, supera, e muito, o valor esperado com base nas teorias de ciclo econômico. Nas estimações realizadas não foi possível replicar, em intervalos considerados aceitáveis, a média histórica do retorno dos ativos do mercado acionário sobre o retorno dos títulos públicos. Para que a anomalia observada se justificasse, seria necessário que o coeficiente de aversão relativa ao risco,  $\gamma$  (conforme o modelo de Lucas (1978)), tivesse um valor muito superior ao sugerido. Tal dicotomia ficou conhecida como *Equity Premium Puzzle* (EPP).

Catalão e Yoshino (2006) testaram o *Equity Premium Puzzle* para o Brasil e Estados Unidos. A partir de estimativas dos coeficientes de aversão ao risco ( $\alpha$ ) e do fator de desconto intertemporal ( $\beta$ ) pela abordagem *Generalized method of moments* (GMM) verificaram a existência de alternância entre o  $\alpha$  e a covariância entre os retornos reais dos índices e a taxa de crescimento do consumo: quando o  $\alpha$  aumenta, a covariância diminui. Observou ainda a existência de uma relação não linear entre estas duas variáveis, tanto para o caso norte-americano, quanto para o caso brasileiro. Para os dados do mercado acionário brasileiro, tal relação passa a se verificar a partir de elevados valores de aversão relativa ao risco, isto é, a correlação entre o prêmio de risco e a aversão apresentou-se menor para o caso brasileiro comparativamente ao americano. O EPP foi observado em ambos os países, entretanto de forma muito mais acentuada e clara para os dados norte-americanos.

### 3.4 APT

Dhrymes, Friend e Gultekin (1984) testam o modelo APT para dados listados na (NYSE) de 30 ativos, utilizando retornos diários entre 3 de julho de 1972 e 31 de dezembro de 1972, separando-os em grupos de acordo com o tamanho. Os autores verificaram que, quando aplicado a grupos de empresas pequenas, o modelo produz resultados que não são

coesos com a teoria. A análise dos fatores foi indeterminante, não sendo possível aplicar testes de significância estatística sobre os coeficientes individuais de prêmio de risco. O estudo também verificou que os fatores descobertos na investigação do modelo dependem do tamanho do conjunto de ativos considerados, quanto maior o número de ativos, maior o número de fatores de risco encontrados.

Chen, Roll e Ross (1986) utilizaram fatores ligados a variáveis macroeconômicas (inflação, índice da produção industrial, taxa de juros e risco de crédito) para identificar o risco sistemático do mercado acionário. Os resultados obtidos apontaram a existência de uma forte correlação entre os fatores estimados e as variáveis inclusas.

Chen e Jordan (1993) investigaram o poder preditivo do retorno das ações por meio da utilização de duas derivações empíricas do modelo, o *factor loading model* (FLM) e o *macroeconomic variable model* (MVM). O primeiro estima fatores de risco associados ao prêmio de risco e o segundo utiliza variáveis macroeconômicas. Como base de dados, utilizou dados de retornos mensais de 69 ações listadas na NYSE entre janeiro de 1971 e dezembro de 1986, com não mais do que 100 *missings* ao longo do período. As ações foram divididas em diversos grupos de tamanho 30, com pesos iguais para todos ativos. Do trabalho, os autores concluem que não há grande perda de eficiência entre a utilização do FLM ou do MVM e reportam as vantagens da utilização do segundo, devido às interpretações econômicas que este possibilita. Entretanto, admitem a dificuldade em determinar o conjunto de variáveis macroeconômicas a serem utilizadas, por não haver uma diretriz seletiva destes, sugerindo que outras variáveis possam gerar melhores ou piores resultados.

Schor, Bonomo e Pereira (2002) replicaram os testes de Chen, Roll e Ross (1986) testando a inclusão de variáveis macroeconômicas na mensuração do risco sobre o retorno das carteiras. Eles utilizaram dados das ações negociadas na BOVESPA para um período de 10 anos, compreendidos entre 1987 e 1997. As estimativas encontradas referentes ao prêmio de risco dos fatores não foram significativas, já as variáveis macroeconômicas incluídas apresentaram poder explicativo na maioria das carteiras testadas.

Araújo (2005) testou distintas especificações para o SDF utilizando a fronteira de Hansen-Jagannathan para o mercado brasileiro com base nas utilidades do tipo CRRA (constant relative risk aversion), Formação de Hábito e na utilidade de Epstein e Zin (1991). Para estimação dos coeficientes foi utilizado o (GMM). Os resultados obtidos, apesar de terem sido apontados pelo próprio autor com ressalva, indicam inexistência do EPP para o Brasil.

### 3.5 Modelos Fatoriais

A metodologia de estimação desenvolvida por Fama e MacBeth (1973) foi de suma importância aos estudos empíricos que se seguiram, pois corrigiu alguns problemas apontados por Miller e Scholes (1972) nos testes até então realizados. Fama e MacBeth (1973) utilizaram dados mensais das ações listadas na NYSE entre 1926 e 1968 para estimar os retornos dos ativos e o índice representativo do mercado. Os pressupostos do modelo de regressão e a transformação do CAPM em um modelo *ex-post* na forma de expectativas, possibilitou a utilização dos dados já realizados como observações nos testes.

Luce e Jr. (1979) replicaram os testes realizados por Fama e MacBeth (1973) para as ações listadas na bolsa de São Paulo. Algumas correções tiveram de ser feitas ao modelo devido ao processo inflacionário vivido à época. Foram utilizados dados referentes a todas as ações que tiveram ao menos uma negociação em todos os meses no período compreendido entre 1970 e 1979. Os resultados obtidos não rejeitaram as hipóteses de relação linear entre risco sistemático e retorno e de que o  $\beta$  seja uma medida completa de risco. O estudo não conseguiu confirmar a hipótese de Miller e Scholes (1972) do ajustamento do CAPM para testes de curta duração.

Kothari, Shanken e Sloan (1995) testaram o modelo de Fama e French (1992) em diversos cortes transversais num período compreendido entre 1927 e 1990. Os resultados obtidos revelaram a existência de uma fraca correlação entre o BME e o retorno dos ativos, entretanto, admitem a possível existência de um viés sobre as evidências apresentadas.

Cochrane (2001) mostrou, com base na observação de Arora, Jagannathan e Wang (2001), que a estimação realizada por Kan e Zhou (1999) parte de pressupostos incomuns. Eles estimaram a *Market Line* (ML) já contendo informações referentes ao retorno médio do mercado *ex-ante* pelo modelo CAPM, enquanto o GMM do SDF estima esses parâmetros. Cochrane mostrou que a estimação dos dois modelos de maneira simétrica implica em uma *performance* pelo menos tão boa da metodologia GMM/SDF em comparação ao CAPM.

Rogers e Securato (2009) também testaram, para o caso brasileiro, o modelo de três fatores de Fama e French (1992). Observaram o mesmo que Kothari, Shanken e Sloan (1995), ou seja, apesar do modelo de Fama e French ser um bom previsor para o retorno das ações, o efeito BME não se mostrou significativo. Kan e Zhou (1999) atraíram grande atenção da academia com os resultados apresentados em seu trabalho. Os autores testaram a precisão da abordagem SDF contra a metodologia tradicional do CAPM e observaram resultados inesperados. Nos testes realizados, observaram dois problemas potenciais na metodologia SDF quando os retornos dos ativos são gerados por um modelo fatorial linear: (1) não é confiável quando se trata da estimação do prêmio de risco e (2) as especificações dos testes sob esta abordagem têm baixo poder em detectar modelos mal especificados.

Dos testes empíricos descritos neste capítulo, observa-se uma grande dificuldade

tanto na busca das corretas variáveis de mercado e estado dos modelos baseados em consumo e de não arbitragem, como na estimação correta e significativa dos parâmetros de risco dos modelos multifatoriais. Os modelos teóricos apresentados têm em comum a inobservância das variáveis que os sustentam quando analisados empiricamente. A proposta do presente trabalho busca verificar se modelos menos restritivos podem gerar melhores resultados empíricos, principalmente no que se refere à seleção da carteira de mercado representativa.

## 4 DA MÉDIA-VARIÂNCIA AO FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO

### 4.1 Fronteira Média-Variância

O conceito de fronteira eficiente, utilizado na seleção de carteiras, proposto por Markowitz (1952) inegavelmente foi de suma importância no desenvolvimento da teoria de apregoamento de ativos. A fronteira eficiente é definida como o conjunto de carteiras para as quais, para um dado retorno (Valor Esperado), tem-se o menor risco (Volatilidade) possível. A ideia é determinar uma única carteira que maximize a função de utilidade<sup>1</sup> do investidor dado seu nível de aversão ao risco. Duas abordagens principais podem ser utilizadas na seleção de carteiras pela análise média-variância, são elas:

Maximizar o valor esperado sujeito a variância:

$$Max : \sum_{i=1}^N \mu_i x_i \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N x_i x_j \sigma_{ij} \leq v_c \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4.3)$$

$$x_i \geq 0, \quad (4.4)$$

em que  $N$  é o número de ativos,  $x_i$  é a proporção do ativo  $i$  na carteira,  $\sigma_{ij}$  é a correlação entre o ativo  $i$  e  $j$ ,  $\sigma_i^2$  é a variância do ativo  $i$ ,  $\mu_i$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $r_c$  o retorno mínimo e  $v_c$  o risco máximo esperado para carteira.

Ou Minimizar a variância sujeita ao valor esperado:

$$Min : \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N x_i x_j \sigma_{ij} \leq v_c \quad (4.5)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i x_i \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4.7)$$

<sup>1</sup> A função de utilidade do investidor deve respeitar a forma quadrática para ser aplicada à fronteira média-variância.

$$x_i \geq 0, \forall i \quad (4.8)$$

Pela teoria de Markowitz os investidores sempre serão avessos ao risco, portanto, sempre que houver dois ativos com o mesmo retorno, aquele com menos risco será escolhido. Sharpe (1970) observa que, se a correlação entre dois ativos for menor do que a divisão entre o menor e o maior desvio, será possível a construção de portfólios que apresentem maior retorno e menor desvio em comparação ao ativo individual. Na composição de carteiras, pela abordagem média-variância, duas estatísticas devem ser observadas: as variâncias dos retornos dos ativos individuais e a correlação existente entre eles.

O modelo de Markowitz é suscetível a muitas críticas, entre as principais destacam-se o conceito de normalidade da distribuição dos retornos, amplamente refutado em trabalhos empíricos como Jensen, Black e Scholes (1972) e Sundaresan (2000), e função de utilidade quadrática, a qual viola a aversão absoluta e relativa ao risco de Arrow (1974), que deveriam ser decrescente e constante, respectivamente. Outros pontos frágeis do modelo são o fato de contemplar apenas um período, não abrangendo variações e/ou mutações temporais que possam ocorrer, de depender da estimação correta do retorno de cada um dos ativos considerados na carteira e de retornar carteiras completamente diferentes quando ocorrem pequenas variações nas séries temporais utilizadas, entre outros ((TÜTÜNCÜ; KOENIG, 2004) (BLACK; LITTERMAN, 1991)).

## 4.2 Escolha Intertemporal

O problema que os investidores enfrentam, ao considerarem a escolha intertemporal, refere-se ao nível ótimo de poupança e consumo e ao conjunto de ativos que irão manter em carteira a fim de suavizar seu consumo temporalmente. O consumidor representativo busca maximizar sua utilidade através do consumo.

O CCAPM proposto por Lucas (1978) auxilia no entendimento deste conceito de escolha intertemporal. O modelo baseado no consumo<sup>2</sup> é derivado da ideia microeconômica de decisão entre poupança e consumo, na qual o investidor leva em conta a utilidade máxima que pode ser obtida a partir de uma determinada cesta de bens, dada sua restrição orçamentária. Os investidores utilizam os ativos como fonte de transferência de riqueza entre diferentes períodos e estados da natureza.

<sup>2</sup> Nos modelos baseados em consumo, o fator estocástico de desconto confunde-se com a taxa marginal de substituição intertemporal do consumo.

O problema que o consumidor representativo enfrenta pode ser definido formalmente conforme se segue:

$$\max_{\{\xi\}} u(c_t) + E_t[\beta u(c_{t+1})] \quad (4.9)$$

sujeito a:

$$c_t = e_t - p_t \xi, \quad (4.10)$$

e

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \xi \quad (4.11)$$

em que  $c_t$  representa o consumo no período  $t$ ,  $e_t$  o nível de consumo,  $\beta$  é a taxa de desconto que captura a impaciência dos investidores entre o consumo em  $t+1$ ,  $x_t$  são os *payoffs* dos ativos  $\xi$  é a quantidade de ativos adquiridos em  $t$  e  $p_t$  o preço destes ativos.

Substituindo-se as restrições na função objetivo e derivando-se em relação a  $\xi$  obtém-se a condição de primeira ordem para a escolha ótima entre consumo e investimento,

$$p_t u'(c_{t+1}) = E_t[\beta u'(c_t) x_{t+1}] \quad (4.12)$$

ou,

$$p_t = E_t \left[ \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right] \quad (4.13)$$

A equação 4.12 demonstra a condição ótima onde,  $p_t u'(c_{t+1})$  representa a perda de utilidade pela aquisição de uma unidade de ativo e  $E_t[\beta u'(c_t) x_{t+1}]$  a utilidade obtida pelo *payoff* gerado em  $t + 1$ , (COCHRANE, 2001).

A equação 4.13 dá origem à equação básica de apreçamento:

$$p_t = E_t(m_{t+1} x_{t+1}) \quad (4.14)$$

em que

$$m_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (4.15)$$

é o fator estocástico de desconto.

A função de utilidade do investidor representativo é aditivamente separável no tempo, conforme proposto por Von Neumann e Morgenstern. Hansen e Singleton (1983), através da análise temporal do retorno dos ativos e do consumo agregado, formalizam as restrições e preferências do consumidor representativo do modelo de Rubinstein (1976), Lucas (1978), Breeden (1979) e Brock (1982). Segundo Hansen e Singleton (1983), os investidores escolhem um plano de consumo estocástico a fim de maximizar o valor esperado da função de utilidade “tempo-aditiva”. Usualmente denota-se o formato funcional da utilidade dos investidores como sendo do tipo potência, também conhecida por *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA), na forma:

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (4.16)$$

em que  $\gamma$  representa o coeficiente de aversão ao risco dos investidores, com  $\gamma \geq 0$  e  $\gamma \neq 1$ .

A equação 4.14 permanecerá válida independente da função de utilidade considerada, entretanto  $m_{t+1}$  diferirá de acordo com a mesma.

Cochrane (2001) demonstra a derivação do fator estocástico de desconto no enfoque dos modelos CAPM, APT, ICAPM e modelos fatoriais.

### 4.3 Fator Estocástico de Desconto

Para que a existência de um fator estocástico de desconto que precifique todos os ativos seja validada, é necessário que duas condições sejam satisfeitas. A primeira destas é a lei do preço único, no original *law of one price*, que assegura que, se dois ativos retornarem os mesmos *payoffs* em cada um dos estados da natureza possíveis, estes deverão ter o mesmo preço. Esta preposição é válida mesmo em mercados imperfeitos<sup>3</sup>. A segunda condição é a de não possibilidade de arbitragem, isto é, ativos com *payoffs* positivos devem ter preços positivos.

O fator estocástico de desconto é de fundamental importância na teoria de *asset pricing*, pois permite o apereçamento de qualquer ativo por meio do valor esperado do desconto dos fluxos de caixa futuros,  $x_{t+1}$ , por um fator estocástico  $m$ , satisfazendo a relação a seguir:

$$p_i = E(mx_i), \quad \forall i \quad (4.17)$$

O fator estocástico de desconto é também definido como *pricing kernel*. Isto decorre do fato de que, ao se escrever  $E(mx_i)$  como integral,  $m$  pode ser interpretado como a

<sup>3</sup> Um mercado é dito imperfeito quando o número de seguros existentes for menor do que os possíveis estados da natureza do mercado.

função de kernel de uma transformação integral, na forma:

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t, u)f(t)dt \quad (4.18)$$

Contextualizando, o fator de desconto é uma função  $K$  que varia de acordo com mudanças nos retornos ( $u$ ) e variação temporal  $t$ , gerando a transformação integral descrita.

Para a existência de um fator estocástico de desconto, considere a função linear  $p = E(mx)$ . Deve existir um único  $x^* \in X$  em que  $X$  é o espaço de todos os *payoffs* disponíveis, tal que,  $p = E(x^*x)$  para todo  $x \in X$ . Para cada fator de desconto  $m$  válido,  $x^* = \text{proj}(m|X)$ , existirá um fator de desconto positivo que precifica todos os *payoffs* da economia, através da relação  $p = E(mx)$ , se e somente se, não existirem possibilidades de arbitragem (COCHRANE, 2005).

A existência de um fator estocástico de desconto é consequência do teorema de representação de Riesz-Rischer. O teorema de representação de Riesz baseia-se na análise funcional em espaços de Hilbert<sup>4</sup> e define que, se existir um mapeamento bijetivo entre dois funcionais, é possível mapear todos os espaços existentes entre eles. Isto é:

Se  $F : H \rightarrow \Re$  for um funcional linear contínuo no espaço de Hilbert  $H$ , então existirá um único vetor  $k_f$  em  $H$  tal que:

$$F(x) = k_f x \quad \forall x \in H \quad (4.19)$$

A partir do teorema de Riesz, é possível definir uma fronteira Média-Variância que generaliza o espaço de *payoffs* para um espaço dimensional infinito o qual mapeia todos os funcionais de expectativas *pricing kernel* e todos os funcionais de *pricing kernel* verdadeiros (LEROY; WERNER, 2014).

---

<sup>4</sup> Para exposição formal do espaço de Hilbert seria necessário a introdução dos conceitos de produto interno, ortogonalidade e projeção ortogonal, o que exigiria grande esforço notacional e traria benefício marginal para a pesquisa em questão.

## 5 MÉTRICA DE AVALIAÇÃO DE MODELOS

Os modelos de *asset pricing* são, na melhor das hipóteses, aproximações do que se verifica no mercado. Por esta razão, para se verificar a validade de um modelo empiricamente, ao invés de se testar o quão verdadeiro é o modelo, empiricamente é interessante testar o quão "errado" um modelo está, para que então possa se fazer a escolha daquele que apresente menor erro. Para tanto, é necessária uma medida que avalie a má especificação de um determinado modelo.

### 5.1 Hansen-Jagannathan

Hansen e Jagannathan (1991) investigaram as implicações dos dados referentes aos ativos de mercado sob uma série de modelos dinâmicos econômicos. Este trabalho seminal teve grande contribuição à literatura de apreçamento de ativos ao identificar que o índice Sharpe máximo de uma carteira não pode exceder a relação existente entre o desvio-padrão de um fator estocástico e sua média, estabelecendo a ligação existente entre a fronteira média-variância e abordagem do fator estocástico de desconto.

A fronteira de Hansen-Jagannathan estabelece a seguinte relação entre o desvio-padrão e o excesso de retorno:

$$\frac{\sigma(m)}{E[m]} \geq \frac{|E[R^e]|}{\sigma(R^e)} \quad (5.1)$$

em que  $R^e$  é o excesso de retorno de um ativo ou portfólio,  $\sigma$  é o desvio padrão e  $m$  é o fator estocástico de desconto ou *kernel price* que precifica o retorno:  $0 = E[mR^e]$ .

### 5.2 Distância Hansen-Jagannathan

Posteriormente, Hansen e Jagannathan (1997) desenvolveram uma medida que ganhou grande popularidade desde sua publicação por fornecer um ferramental tanto para o diagnóstico quanto para seleção de modelos de apreçamento de ativos. Tal medida, chamada distância Hansen-Jagannathan (*H-J distance*) calcula a distância mínima dos erros entre do fator estocástico de desconto dos modelos e o conjunto de SDF admissíveis que precifica todos os ativos. A distância Hansen-Jagannathan pode incorporar ou não SDF's negativos. Li, Xu e Zhang (2010) recomendam fortemente a utilização do modelo restrito (SDF > 0) em trabalhos empíricos, pois verificaram que a métrica restrita tem maior poder em detectar modelos com má especificação, principalmente os de não arbitragem.

A distância Hansen-Jagannathan relaciona a distância entre o verdadeiro *pricing kernel*( $m$ ), que precifica todos os ativos, e a *proxy* de *pricing kernel* ( $y$ ) do modelo. Em

que  $m \in M$  é o conjunto de todos os *pricing kernels* que precificam corretamente os ativos da economia.

Hansen e Jagannathan (1997) observam que, dado um modelo de apreçamento, este será falso quando  $y \neq m$  e existirá então uma distância estritamente positiva entre os dois fatores tal como se segue:

$$\delta = \min \|y - m\|, \text{ onde } E(mR) = p, \quad (5.2)$$

e a medida de distância é calculada pela norma  $\|x\| = \sqrt{E(x^2)}$ . O problema definido na Equação 5.2 pode ser reescrito como o seguinte problema de minimização de Lagrange:

$$\delta^2 = \min \sup E(y - m)^2 + 2\lambda'[E(mR) - p] \quad (5.3)$$

o valor de  $\delta$  representa a distância mínima entre a *proxy* do modelo e o verdadeiro *kernel price*. Sejam  $m$  e  $\lambda$  soluções da Equação 5.3, pode-se pensar em  $y - m$  como o ajustamento mínimo a  $y$  que o torna o verdadeiro *pricing kernel*. Hansen e Jagannathan (1997) resolvem a Equação 5.3 e encontram:

$$y - m = \lambda R \quad (5.4)$$

em que:

$$\lambda = E(RR')^{-1}E(yR - p) \quad (5.5)$$

A distância Hansen-Jagannathan pode então ser escrita como:

$$\delta = \|y - \tilde{m}\| = \|\tilde{\lambda}'R\| = [\tilde{\lambda}'E(RR')\tilde{\lambda}]^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

Substituindo  $\tilde{\lambda}$  na equação obtem-se:

$$\delta = [E(yR - p)'E(RR')^{-1}E(yR - p)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

A Equação 5.7 é o erro de preço máximo para o conjunto de carteiras com base nos retornos do ativo básico com a norma do retorno da carteira igual a um.

Para implementação do teste de Hansen-Jagannathan, deve-se definir uma forma funcional para estimação dos *pricing kernel* pelos modelos. Para tanto, assume-se a existência de  $n$  ativos a serem precificados. Na ausência de oportunidades de arbitragem

existirá um conjunto  $M$  de *stochastic pricing kernels*  $m$  que precificam todos os ativos corretamente, assim,

$$E_t(M_{t+1}R_{j,t+1}) = p_j, \forall m_{t+1} \in M_{t+1}, \quad (5.8)$$

em que  $m_{t+1}$  é o *stochastic pricing kernels* em  $t + 1$ ,  $M_{t+1}$  é o conjunto que precifica corretamente os ativos,  $R_{j,t+1}$  é o retorno da carteira  $j$  em  $t + 1$  cujo preço é  $p_j$ .

Conforme demonstrado em Hansen e Jagannathan (1997), um modelo de *asset pricing* gera uma *proxy* de *pricing kernel*  $y_{t+1}$ . Se o modelo for verdadeiro, então,  $y_{t+1} \in M$ .

## 6 UTILIDADE ESPERADA E DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA

### 6.1 Utilidade Esperada

A função de utilidade de um determinado agente  $u : \mathfrak{R}^S \rightarrow \mathfrak{R}$ , no plano de estados de consumo contingentes, possui uma representação de utilidade esperada dependente dos estados da natureza se existir uma função  $v : \mathfrak{R}_S \rightarrow \mathfrak{R}$  onde  $S$  denota os estados da natureza que podem ocorrer com probabilidade  $\pi$  tal que:

$$u(c_1, \dots, c_S)(c'_1, \dots, c'_S) \text{ se e somente se } \sum_{s=1}^S \pi_s v_s(c_s) \geq \sum_{s=1}^S \pi_s v_s(c'_s) \quad (6.1)$$

Se  $u$  tiver uma representação de utilidade esperada independente dos estados,  $v$  será única dentre transformações afim estritamente crescentes e será dita uma função do tipo *von Neumann-Morgenstern*,  $v$  pode ser reescrita como  $a + bv$  com  $a, b > 0$  sem que ocorra mudança no ordenamento das preferências de  $u$ . A abordagem de utilidade esperada proposta por *von Neumann-Morgenstern*, apesar de pioneira, é bastante questionável, uma vez que considera que os agentes conhecem as probabilidades associadas a todos os estados da natureza, não podendo ser aplicada em contexto onde os agentes desconheçam as distribuições de probabilidades associadas.

Arrow (1971) e Pratt (1964) verificaram, através da observação de fenômenos econômicos, que as utilidades dos indivíduos apresentam *decreasing absolute risk aversion* (DARA) e em alguns casos *increasing relative risk aversion* (IRRA)<sup>1</sup>, sendo a primeira mais aceita pela maioria dos economistas.

Markowitz (1952, 1959), que inicialmente propôs o conceito de média e variância na análise de carteiras, entendia que os investidores avaliam os riscos de forma assimétrica e por esta razão a utilização de uma medida de risco não simétrica seria mais apropriada. Apesar destas considerações, utilizou a variância como medida, devido às facilidades computacionais que esta apresentava ao problema de otimização da carteira, Andrade (2006). Além deste pressuposto não ótimo, o conceito de normalidade da distribuição dos ativos requer assumir que os investidores apresentem função de utilidade quadrática ( $U(C) = C - \gamma C^2$ <sup>2</sup>, onde  $w$  representa a riqueza do agente e  $\gamma$  o coeficiente de aversão ao risco) o que, conforme Arrow (1971) implica em *increasing absolute risk aversion*

<sup>1</sup> A aceitação da hipótese de que a aversão ao risco dos agentes pertencesse à classe IRRA implica que ativos arriscados sejam tratados como bens inferiores, uma vez que assume que quanto maior a riqueza dos agentes, menor seria a parcela da riqueza destinada a investimentos arriscados. Pressuposto este não comumente observado no comportamento dos investidores.

<sup>2</sup> Esta representação de  $u(c)$  é obtida ao se tomar o  $\gamma$  da função de utilidade CRRA ( $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ) como igual a  $-1$  conforme demonstrado em Friend e Blume (1975)

(IARA) pressuposto este altamente improvável de ser observado no comportamento dos investidores.

O CCAPM de Rubinstein (1976) é desenvolvido considerando o  $\gamma$  da CRRA igual a 1, que no limite gera  $U(w) = \ln(w)$ <sup>3</sup>, isto é, uma função de utilidade do tipo logarítmica, que implica em uma aversão ao risco decrescente na renda, ou seja, quanto maior a renda dos agentes menor a aversão ao risco, pressuposto esse muito mais razoável do que o intrínseco à utilidade quadrática. Entretanto, conforme Mehra e Prescott (1985) constataram, empiricamente,  $\gamma = 1$  não se sustenta.

A ideia do CAPM de (SLM) de tratar a variância ou desvio padrão como única medida de risco na determinação da alocação de portfólios foi questionada e rejeitada em diversos estudos, onde se observou que somente esta medida é pouco informativa na descrição da aleatoriedade dos retornos dos ativos, uma vez que pressupõe simetria comportamental. Segundo Nawrocki (1999), os investidores observam o risco de forma assimétrica, impondo maior peso para efeitos negativos (perda) nos retornos dos seus ativos. Na presença de informação perfeita sobre preferências, convém a utilização do critério de utilidade esperada máxima para seleção de portfólios arriscados. Entretanto, este critério parte da consideração de diversos axiomas, tais como: comparabilidade; continuidade; permutabilidade; transitividade; separabilidade e monotonicidade, os quais não são regularmente observados e já foram violados por diversos trabalhos, conforme exposto por Machina (1982).

Em geral, observa-se apenas informação parcial com relação às preferências, o que impossibilita a ordenação completa dos portfólios. As regras de dominância estocástica contornam este problema ao incorporar informação incompleta nas preferências dos investidores sob variáveis aleatórias (retornos), produzindo ordenação parcial dos portfólios.

## 6.2 Dominância Estocástica

O conceito de dominância estocástica surge de forma a contornar estas imposições restritivas no problema de otimização de carteiras. A não necessidade de premissas quanto à distribuição dos retornos e utilidade dos agentes torna a otimização de carteiras menos impositiva quanto às características de um determinado conjunto de ativos, sendo necessário apenas considerar que os investidores são não saciáveis e apresentam aversão ao risco.

O interesse das mais diversas áreas da ciência, as quais utilizam a teoria das probabilidades em suas pesquisas, em conhecer o comportamento de variáveis aleatórias (VA) é bastante antigo, remetendo, segundo Bawa (1982) ao trabalho de Bernoulli (1713).

---

<sup>3</sup> Prova no Anexo A

No que tange à literatura econômica e de finanças, o conceito de *stochastic dominance* ou dominância estocástica (SD), o qual rege o comportamento destas VA, surgiu bem mais tarde, entre os anos de 1969-70, com os trabalhos de Hadar e Russell (1969), Hanoch e Levy (1969), Rothschild e Stiglitz (1970) e Whitmore (1970).

Bawa (1975) apresenta formalmente as regras dos quatro primeiros momentos da dominância estocástica<sup>4</sup>. Seja  $U_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  as quatro primeiras ordens de dominância estocástica, em que  $U_1$  é o conjunto que inclui todas as funções de utilidade  $u(x)$  que apresentam  $u' \geq 0$ ,  $U_2$  um subconjunto de  $U_1$  com  $u(x)$  do tipo aversão ao risco, isto é, com  $u' \geq 0$  e  $u'' \leq 0$ ,  $U_3$  um subconjunto de  $U_2$  contendo todas  $u(x)$  com  $u''' \geq 0$  e  $U_4$  um subconjunto de  $U_2$  com  $u(x)$  do tipo DARA.

As regras de dominância estocástica de primeira (PDE), segunda (SDE), terceira (TDE) e quarta (QDE) são definidas pelos teoremas 1,2,3 e 4 que se seguem:

**Teorema 1.** Para duas distribuições quaisquer  $F$  e  $G$ ,  $F$  será preferido a  $G$  para todas as funções de utilidade em  $U_1$  se e somente se:

$$F(x) \leq G(x), \forall x \in \Re, \gg \text{ para algum } x. \quad (6.2)$$

**Teorema 2.** Para duas distribuições quaisquer  $F$  e  $G$ ,  $F$  será preferido a  $G$  para todas as funções de utilidade em  $U_2$  se e somente se:

$$\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt \forall x \in \Re, \gg \text{ para algum } x. \quad (6.3)$$

**Teorema 3.** Para duas distribuições quaisquer  $F$  e  $G$ ,  $F$  será preferido a  $G$  para todas as funções de utilidade em  $U_3$  se e somente se:

$$\mu_F \geq \mu_G \quad (6.4)$$

e

$$\int_a^x \int_a^y F(t)dtdy \leq \int_a^x \int_a^y G(t)dtdy \forall x \in \Re, \gg \text{ para algum } x. \quad (6.5)$$

**Teorema 4.** Para duas distribuições quaisquer  $F$  e  $G$ , com  $\mu_F = \mu_G$ ,  $F$  será preferido a  $G$  para todas as funções de utilidade em  $U_4$  se e somente se:

$$\int_a^x \int_a^y F(t)dtdy \leq \int_a^x \int_a^y G(t)dtdy \forall x \in \Re, \gg \text{ para algum } x. \quad (6.6)$$

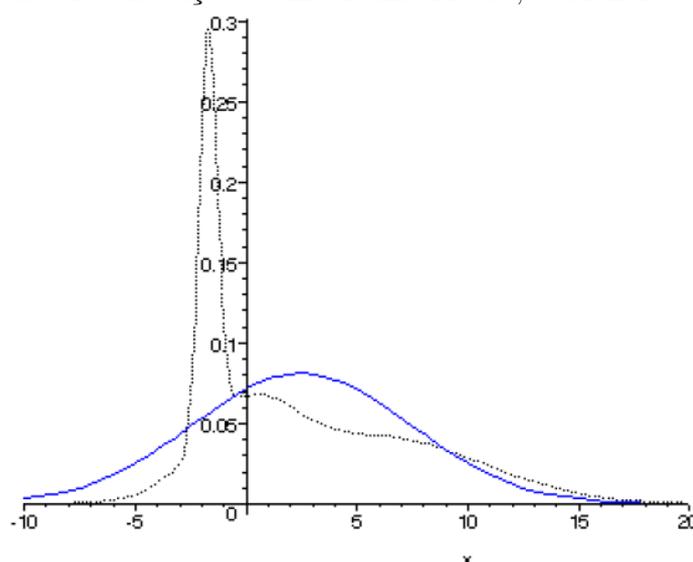
<sup>4</sup> As provas dos quatro primeiros momentos da dominância estocástica estão disponíveis em Bawa (1975)

Bawa (1975) demonstra que a terceira ordem de dominância estocástica que é ótima para  $U_3$  também o é para a classe  $U_4$  com  $u(x)$  DARA, quando  $\mu_F = \mu_G$ . Para o caso em que  $\mu_F \neq \mu_G$ , a dominância de terceira ordem permanece sendo ótima, uma vez que maior média é uma condição necessária para dominância. Apesar de não identificar nenhuma regra que seja ao mesmo tempo necessária e suficiente em termos de dominância para o caso em que  $F$  e  $G$  apresentam médias distintas, o autor conclui que TDE é uma aproximação razoável para a regra ótima.

### 6.3 Momentos Superiores

A importância da dominância estocástica para séries que, em geral, não apresentam distribuições gaussianas do tipo  $N \sim (0, \sigma^2)$  pode ser exemplificada ao se comparar distribuições. As distribuições da Figura 1, apresentam mesma média e variância e curtose. Pela abordagem do CAPM, estas são tratadas de forma igual, isto é, possuem mesmo risco e retorno.

Figura 1 – Distribuições com Mesma Média, Variância e Curtose

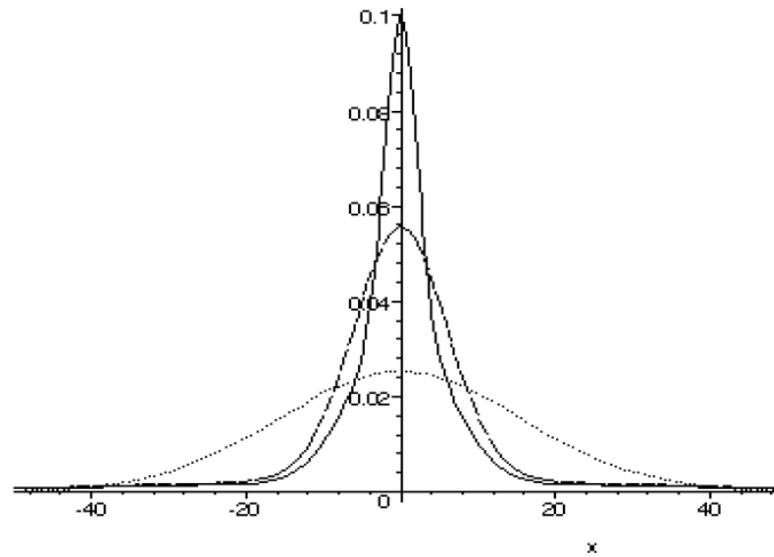


Fonte: Keating e Shadwick (2002)

Da mesma forma, a Figura 2 apresenta três distribuições com mesma média, variância e assimetria, que diferem quanto ao "achatamento" ou "pico" de suas distribuições.

A determinação de uma medida de risco para avaliação de ativos financeiros é tarefa não trivial. As Figuras 1 e 2 exemplificam a importância da consideração dos momentos superiores das distribuições no contexto tratado neste trabalho. A dominância estocástica traz grande contribuição a esta análise, uma vez que trata diversas falhas implícitas nos pressupostos de diversos modelos de *asset pricing*, como demonstrado nesse capítulo. Entretanto, dela são definidas "apenas" regras que devem ser observadas para seleção de ativos e não modelos que precifiquem diretamente estes ativos. O capítulo

Figura 2 – Distribuições Simétricas com Mesma Média e Variância



Fonte: Keating e Shadwick (2002)

que se segue discute sobre algumas medidas de avaliação de carteiras que incluem estes momentos superiores em sua formulação.

## 7 MODELOS DE LOWER PARTIAL MOMENTS

Nos últimos 25 anos, houve um aumento considerável da literatura tratando da abordagem de *downside risk*, literatura esta que sugere uma substituição da abordagem de risco tradicional (variância e beta) por medidas de *downside risk* que levem em conta a assimetria dos retornos na percepção de risco dos investidores (MAMOGHLI; DABOUSSI, 2008).

Em vista deste cenário, diversas medidas que levam em conta os momentos superiores das distribuições, para análise de risco, foram propostas. A seguir são demonstradas algumas destas medidas.

### 7.1 Índice de Sortino

Sortino e Price (1994) propõe uma medida de análise de risco de mercado alternativa ao Índice de Sharpe. Sortino considera a análise de *downside deviation* para construir seu indicador de risco. Esta medida considera como risco apenas os desvios negativos de um retorno mínimo a ser definido pelos investidores, indicado por *Minimum Accepted Return* (MAR).

A principal diferença entre o índice de Sortino e Sharpe reside no fato de que o primeiro não penaliza os desvios positivos em relação a média. Seu cálculo é semelhante ao índice de Sharpe, exceto que aquele substitui a *risk free rate* do numerador pelo (MAR) e o desvio padrão pelos desvios abaixo do (MAR) no denominador. O índice de Sortino é então dado por:

$$Sortino = \frac{E(R_p - MAR)}{Downside\ Deviation} \quad (7.1)$$

Em que:

$$Downside\ Deviation = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Min}[0; (r_i - MAR)^2]} \quad (7.2)$$

Em que  $n$  é o número de observações do ativo  $i$ ,  $E[R_p]$  é o retorno esperado do portfólio e  $r_i$  o retorno do ativo  $i$ .

Outra vantagem do índice de Sortino em comparação ao índice de Sharpe é o fato de captar as percepções individuais de risco dos investidores, uma vez que o (MAR) é definido de forma exógena de acordo com a aversão ao risco individual.

Entretanto, pelo fato da medida de *Downside Deviation* ser sempre menor ou igual que o  $\sigma_p$ , a comparação entre ambos não deve ser feita, pois o índice de Sortino será sempre maior ou igual ao índice de Sharpe.

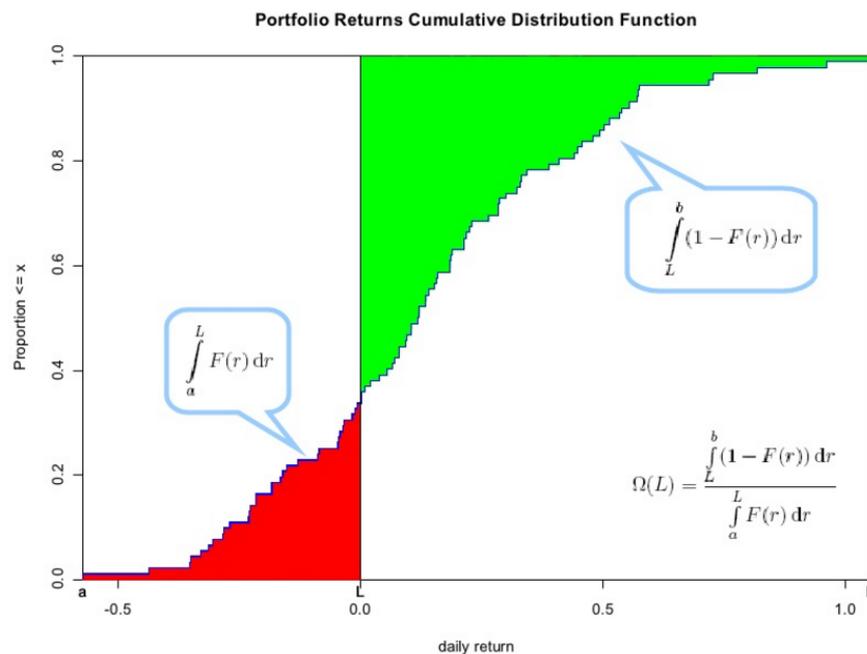
## 7.2 Medida OMEGA

Keating e Shadwick (2002) propuseram uma nova medida para avaliação da distribuição do retorno dos ativos, relaxando os pressupostos de mercados eficientes apenas em termos de média e variância, a medida  $\Omega$ , a qual trata de todos os momentos superiores da distribuição, curtose e assimetria, e não somente os dois primeiros momentos, média e variância.

Uma das vantagens da medida proposta é o fato de não ser necessário considerar que os investidores possuam uma função de utilidade específica, uma vez que sua análise é feita em relação a distribuição dos retornos como um todo, necessitando tão somente que os investidores prefiram mais a menos e sejam não saciáveis.

A fronteira em que o modelo se aplica, *Omega Performance Measure* (OPM), cobre a razão entre as áreas de ganhos máximos e perdas mínimas, conforme demonstrado no gráfico abaixo.

Figura 3 – Omega Performance Measure



Fonte: Yollin (2009)

A reta vertical que corta as duas áreas do gráfico é o *threshold* definido de forma exógena pelo investidor. As áreas em verde e vermelho representam, respectivamente, os retornos acima e abaixo do *threshold*.

Essencialmente a medida pode ser definida como a probabilidade ponderada entre ganhos e perdas em relação a um limiar  $L$  definido pelos investidores. Definido  $L^1$ , os

<sup>1</sup>  $L$  é definido de forma exógena, uma vez que depende da estratégia do investidor e de sua aversão ao risco.

investidores sempre irão preferir portfólios que apresentam maiores Omegas. A medida  $\Omega$  é então definida como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F_x(x)] dx}{\int_a^L [F_x(x)] dx} \quad (7.3)$$

em que  $L$  é o retorno mínimo esperado pelo investidor,  $x$  é uma variável aleatória que representa o ativo ou os retornos dos ativos que compõem a carteira analisada,  $F_x(x)$  é a função de distribuição acumulada do ativo ou carteira e  $(a, b)$  são respectivamente os intervalos inferior e superior da distribuição dos retornos.

### 7.3 Sharpe-Omega

Posteriormente, Kazemi, Schneeweis e Gupta (2004) demonstraram que tal medida pode ser obtida como a razão entre uma opção de compra e uma opção de venda do tipo europeia não descontadas<sup>2</sup>, as quais podem ser consideradas como *Expected Chance* (EC) e *Expected Shortfall* (ES), definidas conforme abaixo:

$$EC(b) = \int_L^b (x - L) f_x(x) dx = E[\text{Max}(X - L; 0)] \quad (7.4)$$

$$ES(b) = \int_a^L (L - x) f_x(x) dx = E[\text{Max}(L - x; 0)] \quad (7.5)$$

Os autores mostraram que a medida de Keating e Shadwick pode ser mensurada de forma mais fácil, sempre apresentando os mesmos resultados, através da medida Sharpe-Omega, onde:

$$\text{Sharpe-Omega} = \frac{\text{Expected Return} - \text{Threshold}}{\text{Put Option Price}} \quad (7.6)$$

<sup>2</sup> Trazendo ambas medidas a valor presente por um fator de desconto  $e^{-r_f}$  em que  $r_f$  representa a taxa livre de risco, é possível precificar a opção de compra e de venda do tipo europeia de um único ativo.

#### 7.4 Medida KAPPA

Kaplan e Knowles (2004) demonstram que as razões Omega e Sortino, medidas relacionadas aos retornos ajustados por *downside risk*, são casos especiais da medida Kappa, medida de desempenho ajustada ao risco generalizado. Os autores demonstram que ambas medidas são casos específicos da medida generalizada proposta. A medida Kappa é definida como:

$$K_n(\tau) = \frac{\mu - \tau}{\sqrt[n]{LPM_n(\tau)}} \quad (7.7)$$

em que  $\tau$  é o *threshold*,  $\mu$  é o retorno observado e  $n$  é a ordem Kappa do modelo.

Harlow (1991), define a n-ésima função momento parcial inferior (LPM), utilizada na mensuração do risco como:

$$LPM_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - R)^n dF(R) \quad (7.8)$$

A medida de Sortino pode ser reescrita em termos de Kappa como:

$$S = \frac{\mu - \tau}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\tau} (\tau - R)^2 dF(R)}} \quad (7.9)$$

em que  $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} R dF(R)$  = o retorno esperado e  $\tau$  é o mínimo aceitável pelo investidor.

Que pode ser substituída na medida de Sortino sob a forma:

$$S = \frac{\mu - \tau}{\sqrt{LPM_2(\tau)}} \quad (7.10)$$

Isto é, a medida de sortino é um caso especial para  $n = 2$ .

O mesmo ocorre com a medida Omega, provada matematicamente por Kaplan e Knowles (2004) que pode ser descrita como:

$$\Omega(\tau) = \frac{\mu - \tau}{LPM_1(\tau)} + 1 \quad (7.11)$$

ou equivalentemente,

$$\Omega(\tau) = K_1(\tau) + 1 \quad (7.12)$$

Os autores não definem um método de seleção da ordem do  $\kappa$  a ser utilizada, entretanto, dos testes realizados para verificar a sensibilidade do parâmetro à assimetria e curtose das distribuições, verificaram que a ordem 3 foi a que teve melhor ajuste e, portanto, sugerem a utilização desta ordem kappa.

## 7.5 Upside Potential Ratio

Sortino, Meer e Plantinga (1999) ao se debruçarem sobre o "Triângulo Holandês"<sup>3</sup> propuseram uma medida para analisar risco e retorno dos fundos de pensão, em mercados pequenos ou grandes, levando em conta os conceitos estratégicos, táticos e operacionais de avaliação. O *Upside Potential Ratio* (UPR) foi construído com base nas finanças comportamentais e engloba, em uma única medida estatística, o modo como os investidores desejam e como devem se comportar na tomada de decisão sobre investimentos.

A medida maximiza valor esperado acima do *Minimum Accepted Return* (MAR), gerando uma função de utilidade linear acima deste, sendo esta o oposto do risco de perda. A medida de avaliação de risco é a mesma utilizada no índice de Sortino. A medida é descrita conforme se segue:

$$UPR = \frac{\sum_{MAR}^{+\infty} (r_i^+ - MAR)}{\sqrt{[\sum_{-\infty}^{MAR} (R_i - MAR)^2]}}, \forall r_i^+ \in r_i : r_i^+ > MAR \quad (7.13)$$

As medidas sumarizadas neste capítulo, à exceção da Sharpe-Omega, que gera os mesmos resultados da medida Omega, foram aplicadas na seleção dos portfólio de mercado referentes às ações pertencentes ao Ibovespa e Dow Jones. O intuito destas otimizações é a construção de uma carteira *benchmark* que sirva de balizador para a tomada de decisão dos investidores. Os resultados obtidos, bem como a análise comparativa dos SDF's gerados pelos modelos, são demonstrados no próximo capítulo.

---

<sup>3</sup> Proposta de avaliação de risco de fundos de pensão proposta pelo fundo de administração Fortis em resposta à lei aprovada pelo governo holandês de criação de um *benchmark* a ser utilizado como referência

## 8 OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS DE MERCADO

### 8.1 Base de Dados

Para construção das carteiras de mercado ótimas, tanto do mercado brasileiro quanto do norte americano, foram utilizadas séries dos preços de fechamento diários, entre 14/01/1999 e 30/11/2016, de todas as ações que compõem os respectivos índices de mercado em 30/11/2016 (Ibovespa e o *Dow Jones Industrial Average* (DJIA)). As séries foram coletadas no sistema Economática em 14/12/2016. O início da série justifica-se pela mudança do regime cambial adotado no Brasil, que passou de uma política de bandas cambiais para câmbio flutuante.

Como demonstrado no capítulo anterior, as medidas de *downside risk* tem seu *threshold* ajustado de acordo com as preferências dos investidores, entretanto, será analisado um caso particular, considerando este igual à taxa livre de risco em cada mercado, para que seja possível a comparabilidade com o índice de Sharpe que utiliza a *risk-free* em sua formulação.

### 8.2 Método de Otimização

Foram calculados os retornos diários de todos os ativos presentes nos índices de referência de mercado, IBOV e DJIA, da seguinte forma:

$$R_{i,t} = \ln(P_{i,t}/P_{i,t-1}) \quad (8.1)$$

em que  $R_{i,t}$  representa o retorno do ativo  $i$  no período  $t$ ,  $P_{i,t}$  o preço de fechamento do ativo  $i$  em  $t$  e  $P_{i,t-1}$  o preço de fechamento do ativo  $i$  em  $t - 1$ .

A otimização das carteiras, tanto pela abordagem CAPM quanto pelas de *downside risk*, foi realizada através do método Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) não linear com restrições lineares desenvolvido por Abadie e Carpentier (1969)<sup>1</sup>. Os problemas foram modelados da seguinte forma:

Para a Otimização do índice de Sharpe

$$\text{Max } S_p = \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p} \quad (8.2)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^N W_{x_i} = 1 \quad (8.3)$$

$$0 \leq W_{x_i} \leq 1 \quad (8.4)$$

<sup>1</sup> Para o detalhamento do método passo a passo, ver Sacoman (2012)

em que  $S_p$  é o índice de Sharpe da carteira ótima (de mercado),  $R_p$  é o retorno da carteira ótima,  $r_f$  é o retorno da taxa de juros livre de risco<sup>2</sup>,  $\sigma_p$  é o desvio padrão da carteira ótima e  $W_{x_i}$  é o peso atribuído ao ativo  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 30$  para o mercado norte americano e  $i = 1, 2, \dots, 60$  para o mercado brasileiro.

Para otimização das demais medidas, o procedimento foi semelhante, com mudança apenas das funções objetivo, tal como se segue:

Omega:

$$\text{Max } \Omega_p = \frac{E[\text{Max}(R_p - L; 0)]}{E[\text{Max}(L - R_p; 0)]}, \quad (8.5)$$

em que  $\Omega_p$  é a medida Omega do mercado e  $L$  é o *Threshold*, nesta análise considerado igual a  $r_f$ .

Sortino:

$$\text{Max } S_p = \frac{E[R_p - L]}{\sqrt{E[(L - R_p^-)^2]}}, \quad \forall R_p^- \in R_p : R_p^- < L \quad (8.6)$$

Kappa:

$$\text{Max } \kappa_p = \frac{E[R_p - L]}{\sqrt[3]{E[(L - R_p^-)^3]}} \quad (8.7)$$

Upside Potential Ratio:

$$\text{Max } UPR_p = \frac{E[R_p^+ - L]}{\sqrt{E[(L - R_p^-)^2]}}, \quad \forall R_p^+ \in R_p : R_p^+ > L \quad (8.8)$$

As otimizações geraram como resultado os pesos ótimos, de cada uma das ações, na composição da carteira de mercado ótima sob cada modelo.

### 8.3 Estimação do SDF

Pelo fato dos modelos de *lower partial moments* não definirem uma função de utilidade específica em sua formulação, a caracterização do fator estocástico do modelo, conforme Lucas (1978), torna-se inviável. Para determinação dos fatores de desconto dos modelos foi utilizado o *Generalized method of moments* (GMM)<sup>3</sup> amplamente aceito pela literatura de finanças para estimação de parâmetros, a exemplo Kleibergen (2005), Ahn

<sup>2</sup> Para a carteira do BOVESPA foi utilizada a taxa Selic (retorno diário) vigente em 30/11/2016. Para o DOW JONES foi utilizada a média do retorno diário do período do *Treasury Bill* (T-Bill) de 10 anos.

<sup>3</sup> A hipóteses do modelo estão descritas no Anexo B

e Gadarowski (2004) e Dittmar (2002). O GMM consiste em um método econométrico de estimação de parâmetros de equações. É comumente utilizado quando há suspeita de endogeneidade, correlação entre a variável explicativa e o erro de medida.

Partindo-se da lei do preço único que estabelece  $p_t = E_t(mx_{t+1})$  e considerando  $m$  como sendo invariante no tempo, o modelo é construído de forma a explicar os preços correntes como dependentes dos retornos futuros e do coeficiente associado, no caso o SDF. Uma vez que os erros de estimação estão correlacionados à variável explicativa  $x_{t+1}$ , faz-se necessário a utilização dos instrumentos para correção do problema de endogeneidade, instrumentos estes que devem estar ao mesmo tempo correlacionados à variável explicativa e descorrelacionados do erro. O modelo utilizado, para estimação do SDF de cada um dos modelos, pode ser definido conforme se segue:

$$p_t = \delta'_1 Z_t R_{W,t+1} + \epsilon_t \quad (8.9)$$

$$Z_t = (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon) \quad (8.10)$$

em que  $R_{W,t+1}$  representa o retorno da carteira, ponderada pelos pesos ótimos em  $t + 1$ ,  $\delta'_1$  é o parâmetro a ser estimado e  $Z_t$  o conjunto das variáveis instrumentais<sup>4</sup>, foram utilizados o excesso de retorno da carteira em relação ao índice de *benchmark* em  $t$  ( $x_1$ ), assim como em Dittmar (2002)<sup>5</sup>, e os índices de mercado de cada uma das bolsas acionárias na sua forma logarítmica ( $x_2$ ), tal como em Junior e Yoshinaga (2012). A ideia da estimação GMM, aplicada ao estudo em questão, é minimizar a distância quadrática entre o erro e a matriz de retornos de modo a minimizar a variância.

Após a otimização das carteiras por cada um dos modelos e, a partir destas, estimação dos SDF's associados, como forma de comparação entre modelos foi realizado o teste da distância Hansen-Jagannathan, conforme exposto em capítulo anterior. O cálculo da distância foi realizado conforme a Equação 5.7. Os resultados das otimizações e estimações estão descritos no próximo capítulo.

---

<sup>4</sup> Os testes de significância dos parâmetros e instrumentos estão apresentados nos Anexos F e J.

<sup>5</sup> Também foram testados instrumentos associados à taxa livre de risco, conforme Dittmar (2002). Entretanto, quando inclusos, estes instrumentos não rejeitaram a hipótese nula do teste de Cragg Donald de instrumentos fracos.

## 9 ANÁLISE DESCRITIVA E COMPARATIVA

### 9.1 Descrição dos Resultados

Este capítulo apresenta as tabelas contendo as estatísticas descritivas dos resultados obtidos para as séries de retornos otimizadas das carteiras do Ibovespa e Dow Jones, os gráficos que demonstram o comportamento das séries ao longo do tempo e as distâncias Hansen-Jagannathan de cada um dos modelos, utilizadas, neste trabalho, como medidas de escolha. Foram analisados, para ambas as séries, os retornos de todas as ações que compõem os respectivos índices entre os dias 14 de Janeiro de 1999 e 30 de novembro de 2016. Para a previsão, foram otimizados portfólios até 30/08/2016 e verificado o desempenho destes nos três meses subsequentes, setembro a novembro de 2016. Foram otimizadas também carteiras nos períodos de maior volatilidade dos mercados, a fim de verificar de que forma estas oscilações impactam nos resultados dos modelos testados.

#### 9.1.1 Dow Jones

As carteiras foram obtidas com base na otimização das 30 ações (Anexo Tabela 7) que compõem o *Dow Jones Industrial Average* (DJIA)<sup>1</sup>. Os pesos ótimos encontrados foram aplicados à série de retorno diário destas ações, gerando o retorno da carteira de mercado ótima. A Tabela 1 mostra as estatísticas descritivas (média, desvio padrão, *skewness*, curtose, mínimo e máximo) da carteira por cada um dos modelos, no período completo de 14 de janeiro de 1999 a 30 de novembro de 2016.

Tabela 1 – DWJ Completo (14/01/1999 a 30/11/2016)

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Mean</b>	0,000617	0,000636	0,000634	0,000606	0,000599
<b>SD</b>	0,012534	0,012749	0,012692	0,012344	0,013238
<b>Skewness</b>	-0,258243	0,012749	-0,193497	-0,020323	0,019774
<b>Curtosis</b>	17,035906	16,673451	15,735274	11,282692	7,355915
<b>Mínimo</b>	-0,149216	-0,146121	-0,142996	-0,112982	-0,102780
<b>Máximo</b>	0,158576	0,165324	0,162175	0,148469	0,137594

Fonte: Elaboração Própria

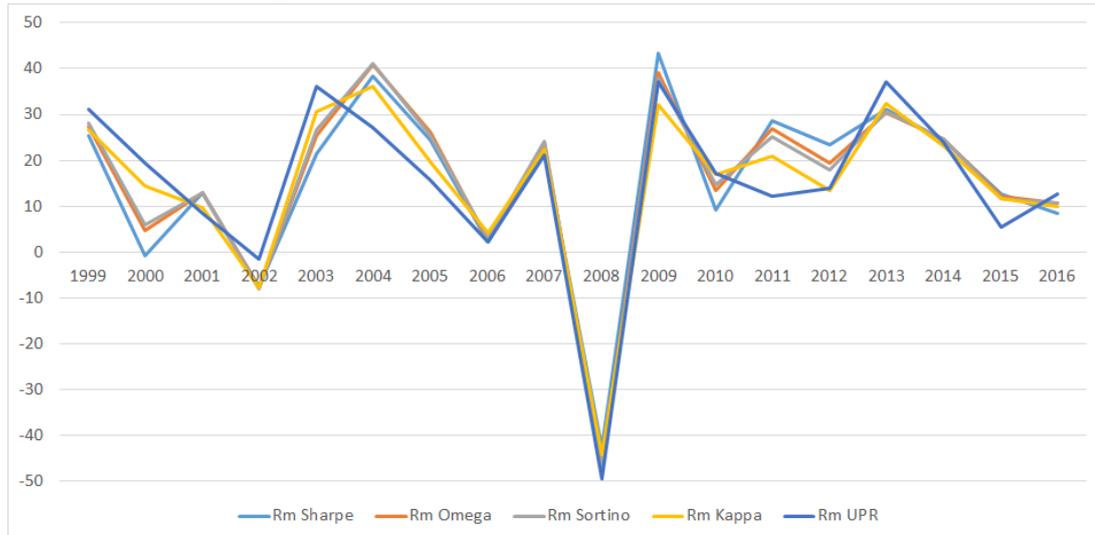
Como pode-se observar, a partir da Tabela 1, para os dois primeiros momentos das distribuições, Média e Variância, os modelos apresentam comportamento similar, não há uma variação destas estatísticas, entre os modelos, maior que 7%. Em contrapartida, ao se observar os terceiros e quartos momentos, assimetria e curtose, a carteira otimizada pelo índice de Sharpe apresenta comportamento bem distinto das demais, apresentando caudas à esquerda mais pesadas, isto é, há uma concentração maior de valores abaixo da

<sup>1</sup> O DJIA é um índice elaborado pelo *The Wall Street Journal* desde 1986, sendo um dos principais índices do mercado norte americano. As empresas que compõem o índice são líderes de mercado em seus setores.

média e o formato de sua distribuição é mais leptocúrtico (afunilado), o que significa dizer que é mais fácil obter valores distantes da média a vários múltiplos de desvios padrão.

A análise dos momentos superiores das distribuições dos retornos tem por objetivo a busca de um modelo que apresente características menos voláteis, em termos de risco, e que, ao mesmo tempo, gere o maior retorno possível. Os gráficos das Figuras 4 e 5 demonstram o comportamento do retorno das carteiras geradas pelos modelos.

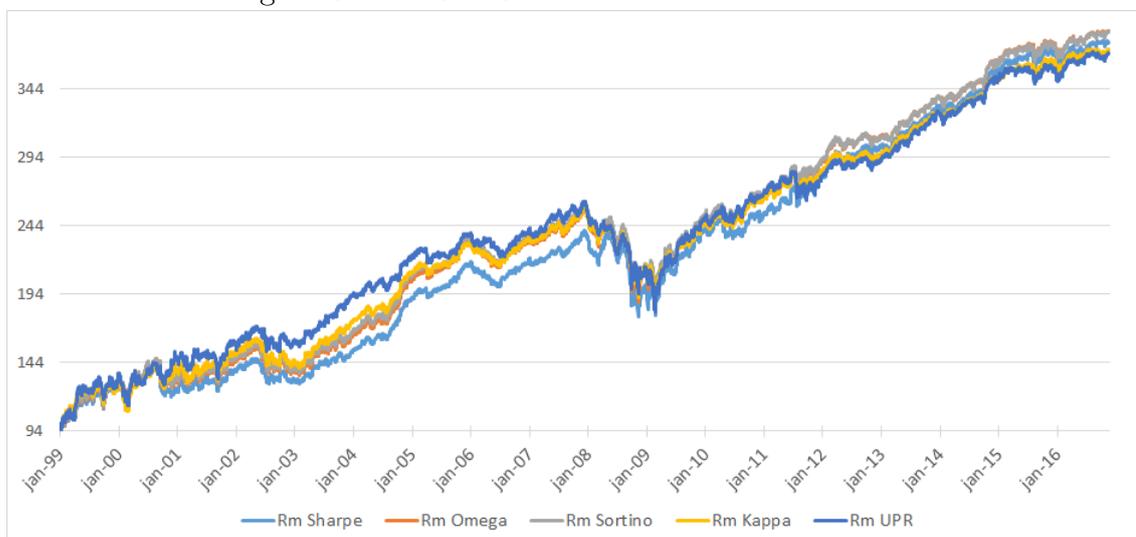
Figura 4 – DWJ - Retorno Acumulado Anual



Fonte: Elaboração Própria

A medida UPR apresenta leve superioridade com relação às demais. No acumulado anual, apresentou melhores resultados em 6 dos 18 anos considerados; entretanto, após 2008, foi a que teve pior *performance* em termos de retorno, conforme demonstrado na Figura 5.

Figura 5 – DWJ - Retorno Acumulado do Período



Fonte: Elaboração Própria

A partir da quebra estrutural representada pela crise de 2008, as medidas Omega e Sortino foram gradativamente obtendo melhores desempenho até agosto de 2011, quando obtiveram melhoras substanciais do retorno de suas carteiras em relação às demais medidas. No acumulado do período, a carteira otimizada pela medida Omega obteve uma rentabilidade de 368,1%, seguida pela UPR (369%), Kappa (372,6%), Sharpe (377,7%) e Sortino (385,4%).

Foram analisados também os períodos de maior oscilação dos mercados, a fim de verificar se o comportamento dos modelos varia. Para averiguação da volatilidade, utilizou-se uma carteira igualmente ponderada entre os ativos, de forma a capturar a oscilação de todos os ativos. Os dois períodos em que a série comportou-se de forma menos estável, conforme Anexo 8, foram entre 29/09/2008 e 23/03/2009 e entre 04/08/2011 e 20/12/2011. Para o primeiro período, não foi possível a otimização das carteiras, pois o retorno médio de todas as ações foi negativo e, conseqüentemente, menor que a taxa livre de risco. Para o segundo período, as estatísticas estão apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – DWJ Período de Assimetria (04/08/2011 a 20/12/2011)

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Mean</b>	0.001855	0.001826	0.001883	0.001927	0.002360
<b>SD</b>	0.013807	0.013618	0.014037	0.014373	0.018848
<b>Skewness</b>	-0.320261	-0.320208	-0.321708	-0.324274	-0.203157
<b>Curtosis</b>	1.080424	1.147727	1.058406	0.949432	0.701260
<b>Mínimo</b>	-0.042157	-0.041770	-0.043026	-0.043708	-0.054553
<b>Máximo</b>	0.042309	0.041721	0.041818	0.042541	0.047700

Fonte: Elaboração Própria

As estatísticas apresentadas na Tabela 2 demonstram certa semelhança no comportamento das séries das medidas Sharpe, Omega, Sortino e Kappa. A medida UPR teve melhor *performance*, apresentando maior média, caudas a esquerda menores e distribuição mais platicúrtica, isto é, maior achatamento, o que indica valores mais concentrados à média.

### 9.1.2 Bovespa

Para o mercado brasileiro, as carteiras foram obtidas da otimização das 57 ações mais negociadas na Bovespa<sup>2</sup>. A tabela contendo as ações, código e valor de mercado de cada uma das empresas pode ser vista no Anexo 13.

Diferentemente do mercado norte-americano, onde todas as ações negociadas são ordinárias<sup>3</sup>, no mercado brasileiro existe a distinção entre ações ordinárias e preferenciais<sup>4</sup>

<sup>2</sup> O índice Bovespa (IBovespa) leva em consideração as ações com maior número de negócios, dando pesos conforme a liquidez de cada uma das ações.

<sup>3</sup> Ação Ordinária Nominativa (ON) proporciona, ao seu detentor, participação nos resultados econômicos da empresa e direito de voto em assembleia.

<sup>4</sup> Ação Preferencial Nominativa (PN) confere a seu detentor prioridade no recebimento de

entre algumas empresas. Por este motivo, há a distinção entre os diferentes papéis de uma mesma empresa, como é o caso da Petrobras, Bradesco e Vale.

O mesmo procedimento adotado para o Dow Jones foi aplicado ao mercado brasileiro. As estatísticas descritivas das duas otimizações podem ser vistas nas Tabelas 3 e 4.

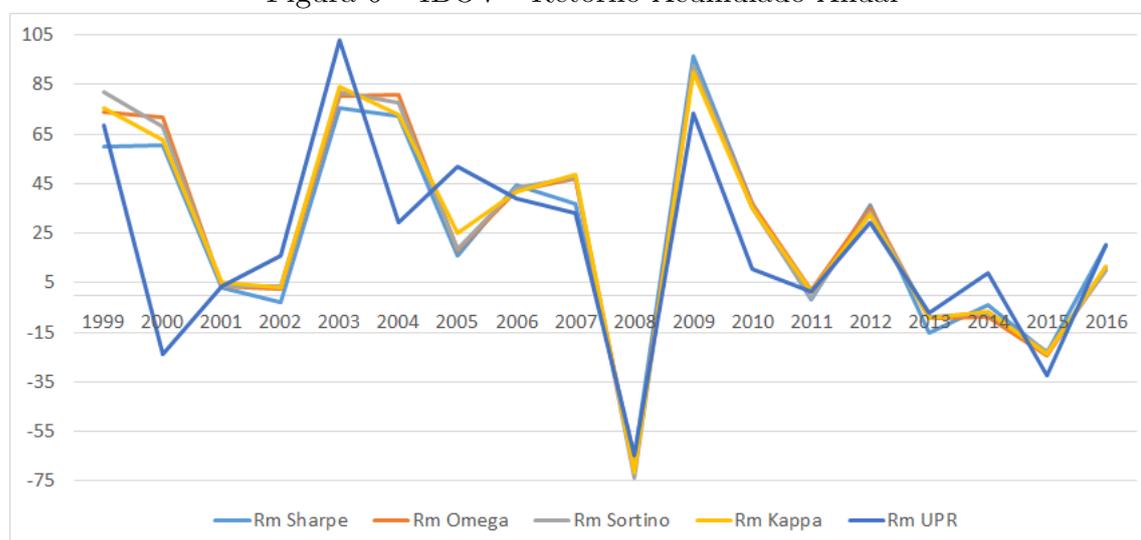
Tabela 3 – IBoV Completo (14/01/1999 a 30/11/2016)

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Mean</b>	0.001007	0.001096	0.001096	0.001080	0.000816
<b>SD</b>	0.018028	0.019917	0.019856	0.019841	0.021087
<b>Skewness</b>	-0.432245	0.019917	-0.261466	-0.241864	0.115555
<b>Curtosis</b>	8.688377	8.449197	8.328057	8.077375	3.978083
<b>Mínimo</b>	-0.197061	-0.209948	-0.208311	-0.203539	-0.149927
<b>Máximo</b>	0.119540	0.144761	0.147082	0.147246	0.165641

Fonte: Fonte: Elaboração Própria

Para a carteira otimizada do Ibovespa não houve a mesma similaridade entre os modelos nos dois primeiros momentos. A medida UPR apresentou média significativamente menor do que as demais medidas. Para os momentos superiores, novamente a carteira de Sharpe obteve maior assimetria negativa e foi a mais leptocúrtica. Já a série dos retornos acumulados obteve características semelhantes às do mercado americano, conforme gráfico das figuras 6 e 7.

Figura 6 – IBOV - Retorno Acumulado Anual



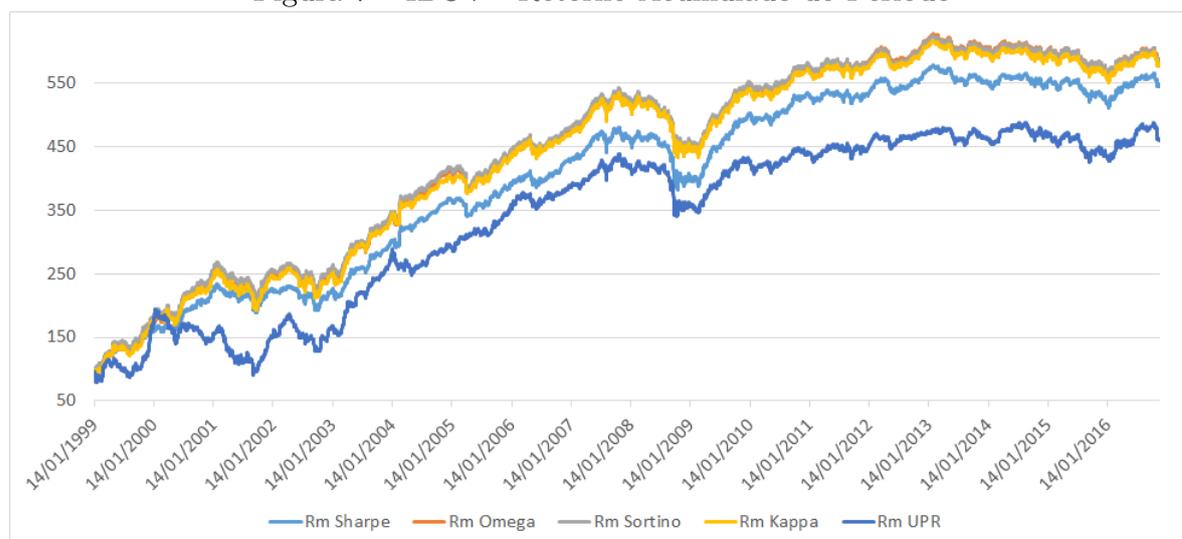
Fonte: Elaboração Própria

Novamente a carteira otimizada por *Upside Potential Ratio* obteve retornos acumulados maiores em 6 dos 18 anos da série, a medida Omega e Sharpe performaram melhor em 4 anos e as demais em 2 anos cada. A medida Omega obteve o maior retorno acumulado ao longo da série, conforme Figura 7.

---

dividendos e/ou, no caso de dissolução da empresa, no reembolso de capital. Não concedem direto a voto em assembleia. Exceção feita à ação da Vale.

Figura 7 – IBOV - Retorno Acumulado do Período



Fonte: Elaboração Própria

Observa-se, no caso brasileiro, um descolamento muito mais acentuado entre o retorno das carteiras otimizadas via Omega, Sortino e Kappa e a otimização Sharpe. Tal comportamento pode ser justificado pela maior assimetria do mercado brasileiro, comparativamente ao americano. As medidas Omega e Sortino novamente apresentaram retornos acumulados bastante semelhantes 585,3% e 585%, respectivamente, seguidas da medida Kappa com 578% de retorno e das medidas Sharpe e UPR, com 545,9% e 461,2%, respectivamente.

Foi adotado a mesma análise da série, quanto à volatilidade do mercado, mas os períodos de maior instabilidade foram distintos, conforme observa-se no Anexo 9. Da mesma forma ocorrida para o Dow Jones, no período da crise do *subprime* americano não foi possível obter retorno em excesso positivo para nenhuma das ações analisadas, inviabilizando a otimização das carteiras. O segundo período de maior oscilação nos mercados ocorreu entre 01/02 e 09/2016. As estatísticas das carteiras otimizadas para o período estão presentes na Tabela 4.

Tabela 4 – Ibov Período de Assimetria (01/02/2016 a 09/06/2016)

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Mean</b>	0.008061	0.008198	0.007913	0.007526	0.007902
<b>SD</b>	0.024406	0.025549	0.024342	0.023544	0.025050
<b>Skewness</b>	0.508682	0.618513	0.638929	0.690709	0.724515
<b>Curtosis</b>	1.129225	0.880349	0.850335	0.814292	0.883473
<b>Mínimo</b>	-0.052048	-0.047562	-0.044976	-0.040381	-0.043982
<b>Máximo</b>	0.097738	0.097735	0.093439	0.089873	0.095426

Fonte: Fonte: Elaboração Própria

O comportamento dos modelos foi bastante semelhante nos dois primeiros momentos. Para os momentos superiores, a medida Sharpe apresentou menores caudas à direita, isto

é, menor concentração valores acima da média e com maior pico, mais leptocúrtica, que as demais medidas.

## 9.2 Previsões

Foram feitas previsões fora da amostra com as carteiras otimizadas com o intuito de investigar se os modelos geram bons resultados preditivos. Como medida de comparação, foram testadas duas carteiras "ingênuas", comumente utilizadas no mercado, mas que não apresentam rigor teórico em sua formulação. A primeira destas, uma carteira *Equally Weighted* com pesos iguais para todos os ativos, a segunda uma carteira ponderada pelo valor de mercado das empresas. Os pesos das ações de cada uma das carteiras foram estimados com base nos dados de 14/01/1999 a 30/08/2016 e para os períodos de alta volatilidade de cada um dos mercados. Os pesos obtidos foram aplicados aos retornos diários de cada uma das ações nos meses subsequentes, 3 meses para o período completo e 1 mês para o período assimétrico. As estatísticas descritivas para o Dow Jones são apresentadas nas Tabelas 8 e 9 do Anexo. Todos os modelos performaram pior, em termos de retorno, do que as carteiras ingênuas. Entretanto, em termos de assimetria e curtose, todas as carteiras otimizadas tiveram melhor desempenho, caudas maiores à direita e "achatamento" mais platicúrtico, exceção feita para a carteira UPR para o período volátil, cuja distribuição dos retornos foi a mais leptocúrtica.

Para o Ibovespa, novamente as carteiras ingênuas apresentaram maior rentabilidade, exceção à medida Kappa que apresentou retorno superior à carteira *Equally Weighted*, 10.24%a.m. contra 9.98%a.m., no período assimétrico. Vale ressaltar ainda o fato da media Omega ter apresentado assimetria positiva enquanto as demais apresentaram assimetria negativa para o período completo.

Os resultados observados com relação à média e variância das previsões são consistentes com a literatura. DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), em um teste realizado com 14 modelos baseados em média e variância verificando o comportamento destes para previsões fora da amostra, observaram que a carteira  $1/n$  supera todos os modelos analisados. Os autores concluíram que, para correção dos erros de especificação dos modelos, seria necessário um número de observações demasiadamente grande, enquanto a carteira ingênuas, por sua vez, mitiga estes erros de especificação pela diversificação.

Não foram realizados testes *H-J distance* para os resultados das previsões, pois os testes GMM e H-J assumem parâmetros estáveis ao longo do tempo, o que não foi observado (vide a próxima seção) e, portanto, estas medidas não são boas para testes fora da amostra, como aponta Hodrick e Zhang (2001).

### 9.3 Teste da Distância H-J

Nesta seção, são apresentados os resultados da investigação empírica entre os modelos com o intuito de avaliá-los quanto à distância Hansen-Jagannathan.

#### 9.3.1 H-J Dow Jones

Foram testadas duas carteiras para o Dow Jones, a primeira com o período completo da série e a segunda com o período assimétrico do mercado, conforme descrito nas seções anteriores. A Tabela 5 apresenta o distanciamento, ou erro de apreçamento de cada um dos modelos.

Tabela 5 – Distância H-J Dow Jones

		<b>DWJ - Período Completo</b>				
		<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>H-J</b>	<b>Distance</b>	3.303784888	3.41494656	3.53275454	4.162063926	3.867541226
		<b>DWJ - Período Assimétrico</b>				
		<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>H-J</b>	<b>Distance</b>	11.887353	13.920966	13.160755	12.370749	9.980618

Fonte: Elaboração Própria

A carteira otimizada pela medida de Sharpe apresentou ligeira vantagem sobre as demais no cômputo do período completo, 3.30 contra 3.41 da medida Omega. Para o período de maior volatilidade, e como havia de se esperar, o erro de especificação do SDF dos modelos foi maior. Tal fato pode ser explicado pela menor quantidade de observações utilizadas na otimização do modelo, bem como pelo fato da grande assimetria do período. A medida UPR apresentou resultado consideravelmente menor que as demais.

#### 9.3.2 H-J Ibovespa

O mesmo procedimento de testes aplicados às carteiras do Dow Jones foram adotados para o mercado brasileiro. Os resultados obtidos foram bastante distintos, conforme pode ser observado na Tabela 6.

Tabela 6 – Distância H-J Ibovespa

<b>IBOV - Período Completo</b>					
	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>H-J Distance</b>	0.292892997	0.167660109	0.152276182	0.170927446	0.119711483
<b>IBOV - Período Assimétrico</b>					
	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>H-J Distance</b>	10.268099	3.855620045	13.402597	8.0095144	8.470552

Fonte: Elaboração Própria

A medida Sharpe, que havia apresentado os menores erros no mercado americano, foi a que obteve maiores erros de especificação para o Brasil. Para o período de alta volatilidade, o modelo só performou melhor do que a carteira de Sortino. As medidas de *Downside Risk*, em geral, apresentaram melhores resultados em comparação ao índice de Sharpe, sendo a medida Omega a de menor distância.

## 10 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou avaliar os modelos de *downside risk* de Sortino e Price (1994), Sortino, Meer e Plantinga (1999), Keating e Shadwick (2002) e Kaplan e Knowles (2004) na construção de carteiras otimizadas para os mercados americano (Dow Jones) e brasileiro (Ibovespa), comparado-as ao CAPM tradicional. Através das otimizações propostas por cada modelo, foram obtidos pesos ótimos por cada uma das ações que foram aplicados à série de retornos diários destas. De posse das séries de retornos das carteiras ótimas sob cada modelo e para cada mercado, estas foram avaliadas quanto a seus momentos estocásticos e, através do teste desenvolvido por Hansen e Jagannathan (1997) de erro de medida dos modelos, os modelos avaliados puderam ser comparados.

Em termos de assimetria e curtose, como já era esperado, os modelos de *downside risk* performaram consideravelmente melhor em comparação ao CAPM. Vale destacar que a medida Omega apresentou maiores retornos acumulados para ambos mercados ao longo das séries históricas. Todos os modelos apresentaram menores distâncias Hansen-Jagannathan para o mercado brasileiro vis-à-vis ao mercado americano. Um resultado relevante desta análise foi o fato do modelo CAPM/Sharpe ter apresentando a menor distância, dentre os modelos testados, para o Dow Jones e a maior para o Ibovespa. No mercado brasileiro, em períodos de grande volatilidade, a medida Omega foi a de melhor performance. Este resultado pode ter sido consequência das assimetrias presentes no mercado acionário brasileiro, maiores comparativamente ao americano, especialmente em momentos de crise.

Apesar de ser tentador, por meio do teste H-J, sugerir que os modelos que obtiveram menores erros de medida sejam melhores, o teste carece de uma caracterização formal para definição estatística das diferenças entre as medidas. Algumas estatísticas comparativas do modelo foram propostos, como, por exemplo, as métricas de ranqueamento dos modelos propostas por Gospodinov, Robotti e Kan (2012), mas nada que seja conclusivo em termos estatísticos.

## REFERÊNCIAS

- ABADIE, J.; CARPENTIER, J. Generalization of the wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints. *Optimization*, Academic Press, New York, v. 37, p. 47, 1969.
- AHN, S. C.; GADAROWSKI, C. Small sample properties of the gmm specification test based on the hansen–jagannathan distance. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 109–132, 2004.
- ANDRADE, F. W. M. de. Alocação de ativos no mercado acionário brasileiro segundo o conceito de downside risk. *REGE Revista de Gestão*, v. 13, n. 2, p. 27–36, 2006.
- ARAÚJO, E. Avaliando três especificações para o fator de desconto estocástico através da fronteira de volatilidade de hansen e jagannathan: Um estudo empírico para o brasil. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2005.
- ARORA, A.; JAGANNATHAN, R.; WANG, Y.-M. Model-based fault detection in powerline networking. In: IEEE. *Parallel and Distributed Processing Symposium., Proceedings International, IPDPS 2002, Abstracts and CD-ROM*. [S.l.], 2001. p. 8–pp.
- ARROW, K. 11 the economic implications of learning by doing. *Readings in the theory of growth: a selection of papers from the 'Review of Economic Studies'*, Springer, p. 131, 1971.
- ARROW, K. J. *Aspects of the theory of risk-bearing*. [S.l.]: Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965.
- ARROW, K. J. *Essays in the theory of risk-bearing*. North-Holland Amsterdam, 1974.
- BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981.
- BASU, S. The relationship between earnings' yield, market value and return for nyse common stocks: Further evidence. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 129–156, 1983.
- BAWA, V. S. On chance constrained programming problems with joint constraints. *Management Science*, INFORMS, v. 19, n. 11, p. 1326–1331, 1973.
- BAWA, V. S. Optimal rules for ordering uncertain prospects. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 2, n. 1, p. 95–121, 1975.
- BAWA, V. S. Research bibliography—stochastic dominance: A research bibliography. *Management Science*, INFORMS, v. 28, n. 6, p. 698–712, 1982.
- BERNOULLI, D. Hydrodynamica. *Dulsecker. Consultable en ligne <http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/displayimage.php>*, 1738.
- BERNOULLI, D. Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 23–36, 1954.
- BERNOULLI, J. *Ars conjectandi*. [S.l.]: Impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.
- BHANDARI, L. C. Debt/equity ratio and expected common stock returns: Empirical evidence. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 507–528, 1988.

- BLACK, F. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *The Journal of Business*, JSTOR, v. 45, n. 3, p. 444–455, 1972.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. B. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor Journals, v. 1, n. 2, p. 7–18, 1991.
- BREEDEN, D. T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 265–296, 1979.
- BREEDEN, D. T.; LITZENBERGER, R. H. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, JSTOR, p. 621–651, 1978.
- BRENNAN, M. J.; WANG, A. W.; XIA, Y. Estimation and test of a simple model of intertemporal capital asset pricing. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 59, n. 4, p. 1743–1776, 2004.
- BROCK, W. A. Asset prices in a production economy. In: *The economics of information and uncertainty*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1982. p. 1–46.
- CAMPBELL, J. Y. Asset pricing at the millennium. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 55, n. 4, p. 1515–1567, 2000.
- CARHART, M. M. On persistence in mutual fund performance. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997.
- CATALÃO, A. B.; YOSHINO, J. A. Fator de desconto estocástico no mercado acionário brasileiro. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, SciELO Brasil, v. 36, n. 3, p. 435–463, 2006.
- CHEN, N.-F.; ROLL, R.; ROSS, S. A. Economic forces and the stock market. *Journal of business*, JSTOR, p. 383–403, 1986.
- CHEN, S.-J.; JORDAN, B. D. Some empirical tests in the arbitrage pricing theory: Macro variables vs. derived factors. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 65–89, 1993.
- COCHRANE, J. Asset pricing, revised edition princeton university press. *Princeton, NJ*, 2005.
- COCHRANE, J. H. *A rehabilitation of stochastic discount factor methodology*. [S.l.], 2001.
- DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009.
- DHRYMES, P. J.; FRIEND, I.; GULTEKIN, N. B. A critical reexamination of the empirical evidence on the arbitrage pricing theory. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 39, n. 2, p. 323–346, 1984.
- DITTMAR, R. F. Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross section of equity returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 57, n. 1, p. 369–403, 2002.

- DUFFIE, D.; ZAME, W. The consumption-based capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1279–1297, 1989.
- DURLAUF, S. N.; BLUME, L. et al. *The new Palgrave dictionary of economics*. [S.l.]: Palgrave Macmillan Basingstoke, 2008. v. 6.
- EKERN, S. Increasing nth degree risk. *Economics Letters*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 329–333, 1980.
- EPSTEIN, L. G.; ZIN, S. E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 99, n. 2, p. 263–286, 1991.
- FAFF, R.; CHAN, H. A multifactor model of gold industry stock returns: evidence from the Australian equity market. *Applied Financial Economics*, Taylor & Francis, v. 8, n. 1, p. 21–28, 1998.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The capital asset pricing model: Theory and evidence. *The Journal of Economic Perspectives*, American Economic Association, v. 18, n. 3, p. 25–46, 2004.
- FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973.
- FRENCH, C. W. The treynor capital asset pricing model. *Journal of Investment Management*, California, v. 1, n. 2, p. 60–72, 2003.
- FRIEND, I.; BLUME, M. E. The demand for risky assets. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 900–922, 1975.
- GOSPODINOV, N.; ROBOTTI, C.; KAN, R. On the hansen-jagannathan distance with a no-arbitrage constraint. 2012.
- HADAR, J.; RUSSELL, W. R. Rules for ordering uncertain prospects. *The American Economic Review*, JSTOR, v. 59, n. 1, p. 25–34, 1969.
- HANOCH, G.; LEVY, H. The efficiency analysis of choices involving risk. *The Review of Economic Studies*, JSTOR, v. 36, n. 3, p. 335–346, 1969.
- HANSEN, L. P.; JAGANNATHAN, R. Restrictions on intertemporal marginal rates of substitution implied by asset returns. *Journal of Political Economy*, v. 99, n. 2, p. 225–62, 1991.
- HANSEN, L. P.; JAGANNATHAN, R. Assessing specification errors in stochastic discount factor models. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 2, p. 557–590, 1997.
- HANSEN, L. P.; SINGLETON, K. J. Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 91, n. 2, p. 249–265, 1983.

- HARLOW, W. V. Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial analysts journal*, JSTOR, p. 28–40, 1991.
- HARVEY, C. R.; LIU, Y.; ZHU, H. ... and the cross-section of expected returns. *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, p. hhv059, 2015.
- HODRICK, R. J.; ZHANG, X. Evaluating the specification errors of asset pricing models. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 62, n. 2, p. 327–376, 2001.
- JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993.
- JENSEN, M. C.; BLACK, F.; SCHOLES, M. S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.
- JUNIOR, F. H. F. D. C.; YOSHINAGA, C. E. Coassimetria, cocurtose e as taxas de retorno das ações: uma análise com dados em painel. *Revista de Administração Mackenzie*, Mackenzie Presbyterian University, v. 13, n. 1, p. 110, 2012.
- KAN, R.; ZHOU, G. A critique of the stochastic discount factor methodology. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 54, n. 4, p. 1221–1248, 1999.
- KAPLAN, P. D.; KNOWLES, J. A. Kappa: A generalized downside risk-adjusted performance measure. *JOURNAL OF PERFORMANCE MEASUREMENT.*, TGS Publishing, v. 8, p. 42–54, 2004.
- KAZEMI, H.; SCHNEEWEIS, T.; GUPTA, B. Omega as a performance measure. *JOURNAL OF PERFORMANCE MEASUREMENT.*, TGS Publishing, v. 8, p. 16–25, 2004.
- KEATING, C.; SHADWICK, W. F. A universal performance measure. *Journal of performance measurement*, v. 6, n. 3, p. 59–84, 2002.
- KLEIBERGEN, F. Testing parameters in gmm without assuming that they are identified. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 73, n. 4, p. 1103–1123, 2005.
- KOTHARI, S. P.; SHANKEN, J.; SLOAN, R. G. Another look at the cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 50, n. 1, p. 185–224, 1995.
- LEROY, S. F.; WERNER, J. *Principles of financial economics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, JSTOR, p. 13–37, 1965.
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets: A reply. *The review of economics and statistics*, JSTOR, p. 222–224, 1969.
- LUCAS, R. E. R. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1429–1445, 1978.

- LUCE, F. B.; JR., J. Q. d. M. O modelo de formação de preços de ativos - (capital asset pricing model) teoria e evidência. *Revista de Administração de Empresas*, scielo, p. 31 – 38, 1979.
- MACHINA, M. J. "expected utility" analysis without the independence axiom. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 277–323, 1982.
- MAMOGHLI, C.; DABOUSSI, S. Performance measurement of hedge funds portfolios in a downside risk framework. 2008.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. [S.l.]: J. Wiley, 1959.
- MEHRA, R. Consumption-based asset pricing models. *Annu. Rev. Financ. Econ.*, Annual Reviews, v. 4, n. 1, p. 385–409, 2012.
- MEHRA, R.; PRESCOTT, E. C. The equity premium: A puzzle. *Journal of monetary Economics*, Elsevier, v. 15, n. 2, p. 145–161, 1985.
- MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 867–887, 1973.
- MILLER, M. H.; SCHOLLES, M. Rates of return in relation to risk: A reexamination of some recent findings. *Studies in the theory of capital markets*, New York: Praeger, v. 23, 1972.
- MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the econometric society*, JSTOR, p. 768–783, 1966.
- NAWROCKI, D. N. A brief history of downside risk measures. *The Journal of Investing*, Institutional Investor Journals, v. 8, n. 3, p. 9–25, 1999.
- PRATT, J. W. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 122–136, 1964.
- ROGERS, P.; SECURATO, J. R. Estudo comparativo no mercado brasileiro do capital asset pricing model (capm), modelo 3-fatores de fama e french e reward beta approach. *RAC-Electronica*, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração-ANPAD, v. 3, n. 1, p. 159–180, 2009.
- ROLL, R. A critique of the asset pricing theory's tests part i: On past and potential testability of the theory. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 4, n. 2, p. 129–176, 1977.
- ROSENBERG, B.; REID, K.; LANSTEIN, R. Persuasive evidence of market inefficiency. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 11, n. 3, p. 9–16, 1985.
- ROSS, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of economic theory*, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976.

- ROTHSCHILD, M.; STIGLITZ, J. E. Increasing risk: I. a definition. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 225–243, 1970.
- RUBINSTEIN, M. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *The Bell Journal of Economics*, JSTOR, p. 407–425, 1976.
- RUBIO, G. An empirical evaluation of the intertemporal capital asset pricing model: the stock market in Spain. *Journal of Business Finance & Accounting*, Wiley Online Library, v. 16, n. 5, p. 729–743, 1989.
- SACOMAN, M. A. R. Otimização de projetos utilizando grg, solver e excel. Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), 2012.
- SCHOR, A.; BONOMO, M.; PEREIRA, P. L. Apt e variáveis macroeconômicas: Um estudo empírico sobre o mercado acionário brasileiro. *Finanças aplicadas ao Brasil*, v. 2, 2002.
- SHANKEN, J. The arbitrage pricing theory: is it testable? *The journal of FINANCE*, Wiley Online Library, v. 37, n. 5, p. 1129–1140, 1982.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- SHARPE, W. F. *Portfolio theory and capital markets*. [S.l.]: McGraw-Hill College, 1970.
- SORTINO, F. A.; MEER, R. v. d.; PLANTINGA, A. The dutch triangle. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 26, n. 1, p. 50–57, 1999.
- SORTINO, F. A.; PRICE, L. N. Performance measurement in a downside risk framework. *the Journal of Investing*, Institutional Investor Journals, v. 3, n. 3, p. 59–64, 1994.
- STATTMAN, D. Book values and stock returns. *The Chicago MBA: A journal of selected papers*, v. 4, n. 1, p. 25–45, 1980.
- STEINBACH, M. C. Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis. *SIAM review*, SIAM, v. 43, n. 1, p. 31–85, 2001.
- STOCK, J. H.; YOGO, M. *Testing for weak instruments in linear IV regression*. [S.l.]: National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA, 2002.
- SUNDARESAN, S. M. Continuous-time methods in finance: A review and an assessment. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 55, n. 4, p. 1569–1622, 2000.
- TREYNOR, J. L. *Market value, time*. [S.l.], 1962.
- TÜTÜNCÜ, R. H.; KOENIG, M. Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 132, n. 1-4, p. 157–187, 2004.
- VON, N.; JOHN; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. [S.l.]: NJ:Princeton university press Princeton, 1944.
- WHITMORE, G. A. Third-degree stochastic dominance. *The American Economic Review*, JSTOR, v. 60, n. 3, p. 457–459, 1970.
- YOLLIN, G. R tools for portfolio optimization. In: *Presentation at R/Finance conference*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 2009.

**ANEXO A – Prova CRRA com  $\gamma = 1$**

Considere  $u(C) = \frac{C^{(1-\gamma)}-1}{(1-\gamma)}$ ,

pode-se avaliar o limite da função quando  $\gamma \rightarrow 1$  por L'Hôpital, uma vez que no limite temos uma indeterminação do tipo  $0^0$ .

então:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\gamma} C^{1-\gamma} - 1}{\frac{d}{d\gamma} 1 - \gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-C^{1-\gamma} \ln(C)}{-1} = \ln(C) \quad (\text{A.1})$$

tomando  $f \equiv C^{1-\gamma}$

para o numerador, aplicando log nos dois lados e utilizando diferenciação implícita:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} (1 - \gamma) \ln(c) \Rightarrow \frac{df}{d\gamma} \quad (\text{A.2})$$

$$= f(-\ln(C)) = -C^{(1-\gamma)} \ln(C) \quad (\text{A.3})$$

## ANEXO B – Pressupostos GMM

O GMM deve atender aos seguintes pressupostos:

Hipótese.1:  $E(Z'_i u_i) = 0$ , onde  $Z_i$  é uma matriz G por L de variáveis instrumentais observadas e  $u_i$  é o termo de erro.

Hipótese.2:  $posto[E(Z'X)] = K \implies posto[E(Z_i g' X_i g)] = K_g$ , onde  $X$  é a matriz de variáveis explicativas e  $K$  é o número de equações do sistema.

Sob as hipóteses 1 e 2 o estimador não é o melhor possível. Para obter um estimador melhor, é preciso escolher uma matriz de ponderação  $W$ . O estimador GMM é o estimador que resolve:

$$\min[\sum Z'_i (y_i - X_i b)]' \hat{W} [\sum Z'_i (y_i - X_i b)] \quad (\text{B.1})$$

onde  $y_i$  é a variável dependente de cada observação. A terceira proposição é dada por:

Hipótese.3:  $\hat{W} \rightarrow W$  quando  $N \rightarrow \infty$

Sob as hipóteses 1-3 mantém-se a convergência de  $W$  e isso garante que o beta estimado irá convergir em probabilidade para o beta verdadeiro. Com isso, é preciso escolher a matriz de ponderação ótima,  $W$ , sob a Hipótese.4:

Hipótese.4:  $W = \Lambda^{-1}$ , onde  $\Lambda = Var(Z'_i u_i)$

Sendo assim, os pressupostos de 1-4 garantem que o  $\beta$  do GMM seja o estimador mais eficiente entre todos os estimadores de  $\beta$  na forma que utiliza a matriz de ponderação  $W$ .

## ANEXO C – Ações Dow Jones

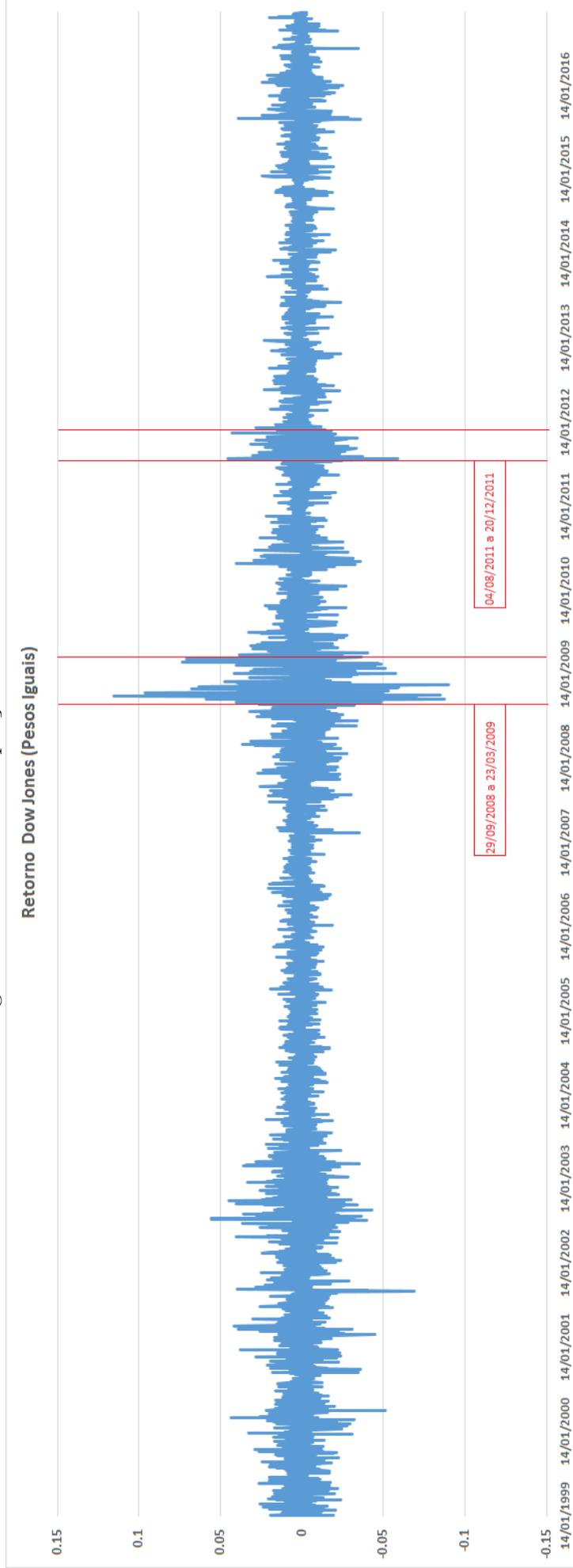
Tabela 7 – Valor de Mercado das Ações do Dow Jones  
Os valores de mercado das empresas estão em milhares de dólares.

Índice	Nome	Código	Valor Mercado (30 Nov 16)	Part. por Val. Mercado
1	3M	MMM	103,295,840	0.018637799
2	American Express	AXP	65,934,998	0.011896735
3	Apple	AAPL	589,327,233	0.106333058
4	Boeing	BA	92,920,498	0.016765763
5	Caterpillar	CAT	55,909,536	0.010087828
6	Chevron	CVX	210,599,545	0.037998742
7	Cisco	CSCO	149,689,211	0.027008614
8	Coca-Cola	KO	174,027,912	0.031400076
9	Dupont E I de Nemours and Company	DD	63,992,265	0.011546205
10	Exxon Mobil	XOM	362,006,327	0.06531726
11	General Electric	GE	272,114,956	0.049098046
12	Goldman Sachs	GS	87,200,497	0.015733696
13	Home Depot	HD	157,630,030	0.028441386
14	Intel	INTC	164,443,300	0.029670713
15	IBM	IBM	154,247,625	0.027831094
16	Johnson & Johnson	JNJ	302,795,181	0.054633718
17	JPMorgan Chase	JPM	286,869,447	0.051760217
18	McDonald's	MCD	99,047,011	0.017871178
19	Merck	MRK	168,709,245	0.030440423
20	Microsoft	MSFT	468,542,621	0.084539738
21	Nike	NKE	83,388,291	0.015045855
22	Pfizer	PFE	195,036,934	0.035190761
23	Procter & Gamble	PG	220,662,344	0.039814386
24	Travelers Companies Inc	TRV	32,198,061	0.005809537
25	United Technologies	UTX	88,697,261	0.016003759
26	United Health	UNH	150,691,544	0.027189466
27	Verizon	VZ	203,424,034	0.036704056
28	Visa	V	164,684,554	0.029714243
29	Wal-Mart	WMT	216,444,793	0.039053408
30	Disney	DIS	157,745,613	0.02846224

Fonte: Desenvolvido com base em Economática.

## ANEXO D – Dow Jones Série Completa

Figura 8 – Gráfico de Dispersão DWJ



Fonte: Elaboração Própria

## ANEXO E – Estatística descritiva Carteiras Dow Jones

Tabela 8 – DWJ Previsão *out of sample* de 01/09 - 30/11/2016

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>	<b>EW</b>	<b>MV</b>
<b>Mean</b>	0.000240	0.000183	0.000181	0.000022	0.000071	0.000405	0.000677
<b>SD</b>	0.007663	0.007209	0.007111	0.006878	0.007516	0.006545	0.006727
<b>Skewness</b>	0.253608	0.260421	0.273161	0.216914	-0.013670	-0.123621	-0.236057
<b>Curtosis</b>	0.535847	0.798488	0.884484	1.016364	1.100944	2.514722	2.769270
<b>Mínimo</b>	-0.017428	-0.017028	-0.016994	-0.016877	-0.020345	-0.021798	-0.022676
<b>Máximo</b>	0.022823	0.021986	0.021701	0.021102	0.021343	0.020323	0.021279
<b>Ret(M)</b>	0.722%	0.550%	0.544%	0.067%	0.214%	1.223%	2.051%
<b>Ret(A)</b>	9.014%	6.808%	6.722%	0.812%	2.598%	15.707%	27.591%

Fonte: Elaboração Própria

Tabela 9 – DWJ Previsão *out of sample* de 21/12/2011 - 20/01/2012

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>	<b>EW</b>	<b>MV</b>
<b>Mean</b>	0.001810	0.001775	0.001856	0.001912	0.002558	0.003057	0.003096
<b>SD</b>	0.005135	0.004809	0.004957	0.005478	0.007151	0.006561	0.006469
<b>Skewness</b>	0.308226	0.465868	0.354632	0.178015	-0.178006	-0.197050	-0.199154
<b>Curtosis</b>	0.442955	0.569803	0.557171	0.395388	1.723188	0.642375	0.581569
<b>Mínimo</b>	-0.008596	-0.007677	-0.008415	-0.009649	-0.012601	-0.011947	-0.011578
<b>Máximo</b>	0.012321	0.012433	0.011888	0.012750	0.019298	0.016534	0.016549
<b>Ret(M)</b>	5.580%	5.469%	5.726%	5.904%	7.976%	9.605%	9.733%
<b>Ret(A)</b>	57.794%	56.400%	59.631%	61.912%	90.530%	116.068%	118.182%

Fonte: Elaboração Própria

## ANEXO F – Estatísticas de teste DWJ

Tabela 10 – Teste de Normalidade Jarque Bera\*

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Jarque Bera</b>	54337.30	52032.76	46341.92	23810.27	10119.62
<b>p-valor</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fonte: Fonte: Elaboração Própria

\*A Hipótese nula do teste é de não normalidade da distribuição contra a Hipótese alternativa de normalidade. Rejeita-se a hipótese de normalidade em todos os modelos ao nível de significância de 1%

Tabela 11 – GMM DOW JONES

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Coefficiente</b>	491.2199	542.5032	536.8109	547.8321	574.819
<b>Estatística t</b>	7.352917	7.496732	7.564061	7.809946	7.983033
<b>Prob</b>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fonte: Elaboração Própria

\*Os coeficientes são significativos ao nível de 1% de significância.

Tabela 12 – Teste das Variáveis Instrumentais - DOW JONES\*

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Cragg-Donald F-statistic</b>	554.2386	561.2711	583.328	668.4283	633.251
<b>Stock-Yugo (Viés Relativo)</b>					
5%			13.91		
10%			9.08		
20%			6.46		
30%			5.39		

Fonte: Elaboração Própria

\*A Hipótese nula do teste é de que os instrumentos são fracos. Portanto, deseja-se rejeitar a  $H_0$ . Para tanto é necessário que os valores do viés relativo sejam menores que a estatística do teste. (STOCK; YOGO, 2002)

## ANEXO G – Ações Bovespa

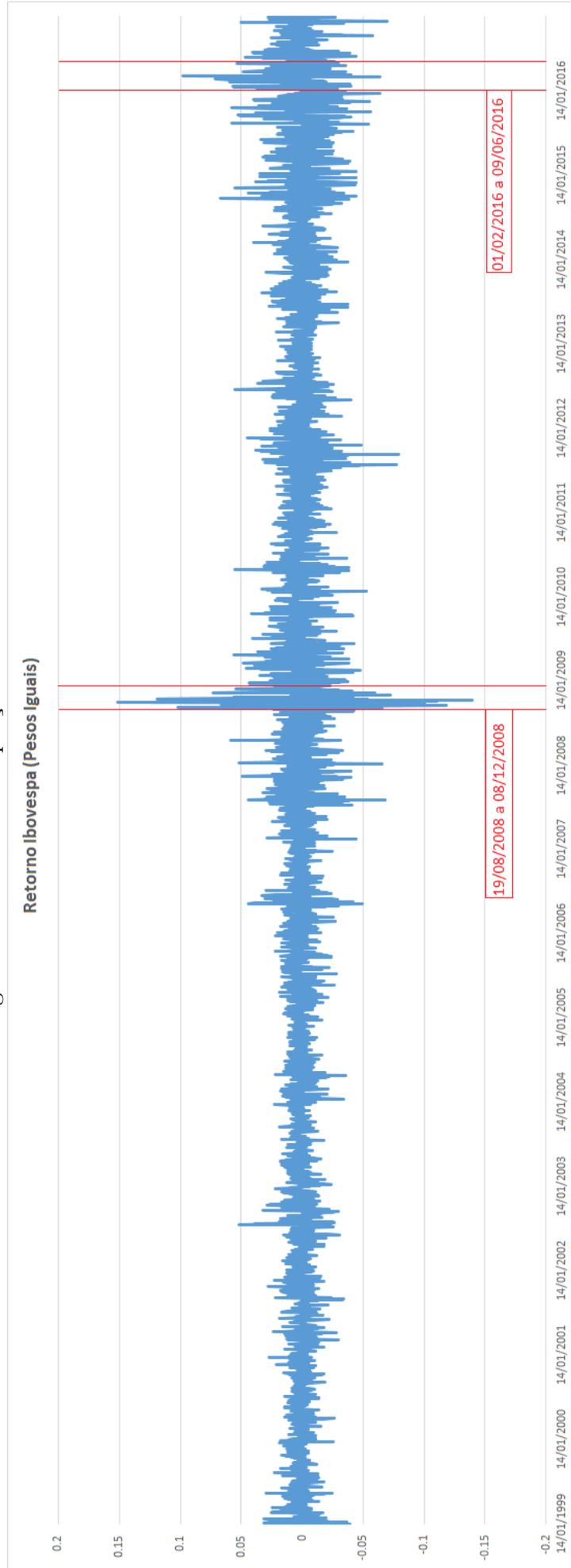
Tabela 13 – Valor de Mercado das Ações do Bovespa  
Os valores de mercado das empresas estão em milhares de dólares.

Índice	Nome	Código	Valor Mercado (30 Nov 16)	Part. por Val. Mercado
1	Ambev S/A	ABEV3	79,267,530	0.10186
2	BBSeguridade	BBSE3	16,629,081	0.02137
3	BmfBovespa	BVMF3	8,740,603	0.01123
4	BR Malls Par	BRML3	1,926,156	0.00248
5	Bradesco	BBDC3	47,953,167	0.06162
6	Bradesco	BBDC4	47,953,167	0.06162
7	Bradespar	BRAP4	1,444,412	0.00186
8	Brasil	BBAS3	23,365,440	0.03002
9	Braskem	BRKM5	6,104,166	0.00784
10	BRF SA	BRFS3	12,149,173	0.01561
11	CCR SA	CCRO3	7,646,182	0.00983
12	Cemig	CMIG4	2,938,881	0.00378
13	Cetip	CTIP3	3,396,876	0.00436
14	Cielo	CIEL3	19,732,561	0.02536
15	Cosan	CSAN3	4,724,789	0.00607
16	CPFL Energia	CPFE3	7,390,048	0.00950
17	Cyrela Realt	CYRE3	1,048,217	0.00135
18	Ecorodovias	ECOR3	1,294,221	0.00166
19	Embraer	EMBR3	3,583,139	0.00460
20	Energias BR	ENBR3	2,530,220	0.00325
21	Engie Brasil	EGIE3	6,889,277	0.00885
22	Equatorial	EQTL3	3,070,186	0.00395
23	Estacio Part	ESTC3	1,523,514	0.00196
24	Fibria	FIBR3	5,050,836	0.00649
25	Gerdau	GGBR4	6,124,521	0.00787
26	Gerdau Met	GOAU4	1,498,043	0.00192
27	Hypermarcas	HYPE3	4,816,781	0.00619
28	Itausa	ITSA4	18,466,217	0.02373
29	ItauUnibanco	ITUB4	63,345,328	0.08140
30	JBS	JBSS3	7,810,506	0.01004
31	Klabin S/A	KLBN11	5,463,117	0.00702
32	Kroton	KROT3	6,899,512	0.00887
33	Localiza	RENT3	2,125,232	0.00273
34	Lojas Americ	LAME4	6,263,087	0.00805
35	Lojas Renner	LREN3	4,250,551	0.00546
36	Marfrig	MRFG3	999,105	0.00128
37	MRV	MRVE3	1,501,742	0.00193
38	Multiplan	MULT3	3,229,064	0.00415
39	Natura	NATU3	3,319,078	0.00426
40	P.Acucar-Cbd	PCAR4	4,268,306	0.00548
41	Petrobras	PETR3	66,857,483	0.08591
42	Petrobras	PETRA	66,857,483	0.08591
43	Qualicorp	QUAL3	1,488,511	0.00191
44	RaiaDrogasil	RADL3	6,252,815	0.00803
45	Rumo Log	RUMO3	2,507,181	0.00322
46	Sabesp	SBSP3	6,028,780	0.00775
47	Santander BR	SANB11	30,553,054	0.03926
48	Sid Nacional	CSNA3	4,966,339	0.00638
49	Smiles	SMLE3	1,741,403	0.00224
50	Suzano Papel	SUZB5	4,124,310	0.00530
51	Telef Brasil	VIVT4	21,041,939	0.02704
52	Tim Part S/A	TIMP3	5,913,965	0.00760
53	Ultrapar	UGPA3	11,051,967	0.01420
54	Usiminas	USIM5	2,467,167	0.00317
55	Vale	VALE3	41,117,767	0.05284
56	Vale	VALE5	41,117,767	0.05284
57	Weg	WEGE3	7,395,132	0.00950

Fonte: Desenvolvido com base em Economática

## ANEXO H – Ibovespa Série Completa

Figura 9 – Gráfico de Dispersão IBoV



Fonte: Elaboração Própria.

## ANEXO I – Estatísticas descritivas Carteiras Bovespa

Tabela 14 – IBOV Previsão Fora da Amostra de 01/09 - 30/11/2016

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>	<b>EW</b>	<b>MV</b>
<b>Mean</b>	-0.002110	-0.002436	-0.002395	-0.001698	-0.003191	0.000121	0.001020
<b>SD</b>	0.018569	0.018361	0.018250	0.023946	0.024452	0.020747	0.023074
<b>Skewness</b>	-1.380068	0.018361	-1.291954	-0.777698	-1.893564	-1.139613	-1.071378
<b>Curtosis</b>	4.569078	4.428861	4.590522	1.421819	6.347520	2.566588	2.088810
<b>Mínimo</b>	-0.081037	-0.080277	-0.080414	-0.078206	-0.108276	-0.070074	-0.075182
<b>Máximo</b>	0.032310	0.033769	0.032005	0.052142	0.039300	0.050248	0.054986
<b>Ret(M)</b>	-6.134%	-7.047%	-6.932%	-4.966%	-9.130%	0.364%	3.106%
<b>Ret(A)</b>	-41.244%	-45.871%	-45.310%	-34.808%	-55.254%	3.102%	29.299%

Fonte: Elaboração Própria

Tabela 15 – IBOV Previsão Fora da Amostra de 10/06 a 11/07/2016

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>	<b>EW</b>	<b>MV</b>
<b>Mean</b>	0.001982	0.000929	0.002015	0.003248	0.002234	0.003169	0.003742
<b>SD</b>	0.026021	0.028177	0.026633	0.023920	0.027471	0.024932	0.028048
<b>Skewness</b>	0.273535	0.304117	0.203651	-0.077161	0.206845	-0.326272	-0.354577
<b>Curtosis</b>	-0.696412	-0.792592	-0.782824	0.091766	-0.801840	-0.700991	-0.689597
<b>Mínimo</b>	0.051354	0.055607	0.052464	0.054116	0.052996	0.041078	0.046126
<b>Máximo</b>	0.042798	0.037258	0.134398	0.415430	0.019993	0.043043	0.015421
<b>Ret(M)</b>	6.125%	2.827%	6.231%	10.235%	6.932%	9.974%	11.880%
<b>Ret(A)</b>	64.771%	26.391%	66.160%	126.716%	75.589%	122.242%	156.755%

Fonte: Elaboração Própria

## ANEXO J – Estatísticas de Teste IBOV

Tabela 16 – Teste de Normalidade Jarque Bera\*

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Jarque Bera</b>	14026.37	13187.66	12810.77	12046.74	2920.351
<b>p-valor</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fonte: Fonte: Elaboração Própria

\*A Hipótese nula do teste é de não normalidade da distribuição contra a Hipótese alternativa de normalidade. Rejeita-se a hipótese de normalidade em todos os modelos ao nível de significância de 1%

Tabela 17 – GMM IBOVESPA\*

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Coefficiente</b>	24.7882	270.158	207.4694	241.9914	803.3329
<b>Estatística t</b>	3.859576	5.257178	5.488524	5.305907	4.400565
<b>Prob</b>	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fonte: Elaboração Própria

\*Os coeficientes são significativos ao nível de 1% de significância.

Tabela 18 – Teste das Variáveis Instrumentais - IBOVESPA\*

	<b>Sharpe</b>	<b>Omega</b>	<b>Sortino</b>	<b>Kappa</b>	<b>UPR</b>
<b>Cragg-Donald F-statistic</b>	446.3392	26.15588	33.95447	31.37492	7.171215
<b>Stock-Yugo (Viés Relativo)</b>					
5%				13.91	
10%				9.08	
20%				6.46	
30%				5.39	

Fonte: Elaboração Própria

\*A Hipótese nula do teste é de que os instrumentos são fracos. Portanto, deseja-se rejeitar a  $H_0$ . Para tanto é necessário que os valores do viés relativo sejam menores que a estatística do teste. (STOCK; YOGO, 2002)